Directorio de Profesores del Curso: TOPICOS SELECTOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

1. M. en C. Germán Sergio Monroy Alvarado (Coordinador)
Jefe del Departamento de Sistemas
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana
Ave. San Pablo No. 180 Edificio R oficina 245 2° Piso
México 16, D. F.
382 50 00 Ext. 215

2. M. en I. Eduardo de la Fuente Rocha
Director de Estudios y Proyectos
Dirección General de Planeación
Secretaría de Educación Pública
Añil No. 571-9° Piso
Col. Granjas México
Delegación Iztacalco
C.P. 08400 México, D.F.
657 26 57

3. M. en C. Ernesto Mercado Ramírez
Profesor Titular
Ingeniería Biomédica
Edificio "T" 2° Piso
U A M
Unidad Iztapalapa
México 13, D.F.
686 03 22 Ext. 221

4. M. en I. Manuel de los Reyes García Martínez
Profesor
Departamento de Sistemas
Area de Análisis de Decisiones e Investigación de Operaciones
U N A M.
Unidad Azcapotzalco
México 16, D.F.
382 50 00 Ext. 216

5. Dr. Rafael López Bracho
Profesor
Departamento de Sistemas
Area de Análisis de Decisiones e Investigación de Operaciones
U N A M
Unidad Azcapotzalco
México 16, D.F.
382 50 00 Ext. 215 231

6. Dr. Sergio Fuentes Maya
Jefe de Matemáticas
División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería
U N A M
México 20, D.F.
550 52 15 Ext: 4477

TOPICOS SELECTOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES
1982

Fecha	Tema	Horario	Profesor
1° y 2 de Marzo	ANALISIS DE DECISIONES La incertidumbre Decisiones con y sin experimentación Arvoles de decisión Función de utilidad Aplicaciones	17 a 21 h c/día	M. en C. Ernesto Mercado
Marzo 3 y 4	SIMULACION Metodología Generación de números aleatorios Ejemplos discretos Lenguajes Principios de dinámica industrial Principios de juegos de simulación Aplicaciones	17 a 21 h c/día	M. en I. Manuel de los Reyes García
Marzo 5 [illegible] 9	METODOS ENTERO-HEURISTICOS Y COMBINATORIOS Formulación de problemas enteros Métodos de bifurcación-acotación Aplicaciones	17 a 21 h c/día	M. en I. José Muñoz Delgado
Marzo 10 y 11	PROGRAMACION CON METAS MULTIPLES Formulación de problemas Métodos de solución Aplicaciones	17 a 21 h 17 a 19 h	M. en I. Eduardo de la Fuente
Marzo 11 y 12	OPTIMIZACION DINAMICA Descomposición Función recursiva Diferentes estructuras de programación Dinámica Aplicaciones.	19 a 21 h 17 a 21 h	Dr. Rafael López Bracho M. en I. José Muñoz Delgado.
Marzo 15 y 16	PROCESOS MARKOVIANOS DE DECISION Principios básicos de una cadena de markov Procesos de decisión Métodos de decisión con y sin factor de descuento Aplicaciones.	17 a 21 h 17 a 19 h	Dr. Sergio Fuentes Maya

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: TOPICOS SELECTOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

FECHA: Del 1° al 16 de marzo de 1982.

CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
1. M. en I. Eduardo de la Fuente					
2. Dr. Sergio Fuentes Maya					
3. M. en I. Manuel de Jos Reyes García					
4. Dr. Rafael López Bracho					
5. M. en I. José Muñoz Delgado					
6. M. en C. Ernesto Mercado					
7.					
8.					
9.					
ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10					

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
Análisis de Decisiones					
Simulación					
Métodos entero-heurísticos y combinatorios					
Programación con metas múltiples					
Optimización dinámica					
Procesos Markovianos de decisión,					
ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10					

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

____

____

____

¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario - más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIERCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 a 18 H.	O T R O

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

10. Otras sugerencias:

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

TOPICOS SELECTOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

SIMULACION DIGITAL

Manuel de los Reyes García M.
José C. Romero Cortés
José Luis A. Sánchez Limón
Departamento de Sistemas, UAM

MARZO, 1982

Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

SIMULACION DIGITAL

Manuel de los Reyes García M.

José C. Romero Cortés.

José Luis A. Sánchez Limón.

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA UNIDAD
AZCAPOTZALCO
MEXICO 16, D.F.

I N D I C E

SIMULACION DIGITAL

1. Introducción

En este artículo se pretende dar una breve descripción de los diferentes tipos de modelos que son usados para la solución de problemas de simulación, haciendo una exposición sobre los elementos que intervienen en la simulación digital. Se describen brevemente los principales lenguajes de computadora existentes, y se concluye con una descripción de problemas tanto de ingeniería como de otros campos que han sido o puedan ser resueltos mediante la simulación.

Los modelos matemáticos han sido usados en la ingeniería para fines de análisis y diseño desde hace muchos años. Por ejemplo, en el problema de analizar y predecir las deformaciones de una viga sujeta a cargas externas, por medio de hipótesis simplificatorias e idelizaciones, se establece un modelo que permite calcular los elementos deseados. La fórmula de la escuadría es un modelo muy conocido en la ingeniería civil.

En el caso de sistemas más complejos, sobre todo tipo dinámico (que varían con el tiempo), la solución analítica del modelo establecido no es ya sencilla y en algunos casos ni siquiera posible. Con el advenimiento de las computadoras electrónicas de alta velocidad se han desarrollado técnicas que permiten hacer simulaciones del comportamiento de los sistemas con relativa facilidad. Se han desarrollado así mismo lenguajes de computadora, como el SIMSCRIPT, GPSS, GASP, DYNAMO, y otros, que permiten, una vez establecido el modelo, resolverlo y obtener resultados con facilidad y rapidez.

Debe considerarse que la simulación digital es una técnica aún nueva en la ingeniería que puede tener una infinidad de aplicaciones, estando sólo limitada por la imaginación de los usuarios.

2. Sistemas y Modelos

Existen tantas definiciones de sistema como libros sobre el tema que se han escrito, cada una de ellas dando énfasis a un aspecto diferente. Creemos que para nuestro fin, la que más se ajusta es la dada por Gordon (ref.3): "Un sistema es una agregación o ensamblaje de elementos, unidos en una interacción o interdependencia".

Se llaman sistemas continuos a aquéllos en que los cambios de estado de los elementos del sistema son continuos en el tiempo. En los sistemas discretos, dichos cambios ocurren en tiempos determinados. Para fines de estudio, los sistemas continuos se pueden simplificar, discretizándolos y estudiando los cambios a través de una serie de pasos discretos.

Con el objeto de poder estudiar el comportamiento de un sistema, el primer paso que debe darse es representado por medio de un modelo. Los modelos no deben ser tan complejos ni difíciles como el sistema represen

tado, pues no tendrían entonces ninguna ventaja.

No existen modelos únicos para representar la realidad. De hecho el modelo depende de la persona que lo elabore, o de los aspectos que interesen estudiar del sistema. La calidad del modelo depende de su simplicidad y de su apego a la realidad; para lograrla se requiere imaginación y creatividad en el grupo que lo desarrolla, no es posible preparar un manual para construcción de modelos, es más, de existir ese manual sería contraproducente ya que restringiría la creatividad de los que lo usarán. Ackoff (ref. 1) ha establecido una serie de patrones, basados en experiencias anteriores que permiten dar ideas básicas para el establecimiento de modelos. Existen varios tipos de modelos, a saber:

a. Modelos simbólicos

Estos modelos usan letras, números y otros tipos de símbolos para representar variables y las relaciones entre ellas. Toman la forma de relaciones matemáticas, por lo cual se acostumbra llamarlos modelos matemáticos. Como ejemplo de estos modelos tenemos la Ley gravitacional de Newton, la fórmula de la escuadría, relaciones hidráulicas, etc.

b. Modelos icónicos

En estos modelos las propiedades importantes se representan por sí mismas, generalmente con un cambio de escala, es decir son imágenes del sistema real, pues tienen su misma apariencia. Como ejemplo de estos modelos tenemos los túneles de viento, los aviones a escala estudiados en aquéllos, los modelos del sistema solar usados en los planetarios, etc.

c. Modelos análogos

En estos modelos, una serie de propiedades son usadas para representar a otros conjuntos de propiedades. Un sistema hidráulico puede ser usado como analogía de un sistema de tráfico de automóviles; también es conocida la analogía entre sistemas eléctricos e hidráulicos.

d. Modelos lógicos

Los modelos de este tipo son dados por elementos de tipo lógico que al seguir una secuencia dan por resultado una representación del sistema. Los diagramas de flujo y los programas de computadora son ejemplos de este tipo de modelos.

Como se definirá más adelante, la simulación de tipo digital, de la cual se habla en este artículo, maneja exclusivamente modelos de tipo simbólico o matemático. Los modelos pueden a su vez, de acuerdo con sus características, subdividirse en varias clases, las cuales no son mutuamente exclusivas (ref.11)

i Modelos determinísticos

En este tipo de modelos el resultado queda descrito completamente en términos de los datos de entrada, es decir, las relaciones están perfectamente establecidas entre las variables y ninguna de ellas es aleatoria. Su solución más adecuada es por medio de técnicas analíticas. Un ejemplo, es el cálculo tradicional de deformaciones en una viga, debidas a cargas determinadas.

ii Modelos estocásticos

En estos modelos, al menos una de las características del sistema esta dada por una función de probabilidad. En este caso el uso de técnicas analíticas es muy complejo, requiriéndose otras técnicas, como la simulación, para su solución. Un ejemplo se encuentra en el funcionamiento de vasos de presas, donde el escurrimiento de los ríos es una variable aleatoria.

iii. Modelos estáticos

Los modelos de esta clase son aquéllos en los cuales la variable tiempo no interviene explícitamente. Por ejemplo, casi todas las aplicaciones de programación lineal y no lineal caen en esta categoría. La mayor parte de los modelos estáticos son a su vez determinísticos, por lo que pueden resolverse con técnicas analíticas.

iv. Modelos dinámicos

En estos modelos se manejan iteraciones en el tiempo. Pueden resolverse por métodos analíticos en algunos casos sencillos, pero en general se resuelven por algún sistema numérico como puede ser la simulación digital. Los fenómenos económicos y demográficos requieren generalmente, modelos de este tipo.

3. Simulación digital.

De acuerdo con Naylor (ref.11) podemos definir simulación digital como: "Una técnica numérica para llevar a cabo experimentos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de un sistema, a lo largo de un cierto período de tiempo".

De acuerdo con la definición anterior estaremos tratando con modelos matemáticos, dinámicos y generalmente estocásticos, de sistemas discretos. Se recalca, por su importancia, que la simulación no proporciona soluciones analíticas de problemas, sino que se trata de seguir el comportamiento numérico de una serie de elementos representativos del sistema a lo largo del tiempo, estando sus iteraciones perfectamente definidas.

En general podemos decir que la simulación usa el modelo matemático como un laboratorio de experimentación con el cual va a obtener resultados, los cuales puede utilizar para diferentes objetivos. La forma de efectuar

estos estudios depende de la naturaleza de los mismos. En general los estudios de los sistemas son de tres tipos: análisis, diseño y postulación (ref.3). El uso de la simulación para cada uno de ellos puede resumirse como sigue:

a. Análisis de sistemas

Estudia sobre el modelo el comportamiento de un sistema existente o propuesto. La situación ideal sería hacer el análisis sobre el sistema real, lo cual en la mayoría de los casos no es posible. Razón por lo cual la simulación da una herramienta adecuada para investigar el comportamiento del sistema.

b. Diseño de sistemas

El objetivo es producir un sistema que cumpla con ciertas especificaciones. El diseñador propone unos ciertos elementos constructivos y estudia su comportamiento por medio de la simulación. Si este es adecuado y cumple con las restricciones y especificaciones propuestas, se acepta. En caso contrario se corrige y vuelve a someterse a imulación.

c. Postulación de sistemas

Se usa principalmente en las ciencias sociales, económicas y políticas nde se conoce el comportamiento del sistema, pero no los procesos que producen ese comportamiento. Se hacen hipótesis y se establece un modelo, tratando en este caso de ajustarlo a la realidad por medio de parámetros. Una vez hecho, se puede entender mejor el funcionamiento del sistema, predecir eventos y formular hipótesis más refinadas.

Podemos resumir lo anterior diciendo que la simulación es una técnica que nos permite conocer el funcionamiento de un sistema, sin tener que construirlo a la vez que nos da oportunidad de probar diferentes soluciones y adoptar la más conveniente. En caso de sistemas ya existentes, nos permite entenderlos mejor y proponer cambios a los mismos, sin necesidad de experimentar directamente en ellos, lo cual es molesto, toso e inseguro.

A través de la simulación se pueden estudiar los efectos de cambios en el sistema, cambiando los elementos e interacciones en el modelo. Puede además usarse como un dispositivo pedagógico para la enseñanza tanto a estudiantes como a personal de operación, de los efectos de los diferentes elementos en el sistema y las consecuencias de las decisiones se toman sobre la operación del mismo.

La simulación puede servir para experimentar sobre nuevas situaciones acerca de las cuales conocemos poco y nos permite predecir lo que puede pasar. Al introducir nuevos componentes al sistema, nos puede anticipar sobre posibles problemas que surjan en la operación real del mismo.

Para el caso de los eventos discretos, la técnica de simulación maneja modelos cuyas entidades interactúan entre sí en puntos discretos de tiempo y no continuamente. Se llaman entidades a los objetos cuyo comportamiento interesa en el sistema, llamándose atributos a las propiedades que pueden tener. Las actividades son los procesos que causan los cambios en el sistema, tomando tiempo en que las actividades empiezan o cesan. El estado del sistema es una descripción de las entidades, atributos y actividades en un momento dado. La simulación lo que trata es de seguir los cambios de estados a lo largo del tiempo.

En el caso de eventos continuos, la técnica de simulación maneja modelos cuyas actividades predominantes causan cambios suaves en los atributos de las entidades del sistema. Cuando un sistema continuo es modelado matemáticamente, las variables del modelo que representan los atributos son controlados por funciones continuas. En general, podemos decir que en sistemas continuos, las relaciones describen las tasas de cambio de los atributos, de tal manera que el modelo resultante consiste de ecuaciones diferenciales. Los modelos de ecuaciones diferenciales simples tienen una o más ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, y es posible resolver el modelo sin necesidad de auxiliarse en la simulación. Los métodos de simulación aplicados a modelos continuos se emplean primero a modelos donde las ecuaciones diferenciales son lineales y tienen coeficientes constantes para posteriormente generalizarlos a ecuaciones más complejas.

Existen dos tipos de eventos, los endógenos y los exógenos. Los primeros son aquéllos generados por el modelo en sí, de acuerdo con actividades previas. Los eventos exógenos son los estímulos al modelo que provienen del mundo exterior. El límite entre ese "mundo exterior" y el sistema depende del modelo utilizado y los fines del mismo, ya que en algunos casos los elementos pueden considerarse como externos y en otros como parte del sistema.

4. Pasos a seguir en la solución del problema de simulación.

La aplicación de la simulación a diferentes tipos de estudios, hacen necesario establecer una cierta secuencia lógica de pasos a seguir en la solución del problema.

I. Definición del problema

Aunque parece obvio, para encontrar la solución de un problema, lo primero que debemos hacer es tratar de establecer claramente cuál es el problema que se trata de resolver y establecer los objetivos del estudio.

II. Planeación del estudio

Una vez definido lo que se quiere obtener, es conveniente establecer un plan detallado sobre la amplitud del estudio, limitar en tiempo y en extensión partes constitutivas del mismo, con objeto de estable-

cer un plan previo que debe seguirse y evitar concentrarse en unos aspectos más que en otros. Una falla común en problemas de simulación, es que se pierde el contacto con el problema real y se pretende sacar a lo largo del estudio más información de la que puede obtenerse de los datos disponibles.

iii. Revisión y obtención

Es conveniente ver con que datos se cuenta, y su confiabilidad. En caso de que no se tenga información suficiente, es necesario establecer los medios para recolectar y procesar información, que sea usada como dato para el estudio.

iv. Formulación y evaluación del modelo matemático

Debe establecer la estructura del modelo a ser usado, especificando sus componentes, sus variables, parámetros y sus relaciones funcionales. Según lo antes expuesto el modelo debe enfatizar las partes del sistema que se quieran estudiar. Los parámetros deben establecerse de acuerdo con los datos disponibles. Las variables representativas deben escogerse adecuadamente, y establecer las relaciones entre ellas lo más sencillo posible, con objeto de no complicar demasiado el modelo. Debe tenerse en mente la facilidad de programación y eficiencia de la solución con la computadora. Claro está, que en ningún momento debe sobresimplificarse el modelo y ya no representar al sistema real en forma adecuada. Una vez establecido el modelo es conveniente revisarlo detenidamente con objeto de evaluarlo, ver su potencialidad y estar seguros que representa al sistema real y puede ser usado para los experimentos para los que fue diseñado.

v. Formulación del programa de computadora

Una vez establecido el modelo, debe escogerse el lenguaje de computadora que se utilizará para la solución, ya que ésta depende mucho del lenguaje escogido. Más adelante se hablará sobre algunos de los métodos de programación existentes. En donde sea posible, se escogerá el lenguaje más adecuado y en otros se usará el disponible. Como en todo caso de programación de computadoras, deberá hacerse un diagrama de flujo, codificación y prueba del programa. Estas pruebas deben hacerse con objeto de que el programa represente el modelo propuesto.

vi. Validación

Este es uno de los pasos más complejos, ya que requiere un gran conocimiento del problema simulado, y mucho juicio. Básicamente pueden hacerse dos pruebas para validar un modelo. Primero, estudiar qué tanto se parecen los valores simulados de variables endógenas a los datos históricos reales, si es que existen. Segundo, observar qué tan exactas son las predicciones del modelo respecto al sis-

tema real, es decir, si dan valores lógicos. Claro está que además pueden establecerse todas las pruebas estadísticas clásicas.

vii. Diseño de experimentos

Con objeto de cumplir con los objetivos del estudio, debemos de establecer los experimentos que se harán con el modelo, tomando en cuenta el costo del uso de la computadora. Es común que si no se tiene un diseño previo de los experimentos a efectuar, el usuario acaba con una gran cantidad de información obtenida sin planeación y sin saber qué hacer en ella.

viii. Ejecución de la simulación y análisis de resultados

Una vez que se tiene el modelo, el programa y los experimentos hay que diseñarlos utilizando la computadora. Las respuestas obtenidas, si los objetivos fueron claramente trazados, contribuirán a entender mejor el sistema real y a tomar decisiones sobre el mismo. Los resultados finales pueden tabularse o graficarse.

Lenguajes de computadora para simulación

El hecho de que la simulación digital requiere una gran cantidad de cálculos numéricos, lleva el uso de computadora electrónicas digitales.

Dentro de los sistemas de programación de la computadora existen super lenguajes de propósito múltiple como son el FORTRAN, COBOL, ALGOL y PL/1, los cuales pueden ser usados para resolver problemas de simulación. Sin embargo se ha obervado que los problemas de simulación, tienen en sí características muy específicas y repetitivas por lo cual se han diseñado lenguajes especiales. Estos lenguajes además de estar construídos con una cierta lógica que permite fácilmente implantar los problemas de simulación, tienen rutinas que son muy útiles, como son la generación de números aleatorios, formación de tablas de frecuencia, cálculo de variables estadísticas, manejo de colas, etc.

Aunque es difícil poder decir cuál es el lenguaje de simulación más adecuado para un determinado problema, se han hecho estudios comparativos de eficiencias de uso de lenguajes para determinados prototipos. Uno de los mejores estudios fue hecho por Teichroew (ref.18) comparando resultados del uso de los seis principales lenguajes para simulación discreta. Existen una gran cantidad de lenguajes para simulación discreta, siendo los más importantes; SIMSCRIPT (ref.10), GPSS (ref.6), GASPII (ref.13 SIMULA (ref. 2), SIMPAC (ref.17) y SIMSCRIPT II (ref.8).

Respecto a los lenguajes diseñados para simulación continua en computadoras digitales, los principales son; 1130/CSMP y DYNAMO (ref.3).

No se pretende dar una descripción detallada de cada uno de los lenguajes

mencionados, sino sólo se describen brevemente las características principales de los dos más utilizados en simulación discreta, GPSS, SIMSCRIPT y para simulación continua, DYNAMO.

a. GPSS. Estas iniciales representan "General Purpose Simulation System". Fue desarrollado originalmente por G. Gordon (ref. 3). El sistema a ser simulado, se describe como un diagrama de bloques, en que cada uno de los bloques representa una actividad, y las líneas que los unen representan la secuencia en que se van a ejecutar estas actividades. En algunos casos, de acuerdo con decisiones lógicas o comparaciones, la computadora selecciona uno de diferentes caminos que salen de un mismo bloque. Cada uno de los bloques tiene una rotación diferente y una acción perfectamente definida.

Existen entidades llamadas transacciones, que son generadas con ciertos intervalos por bloques del diagrama y que tienen ciertas características. Estas transacciones recorren el diagrama de bloque en bloque de acuerdo con el tiempo simulado, que es controlado por un "reloj interno", el cual indica el tiempo real de la simulación. Existen dos tipos de equipos que pueden ser usados por las transacciones: instalaciones que pueden ser ocupadas por una transacción a la vez y almacenes que pueden ser utilizados simultáneamente por varias transacciones. Al recorrer los bloques, las transacciones pueden ser detenidas en uno de ellos, por ejemplo, en caso de que una instalación esté en uso, o pueden tomar caminos alternos. Se puede asignar niveles de prioridad a las transacciones y hacer decisiones lógicas complejas durante la simulación.

Existen rutinas para generar números aleatorios, establecer funciones estocásticas, formar tablas de frecuencia, etc. Una transacción da por terminado su recorrido al llegar a un bloque de terminación.

El GPSS automáticamente lleva estadísticas de colas, uso de instalaciones y almacenes, retrasos sufridos en el recorrido, etc., imprimiéndose éstas al final como resultado de la simulación.

b. SIMSCRIPT. Este lenguaje fue desarrollado por un equipo dirigido por H.M. Markowitz (ref.10) en la Corporación Rand. Básicamente consiste en una rutina de tiempos que pone en funcionamiento las diferentes subrutinas que ejecutan las acciones de los eventos, tanto endógenos como exógenos. En esta rutina de tiempo se registran las ocurrencias futuras de eventos, y de acuerdo con el reloj de tiempo interno de la simulación, se van programando para que ocurran los eventos endógenos generados por la simulación en sí, y los exógenos generados externamente. El usuario debe escribir subrutinas cerradas en un lenguaje similar al FORTRAN, para cada evento. En estas subrutinas se cambia el estado del modelo de acuerdo con las características propias de cada evento.

El SIMSCRIPT tiene construídas rutinas para generación de números aleatorios, funciones para acumulación, funciones de tipo estadístico y un pro

grama generador de reportes que permite con gran facilidad presentar en forma adecuada los resultados de la simulación.

Aunque el SIMSCRIPT fue diseñado para fines de simulación, en realidad puede ser usado para problemas de tipo general, de hecho, la nueva versión llamada SIMSCRIPT II (ref. 8) contiene cinco niveles de programación que pueden servir para resolver desde problemas muy sencillos de aprendizaje de programación, hasta para la solución de sistemas muy complejos de simulación.

c. DYNAMO. Su nombre se forma con las primeras sílabas de Dynamic Models y fue desarrollado por A. Pugh (ref. 14). Este lenguaje traduce y simula modelos continuos usualmente descritos por ecuaciones diferenciales. Dynamo se deberá usar cuando el comportamiento del sistema es a base de flujos y no de eventos discretos (por ejemplo, cuando se considera una compañía en general en lugar de órdenes y facturas específicas). En este lenguaje no hay transacciones ya que no se analiza el flujo de un elemento dentro del modelo, se analiza el flujo de todos a la vez.

En DYNAMO se maneja el concepto de variables de estado y su integración. El tiempo se representa a saltos (pequeños), y se utiliza la "integración numérica". El usuario puede modificar el intervalo de integración, lo que se revelará en los resultados y el tiempo de proceso.

6. Aplicaciones de simulación de sistemas

Sería imposible describir o siquiera mencionar todas las aplicaciones que se han hecho de la simulación. Ha sido usada prácticamente en todas las ramas de la ciencia y de la ingeniería.

En el año de 1966, IBM publicó una bibliografía sobre simulación que contenía la descripción de 948 trabajos (ref.5). Aunque ha sido aplicada al estudio de sistemas de negocios, económicos, sociológicos, sicológic , humanos, biológicos, logísticos, militares, políticos, etc., se mencionan a continuación algunos problemas resueltos en el campo técnico, como es natural imaginarse, la simulación ha sido utilizada en grandes proporciones en la simulación del funcionamiento interno de computadoras electrónicas. Estos estudios han permitido mejorar los equipos, en cuanto a su eficiencia de utilización de dispositivos, evaluar técnicas de tiempo compartido, fijando las políticas óptimas para distribución de tiempos entre usuarios y aún simulaciones de centros de computación para estudiar cuál es la mejor forma de operarlos (ref. 4, 7, 9, 12).

En varios congresos y conferencias se han tratado problemas de tipo técnico (ref. 16). Unicamente para fines de ilustración se dan algunos de los temas de los trabajos desarrollados:

Simulación de una carretera automatizada

Modelo de la red ferrocarrilera canadiense CN

Simulación FORTRAN de una flota de buques tanque

Simulación de líneas de ensamble

Simulación de procesos de manufactura

Simulación de sistemas telefónicos

Modelo de elevadores en una terminal de granos

Simulación del funcionamiento de una estructura para estacionamiento.

Se completa esta lista con ideas sobre posibles aplicaciones de la simulación en el campo técnico, algunas de las cuales ya han sido desarrolladas y aplicadas:

Sistemas de transporte colectivo urbano (camiones, metro, etc)

Casetas de cobro en autopistas

Precepción, almacenamiento y distribución de petróleo en puertos

Funcionamiento de aeropuertos

Operación de sistemas hidroeléctricos

Operación de sistemas hidráulicos, distritos de riego, etc.

Diseño de plantas industriales

Funcionamiento de gasolineras y estaciones de servicio

Operación de elevadores en edificios altos

Acarreo de materiales

Redes de CPM (ruta crítica), para escoger estrategias

Operación de sucursales bancarias.

REFERENCIAS

1. Ackoff, R.L. y Sasieni, M.V., "Fundamentals of Operation Research" John Wiley & Sons. (1968)

2. Dahl, O.J. y Nygaard, K. "SIMULA - an ALGOL - Based Simulation Language". Communications of the ACM. Vol. 9, No. 9, Sept. 1966, pag. 671-678.

3. Gordon, G. "System Simulation". Prentice Hall (1969)

4. Hutchison, G.K. "A computer Center Simulation Project" Communications of the ACM. Vol. 8, No. 9, Sept. 1965, Pag. 559-568.

5. IBM Publication H-20-0304. "General Purpose Simulation System". Introductory User's Manual

7. Katz, J.H. "An Experimental Model of System/360". Communications of the ACM. Vol. 10, No. 11, Nov. 1967, Pag. 694-702.

8. Kiviat, P.J., Villanueva, R. y Markowitz, H.M. "The SIMSCRIPT II Programming Language". Prentice Hall. (1968)

9. Mac Dowgall, M.H. "Computer System Simulation: An Introduction". Computer Surveys ACM. Vol. 2, No. 3, Sept. 1970, Pag. 191-209.

10. Markowitz, H.M., Hausner, B. y Karr, H.W. "Simscript, A. Simulation Programming Language" Prentice Hall (1963).

11. Naylor, T.H., Balintfy, J.L., Burdick, D.S. Chu, K. "Computer Simulation Techniques". John Wiley & Sons. (1966).

12. Nielsen, N.R. "The Simulation of Time Sharing Systems". Communications of the ACM, Vol. 10, No. 7, Jul 1967, pag. 397-412.

13. Pritsker, A.B. y Kiviat, P.J. "Simulation with GASP II" Prentice Hall (1969).

14. Pugh, A.L. "DYNAMO User's Manual" 2a. Ed. Cambridge, Mass. The M.I.T. Press (1963)

15. Rapoport, Y.L. Apuntes de Clase de Simulación Digital. División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM. (1978).

16. SHARE/ACM/IEEE/SCE. "Digest of the Second Conference on Applications of Simulation" (1968).

17. Systems Development Corporation. "SIMPAC, User's Manual" TM602/00/00. Santa Mónica, Calif. (1962).

18. Teichroew, D. y Lubin, J.F. "Computer Simulation-Discussion of Technique and Comparison of Language". Communications of the ACM. Vol. 9, No. 10, Oct. 1966, pag. 723-741.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

TOPICOS SELECTOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

ANEXO

PROCESOS MARKOVIANOS DE DECISION

Dr. Sergio Fuentes Maya

MARZO, 1982

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M 2285

3. Clasificación de estados.

Se dice que el estado j es alcanzable o accesible de i si existe un entero no-negativo n tal que la probabilidad de ir de i a j en n etapas es positiva, esto es, $p_{ij}^{n}>0$. Observe que cualquier estado j es accesible a sí mismo pues $p_{jj}^{0}=1$ (por definición). Ahora bien, si j es accesible de i se tiene que existe una colección de estados $i_1=i, i_2, \ldots, i_{n-1}$, $i_n=j$ tales que $p_{i_k, i_{k+1}}>0$ $k=1,\ldots n-1$. Sin perdida de generalidad podemos pedir que los estados intermedios $i_2,\ldots,$ i_{n-1} sean distintos de j. Si el estado j no es alcanzable de i se tiene que $p_{i,j}^{n}=0$ para toda n.

Definición Considere una cadena de Markov X. Un conjunto de estados C se dice cerrado, si ningun estado fuera del conjunto es alcanzable a partir de elementos de C. Si el conjunto consíste de un solo elemento se dice absorbente.

La interpretación de un conjunto de estados cerrados es que una vez que entramos en tal conjunto permanecemos en él indefinidamente. Un conjunto de estados cerrado puede a la vez contener subconjuntos propios que sean además cerrado. Si este no es el caso se dice que el conjunto de estados cerrados es irreducible. En particular, una cadena de Markov se dice irreducible si el conjunto de todos sus estados es el único conjunto cerrado.

Conviene señalar que los estados absorbentes son sencillos de identificar en una cadena de Markov. Especificamente j es un estado absorbente sí y sólo sí $p_{jj}=1$. Asimismo, se observa que las cadenas de Markov irreducibles estan caracterizadas por el hecho que dado cualquier par de estados i,j de la cadena se tiene que j es accesible de i. En general, si C es un conjunto cerrado se tiene que al eliminar de la matriz de transición P las hileras y columnas asociadas con columnas fuera de C se tiene que la submatriz resultante es una matriz de transición y representa una cadena de Markov.

1. Considere una cadena de Markov con cinco estados identificados como {a,b,c,d,e} y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Se desea determinar los conjuntos de estados cerrados y especificar la matriz fundamental $\bar{P}$.

Una manera de auxiliarse para determinar los conjuntos cerrados es proceder a dibujar una gráfica dirigida que representa la transición en una etapa de un estado a otro como se muestra en la figura. De aqui se observa que de los estados b ó d podemos llegar a los estados a, c y e pero lo inverso es falso. Esto es, una vez que el proceso abandona los estados b y d nunca regresa a tales estados. Observe que los conjuntos cerrados son {a,c,e} y {a,b,c,d,e}. De donde, la cadena de Markov no es irreducible.

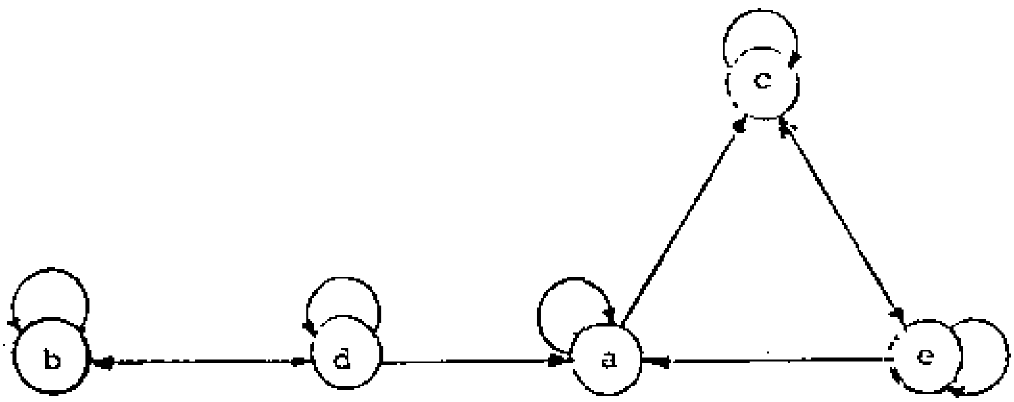

Fig. 1. Gráfica de la cadena de Markov

Conviene señalar que si eliminamos la segunda y cuarta hilera de P y lo mismo hacemos con las respectivas columnas se tiene

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

que es la matriz de transición correspondiente a la restricción de la cadena de Markov a la clase cerrada {a, c, e}. Finalmente, si etiquetamos convenientemente los estados de la cadena, digamos 1 = a ; 2 = c ; 3 = e ; 4 = b ; 5 = d, se obtiene la matriz fundamental

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

a partir de la cual se identifican inmediatamente los estados transitorios y recurrentes así como los conjuntos de estados cerrados.

d. El método de programación lineal

Considere la ecuación recursiva de la programación dinámica correspondiente al proceso markoviano asociado con el problema de asignación

$$v_i(m) = \max_k \left[q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k \, v_j(m-1) \right] \qquad i=1,\ldots,5$$

donde k es la política de asignación y tiene como valores k=1,2,3,4 y 5 correspondiente a extraer 0,1/4,1/2,3/4 y 1, respectivamente. Considerando que $v_i = \lim_m v_i(m)$ (i=1,2,3,4,5) existe se observa que en el límite lo que se desea es encontrar v_i^*(i=1,2,3,4,5) tal que

$$v_i^* = \max_k \left[q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k \, v_j^* \right]$$

que equivale a

$$v_i^* \geq q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k \, v_j^* \qquad (\alpha)$$

para todo k = 1,2,3,4, y 5.

Una manera de resolver este problema es resolviendo el problema lineal

$$\min z = \sum_{i=1}^{5} v_i^*$$

sujeto a las restricciones lineales (α). La solución de este problema se tiene en la siguiente hoja y puede observarse del valor de las variables duales q la política óptima coincide con las obtenidas anteriormente.

Ejemplos

1. Considere un sistema de aprovechamiento hidráulico consistente de un vaso y un distrito de riego (fig. 1). Suponga que los escurrimientos que llegan al vaso en cada período son estocásticamente independientes y tienen función de densidad.

Q	0	1/2	3/4	1
P(Q)	1/6	2/6	2/6	1/6

Considere que la capacidad del vaso es uno y que la siguiente politica de asignación de agua es usada

S	0	1/4	1/2	3/4	1
w	1/4	1/4	1/2	3/4	3/4

donde S es el nivel de almacenamiento al principio del período y w el agua prometida para riego.

Especifique las probabilidades $P(S_{n+1} = y \mid S_n = x)$ donde x,y = 0, 1/4, 1/2, 3/4 y 1 que debido a la independencia de los escurrimientos de un período a otro es equivalente a determinar la correspondiente matriz de transición P.

Suponga que la estructura de costos del problema anterior es como sigue: Los beneficios obtenidos de prometer (y no necesariamente entregar) un volumen x de agua al distrito son:

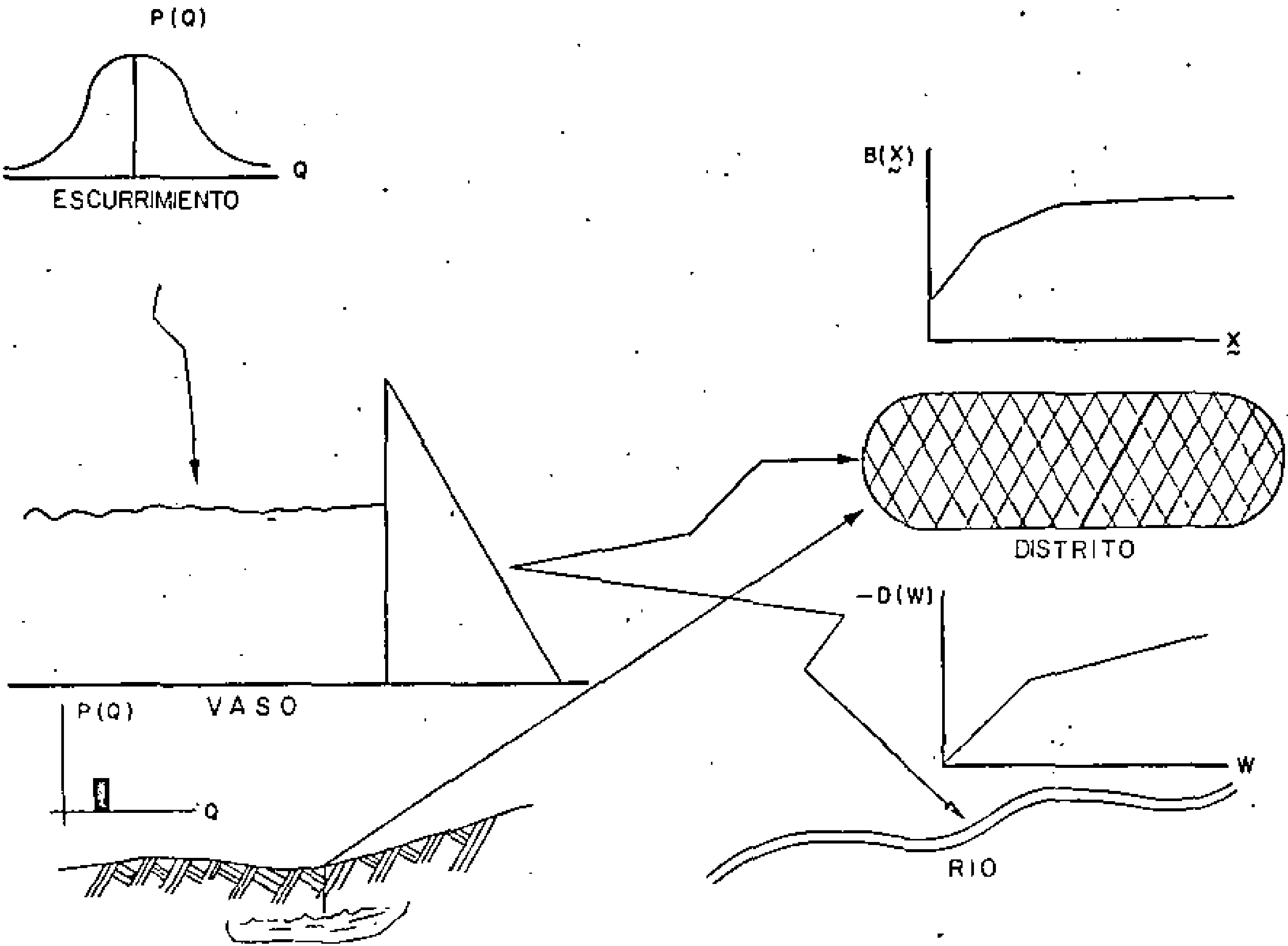

Fig. 2 EL SISTEMA DE APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

x	0	1/4	1/2	3/4	1
B(x)	0	2	7/2	9/2	5

Asímismo, si x es el volumen de agua prometido y $\underset{\sim}{x}$ el entregado, la penalización debida al déficit de agua $x - \underset{\sim}{x} \geq 0$ es

$x - \underset{\sim}{x}$	0	1/4	1/2	3/4	1
$T(x-\underset{\sim}{x})$	0	-4	-7	-9	-10

y la debida a derramar un volumen z es:

z	0	1/4	1/2	3/4	1
D(z)	0	-3/2	-4	-4	-4

Determine la política óptima de extracción de agua usando :

a. El método de Howard

b. Aproximaciones sucesivas normal

c. Aproximaciones sucesivas modificado

d. Programación lineal.

Modelación del problema

Una manera de analizar el problema anterior es postular un modelo en que se consideren de manera explícita la forma en que cambian los almacenamientos de un período a otro, dada las decisiones de prometer un volumen de agua y establecer si existen déficits en la entrega de agua o bien derrames de la misma. Dicho modelo deberá considerar el caracter estocástico de los escurrimientos al vaso y un criterio de jerarquización de alternativas de operación para un número N de períodos de planeación.

El modelo propuesto se presenta en la siguiente hoja en donde (1) representa la ecuación de balance de entradas y salidas de agua; (2) establece que el almacenamiento del vaso debe estar entre $\underline{S} = 0$ y $\overline{S} = 1$; (3) especifica que el volumen de agua entregado es no-negativo y menor ó igual que el volumen de agua prometida; y (4) especifica que el volumen de agua derramado es no-negativo. En el modelo se supone que todos los eventos en las restricciones se efectúan al principio de cada período. Por otra parte, la función objetivo considera de manera explícita los beneficios de asignación de agua, así como los déficits en la entrega y la debida a derrames, todos ellos convenientemente actualizados.

Reformulación del modelo

Conviene proceder a reformular el modelo descrito con el propósito de establecer un método de solución. Para ello defina

MODELO DE ASIGNACION DE AGUA

$$\underset{\{x_i\}}{\text{Maximice}} \quad \underset{\{Q_i\}}{E} \left[\sum_{i=1}^{N} \beta^{i-1} \quad \{B(x_i) + T(x_i - \underset{\sim}{x}_i) + D(z_i)\} \right]$$

sujeto a :

(1) $S_{i+1} = S_i + Q_i - \underset{\sim}{x}_i - z_i$

(2) $\underline{S} \leq S_i \leq \bar{S}$

(3) $0 \leq \underset{\sim}{x}_i \leq x_i$

(4) $0 \leq w_i$

donde $i = 1, \ldots, N$.

$\psi_i(S_i)$, el valor máximo esperado de los beneficios netos actualizados, obtenidos del año i al N, dado un almacenamiento inicial S_i. Una manera recursiva de obtener $\psi_i(S_i)$ es dada como sigue:

$$\psi_i(S_i) = \max_{x_i \varepsilon \Omega_i} \underset{Q_i}{E} \{R(x_i, \underset{\sim}{x}_i, w_i) + \beta\psi_i(S_{i+1})\}$$

donde $R(x_i, \underset{\sim}{x}_i, w_i) = B(x_i) + T(x_i - \underset{\sim}{x}_i) + D(w_i)$ y Ω_i representa el conjunto de valores x_i que satisfacen las restricciones. Esta ecuación recursiva es la fórmula de la programación dinámica y tiene condición de frontera $\psi_0(S_0) = 0$.

Considerando que se desea establecer la estrategia de extracción de agua del vaso para un número finito de niveles (i.e., S_i = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1) y tomando en cuenta la independencia estocástica de los escurrimientos podemos discretizar la fórmula recursiva para obtener:

$$\psi_i(r) = \max_k \{ \sum_{s=1}^{5} P_{rs}^k \left[R_{rs}^k + \beta\psi_{i+1}(s) \right] \}$$

donde el índice r = 1,2,3,4 y 5 denota los respectivos valores (estados) del almacenamiento S_i = 0, 1/4, 1/2, 3/4 y 1, respectivamente. Lo mismo es cierto del índice s = 1,2,3,4 y 5. Asímismo, k representa las posibles estrategias de decisión, esto es, k = 1,2,3,4 y 5 especifica que el agua prometida para riego es x_i = 0,1/4,1/2,3/4 y 1, respectivamente. Los valores de las matrices de transición $\left[P_{rs}^k\right]$ y de beneficios inmediatos $\left[R_{rs}^k\right]$ se dan en la tabla 1. Con esto se logra reformular la problemática analizada como un proceso de Markov con descuento.

a. Aplicación del método de Howard

La política inicial es

Estado	1	2	3	4	5
Decisión	2	2	3	4	4

y la correspondiente matriz de transición y vector de beneficios inmediatos es:

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 & 2/6 & 3/6 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 1.33 \\ 2.00 \\ 3.50 \\ 4.50 \\ 4.25 \end{bmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones asociado con esta política es

$v = q + \beta P v$ cuya solución $v = [I - \beta P]^{-1} q$ es:

$$v = [18.02 \; , \; 19.42 \; , \; 20.92 \; , \; 21.92 \; , \; 22.22]$$

Usando la rutina de mejoramiento de políticas (Tabla 2) se observa que es necesario cambiar en los estados 2 y 5 la política de extracción original 2 y 4 por 3 y 5, respectivamente.

La nueva política de extracción

Estado	1	2	3	4	5
Decisión	2	3	3	4	5

cuya matriz de transición y vector de beneficios inmediatos es:

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} 1.33 \\ 2.83 \\ 3.50 \\ 4.50 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones $v = q + \beta P v$ dada por $v = [I - \beta P]^{-1} q$ es igual a

$$v = [18.18 \;,\; 19.68 \;,\; 21.08 \;,\; 22.08 \;,\; 22.58]$$

y puede comprobarse de la tabla 2 que dicha política es óptima.

Finalmente, conviene señalar que el vector de probabilidades estacionarias Π tal que $\Pi = \Pi P$ es dado por

$$\Pi = \left[\frac{4}{24} \,,\, \frac{2}{24} \,,\, \frac{8}{24} \,,\, \frac{7}{24} \,,\, \frac{3}{24}\right]$$

Tabla 1. Matrices de transición y beneficios inmediatos asociados.

Estado (Almacenamiento)	Política (Extracción)	Probabilidad $\left[P_{ij}^{k}\right]$					Beneficio Neto inmediato $\left[R_{sk}^{k}\right]$					Beneficio inmediato esperado $\sum_{s=1}^{5} P_{sk}^{k} R_{sk}^{k}$
1(0)	1(0)	1/6	0	2/6	2/6	1/6	0	0	0	0	0	0
	2(1/4)	1/6	2/6	2/6	1/6	0	-2	2	2	2	0	4/3
	3(2/4)	3/6	2/6	1/6	0	0	7/6	7/2	7/2	0	0	7/6
	4(3/4)	5/6	1/6	0	0	0	11/10	9/2	0	0	0	5/3
	5(1)	1	0	0	0	0	-2/6	0	0	0	0	-2/6
2(1/4)	1(0)	0	1/6	0	2/6	3/6	0	0	0	0	-3/2	-3/4
	2(1/4)	1/6	0	2/6	2/6	1/6	2	0	2	2	2	2
	3(1/2)	1/6	2/6	2/6	1/6	0	-1/2	7/2	7/2	7/2	0	17/6
	4(3/4)	3/6	2/6	1/6	0	0	13/6	9/2	9/2	0	0	10/3
	5(1)	5/6	1/6	0	0	0	8/5	5	0	0	0	13/6
3(1/2)	1(0)	0	0	1/6	0	5/6	0	0	0	0	-14/6	-35/18
	2(1/4)	0	1/6	0	2/6	3/6	0	2	0	2	9/6	7/4
	3(1/2)	1/6	0	2/6	2/6	1/6	7/2	0	7/2	7/2	7/2	7/2
	4(3/4)	1/6	2/6	2/6	1/6	0	+1/2	9/2	9/2	9/2	0	23/6
	5(1)	3/6	2/6	1/6	0	0	8/3	5	5	0	0	23/6
4(3/4)	1(0)	0	0	0	1/6	5/6	0	0	0	0	-3	-5/2
	2(1/4)	0	0	1/6	0	5/6	0	0	2	0	3/5	5/6
	3(1/2)	0	1/6	0	2/6	3/6	0	7/2	0	7/2	3	13/4
	4(3/4)	1/6	0	2/6	2/6	1/6	9/2	0	9/2	9/2	9/2	9/2
	5(1)	1/6	2/6	2/6	1/6	0	1	5	5	5	0	13/3
5(1)	1(0)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-20/6	-10/3
	2(1/4)	0	0	0	1/6	5/6	0	0	0	2	-1	-1/2
	3(1/2)	0	0	1/6	0	5/6	0	0	7/2	0	21/10	7/3
	4(3/4)	0	1/6	0	2/6	3/6	0	9/2	0	9/2	4	17/4
	5(1)	1/6	0	2/6	2/6	1/6	5	0	5	5	5	5

Tabla 2. Resultados de la rutina de mejoramiento de políticas.

Estado (Almacenamiento)	Decisión (Extracción)	$q_i^k + \sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k \, v_j$ — Iteración 1	$q_i^k + \sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k \, v_j$ — Iteración 2
1	1	17.42	17.58
	2	18.02 *	18.18 *
	3	15.91	17.07
	4	16.31	17.07
	5	14.62	14.75
2	1	17.22	17.45
	2	19.42 *	19.58
	3	19.52	19.68 *
	4	19.08	19.24
	5	17.31	17.46
3	1	16.32	16.59
	2	19.72	19.95
	3	20.92 *	21.08 *
	4	20.52	20.68
	5	19.58	19.74
4	1	15.90	16.17
	2	19.10	19.36
	3	21.22	21.45
	4	21.92 *	22.08 *
	5	21.02	21.18
5	1	15.11	15.40
	2	17.90	18.17
	3	20.60	20.86
	4	22.22 *	22.45
	5	22.42	22.58 *

* Indica la política que se proponía como óptima.

a. Aplicación del método de Howard con otra política inicial

Considere ahora la política inicial

Estado	1	2	3	4	5
Decisión	5	5	5	5	5

con matriz de transición y vector de beneficios dado por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 3/6 & 2/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} -2/6 \\ 13/6 \\ 23/6 \\ 13/6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones asociado a esta política es $v=q+\beta Pv$ cuya solución $v = \; I- P^{\,-1}$ está dada por

$$v = \begin{bmatrix} -1.96, & 0.94, & 3.81, & 6.24, & 8.71 \end{bmatrix}^t$$

Puede observarse de la tabla 4, que la política no es óptima y que debe reemplazarse por

Estado	1	2	3	4	5
Decisión	1	2	2	3	4

con matriz de transición y vector de beneficios dado por

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 & 2/6 & 3/6 \\ 0 & 1/6 & 0 & 2/6 & 3/6 \\ 0 & 1/6 & 0 & 2/6 & 3/6 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7/4 \\ 13/4 \\ 17/4 \end{bmatrix}$$

La solución $v = [I - \beta P]^{-1} q$ está dada por

$$v = [15.54, \ 17.54, \ 18.25, \ 19.75, \ 20.75]^t$$

Puede observarse de la tabla 4, que la política no es óptima y que debe reemplazarse por

Estado	1	2	3	4	5
Decisión	2	3	3	4	4

con matriz de transición y vector de beneficios

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 0 & 2/6 & 3/6 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 17/6 \\ 7/2 \\ 9/2 \\ 17/4 \end{bmatrix}$$

donde $v = [I - \beta P]^{-1} q$ está dado por

$$v = \left[18.09,\ 19.59,\ 20.96,\ 21.96,\ 22.28\right]^t$$

y se observa de la tabla 4 que la política debe reemplazarse por [2, 3, 3, 4, 5] que puede verificarse es la política óptima.

b. Aplicación del método de aproximaciones sucesivas.

Considere la ecuación recursiva de la programación dinámica correspondiente al proceso markoviano con ganancias asociado al problema de asignación:

$$v_i(m) = \max_k \left[q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{5} P_{ij}^k \, v_j(m-1) \right] \qquad i=1,\ldots,5$$

donde k es la política de asignación de agua y tiene como valores k = 1,2,3,4 y 5 correspondientes a extraer 0, 1/4, 1/2, 3/4 ó 1, respectivamente, del vaso. En esta ecuación $\beta = 0.83$ y los valores de los beneficios inmediatos q_i^k así como las probabilidades de transición P_{ij}^k asociadas con cada política se muestran en la tabla 1.

El proceso de solución directo de las ecuaciones recursivas anteriores se denomina método de aproximaciones sucesivas y representa una alternativa para la solución del problema de asignación. En la tabla 3 se muestran los valores de los beneficios esperados en m etapas para cada uno de los estados iniciales del vaso, esto es, los correspondientes valores $v_i(m)$ para i=1,2,3, 4 y 5 y m = 1,2,.... En dicha tabla se observa la convergencia de estos valores y la correspondiente política óptima.

Tabla 3. Método de aproximaciones sucesivas

Etapa	Valores óptimos para cada estado					Política óptima para cada estado *				
m	$v_1(m)$	$v_2(m)$	$v_3(m)$	$v_4(m)$	$v_5(m)$	$k_1(m)$	$k_2(m)$	$k_3(m)$	$k_4(m)$	$k_5(m)$
0	0	0	0	0	0					
1	1.67	3.33	3.83	4.5	5	4	4	4	4	5
2	4.17	5.67	6.73	7.73	8.23	2	3	3	4	5
3	6.41	7.91	9.21	10.21	10.71	2	3	3	4	5
4	8.37	9.87	11.24	12.24	12.74	2	3	3	4	5
5	10.03	11.53	12.92	13.92	14.42	2	3	3	4	5
6	11.41	12.91	14.31	15.31	15.81	2	3	3	4	5
7	12.56	14.06	15.46	16.46	16.96	2	3	3	4	5
8	13.51	15.01	16.41	17.41	17.91	2	3	3	4	5
9	14.31	15.81	17.21	18.21	18.71	2	3	3	4	5
10	14.96	16.46	17.86	18.86	19.36	2	3	3	4	5
13	16.34	17.84	19.24	20.34	20.74	2	3	3	4	5
16	17.12	18.62	20.02	21.02	21.52	2	3	3	4	5
19	17.58	19.08	20.48	21.48	21.98	2	3	3	4	5
22	17.83	19.33	20.73	21.73	22.23	2	3	3	4	5
25	17.98	19.48	20.88	21.88	22.38	2	3	3	4	5
28	18.06	19.56	20.96	21.96	22.46	2	3	3	4	5
30	18.10	19.50	21.00	22.00	22.50	2	3	3	4	5

* $k_i(m)$ es la política que maximiza $q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{5} P_{ij}^k \, v_j(m-1)$

Tabla 4. Método de aproximaciones sucesivas (Gauss-Seidel)

Etapa	Valores óptimos para cada estado					Política óptima para cada estado				
m	$v_1(m)$	$v_2(m)$	$v_3(m)$	$v_4(m)$	$v_5(m)$	$k_1(m)$	$k_2(m)$	$k_3(m)$	$k_4(m)$	$k_5(m)$
0	0	0	0	0	0					
1	1.67	4.02	5.64	7.24	8.79	4	4	5	5	5
2	5.24	7.50	9.19	10.99	12.52	2	2	4	4	5
3	8.20	10.45	11.95	13.71	14.97	2	2	3	4	5
4	10.56	12.63	14.13	15.73	16.79	2	2	3	4	5
5	12.38	14.30	15.80	17.26	18.18	2	2	3	4	5
6	13.76	15.56	17.06	18.41	19.23	2	2	3	4	5
7	14.81	16.53	18.03	19.29	20.03	2	2	3	4	5
8	15.61	17.25	18.75	19.96	20.64	2	2	3	4	5
9	16.22	17.81	19.31	20.46	21.10	2	2	3	4	5
10	16.68	18.24	19.73	20.86	21.45	2	3	3	4	5
13	17.51	19.04	20.48	21.53	22.08	2	3	3	4	5
16	17.88	19.39	20.81	21.83	22.35	2	3	3	4	5
19	18.04	19.55	20.96	21.97	22.48	2	3	3	4	5
22	18.12	19.62	22.03	22.53	22.53	2	3	3	4	5
25	18.15	19.65	21.05	22.05	22.56	2	3	3	4	5
28	18.16	19.67	21.07	22.07	22.57	2	3	3	4	5
30	18.17	19.67	21.07	22.07	22.57	2	3	3	4	5

Directorio de Alumnos del Curso: Topicos Selectos de Investigación de Operaciones Marzo 1982.

1. Javier Hernández Robert
I M P.
Jefe de Oficina
Eje Central Lázaro Cárdenas 152
Col. Vallejo Industrial
México, D.F.
567 66 00 Ext. 2421

Unidad Lomas Plateros H -3, l, 41
México, D.F.
651 86 59

2. Jorge López Ríos
I M P
Av. 100 metros número 152
México, D.F.

Alicia 41
Col. Guadalupe Tepeyac
México, D.F.

3. Antonio Mejía Ju arez
U N A M
Cuautitlán, Edo. de México

F.C. de Cuernavaca 153
Col. Anahúac
D. Miguel Hidalgo
México, D.F.
527 80 98

Mario Pilatasig Montaluisa
División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
U N A M
México, D.F.

Av. Universidad 1953 Edif. 17-1101
D. Coyoacán
México, D.F.

5. Luz María Saldaña Garnica
Dirección General de Autotransporte
Federal
S. C. T.
Analista
Eugenia 197 - 8° Piso
Col. Narvarte
D. Benito Juárez
03020 México, D.F.
696 12 88

Malvón 199-6
Col. Nva. Sta. María
Delegación Azcapotzalco
02800 México, D.F.
556 50 66

6. Edgar Guillermo Sigler Andrade
Profesor
DEPFI
UNAM
México, D.F.
550 52-15 Ext. 4475

Camino Sta Teresa 890 X 404
Col. Héroes de Padierna
Contreras
10700 México, D.F.
568 18 99