



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Deformaciones de la Corteza
Terrestre Ocasionadas por Cargas de
Precipitación y su Posible Relación
con el Período de Chandler de
Oscilación del Polo Terrestre

TESIS

Que para Obtener el Título de

INGENIERO GEOMÁTICO

Presenta

Jorge Humberto Nicasio González

Director: Ing. Bartolo Lara Andrade



México, 2013

A mis padres:

*Fátima González Olvera y
Humberto Nicasio Olvera*

Índice	
Introducción	1
Justificación	3
Objetivos	4
Hipótesis	5
1. Sistemas de Referencia	6
1.1. Sistemas Geocéntricos	7
1.1.1. Sistema Geocéntrico Instantáneo de Coordenadas Cartesianas.....	7
1.1.2. Sistema Terrestre Convencional de Coordenadas Cartesianas	7
1.1.3. Sistema Geocéntrico de Coordenadas Curvilíneas	9
1.2. Sistemas Topocéntricos	13
1.2.1. Sistema Geodésico Local.....	13
1.2.2. Sistema Astronómico Local	14
1.3. Superficies de Referencia	15
1.3.1. La Tierra como una Esfera	15
1.3.2. El Elipsoide	16
1.3.3. El Geoide	18
2. Mareas Terrestres y Deformaciones de la Corteza Terrestre	20
2.1. Mareas Terrestres	20
2.1.1. Los Números de Love	23
2.2. Deformaciones de la Corteza Terrestre	26
3. Oscilación del Polo Terrestre	29
3.1. Ecuaciones de Rotación de Euler.....	29
3.1.1. Definición de Sistemas de Coordenadas.....	29
3.1.2. Sistema Dinámico	30
3.1.3. Velocidades Relativa y Absoluta	31
3.1.4. Aceleraciones Relativa y Absoluta	37
3.1.5. Momento de Movimiento	38
3.1.6. Momento de Fuerza	39

3.1.7. Tensor de Inercia, su uso en la Formulación del Momento de Movimiento de un Cuerpo Rígido	41
3.1.8. Ecuación de Euler en su Forma General.....	45
3.1.9. Elipsoide de Inercia y Principales Ejes de Inercia.....	46
3.1.10. Sistema de Coordenadas Natural Ligado con un Cuerpo Físico, Momentos Principales de Inercia	47
3.1.11. Simplificación de la Ecuación de Euler	50
3.2. La Oscilación del Polo Terrestre.....	51
3.2.1. La Tierra Rígida como un Giroscopio	51
3.2.2. Solución de las Ecuaciones de Euler para una Tierra Rígida, Período de Euler	53
3.2.3. Tierra No Rígida, Período de Chandler	55
3.2.4. Excitación y Amortiguación de la Oscilación	56
3.2.5. Observaciones de la Oscilación Actual	57
3.2.6. Resultados de Análisis de la Observación Observada	59
3.2.7. Variaciones Estacionales	60
3.2.8. Variaciones a Largo Plazo.....	61
3.2.9. Fluctuaciones Irregulares	62
4. Tratamiento y Procesamiento de Datos	63
4.1. Origen de los Datos.....	63
4.1.1. Climatología Diaria.....	63
4.1.2. Posiciones del Polo Instantáneo	65
4.2. Método de Análisis de Datos	66
4.2.1. Análisis de Cargas y Estimación de las Deformaciones	66
4.2.2. Procesamiento de Datos Históricos de Coordenadas del Polo Instantáneo de Rotación	93
5. Resultados	103
Conclusiones	108
Referencias.....	111
Bibliográficas	111
Hemerográficas	113

Introducción

A lo largo del tiempo el hombre ha tenido la necesidad de conocer su posición no sólo local sino incluso universalmente, razón por la cual nacieron las disciplinas encargadas de estudiar el entorno espacial en el que se desarrolla la existencia tanto de los seres vivos como de los objetos inertes. Con este principio se iniciaron ciencias como la Geometría, la Geodesia, la Geografía, etc., que hoy en día denominamos Geociencias, entre las cuáles actualmente se encuentra la Geomática, ciencia que engloba todas aquellas ciencias, técnicas y disciplinas enfocadas al estudio y descripción de las relaciones espacio temporales no sólo de la tierra, sino también ahora de otros cuerpos celestes (Geodesia Planetaria).

Hablar de Geomática es un tema complicado debido a la gran cantidad de ramificaciones que a partir de ella se desprenden, tomemos como ejemplo a los Sistemas de Información Geográfica, una de las disciplinas con mayor auge en la actualidad y cuya aplicación puede verse desde fenómenos meramente naturales como la sismología o la climatología, hasta casos puramente sociales, como la economía, la migración o incluso la cultura y las artes. Recordemos además otras disciplinas igualmente ricas en conocimientos y aplicaciones como la topografía, la fotogrametría y, gracias a los avances tecnológicos la teledetección o percepción remota.

Pues bien, gracias a estos avances tecnológicos, entre los que también podemos contar el desarrollo de los Sistemas de Posicionamiento Global, el estudio formal de las ciencias como la Geodesia, ha quedado relegado a simples y cortas acotaciones necesarias para llevar a cabo las técnicas modernas.

No obstante ya que las base de éstas continúan siendo los conceptos más básicos de la Geometría, la Matemática y la Física, éste trabajo será dedicado a ahondar un poco en la Geodesia, madre de las Geociencias, misma que actualmente, por lo menos en este país, ha sufrido un gran descuido, dejando su área de conocimiento a otras ciencias como la Geofísica.

A pesar de la evolución conceptual de la Geodesia, su objetivo principal continúa conservando su esencia: “La determinación de la forma y dimensiones de la Tierra”. Sin embargo, inherente al progreso del conocimiento humano, ha sido necesario modificar dicho objetivo primordial para adaptarlo a las necesidades actuales. Es por esto que un mejor concepto de Geodesia lo podemos encontrar en varios textos del tema:

La Geodesia es la disciplina que se encarga de la medición y representación de la superficie terrestre, incluyendo su campo de gravedad y la superficie del fondo marino, en un espacio tridimensional que varía en el tiempo.

Tal como se puede observar en la definición anterior, al hablar de geodesia nos referimos a fenómenos geométricos, físicos y además dinámicos.

Justificación

Desde el momento del nacimiento de la Geodesia, uno de los objetivos más ambiciosos ha sido lograr una precisión muy alta en las mediciones, con el tiempo se han desarrollado técnicas que buscan satisfacer esta necesidad y al menos desde el punto de vista topográfico, las mediciones a nivel local han logrado cumplir con esto.

En los últimos años, gracias al refinamiento de los instrumentos de medición y al uso de métodos matemáticos de ajustes, ha sido posible alcanzar precisiones tan altas que incluso son menores a los milímetros. Sin embargo, esto se ha logrado en superficies con extensiones relativamente pequeñas, en las cuáles los errores son fácilmente controlables, y que en la mayoría de los casos han sido referidas a sistemas planos y siempre utilizando un sistema de referencia estático.

Actualmente existe la tendencia a lograr tal grado de precisión; pero siempre refiriendo las coordenadas a sistemas globales que por consiguiente son dinámicos. Es por esta razón, que para llevar los actuales sistemas de posicionamiento global a las precisiones milimétricas, es necesario tener en cuenta los fenómenos de la dinámica terrestre que influyen directamente en la deformación de la superficie y por tanto en la modificación de los sistemas de referencia.

Aunado a ello, el estudio de la dinámica terrestre nos permitirá en el futuro, no sólo tener un conocimiento vasto de las propiedades físicas del planeta, sino

también nos acercará a la obtención de posibles modelos de predicción de fenómenos naturales climatológicos, sismológicos o volcánicos.

Objetivos

En el presente trabajo se estudiarán los efectos de las cargas ocasionadas principalmente por el intercambio atmosférico de agua entre los océanos y los continentes, en la corteza terrestre. Además se estudiará la posible relación entre éstos y el Período de Chandler de Oscilación del Polo Terrestre.

La idea de estudio de este fenómeno surgió con base en el artículo *A New Global Mode of Earth Deformation: Seasonal Cycle Detected*¹ publicado en el año 2001 por Geoffrey Blewitt et al., en el cual se habla sobre el descubrimiento de un modelo de deformación global particular, con ciclo estacional atribuido principalmente, al intercambio inter-hemisférico de masas. En dicho artículo, la predicción del modelo se realizó mediante el análisis de series de tiempo de datos precisos de estaciones fijas del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) distribuidas alrededor del mundo.

El objetivo del presente trabajo es ir en sentido opuesto al estudio anteriormente mencionado, esto es, a partir de datos de precipitación, se tratará de inferir la deformación que las grandes cargas de masa provocan en la corteza continental, y cómo éstas deformaciones modifican los sistemas de referencia tanto locales como globales; por otro lado, se realizará un análisis de datos históricos de las posiciones del polo instantáneo de rotación terrestre, para tratar de encontrar una relación entre los fenómenos naturales como los huracanes y tormentas de nieve con el Período de Chandler de Oscilación del Polo Terrestre.

¹ BLEWITT, Geoffrey; LAVALLÉE, David; CLARKE, Peter; NURUTDINOV, Konstantin. "A New Global Mode of Earth Deformation: Seasonal Cycle Detected", Science, Vol. 294, Washington. 2001.

Hipótesis

El agua que se acumula en los continentes durante las precipitaciones pluviales genera una deformación del relieve por la presión que el peso del agua ejerce sobre éste, lo que se puede ver reflejado en un cambio de coordenadas, desviación de la vertical y cambio del potencial gravitatorio.

Por otro lado, la redistribución de masas que se lleva a cabo durante el proceso de precipitaciones, debe generar una modificación del centro de masa de la Tierra, lo que provoca un cambio en la velocidad de rotación de la misma, el origen de los sistemas de referencia y por lo tanto en la posición del polo de rotación. Así, los periodos estacionales de precipitaciones pudieran estar relacionados con el Período de Chandler de Oscilación del Polo Terrestre.

1. Sistemas de Referencia

Para comenzar, es necesario contar con una definición de un Sistema de Referencia. Podemos decir que un Sistema de Referencia es el conjunto de reglas y convencionalismos utilizados para determinar la posición de un cuerpo u objeto en el espacio, con respecto a un punto, cuerpo u objeto.

Normalmente, utilizamos el término sistema de referencia aludiendo a un sistema de coordenadas cartesiano, que consta de un origen y ejes coordenados. Existen distintos sistemas de referencia cada uno con características específicas de acuerdo al uso que se les da, por ejemplo los sistemas topográficos, los sistemas geodésicos o los sistemas celestes, entre otros.

En el caso del estudio geodésico que nos ocupa, nos referiremos a sistemas de coordenadas cartesianas tridimensionales con ejes ortogonales, utilizados para definir la posición de puntos sobre la superficie terrestre, así como su desplazamiento en el tiempo.

En geodesia es común el uso de sistemas de referencia fijos, sin embargo los fenómenos que aquí se estudian, al tener una modificación en el tiempo, requieren de sistemas dinámicos y estáticos que sirvan para poder observarlos y describirlos, es por esta razón que hablaremos tanto de sistemas de referencia instantáneos como sistemas de referencia promedio.

Por otro lado, una de las características principales para clasificar sistemas de referencia es su origen, por tanto los dividiremos para su estudio en Sistemas Geocéntricos y Sistemas Topocéntricos.

1.1 Sistemas Geocéntricos

De forma general podemos definir los sistemas geocéntricos como aquellos cuyo origen se encuentra en el centro de masa de la Tierra. Para facilitar los modelos y el posicionamiento de puntos sobre la superficie terrestre, se ha adoptado un sistema fijo promedio, pues como ya se ha mencionado, la Tierra describe movimientos que no son uniformes, ejemplo de éstos es el movimiento del polo terrestre, sin embargo para el análisis de los fenómenos de dinámica terrestre es necesario tomar en cuenta el sistema instantáneo.

1.1.1 Sistema Geocéntrico Instantáneo de Coordenadas Cartesianas

Al hablar del sistema instantáneo, nos referimos a aquel que queda definido para un momento único y que se modifica en el tiempo. En este sistema, el origen se encuentra en el centro de masa instantáneo de la Tierra, la dirección del eje Z coincide con el polo instantáneo, es decir se trata del eje instantáneo de rotación de la Tierra. El eje X se encuentra ubicado en la intersección del plano del ecuador y el plano del meridiano de referencia instantáneos. Finalmente el eje Y, ortogonal a los anteriores, se elige de tal manera que se forme un sistema de mano derecha.

1.1.2 Sistema Terrestre Convencional de Coordenadas Cartesianas

Este sistema es el resultado de un acuerdo internacional que toma como origen el centro de masa promedio de la tierra, su eje z coincide con el CIO (Origen Convencional Internacional), el cual no es más que el valor promedio de las posiciones del polo instantáneo, observadas entre los años 1900 y 1905.

El meridiano de referencia es el meridiano de Greenwich, siendo el eje x la intersección de éste plano con el plano del ecuador, el eje Y se localiza también sobre el plano del ecuador a 90° al este del eje x, formando un sistema de mano derecha.

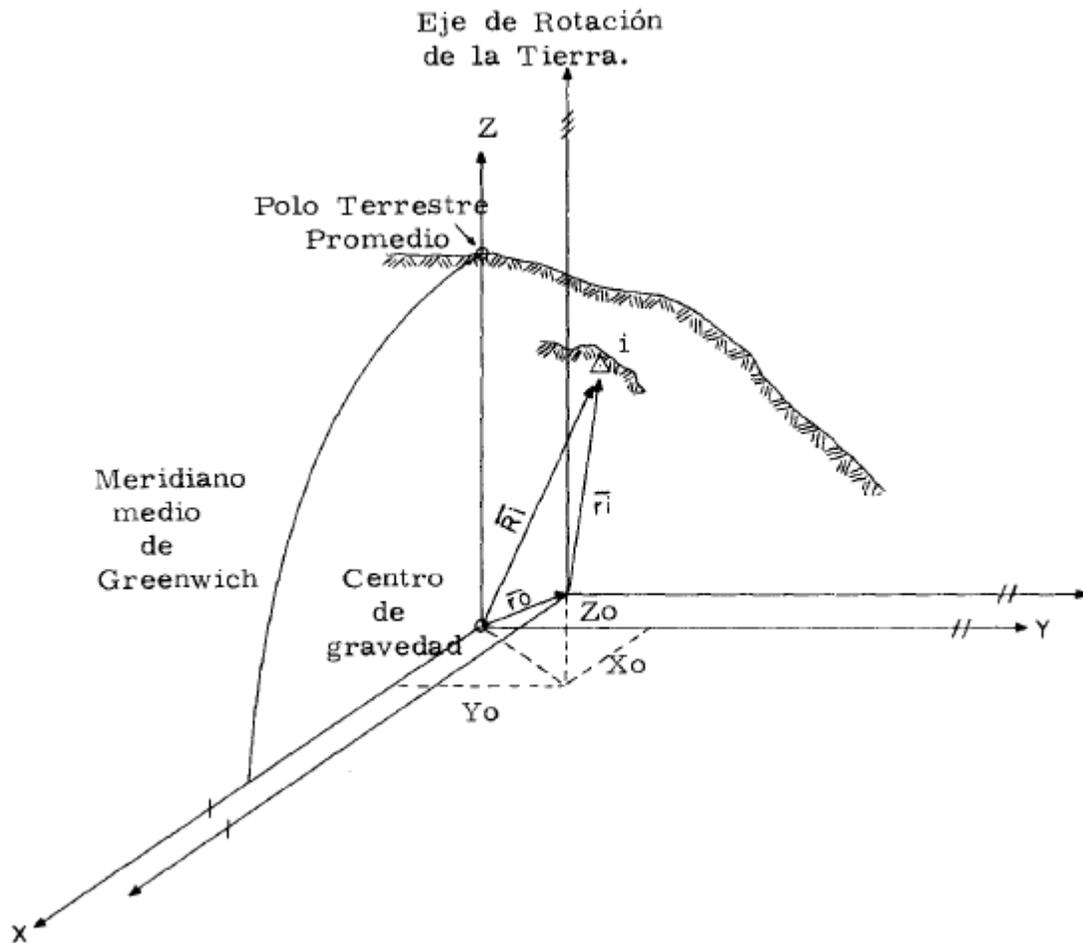


Figura 1.1 Sistema Instantáneo y Sistema Promedio.

1.1.3 Sistema Geodésico de Coordenadas Curvilíneas

Si hacemos coincidir los ejes de un elipsoide de referencia con los ejes del sistema terrestre convencional, obtendremos el que es probablemente el sistema de coordenadas más utilizado, pues con él podemos conocer la posición de un punto utilizando para ello únicamente las coordenadas curvilíneas de latitud y longitud.

El plano principal es el plano del ecuador. La latitud geodésica es el ángulo que existe entre el ecuador y el vector de posición de un punto P. Se mide sobre el plano del meridiano hacia el norte o hacia el sur en un rango de 0 a 90°. La longitud geodésica se mide sobre el plano del ecuador desde el eje x en sentido de las manecillas del reloj, en un rango de 0 a 360°, siendo el origen en el caso del Sistema Convencional Terrestre, la longitud del meridiano de Greenwich.

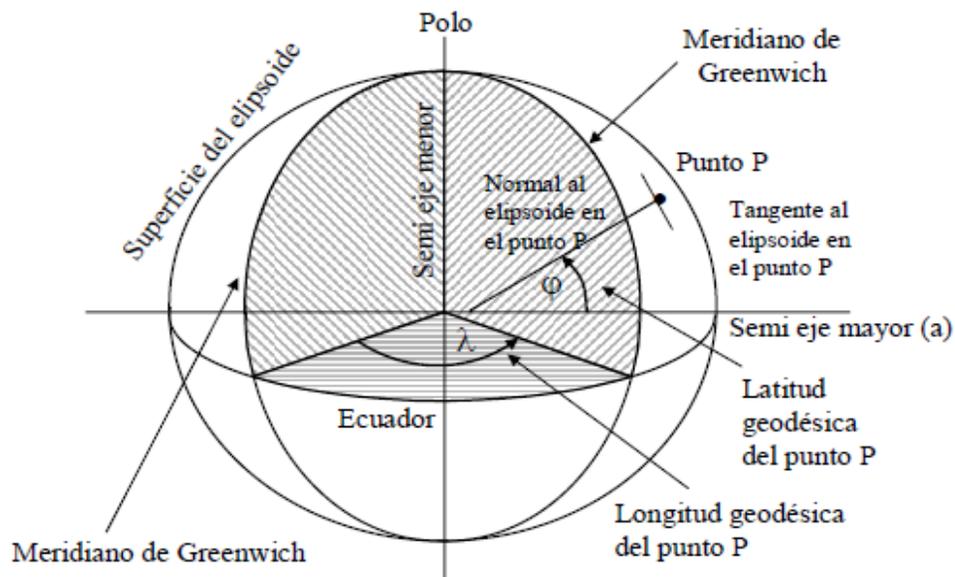


Figura 1.2 Elementos del Sistema de Coordenadas Curvilíneas.

Además de éstas coordenadas, es posible referir la altura de un punto sobre la superficie terrestre mediante una coordenada extra que es la altura sobre el elipsoide h .

Las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas curvilíneas se obtienen fácilmente a partir de geometría analítica básica, siendo las más importantes las siguientes:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Dónde:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \text{ Es la normal mayor del elipsoide}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ Es la primera excentricidad}$$

a Es el semieje mayor del elipsoide

b Es el semieje menor del elipsoide

h Es la altura sobre el elipsoide

La transformación inversa, es decir, del sistema de coordenadas cartesianas al sistema de coordenadas curvilíneas, requiere del uso de parámetros auxiliares. A continuación se muestra el proceso para realizar esta transformación:

1. La longitud λ se puede obtener de manera directa con la expresión:

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$$

2. Para la latitud φ y la altura h es necesario conocer $N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$ y

$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ además introducimos una variable auxiliar p :

$$p = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo las expresiones conocidas para X, Y tenemos:

$$p^2 = (N + h)^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda^2 + (N + h)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda^2$$

$$p = (N + h) \cos \varphi$$

3. De lo anterior podemos escribir la expresión para h :

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N$$

4. Por otro lado tenemos:

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi$$

Por lo que podemos escribir:

$$\frac{Z}{P} = \frac{[N(1 - e^2) + h] \sin \varphi}{(N + h) \cos \varphi} = \tan \varphi \left(\frac{[N(1 - e^2) + h]}{(N + h)} \right)$$

5. Despejando $\tan \varphi$ tenemos:

$$\tan \varphi = \frac{Z(N + h)}{p[N(1 - e^2) + h]}$$

6. El resultado de la expresión anterior puede obtenerse fácilmente mediante un proceso iterativo comenzando con valor $h = 0$, así:

$$\tan \varphi_1 = \frac{Z}{p(1 - e^2)}$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \frac{Z}{p(1 - e^2)}$$

$$N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$h_1 = \frac{p}{\cos \varphi_1} - N_1$$

7. Se realizan las iteraciones de la siguiente manera:

$$\varphi_i = \tan^{-1} \left(\frac{[N_{i-1}(1 - e^2) + h_{i-1}]}{(N_{i-1} + h_{i-1})} \right)$$

$$N_i = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{i-1})^{\frac{1}{2}}}$$

$$h_i = \frac{p}{\cos \varphi_{i-1}} - N_{i-1}$$

8. Estas iteraciones deben realizarse hasta que $(\varphi_{i-1} - \varphi_i) \leq \varepsilon$ y $(h_{i-1} - h_i) \leq \epsilon$; dónde ε y ϵ son las precisiones de φ y h que se pretenden alcanzar.

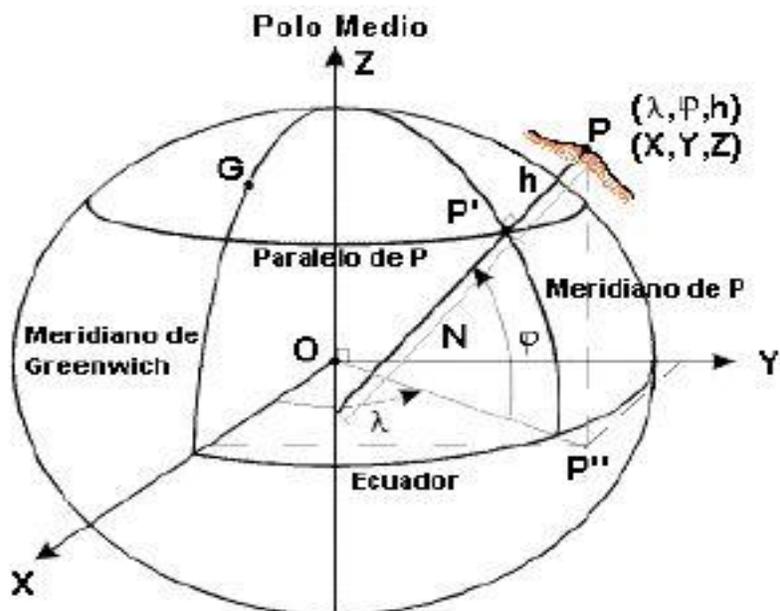


Figura 1.3 Relación entre las Coordenadas Curvilíneas y las Coordenadas Cartesianas.

1.2 Sistemas Topocéntricos

Los sistemas topocéntricos en general son aquellos cuyo origen es el punto donde se encuentra el observador sobre la superficie terrestre. A diferencia de los sistemas Geocéntricos, éstos son sistemas de mano izquierda. El eje Z puede ser la vertical local o bien, la normal a la superficie de referencia.

1.2.1 *Sistema Geodésico Local*

Como ya se había mencionado, éste es un sistema topocéntrico, su origen se encuentra en el punto que ocupa la estación del observador. El eje Z es normal al elipsoide de referencia, el plano principal es el plano tangente al elipsoide en ese punto y contiene a los ejes X que está dirigido hacia el norte y Y que está dirigido hacia el este para formar el sistema de mano izquierda.

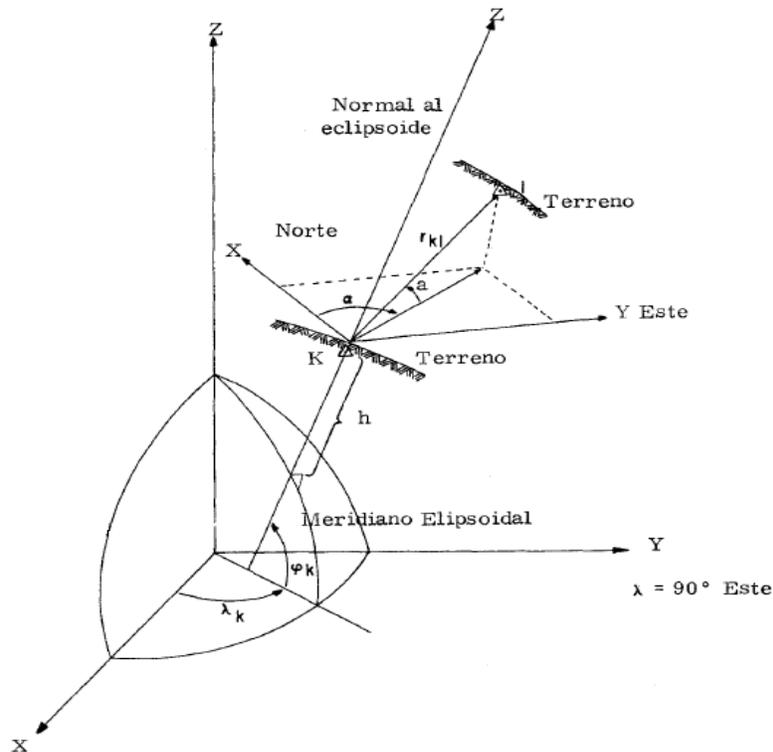


Figura 1.4 Sistema Topocéntrico (Geodésico Local).

En el presente trabajo se utilizará este sistema en conjunto con el Terrestre Convencional para estudiar las deformaciones y los movimientos que presentan los puntos de estudio.

1.2.2 Sistema Astronómico Local

Al igual que el Geodésico Local, tiene su origen en la estación de observación pues es un sistema topocéntrico, el eje Z es normal a la superficie equipotencial, es decir se trata de la vertical del lugar. Su plano principal es el que contiene al origen y es perpendicular al eje Z.

La localización de un punto en este sistema se encuentra en función del ángulo vertical y el azimut astronómico.

1.3 Superficies de Referencia

1.3.1 La Tierra como una esfera

En una primera aproximación se utilizó la esfera como superficie de referencia para representar la Tierra. Actualmente, con el afán de facilitar cálculos, y siempre que el trabajo realizado no requiera grandes precisiones, se puede adoptar un radio medio y considerar a la Tierra como una esfera.

Además este modelo es utilizado en Geodesia Física para la derivación del potencial gravitacional cuyo cómputo se realiza en coordenadas esféricas, de esta manera un punto sobre la superficie terrestre queda definido por tres parámetros simples: radio medio, latitud y longitud (r, φ, λ).

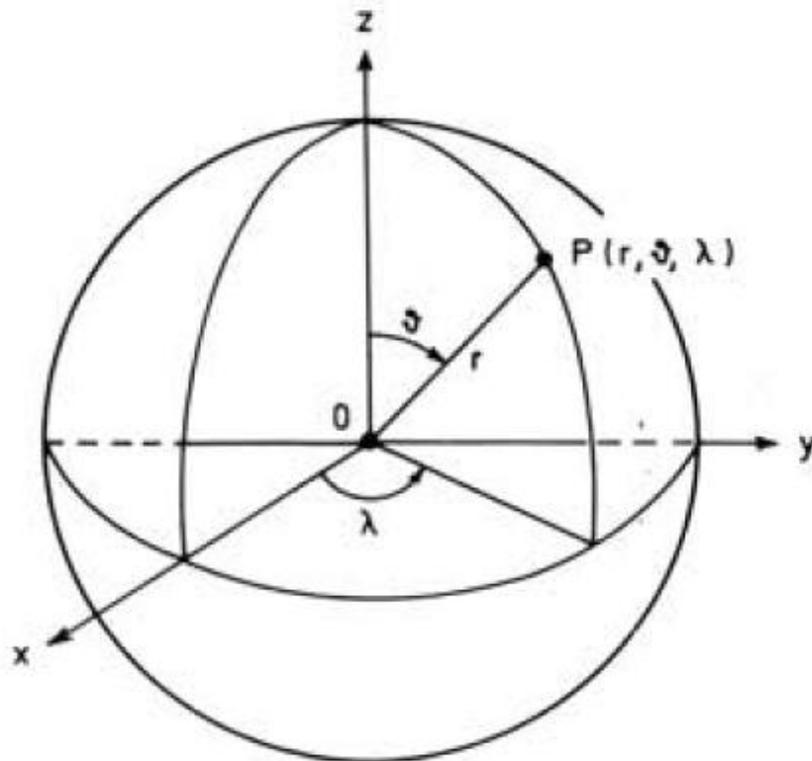


Figura 1.5 Modelo de Tierra Esférica.

1.3.2 El Elipsoide

En el siglo XVIII se introdujo por primera vez la idea de utilizar como superficie de referencia un elipsoide rotacional. En Geodesia, el elipsoide se define como la superficie matemática que mejor de aproxima a la forma de la Tierra. Esto aunado a la facilidad de de los cálculos utilizados para su determinación es lo que hace que todas la mediciones y estudios se realicen con base en él.

El elipsoide se genera haciendo rotar una elipse meridiana sobre su eje menor por lo tanto, los parámetros del elipsoide serán los mismos que los de la elipse que le da origen. Esto es:

Semi eje mayor a

Semi eje menor b

Además de las relaciones entre éstos últimos:

$$\text{Achatamiento: } f = \frac{a-b}{a}$$

$$\text{Primera Excentricidad: } e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

$$\text{Segunda Excentricidad: } e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

Según el trabajo a realizar, puede optarse por elipsoides locales o bien elipsoides globales, actualmente con el aumento en el uso de las tecnologías de posicionamiento global, cada vez es menos común el uso de elipsoides de referencia locales.

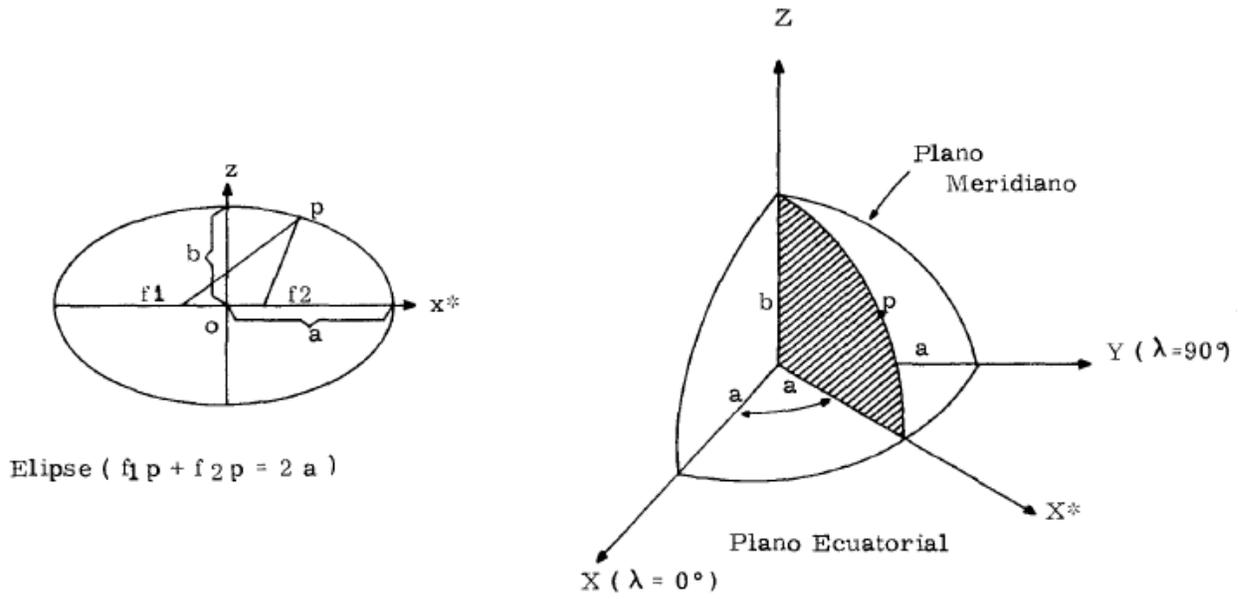
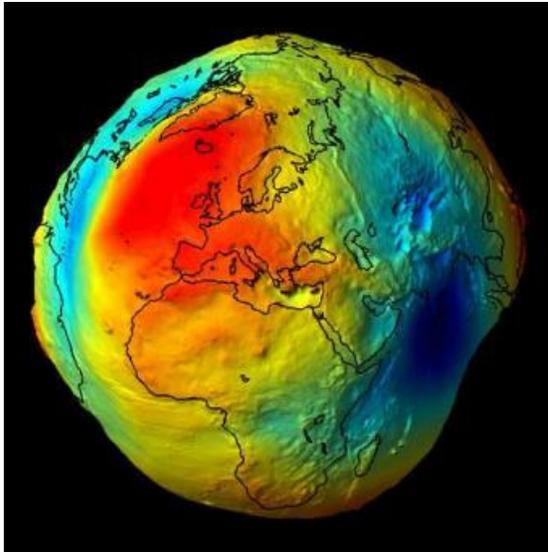


Figura 1.6 Modelo de Tierra Elipsoidal y elementos de la Elipse Meridiana.

1.3.3 El Geoide

Se trata de una superficie de carácter físico, pues su determinación matemática es muy complicada por lo que no es una buena alternativa para referenciar puntos sobre la superficie de la Tierra en el sentido horizontal, aun y cuando es la superficie que más se asemeja a la forma real del planeta. Sin embargo, hablando en el sentido vertical, el geoide es funcional para determinar la altura de puntos.

El Geoide, se define como “la superficie equipotencial del campo



gravitacional terrestre coincidente con el nivel medio de los océanos y prolongada por debajo de los continentes. De tal forma que se considera el agua de los océanos estática y sometida únicamente a la fuerza de gravedad, por lo que la vertical o la dirección de la gravedad es perpendicular en cualquier punto”².

Figura 1.7 Representación del Geoide.

² TORGE, Wolfgang. “Geodesy”. 3ª Edición, Walter de Gruyter, 2001, Alemania. Pág. 52

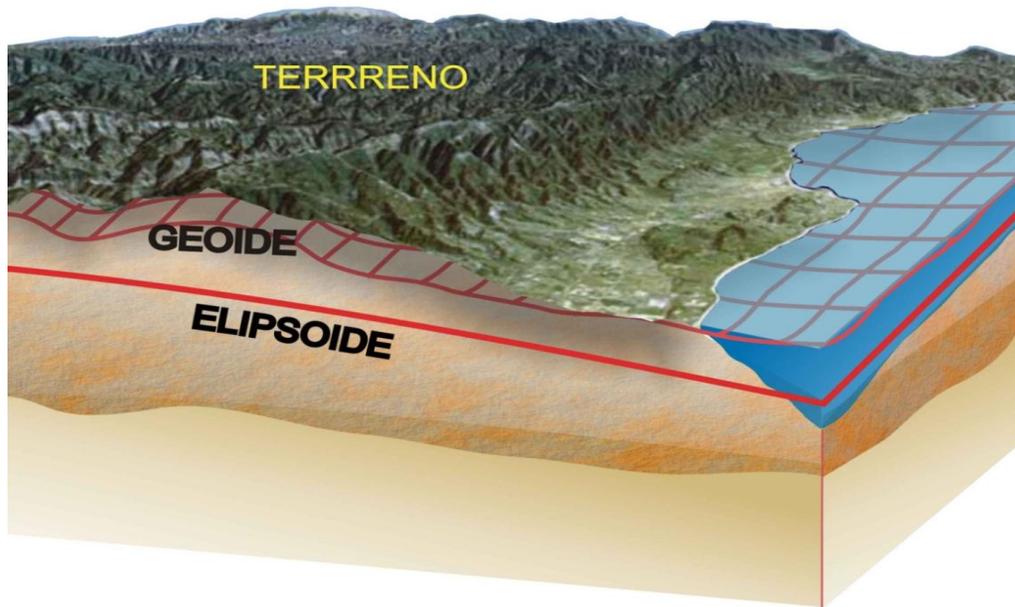


Figura 1.8 Diagrama que muestra la relación de las superficies de referencia con el terreno real.

2. Mareas Terrestres y Deformaciones de la Corteza Terrestre

2.1. Las Mareas Terrestres

De una manera análoga al fenómeno de las mareas oceánicas, existe en la Tierra un fenómeno denominado mareas Terrestres, en el cuál las fuerzas de atracción del sol y la luna ocasionan una serie de cambios en la forma y posición de la corteza terrestre.

Durante mucho tiempo se consideró a este fenómeno como “perteneiente al área de estudio de la Geofísica de donde podía obtenerse información acerca de la constitución interior del planeta y que para el caso de la Geodesia, podía verse únicamente como una fuente trivial de error”³.

Sin embargo como ya se ha mencionado anteriormente, con el avance de la tecnología y el uso cada vez más extensivo de Sistemas de Posicionamiento Global basados en el uso de satélites, este y otros fenómenos de dinámica terrestre no son más una fuente trivial de error sino que se han convertido en un área de interés esencial para el establecimiento de sistemas de referencia de alta precisión.

Para el caso del presente trabajo, el conocimiento de las mareas terrestres no es un objetivo fundamental, sin embargo debido a la naturaleza del fenómeno de deformaciones de la corteza terrestre, es necesario abordar el tema a fin de

³ BOMFORD, Brigadier. “Geodesy”, 2ª edición, Oxford University Press, 1962, Gran Bretaña. Pág. 497.

comprender la manera en la que la superficie terrestre se comporta de forma no rígida pero tampoco fluida.

Es a partir de la base teórica de las mareas terrestres que se fundamenta el modelo de deformaciones usado a lo largo de este trabajo, principalmente con la inclusión de los números de Love en el modelo matemático de deformaciones.

Al igual que en el océano, la atracción gravitacional de cuerpos celestes, principalmente la luna y el sol, provocan en la superficie una deformación tanto en sentido vertical como en sentido horizontal, es decir un punto sobre la superficie terrestre sometido a la atracción gravitacional de un cuerpo celeste recibe una modificación de su latitud, longitud y altura, obviamente en una escala mucho menor que las que recibiría la superficie del océano.

Esto se refiere al potencial cambiante de un cuerpo celeste en función de su posición:

$$W \doteq \frac{3}{4} kM \frac{R^2}{\rho^3} (\cos 2Z + \frac{1}{3})$$

En el caso de la luna y el sol se tiene:

$$W \doteq 26.7 \left(\cos 2Z_1 + \frac{1}{3} \right) + 12.3 \left(\cos 2Z_2 + \frac{1}{3} \right)$$

Donde Z_1 y Z_2 son las distancias zenitales de la luna y el sol respectivamente.

El mayor interés es el estudio de las variaciones de dicho potencial en distintos tiempos y localizaciones, por lo que es posible expresarlo en términos de la distancia zenital del cuerpo celeste atrayente, el tiempo y la latitud del punto donde se estudia el potencial. Lo anterior puede expresarse mediante una serie de

familias de armónicos esféricos que describen las componentes de las mareas terrestres.

Así pues, el potencial de marea puede escribirse como:

$$W = G(a, \rho) \left[\cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2t + \sin 2\phi \sin 2\delta \cos t + 3 \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right]$$

Donde $G(a, \rho)$ es la constante de Doodson en función de la distancia del punto al centro de gravedad (a) y la distancia del centro de gravedad al cuerpo celeste estudiado (ρ).

Las tres componentes del potencial pueden ahora ser separadas y denotar W como:

$$W = S + T + Z$$

Donde:

$$S = G(a, \rho) \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2t$$

$$T = G(a, \rho) \sin 2\phi \sin 2\delta \cos t$$

$$Z = 3G(a, \rho) \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right)$$

Son conocidas como funciones sectorial, tesseral y zonal respectivamente.

Ahora podemos notar que el potencial de marea contiene tres variables que dependen del tiempo, éstas son: ρ , δ y t . De éstas, el radio vector de un cuerpo celeste varía con el tiempo (alrededor de su valor medio C) sólo dentro de un intervalo estrecho. De manera similar, la declinación δ también oscila alrededor de su valor medio durante un cierto periodo de tiempo. Por lo tanto, sustituyendo ρ y δ , en la primera aproximación, por sus valores medios, podemos notar que las variaciones en el tiempo del las componentes individuales del potencial están

predominantemente gobernadas por $t. t$, siendo el ángulo horario se somete a un ciclo por día y podemos así ver que la componente sectorial da lugar a todas las variaciones semidiurnas, la tesseral a las variaciones diurnas y la zonal a las variaciones a largo plazo.

2.1.1. Los Números de Love

A partir de la expresión anterior y con base en la siguiente figura, podemos comenzar a definir los números de Love. Que son tres coeficientes dependientes de la distancia del punto considerado al centro de masa y que en la superficie y para $r = a$, radio medio de la Tierra, se denominan h, f y k , tomando en cuenta las deformaciones que las fuerzas derivadas del potencial pueden producir. Más tarde Shida añadió un cuarto número l , lo que permite expresar todas las posibilidades de deformaciones en función del propio potencial perturbador.

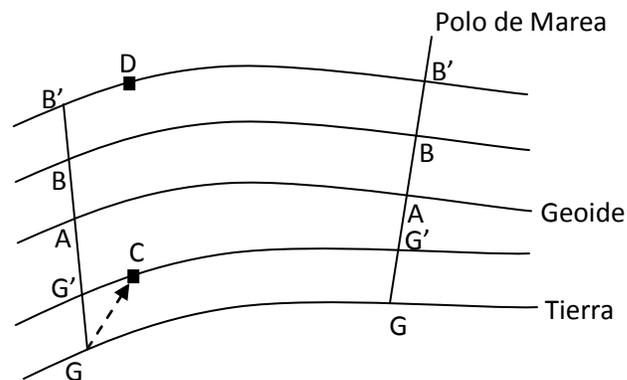


Figura 2.1 Superficies Equipotenciales.

En el diagrama, AA es la superficie equipotencial del geode como se encontraría en ausencia de la luna y el sol; BB es la superficie equipotencial del geode modificado por la marea de equilibrio, es decir el geode de una tierra rígida deformado por el potencial de la luna y el sol; GG es en nivel de la tierra sin deformaciones; G'G' es el nivel de la tierra deformada; B'B' es la superficie equipotencial que contempla la luna, el sol, y la tierra deformada. G'C es el movimiento lateral de G; B'D=G'C.

Con esto podemos expresar los números de Love como relaciones entre éstas superficies de la siguiente manera:

$$h = \frac{GG'}{AB} \sim 0.6$$

Es la relación de la deformación superficial a la altura de la marea de equilibrio.

$$k = \frac{BB'}{AB} \sim 0.3$$

Es la relación de la marea adicional debida a la deformación de la Tierra, a la altura de la marea de equilibrio.

$$l = \frac{G'C}{AB} \sim 0.05$$

Es la relación del desplazamiento horizontal a la altura de la marea de equilibrio.

Así, la relación de la marea de equilibrio actual (hipotética) está dada por la expresión:

$$(1 + k - h)$$

Usando los números de Love es posible establecer las expresiones de las deformaciones en un sistema local:

$$S_r = h \frac{W}{g}$$

$$S_\varphi = \frac{l}{g} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$$

$$S_\lambda = \frac{l}{g \sin \varphi} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$$

Por otro lado, la relación entre los números de Love y los parámetros obtenidos del análisis de mareas terrestres está dada por:

$$\delta = 1 + h - \frac{3}{2}k$$

$$\gamma = 1 + k - h$$

$$\Delta = 1 + k - l$$

Donde δ es el factor de amplitud de las mareas gravimétricas, γ es el factor de inclinación y Δ es el factor de mareas volumétricas. De esta manera midiendo estos parámetros experimentalmente, es posible determinar valores para h, k y l .

Para estos se pueden analizar observaciones gravimétricas y desviaciones de la vertical mediante el uso de inclinómetros y péndulos o bien analizando series de tiempo de coordenadas (φ, λ) de estaciones fijas, obtenidas con muy altas precisiones.

2.2. Deformaciones de la Corteza Terrestre

Como ya se ha dicho previamente, la Tierra no es un cuerpo rígido ni constante, es un cuerpo que presenta características tanto semi-rígidas como elásticas, mismas que pueden ser descritas mediante los números de Love. Estas características, son las que le permiten que su estructura tanto interna como externa se modifique a través del tiempo y por distintas causas.

En nuestro caso nos enfocaremos a nombrar sólo algunas de las causas que provocan deformaciones en la estructura exterior de la Tierra, es decir en la Corteza.

La principal causa de las deformaciones de la Corteza es la presencia de cargas, que no son más que la acumulación de sustancias que ejercen una presión en determinadas zonas del planeta.

De estudios geológicos es sabido que la Corteza Terrestre está dividida en una especie de piezas de rompecabezas denominadas placas tectónicas, las cuáles se encuentra flotando sobre un material parcialmente líquido al que se le conoce como astenósfera.

Al encontrarse en un estado de “equilibrio”, es entendible que un aumento en la cantidad de material existente en determinada zona, provoque que este equilibrio se modifique ocasionando por un lado, una depresión de la zona cercana al punto donde se está ejerciendo la carga y por otro lado, un desplazamiento en sentido tanto vertical como horizontal de los puntos cercanos a la zona de carga, además de traer consigo otros fenómenos como la redistribución de masas y procesos de erosión del relieve.

Cuando se habla de cargas existen ciertos fenómenos naturales que provocan una mayor carga que otros. A continuación se enumeran algunos de los más importantes:

a. Glaciares.

La capa de hielo que existe en las zonas polares comprende una superficie aproximada del 10% de la superficie total del planeta, el espesor de esta capa suele tener en ciertas zonas cientos de metros, lo que genera una carga cercana al $2.7 \times 10^{19} kg$.

Además en estas proporciones el hielo presenta un comportamiento plástico, con un movimiento que en algunos casos alcanza velocidades de hasta 850 metros por año, transportando no sólo el hielo sino también grandes cantidades de material erosionado.

En el territorio de Groenlandia, el hielo provoca una carga de $3 \times 10^{18} kg$. Con esta cantidad de carga se ha estimado una depresión vertical del relieve de 500 metros.

b. Depósitos de Partículas.

Los grandes ríos del mundo transportan en su trayectoria grandes cantidades de partículas que se sedimentan en los estuarios. En el río Misissippi, se ha estudiado y determinado una cantidad de carga de $2 \times 10^{11} kg$ que en años de grandes inundaciones alcanza un valor de $8 \times 10^{11} kg$. Los hundimientos registrados han sido de 10 cm.

c. Precipitación.

Las lluvias con períodos estacionales y principalmente aquellas que se presentan debido a fenómenos extremos como los huracanes en América, los tifones en Europa y África o bien, los períodos de monzón en Asia, pueden alcanzar incluso los 10 000 mm de lámina de agua acumulada al año, con lo que son capaces de generar cargas tan grandes, que tengan la capacidad de modificar las condiciones físicas del planeta.

3. Oscilación del Polo Terrestre

Con la intención de definir de manera precisa este fenómeno y tomando en cuenta la falta de información sobre el tema, se decidió utilizar para este fin las notas de lectura del Doctor Petr Vaníček publicadas en Marzo de 1972. Para esto se realizó la traducción del Inglés al Español, respetando íntegramente el contenido original y las nomenclaturas utilizadas por el autor.

3.1 Ecuaciones de Rotación de Euler

3.1.1 *Definición de Sistemas de Coordenadas*

Permitámonos considerar un cuerpo físico B en un espacio tridimensional. Con el fin de poder describir su movimiento en el espacio, definamos los siguientes dos sistemas de coordenadas Cartesianos:

- I. $S \equiv (C; x, y, z)$, fijo, rectangular, positivo, centrado en C con ejes x, y, z;
- II. $S' \equiv (T; \xi, \eta, \zeta)$, rectangular, positivo y “ligado con B”. Dejemos que T sea por simplicidad, el centro de gravedad de B y dejemos a los ejes ξ, η, ζ orientados arbitrariamente por el momento.

Estaremos denotando los vectores expresados en S mediante letras Latinas, mientras que los vectores expresados en S' mediante letras griegas. Por otra parte, vamos a distinguir entre vectores libres:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k$$

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \vec{e}_k$$

Y los vectores (radios) de posición:

$$\vec{r}_p = x_p \vec{e}_1 + y_p \vec{e}_2 + z_p \vec{e}_3$$

$$\vec{\rho}_p = \xi_p \vec{e}_1 + \eta_p \vec{e}_2 + \zeta_p \vec{e}_3$$

Aquí denotamos los vectores unitarios en los ejes x,y,z mediante $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ y los vectores unitarios en los ejes ξ, η, ζ mediante $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Desde el momento en que hablamos de dinámica, debemos considerar todo el problema desde el punto de vista del tiempo.

3.1.2 Sistema Dinámico

Cuando dejamos a los vectores individuales ser dependientes del tiempo, debemos considerar la descripción de los puntos individuales (y del cuerpo B) como la descripción de un sistema dinámico. Cuando hablamos acerca de vectores variables en el tiempo, en realidad estamos hablando de las siguientes funciones:

$$\vec{a}(t) = \sum_{k=1}^3 a_k(t) \vec{e}_k(t)$$

$$\vec{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k(t) \vec{e}_k(t)$$

Y de manera similar:

$$\vec{r}_p(t) = x_p(t)\vec{e}_1(t) + y_p(t)\vec{e}_2(t) + z_p(t)\vec{e}_3(t)$$

$$\vec{\rho}_p(t) = \xi_p(t)\vec{\varepsilon}_1(t) + \eta_p(t)\vec{\varepsilon}_2(t) + \zeta_p(t)\vec{\varepsilon}_3(t)$$

Donde todas las cualidades individuales varían en el tiempo. Los vectores de posición variables en el tiempo pueden ser considerados desde el punto de vista dinámico como movimientos.

Cuando hablamos de $\vec{e}_k(t)$, $\vec{\varepsilon}_k(t)$, en realidad hablamos acerca de vectores que varían con respecto a otros sistema de coordenadas y no dentro del sistema de coordenadas que representan. Nótese que es muy complicado visualizar el sistema S' ligado con B, si el cuerpo B no es rígido. Más adelante veremos como estas dificultades pueden ser superadas.

3.1.3 Velocidades Relativas y Absolutas

Permitámonos asumir ahora que todas las funciones de tiempo que hemos de tratar, son homogéneas y poseen primera y segunda derivada con respecto al tiempo. En particular, esto significa que los movimientos, lo cuales vamos a investigar, son homogéneos también. Permitámonos además denotar mediante un punto las derivadas en el tiempo con respecto a S, y mediante una tilde las derivadas en el tiempo con respecto a S'. Podemos definir ahora las siguientes cuatro cantidades:

$$\dot{\vec{a}} = \sum_k \dot{a}_k \vec{e}_k$$

$$\tilde{\vec{a}} = \sum_k \tilde{a}_k \vec{\varepsilon}_k$$

Y:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3$$

$$\tilde{\vec{\rho}} = \tilde{\xi}\tilde{\vec{e}}_1 + \tilde{\eta}\tilde{\vec{e}}_2 + \tilde{\zeta}\tilde{\vec{e}}_3$$

Ya que, como lo habíamos dicho anteriormente, $\dot{\vec{e}}_k = \vec{0}$, $\tilde{\vec{e}}_k = \vec{0}$ ($k= 1, 2, 3$). La función $\dot{\vec{r}}$ es llamada usualmente velocidad absoluta (velocidad con respecto al sistema de coordenadas “absoluto” S) y $\tilde{\vec{\rho}}$ es conocido como velocidad relativa (tomada con respecto al sistema relativo S’).

La pregunta surge con frecuencia en la dinámica en cuanto a ¿Qué velocidad absoluta tiene un movimiento relativo $\vec{\rho}$? Con el fin de poder responder ésta importante pregunta, permitámonos investigar la derivada absoluta en el tiempo (punto) de un vector expresado en S’. Tenemos:

$$\dot{\vec{\alpha}}_k = \sum_k \dot{\alpha}_k \vec{e}_k + \sum_k \alpha_k \dot{\vec{e}}_k = \sum_k \tilde{\alpha}_k \vec{e}_k + \sum_k \alpha_k \dot{\vec{e}}_k = \tilde{\vec{\alpha}} + \sum_k \alpha_k \dot{\vec{e}}_k$$

Donde $\dot{\vec{e}}_k \neq \vec{0}$ si S’ “se mueve” con respecto a S.

Tomando el segundo término de la ecuación anterior, podemos denotarlo por $\vec{\beta}$:

$$\vec{\beta} = \sum_k \alpha_k \frac{d\vec{e}_k}{dt}$$

Y:

$$\beta_1 = \vec{\beta} \cdot \vec{e}_1 = \sum_k \alpha_k \frac{d\vec{e}_k}{dt} \cdot \vec{e}_1$$

$$\beta_2 = \vec{\beta} \cdot \vec{e}_2 = \sum_k \alpha_k \frac{d\vec{e}_k}{dt} \cdot \vec{e}_2$$

$$\beta_3 = \vec{\beta} \cdot \vec{e}_3 = \sum_k \alpha_k \frac{d\vec{e}_k}{dt} \cdot \vec{e}_3$$

Por otra parte, tenemos:

$$\frac{d(\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_k)}{dt} = 2\vec{\varepsilon}_k \cdot \frac{d\vec{\varepsilon}_k}{dt} = 0$$

Debido a que:

$$\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_k = 1$$

Por lo tanto se obtiene para por ejemplo β_1 :

$$\beta_1 = \alpha_2 \frac{d\vec{\varepsilon}_2}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_1 + \alpha_3 \frac{d\vec{\varepsilon}_3}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_1$$

Pero también podemos escribir:

$$\frac{d(\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_j)}{dt} = \frac{d\vec{\varepsilon}_k}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_j + \vec{\varepsilon}_k \cdot \frac{d\vec{\varepsilon}_j}{dt} = 0 \quad j \neq k$$

La cuál igualmente proviene de:

$$\vec{\varepsilon}_k \cdot \vec{\varepsilon}_j = 0 \quad j \neq k$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación para β_1 , obtenemos:

$$\beta_1 = -\left(\frac{d\vec{\varepsilon}_1}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_2\right) \alpha_2 + \left(\frac{d\vec{\varepsilon}_3}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_1\right) \alpha_3$$

Y análogamente:

$$\beta_2 = -\left(\frac{d\vec{\varepsilon}_2}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_3\right) \alpha_3 + \left(\frac{d\vec{\varepsilon}_1}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_2\right) \alpha_1$$

$$\beta_3 = -\left(\frac{d\vec{\varepsilon}_3}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_1\right) \alpha_1 + \left(\frac{d\vec{\varepsilon}_2}{dt} \cdot \vec{\varepsilon}_3\right) \alpha_2$$

Denotando los escalares $\dot{\vec{\varepsilon}}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2$, $\dot{\vec{\varepsilon}}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_3$, $\dot{\vec{\varepsilon}}_3 \cdot \vec{\varepsilon}_1$ por ω_3 , ω_1 , ω_2 , respectivamente,

podemos escribir las ecuaciones anteriores de la siguiente manera:

$$\beta_1 = \omega_2 \alpha_3 - \omega_3 \alpha_2$$

$$\beta_2 = \omega_3 \alpha_1 - \omega_1 \alpha_3$$

$$\beta_3 = \omega_1 \alpha_2 - \omega_2 \alpha_1$$

Definiendo un nuevo vector $\vec{\omega}$ en S' :

$$\vec{\omega} = \sum_k \omega_k \vec{e}_k$$

Estas tres ecuaciones escalares pueden ser representadas nuevamente en forma de una ecuación vectorial:

$$\vec{\beta} = \vec{\omega} \times \vec{\alpha}$$

O:

$$\vec{\beta} = \Omega \vec{\alpha}$$

Donde: Ω es el tensor anti simétrico:

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Perteneciente a ω .

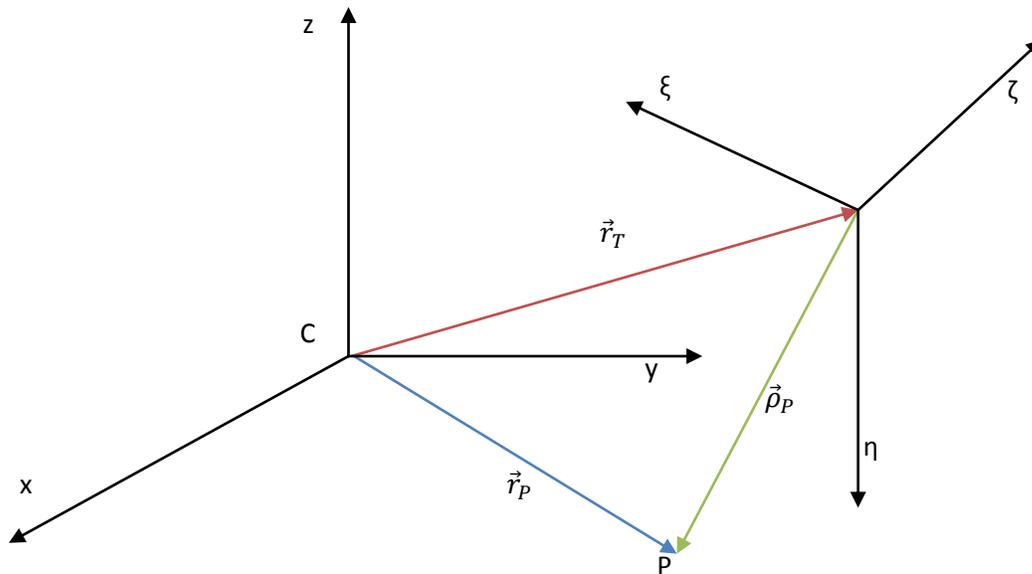
Podemos escribir finalmente para $\dot{\vec{\alpha}}$:

$$\dot{\vec{\alpha}} = \tilde{\vec{\alpha}} + \vec{\omega} \times \vec{\alpha} = \tilde{\vec{\alpha}} + \Omega \vec{\alpha}$$

Nótese que aplicando ésta fórmula, válida para cualquier vector en S' , para $\vec{\omega}$ tenemos:

$$\dot{\vec{\omega}} = \tilde{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \tilde{\vec{\omega}}$$

Este resultado puede usarse ahora para responder la pregunta original ¿Cuál es la



velocidad absoluta de un punto, cuyo movimiento es conocido únicamente en el sentido relativo?

Del diagrama podemos escribir:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_T + \vec{\rho}_P$$

Por lo tanto:

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_T + \dot{\vec{\rho}}_P$$

Pero de la fórmula para la derivada absoluta en el tiempo de un vector expresado en S' tenemos:

$$\dot{\vec{\rho}}_P = \tilde{\dot{\rho}}_P + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

De modo que:

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_T + \tilde{\dot{\rho}}_P + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

Supóngase ahora que el punto P es parte del cuerpo físico B. Después de la última ecuación se puede dar la siguiente interpretación física.

La velocidad absoluta de P (con respecto a S; es decir, el espacio absoluto alrededor del cuerpo) se compone de tres velocidades individuales:

1. $\dot{\vec{r}}_T$. La velocidad de traslación del cuerpo B (o su centro de gravedad T, que significa lo mismo) con respecto a S;
2. $\tilde{\rho}_P$. La velocidad de traslación de P dentro de B (con respecto a T) esto describe la expansión o contracción de B;
3. $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$. El término que vamos a tratar de interpretar ahora.

Asumamos el cuerpo B para ser un momento rígido, es decir, $\tilde{\rho}_P = \vec{0}$, y éste no tiene ninguna velocidad de traslación con respecto a S; es decir, $\dot{\vec{r}}_T = \vec{0}$. Sin pérdida de generalidad, podemos ahora situar a C coincidiendo con T y tener:

$$\dot{\vec{r}}_T = \vec{0}$$

Por lo tanto, la velocidad absoluta de P se reduce a:

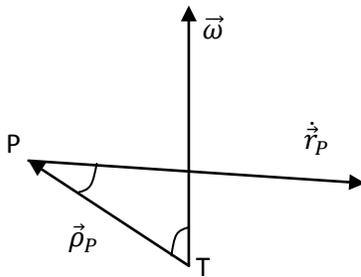
$$\dot{\vec{r}}_P = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P$$

Y la única libertad restante para el punto P es la rotación alrededor de T a una distancia constante pero en cualquier dirección.

Esto significa que ambos, $\vec{\omega}$ y $\vec{\rho}_P$ son perpendiculares a $\dot{\vec{r}}_P$.

Por otra parte

$$v = |\dot{\vec{r}}| = |\vec{\omega}| |\vec{\rho}_P| \sin(\angle \vec{\omega} \vec{\rho}_P) = \omega \rho_P \sin \angle \vec{\omega} \vec{\rho}_P$$



Pero $\rho_P \sin \angle \vec{\omega} \vec{\rho}_P$ es la distancia perpendicular de P a $\vec{\omega}$. De la física elemental sabemos que la velocidad tangencial v de una partícula que se encuentra

rotando alrededor de un centro de rotación con velocidad angular ω' en una distancia r' , está dada por:

$$v = \omega' r'$$

Por lo tanto el vector $\vec{\omega}$ debe ser interpretado como siempre coincidente con el eje de rotación instantáneo de B y teniendo el valor absoluto dado por la velocidad angular instantánea de B. Por consecuencia es conocido como el vector de rotación de B. Es fácil notar que su significado no cambia incluso para el caso general de traslación, cuerpo no rígido. La tercera velocidad en la fórmula general puede entonces entenderse como velocidad rotacional de B.

3.1.4 Aceleraciones Relativa y Absoluta

No es difícil notar cómo vamos a definir las segundas derivadas de los vectores individuales con respecto a su sistema de coordenadas alternativo. Digamos ahora que podemos definir $\ddot{\vec{a}}, \hat{\vec{a}}, \ddot{\vec{r}}, \hat{\vec{\rho}}$ de la misma manera en la que lo hicimos para las primeras derivadas. Las últimas dos cantidades se conocen como aceleraciones absoluta y relativa respectivamente.

La misma pregunta surge aquí sobre ¿Cómo expresar la aceleración absoluta de un punto (movimiento) que es conocido únicamente en S'? Nuevamente escribiremos en primer lugar:

$$\ddot{\vec{a}} = \ddot{\vec{a}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{a}}$$

Usando la fórmula para $\dot{\vec{a}}$ y tomando su derivada con respecto a S.

Aplicando la misma regla a $\ddot{\vec{a}}$ como la aplicamos anteriormente a $\dot{\vec{a}}$ tenemos:

$$\ddot{\vec{a}} = \ddot{\vec{a}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{a}$$

(Pero $\dot{\vec{a}} + \overbrace{(\dot{\vec{a}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{a})} = \ddot{\vec{a}} + \ddot{\vec{\omega}} \times \vec{a} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{a}} = \ddot{\vec{a}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{a}} \neq \ddot{\vec{a}}$)

Por otro lado:

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{\alpha}} = \vec{\omega} \times (\ddot{\vec{\alpha}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\alpha}}) = \vec{\omega} \times \ddot{\vec{\alpha}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{\alpha}})$$

Por lo tanto, obtenemos finalmente:

$$\ddot{\vec{\alpha}} = \ddot{\vec{\alpha}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\alpha}} + \dot{\vec{\omega}} \times \dot{\vec{\alpha}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{\alpha}})$$

Así pues, podemos escribir para la aceleración absoluta de P:

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_T + \ddot{\vec{\rho}}_P = \ddot{\vec{r}}_T + \ddot{\vec{\rho}}_P + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_P + \dot{\vec{\omega}} \times \dot{\vec{\rho}}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_P)$$

Que es la fórmula que hemos estado buscando.

Debemos notar que para un cuerpo rígido B, $\ddot{\vec{\rho}}_P = \ddot{\vec{\rho}}_P = \vec{0}$ y la fórmula se simplifica considerablemente. Sin embargo, debemos interpretar por supuesto al punto P con movimiento con respecto a B (lo que sea que esto signifique). Así, el término $2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_P$ se conoce cómo la aceleración de Coriolis. Es posible notar que la aceleración de Coriolis es cero cuando P no se mueve con respecto a B (S') o cuando éste se mueve de manera paralela al eje instantáneo de rotación. El término $\dot{\vec{\omega}} \times \dot{\vec{\rho}}_P$ no posee ningún nombre fijo en física. Sin embargo, C. Lanczos (1949), sugiere llamarlo aceleración de Euler. Que por ver si con el tiempo éste nombre se adopta de forma general o no.

3.1.5 Momento de Movimiento

Es bien conocido de la mecánica elemental que la cantidad vectorial:

$$\vec{M}_{PQ} = (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \dot{\vec{r}}_P m_P$$

Donde P y Q son dos puntos y m_P es la masa atribuida a P (masa de P), es el momento de movimiento de P con respecto a Q. Aquí Q es considerado como inmóvil en S. Podemos notar fácilmente que si Q es considerado de forma que coincida con C, el origen de S, tenemos especialmente:

$$\vec{M}_{PQ} = \vec{r}_P \times \dot{\vec{r}}_P m_P$$

Podemos definir el momento de movimiento de un cuerpo físico B con respecto a un punto Q como la sumatoria de momentos de de movimiento de todos los puntos en B. Esto se escribe formalmente de la siguiente manera:

$$\vec{M}_{BQ} = \int_{P \in B} \{(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \dot{\vec{r}}_P m_P\}$$

En particular, si B es un área integrable (en el sentido Riemaniano), debemos expresar la masa de cualquier sub área diferencial dB como σdB , donde σ se conoce como la densidad de B y puede ser considerada como una función de \vec{r}_P . Con tal de que σ tenga en B únicamente un número finito de superficies de discontinuidad, el momento anterior se puede escribir como sigue:

$$\vec{M}_{BQ} = \int_B \{(\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \dot{\vec{r}} \sigma\} dB$$

El momento de movimiento de un cuerpo físico, el cuál vamos a asumir siempre a partir de ahora, estará dado por:

$$\vec{M}_{BC} = \int_B (\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \sigma) dB$$

3.1.6 Momento de Fuerza

El vector:

$$\vec{N}_{PQ} = (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_P m_P$$

Define la cantidad física conocida en mecánica como el momento de fuerza, actuando en P con respecto a Q. La fuerza \vec{f}_P actuando en P se define como:

$$\vec{f}_P = \ddot{\vec{r}}_P m_P$$

Rigurosamente, sólo deberíamos hablar aquí sobre “fuerzas Newtonianas” que están definidas por la fórmula anterior. Como un caso especial, tenemos:

$$\vec{N}_{PC} = \vec{r}_P \times \ddot{\vec{r}}_P m_P$$

De manera análoga a § 1.5, podemos definir el momento de fuerza, actuando sobre un cuerpo rígido B, con respecto a Q como:

$$\vec{N}_{BQ} = \int_B \{(\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}\sigma\} dB$$

En particular:

$$\vec{N}_{BC} = \int_B (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\sigma) dB$$

Podemos notar que el momento de una fuerza (Newtoniana) es una derivada absoluta en el tiempo del momento de movimiento, para ambos casos, un punto o bien, un cuerpo físico rígido. Para probar esto, permitámonos tomar para este caso el momento del cuerpo físico rígido B, con respecto a un punto inmóvil Q:

$$\vec{M}_{BQ} = \int_B \{(\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \dot{\vec{r}}\sigma\} dB$$

Su derivada absoluta en el tiempo se lee:

$$\dot{\vec{M}}_{BQ} = \frac{d}{dt} \left(\int_B \vec{r} \times \dot{\vec{r}}\sigma dB - \int_B \vec{r}_Q \times \dot{\vec{r}}\sigma dB \right) = \int_B \{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\}\sigma dB - \int_B \vec{r}_Q \times \ddot{\vec{r}}\sigma dB$$

Puesto que $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ debido a la rigidez de B y además tenemos:

$$\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$$

Terminaremos con la expresión:

$$\dot{\vec{M}}_{BQ} = \int_B \{(\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}\sigma\} dB$$

La cuál no es otra cosa que \vec{N}_{BQ} tal como se definió anteriormente.

A partir de ahora nos referiremos únicamente a cuerpos físicos rígidos, para los cuáles:

$$\tilde{\vec{\rho}}_P = \tilde{\vec{\rho}}_P = \vec{0}, P \in B \quad \text{y} \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

3.1.7 Tensor de Inercia, su uso en la Formulación del Momento de Movimiento de un Cuerpo Rígido

Vamos ahora a expresar el momento de fuerza que actúa en el cuerpo rígido B con respecto a C, usando el vector de rotación de B. Sustituyendo a $\dot{\vec{r}}$ en la expresión para \vec{M}_{BC} , la ecuación final de § 3 obtenemos:

$$\vec{M}_{BC} = \int_B \{\vec{r} \times (\dot{\vec{r}}_T + \vec{\omega} \times \vec{\rho})\sigma\} dB$$

El vector de posición absoluto \vec{r} también puede sustituirse usando la relación:

$$\vec{r} = \vec{r}_T + \vec{\rho}$$

Lo que nos da:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{BC} &= \int_B \{(\vec{r}_T + \vec{\rho}) \times (\dot{\vec{r}}_T + \vec{\omega} \times \vec{\rho})\sigma\} dB \\
&= \int_B (\vec{r}_T \times \dot{\vec{r}}_T \sigma) dB + \int_B \{\vec{r}_T \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\sigma\} dB + \int_B \{\vec{\rho} \times \dot{\vec{r}}_T \sigma\} dB \\
&\quad + \int_B \{\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\sigma\} dB
\end{aligned}$$

Aquí \vec{r}_T , $\dot{\vec{r}}_T$, $\vec{\omega}$, pueden considerarse constantes desde el punto de vista de la integración, debido a que éstas cantidades describen algunas propiedades del cuerpo completo como tal. Denotando la masa del cuerpo B con μ , es decir,

$$\mu = \int_B \sigma dB,$$

Podemos por lo tanto reescribir la ecuación anterior como sigue:

$$\vec{M}_{BC} = \vec{r}_T \times \dot{\vec{r}}_T \mu + \vec{r}_T \times \left(\vec{\omega} \times \int_B \vec{\rho} \sigma dB \right) - \vec{r}_T \times \int_B \vec{\rho} \sigma dB + \int_B \{\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\sigma\} dB$$

De la mecánica elemental sabemos que el vector de posición del centro de gravedad está dado por:

$$\vec{\rho}_T = \frac{1}{\mu} \int_B \vec{\rho} \sigma dB$$

Pero debido a nuestra elección particular de S' , $\vec{\rho}_T = \vec{0}$, y así:

$$\int_B \vec{\rho} \sigma dB = \vec{0}$$

Por lo tanto tenemos finalmente:

$$\vec{M}_{BC} = \vec{r}_T \times \dot{\vec{r}}_T \mu + \int_B \{\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\sigma\} dB$$

Hemos visto en §1.3 que el producto vectorial (cruz) de dos vectores, puede también escribirse como el producto del tensor anti simétrico perteneciente al primer vector, con el segundo vector. Con el afán de poder utilizar este conocimiento, permitámonos reescribir la función vectorial sub integral de la ecuación anterior como:

$$\vec{q} = \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})\sigma = -\vec{\rho} \times (\vec{\rho} \times \vec{\omega})\sigma$$

Expresando el producto vectorial entre paréntesis, utilizando el tensor anti simétrico R:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{vmatrix}$$

Podríamos escribir:

$$\vec{q} = -\vec{\rho} \times R\vec{\omega}\sigma = -R(R\vec{\omega})\sigma = -R^2\vec{\omega}\sigma$$

Para $R^2 = R \cdot R$ obtenemos:

$$R^2 = \begin{vmatrix} -\zeta^2 - \eta^2 & \xi\eta & \xi\zeta \\ \eta\xi & -\xi^2 - \zeta^2 & \eta\zeta \\ \zeta\xi & \zeta\eta & -\eta^2 - \xi^2 \end{vmatrix}$$

Como el lector puede fácilmente verificar.

Sustituyendo este resultado de vuelta en la integración, tenemos:

$$\int_B \vec{q} dB = - \int_B R^2 \vec{\omega} \sigma dB = \int_B -R^2 \sigma dB \cdot \vec{\omega}$$

La integral en la última ecuación es conocida como tensor de inercia de B (evaluado en S') y puede escribirse explícitamente como:

$$\mathcal{Y} = \begin{vmatrix} \int_B (\zeta^2 + \eta^2) \sigma dB & \int_B \xi \eta \sigma dB & \int_B \xi \zeta \sigma dB \\ \int_B \xi \eta \sigma dB & \int_B (\xi^2 + \zeta^2) \sigma dB & \int_B \eta \zeta \sigma dB \\ \int_B \xi \zeta \sigma dB & \int_B \eta \zeta \sigma dB & \int_B (\eta^2 + \xi^2) \sigma dB \end{vmatrix}$$

Ésta es obviamente simétrica y es muy frecuentemente denotada como:

$$\mathcal{Y} = \begin{vmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{vmatrix}$$

Los componentes (elementos) de su diagonal son conocidos como momentos de inercia con respecto a los ejes individuales ξ , η , ζ . Los elementos fuera de la diagonal son normalmente llamados productos de inercia o momentos de desviación. Debemos notar que para una selección diferente de S' debemos tener un tensor de inercia diferente.

Actualmente es fácil ver que el tensor de inercia se puede determinar para cualquier punto dentro o fuera de B, y sus componentes dependen también de la elección de la dirección de los ejes individuales. El tensor de inercia que hemos desarrollado se conoce como el tensor de inercia central debido a que se encuentra referido al centro de gravedad.

Volviendo al momento de movimiento original podemos ahora reescribirlo como:

$$\vec{M}_{BC} = \vec{r}_T \times \dot{\vec{r}}_T \mu + \mathcal{Y} \vec{\omega}$$

Comparando ésta ecuación con la del momento de movimiento de un punto, podemos notar que el momento de movimiento de un cuerpo rígido está dado por la suma de:

- i. El momento de movimiento del centro de gravedad de B (con la masa de todo el cuerpo atribuida a éste).
- ii. El momento de movimiento del cuerpo con respecto a su propio centro de gravedad. La última oración se puede verificar fácilmente escribiendo la ecuación superior para $C \equiv T$:

$$\vec{M}_{BT} = \mathcal{Y}\vec{\omega}$$

3.1.8 Ecuación de Euler en su Forma General

Finalmente nos encontramos en la posibilidad de formular la ecuación de Euler expresando el momento de fuerza (actuando en un cuerpo rígido) con respecto a su centro de gravedad, como una función del vector de rotación del cuerpo.

Hemos visto en §1.6 que $\dot{\vec{M}}_{BQ} = \vec{N}_{BQ}$. En particular tenemos:

$$\dot{\vec{M}}_{BC} = \vec{N}_{BC}$$

Tomando la fórmula para \vec{M}_{BC} derivada en §1.7 y aplicándole la regla desarrollada en §1.3 para evaluar la derivada absoluta en el tiempo de un vector expresado en S' (entendemos que $\mathcal{Y}\vec{\omega}$ es un vector expresado en S') obtenemos:

$$\vec{N}_{BC} = \dot{\vec{r}}_T \times \ddot{\vec{r}}_T \mu + \mathcal{Y}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathcal{Y}\vec{\omega}$$

Aquí, \mathcal{Y} es por supuesto, considerada como independiente del tiempo, a partir de que B es rígido.

Tomando especialmente $C \equiv T$ tenemos:

$$\vec{N}_{BT} = \mathcal{Y} \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \mathcal{Y} \vec{\omega}$$

Ésta última es la famosa fórmula de Euler en su forma general. Ésta se puede entender describiendo la rotación $\vec{\omega}$ de un cuerpo rígido alrededor del eje instantáneo de rotación que pasa a través de su centro de gravedad T como una función de la distribución de masa contenida en B (expresada por promedios de \mathcal{Y}) y el momento de fuerzas externas (con respecto a T) actuando en el cuerpo.

Nótese que en §1.3 hemos derivado:

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}$$

Por lo tanto, las aceleraciones angulares absoluta y relativa son idénticas. Así, la ecuación de Euler puede ser utilizada también para describir la rotación de B con respecto a S. Sin embargo, es algo que no realizaremos aquí.

3.1.9 *Elipsoide de Inercia y Principales Ejes de Inercia*

Es conocido de mecánica, que los momentos de inercia de un cuerpo rígido B con respecto a todos los posibles ejes que pasan a través de un punto Q, cuando interpretamos los recíprocos de sus raíces cuadradas como longitudes en los ejes apropiados, crean una superficie elipsoidal centrada en Q. Ésta superficie elipsoidal se conoce como elipsoide de inercia perteneciente a Q de B. En un sistema cartesiano concéntrico con el elipsoide, digamos $S'' \equiv (Q; X, Y, Z)$, la superficie elipsoidal está dada por:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DXY - 2EXZ - 2FYZ = 1$$

La forma, orientación y tamaño del elipsoide de inercia varían de punto a punto. Algunas veces hablamos sobre puntos en los que el elipsoide *degenera*

a un elipsoide de dos ejes (rotacional) o a una esfera como esferoidal o puntos esféricos. Si sucede que Q coincide con el centro de gravedad, entonces hablamos de elipsoide central de inercia. Se puede mostrar que el elipsoide central de inercia es el más grande de todos, es aquel que posee el volumen máximo posible.

Para poder notar cuál es la conexión entre el elipsoide de inercia y el tensor de inercia permitámonos considerar el elipsoide central de inercia de manera tal que tanto el elipsoide como el tensor estén referidos al mismo punto T. Para comenzar, podemos mostrar que la siguiente es la ecuación de un elipsoide:

$$\vec{\rho} \mathcal{Y} \vec{\rho} = 1$$

Donde: $\vec{\rho} = \xi \vec{e}_1 + \eta \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_3$ es un vector de posición. Tenemos:

$$\mathcal{Y} \vec{\rho} = (A\xi - D\eta - E\zeta) \vec{e}_1 + (-D\xi + B\eta - F\zeta) \vec{e}_2 + (-E\xi - F\eta + C\zeta) \vec{e}_3$$

Y multiplicando este vector por $\vec{\rho}$ nuevamente, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\rho} \mathcal{Y} \vec{\rho} &= A\xi^2 - D\xi\eta - E\xi\zeta - D\eta\xi + B\eta^2 - F\eta\zeta - E\zeta\xi - F\zeta\eta + C\zeta^2 = A\xi^2 + B\eta^2 + \\ &C\zeta^2 - 2D\xi\eta - 2E\xi\zeta - 2F\eta\zeta = 1 \end{aligned}$$

De esta manera, el tensor central de inercia \mathcal{Y} describe un elipsoide como se demostró en la ecuación anterior. Similar propiedad ocurre para el tensor de inercia en cualquier otro punto.

3.1.10 Sistema de Coordenadas Natural Ligado con un Cuerpo Físico,

Momentos Principales de Inercia

Es conocido de la geometría analítica que si los ejes del elipsoide coinciden con los ejes del sistema cartesiano utilizado para describirlo, su ecuación se lee:

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{c}\right)^2 = 1$$

Permitámonos ahora de nuestro tensor de inercia \mathcal{Y} , encontrar su eigenvalores λ_1 , λ_2 , λ_3 a partir de la bien conocida ecuación algebraica de tercer orden:

$$\det(\mathcal{Y} - \lambda\epsilon) = 0$$

Donde ϵ es la matriz identidad y λ es la variable. Entonces podemos evaluar los eigenvectores $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ de \mathcal{Y} de las ya conocidas ecuaciones:

$$\mathcal{Y}\vec{\epsilon}_i = \lambda_i\vec{\epsilon}_i \quad i = 1,2,3$$

Y tomando éstos (ellos crearán una base vectorial positiva ortogonal en S') como nuevos ejes cartesianos. El nuevo sistema puede denotarse por $S'' \equiv (T; \xi', \eta', \zeta')$. El tensor \mathcal{Y} en este nuevo sistema de coordenadas se verá así:

$$\mathcal{Y} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{vmatrix}$$

No es difícil notar que la ecuación del elipsoide central de inercia en S'' tomará la siguiente forma:

$$\vec{\rho}\mathcal{Y}\vec{\rho} = \begin{vmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{vmatrix} \|A'\xi' \quad B'\eta' \quad C'\zeta'\| = A'\xi'^2 + B'\eta'^2 + C'\zeta'^2$$

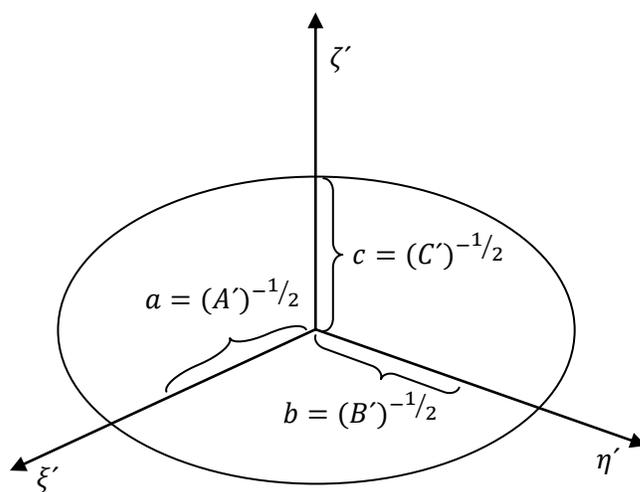
$$= 1$$

Esto puede ser interpretado como sigue: los eigenvectores del tensor de inercia coinciden con los ejes del elipsoide que describe. Además, los elementos de la diagonal A', B', C' de la forma diagonal del tensor de inercia, conocidos en mecánica como los momentos principales de inercia, son iguales al cuadrado de los valores recíprocos de los ejes individuales del elipsoide. Los momentos principales de inercia tienen la propiedad que uno de ellos es el más grande y uno

de ellos es el más pequeño de todos los momentos de inercia posibles de un punto. Por lo tanto, las direcciones con respecto a los que son tomados (los eigenvectores o los momentos principales de inercia) deben de coincidir con los ejes geométricos del elipsoide de inercia. A partir de que no sólo las direcciones de los ejes, sino también las longitudes son las mismas, podemos finalmente concluir que el elipsoide:

$$\vec{\rho}^T \mathcal{Y} \vec{\rho} = 1$$

Es el elipsoide de inercia. En nuestro caso particular, debemos por supuesto hablar sobre los momentos de inercia centrales principales y elipsoide de



inercia central. Además podemos notar que los momentos principales de inercia describen las propiedades inerciales de B (con respecto al punto donde el tensor de inercia es evaluado) únicamente. Los productos de inercia pueden entonces

considerarse como virtuales únicamente y dependientes de la elección de S' . Por otro lado, como debemos conocer 6 cantidades para determinar un elipsoide, únicamente debemos conocer bien las 3 direcciones de los ejes y sus magnitudes o todos los 6 elementos del tensor de inercia.

El sistema S'' es conocido como sistema natural de coordenadas ligado con B. Éste puede considerarse como natural porque es definido únicamente por las propiedades inerciales de B y no necesita la identificación de tres puntos que

de otra manera son necesarios para definir un sistema cartesiano dentro de B. Debemos notar que sería también natural el uso de este sistema para describir un cuerpo no-rígido.

3.1.11 Simplificación de la Ecuación de Euler

Volviendo a la ecuación de Euler (§ 3.1.8) podemos notar que no hay nada que nos detenga para formularla en el sistema natural de coordenadas. Recordemos que los ejes ξ, η, ζ fueron orientados arbitrariamente (véase §1.1). Por lo tanto podemos ahora especificar su orientación y entender a partir de ahora que S' es el sistema natural de coordenadas.

Entonces podemos escribir la ecuación de Euler como sigue:

$$\begin{aligned} \|N_1 \quad N_2 \quad N_3\| &= \left\| \begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right\| \left(\left\| \begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{array} \right\| \right) \\ &= \|A\tilde{\omega}_1 \quad B\tilde{\omega}_2 \quad C\tilde{\omega}_3\| + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} A\omega_1 \\ B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{array} \right\| \\ &= \|A\tilde{\omega}_1 \quad B\tilde{\omega}_2 \quad C\tilde{\omega}_3\| \\ &\quad + \|(C - B)\omega_2\omega_3 \quad (A - C)\omega_1\omega_3 \quad (B - A)\omega_1\omega_2\| \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial vectorial, normalmente se escribe como un sistema de tres ecuaciones diferenciales escalares de primer orden para las componentes del vector de rotación. Se conocen como las ecuaciones diferenciales de Euler para la rotación de un cuerpo rígido y se leen:

$$A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 = N_1$$

$$B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_3\omega_1 = N_2$$

$$C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 = N_3$$

Para recapitular, debemos decir que la ecuación de Euler describe la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje instantáneo de rotación que va a través de su centro de gravedad como la causada por el momento N de fuerzas Newtonianas exteriores (con respecto a T) en el sistema natural de coordenadas. Podemos darnos cuenta que cada ecuación se puede derivar a partir de otra mediante el intercambio cíclico de las cantidades individuales. No hace falta decir que éstas son completamente equivalentes a la forma general derivada en § 1.8. Muchas veces se hace referencia a ellas como las ecuaciones de un giróscopo. El sistema de ecuaciones de Euler tiene solución únicamente para una estrecha familia de casos especiales.

3.2 La oscilación del Polo Terrestre

3.2.1 *La Tierra Rígida como un Giróscopo*

Podemos ahora aplicar la teoría a la tierra idealizada. La tierra podría en una primera aproximación considerar un enorme giróscopo rígido, girando alrededor de su eje instantáneo de rotación, que va a través de su centro de gravedad, con un periodo de un día sideral. Éste es por supuesto, sólo uno de una gran serie de movimientos que la Tierra lleva a cabo (rotación alrededor del sol, rotación alrededor del centro de nuestra galaxia, etc.). El giro diario se puede estudiar desde el punto de vista del espacio alrededor de la Tierra. Los estudios de esta

clase revelan la precesión y la nutación del eje de rotación de la Tierra. Estos movimientos sin embargo no son el objeto de nuestro estudio en esta ocasión.

El propósito de nuestro estudio es el eje de rotación (giro) desde el punto de vista de la tierra. Nuevamente recordamos que el vector $\vec{\omega}$ y sus derivadas en el tiempo en la ecuación de Euler se toman con respecto al sistema natural de coordenadas referido al cuerpo (en nuestro caso la Tierra). Por lo tanto, la solución de la ecuación de Euler nos lleva directamente al vector de rotación visto desde la Tierra.

En una primera aproximación, la Tierra puede considerarse como un giróscopo libre de fuerzas, es decir, que no existen fuerzas externas que generen algún momento en él (con respecto a su centro de gravedad). Además, en una primera aproximación, dos de sus momentos de inercia pueden considerarse iguales a partir de que la Tierra es aproximadamente rotacionalmente simétrica alrededor de su eje de rotación. Permitámonos entonces denominar al semieje menor del elipsoide central de inercia (elipsoide de rotación) mediante ζ , y a los otros dos ejes cuya orientación no es necesario especificar, mediante ξ y η . Las ecuaciones de Euler pueden ahora escribirse como:

$$A \frac{d\omega_\xi}{dt} + (C - A)\omega_\eta\omega_\zeta = 0$$

$$A \frac{d\omega_\eta}{dt} + (A - C)\omega_\zeta\omega_\xi = 0$$

$$C \frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0$$

3.2.2 Solución de las Ecuaciones de Euler para una Tierra Rígida, Período de Euler

Las ecuaciones de Euler que describen la rotación aproximada de la tierra (vista desde la Tierra) pueden ahora ser resueltas. Resolviendo en primer lugar la tercera ecuación tenemos:

$$\omega_z = \text{constante} = \mu$$

Además, denotando la relación $(C - A)/A$ mediante h , podemos reescribir las primeras dos ecuaciones:

$$\dot{\omega}_\xi + h\mu\omega_\eta = 0$$

$$\dot{\omega}_\eta + h\mu\omega_\xi = 0$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, lo transformamos en dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

$$\ddot{\omega}_\xi + h^2\mu^2\omega_\xi = 0$$

$$\ddot{\omega}_\eta + h^2\mu^2\omega_\eta = 0$$

Esto se hace diferenciando la primera (segunda) ecuación y sustituyendo para $\dot{\omega}_\eta(\dot{\omega}_\xi)$ en la segunda (primera) ecuación. Nótese que utilizamos el punto para describir la derivada relativa en el tiempo a partir de que $\dot{\vec{\omega}} = \tilde{\vec{\omega}}$, como se vio en § 1.3. La segunda derivada debe entenderse también como relativa.

Evidentemente ambas ecuaciones son las ecuaciones de movimientos armónicos simples. Resolviendo la primera ecuación tenemos:

$$\omega_\xi = \kappa \cos(h\mu t + \psi)$$

Donde κ y ψ son constantes de integración. Sustituyendo este resultado de vuelta en la ecuación de primero orden de arriba, obtenemos:

$$-\kappa \sin(h\mu t + \psi) \cdot h\mu + h\mu\omega_\eta = 0$$

Por lo tanto:

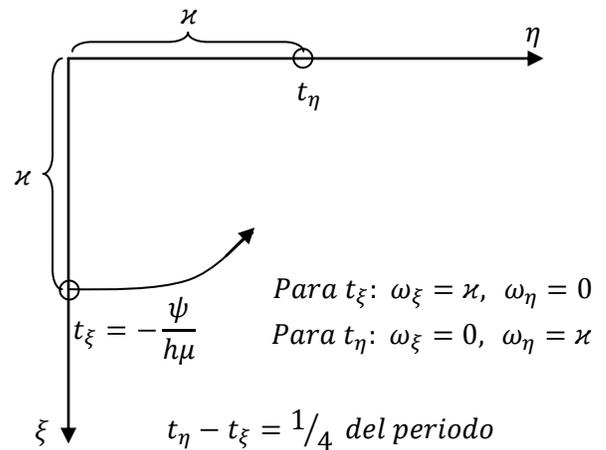
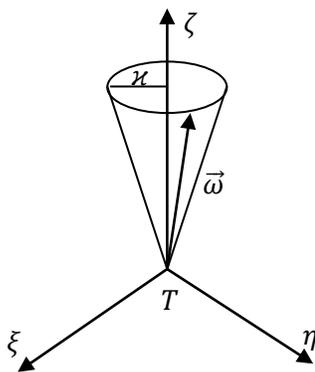
$$\omega_\eta = \kappa \sin(h\mu t + \psi)$$

No es necesario decir que obtenemos soluciones ω_ξ , ω_η , cuando resolvemos primero la ecuación para ω_η .

Cabe señalar que la velocidad angular instantánea $\|\vec{\omega}\|$ de un cuerpo rígido debe ser constante:

$$\omega^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 = \kappa^2 + \mu^2 = \text{constante}$$

Por otra parte podemos notar que el eje de rotación instantáneo $\vec{\omega}$ viaja alrededor del eje principal de inercia ζ en un cono circular. Ambas componentes (ω_ξ , ω_η) poseen la misma amplitud y retraso de fase de 90° . Adicionalmente, se puede notar que el movimiento tiene un sentido anti horario cuando es visto desde el norte:



Finalmente podemos determinar el periodo de la oscilación:

$$P_E = 2\pi/(\mu h)$$

Tomando $\mu = \omega_\zeta \approx 2\pi/(1 \text{ día sideral})$ - basados en la consideración que la parte mayoritaria de la velocidad angular actual de la Tierra puede tomarse con respecto a ζ (κ en unidades angulares es de hecho muy pequeña)- y $h = 1/305$ [Melchior, 1966] determinada a partir de la precesión y nutación de la Tierra, tenemos:

$$P_E \sim 303 \text{ días solares}$$

Este período fue determinado primeramente por Euler y actualmente se sigue denominando con su nombre. Éste es el periodo de oscilación del polo terrestre (libre de nutación y libre de movimiento) para una tierra rígida.

El valor de κ puede obtenerse a partir de datos experimentales, ψ depende de la elección del tiempo de origen.

3.2.3 Tierra No Rígida, Período de Chandler

Fue establecido por Chandler [1891] el hecho de que la actual oscilación del polo es mayor que la predicha alrededor de un 40%. La explicación para este fenómeno fue generada por Newcombe [1892] atribuida a la no rigidez de la Tierra. El valor del factor de incremento está dado por [Tomaschek, 1957]:

$$1/(1 - 1.07\kappa)$$

Donde κ es una función que describe la relación del potencial adicional producido por una deformación al potencial de la fuerza deformante. Ésta función fue introducida por Love [1909] y se conoce como el segundo número de Love. Existe

también el primer número de Love h , con el cuál no trataremos en esta ocasión. El desarrollo teórico detrás de la fórmula de arriba es algo complicado y por lo tanto no se aborda en este tratado. Permitámonos mencionar que el valor de κ depende de la frecuencia de la fuerza deformante (la Tierra responde elásticamente a las tensiones con periodos cortos y plásticamente a las tensiones con periodos largos). Los dos números de Love junto a otras dos funciones describen completamente las propiedades elásticas de la Tierra.

Existen básicamente dos tipos de observaciones que nos permiten determinar el valor de κ . Uno son las observaciones de las mareas terrestres, el segundo es la oscilación del polo. Los análisis de ambos indican aproximadamente el mismo valor para κ , esto es, 0.28 – 0.29 [Munk y McDonald, 1960; Melchior, 1966; Jeffreys, 1970]. El correspondiente periodo:

$$P_C = P_E / (1 - 1.07\kappa)$$

Conocido como Período de Chandler, ese encuentra entonces entre 433 y 439 días solares.

3.2.4 Excitación y Amortiguación de la Oscilación

Hemos visto que en el caso de una Tierra rígida, en la que no actúan fuerzas externas, la amplitud κ de la oscilación debe mantenerse constante. El hecho de que la tierra no es rígida, así como la presencia de fuerzas externas ocasionadas por la atracción de cuerpos celestes, deberían dar lugar al menos teóricamente a la amortiguación de la amplitud. Es un principio bien conocido en dinámica que cuando la energía de un sistema dinámico se disipa, la consecuencia es una

disminución en el movimiento del sistema. Aquí podemos encontrar dos fuentes de disipación, la fricción de mareas y la fricción interna. Una vez más, las herramientas matemáticas involucradas en la demostración de lo anterior, son demasiado complicadas como para permitirnos probarlo aquí teóricamente. Permitámonos únicamente establecer que las cantidades estimadas de los parámetros involucrados son muy imprecisas y no convincentes [Jeffreys, 1970].

A pesar de ésta predicción teórica, la magnitud (amplitud) de la oscilación observada actualmente no parece decrecer significativamente sobre un periodo extendido de tiempo. La explicación más sensata de ésta discrepancia, es que además de la amortiguación existen otros mecanismos que excitan la oscilación. Hasta el momento no existen teorías (hipótesis) que expliquen satisfactoriamente dicha excitación. La mayor credibilidad puede estar probablemente asociada a la hipótesis de que la oscilación del polo terrestre está ligada de alguna manera con los movimientos tectónicos de grandes magnitudes [Mansinha y Smylie, 1967].

3.2.5 Observaciones de la Oscilación Actual

A finales del siglo XIX, la IUA decidió iniciar un programa de cooperación internacional – el Servicio Internacional de Latitud (ILS por sus siglas en inglés) – con el afán de observar la oscilación actual, determinar su periodo y amplitud y en consecuencia añadir información valiosa a nuestro conocimiento de la Tierra. Las observaciones comenzaron en 1899 simultáneamente en cinco estaciones localizadas en el mismo paralelo $\phi = 39^{\circ} 08'$ (Mizusawa – Japón, Kitab – URSS, Carloforte – Italia, Gaithersburg – EUA, Ujjah – EUA). La red de “estaciones de latitud” ha crecido desde entonces hasta más de 40 estaciones hoy en día,

distribuidas no sólo en el hemisferio norte, sino también en el sur, auspiciados por dos agencias: el ILS (también conocido como Servicio Internacional del Movimiento del Polo – IPMS por sus siglas en inglés-) y el Buró Internacional de la Hora (BIH por sus sigla en francés).

Las estaciones de latitud se encuentran continuamente (más precisamente, tan a menudo como es posible) determinando sus latitudes astronómicas instantáneas usando un grupo común de estrellas y un instrumento ya sea PZT (Telescopio Fotogramétrico Zenital) o un astrolabio Danjon. Los resultados de las observaciones son enviados a los respectivos cuerpos internacionales, Mizusawa o París. Aquí las variaciones de latitud son ajustadas e interpretadas en términos de coordenadas cartesianas X, Y, describiendo la hodógrafa del vector $\vec{\omega}$ en un plano tangente al elipsoide terrestre en el polo medio, véase el ejemplo [Krakiwsky y Wells, 1971]. Éstas “coordenadas del polo instantáneo” se publican periódicamente en dos formas diferentes:

- I) Posiciones predichas, extrapoladas de los datos observados;
- II) Posiciones actuales, calculadas de los valores actuales observados.

Desafortunadamente, el proceso de ajuste ha cambiado varias veces durante la existencia de los servicios internacionales [Munk y Macdonald, 1960]. Por lo tanto, las posiciones publicadas actualmente no pueden considerarse homogéneas para el periodo de oscilación de 72 años.

3.2.6 Resultados de Análisis de la Oscilación Observada

Con el fin de poder determinar el periodo P_C y la amplitud κ (y el retraso de la fase ψ) los datos que describen la posición actual del polo han sido los análisis de los resultados de varios académicos. El periodo puede determinarse a partir de los datos, usando algunos de los muchos métodos que existen para el análisis espectral (técnica utilizada para determinar una frecuencia desconocida o el periodo de una serie de tiempo dada). Los valores numéricos del Periodo de Chandler varían dependiendo de los autores desde 420 a 440 días [Munk y Macdonald, 1960].

La amplitud media para una cierta extensión de los datos puede determinarse usando la aproximación de mínimos cuadrados buscando las curvas periódicas que mejor se ajusten (para ambas componentes X y Y) al periodo P_C . Los resultados indican un valor promedio para κ del orden de $0.2''$. Éste valor angular corresponde a un desplazamiento del polo instantáneo de rotación en la superficie terrestre de alrededor de $\pm 6.5m$.

Los resultados invariablemente confirman la polaridad anti horaria del movimiento (predicha por la teoría, véase § 2.2). El sentido del movimiento puede determinarse a partir del retraso de fase de las dos componentes X, Y. Contrario a las predicciones, la hodógrafa no es completamente circular, o dicho en otras palabras, el movimiento circular "Chandleriano" (conocido algunas veces como el libre de nutación) no considera completamente el movimiento real.

Existen otras componentes de la hodógrafa actual que necesitan de nuestra atención. Otros tres movimientos se pueden distinguir en los datos actuales:

- i) Variaciones estacionales;
- ii) Variaciones seculares;
- iii) Fluctuaciones irregulares.

Debemos ahora tratar con ellas de forma individual.

3.2.7 *Variaciones Estacionales*

En el espectro de las componentes X y Y de la oscilación actual, uno puede ver fácilmente un pico anual indicando la presencia de un movimiento anual. De acuerdo con Orlov [1961], la magnitud de la componente anual también varía con el tiempo en el rango de 40 a 120 milisegundos de arco en ambas direcciones X y Y. El movimiento anual es elíptico más que circular y nuevamente positivo (anti horario).

El origen de ésta componente anual está probablemente ligado con los cambios atmosféricos anuales. Sin embargo, el mecanismo de cómo éstos cambios influyen en la oscilación, aún continúa sin aclararse. La hipótesis del propio autor, basada en experimentos de alguna manera limitados [Vaníček, 1971], es que la componente anual (o por lo menos la mayor parte) es únicamente virtual.

En otras palabras, no es un movimiento real del polo, pero refleja la variación anual de las verticales locales de las estaciones de observación. La variación de la vertical es inevitablemente interpretada como la variación de la latitud local y así es transmitida al centro internacional, donde es reinterpretada en términos de la oscilación polar. Las verticales locales cambian irregularmente de estación en estación (ésta es la razón por la que pueden interpretarse como parte

de la oscilación; en caso de que los cambios fueran los mismos para todas las estaciones, se cancelarían y no sería posible interpretarlos globalmente) debido a las variaciones de las superficies equipotenciales locales. Esto a su vez puede atribuirse a las variaciones en la distribución de agua subterránea y nieve, así como a otras inclinaciones de la corteza.

3.2.8 *Variaciones a Largo Plazo*

La presencia de variaciones a largo plazo en la oscilación polar, se han sospechado por mucho tiempo, nuevamente con base en los testimonios del análisis espectral. Aunque para un tiempo largo la extensión de las observaciones disponibles es demasiado pequeña como para permitirnos realizar cualquier estimación cuantitativa de cualquier variación.

Recientemente, Markowitz [1968] descubrió un periodo de 24 años usando 60 años de datos y una técnica especialmente diseñada para tratar con las cinco estaciones de latitud principales. Su descubrimiento tuvo una confirmación por parte de los hallazgos del autor [Vaníček, 1969], basado en los resultados del análisis espectral de los datos BIH. La explicación teórica para ésta componente de periodo largo es la unión del manto con el núcleo [Busse, 1969]. Para tener una última palabra sobre esto, deberíamos esperar probablemente por un buen tiempo.

Dentro de la misma categoría de movimientos cabe la deriva del polo. La deriva es difícil que sea (al menos parcialmente) debida a los desplazamientos de la corteza como la deriva continental, movimientos isostáticos, etc. Actualmente se asume del orden de 3.2 milisegundos de arco por año [Markowitz, 1968] que

corresponde al desplazamiento del polo sobre la superficie terrestre por alrededor de 0.1 m por año. Este movimiento, sin embargo no tiene nada que hacer con el vector de rotación. Éste refleja el movimiento del eje principal de inercia con respecto a las estaciones de observación. Para ser más precisos, éste refleja los movimientos de las estaciones de rotación con respecto al eje principal de inercia que tiene que ser considerado como el único eje “fijo” de la Tierra, véase §1.10.

3.2.9 Fluctuaciones Irregulares

Además de lo descrito, movimientos más o menos regulares, experimentamos algunas fluctuaciones irregulares en los datos actuales. Algunos de ellos pueden atribuirse a ciertas combinaciones de errores aleatorios en las observaciones individuales, otras más podrían deberse a influencias globales que permanecen aún desconocidas. Aún no hay nada definitivo que se pueda decir sobre sus fluctuaciones.

4. Tratamiento y procesamiento de datos

4.1 Origen de los datos

En este trabajo se analizarán datos provenientes de dos fuentes, una de ellas es la base de datos de registros diarios de climatología del Servicio Meteorológico Nacional, la otra, es la base de datos de las posiciones del polo instantáneo de rotación del Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y Sistemas de Referencia (IERS por sus siglas en inglés).

4.1.1 Climatología Diaria (Servicio Meteorológico Nacional)

Esta base de datos contiene registros diarios de temperatura máxima, mínima, evaporación y precipitación, que es la variable que utilizaremos en este trabajo, los registros datan en algunos casos de años anteriores a 1940. Los datos se presentan en un formato kmz de *Google Earth* en el que se muestran todas las estaciones climatológicas del país y desde aquí, es posible acceder a cada una de ellas a consultar la información en archivos de texto. Las imágenes siguientes son un ejemplo de cómo se puede visualizar la información.

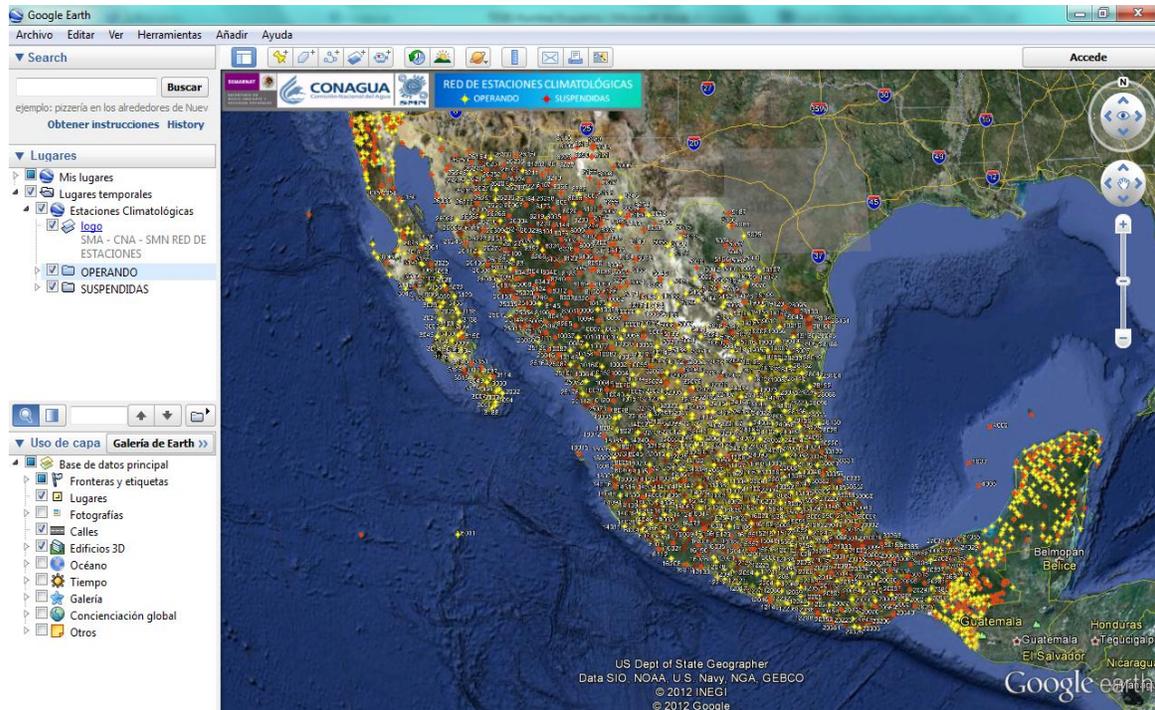


Figura 4.1 Estaciones Climatológicas del SMN. Archivo visualizado mediante el software Google Earth.

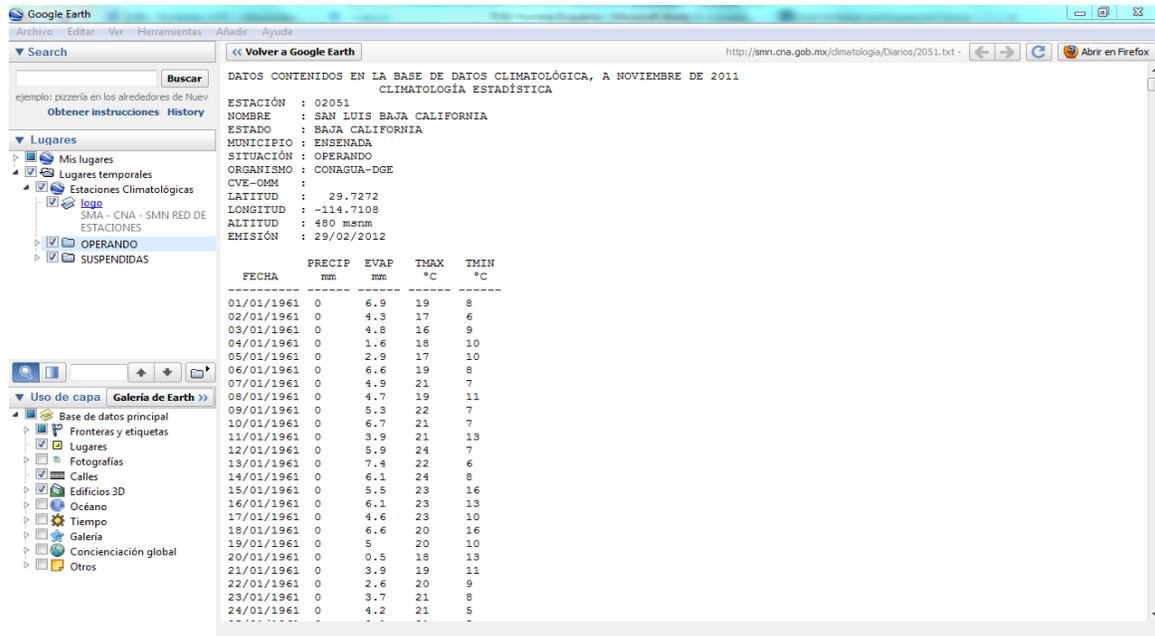


Figura 4.2 Archivo de texto con los datos de Climatología Diaria del SMN.

Posiciones del Polo Instantáneo (IERS)

Ésta base de datos muestra las posición del polo instantáneo en coordenadas XY desde el año 1846 con una resolución temporal aproximada de 36.5 días en el periodo comprendido entre los años 1846 y 1899, y una resolución temporal aproximada de 18.25 días desde el año 1900 a la fecha. Los valores de X y Y están dados en décimas de segundo de arco y para la fecha de los datos se utiliza la Fecha Juliana Modificada (MJD).

La siguiente tabla es un ejemplo de los datos obtenidos de esta base de datos:

MJD	X	sigmaX	Y	sigmaY
15019.5	-0.212818	0.05376	-0.097229	0.037446
15037.762	-0.047461	0.029853	-0.065631	0.02333
15056.025	-0.112006	0.028504	-0.040467	0.024327
15074.287	-0.07671	0.021791	-0.009674	0.021233
15092.55	-0.09985	0.026908	-0.06666	0.02562
15110.812	-0.131173	0.039344	-0.072076	0.027851
15129.075	-0.08739	0.02566	-0.089427	0.024505
15147.337	-0.164078	0.026598	-0.131034	0.027439
15165.6	-0.151407	0.019173	-0.105838	0.020221
15183.862	-0.143764	0.021261	-0.179125	0.029817
15202.125	-0.124341	0.024357	-0.105747	0.019115
15220.387	-0.206229	0.021263	-0.144555	0.025505
15238.65	-0.192711	0.025172	-0.095563	0.029564

2.2 Método de análisis de datos

2.2.1 Análisis de cargas y estimación de las deformaciones

El primer análisis realizado en este trabajo es la estimación de las deformaciones de la corteza terrestre ocasionadas por el peso de las cargas que ejerce la precipitación. Para esto se comienza con definir las áreas de estudio.

El centroide del polígono del área de estudio se tomará como el punto donde se ejerce la carga y con base en el área de estudio y el dato obtenido de precipitación se obtiene la magnitud de la carga de acuerdo a la siguiente expresión:

$$M_L = A * P * \delta$$

Donde:

M_L: Es la magnitud de la carga en kg

A: Es el área de estudio en m²

P: Es la magnitud de la precipitación en m de lámina de agua

δ: Es la densidad del agua = 1000 $\frac{kg}{m^3}$

Por otro lado las coordenadas curvilíneas (φ, λ) más la altura h del centroide son transformadas en coordenadas XYZ del sistema convencional terrestre a partir de:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT} = \begin{bmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{bmatrix}$$

Ahora lo siguiente es definir el origen de la carga pues es necesario para establecer el vector de desplazamiento de su centro de masa. Esto resulta en un gran problema, pues es muy complicado encontrar el o mejor dicho los puntos desde donde proviene el agua que se precipita en nuestro punto de estudio. Por lo tanto se ha decidido utilizar en primer lugar la información de precipitación que corresponde a periodos en los que existieron huracanes de categorías altas y a partir de esto se toma un punto arbitrario cercano a los lugares tanto en el océano pacífico como atlántico donde se sabe que se originan éstos fenómenos tropicales, para usar sus coordenadas como el origen de la carga que se está estudiando. Pues aunque es posible conocer con mayor precisión el punto en donde se originaron los huracanes, se requiere de grandes cantidades de información con la cual no se cuenta.

Al igual que con la latitud y longitud del punto de estudio, las coordenadas del punto de origen de la carga son llevadas a su forma cartesiana en el sistema convencional terrestre con el afán de poder calcular el vector de desplazamiento del centro de masa de la carga desplazada:

$$\Delta \bar{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga}$$

A partir de esto podemos realizar la estimación de la deformación de la corteza aplicando la ecuación matricial:

$$\Delta \bar{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}}$$

Donde:

$\Delta\tilde{\mathbf{s}} = (\Delta\tilde{s}_x, \Delta\tilde{s}_y, \Delta\tilde{s}_z)^T$ es el desplazamiento de las coordenadas del punto de estudio

$\tilde{l}'_1 = \frac{1}{3}(l'_1 - h'_1) = 0.134$ es el valor de número de carga de love L modelado por Farrell

\mathbf{G} es la matriz de 3×3 que transforma los desplazamientos
del sistema geocéntrico al sistema topocéntrico

$\mathbf{m} = \mathbf{M}_L \Delta\bar{\mathbf{r}}_L$ es el vector momento de carga, es decir la magnitud de la carga
por el vector de desplazamiento del centro de masa de la carga

$M_{\oplus} = 5.9722 \times 10^{24} \text{kg}$ es la masa de la Tierra

Prueba 1

En una primera prueba se toma como base la trayectoria del momento de carga del modelo empírico propuesto por *Blewitt et al.*:

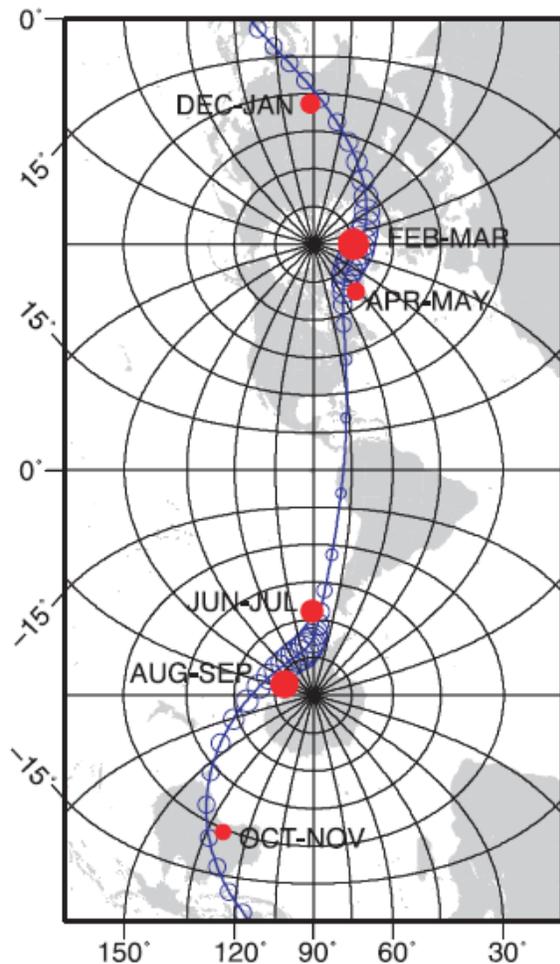


Figura 4.3 Trayectoria del momento de carga a medida que se mueve durante el año. Cada momento de carga (puntos rojos) el promedio de dos meses de los momentos de carga semanales, registrados durante cinco años. El radio de cada símbolo es proporcional a su magnitud. El máximo momento de carga es $6.9 \times 10^{22} \text{ kgm}$ correspondiente al periodo de Febrero a Marzo.

Como puede notarse lo más cercano que pasa este momento de carga de la República Mexicana es sobre el océano Atlántico sobre la Isla de Cuba así que se define una zona entre el centro del país y el Golfo de México. En esta primera prueba se toma el dato de precipitación de la información ráster de precipitación media anual extraída del Atlas Climático de México que publica el Centro de Ciencias de la Atmósfera del instituto de Geofísica de la UNAM. Este valor es el promedio de los valores de las celdas que quedan dentro del área de estudio. Para conocer la altura del punto de estudio tomamos la información del Continuo

de Elevaciones Mexicano que publica el INEGI.



Figura 4.4 Mapa que muestra las condiciones de la primera prueba de estimación de cargas y deformaciones.

Las coordenadas de este punto son:

$$\varphi = 20^{\circ}48'49.29''$$

$$\lambda = -99^{\circ}30'32.82''$$

$$h = 1364 \text{ msnm}$$

El punto de origen de la carga se toma en el Golfo de México de coordenadas:

$$\varphi = 23^{\circ}45'36''$$

$$\lambda = -93^{\circ}13'01.2''$$

$$h = 0 \text{ msnm}$$

Con esto tenemos las coordenadas de ambos puntos en su forma cartesiana del sistema convencional terrestre:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -958560.7977 \\ -5883728.18354 \\ 2252610.61805 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -327767.3709 \\ -5813504.02935 \\ 2553977.38753 \end{bmatrix}$$

Y de ahí calculamos el vector de desplazamiento del centro de masa de la carga:

$$\Delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -657793.4268 \\ -70224.154 \\ -301366.769 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, a partir del valor de precipitación sacado del promedio de los valores de la capa antes mencionada y el área del polígono que estamos considerando podemos estimar la masa de la carga presente en el punto de estudio:

$$A = 264449156445m^2; P = 182.638\ mm = 0.182638m; \delta = 1000\ \frac{kg}{m^3}$$

$$M_L = A * P * \delta = 4.82984846x10^{13}kg$$

Con esto procedemos a calcular el vector momento de carga:

$$m = M_L\Delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} -3.177717245x10^{18} \\ -3.39171428x10^{18} \\ -1.455553276x10^{19} \end{bmatrix}$$

Una vez que contamos con todos los elementos podemos evaluar el modelo de deformaciones para conocer los desplazamientos que ésa carga ocasiona en las coordenadas del punto de estudio. Recordando que el resultado se encuentra referido al sistema geodésico local, es decir los desplazamientos los

entenderemos en las direcciones Norte, Este y Altura. Para lo que se utiliza la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\varphi - 90) \cos(\lambda - 180) & \cos(\varphi - 90) \sin(\lambda - 180) & -\sin(\varphi - 90) \\ \sin(\lambda - 180) & -\cos(\lambda - 180) & 0 \\ \sin(\varphi - 90) \cos(\lambda - 180) & \sin(\varphi - 90) \sin(\lambda - 180) & \cos(\varphi - 90) \end{bmatrix}$$

El resultado de la deformación es:

$$\Delta \tilde{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -8.74577 \times 10^{-8} m \\ -1.72565 \times 10^{-7} m \\ -2.89406 \times 10^{-7} m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0000874577 \text{ mm} \\ -0.000172565 \text{ mm} \\ -0.000289406 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

La magnitud de los desplazamientos se encuentra en el orden de las diezmilésimas de milímetro por lo que es necesario tomar valores mayores precipitación y del vector de desplazamiento del centro de masa de la carga para observar cantidades que puedan representar un cambio significativo en las coordenadas.

Prueba 2

Tomando el mismo punto de estudio:

$$\varphi = 20^{\circ}48'49.29''$$

$$\lambda = -99^{\circ}30'32.82''$$

$$h = 1364 \text{ msnm}$$

Ésta vez aumentamos el vector de desplazamiento de la carga suponiendo para este caso el origen de la carga en un punto del Océano Atlántico de coordenadas:

$$\varphi = 20^{\circ}48'49.29''$$

$$\lambda = -68^{\circ}33'20.15''$$

$$h = 0 \text{ msnm}$$

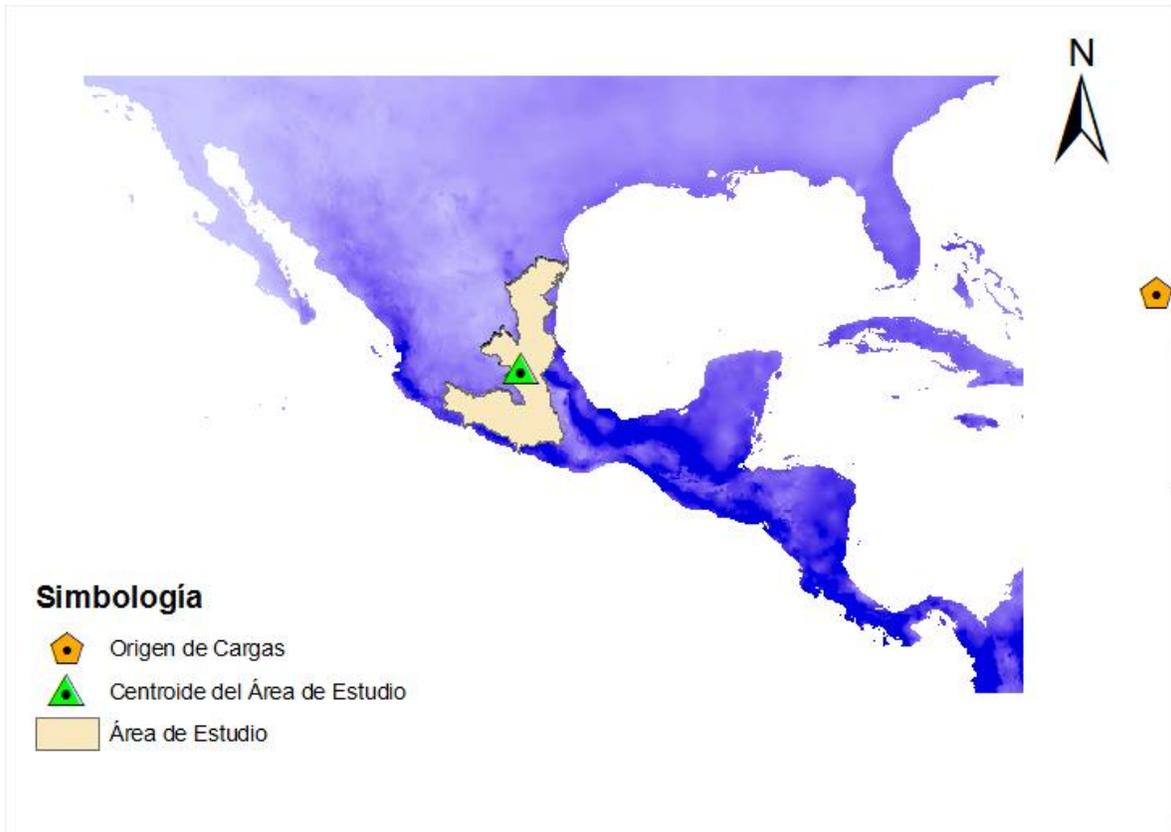


Figura 4.5 Mapa que muestra las condiciones de la segunda prueba de estimación de cargas y deformaciones, se puede observar un origen de cargas distinto al de la prueba 1.

Las coordenadas de ambos puntos en su forma cartesiana en el sistema convencional terrestre son:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -958560.7977 \\ -5883728.18354 \\ 2252610.61805 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} 2123983.64685 \\ -5407428.23414 \\ 2623428.28206 \end{bmatrix}$$

Así el vector de desplazamiento de la carga es:

$$\Delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -3109544.4437 \\ -476299.949 \\ -370871.664 \end{bmatrix}$$

Además de lo anterior, aumentamos la magnitud de la carga tomando el acumulado del mes de Septiembre de 2010, ésta información se toma de la base

de datos de Climatología Diaria del Servicio Meteorológico Nacional. Éste acumulado es de 591.3 mm. Con esto estimamos la magnitud de la carga:

$$A = 264449156445m^2 ; P = 591.3 \text{ mm} = 0.5913m; \delta = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$M_L = A * P * \delta = 1.563687862x10^{14}kg$$

Así el vector momento de carga es:

$$m = M_L \Delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} -4.862356902x10^{20} \\ -7.447844489x10^{19} \\ -5.799275194x10^{19} \end{bmatrix}$$

Y realizamos la evaluación del modelo de deformación:

$$\Delta \vec{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -9.62981x10^{-6}m \\ 5.97037x10^{-6}m \\ -4.24648x10^{-6}m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00962981 \text{ mm} \\ 0.00597037 \text{ mm} \\ -0.00424648 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

Para este caso los desplazamientos se encuentran en el orden de las milésimas de milímetro.

Prueba 3

Continuamos utilizando el mismo punto de estudio:

$$\varphi = 20^{\circ}48'49.29''$$

$$\lambda = -99^{\circ}30'32.82''$$

$$h = 1364 \text{ msnm}$$

Aumentamos el vector de desplazamiento del centro de masa de la carga, tomando como origen un punto en el Océano Atlántico cuyas coordenadas son:

$$\varphi = 15^{\circ}47'57.93''$$

$$\lambda = 23^{\circ}49'37.08''$$

$$h = 0 \text{ msnm}$$

Las coordenadas de ambos puntos en su forma cartesiana en el sistema convencional terrestre son:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -958560.7977 \\ -5883728.18354 \\ 2252610.61805 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} 5615503.77013 \\ 2479886.35792 \\ 1725381.98138 \end{bmatrix}$$

Así el vector de desplazamiento de la carga es:

$$\Delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -6601064.5677 \\ -8363614.5400 \\ 527228.6370 \end{bmatrix}$$

Realizando la evaluación del modelo de deformación tenemos:

$$\Delta \vec{s} = \frac{l_1^T G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -8.666126 \times 10^{-6} m \\ 5.718243 \times 10^{-5} m \\ -3.150032 \times 10^{-5} m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00866126 \text{ mm} \\ 0.05718243 \text{ mm} \\ -0.03150032 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

Como se puede notar en ésta prueba los desplazamientos estimados alcanzan ya en el caso de Y y Z el orden de las centésimas de milímetro.

Después de realizar las pruebas anteriores y con el fin de tener una metodología que resulte menos arbitraria en la elección de los puntos de origen y de estudio además de los datos de precipitación se ha decidido tomar en cuenta los siguientes puntos:

- El valor de precipitación utilizado para la estimación de la magnitud de la carga será el acumulado de dos meses.
- Se estudiarán los escenarios de aquellos años en los que se han presentado las precipitaciones más altas.

- El área de estudio será toda la República mexicana pues se tienen datos de todo el territorio.
- El área de estudio quedará dividida en dos partes. La primera corresponde a todas las cuencas hidrológicas cuya vertiente es hacia el Océano Pacífico o bien se encuentran de ese lado del territorio. La segunda por su parte corresponde a las cuencas hidrológicas cuya vertiente es hacia el Golfo de México.
- De acuerdo con el Centro Nacional de Huracanes del NOAA, para el caso de los ciclones tropicales que afectan las costas del pacífico, el punto en donde se originan éstos fenómenos se encuentra en el Océano Pacífico situado al sur de México y al oeste de Centroamérica.
- Por otro lado los fenómenos tropicales que afectan las costas del Golfo y en general las costas del Océano Atlántico en el resto de América, se generan en el océano Atlántico al oeste de las costas de Senegal, en una zona cercana a las Islas de Cabo Verde.

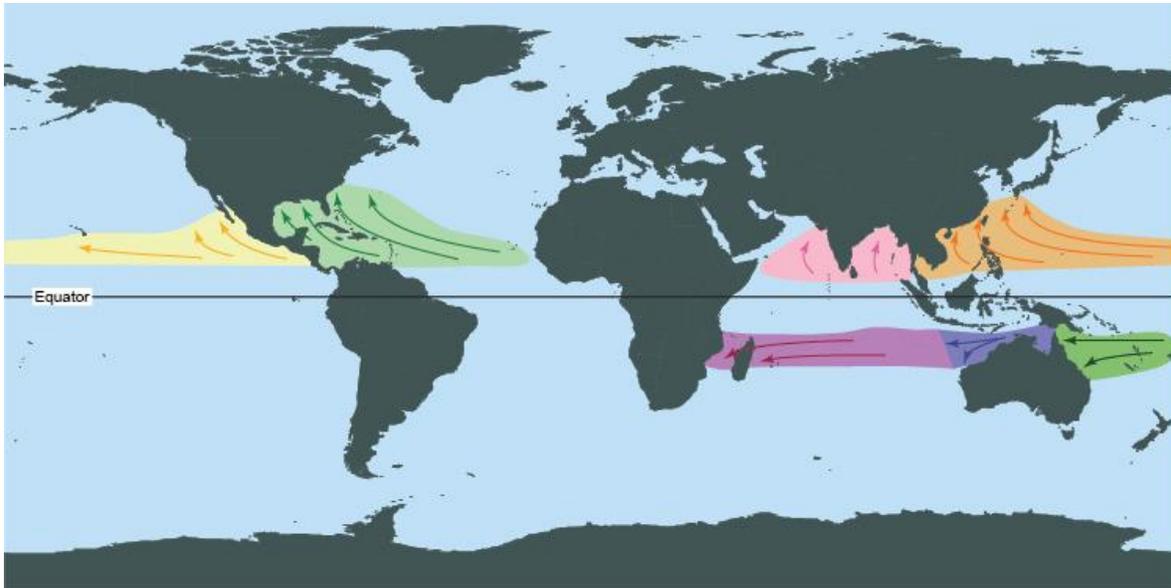


Figura 4.6 Principales Trayectorias y Zonas de Influencia de Ciclones Tropicales.

Estudio 1

El primer estudio se realiza en la zona del Océano Pacífico tomando para esto los datos del año de 1959, pues se tiene la información que en el mes de Octubre un huracán de categoría 5 en la escala de Saffir-Simpson afectó las costas de Colima y Jalisco, provocando grandes precipitaciones en toda la zona noroeste y centro de México.

La carga se estima a partir del acumulado de precipitación de los meses de octubre y noviembre, encontrándose en éste periodo, los días en los que el huracán golpeó las costas mexicanas. Sin embargo los registros de climatología diaria muestran que las mayores precipitaciones del año se presentaron durante los meses de Agosto y Septiembre, es decir que a pesar de la presencia de un

huracán de intensidad considerablemente alta, los mayores niveles de precipitación se deben a la temporada común de lluvias.

Por ésta razón se realiza la estimación de las deformaciones para ambos periodos.

Los datos como ya es sabido se obtienen de los registros de climatología diaria del SMN de la CONAGUA. Al ser datos relativamente antiguos, existen sitios en los cuáles no existe la información correspondiente a este periodo, así que se procesan los registros de los estados que se encuentran dentro de nuestros límites de estudio, obteniendo el promedio de varias estaciones, tratando de obtener con esto un valor de precipitación que se asemeje más a la situación real que predomina en el área. Con esto el valor adoptado de precipitación es de 243.56 mm.

La zona que estamos estudiando tiene una superficie de $1.385631 \times 10^{15} m^2$, lo que representa una carga de $3.374877504 \times 10^{17} kg$.

El proceso para la estimación de la deformación es el mismo que se ha utilizado en las pruebas anteriores. Tenemos el punto donde se concentra la carga:

$$\varphi = 24^{\circ}08'25.69''$$

$$\lambda = -106^{\circ}10'42.97''$$

$$h = 1099.6msnm$$

El origen de las cargas, como se mencionó anteriormente se encuentra al sur de México en el Océano Pacífico, con coordenadas:

$$\varphi = 10^{\circ}14'51''$$

$$\lambda = -94^{\circ}52'27.50''$$

$$h = 0 \text{ msnm}$$

Llevando las coordenadas de ambos puntos al Sistema Convencional Terrestre:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -1622923.99502 \\ -5593938.01559 \\ 2592488.90977 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -533362.49723 \\ -6254359.90547 \\ 1127197.92565 \end{bmatrix}$$

Calculando el vector de desplazamiento de la carga tenemos:

$$\Delta \bar{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -1089561.4978 \\ 660421.8900 \\ 1465290.9840 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga:

$$m = M_L \Delta \bar{r}_L = \begin{bmatrix} -3.677136586 \times 10^{23} \\ 2.22884298 \times 10^{23} \\ 4.945177579 \times 10^{23} \end{bmatrix}$$

Aplicando el modelo para encontrar las deformaciones tenemos:

$$\Delta \tilde{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.006532 \text{ m} \\ 0.010924 \text{ m} \\ 0.008331 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.532 \text{ mm} \\ 10.924 \text{ mm} \\ 8.331 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

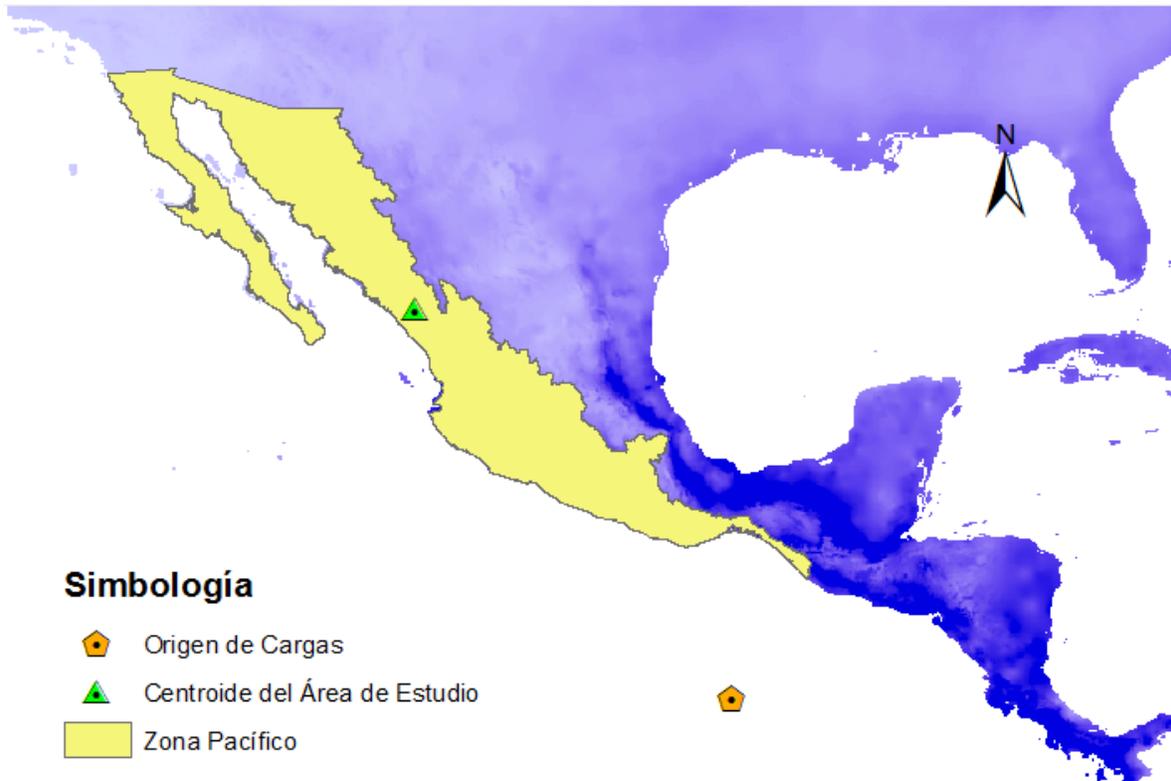


Figura 4.7 Mapa que muestra las condiciones utilizadas para el estudio 1 en la zona del Pacífico.

Estudio 1 a

Para este caso la zona de estudio del océano pacífico utilizada en la estimación anterior, se divide a su vez en tres zonas, utilizando los centroides de éstos polígonos como el punto de concentración de la carga que para esta ocasión contempla la precipitación acumulada de los meses de Agosto y Septiembre de 1959 que como se mencionó anteriormente fueron los meses más lluviosos de ese año.

El origen de las cargas se sigue considerando en el Océano Pacífico en un punto de coordenadas:

$$\varphi = 10^{\circ}14'51''$$

$$\lambda = -94^{\circ}52'27.50''$$

$$h = 0 \text{ msnm}$$

Así las zonas de estudio quedan distribuidas de la siguiente manera:

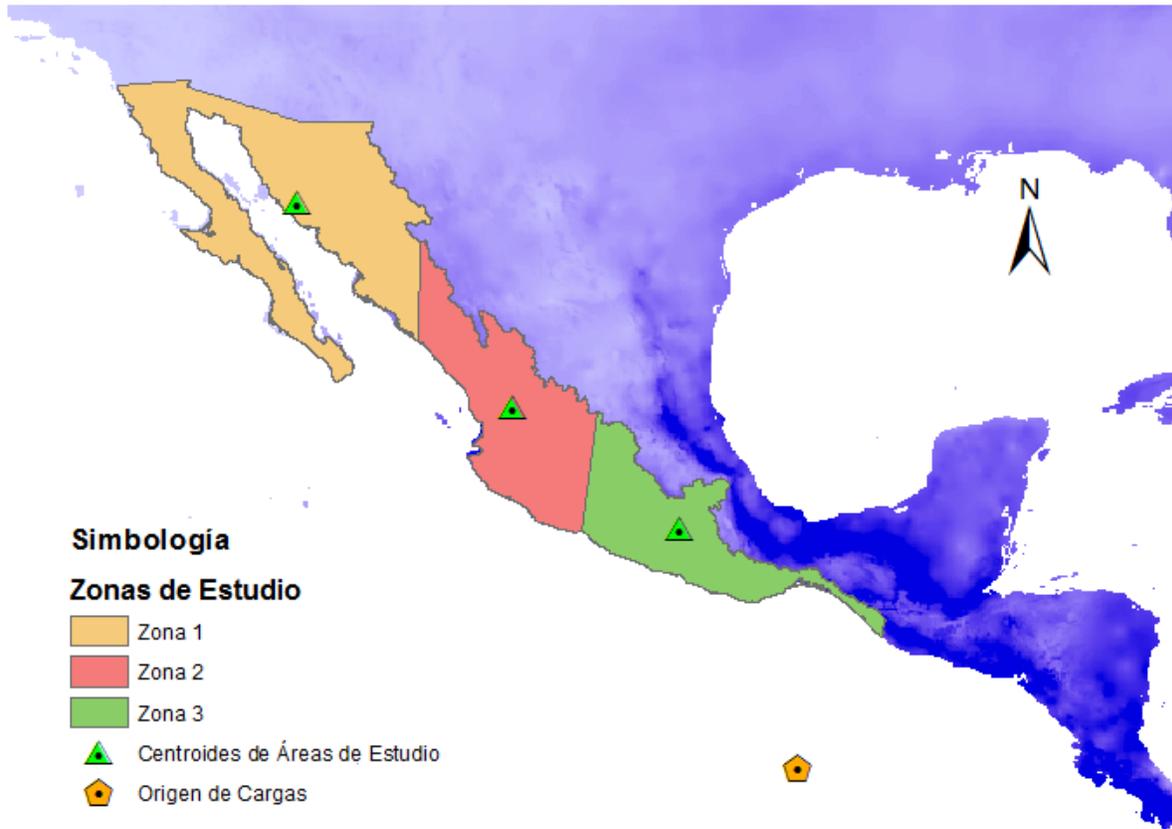


Figura 4.8 Mapa que muestra las condiciones para el estudio 1a con la zona del Pacífico dividida.

Zona 1

Posee una superficie de $6.166718 \times 10^{14} m^2$, su precipitación es de 351.13 mm lo que nos genera una carga de $2.165319691 \times 10^{17} kg$.

El punto donde se concentra la carga:

$$\varphi = 28^{\circ}53'19.43''$$

$$\lambda = -111^{\circ}16'59.0''$$

$$h = 74msnm$$

Llevando las coordenadas del origen de la carga y del centroide del área de estudio, es decir, el punto donde se concentra la carga al Sistema Convencional Terrestre:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -2032179.49703 \\ -5216822.38023 \\ 3045302.59436 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -533362.49723 \\ -6254359.90547 \\ 1127197.92565 \end{bmatrix}$$

Calculando el vector de desplazamiento de la carga tenemos:

$$\Delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -1498816.9998 \\ 1037537.5250 \\ 1918104.6690 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga:

$$m = M_L \Delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} -3.245417961 \times 10^{23} \\ 2.246600433 \times 10^{23} \\ 4.153309809 \times 10^{23} \end{bmatrix}$$

Las deformaciones resultantes son:

$$\Delta\tilde{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.004727\ m \\ 0.011598\ m \\ 0.005465\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.727\ mm \\ 11.598\ mm \\ 5.465\ mm \end{bmatrix}$$

Zona 2

La superficie de este polígono es de $4.193340 \times 10^{14} m^2$, su precipitación es de 311.55 mm provocando una carga de $1.306435077 \times 10^{17} kg$.

Las coordenadas del punto de concentración de la carga son:

$$\varphi = 22^\circ 00' 07.03''$$

$$\lambda = -104^\circ 16' 14.3''$$

$$h = 743.4518\ msnm$$

Transformando las coordenadas del origen de la carga y del punto de concentración de carga en el área de estudio al Sistema Convencional Terrestre:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -1458578.94358 \\ -5743504.69193 \\ 2374613.5056 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -533362.49723 \\ -6254359.90547 \\ 1127197.92565 \end{bmatrix}$$

Calculando el vector de desplazamiento de la carga tenemos:

$$\Delta\vec{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -925216.4458 \\ 510855.214 \\ 1247415.57935 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga:

$$m = M_L \Delta\vec{r}_L = \begin{bmatrix} -1.208735219 \times 10^{23} \\ 6.673991708 \times 10^{22} \\ 1.629667468 \times 10^{23} \end{bmatrix}$$

Las deformaciones resultantes son:

$$\Delta\vec{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.002270\ m \\ 0.003233\ m \\ 0.002932\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.270\ mm \\ 3.233\ mm \\ 2.932\ mm \end{bmatrix}$$

Zona 3

Para esta zona se tiene un área de $3.49625 \times 10^{14} m^2$, con un valor de precipitación de 369.9 mm lo que nos genera una carga de $1.293262875 \times 10^{17} kg$.

El punto donde se considera concentrada la carga tiene las coordenadas:

$$\varphi = 18^\circ 04' 20.2''$$

$$\lambda = -98^\circ 47' 38.22''$$

$$h = 990.1787\ msnm$$

Llevando las coordenadas del origen de la carga y del punto de concentración de la carga al Sistema Convencional Terrestre tenemos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -927436.119098 \\ -5995059.93596 \\ 1966298.33183 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -533362.49723 \\ -6254359.90547 \\ 1127197.92565 \end{bmatrix}$$

Al calcular el vector de desplazamiento de la carga obtenemos:

$$\Delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -394073.6218 \\ 259299.9700 \\ 839100.4060 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga:

$$m = M_L \Delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} -5.096407851 \times 10^{22} \\ 3.353430247 \times 10^{22} \\ 1.085177403 \times 10^{23} \end{bmatrix}$$

Las deformaciones resultantes son:

$$\Delta \vec{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.001049\ m \\ 0.001357\ m \\ 0.002235\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.049\ mm \\ 1.357\ mm \\ 2.235\ mm \end{bmatrix}$$

Estudio 2

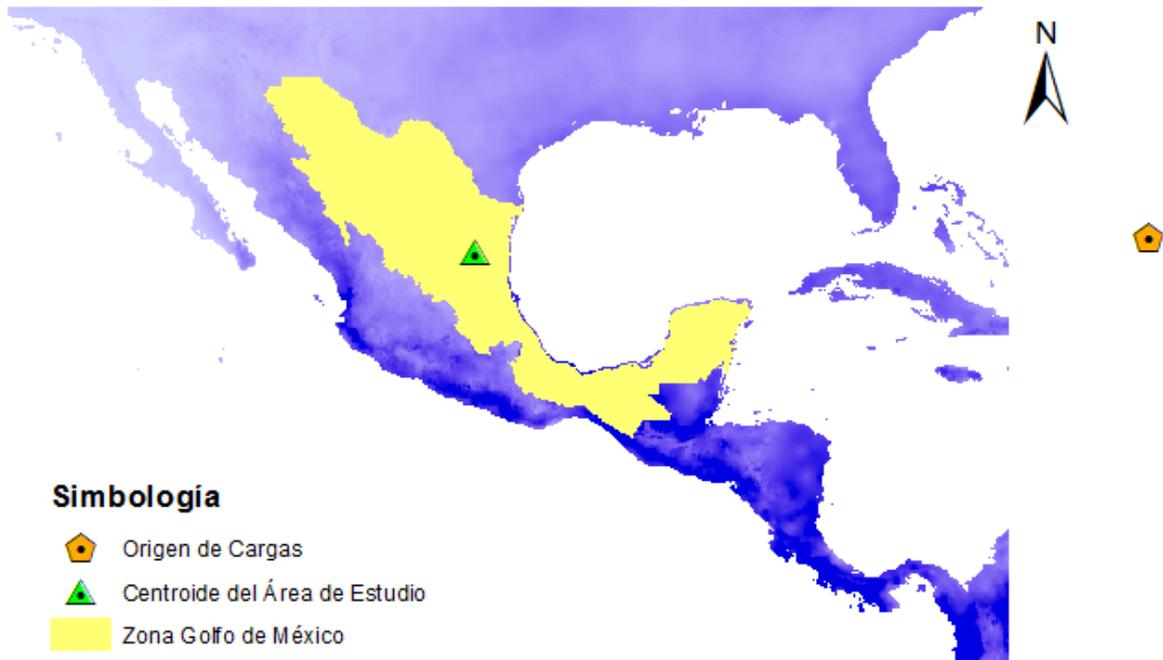


Figura 4.9 Mapa que muestra las condiciones para el estudio 2 en la zona del Golfo de México.

Para realizar este estudio, se toman los datos correspondientes a la zona del Golfo de México. La zona de estudio es el polígono restante de la República Mexicana que quedó sin tomarse en cuenta en el estudio anterior.

Para este caso se analizan los datos del año 2010 que de acuerdo con los informes de climatología del SMN de CONAGUA es el año en el que se han registrado los niveles más altos de precipitación en un período de 70 años.

Analizando la base de datos de climatología diaria para este año, se ha decidido estudiar las precipitaciones acumuladas de los meses de Agosto y Septiembre que es cuando se presentan las precipitaciones más altas.

El valor de precipitación que se utilizará para este primer análisis de la zona del Golfo de México es de 474.97 mm.

La superficie que comprende el área de estudio es de $1.617351 \times 10^{15} m^2$, lo que representa una carga de $7.681932045 \times 10^{17} kg$.

El proceso para la estimación de la deformación es el mismo que se ha venido utilizando a lo largo de los estudios anteriores. Tenemos el punto de concentración de la carga:

$$\varphi = 23^{\circ}46'32.42''$$

$$\lambda = -99^{\circ}23'38.15''$$

$$h = 1338.6 \text{msnm}$$

El origen de las cargas para esta zona se toma en un punto en el Océano Atlántico de coordenadas:

$$\varphi = 24^{\circ}26'50.91''$$

$$\lambda = -68^{\circ}23'20.15''$$

$$h = 0 \text{msnm}$$

Si transformamos las coordenadas de ambos puntos al Sistema Convencional

Terrestre tenemos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -953414.651266 \\ -5762899.34181 \\ 2555566.02348 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} 2123983.64685 \\ -5407428.23414 \\ 2623482.28206 \end{bmatrix}$$

Calculando el vector de desplazamiento de la carga tenemos:

$$\Delta \bar{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -3077398.2972 \\ -355471.1070 \\ -67916.2590 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga es:

$$m = M_L \Delta \bar{r}_L = \begin{bmatrix} -2.364036459 \times 10^{24} \\ -2.730704888 \times 10^{23} \\ -5.217280864 \times 10^{22} \end{bmatrix}$$

Aplicando el modelo para encontrar las deformaciones tenemos:

$$\Delta \bar{s} = \frac{l_1' G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.047224 \text{ m} \\ 0.029037 \text{ m} \\ -0.016872 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47.224 \text{ mm} \\ 29.037 \text{ mm} \\ -16.872 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

Estudio 2 a

De manera similar al estudio realizado en la zona del Océano Pacífico, en este caso la zona de estudio es dividida en tres polígonos y obteniendo el centroide de cada uno de ellos es posible conocer las coordenadas de los puntos en donde se consideran concentradas las cargas.

El origen para todas las cargas es el punto en el Océano Atlántico que se utilizó en el estudio 2, sus coordenadas son:

$$\varphi = 24^\circ 26' 50.91''$$

$$\lambda = -68^\circ 23' 20.15''$$

$$h = 0 \text{ msnm}$$

Las zonas de estudio quedan divididas de la siguiente manera:

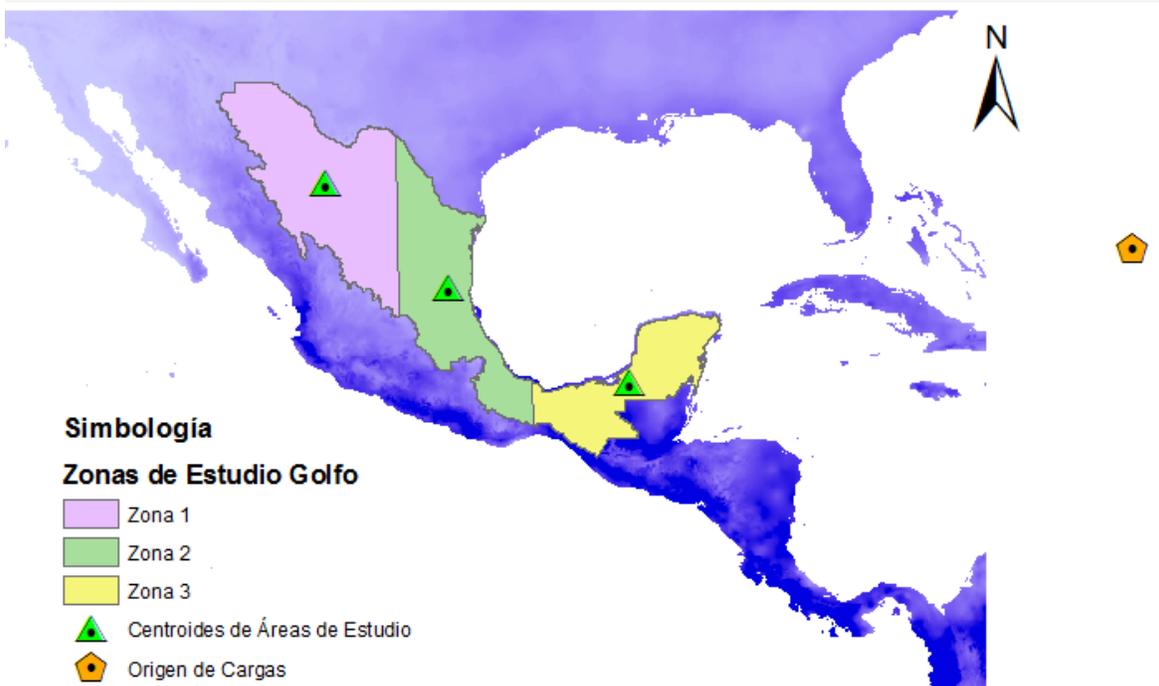


Figura 4.10 Mapa que muestra las condiciones para el estudio 2a con la zona del Golfo de México dividida.

Zona 1

Esta zona abarca una superficie de $6.929355 \times 10^{14} m^2$, el valor de precipitación es de 218.28 mm por lo tanto se genera una carga de $1.512539609 \times 10^{17} kg$.

Las coordenadas del punto donde se concentra la carga son:

$$\varphi = 27^{\circ}18'05.9''$$

$$\lambda = -104^{\circ}14'33.2''$$

$$h = 1411.15 msnm$$

Llevando las coordenadas del origen de la carga y del punto de concentración de las cargas al Sistema Convencional Terrestre se tiene:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -1395686.77326 \\ -5683108.07449 \\ 2908603.11043 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} 2123983.64685 \\ -5407428.23414 \\ 2623482.28206 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamiento de la carga es:

$$\Delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -3519670.419 \\ -275679.840 \\ 285120.828 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga obtenido es:

$$m = M_L \Delta \vec{r}_L = \begin{bmatrix} -4.77912666 \times 10^{23} \\ -4.169766774 \times 10^{22} \\ 4.312565457 \times 10^{22} \end{bmatrix}$$

Las deformaciones resultantes son:

$$\Delta \vec{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.008365 \text{ m} \\ 0.008350 \text{ m} \\ 0.003977 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.365 \text{ mm} \\ 8.350 \text{ mm} \\ -3.977 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

Zona 2

El área estimada de esta zona es de $5.428267 \times 10^{14} \text{ m}^2$, con un valor de precipitación de 376.25 mm que ejerce una carga de $2.0424126 \times 10^{17} \text{ kg}$.

Las coordenadas del punto donde se concentra la carga son:

$$\varphi = 22^\circ 41' 26.53''$$

$$\lambda = -98^\circ 49' 38.55''$$

$$h = 54.0 \text{ msnm}$$

Cambiando las coordenadas del origen de la carga y del punto donde se concentran las cargas al Sistema Convencional Terrestre tenemos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -903477.294518 \\ -5817720.7216 \\ 2445174.94469 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} 2123983.64685 \\ -5407428.23414 \\ 2623482.28206 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamiento de la carga es:

$$\Delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -3027460.9405 \\ -410292.4870 \\ -178307.3380 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga obtenido es:

$$m = M_L \Delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} -6.18332437 \times 10^{23} \\ -8.379865451 \times 10^{22} \\ -3.641771538 \times 10^{22} \end{bmatrix}$$

Las deformaciones resultantes son:

$$\Delta\tilde{s} = \frac{l'_1 G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.012445\ m \\ 0.007318\ m \\ 0.004709\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.445\ mm \\ 7.318\ mm \\ -4.709\ mm \end{bmatrix}$$

Zona 3

En esta zona existe una superficie de $3.815883 \times 10^{14} m^2$, con un valor de precipitación de 765.3 mm, así se genera una carga de $2.92029526 \times 10^{17} kg$.

Las coordenadas del centroide del polígono donde se concentra la carga son:

$$\varphi = 18^\circ 31' 55.97''$$

$$\lambda = -90^\circ 49' 20.88''$$

$$h = 83.0\ msnm$$

Realizando la transformación de las coordenadas del origen de la carga y del punto de concentración de las cargas al Sistema Convencional Terrestre se tiene:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} = \begin{bmatrix} -86836.35865 \\ -6048900.64242 \\ 2014349.23875 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} 2123983.64685 \\ -5407428.23414 \\ 2623482.28206 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamiento de la carga es:

$$\Delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Carga} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CT}^{Origen\ de\ Carga} = \begin{bmatrix} -2210820.0046 \\ -641472.4080 \\ -609133.0440 \end{bmatrix}$$

El vector momento de carga obtenido es:

$$m = M_L \Delta \bar{r}_L = \begin{bmatrix} -6.456247178 \times 10^{23} \\ -1.87238833 \times 10^{23} \\ -1.77884834 \times 10^{23} \end{bmatrix}$$

Las deformaciones resultantes son:

$$\Delta \bar{s} = \frac{l_1^T G^T \text{diag}[+1, +1, -2] G m}{M_{\oplus}} = \begin{bmatrix} -0.014367 \text{ m} \\ 0.004082 \text{ m} \\ -0.006769 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.367 \text{ mm} \\ 4.082 \text{ mm} \\ -6.769 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

4.2.3 Análisis de datos de posiciones del polo instantáneo de rotación terrestre

De los archivos de las posiciones instantáneas del Polo Instantáneo de Rotación que incluyen datos históricos desde el año 1846 hasta el año 2012 se han graficado las coordenadas X y Y para mostrar la periodicidad que existe en el movimiento del Polo denominado Periodo de Chandler.

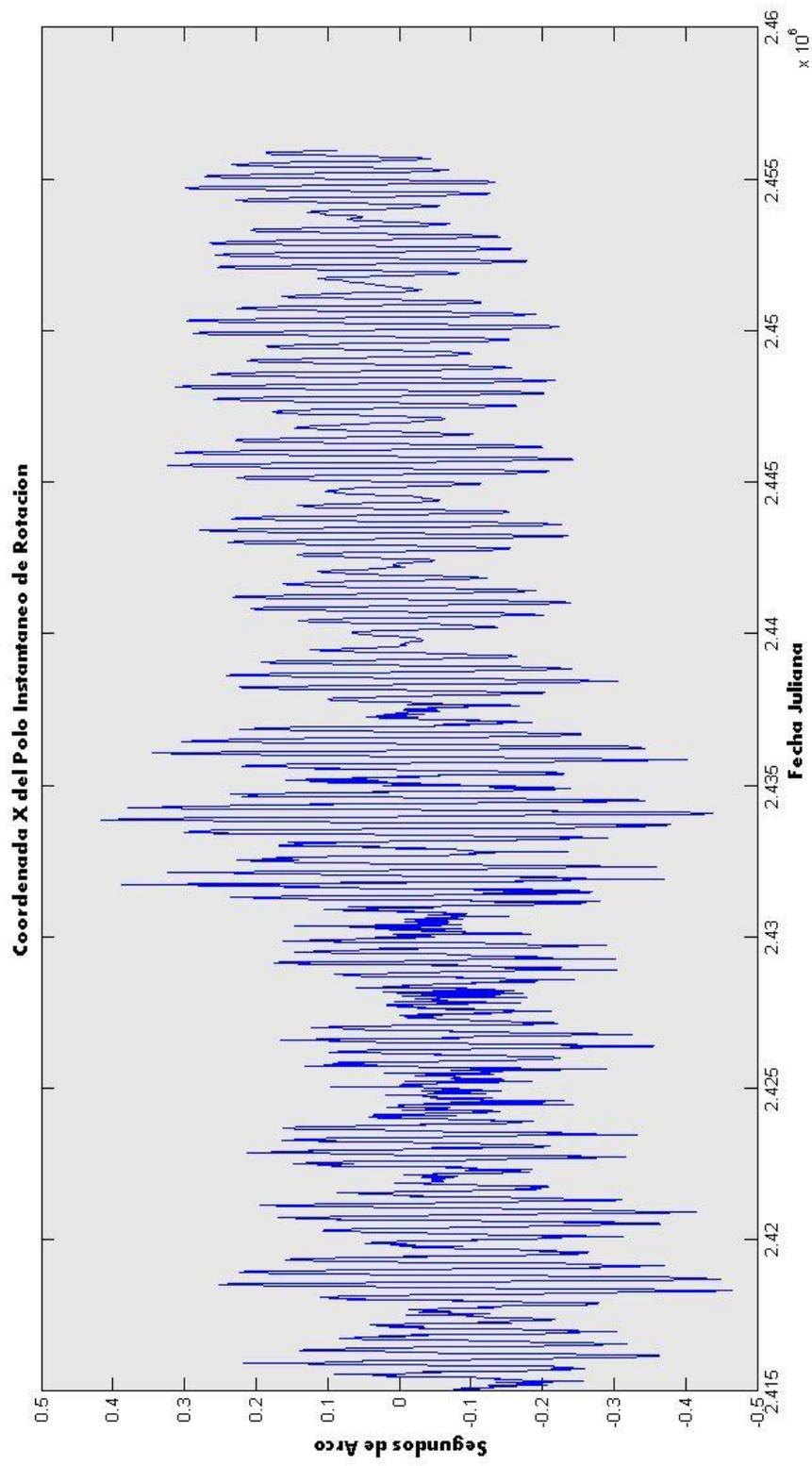


Figura 4.11 Trayectoria de la coordenada X del Polo Instantáneo de Rotación desde el año 1900.

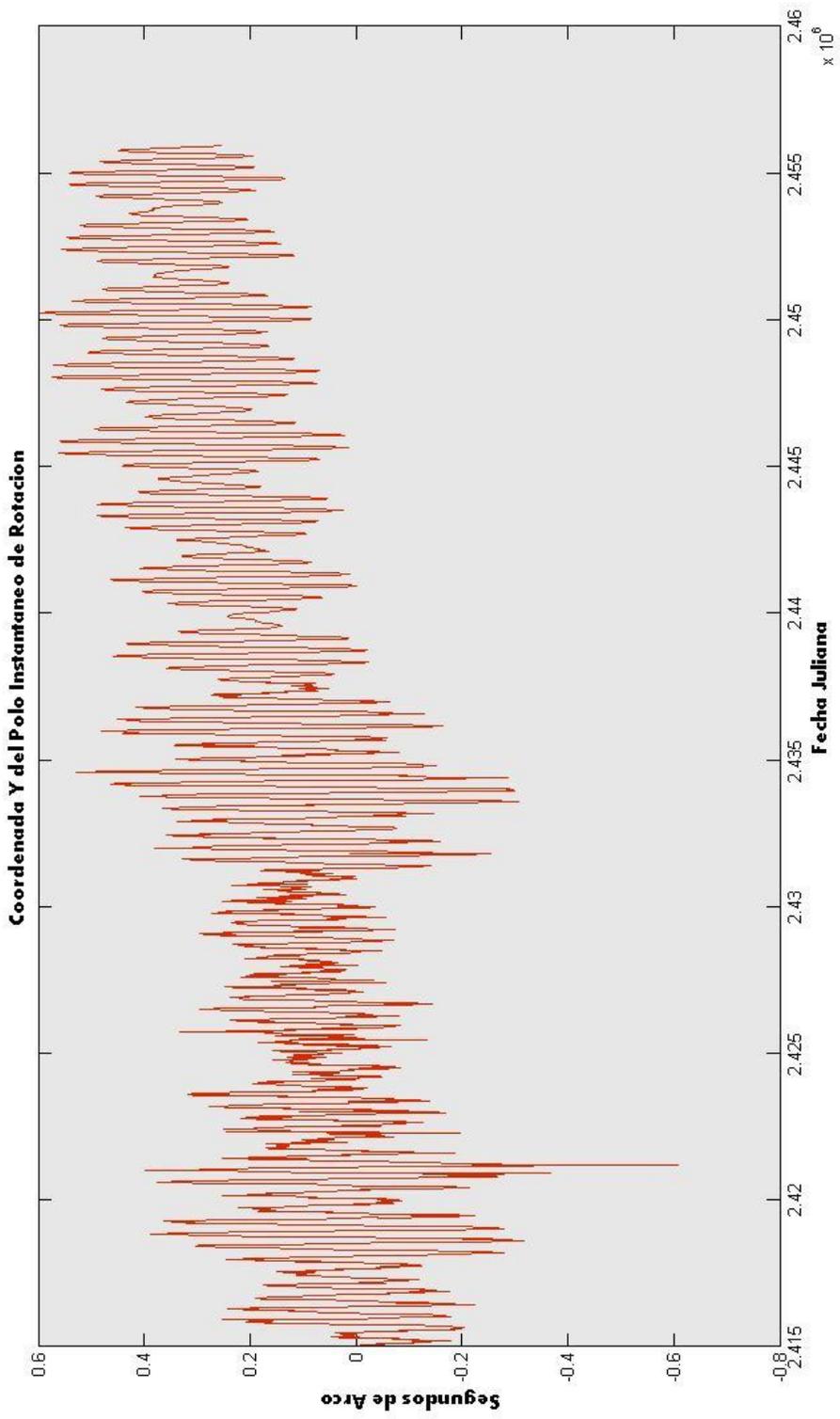


Figura 4.12 Trayectoria de la coordenada Y del Polo Instantáneo de Rotación desde el año 1900.

Para estudiar si existe una relación entre éstos movimientos y las cargas estacionales estudiadas previamente, se ha hecho coincidir mediante las fechas, los datos de precipitación históricos con los datos de las posiciones del polo. En las gráficas se mostrarán estas comparaciones. Es importante aclarar que las posiciones del polo han sido multiplicadas por una constante con el único propósito de poder apreciarlas con mayor facilidad.

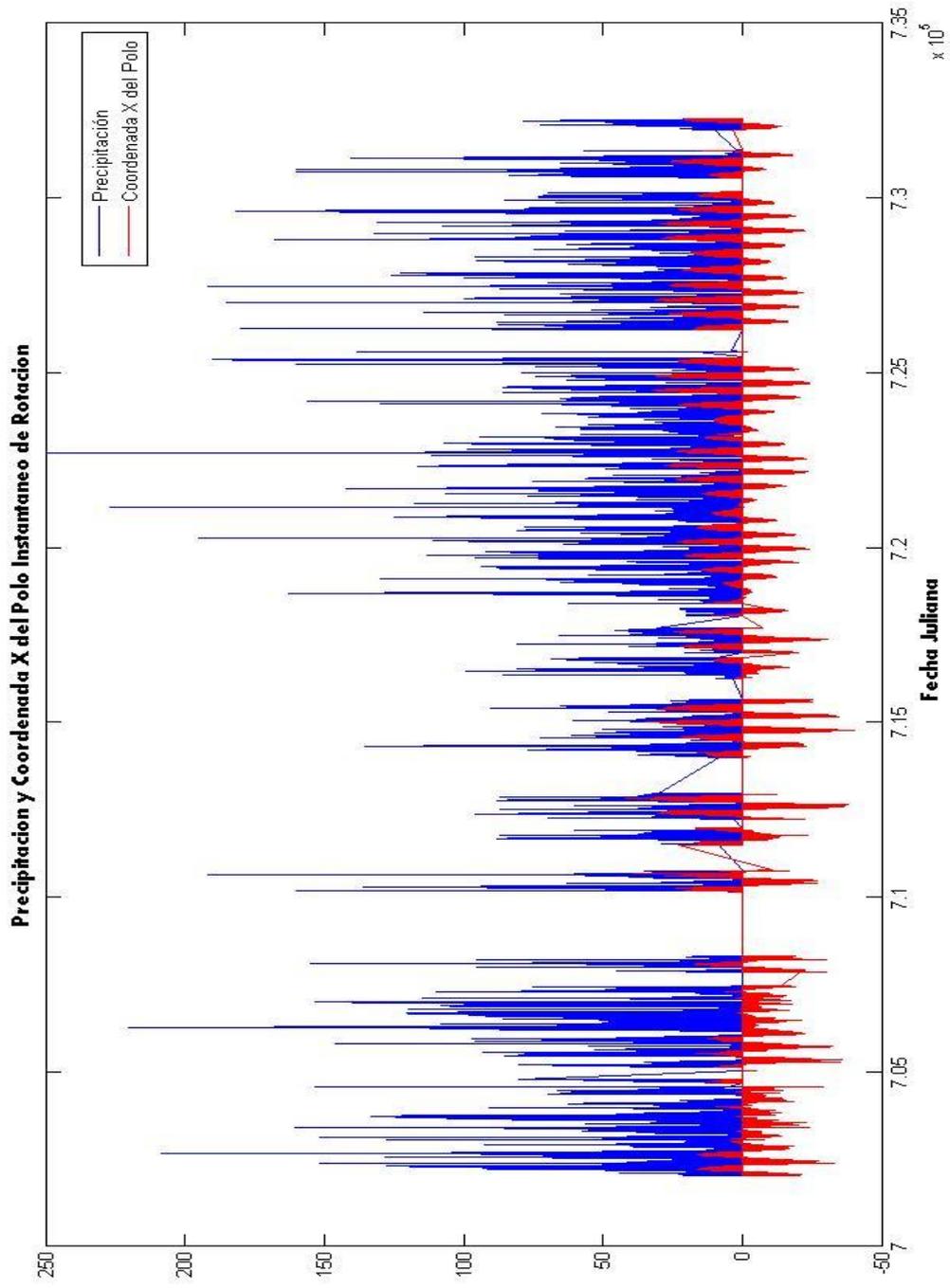


Figura 4.14 Superposición de datos de precipitación con la coordenada X del Polo Instantáneo de Rotación desde el año 1900.

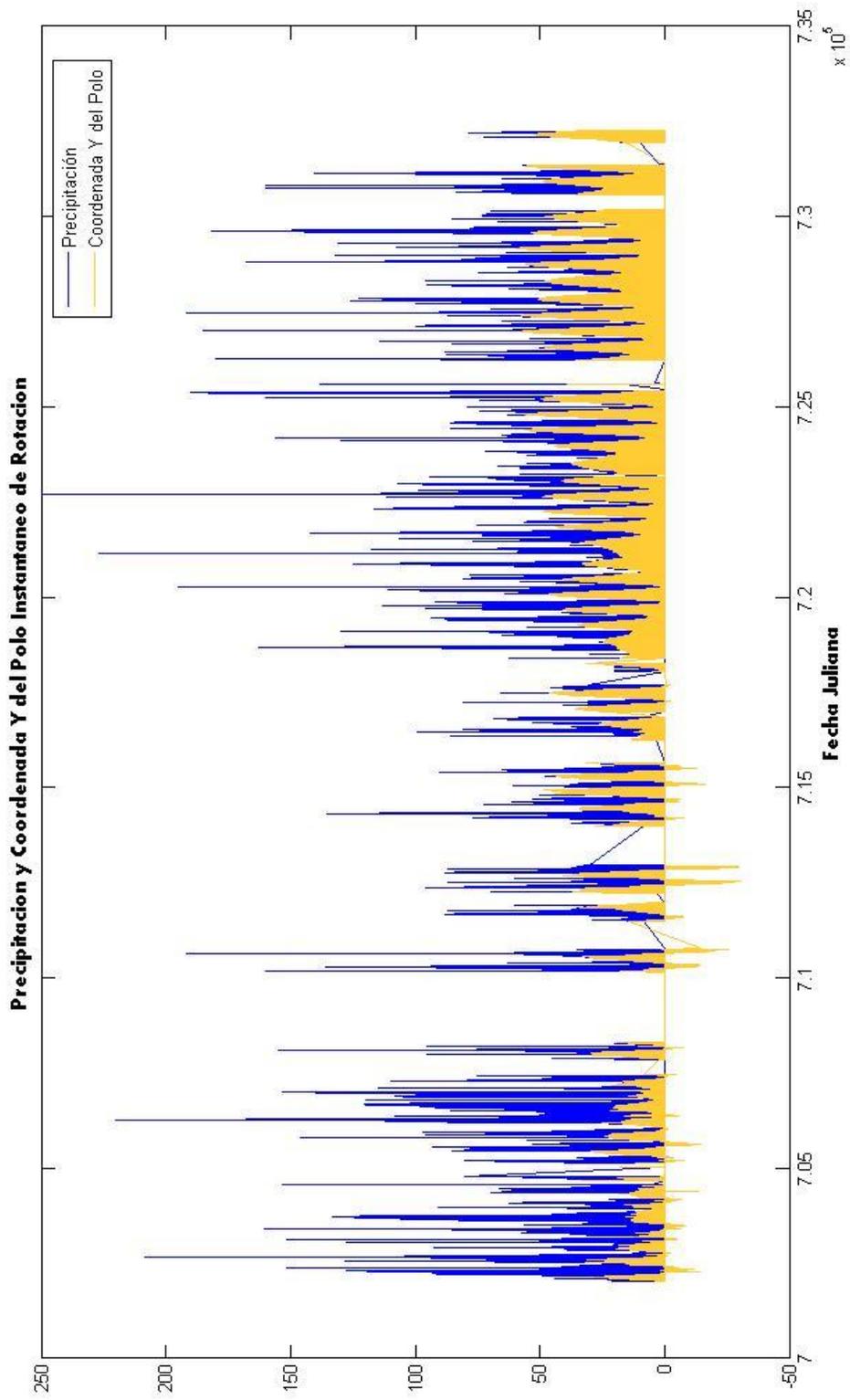


Figura 4.15 Superposición de datos de precipitación con la coordenada Y del Polo Instantáneo de Rotación desde el año 1900.

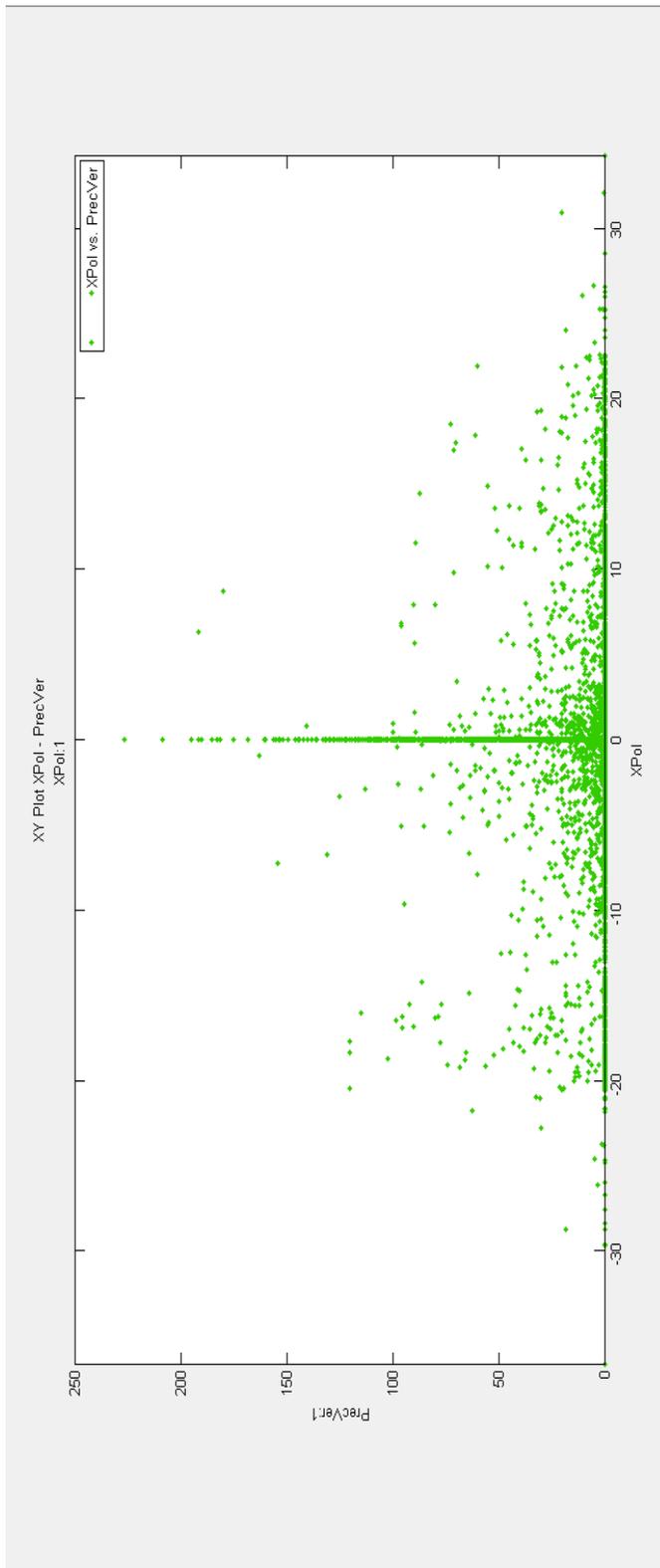


Figura 4.16 Gráfico de Dispersión de Datos de Precipitación con la Coordenada X del Polo de Rotación Instantáneo.

De los gráficos anteriores es posible notar que en general cuando existen datos grandes de precipitación, hay una tendencia de las coordenadas del polo de desplazarse grandes cantidades. Si observamos la gráfica de la coordenada X ésta tiende a moverse de forma negativa, mientras la coordenada Y muestra una tendencia de crecimiento.

Por otro lado se han construido las gráficas de dispersión de los valores de Precipitación contra las coordenadas X y Y del Polo para observar si existe entre ellas alguna correlación.

Debido a la dispersión mostrada en los gráficos anteriores, es difícil establecer si

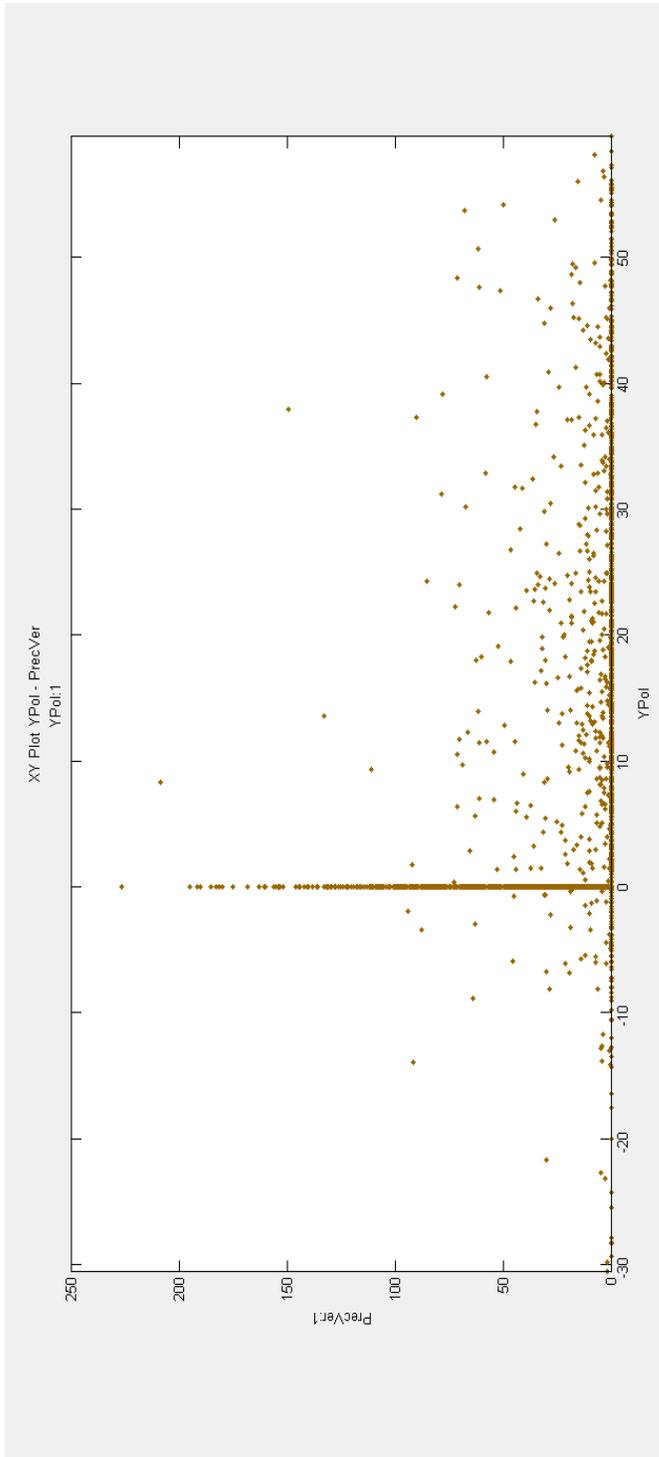


Figura 4.17 Gráfico de Dispersión de Datos de Precipitación con la Coordenada Y del Polo de Rotación Instantáneo.

existe alguna relación entre los datos históricos de precipitación y las coordenadas del Polo Instantáneo de Rotación. Sin embargo realizando un procesamiento de ambas series, podemos aplicar una función de correlación cruzada para determinar si existe tal relación.

Como se puede ver en los gráficos de correlación, los coeficientes más altos se presentan entre la precipitación y las coordenadas X, alcanzando valores cercanos al 6 % tanto en correlación positiva como en correlación negativa.

Mientras tanto entre las coordenadas Y y la precipitación, los coeficientes de correlación adquieren valores de alrededor del 3%.

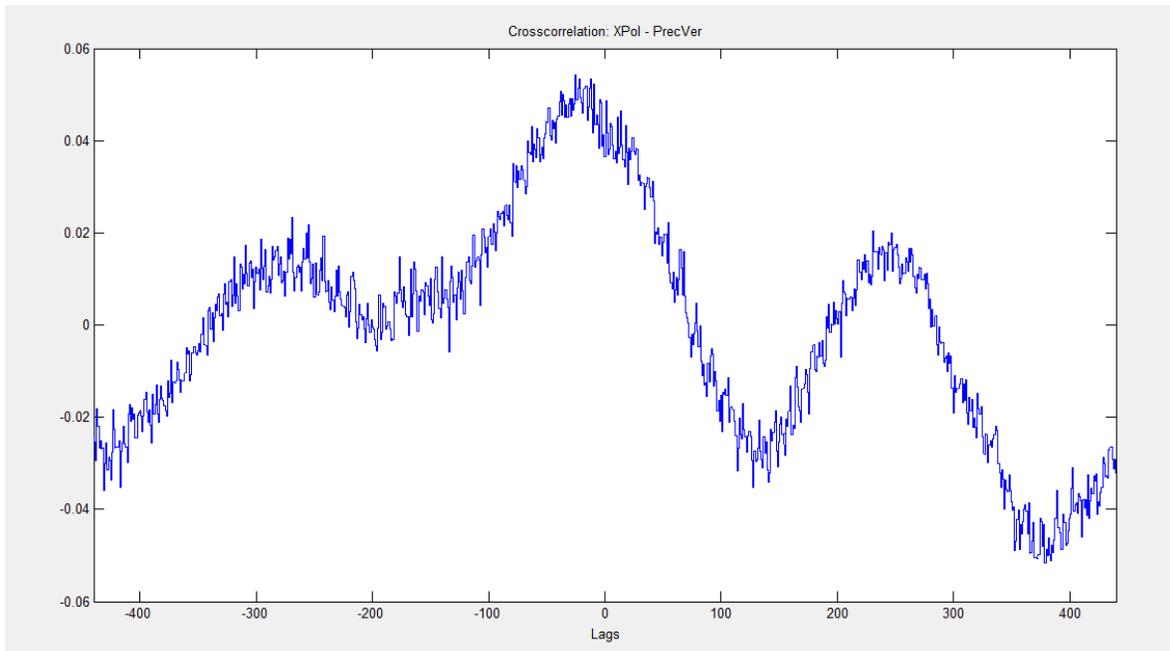


Figura 4.17 Gráfico de Correlación Cruzada de Datos de Precipitación con la Coordenada X del Polo Instantáneo de Rotación.

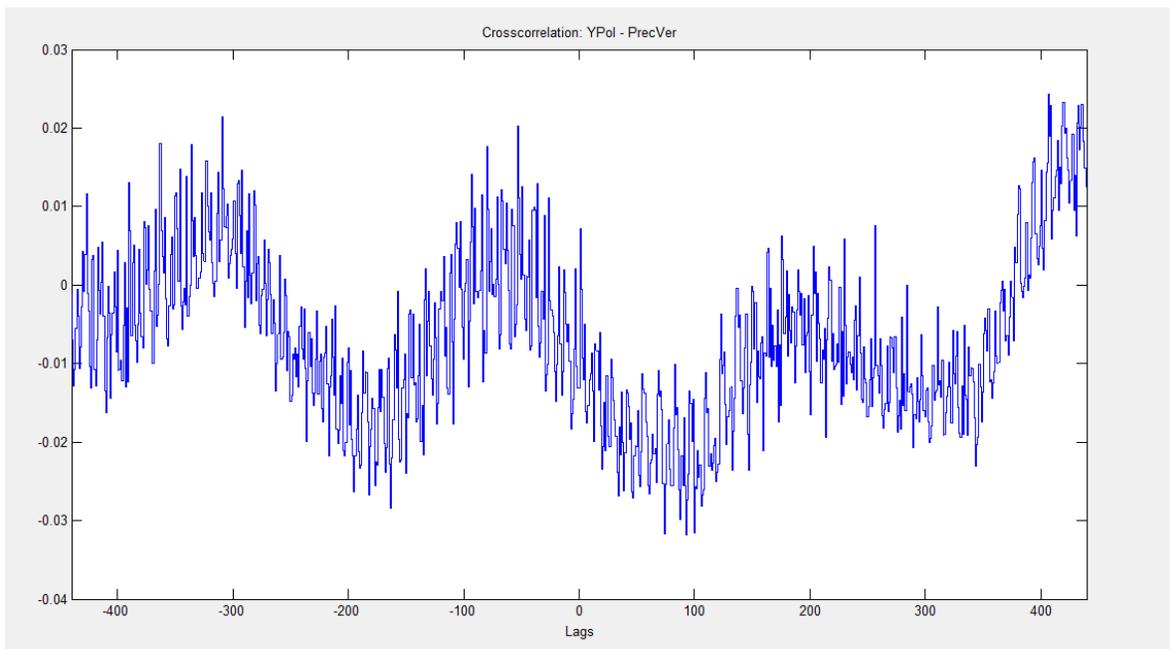


Figura 4.18 Gráfico de Correlación Cruzada de Datos de Precipitación con la Coordenada Y del Polo Instantáneo de Rotación.

5. Resultados

Tras los análisis realizados hemos obtenido los vectores Δs de desplazamiento de los puntos en donde se estimó que las cargas se concentran. A continuación se muestra una tabla que enlista éstos desplazamientos:

Zona del Pacífico

Área de Estudio	Área Completa	Zona1	Zona2	Zona3
X(CT)	-1622923.995	-2032179.497	-1458578.944	-927436.1191
Y(CT)	-5593938.016	-5216822.38	-5743504.692	-5995059.936
Z(CT)	2592488.91	3045302.594	2374613.506	1966298.332
Área (m ²)	1.38563E+15	6.16672E+14	4.19334E+14	3.49625E+14
Precipitación(mm)	243.56	351.13	311.55	369.9
Carga(kg)	3.37484E+17	2.16532E+17	1.30644E+17	1.29326E+17
Desplazamiento de Carga(m)	1941746.378	2646140.97	1634944.693	962611.0249
Sx(mm)(GL)	-6.532	-4.727	-2.27	-1.049
Sy(mm) (GL)	10.924	11.598	3.233	1.357
Sz(mm) (GL)	8.331	5.465	2.932	2.235

Zona del Golfo de México

Área de Estudio	Área Completa	Zona1	Zona2	Zona3
X(CT)	-953414.6513	-1395687	-903477	-86836.4
Y(CT)	-5762899.342	-5683108	-5817721	-6048901
Z(CT)	2555566.023	2908603	2445175	2014349
Área (m ²)	1.61735E+15	6.93E+14	5.43E+14	3.82E+14
Precipitación(mm)	474.97	218.28	376.255	765.3
Carga(kg)	7.68193E+17	1.51E+17	2.04E+17	2.92E+17
Desplazamiento de Carga(m)	3098604.945	3541945	3060365	2381230
Sx(mm)(GL)	-47.224	-4.727	-12.445	-14.367
Sy(mm) (GL)	29.037	11.598	7.318	4.082
Sz(mm) (GL)	-16.872	5.465	-4.709	-6.769

La primera observación que podemos hacer es que entre mayor es el área de estudio y mayor es la precipitación, por obviedad la carga será mayor. Una carga mayor implica deformaciones más grandes.

No sólo el tamaño de la carga influye en los desplazamientos, como podemos observar en las tablas, un vector de desplazamiento mayor de la carga va a generar deformaciones más grandes.

De acuerdo a la naturaleza del modelo matemático de deformaciones, la dirección del vector de desplazamiento de carga determina el sentido de las deformaciones, es decir, si recordamos el capítulo 2, se establece que una carga ejerce cierta presión sobre la corteza terrestre, lo que le ocasiona un hundimiento vertical y un

desplazamiento horizontal a los puntos circundantes a la concentración de la carga; en realidad analizando los desplazamientos de todos los puntos estudiados podemos notar que las deformaciones no son sólo en el sentido vertical sino también en el sentido horizontal.

Contrario a lo que se menciona en el capítulo 2, la deformación vertical no se presenta siempre como un hundimiento. En todos los estudios de la Zona del Pacífico y en la Zona 3 del Atlántico, los desplazamientos en el eje Z son positivos, en otras palabras, no existe un hundimiento sino un abultamiento del área que recibe la presión de la carga.

Lo anterior puede explicarse si consideramos que al mover una cantidad tan grande de carga durante una trayectoria tan extensa, se genera un cambio considerable en el sistema inercial de la Tierra, esto traería como consecuencia un cambio del centro de masas,

llevándolo a éste y por lo tanto al Polo de Rotación hacia el punto en donde se está ejerciendo la carga.

Estudemos los siguientes esquemas:

En la figura 5.1 observamos el sistema de referencia CT observado desde el polo. Este es un sistema en equilibrio.

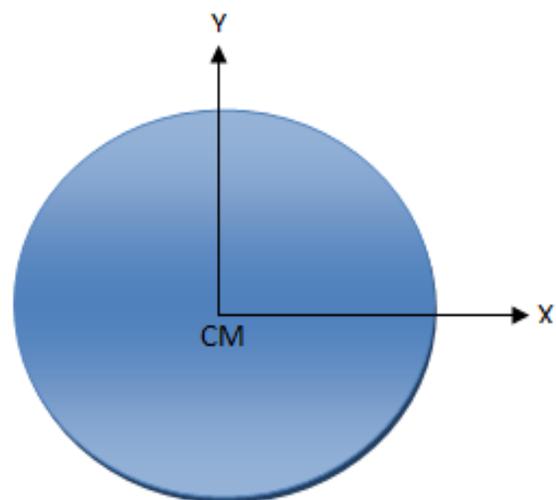


Figura 5.1

En la figura 5.2 se ilustra una carga que es separada de su lugar de origen, ocasionando que el sistema de referencia se desplace de su posición original a la

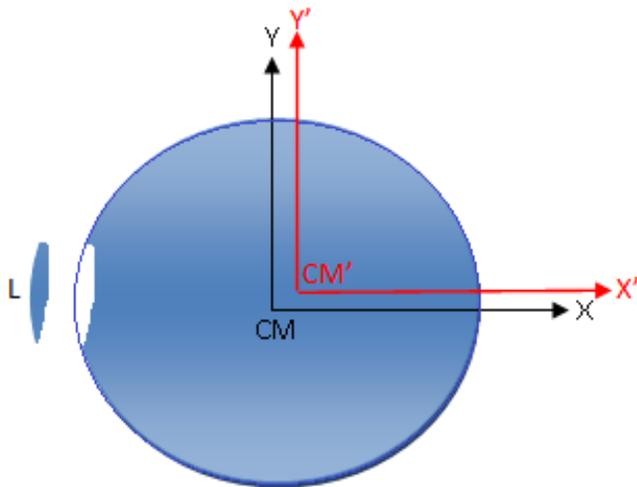


Figura 5.2

posición X' , Y' , CM' pues la ausencia de masa en esa zona provoca que CM tenga que moverse para conservar el equilibrio.

Finalmente en la figura 5.3 podemos observar que la carga cuyo movimiento está

descrito por el vector $\Delta \vec{r}_L$ provoca una modificación adicional al sistema de referencia, llevándolo a la posición X'' , Y'' , CM'' . De aquí podemos inferir que el hecho que la deformación de la corteza en su coordenada Z ($\Delta \tilde{s}_Z$) sea positivo y no se entienda como un hundimiento sino como un abombamiento se debe a éstas modificaciones en el sistema de referencia que como es claramente observable tiene una modificación compuesta.

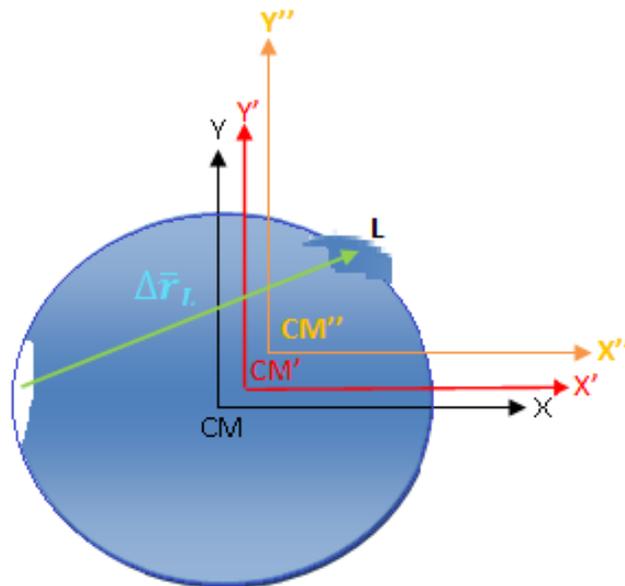


Figura 5.3

Y es a partir de este planteamiento junto con la

correlación entre los datos de precipitación y las coordenadas del Polo Instantáneo de Rotación que podemos establecer que definitivamente existe cierta relación

entre la redistribución de masas que se llevan a cabo mediante los fenómenos de precipitación y el Periodo de Chandler de Oscilación del Polo Terrestre.

Conclusiones

- Como ya se había mencionado, al considerar que las cargas se encuentran concentradas en un solo punto, es posible inferir las deformaciones gracias a las grandes extensiones de las áreas de estudio, pues esto nos permite obtener valores de carga relativamente altos. Si recordamos que en el capítulo 2 se mencionó que el hielo de los glaciares de las zonas polares del planeta ejerce una carga aproximada de 2.7×10^{19} entonces la carga del estudio realizado para la zona del Golfo de México que es de $7.681932045 \times 10^{17} \text{ kg}$ y que es la carga más alta en todos los estudios realizados en este trabajo, representaría apenas el 0.92% de la masa de agua que se encuentra congelada en la Tierra. Sin embargo considerar que una precipitación así pudiera existir uniformemente en toda la zona de estudio es un error pero en este caso se utilizó este valor extremo de carga con el fin de encontrar deformaciones que pudieran ser fácilmente detectables, de otra manera debido a las características del modelo matemático de deformaciones no habría sido posible encontrar desplazamientos que fueran mayores a un milímetro.
- La aplicación del modelo de deformaciones en sentido inverso al propuesto por Blewitt et.al., es decir, partiendo de datos de precipitación para estimar deformaciones en lugar de estudiar deformaciones para inferir cargas nos plantea grandes retos.

En primer lugar se encuentra la determinación correcta de la distribución de precipitación y por tanto de cargas ejercidas en las zonas de estudio, pues

en la mayoría de los casos se encuentran errores y ausencias de información en las series de tiempo de las bases de datos de climatología.

En segundo lugar y probablemente siendo la tarea más difícil de resolver se encuentra la determinación del vector de desplazamiento de las cargas $\Delta\bar{r}_L$ pues determinar con certeza el origen del agua que se precipita en los continentes implica amplios conocimientos en otras ciencias como la climatología.

Sin embargo para el caso de México que carece en gran medida de datos históricos de alta precisión de coordenadas de estaciones de referencia, esta metodología bien puede abrir el campo para la investigación en múltiples fenómenos de dinámica terrestre, brindando grandes oportunidades de desarrollo a ciencias como la Geofísica y la Geodesia.

- Al analizar los resultados obtenidos en este trabajo es posible asegurar que las cargas generadas por precipitaciones deforman la corteza terrestre, en una escala mucho menor a lo que se ha visto en los procesos realizados pero de importancia suficiente como para considerarlas al momento de actualizar nuestros sistemas de referencia, principalmente si se aspira a tener un Sistema Geodésico Nacional de alta calidad y precisión.
- Es un hecho que existe una relación entre las cargas por precipitación y el Periodo de Chandler de Oscilación del Polo Terrestre. Aún cuando los coeficientes de correlación entre los datos son bajos en este trabajo no se pretendió establecer la relación que existe realmente, que como podrá imaginarse es una tarea extremadamente compleja, sobre todo si tomamos

en cuenta que determinar un modelo global implica el análisis de grandes cantidades de información de todo el planeta. Sin embargo es un trabajo que permite mostrar muchas de las posibilidades que la carrera de Ingeniería Geomática es capaz de estudiar, dejando de manifiesto que se trata de una ciencia básica para el desarrollo de la investigación y el conocimiento de los fenómenos naturales que suceden en la Tierra, las relaciones entre todos ellos, sus causas y consecuencias siempre en un contexto espacial y temporal.

Referencias

Bibliográficas

- BOMFORD, Brigadier. "Geodesy", 2ª edición, Oxford University Press, 1962, Gran Bretaña.
- HOFMANN-WELLENHOF, Bernhard; MORITZ, Helmut. "Physical Geodesy". Springer Wien New York, 2005, Austria.
- HOSMER, George. "Geodesy: Including Astronomical Observations, Gravity Measurements, and Method of Least Squares". 2ª Edición, John Wiley & Sons, 1957, EUA.
- KRAKIWSKY, Edward; WELLS D. "Sistemas de Coordenadas en Geodesia". Traducción: M.C. Rafael Sosa Torres, Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática, 1984, México.
- MEDINA PERALTA, Manuel. "Elementos de la Astronomía de Posición". 2ª Reimpresión, Limusa, 1986, México.
- MEDINA PERALTA, Manuel. "Introducción a la Geodesia Geométrica y Técnica de las Operaciones en Campo". 1ª Edición, 1974, 2ª Reimpresión, Limusa, 1986, México.
- RUIZ MORALES, Mario. "Complementos Geodésicos y Cartográficos". 1ª Edición, Universidad de Granada, 2005, España.
- SMITH, James. "Introduction to Geodesy: The History and Concepts of Modern Geodesy". 1ª Edición, John Wiley & Sons Inc., 1997, EUA.
- TORGE, Wolfgang. "Geodesia". Traducción: Ing. Gualterio Luthe García, Editorial Diana, 1983, México.

- TORGE, Wolfgang. "Geodesy". 3ª Edición, Walter de Gruyter, 2001, Alemania.
- VANÍČEK, Petr. "Earth-Pole Woble". Lecture Notes No. 25, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, 1972, Canadá.
- VANÍČEK, Petr. "The Earth Tides". Lecture Notes No. 36, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, 1973, Canadá.
- VANÍČEK, Petr; "Geodesia Física Aplicada, Tomo I". Traducción: M.C. Rafael Sosa Torres, Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática, 1984, México.
- VANÍČEK, Petr; KRAKIWSKY, Edward. "Geodesy: The Concepts". 2ª Edición, 1986; 5ª Reimpresión, El Sevier, 1995, Holanda.

Hemerográficas

- ARGUS, Donald F. "Defining the Translational Velocity of the Reference Frame of Earth", *Geophys. J. Int.*, Vol 169, 2007.
- BLEWITT, Geoffrey; LAVALLÉE, David; CLARKE, Peter; NURUTDINOV, Konstantin. "A New Global Mode of Earth Deformation: Seasonal Cycle Detected", *Science*, Vol. 294, 2001.
- DONG, D.; YUNCK, T.; HEFLIN, M. "Origin of the International Terrestrial Reference Frame", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 108, 2003.
- INTROCASO, Antonio. "Geodesia Física", *Boletín del Instituto de Fisiografía y Geología*, Volumen especial No. 1, Rosario, 2006.
- JÁUREGUI, E. "Climatology of Landfalling Hurricanes and Tropical Storms in México", *Atmósfera*, 2003.
- SALSTEIN, D.A.; KOLACZEK, D.; GAMBIS, D. "The Impact of El Niño and Other Low-Frequency Signals on Earth Rotation and Global Earth System Parameters", *IERS Technical Note 26*, 1999.
- VANÍČEK, Petr. "An Online Tutorial in Geodesy", *AP Encyclopedia of Science and Technology*, 2001.
- VIEIRA, R. "Mareas Terrestres", *Seminario de Astronomía y Geodesia*, Publicación No. 101, Universidad Complutense de Madrid, 1978.