DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

G E O M E T R I A   D E S C R I P T I V A

AUTOR:
ING. AMADO CHIÑAS DE LA TORRE

FECHA DEL CURSO:
SEPTIEMBRE ,1982

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

ING. AMADO CHIÑAS DE LA TORRE

Profesor Titular de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

PRIMERA EDICION

MEXICO, 1970

INDICE

Primera Parte

DOBLE PROYECCION ORTOGONAL

Capítulo I

ELEMENTOS GEOMETRICOS

I.—NOCIONES GENERALES.—EL PUNTO.

II.—LA RECTA EN EL ESPACIO.

III.—EL PLANO EN EL ESPACIO.

CAPITULO II

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

IV.—INTERSECCIONES DE PLANOS Y DE RECTAS CON PLANOS.

V.—PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.

CAPITULO III

METODOS ESPECIALES

VI.—CAMBIOS DE PLANOS.

VII.—ROTACIONES O GIROS.

VIII.—ABATIMIENTOS.

CAPÍTULO IV

TRIEDROS Y POLIEDROS

IX.—TRIEDROS.

X.—POLIEDROS.

Segunda Parte

PLANOS ACOTADOS

CAPÍTULO V

PUNTO, RECTA Y PLANO

XI.—EL PUNTO Y LA RECTA.

XII.—EL PLANO EN EL ESPACIO.

APENDICE

A.—OBSERVACIONES GENERALES

PROLOGO

Siendo, como es, la Geometría Descriptiva aquella rama de la Geometría Clásica que proporciona las soluciones gráficas de los problemas que, en tres dimensiones, plantea la última, y resuelve la Geometría Analítica utilizando herramienta matemática, en los presentes APUNTES del Curso impartido por el suscrito en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., puede observarse que la finalidad que se persigue no es agotar el contenido de los conocimientos acumulados en esta disciplina, mostrando todos los casos particulares de los problemas que constituyen el programa desarrollado de la materia, sino más bien mostrar los procedimientos de tipo general para la solución de dichos problemas, mediante su aplicación en los ejemplos presentados.

Desde luego que, el tratamiento y la solución de los temas incluidos son, en general, iguales a los empleados por eminentes profesores y autores de obras sobre la materia en la Facultad, entre los cuales no se puede dejar de mencionar a los siguientes: Arq. Adrián Giombini (q.e.p.d.), Ing. Jorge Betancourt Cuevas, Ing. Federico Huacuja Sánchez (q.e.p.d.), Ing. Jesús Ibarra Ruiz, y otros cuya intervención ha sido importante en la elaboración del programa mencionado, por lo cual en las páginas siguientes puede encontrarse similitud con sus enseñanzas, y tal vez sólo sean observadas algunas discrepancias que no tienen gran influencia en la esencia de los conocimientos impartidos. También el autor expresa su agradecimiento a los profesores Ing. Gustavo Pozos Labardini e Ing. Leda Speziale de G., por las modificaciones por ellos sugeridas, que aparecen incluídas en la presente edición.

Los Capítulos V y VI, que se presentan en la Segunda Parte de estos APUNTES, pueden ser tratados siguiendo precisamente ese orden de su presentación, o bien inmediatamente antes o después del Capítulo I, según la mayor conveniencia considerada en cada caso. Además, la parte final (X.—Poliedros) del Capítulo IV puede ser eliminada de un curso formal, dado que sólo trata de algunas aplicaciones, en problemas muy particulares, de conceptos y métodos que fueron ya antes descritos.

Debe observarse, obviamente desde luego, que el presente trabajo no corresponde a un Curso de Dibujo, cuya impartición en la Facultad se realiza en forma separada y, donde si bien es cierto que se aplican conocimientos aquí presentados, se considera además la práctica de técnicas especializadas.

Para el empleo provechoso de estos APUNTES se sugiere a los estudiantes la resolución oportuna de los problemas del texto, no sólo de los indicados en las Series de Ejercicios, sino también de los que aparecen como Ejemplos resueltos, en hojas blancas de papel tamaño carta (28 cm. × 21.5 cm.), tomando en centímetros todas las medidas consignadas; con objeto de comprobar y afirmar los conocimientos relativos, lo cual se hace más necesario todavía debido al cambio de escala que implica el tipo de impresión que se ha realizado.

Por otra parte, se debe hacer notar que, aunque no es impropio pensar que muchos de los problemas pueden ser resueltos mediante procedimientos diferentes de los señalados, debe comprenderse que las soluciones ejemplificadas son las que corresponden al conocimiento específico que se trata de impartir en dichos casos.

Finalmente, es conveniente mencionar que, aunque muchos de los errores contenidos en la impresión preliminar han sido corregidos, es muy factible que todavía queden varios en la presente, por lo cual se reitera a todos los lectores las más amplias disculpas, y la seguridad de que se tratarán de corregir posteriormente.

México, D. F., febrero de 1970.

ING. AMADO CHIÑAS DE LA TORRE

Primera Parte

DOBLE PROYECCION ORTOGONAL

CAPÍTULO I

ELEMENTOS GEOMETRICOS

I.—NOCIONES GENERALES.—EL PUNTO EN EL ESPACIO.

1.—DEFINICION Y OBJETO.

La Geometría Descriptiva es aquella disciplina que se ocupa de la representación gráfica, en un solo plano, de los cuerpos u objetos que se manifiestan referidos a las tres dimensiones comúnmente conocidas, ya sea mediante el empleo de la Doble Proyección Ortogonal, que utiliza generalmente dos planos convencionales (superpuestos) de referencia, o desarrollando la Teoría de los Planos Acotados, con un solo plano de proyección y donde se hacen intervenir operaciones adicionales.

La explicación y justificación de los procedimientos que emplea cada uno de los dos métodos antes mencionados, para la resolución gráfica de los problemas donde intervienen la posición, las dimensiones y las propiedades de los cuerpos geométricos en estudio, constituye el objeto fundamental de este Curso, con el que se logra además, aprovechar el carácter formativo de la Geometría Descriptiva para los estudiantes de ingeniería.

De lo anterior se deduce, evidentemente, la gran importancia que estos estudios tienen en el ejercicio de la profesión del ingeniero, por la necesidad ineludible de la representación (e interpretación) gráfica de todo proyecto u obra realizada, mediante los dibujos hechos de acuerdo con los procedimientos señalados por esta disciplina.

2.—PROYECCION DE UN PUNTO.

Como en cualquier otro campo de los conocimientos geométricos, en la Descriptiva se utiliza el concepto de proyección de un punto A sobre un plano (Δ), considerándolo como la intersección con el plano, de la recta que pasa por el punto, designada como recta proyectante del punto. Según que la recta proyectante de un punto A sea o no perpendicular al plano de referencia, se dice que la proyección del punto es ortogonal (A'), u oblicua (A").

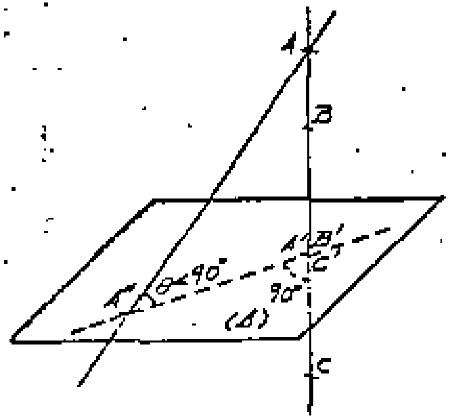


Fig. I.2.1.

También de la definición anotada se deduce que son coincidentes, en el mismo plano de proyección (Δ) o en planos paralelos, las proyecciones (A', B', C',...) de todos los puntos (A, B, C,...) situados en una misma recta proyectante y, por lo tanto, para poder distinguir la posición relativa de puntos cualesquiera en el espacio de tres dimensiones, es necesario relacionar cada punto con otro dato, además de su proyección en el plano de referencia, como su distancia y situación respecto a dicho plano. Cuando ese otro dato se proporciona mediante la proyección ortogonal del punto dado, en otro plano distinto (perpendicular al inicial) de referencia, se está aplicando el Método de la Doble Proyección Ortogonal, y cuando ese mismo otro dato se obtiene por algún procedimiento diferente (estableciendo proporciones numéricas o gráficas), se está desarrollando la Teoría de los Planos Acotados.

3.—SISTEMA DE REFERENCIA.—NOMENCLATURA.

Los dos planos de proyección que generalmente se emplean en la Geometría Descriptiva, son perpendiculares entre sí, y convencionalmente son conocidos como

— Plano horizontal o primer plano de proyección, y
— Plano vertical o segundo plano de proyección;

llamándose línea de tierra a su intersección común (LT), y quedando así dividido el espacio tridimensional en cuatro regiones o cuadrantes (I a IV), como puede verse en la figura siguiente, donde también se anota la designación de las partes de los planos de referencia.

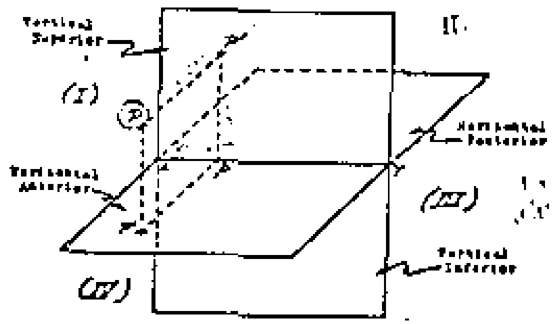


Fig. I.3.1.

Entonces, un punto cualquiera P queda determinado cuando son conocidas: su proyección horizontal o primera proyección (P'), y su proyección vertical o segunda proyección (P"); para cuya representación gráfica es necesario conocer los valores de los segmentos: Lp, pP' = P"P, y pP" = P'P, que son designados en la Geometría Descriptiva con los nombres de: distancia, alejamiento y cota del punto, respectivamente, y se indican siempre precisamente en ese orden.

Es muy importante observar que dicho sistema de referencia corresponde exactamente al que en Geometría Analítica se conoce con la designación de sistema izquierdo, como el XYZ que se muestra en la Fig. I.3.2, donde los planos de referencia XY y XZ, vienen a representar, en ese orden, a los planos horizontal y vertical de proyección, y el punto P del espacio tridimensional queda determinado por la terna ordenada de números reales (x, y, z), que tienen los mismos valores de la distancia, el alejamiento y la cota del punto, empleados en la Geometría Descriptiva, y están colocados también en el mismo orden, sólo que en la Geometría Analítica se designan como: abscisa, ordenada y cota, y son considerados dichos valores como los correspondientes a las componentes del vector de posición (OP) del punto. La única diferencia que posteriormente puede observarse al respecto, es que en la Descriptiva el primer valor (la distancia) se considera convencionalmente siempre positivo.

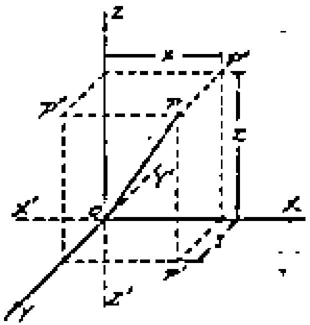


Fig. 1.3.2.

De esta manera, al analizar diferentes posiciones de un punto en las cuatro regiones o cuadrantes del espacio, de acuerdo con la nomenclatura usada en la Geometría Descriptiva, se debe tener:

Región	*Distancia*	*Alejamiento*	*Cota*
I	Positiva.	Positivo.	Positiva.
II	Positiva.	Negativo.	Positiva.
III	Positiva.	Negativo.	Negativa.
IV	Positiva.	Positivo.	Negativa.

O sea que, a cada punto corresponde una terna ordenada de valores reales, de los cuales el primero, relativo a su distancia, es siempre positivo, mientras que los dos siguientes, alejamiento y cota, pueden ser positivos o negativos, según que se encuentre el punto situado adelante o atrás del plano vertical, y arriba o abajo del horizontal, respectivamente; siendo puntos de alejamiento igual a cero los contenidos en el plano vertical, y de cota nula aquellos que forman parte del plano horizontal.

4.—SUPERPOSICION DE LOS PLANOS DE PROYECCION.—LA MONTEA.

Como todo lo anteriormente expuesto (del dominio de cualquiera disciplina geométrica) no permite la representación gráfica, en un solo plano, de los cuerpos u objetos de tres dimensiones, más que mediante el empleo de las perspectivas convencionales, para lograr dicho objetivo la Geometría Descriptiva introduce el artificio de considerar superpuestos los planos horizontal y vertical de proyección, mediante la rotación supuesta de uno de ellos alrededor de su intersección (línea de tierra) con el otro, de manera que resulten coincidentes, a partir de la mencionada línea de tierra (LT), como sigue:

— En la parte superior: el vertical superior con el horizontal posterior, y

— En la parte inferior: el vertical inferior con el horizontal anterior.

La representación convencional que así se obtiene, de todos los puntos del espacio tridimensional, constituye el plano que emplea la Geometría Descriptiva para el desarrollo del Método de la doble proyección ortogonal, y lo designa con el nombre de "montea" (Fig. 1.4.2).

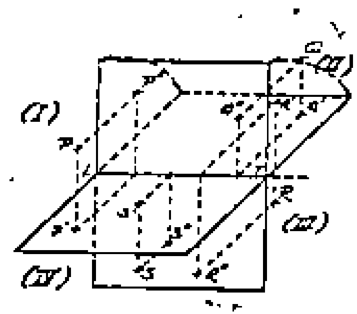


Fig. 1.4.1.

Fig. 1.4.2.

Entonces, en la montea cada punto queda representado por sus dos proyecciones (P' y P", Q' y Q", R' y R", S' y S"), en los correspondientes planos de proyección (horizontal y vertical), ligadas por la línea de referencia, perpendicular a LT a una distancia (considerada siempre positiva) a partir de su extremo izquierdo u origen, igual a la distancia o abscisa del punto dado.

Y por lo tanto, para representar un punto P cualquiera en la montea, dado por la terna ordenada de valores (x, y, z), después de haber marcado su distancia o abscisa (x), y trazado en ese lugar su línea de referencia perpendicular a LT, se mide sobre aquella, a partir de LT:

— El alejamiento (y): hacia arriba si es negativo, cuando el punto esta en cualquiera de las regiones II ó III; o hacia abajo si es positivo, cuando corresponde a un punto situado en los "cuadrantes" I ó IV; con lo cual queda determinada la posición del punto: atrás o adelante del plano vertical de referencia.

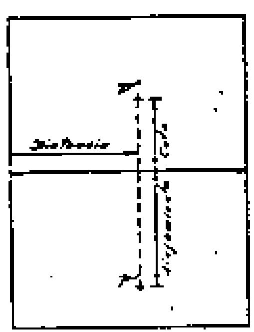


Fig. 1.4.3.

— La cota (z) del punto: hacia arriba si es positiva, o sea cuando se trata de un punto del I o II "cuadrante"; o hacia abajo si es negativa, lo que ocurre cuando el punto es de la III ó IV región. De esta manera queda establecida la posición del punto arriba o abajo del plano horizontal de referencia.

Es claro que, todos los puntos situados:

— En el plano horizontal de referencia tienen cota igual a cero, y su proyección vertical (P") queda en LT.

— En el plano vertical de proyección, tienen alejamiento cero, y su proyección horizontal (P') queda en LT.

— En la línea de tierra (LT), tienen cotas y alejamientos nulos, porque pertenecen simultáneamente a los dos planos de proyección.

5.—LOS PLANOS BISECTORES.

Los dos planos que bisectan los ángulos formados por los planos perpendiculares de referencia (horizontal y vertical), se conocen con

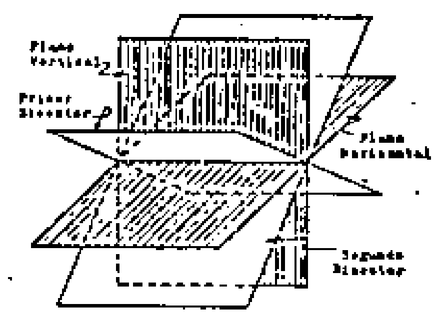


Fig. 1.5.1.

el nombre de planos bisectores, y se utilizan con cierta frecuencia como planos auxiliares para la solución de algunos problemas, como después se verá. Se designa como primer bisector al que pasa por los cuadrantes I y III, y como segundo bisector al que atraviesa las regiones II y IV.

Es fácil observar que:

— Como todo punto del primer bisector tiene su alejamiento y su cota de igual magnitud y del mismo signo, positivo o negativo, según que esté en el cuadrante I o en el III; entonces, todo punto cuyas proyecciones sean simétricas respecto a la línea de tierra, es un punto del primer bisector, y

— Dado que todo punto del segundo bisector tiene su alejamiento y su cota iguales en magnitud, pero de signos contrarios, que dependen de la situación del punto en las regiones II ó IV, puede concluirse que, todo punto con sus dos proyecciones (horizontal y vertical) coincidentes es un punto del segundo bisector.

6.—RESUMEN, EJEMPLOS Y EJERCICIOS.

a) Resumen.—Con objeto de recordar rápidamente todas las anotaciones anteriores, referentes a la posición de un punto dado cualquiera, representado según el sistema de referencia empleado por la Geometría Descriptiva, puede hacerse la tabla siguiente:

Punto	*Posición*	*Alejamiento*	*Cota*
A	Primer cuadrante.	+	+
B	Segundo cuadrante.	−	+
C	Tercer cuadrante.	−	−
D	Cuarto cuadrante.	+	−
E	Horizontal anterior.	+	0
F	Horizontal posterior.	−	0
G	Vertical superior.	0	+
H	Vertical inferior.	0	−
J	Línea de Tierra.	0	0

Observaciones:

1a.).—No se mencionan en el cuadro las distancias de los puntos anotados porque, como ya se indicó antes, siempre se consideran positivas.

2a.).—Las dos proyecciones de un punto (A′, A″; B′ B″; C′, C″; ...) se dice que son homólogas entre sí, o que una de ellas es homóloga de la otra.

b) Ejemplos.—Indicar en la montea las proyecciones de los puntos: A(1.5, 7.3, 10.8), B(4.0, −6.4, 9.6), C(6.1, −11.6, −4.8), D(8.2, 3.8, −9.4), E(10.3, 7.5, 0), F(12.7, −8.8, 0), G(15.0, 0, 6.5), H(17.3, 0, −11.1) y J(19.5, 0, 0) donde todos los valores están anotados en centímetros. (Fig. I.6.1).

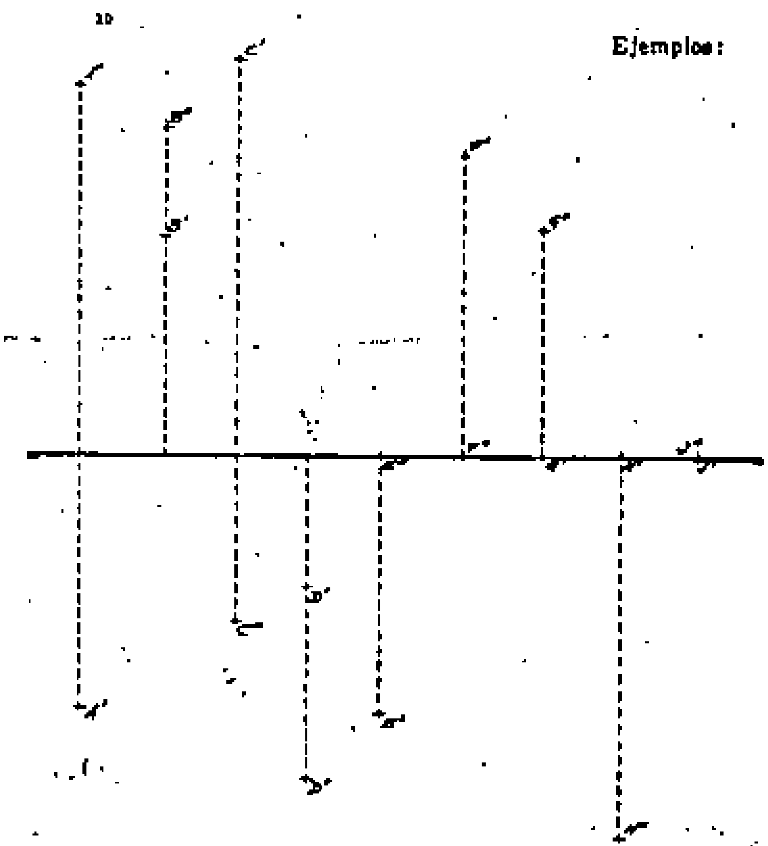


Fig. I.6.1.

c) **Ejercicios.** (Serie 1):

1.—Considerando también que todos los valores anotados corresponden a centímetros, representar en la montea las proyecciones de los siguientes puntos:

K6.4, −8.4, −5.8)
L(3.0, −6.4, −6.4),
M(9.6, 4.5, 8.4),
N(14.5, −4.5, 4.5),
O(18.4, 3.6, −9.5),
P(16.5, 0, −6.0),
Q(3.2, −7.5, 5.2),
R(4.5, 0, 0),
S(10.0, 0, 6.4),
T(1.8, 5.6, −5.6),
U(6.0., −3.6, 6.0),
V(7.2, 1.6, 1.6),
W(4.8, 9.5, 3.6),
X(5.5, 0, −3.6),
Y(9.6, −2.8, −11.4),
Z(12.0, 12.0, −6.0),

registrando en lista separada la posición de cada uno, según la región, el plano de proyección o el plano bisector en donde se encuentre.

2.—Dibujar la montea de nueve puntos diferentes, situados en todas las regiones del espacio tridimensional, indicando en lista separada las coordenadas de cada uno de ellos, y su posición relativa respecto al sistema de referencia.

II.—LA RECTA EN EL ESPACIO.

1.—PROYECCIONES DE LA RECTA.—SUS PLANOS PROYECTANTES.

Al considerar que una recta cualquiera (r) queda definida por dos de sus puntos: A y B, se concluye en Geometría Descriptiva que la recta está determinada por las rectas prolongadas que unen las proyecciones correspondientes: A′, B′ y A″, B″, las cuales son, res-

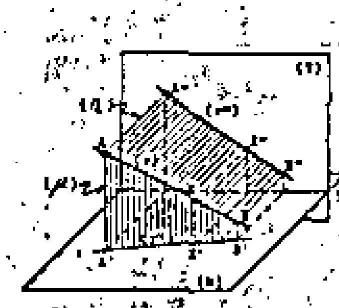


Fig. II.1.1.

Fig. II.1.2.

pectivamente, las proyecciones homólogas (r′) y (r″), horizontal y vertical, de la recta (r). Cualquier otro punto X de la recta, tiene sus proyecciones X′ y X″ en las correspondientes proyecciones de la recta, como puede observarse en las Figs.: II.1.1, que muestra la perspectiva ilustrativa de la explicación anterior, y II.1.2, que representa la montea utilizada por la Geometría Descriptiva para el caso general del tratamiento de la recta.

Debe observarse, en la primera de las figuras mencionadas, que la recta forma con cada una de sus proyecciones un plano perpendicular al respectivo plano de proyección (H) o (V). Así, se tiene que:

— (r) y (r') forman el plano proyectante (μ), perpendicular a (H), todas de cuyas rectas también se proyectan según (r');

— (r) y (r") determinan el plano proyectante (η), normal a (V), tal que todas las rectas que le pertenecen quedan proyectadas coincidentes en (r"); y entonces:

— **La recta (r) queda definida por la intersección de esos dos planos proyectantes (μ) y (η).**

Aunque de las observaciones anteriores se deduce que, en el caso general, la condición necesaria y suficiente para que una recta cualquiera del espacio esté completamente determinada es que se conozcan sus dos proyecciones, resulta conveniente aclarar que en el caso particular de que las dos proyecciones (s') y (s"), en los planos horizontal y vertical respectivamente, resulten ambas perpendiculares a la línea de tierra (LT), no puede usarse para la determinación de la recta (s) más que una sola de dichas proyecciones, ya que en ese caso sus dos planos proyectantes se confunden en uno solo, y las proyecciones (s') y (s") pueden corresponder a cualquiera de las rectas contenidas en dicho plano. Es necesario recurrir, entonces, a otra proyección (s‴) en el plano (auxiliar) de referencia (T), que es conocido como tercer plano de proyección, y con cuyo auxilio ya pueden obtenerse las proyecciones M' y M" de un punto cualquiera de la recta (s), como se indica en las Figs. II.1.3 y II.1.4, siempre que se cuente desde el principio con los datos suficientes al respecto, como los referentes a dos distintos puntos de la recta en cuestión.

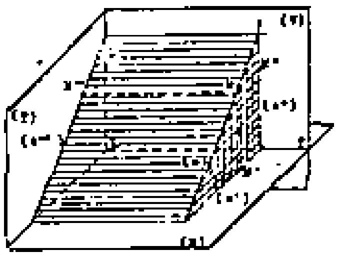


Fig. II.1.3.

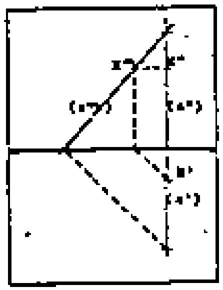


Fig. II.1.4.

2.—DIFERENTES POSICIONES DE UN SEGMENTO. NOMENCLATURA.

Conocidas las diferentes posiciones de los puntos extremos de un segmento de recta, y sin considerar su prolongación en las dos direcciones correspondientes, es posible mencionar como diferentes posiciones de un segmento de recta, respecto a las regiones, planos de proyección y planos bisectores, las que corresponden a los siguientes ejemplos:

Segmento	*Posición*
A(1.0, 3.8, 2.1), B(2.3, 1.6, 1.3).	Cualquiera; 1a. Región.
C(3.6, −0.8, 1.4), D(5.7, −3.6, 2.5).	" 2a. "
E(6.8, −1.0, −1.2), F(8.9, −1.8, −3.3).	" 3a. "
G(9.9, 1.3, −3.3), H(12.3, 0.7, −1.5).	" 4a. "
I(13.1, 2.6, 2.6), J(13.2, 1.4, 1.4).	1er. Bisect.; 1a. "
K(15.9, −0.6, −0.6), L(17.7, −4.0, −4.0).	" " 3a. "
M(18.7, −3.2, 3.2), N(20.8, −0.8, 0.8).	2o. Bisect.; 2a. "
O(1.2, 2.5, −2.5), P(3.6, 1.1, −1.1).	" " 4a. "
Q(4.7, 3.3, 0), R(7.2, 0.5, 0).	Plano Horiz. Anterior.
S(8.4, −2.6, 0), T(10.9, −1.0, 0).	" " Posterior.
U(11.8, 0, 1.7), V(14.1, 0, 3.4).	Plano Vertic. Superior.
W(15.0, 0, −0.8), X(17.4, 0, −4.0).	" " Inferior.
Y(18.4, 0, 0), Z(20.4, 0, 0).	Línea de Tierra.

que aparecen ilustrados en la Fig. II.2.1.

DIFERENTES POSICIONES DE UN SEGMENTO.

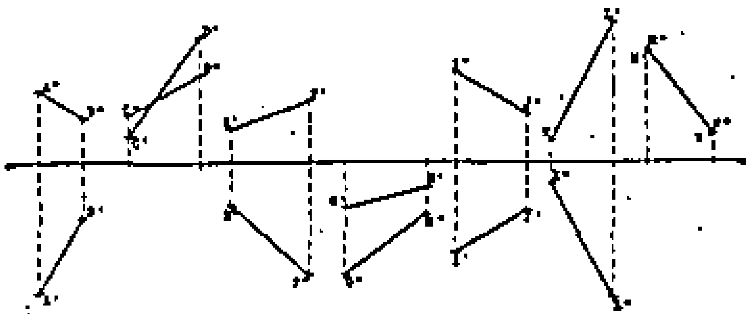


Fig. II.2.1.

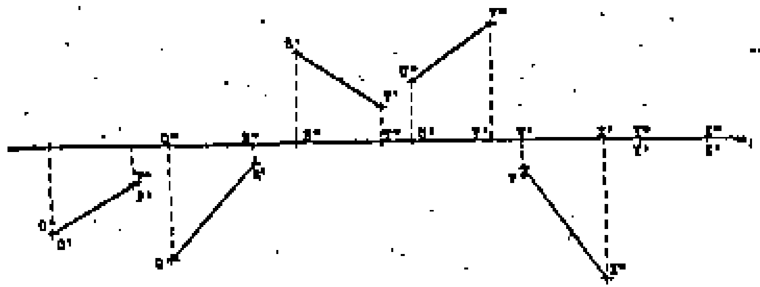


Fig. II.2.1. (Continuación).

Sin embargo, en la práctica de la Geometría Descriptiva se acostumbra usar para la designación de un segmento de recta, según su posición particular respecto a los planos de proyección, la nomenclatura que se indica en los siguientes ejemplos, cuya ilustración se muestra en la Fig. II.2.2, de acuerdo con los datos que se anotan en seguida:

Segmento	*Designación*
A(2.0, 1.6, 1.8), B(6.1, 4.3, 1.8).	Horizontal.
C(8.5, 2.4, 2.7), D(12.8, 2.4, 5.3).	Frontal.
E(14.8, 1.2, 2.6), F(18.9, 1.2, 2.6).	Fronto-Horizontal.
G(2.5, 1.2, 1.0), H(2.5, 1.2, 4.5).	Vertical.
I(6.2, 1.4, 2.6), J(6.2, 5.6, 2.6).	De Punta.
K(10.4, 5.0, 5.0), L(10.4, 1.8, 1.0).	De Perfil.
M(14.8, 0.8, 1.7), N(19.2, 2.8, 6.0).	Cualquiera.

Es muy importante anotar que, para la solución de problemas sobre rectas pueden aprovecharse las propiedades que se observan en los casos particulares anotados, como son:

1a.).—Las proyecciones verticales de todos los puntos de una recta horizontal (AB) se encuentran en una paralela (A″B″) a la línea de tierra (LT).

2a.).—Las proyecciones horizontales de todos los puntos de una recta frontal (CD) se localizan en una paralela (C′D′) a la línea de tierra (LT).

3a.).—Las dos proyecciones (horizontal y vertical) de todos los puntos de un segmento fronto-horizontal (EF) se encuentran sobre las paralelas (E′F′) y (E″F″) a LT.

4a.).—Las proyecciones horizontales de todos los puntos (G′, H′, ...) de una recta vertical (GH) coinciden en un solo punto, mientras que sus proyecciones verticales definen una recta (G″H″) perpendicular a (LT).

5a.).—Las proyecciones verticales de todos los puntos de una recta de punta (IJ) son coincidentes en un mismo punto (I″, J″, ...), a la vez que sus proyecciones horizontales están en una normal (I′J′) a (LT).

6a.).—Las dos proyecciones (horizontal y vertical) de todos los puntos de una recta de perfil (KL) están en una misma perpendicular (K′L′ o K″L″) a (LT).

CASOS PARTICULARES.— NOMENCLATURA.

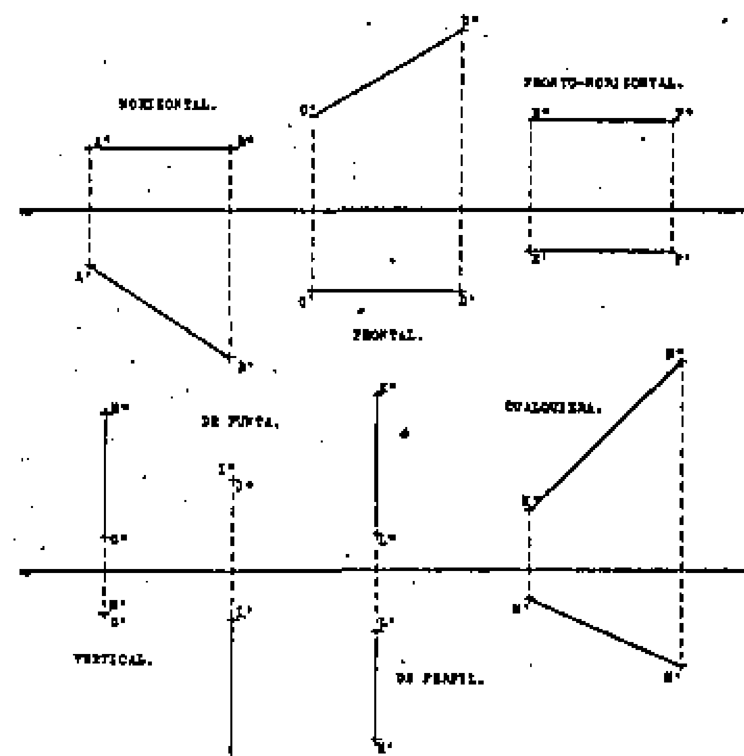


Fig. II.2.2.

Para el caso general de una recta cualquiera (MN), las correspondientes proyecciones (horizontal y vertical) de todos sus puntos se localizan en los segmentos (M'N') y (M"N"), que son oblicuos respecto a (LT), formando ángulos diferentes con esta última, siempre que no se trate de una recta contenida en alguno de los dos planos bisectores, porque en ese caso sus proyecciones, o son simétricas respecto a (LT), o son coincidentes, como ya se observó en el ejemplo relativo, de la Fig. II.2.1.

También puede observarse fácilmente en la Fig. II.2.2, de los ejemplos últimamente anotados, que las rectas verticales y las de punta pueden considerarse ambas como casos particulares de las rectas de perfil, y respectivamente, de las rectas frontales y horizontales.

— Ejercicios. (Serie II.1).

Trazar en la montea las proyecciones de cada uno de los segmentos de recta cuyos extremos se mencionan en seguida, indicando en lista separada la designación con que se le conoce, así como la región en que se encuentra:

1.—
(AB): A(2.2, 0.8, 0.8), B(5.8, 4.0, 4.0).
(CD): C(9.1, 0.8, 3.6), D(9.1, 4.8, 1.5).
(EF): E(12.2, 3.8, 1.8), F(16.9, 1.0, 1.8).
(GH): G(18.7, 5.0, 2.8), H(18.7, 1.0, 2.8).

2.—
(IJ): I(2.3, −1.4, −1.8), J(2.3, −4.9, −1.8).
(KL): K(5.2, 2.2, −5.3), L(5.2, 2.2, −1.2).
(MN): M(8.3, −4.0, −5.2), N(8.3, −1.5, −0.8).
(OP): O(10.9 −4.0, 2.3), P(17.2, −4.0, 2.3).
(QR): Q(19.0, 3.0, −5.4), R(15.2, 3.0, −2.2).

3.—POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.

A reserva de tratar posteriormente con más detalle los problemas en que intervienen más de una recta, ahora podemos anotar que cuando se consideran simultáneamente dos rectas, su posición relativa siempre puede considerarse comprendida en alguno de los casos que en seguida se mencionan, y cuya ilustración aparece en la Fig. II.3.1:

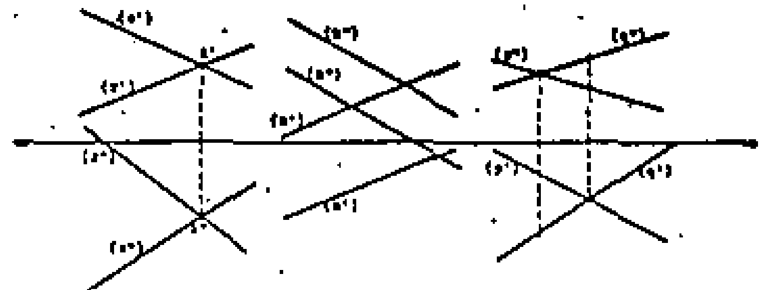


Fig. II.3.1.

1o.).—**Concurrentes.**—Si en sus dos proyecciones respectivas se observa el punto común de concurrencia, definido por sus proyecciones homólogas correspondientes. Dos rectas concurrentes determinan el plano que las contiene.

2o.).—**Paralelas.**—Cuando sus respectivas proyecciones (horizontales y verticales o auxiliares) son paralelas entre sí. También definen el plano en que se encuentran.

3o.).—**Cruzadas.**—Si son ni concurrentes ni paralelas; o sea que en sus correspondientes proyecciones no se observa punto común de concurrencia ni paralelismo entre ellas. Este es el caso general, y en él, las dos rectas no pueden estar contenidas en un mismo plano.

Es claro que, cuando se consideran más de dos rectas de los dos primeros casos mencionados, pueden o no estar contenidas todas en el mismo plano.

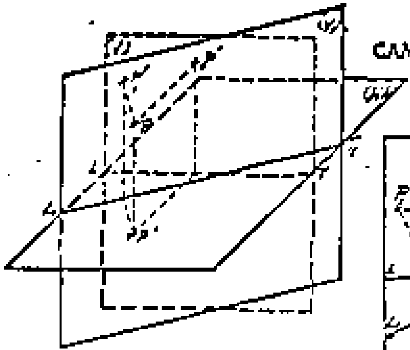
Problemas: (Figs. II.3.2).

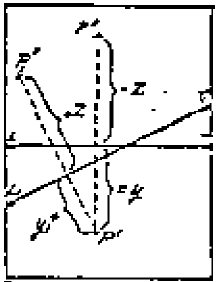
1.—Completar las proyecciones del segmento A(3.0, −1.0, −1.0), B(6.0, −4.5, z), que está en el primer bisector. Por C(6.0, −1.4, −2.0), trazar una recta horizontal que sea concurrente con (AB), determinando el punto de concurrencia entre ambas.

2.—Por D(12.7, y, 3.5) trazar una recta del segundo bisector que sea concurrente con la recta frontal que pasa por los puntos: E(11.0, −1.7, −2.8) y F(16.0, y_1, 1.2).

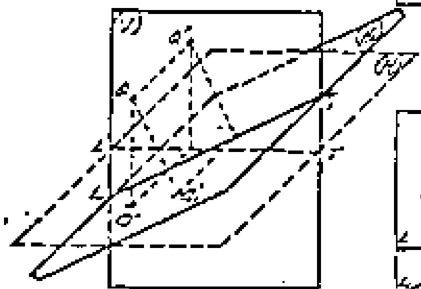
3.—Dibujar las dos proyecciones de la recta fronto-horizontal que pasa por el punto en que el segmento G(2.5, 0, 5.2) H(2.5, 3.8, 0) corta al primer bisector.

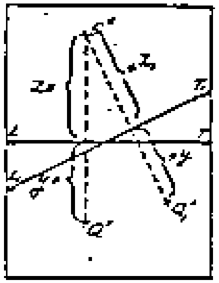
CAMBIO DEL PLANO VERTICAL.





Figs. VI.1.1.





CAMBIO DEL PLANO HORIZONTAL.

(y), ya que se efectúa de manera semejante al cambio explicado en el párrafo anterior, como fácilmente puede ser observado en las Figs. VI.1.1. cambiando la LT inicial por L_1T_1.

También de toda la explicación anterior se pueden anotar las siguientes

observaciones:

1a.—Los cambios sucesivos deben realizarse alternando los planos de referencia; es decir, a todo cambio del plano vertical sólo puede seguir un cambio del plano horizontal, y viceversa.

2a.—Los cambios de los Planos (Vertical y Horizontal) generalmente se efectúan substituyéndolos por otros que no son paralelos respecto a los iniciales.

3a.—Aunque un cambio del Plano Horizontal se realiza generalmente, según se acaba de anotar, substituyéndolo por otro que, no siendo paralelo al anterior no puede seguir siendo horizontal, se le acostumbra seguir llamándolo así, para distinguirlo y establecer su relación con el otro plano (el Vertical) de referencia.

4a.—Cada cambio de uno de los planos de proyección se manifiesta en la Montea correspondiente, por un cambio en la Línea de Tierra, de LT a L_1T_1, a L_2T_2, a L_3T_3, etc.

5a.—La utilización del tercer plano de proyección, tal como se ha venido realizando hasta ahora en la solución de algunos problemas, puede considerarse como una aplicación de este Método, al substituir uno de los dos planos de referencia (H ó V) iniciales, por el mencionado Tercer Plano de Proyección.

La aplicación de este Método de los Cambios de Planos, así como también la de los otros métodos especiales que después se verán, resulta aconsejable en la solución de problemas relativos a la determinación de magnitudes reales de segmentos de recta, de ángulos entre rectas, de ángulos que un plano cualquiera forma con los de proyección, etc., siempre que la disposición de los datos así lo presente, y a pesar de que su aplicación no sea exclusiva para tales (u otros) problemas, que también puedan ser resueltos por otro (u otros) de los Métodos que serán mencionados posteriormente.

2.—EJEMPLOS DE APLICACION.

a) **Magnitud real de un segmento de recta, y ángulos que forma con los planos de referencia.**—Una vez que se tienen las proyecciones homólogas respecto al sistema inicial de referencia, la magnitud real de un segmento de recta cualquiera, o sea la distancia entre sus puntos extremos, puede obtenerse mediante un cambio de planos, que lo presente colocado paralelamente a uno de los nuevos planos de proyección, distinguiéndolo así como un tipo particular de recta (de perfil, frontal, horizontal, etc.), tal que al observar su proyección relativa en la montea, en ella quede mostrada su verdadera magnitud, así como el ángulo que forma con el otro plano de referencia, cuyo valor corresponde al que forman entre sí la proyección considerada y la nueva línea de tierra.

Entonces, para resolver un problema como éstos, se puede realizar: un Cambio del Plano Vertical, mediante una L_1T_1 paralela a la proyección horizontal del segmento, o un Cambio del Plano Horizontal, efectuado al considerar L_2T_2 paralela a la proyección vertical inicial del mismo, según las incógnitas que se quiera despejar, como puede observarse en el siguiente

Problema.—Obtener la verdadera magnitud del segmento: A (4.2, 2.4, 1.5), B (11.3, 4.8, 7.3), así como los ángulos que forma con cada uno de los planos de referencia (o sea el que forma el segmento con su propia proyección en cada uno de los planos considerados).

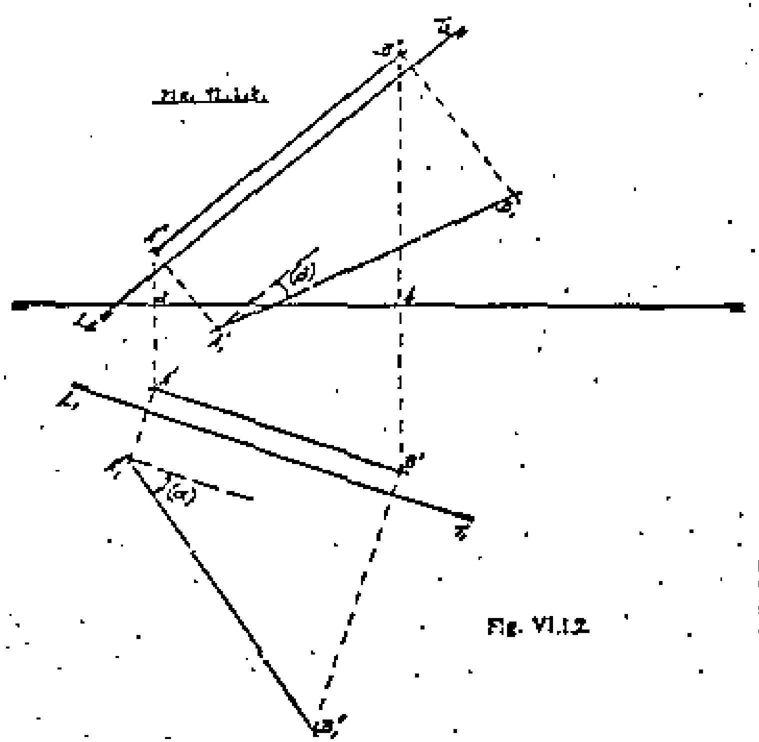


Fig. VI.1.2

Procedimiento: (Fig. VI.1.2).

1o.—Se hace un cambio del plano vertical, mediante una L_1T_1 paralela a (A'B'), por cuyos puntos se llevan las nuevas referencias normales a L_1T_1, a partir de la cual se llevan los mismos valores de las cotas (aA") y (bB") de A y B, para obtener sus nuevas

proyecciones verticales A_1'' y B_1'', que indican ya su verdadera magnitud, y el ángulo (α) que forma el segmento con el plano horizontal.

2o.—Independientemente del paso anterior, pero de manera semejante a su proceso de ejecución, se puede efectuar un cambio del plano horizontal, utilizando una L_2T_2, paralela a (A"B"), por cuyos puntos se trazan referencias normales a aquella, a partir de la cual se llevan los mismos valores iniciales de los alejamientos (aA') y (bB'), para tener así la nueva proyección horizontal (A_1' B_1'), que muestra al segmento como parte de una recta horizontal, en su magnitud real, y donde (β) es el ángulo que forma con el plano vertical.

b) Distancia de un punto a un plano.—Es un problema semejante al anterior, donde se necesita obtener también la magnitud real del segmento de la recta normal al plano (π), desde el punto A, hasta su intersección I con el plano, por lo cual es necesario determinar primero dicho segmento (AI), según los procedimientos ya conocidos, y después efectuar el cambio del plano adecuado para conocer su verdadera magnitud, como se podrá ver en el ejemplo que en seguida se menciona.

Problema.—Determinar la distancia del punto A (10.4, 6.0, 7.6) al plano (π), una de cuyas rectas de máxima inclinación pasa por B (3.8, 4.2, 3.0) y M (7.2, −1.4, 8.0).

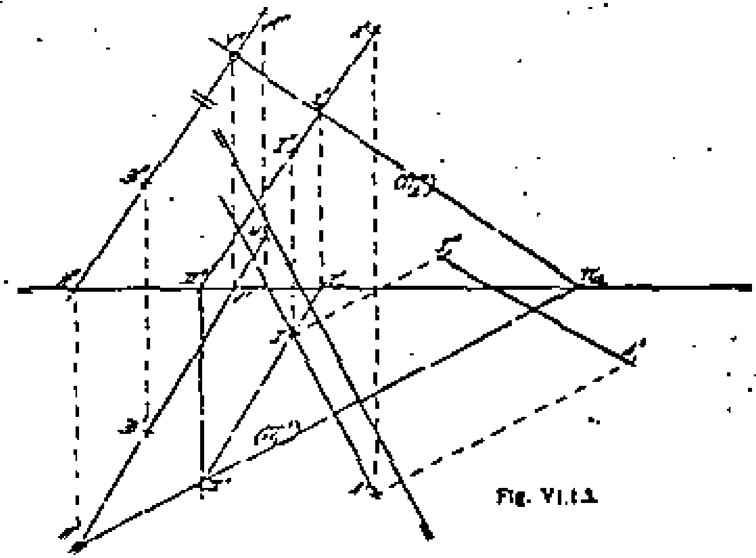


Fig. VI.1.3

Procedimiento: (Fig. VI.1.3).

1o.—Se determinan las trazas de (π), luego la intersección I de éste con la normal trazada por A, siguiendo los procedimientos ya conocidos.

2o.—Se efectúa un cambio del plano vertical, trazando L_1T_1 paralelamente a (I'A'), y las nuevas referencias con las cotas de los puntos I y A, de su mismo valor respecto a LT inicial. La nueva proyección vertical (I_1'' A_1'') muestra la verdadera magnitud.

c) **Distancia entre dos planos paralelos.**—La distancia entre dos planos paralelos corresponde a la verdadera magnitud del segmento de su perpendicular común, comprendido entre sus respectivos puntos de intersección, que pueden obtenerse utilizando uno de los procedimientos conocidos, y después efectuando el cambio del plano adecuado; por lo cual este problema no es más que una variante del estudiado en el inciso inmediato anterior, y su solución se logra de manera semejante, como se indica en seguida:

Problema.—Determinar la distancia entre los planos paralelos (P): (4.0, 4.0) 9.0 (4.0, 6.0), y (Q), que contiene al punto A(6.8, 3.0, 4.0), dibujando también las trazas de ambos.

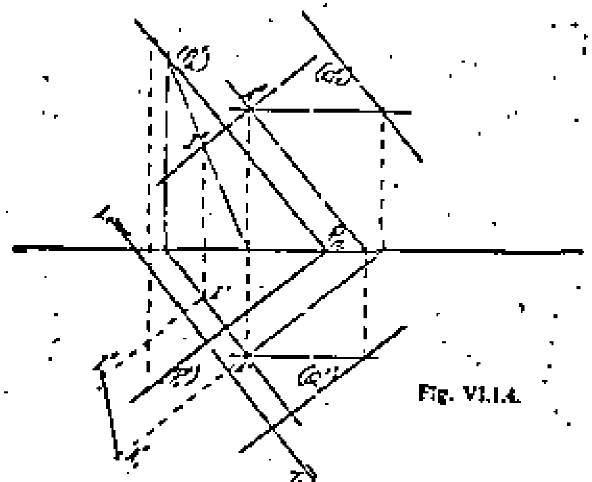


Fig. VI.1.4.

Procedimiento: (Se muestra gráficamente en la Fig. VI.1.4).

d) **Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.**—La mínima distancia entre dos rectas que se cruzan sólo se manifiesta cuando una de ellas es perpendicular a uno de los planos de proyección, lo cual puede lograrse mediante los adecuados cambios.

Problema.—Dados los segmentos: (AB) = A(3.1, 5.0, 4.5), B(9.6, 1.5, 1.8), y (CD) = C(2.1, 4.0, 1.2), D(9.1, 5.0, 2.5), obtener su mínima distancia.

Procedimiento: (Fig. VI.1.5).

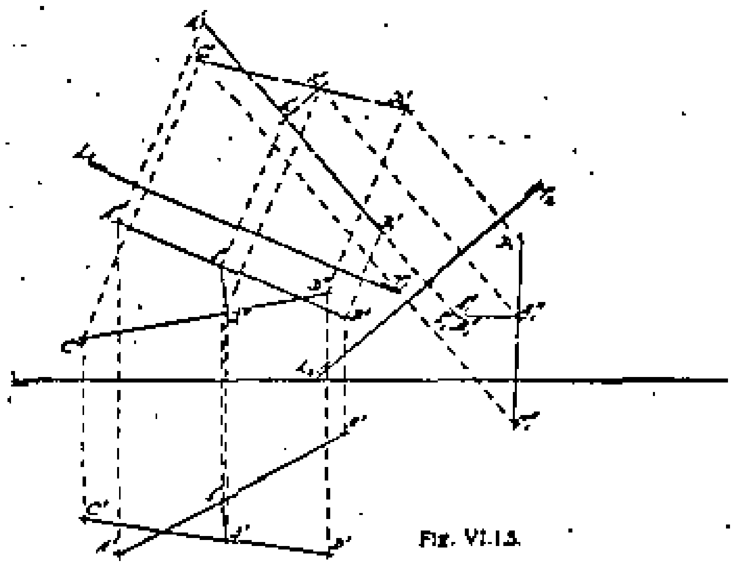


Fig. VI.1.5.

1o.—Se efectúa un cambio del plano horizontal, a través de L_1T_1 paralela a $(A''B'')$, obteniéndose las nuevas proyecciones horizontales: $(C_1'\ D_1')$ y $(A_1'B_1')$.

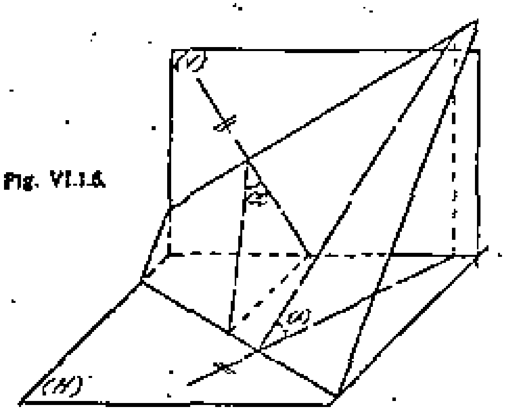
2o.—Se realiza en seguida un cambio del plano vertical, utilizando L_2T_2 perpendicular a $(A_1'B_1')$, logrando que en estas últimas proyecciones verticales, A_1'' y B_1'' resulten coincidentes, y se dibuja a partir de ahí, la perpendicular a $(C_1''\ D_1'')$, que se muestra en verdadera magnitud: $(1_1''\ 2_1'')$.

3o.—Si se regresa el procedimiento a LT inicial, pueden obtenerse los puntos extremos de la perpendicular que marca la mínima distancia entre los segmentos dados.

NOTA.—Debe observarse, en el problema anterior, que para regresar al sistema inicial, se traza la referencia de $2_1''$ normalmente a L_2T_2 hasta cortar a la proyección $(C_1'\ D_1')$ en $2_1'$, por donde se dibuja una perpendicular a la proyección $(A_1'\ B_1')$ del otro segmento, que lo corta en $1_1'$, de donde ya se puede terminar fácilmente el proceso mencionado en el paso 3o. del procedimiento.

e) Angulos que un plano cualquiera forma con los de proyección.—Como el valor del ángulo que un plano dado cualquiera forma con el Horizontal, y con el Vertical de referencia, está dado por el que corresponde a sus rectas de máxima pendiente, y de máxima

Fig. VI.1.6.



inclinación, respectivamente (Fig. VI.1.6), el problema de la obtención de sus valores, (A) y (B), puede resolverse mediante cambios de planos que coloquen al plano dado en la posición correspondiente a los tipos particulares de canto y vertical, como puede observarse en el siguiente:

Problema.—Indicar en la montea los ángulos que el plano (ν): (7.5, y) 2.0 (7.5, 5.5), que contiene al punto P(11.0, 4.8, 5.7), forma con los planos iniciales de referencia.

Procedimiento: (Fig. VI.1.7).

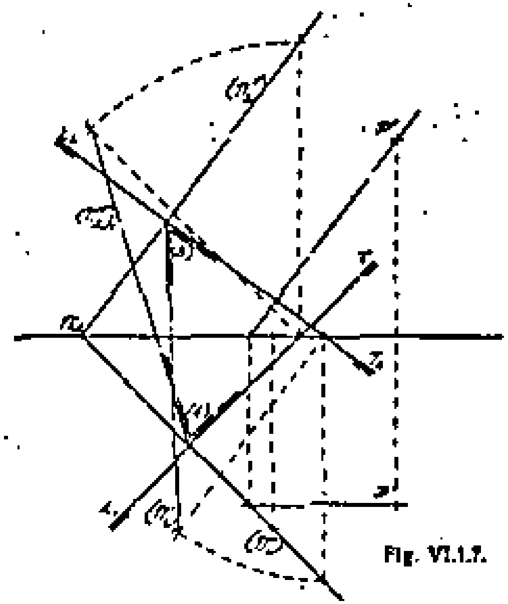


Fig. VI.1.7.

1o.—Se obtienen las dos trazas de (π), dibujando por P una frontal del plano.

2o.—Se hace un cambio del plano vertical, mediante L_1T_1 normal a (π_1'), donde al quedar convertido en un plano de canto, resulta indicado el ángulo (A) entre (π) y (H), como se indica en la figura.

3o.—Independientemente del paso anterior, se realiza un cambio del plano horizontal, utilizando L_2T_2, perpendicular a (π_2''), para obtener el ángulo (B), entre (π) y (V), al quedar convertido en plano vertical, cuyas nuevas trazas son: $(\pi_1')_1$ y (π_2'').

Observación.—Es importante advertir que los problemas tratados en los incisos b) y c) inmediatos anteriores también pueden ser resueltos utilizando el conocimiento obtenido en este último problema, convirtiendo el plano dado en uno de canto o vertical respecto al nuevo sistema de referencia, para así observar directamente la magnitud real de la distancia pedida, como se indica en las figuras si-

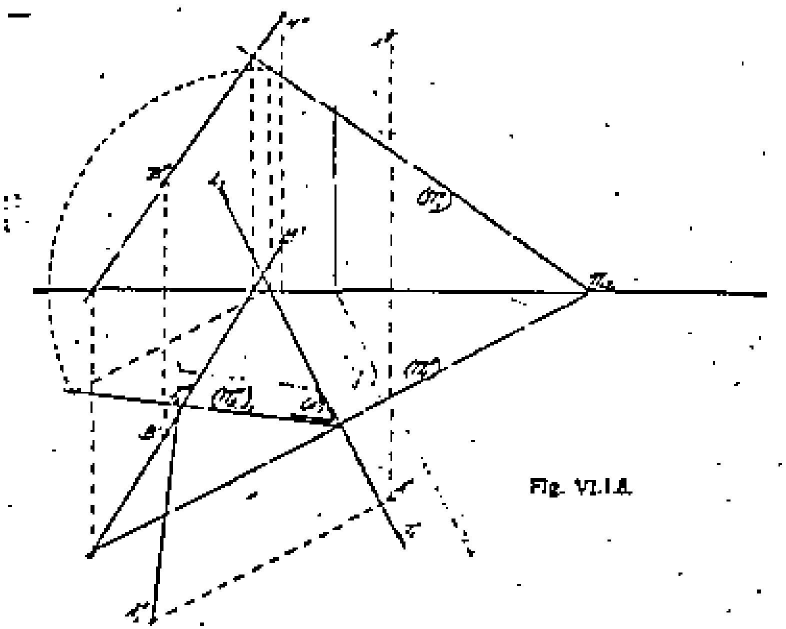


Fig. VI.1.8.

guientes, obtenidas a partir de los datos de los problemas resueltos en los incisos mencionados. (Págs. 115 y 116.)

(Fig. VI.1.8): Problema de la página 115.—Datos: (BM) = recta de máxima inclinación de (π), y punto A.

Procedimiento:

Se obtienen las trazas (π_1') y (π_2''); se hace un cambio del plano vertical, y al quedar el plano convertido en de canto, se muestra en verdadera magnitud la distancia $(A_1'' I_1'')$.

(Fig. VI.1.9): Problema de la página 116.—Datos; Plano (P) y punto A.

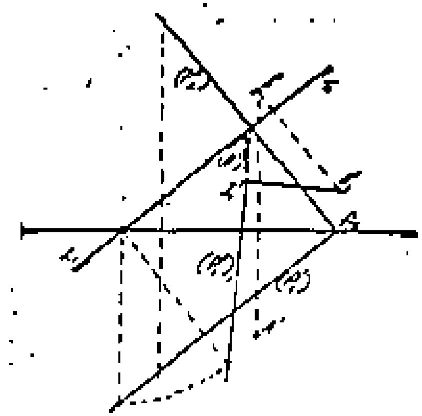


Fig. VI.1.9.

Procedimiento:

Se efectúa un cambio del plano vertical mediante L_1T_1, quedando (P) convertido en vertical: $(P_1')_1$ y (P''_1); la distancia buscada es $(A_1' I_1')$.

NOTA.— La misma solución, no sólo de los problemas anteriores (incisos b y c), sino también de los que fueron estudiados en a) y e), puede obtenerse utilizando alguno de los otros métodos especiales que después se verán.

3.—EJERCICIOS. (Serie VI).

Utilizando como Método Auxiliar únicamente los Cambios de Planos, resolver los problemas siguientes:

1.—Mostrar en la montea la verdadera magnitud de los segmentos: (AB) = A(2.8, −4.2, 2.0), B(9.1, 5.6, 6.2), y (CD) = C(11.5, 8.0, 8.0), D(11.5, 3.8, 1.6), así como los ángulos que forman con los planos de proyección.

2.—Indicar en magnitud real la distancia que existe entre: a) El punto P y el plano (π); y b) El punto B y el plano (Ω), si:

a) P(7.5, 9.3, 8.8), y (π) tiene como recta de máxima pendiente: (RS) = R(2.3, −1.8, 12.8), S(11.4, 6.8, −3.8).

b) B(4.0, 9.5, 7.0), y (Ω) contiene los segmentos paralelos: (TA) = T(5.8, 5.7, 1.2), A(11.5, 1.1, 7.7), y (MV) = M(16.0, 1.9, 9.0), V(9.8, y, z).

3.—Obtener la distancia entre los planos paralelos (ε) y (Δ), dados por sus respectivas rectas de máxima inclinación (RS) = R(4.7, 2.2, 2.4), S(9.5, −0.7, 8.0), y (TU) = T(4.7, 3.8 2.4), U(9.5, y, 8.0).

4.—Determinar en la montea, y en verdadera magnitud, el segmento (PQ) que representa la mínima distancia entre las rectas que pasan por los puntos: K(11.5, 4.6, −0.5), L(18.0, 8.8, 2.0), y M(10.9, 2.3, 1.8), N(16.3, 2.8, 6.0), representándolo también en las proyecciones iniciales.

5.—Indicar los ángulos que forma con los planos de proyección cada uno de los planos siguientes:

a) (π): (11.4, 5.5) 2.2 (11.4, 10.0).

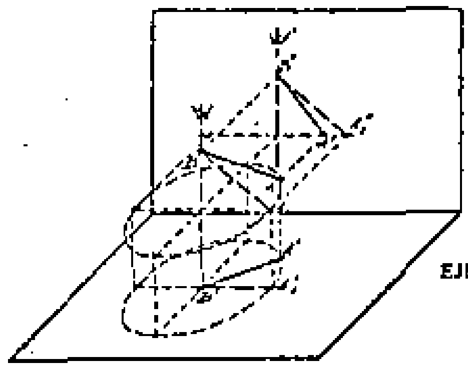
b) (Δ): (10.5, 5.5) 15.8 (10.5, z), que contiene al punto P(7.7, 5.0, 6.0).

VII.—ROTACIONES O GIROS.

1.—DESCRIPCION DEL METODO.

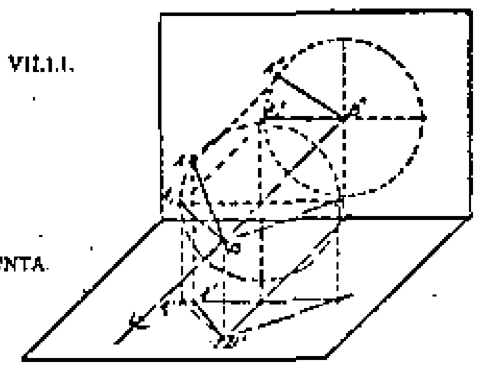
Aunque el **Método de las Rotaciones o Giros busca y logra el** mismo objetivo que el Método estudiado en el **Titulo anterior** (Cambios de Planos), puesto que trata en general los mismos problemas, relativos a magnitudes reales de rectas y ángulos, presenta con aquel una gran diferencia en cuanto al sistema y a los procedimientos que desarrolla, como se puede observar en seguida.

Este Método de Rotaciones o Giros, en vez de modificar el sistema de referencia, para apreciar con facilidad las características y



EJE VERTICAL.

Figs. VII.1.1.



EJE DE PUNTA.

propiedades del elemento geométrico en estudio, considera inalterable la posición de los planos de proyección, y hace girar a los elementos geométricos hasta colocarlos adecuadamente para el objetivo buscado. Así, tratándose de rectas o planos, resulta conveniente proporcionarles un giro que los sitúe en planos paralelos (o normales) a los del sistema de referencia, para que las proyecciones relativas se manifiesten en su forma y dimensiones reales.

Lo anterior puede lograrse, con cierta facilidad en este Mét do, eligiendo como ejes de rotación rectas de punta o verticales, y efectuando el giro de un ángulo tal que coloque al elemento considerado paralelamente al plano de referencia al cual también es paralelo el eje de rotación utilizado. (Figs. VII.1.1).

En la ilustración del procedimiento, según las figuras antes mencionadas, se observa que la trayectoria de un punto de la recta cualquiera que se hace girar alrededor de un eje de rotación vertical o de punta, aparece como una recta normal al eje de rotación en uno de los planos de proyección, mientras que en el otro se muestra como un círculo en cuyo centro se encuentran proyectados coincidentemente todos los puntos del eje de rotación.

Entonces, analizando la montea (Fig. VII.1.2) del segmento de recta (AB): A(4.7, 0.8, 2.2), B(7.8, 5.0, 5.1), se puede considerar que:

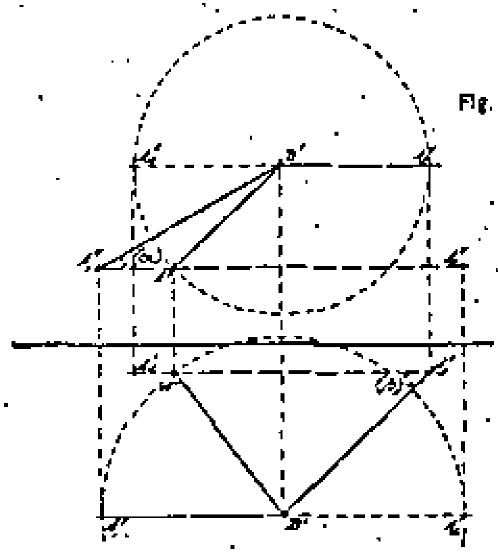


Fig. VII.1.2.

— Al girar alrededor de un eje de rotación de punta, que pase por B, se debe tener que la trayectoria de su otro extremo A, se proyecta como la recta (A_1' A_2') en el plano horizontal, y como el círculo de radio (A"B") en el vertical de referencia. El segmento queda en posición horizontal cuando su proyección vertical es (A_3'' B") o (A_4'' B"), y su homóloga correspondiente al plano horizontal es (A_3' B') o (A_4' B'), que manifiesta la magnitud real del segmento (AB), y el ángulo (β) que forma con el plano vertical.

— Para lograr, separadamente, que el segmento adquiera la posición de una recta frontal, puede considerarse una rotación alrededor del eje vertical que pasa por B, de manera que la trayectoria de A queda representada en el plano horizontal por el círculo de centro B', y en el vertical de referencia por la recta (A_1'' A_2''). La magnitud real de (AB), y el ángulo que forma con el plano horizontal, son: (A_1'' B") y (α), respectivamente.

Lo anteriormente expuesto constituye el proceso fundamental de este Método de Rotaciones o Giros, y representa la solución general del problema de la obtención de la magnitud real (o distancia entre dos puntos) de un segmento, que puede ser, desde luego, la distancia perpendicular de un punto a un plano dados, o la verdadera magnitud del segmento de normal común comprendido entre dos planos paralelos, etc., siempre que las proyecciones de los segmentos correspondientes a los últimos casos sean determinadas previamente, por cualquiera de los procedimientos conocidos con anterioridad.

Es claro que, cuando el elemento geométrico en estudio no esté constituido por un solo segmento, sino por dos o más, o por puntos equivalentes a esa última composición, los giros deben efectuarse con el conjunto completo como un todo, para que no se alteren ni las posiciones relativas, ni las distancias correspondientes (Fig. VII.1.3), aunque en general en tal caso la aplicación de este Método Especial de Rotaciones o Giros tal vez no resulte tan adecuado para la solución del problema en consideración, como la del otro que todavía falta por presentar en este Curso.

Ejemplo.—Dado el triángulo (ABC), tal que: A(7.6, 1.4, 4.5), B(3.5, 3.8, 3.1), y C(9.8, 8.4, 1.8), efectuar un giro, de manera que el lado (AB) quede como frontal.

Procedimiento: (Se indica gráficamente en la Fig. VII.1.3).

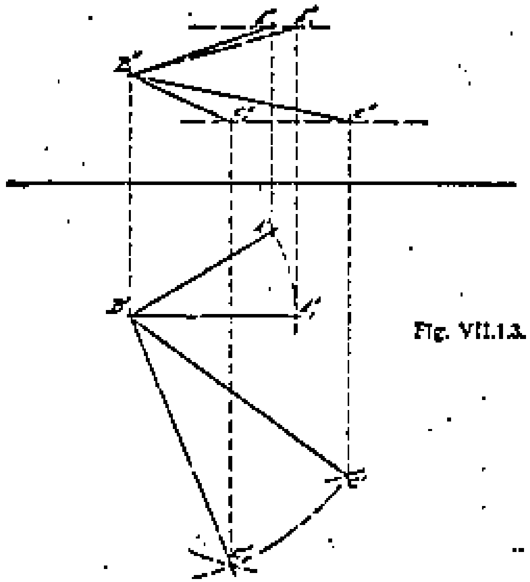


Fig. VII.1.3.

2.—PROBLEMAS DE APLICACION.

a) **Recta que forma ángulos conocidos con los planos de referencia.**—Dado un punto P (5.0, 4.5, 6.0) de la recta, y los valores: $(\alpha) = 40°$ y $(\beta) = 25°$ de los ángulos que forma con los planos horizontal y vertical de referencia, respectivamente, este problema puede ser resuelto mediante la inversión del procedimiento empleado por este Método para la obtención de los ángulos que un segmento forma con los planos de referencia, como se muestra en la Fig. VII.2.1:

Por las proyecciones P′ y P″ del punto dado se dibujan las correspondientes proyecciones: $(P'Q_2')$ y $(P''Q_1'')$ de un segmento de recta que en sus posiciones horizontal y frontal manifiesta su verdadera magnitud (que se elige arbitrariamente) y los valores reales

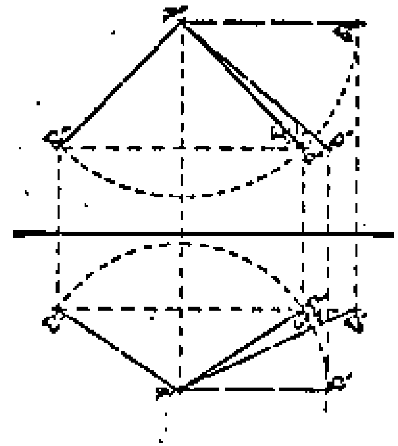


Fig. VII.2.1.

de los ángulos (α) y (β) que forma con los planos horizontal y vertical, respectivamente. En seguida se procede a efectuar el giro de dicho segmento alrededor de un eje vertical, de manera que la trayectoria del otro extremo Q del segmento, es la circunferencia de centro P′ y radio $(P'Q_1')$, en el plano horizontal, y la recta (Q''_1Q_3'') en el vertical. La rotación del mismo segmento, pero colocado en posición horizontal, alrededor de un eje de punta, indica el ángulo (β) que forma con el plano vertical, y las trayectorias de Q: la circunferencia de centro P″ y radio $(P''Q_2'')$, en el vertical, y la recta paralela a LT. $(Q_2' Q_1)$ en el horizontal.

Entonces, puede observarse en la montea que las dos trayectorias de Q coinciden en Q″ en el plano vertical, y en Q′ en el horizontal, por donde deben dibujarse las proyecciones homólogas $(P''Q'')$ y $(P'Q')$ del segmento buscado, aunque desde luego que también puede darse como solución la que corresponde a los otros puntos (los simétricos) de coincidencia de las trayectorias de Q. Y como además pueden ser obtenidas otras dos soluciones diferentes, también simétricas respecto a las ya mencionadas, se debe citar este problema como uno que puede tener hasta cuatro soluciones diferentes; como puede apreciarse claramente en el siguiente:

Ejemplo.—Indicar en la montea las proyecciones homólogas del segmento que contiene al punto A(6.0, 3.6, 4.4), y forma los ángulos $(\alpha) = 25°$ y $(\beta) = 50°$, con los planos horizontal y vertical del sistema de referencia.

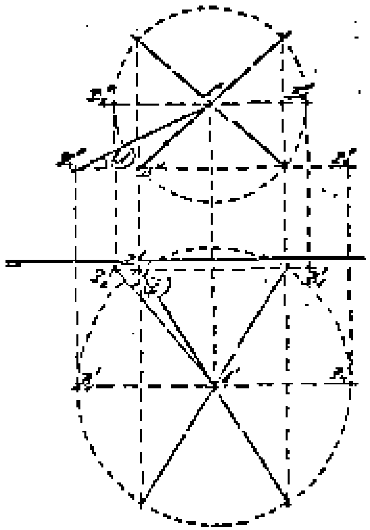


Fig. VII.2.2.

Procedimiento: (Fig. VII.2.2).

Es idéntico al que acaba de explicarse en la página anterior, y aparece ilustrado en la figura mencionada.

Para tener una idea de los valores de los ángulos (α) y (β) que una recta puede formar con los planos horizontal y vertical, respectivamente, según su posición particular respecto al sistema de referencia, se puede confeccionar el siguiente cuadro:

Tipo de Recta	(α)	(β)	$(\alpha + \beta)$
Fronto-Horizontal.	0	0	0
Vertical.	90°	0	90°
De Punta.	0	90°	90°
De Perfil.	$0 < (\alpha) < 90°$	$0 < (\beta) < 90°$	90°
Frontal.	$0 < (\alpha) < 90°$	$0 < (\beta) < 90°$	$0 < (\alpha + \beta) < 90°$
Horizontal.	0	0	$0 < (\alpha + \beta) < 90°$
Cualquiera.	$0 < (\alpha) < 90°$	$0 < (\beta) < 90°$	$0 < (\alpha + \beta) < 90°$

b) **Angulos que un plano dado forma con los de proyección.**—Aunque ya se sabe que este problema puede ser resuelto, y así se hizo en el Título anterior (VI), con facilidad mediante Cambios de Planos, puede también resolverse por Rotaciones o Giros, como sigue:

Ejemplo.—Dado el plano (P) por uno de sus puntos: A(10.5, 3.0, 5.5), y dos puntos de una horizontal que le pertenece: B(6.2, 2.2, 1.8) y C(12.1, 7.8, z), indicar en la montea los ángulos que forma con cada uno de los planos de proyección.

Procedimiento: (Fig. VII.2.3).

1o.—Se obtienen las trazas del plano, dibujando las proyecciones homólogas de la horizontal (BC), encontrando su traza vertical, y considerando también otra recta horizontal del mismo plano, que pase por A.

2o.—Eligiendo un eje de rotación vertical: (W), contenido en el plano de proyección del mismo nombre, se hace girar (P) hasta colocarlo como de canto: $(P_1')_1$ y $(P_1'')_2$, como se muestra en la figura, apareciendo indicado entonces el valor del ángulo (A).

3o.—Independientemente del paso anterior, al elegir un eje de rotación de punta (W_1), contenido en el plano horizontal, se puede hacer girar el plano dado hasta situarlo como plano vertical: $(P_1')_1$ y $(P_1'')_2$, que muestra la verdadera magnitud de (B) que se observa en la figura.

Problemas:

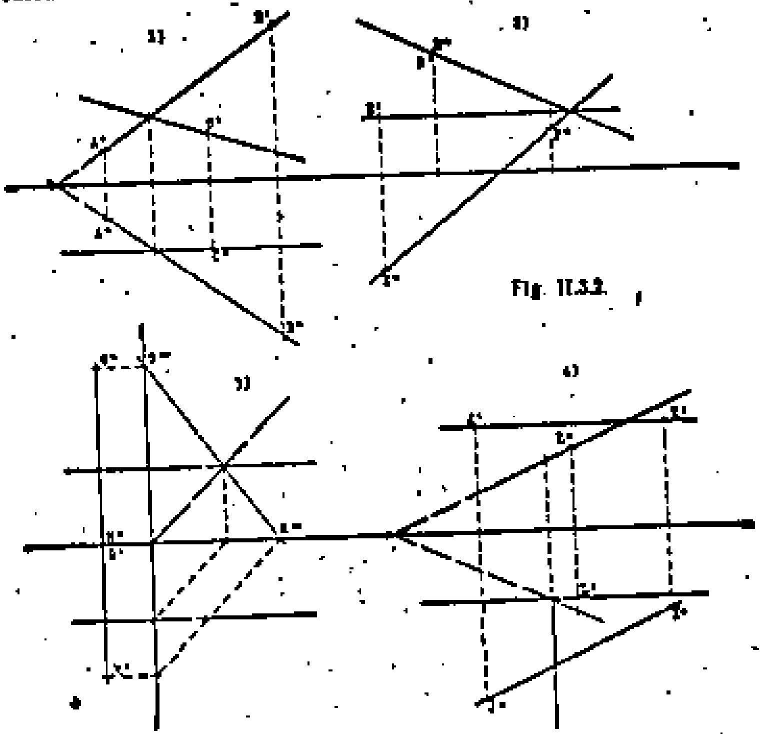


Fig. II.3.2.

4.—Por L(16.3, 2.0, 2.4) trazar una paralela a la frontal (JK); J(13.5, −3.1, −4.8), K(19.0, y, −2.3); y en el punto en que ésta última recta corta al primer bisector, trazar una recta de punta.

4.—INTERSECCIONES DE UNA RECTA CON LOS PLANOS DEL SISTEMA DE REFERENCIA.—VISIBILIDAD.

a) **Trazas de una recta.**—Cuando se prolonga indefinidamente un segmento de recta (AB) más allá de sus extremos, en el caso general, la recta cualquiera (r) así obtenida necesariamente debe

intersectarse con los planos de proyección (H y V) del sistema de referencia utilizado. Esos puntos de intersección son conocidos como las trazas de la recta, siendo:

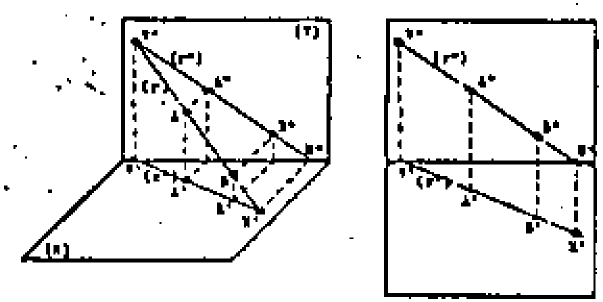
— La traza horizontal el punto que es común a la recta y al plano horizontal de referencia, o sea el punto de (r) cuya cota es nula.

— La traza vertical el punto común de la recta con el plano vertical de referencia, que es el punto de (r) de alejamiento igual a cero.

Cada una de las condiciones anteriores constituye lo que se conoce como la condición de pertenencia de un punto de la recta con el correspondiente plano de proyección.

En las Figs. II.4.1, tanto en la perspectiva como en la montea, se observa que:

— Para obtener la traza horizontal de la recta (r) se prolonga la proyección vertical (r″) hasta la línea de tierra, donde se localiza H″, a partir de donde se traza la referencia que corta la proyección



Figs. II.4.1.

horizontal (r′) precisamente en H′, con lo que resulta determinada la traza horizontal mediante sus proyecciones (H′ y H″).

— Para determinar la traza vertical de la recta (r) basta prolongar la proyección horizontal (r′) hasta la línea de tierra, donde se encuentra V′, y de ahí trazar la referencia hasta cortar la proyección vertical (r"), donde se localiza V", quedando así definida la **traza vertical** por sus proyecciones homólogas (V' y V").

Del conocimiento que se tiene de los casos particulares relativos a las rectas conocidas como horizontales, frontales y fronto-horizontales, y de acuerdo con la observación anterior, resulta sencillo concluir que:

— Una recta horizontal, que forzosamente está situada en un plano paralelo al horizontal de referencia, sólo puede cortar al plano vertical, siendo ese punto de intersección su **traza vertical**, de proyecciones homólogas (V', V") obtenidas en la montea correspondiente mediante la prolongación de la proyección horizontal de la recta hasta la línea de tierra en V', de donde se traza la referencia que corta su proyección vertical en V". Obviamente, una recta de punta no constituye más que un caso particular de éste que se acaba de anotar.

— Una **recta frontal**, por estar contenida en un plano paralelo al vertical de proyección, sólamente se intersecta con el plano horizontal, siendo esta intersección el punto correspondiente a su **traza horizontal**, cuyas proyecciones homólogas (H', H") se obtienen en la montea prolongando la proyección vertical de la recta hasta el punto H", donde corta a la línea de tierra, y de ahí trazando la referencia hasta interceptar la proyección horizontal de la misma recta, en H'. También es evidente que una recta vertical no representa más que un caso particular de éste último que acaba de mencionarse.

— Una recta fronto-horizontal, por ser paralela simultáneamente a los dos planos de proyección (H y V), no puede tener ningún punto común con alguno de ellos, y por lo tanto no tiene traza vertical ni traza horizontal.

Por otra parte, resulta de mucho interés analizar el problema de la obtención de las trazas de una recta de perfil, no sólo por la singularidad que representa, sino también por las posteriores aplicaciones del procedimiento en otros problemas, como más adelante se verá. En este caso, si consideramos una recta de perfil (p), que pasa por los puntos Q y R, como se muestra en la Fig. II.4.2, sus proyecciones homólogas (horizontal y vertical), al prolongarse hasta la línea de

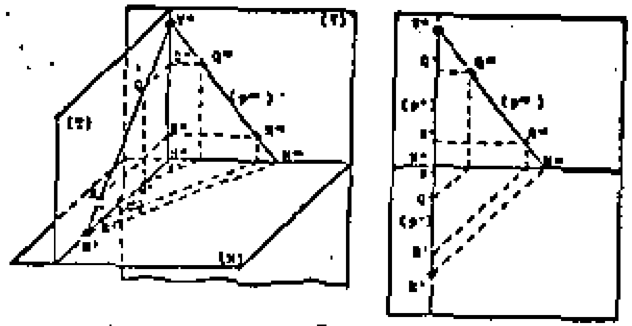


Fig. II.4.2.

tierra, se confunden en una sola perpendicular a (LT), por lo cual es necesario recurrir a la tercera proyección (p‴), cuya prolongación sí permite determinar las trazas en los planos de referencia, y sus correspondientes proyecciones (H', H" y V', V") en la montea. Esto se logra considerando que el plano (T) auxiliar de proyección es el plano proyectante que contiene a la recta de perfil, y girando dicho plano auxiliar alrededor de su intersección con (V), hasta obtener la tercera proyección del segmento (QR), cuya prolongación define las trazas de la recta en estudio, como se indica en la Fig. II.4.2 ya citada.

Ejemplos: (Figs. II.4.3.).— Determinar las trazas de cada una de las rectas que pasan por los pares de puntos cuyas coordenadas se mencionan enseguida:

1).—(AB): A(1.8, 2.3, 1.9), B(8.6, −0.5, −5.9),

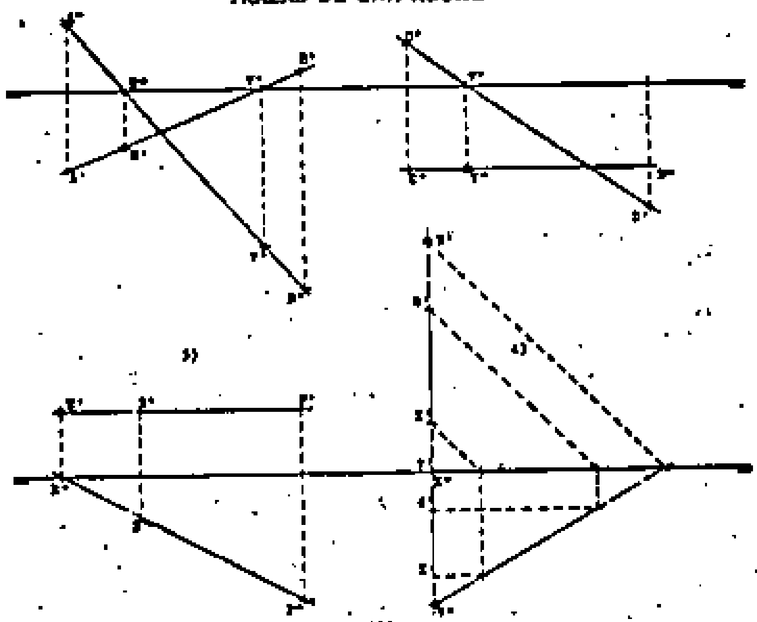
2).—(CD): C(11.7, −1.2, −2.4), D(18.7, 3.6, −2.4),

3).—(EF): E(3.7, −1.9, −1.2), F(8.4, −1.9, −3.6),

4.—(GK): G(12.2, −4.8, −1.1), K(12.2, −1.4, −3.0).

EJEMPLOS:

1) TRAZAS DE UNA RECTA. 2)



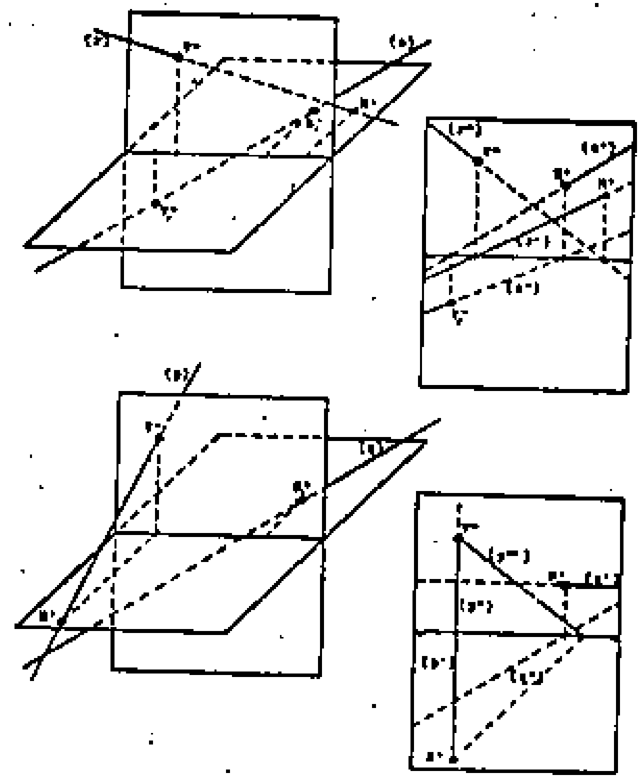
Figs. II.4.3.

b) Visibilidad.—Con objeto de lograr una relativa visualización de los problemas que considera, en la Geometría Descriptiva se acostumbra tratar la visibilidad de una recta considerando que todos los planos son opacos y, por lo tanto, sólamente son visibles:

— Las proyecciones horizontales de todos los puntos que se encuentra arriba del plano horizontal de proyección; es decir, son visibles en proyección horizontal, siempre que no existan otros planos opacos, todos los puntos de una recta que se encuentran en la primera y en la segunda regiones del espacio, o sean todos los puntos de cota positiva de la recta, situados necesariamente a partir de su traza horizontal (si existe), que es punto de cota nula.

— Las proyecciones verticales de todos los puntos situados adelante del plano vertical de proyección; es decir, cuando no existen otros planos, son visibles en proyección vertical todos los puntos con-

VISIBILIDAD Y TRAZAS.



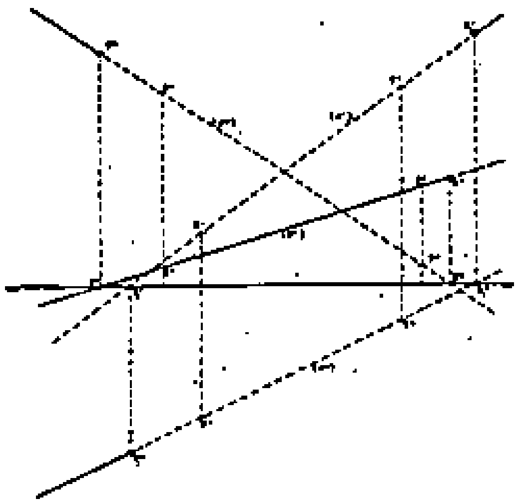
Figs. II.4.4.

tenidos en la primera y en la cuarta regiones del espacio, o sean todos los puntos de la recta de alejamiento positivo, existentes forzosamente a partir de su traza vertical (si ésta existe).

La visibilidad de una recta se indica, por lo general, dibujando con línea continua la parte correspondiente, y con línea discontinua la parte no visible, tal como puede observarse en la Fig. II.4.4, donde se han marcado en la montea, con puntos circundados, las trazas de las rectas indicadas.

c) Ejemplos:

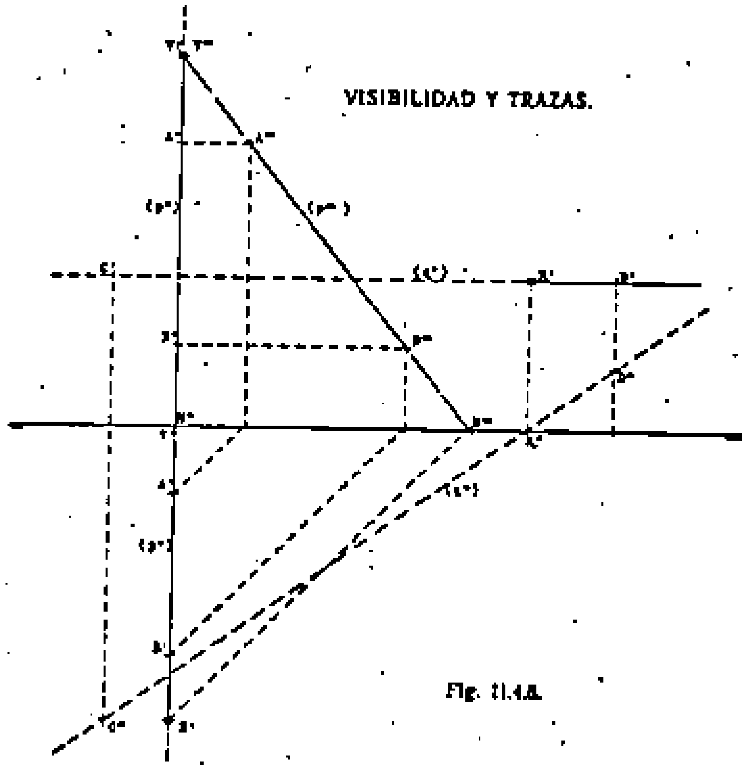
Problema No. 1.—Dibujar las monteas de las rectas prolongadas que contienen los segmentos que enseguida se enlistan, indicando ahí las trazas y la visibilidad de cada una.



VISIBILIDAD Y TRAZAS

Fig. II.4.5.

(r): E(6.6, −0.8, 8.1), F(17.5, −4.1, 0.8).
(s): M(8.2 −2.2, −5.5), N(16.6, −8.3, −1.5). } Fig. II.4.5.
(p): A(4.9, 2.0, 8.3), B(4.9, 6.7, 2.4).
(q): C(3.0, −4.4, −8.6), D(17.6, −4.4, 1.8). } Fig. II.4.6.



VISIBILIDAD Y TRAZAS.

Fig. II.4.6.

Problema No. 2.—En la montea correspondiente (Figs. II.4.7, II.4.8. y II.4.9), determinar las trazas y la visibilidad de las rectas que se indican:

a).—Que pasa por el punto C(11.4, 1.4, 3.8), y es paralela al segmento: A(7.0, −2.4, z), B(15.0, −6.9, −6.9) contenido en el primer bisector.

b).—Que pasa por D(9.0, −8.6, −5,1), y es concurrente en el punto E con el segmento: E(13.0, −2.8, z), F(4.5, y, −4.4) contenido en el segundo plano bisector.

c).—Que contiene al punto I(17.0, −8.5, 9.1), y pasa también por el punto J del segmento: G(7.0, y_1, 10.2), J(7.0, y_2, 2.3), que pertenece al primer plano bisector.

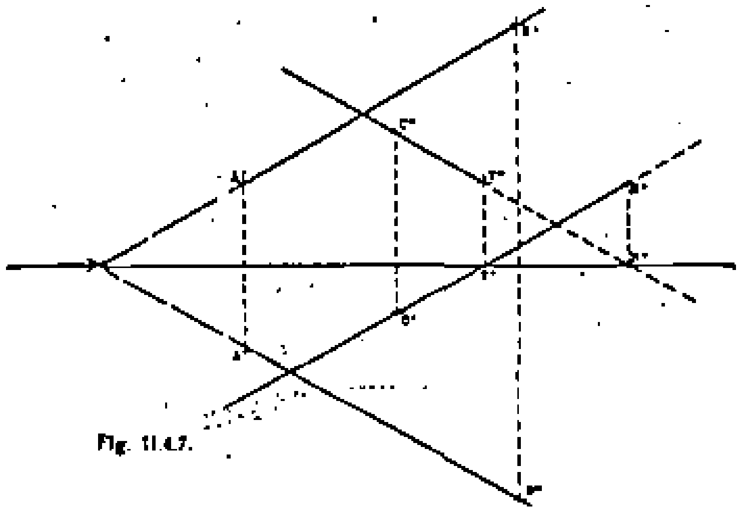


Fig. II.4.7.

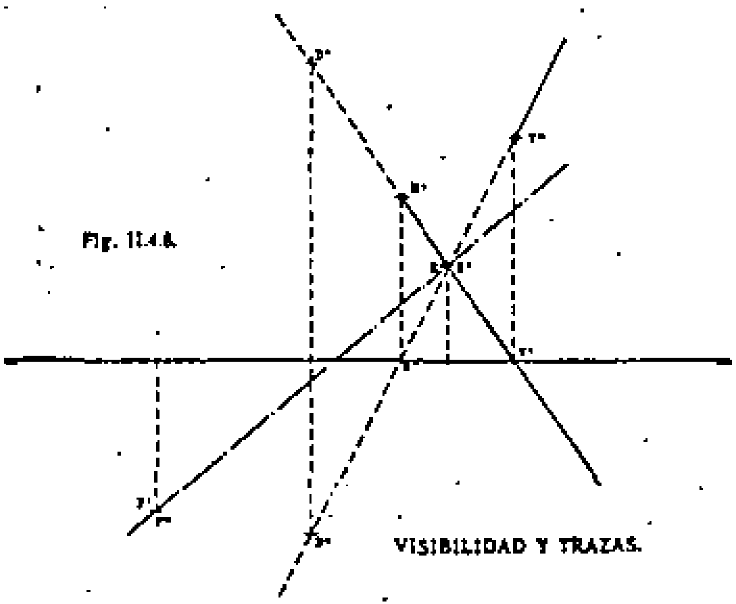


Fig. II.4.8.

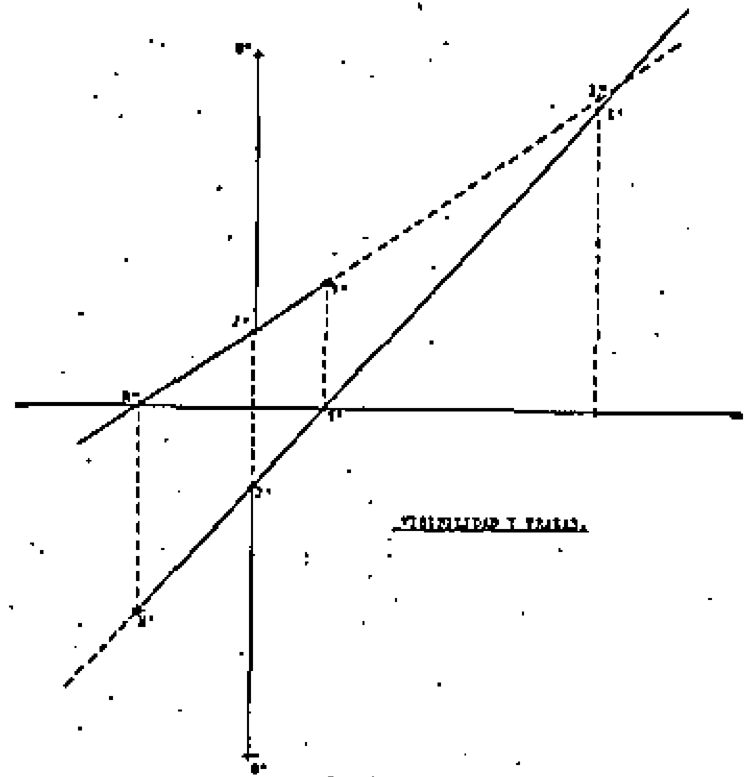


Fig. II.4.9.

5.—EJERCICIOS.—(Serie II.2):

En cada uno de los problemas que siguen, dibujar la montea con la solución que se pide, determinando además las trazas y la visibilidad de todas las rectas indicadas:

1.—Por el punto C(15.0, 2.0, 4.0) trazar una recta concurrente en A con el segmento (AB), siendo A(4.2, −2.5, −2.2), y B(12.2, −7.2, −4.4). Por el punto de intersección de (AC) con el segundo bisector, dibujar una recta frontal que también pase por E(6.2, y, −4.0).

2.—Por O(8.8, −2.2, 0.6) trazar una recta paralela al segmento M(5.7, −8.4, −4.8), N(18.2, 5.4, 1.0); y por la intersección de (MN) con el primer bisector, dibujar una recta horizontal que también pase por P(16.0, −8.0, z).

3.—Por el punto C(8.5, 3.4, z) y la intersección con el segundo bisector de la recta que contiene al segmento A(4.7, −8.7, −1.6), B(15.0, −3.7, 5.3), trazar una recta horizontal.

4.—Por la intersección de la recta que pasa por los puntos D(5.0, −2.7, −4.7) y E(13.7, −8.7, −8.0) con el primer bisector, dibujar las proyecciones de una fronto-horizontal.

5.—Dados: M(3.0, 7.4, 1.3), N(13.5, 1.7, −4.5) y L(15.5, y, 6.0), trazar por L una frontal que corte a (MN) en un punto del segundo bisector.

6.—Completar las dos proyecciones de los segmentos (AB) y (BC), con la condición de que el último sea paralelo al primer bisector siendo: A(4.0, −7.1, −3.6), B(14.4, 2.7, z) y C(2.1, −3.1, −9.0).

7.—Por la intersección de la recta que contiene al segmento D(15.0, 1.7, 9.0), E(15.0, 8.2, 2.3) con el primer bisector, dibujar una recta que también pase por F(4.0, −1.7, −4.0).

8.—Por el punto L(10.0, 3.3, −1.0) trazar una recta paralela al segmento: M(4.3, −2.4 −3.2), N(12.9, 8.7, −1.3); y obtener su intersección con el segundo bisector.

III.—EL PLANO EN EL ESPACIO.

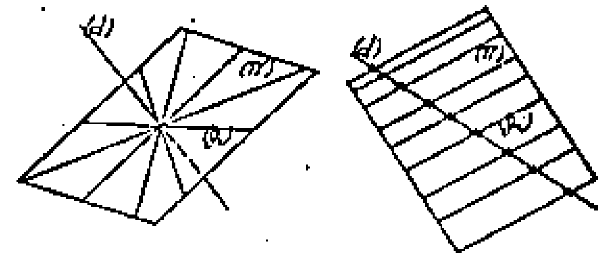
1.—DEFINICIONES Y EJEMPLOS.

a).—Definiciones.—La Geometría Euclidiana define a un plano (v) como el lugar geométrico de las diferentes posiciones de una recta (g) generatriz, que: (Figs. III.1.1).

— Gira alrededor de un punto fijo de ella, manteniéndose siempre normal a otra recta fija (d), directriz, que le sirve como eje de rotación, o

— Se traslada paralelamente a sí misma, conservándose siempre en contacto con otra recta fija (d), directriz, del espacio.

Aunque es posible mencionar otras formas para explicar la generación de un plano, las dos anteriores pueden ser consideradas como las generales, pues las otras no son más que variaciones de ellas. Entonces, considerando una cualquiera de las explicaciones anteriores, se concluye fácilmente que:



Figs. III.1.1.

— Un plano cualquiera queda completamente definido cuando se conocen de él tres puntos diferentes, no alineados sobre una misma

recta; es decir, tres puntos distintos cualesquiera, pero no colineales, determinan un plano, y sólo uno, que los contiene.

En muchas ocasiones también se acostumbra definir un plano ya sea por:

— Una recta y un punto fuera de ella, o
— Dos rectas paralelas o concurrentes;

pero, como fácilmente puede observarse, estas dos últimas definicio-

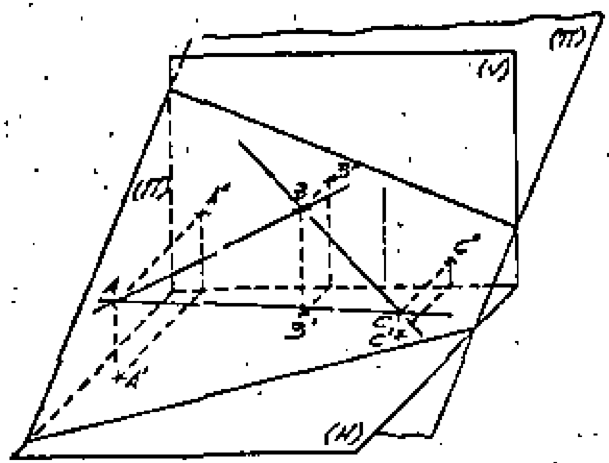


Fig. III.1.2.

nes de un plano dado no son más que variantes de la primera, que resultan de considerar unidos con una recta dos de los tres puntos conocidos, o bien de trazar por el tercero una paralela, u otra recta que también pase por uno de los dos primeros puntos. (Fig. III.1.2).

b).—**Ejemplos.**—A reserva de tratar posteriormente otros procedimientos, por ahora pueden ser resueltos algunos problemas referentes a planos determinados por cualquiera de las tres últimas for-

mas mencionadas, mediante procedimientos como los que se indican en los siguientes ejemplos:

Problema No. 1.—Por los puntos D(17.7, 2.9, z) y E(3.9, y, 3.8) trazar respectivamente una frontal y una horizontal del plano formado por la recta que pasa por A(3.9, −0.8, 1.6) y B(9.9, 3.6, 6.2) y su paralela que contiene al punto C(8.4, −1.6, −2.2). Obtener las trazas de todas las rectas mencionadas.

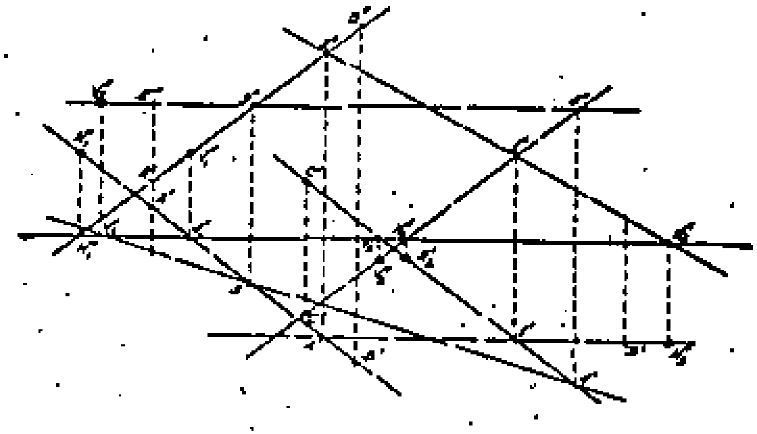


Fig. III.1.3.

Procedimiento: (Fig.III.1.3).

1o.—Se trazan por C′ y C″ las proyecciones horizontal y vertical, respectivamente, de la otra recta que forma el plano dado, paralelas a las correspondientes de la recta que contiene al segmento (AB).

2o.—Por D′ se dibuja la proyección horizontal de la frontal, y en los puntos comunes de ella (1′ y 2′) con las proyecciones horizontales de las rectas dadas del plano, se trazan las referencias hasta cortar las proyecciones verticales correspondientes en 1″ y 2″, por donde debe pasar la proyección vertical de esa frontal del plano, que contiene también a D″.

3o.—Por E″ se dibuja, paralela a la línea de tierra, la proyección vertical de la recta horizontal pedida, y por los puntos 3″ y 4″, donde corta las proyecciones verticales de las dos rectas paralelas que definen el plano, se trazan las referencias hasta interceptar en 3′ y 4′ las respectivas proyecciones horizontales, por cuyos puntos pasa la proyección horizontal de la recta horizontal mencionada, donde se localiza también E′.

4o.—Prolongando cada una de las proyecciones de todas las rectas, hasta la línea de tierra, y trazando ahí la referencia hasta su proyección homóloga correspondiente, se obtienen las proyecciones (V_1″, V_2″, V_3″) de las trazas verticales, y las (H_1′, H_2′, H_3′) de las trazas horizontales.

Nota.—Es de mucha utilidad recordar el procedimiento que se acaba de exponer en este problema para el trazo de rectas frontales y horizontales de un plano dado, debido a sus posteriores aplicaciones en otros problemas.

Problema No. 2.—Dados: A(4.5, 2.4, 2.1), B(8.9, −4.0, 6.0), C(14.4, y, 0), y D(12.3, 5.7 −1.8), completar la proyección horizontal del cuadrilátero (ABCD), con la condición de que todos sus puntos estén contenidos en el mismo plano. Dibujar las dos proyecciones de una recta horizontal que pase por A y de un frontal que contenga a D, siendo ambas rectas también del plano dado.

Procedimiento: (Fig. III.1.4).

1o.—Se traza (A″C″), que debe cortarse con (B″D″) en 1″, por ser ambos segmentos de rectas no paralelas del mismo plano; se obtiene la proyección homóloga de 1″ en 1′ sobre B′D′, y entonces se dibuja la recta que pasa por A′1′, hasta cortar la referencia de C″, donde se localiza C′, quedando así completada la proyección horizontal del cuadrilátero (ABCD).

2o.—Por A″ se traza paralela a la línea de tierra la proyección vertical (h″) de la recta horizontal pedida, cuya proyección horizontal (h′) queda definida por la recta que, pasando por A′ pasa también por 2′, que es la proyección homóloga de 2″, donde A″(h″) corta a segmento (B″C″). De manera semejante se obtienen las dos proyecciones de la recta frontal del plano, que pasa por D, sólo que trazando primero la proyección horizontal D′(f′) paralela a la línea de tierra para obtener su intersección 3′ con (B′C′), y trazar ahí la referencia que corte la proyección vertical (B″C″) en 3″, por donde se dibuja la proyección vertical (D″3″) de la frontal pedida.

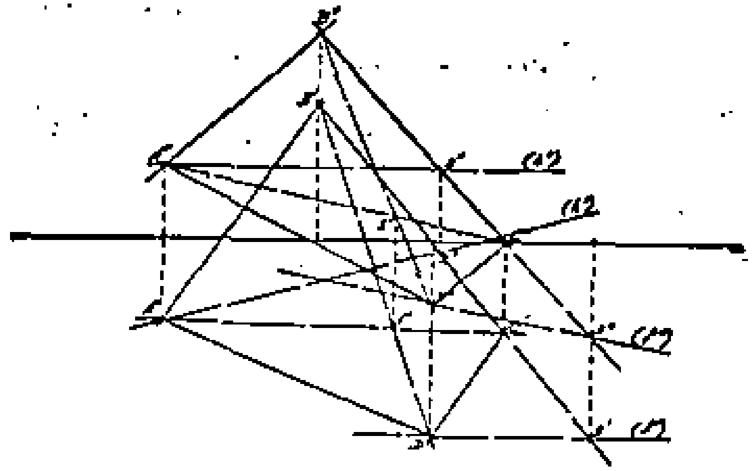


Fig. III.1.4.

Problema No. 3.—Dados los segmentos: (AB): A(6.4, 5.1, 2.3), B(12.9, −1.5, z_1), (CD): C(4.9, 1.1, z_2), D(12.9, 5.4, z_3); y (EF): E(4.9, y_1, 11.5), F(11.1, y_2, 4.8), obtener las proyecciones faltantes, considerando que (AB) y (CD) son paralelos al segundo bisector y forman un plano, donde también se encuentra (EF). Determinar todas las trazas de las rectas que pasan por los segmentos dados, uniendo después con rectas aquellas que corresponden a un mismo plano de referencia.

Procedimiento: (Fig. III. 1.5).

1o.—Como (AB) y (CD) son segmentos paralelos al segundo bisector, sus proyecciones homólogas deben ser paralelas; entonces, por A″ se traza una recta paralela a (A′B′), para obtener B″; por 1′, proyección del punto común de ambas rectas, se lleva una referencia para determinar 1″, por donde se traza (C″D″), paralelamente a (C′D′).

2o.—Como (EF) debe estar en el mismo plano, se marcan 2″ y 3″, proyecciones verticales de puntos comunes con (AB) y (CD), y mediante las referencias respectivas, se localizan 2′ y 3′, sobre cuya recta (2′3′) se encuentran E′ y F′.

3o.—Prolongando hasta (LT) cada una de las proyecciones de todos los segmentos mencionados, y de ahí trazando la referencia

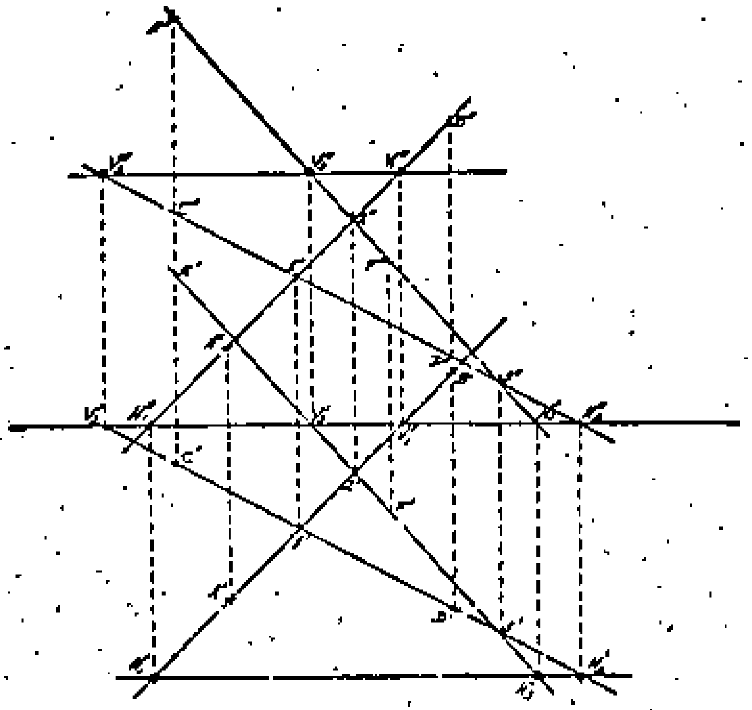


Fig. III.1.3.

hasta la proyección homóloga correspondiente, se obtienen las trazas de aquellos en los planos del sistema de referencia.

2.—TRAZAS DE UN PLANO. OBSERVACIONES Y EJEMPLOS.

a) Trazas de un plano.—Un plano dado cualquiera (π), necesariamente se intersecta con alguno de los planos del sistema de referencia, mediante una recta que es conocida en Geometría Descriptiva como la traza del plano dado, que puede ser horizontal (π_1'), vertical (π_2''), o auxiliar (π_3'''), según el nombre del plano de referencia correspondiente. Es obvio que, dos trazas de un mismo plano cualquiera son necesariamente concurrentes en un punto de la línea de tierra o de su prolongación.

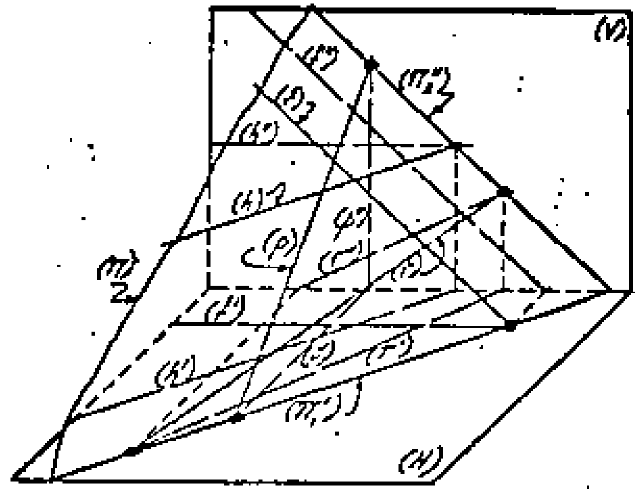


Fig. III.2.1.

Como también es evidente (Fig. III.2.1) que **la traza de un plano dado cualquiera con uno de los planos del sistema de referencia es el lugar geométrico de las trazas de todas sus rectas con el respectivo plano de proyección**, bastará conocer dos de las trazas de sus rectas en uno de los planos de referencia, y sólo una en el otro que se esté utilizando, para poder definir completamente las dos trazas del plano, uniendo primero las dos trazas de las rectas inicialmente mencionadas mediante una recta prolongada hasta su intersección con la línea de tierra, de donde se dibuja la otra traza del plano que debe pasar también por la otra única traza restante conocida.

Convencionalmente se utilizará en este Curso, para la designación de sus trazas, el mismo nombre del plano considerado, con letra griega (o latina) mayúscula: (π), (Δ), (P),...., como sigue:

— **Trazas horizontales** (con el Plano Horizontal): (π_1'), (Δ_1'), (P_1')....
— **Trazas verticales** (con el Plano Vertical): (π_2''), (Δ''_2), (P_2'')....
— **Trazas auxiliares** (con el Tercer Plano de Proyección):— (π_3'''), (Δ_3'''), (P_3''')....

debiendo siempre tener presente que esa designación no corresponde a diferentes proyecciones de una misma recta, sino que representa rectas diferentes (las trazas del plano) que, por estar contenidas en los planos del sistema de referencia, tienen su otra proyección (la homóloga) localizada en la línea de tierra, que generalmente no se emplea en la solución de problemas, por lo cual no es necesario mencionarla.

Entonces, ha de advertirse claramente que la anterior designación convencional resulta ser sólo una simplificación, que se utilizará de ahora en adelante en el presente Curso, para facilitar las expresiones relativas; pero en rigor, la designación correcta para las trazas de un plano dado cualquiera (π), debe ser:

— **Traza horizontal o primera traza:** (π_1).
  Su proyección horizontal: (π_1').
  Su proyección vertical: (π_1'').

— **Traza vertical o segunda traza:** (π_2).
  Su proyección horizontal: (π_2').
  Su proyección vertical: (π_2'').

— **Traza auxiliar o tercera traza:** (π_3).
  Su proyección horizontal: (π_3').
  Su proyección vertical: (π_3'').

Solamente que, según dicha nomenclatura:

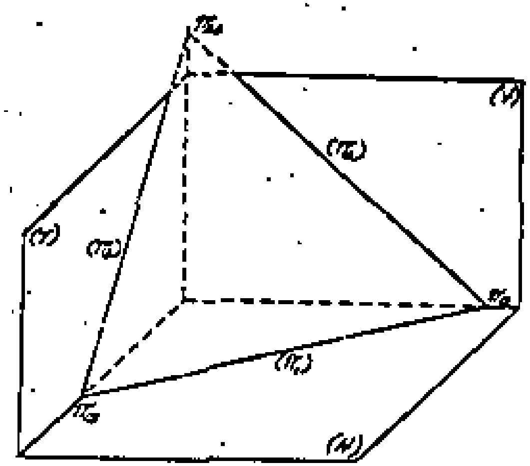
— Las proyecciones: (π_1'') y (π_2') siempre aparecen en la montea confundidas sobre la línea de tierra; y las proyecciones: (π_3') y (π_3'') también resultan coincidentes sobre una perpendicular a LT que pasa generalmente por uno de los límites (izquierdo o derecho) de la montea (Fig. III.2.1a), por lo cual dichas proyecciones no pueden ser distinguidas específicamente en los problemas relativos.

Por lo tanto, resulta de utilidad por simplificación, designar convencionalmente cada traza por su proyección coincidente, como ya se apuntó:

— **Traza horizontal** a (π_1'), en vez de proyección horizontal de la traza horizontal,

— Traza vertical (π_2''), en lugar de proyección vertical de la traza vertical, y

— **Traza auxiliar o tercera traza** (π_3''), y no proyección auxiliar o tercera proyección de la traza auxiliar o tercera traza.



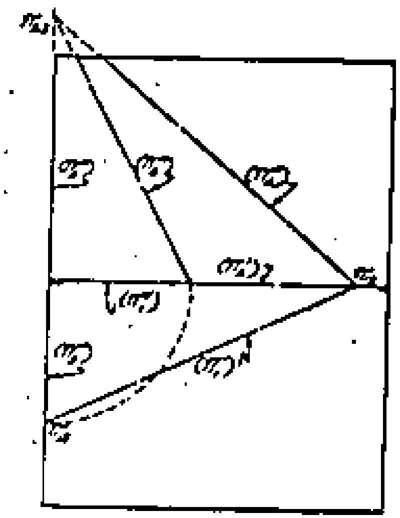


Fig. III.2.1a.

Problema No. 1.—Dibujar en la montea las trazas (horizontal y vertical) de un plano (Δ), dado por la recta cualquiera que pasa por A(4.6, 3.6, −6.2) y B(13.2, −4.8, −2.0), y por la frontal que es concurrente con la anterior en B, y pasa por C(16.5, y, −5.0).

Procedimiento (Fig. III.2.2).

Primero se obtienen las trazas horizontales H_1' y H_2' de la recta cualquiera (AB) y de la frontal que pasa por C, respectivamente; se

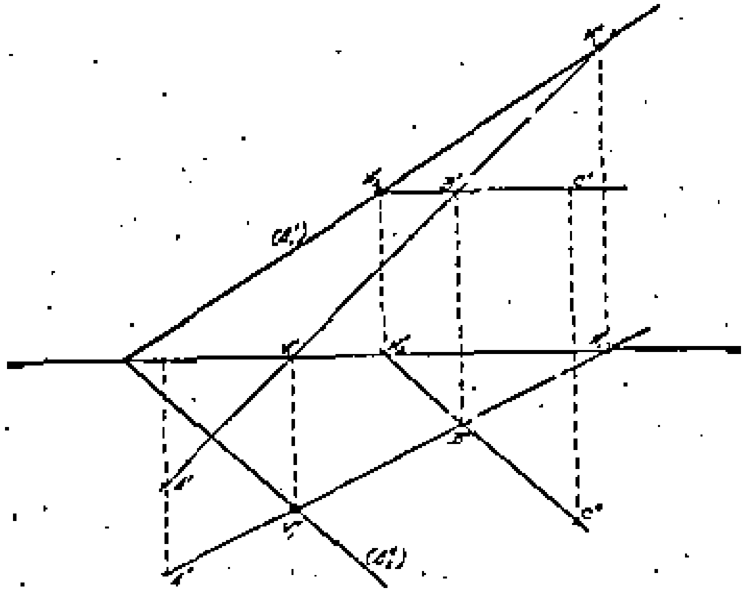


Fig. III.2.2.

unen ambas mediante una recta, hasta la línea de tierra, con lo cual ya se tiene la traza horizontal (Δ_1') del plano. Después se une el punto común de (Δ'_1) y (LT) con la traza vertical V_1'' de (AB), para obtener la traza vertical (Δ_1'') del plano formado por la recta (AB) y la frontal que pasa por C.

Problema No. 2.—Obtener la proyección horizontal de cada uno de los puntos: A(7.8, y_1, 1.8), B(10.4, 1.7, 4.9) y C(14.1, y_2, 1.5), sabiendo que la traza horizontal (π_1') del plano que los contiene, pasa por O(2.5, 0, 0) y P(12.2, 8.8, 0).

Procedimiento: (Fig. III.2.3).

1o.—Se trazan las rectas (A"B") y (B"C") hasta (LT) y, en sus puntos de intersección con ella, H_1'' y H_2'', las referencias hasta

las trazas horizontales correspondientes, H_1' y H_2', que deben estar en la traza horizontal (O'P') = (π_1') del plano que contiene los segmentos (AB) y (BC).

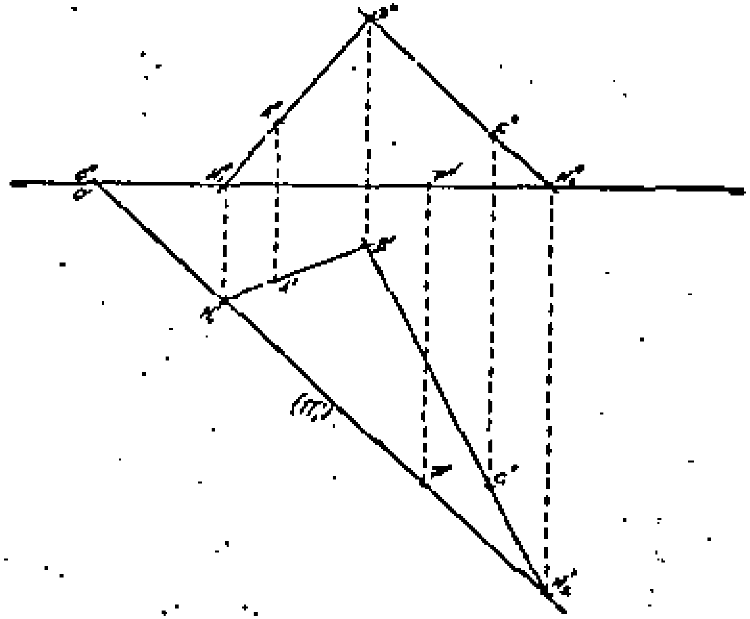


Fig. III.2.3.

2o.—Se prolongan los segmentos (H_1' B') y (H_2' B') hasta cortar las referencias que vienen de A" y C", donde deben quedar sus proyecciones homólogas: A' y B'. (Fácilmente se puede determinar la traza vertical del plano, pero no se hizo así porque el enunciado de este problema no pide tal cosa).

b) **Observaciones y ejemplos.**—Después de haber analizado el concepto relativo a las intersecciones de un plano dado cualquiera con los planos del sistema de referencia y, como es bastante frecuente en Geometría Descriptiva definir un plano por sus trazas, antes de presentar la solución de algunos ejemplos de problemas referentes a planos cualesquiera, es conveniente anotar ahora las siguientes

Observaciones:

1a.).—**Designación.**—Se puede identificar un plano (π) con sus trazas: (π_1') y (π_2''), haciendo su designación como: "el plano (π)" o "el plano (π_1', π_2'')".

2a.).—**Notación.**—Como las trazas de un plano son rectas contenidas una en cada uno de los planos de proyección, con un punto de concurrencia en la intersección de ambos (en LT), las dos trazas se pueden definir por su punto común (vértice) y por otro punto de cada una, y entonces se puede utilizar para la designación de un plano cualquiera la notación convencional que presenta ordenadamente los datos antes citados, en la forma siguiente:

(punto traza horizontal), vértice, (punto traza vertical)

que en rigor corresponde a un ordenamiento de valores como sigue,

$$(x_1,\ \ y_1,\ \ 0),\ (x,\ \ 0,\ \ 0),\ (x_2,\ \ 0,\ \ z_2);$$

pero que, al ser usado abreviadamente, se transforma en:

$$(x_1,\ \ y_1)\ \ x,\ \ (x_2,\ \ z_2)$$

donde siempre se debe considerar que:

(x_1, y_1) son la distancia y el alejamiento de un punto de la traza horizontal, de cota igual a cero.

x es la distancia del vértice, de alejamiento y cota nulos, y

(x_2, z_2) representan la distancia y la cota de un punto de la traza vertical, cuyo alejamiento es igual a cero.

Desde luego que cada traza de un plano también puede darse proporcionando datos de su vértice y su pendiente; o directamente mediante su ecuación referida al plano en que se localiza.

En el arreglo anteriormente citado, generalmente se considera $x_1 = x_2$ El punto común de ambas trazas de un plano y la línea de tierra (vértice) se representa comúnmente con la notación: π_{12}, Δ_{12}, P_{12}, ...

3a.).—**Pertenencia.**—Es claro que la condición de pertenencia de una recta a un plano consiste en que pertenezcan al plano dos puntos de la recta, con lo cual todos los demás puntos de ella también estarán contenidos en el plano. Ya se anotó en párrafos anteriores que los puntos conocidos como las trazas de una recta que pertenece a un plano están contenidos en ese plano, y precisamente en sus trazas con los planos de proyección respectivos.

4a.).—**Horizontales y frontales.**—Como toda recta horizontal está contenida en un plano (proyectante) paralelo al horizontal de referencia, **la proyección horizontal de toda recta horizontal que pertenece a un plano dado, debe ser siempre paralela a la traza horizontal del plano.** Asimismo, dado que toda recta frontal está en un plano (proyectante) paralelo al vertical de proyección, **la proyección vertical de toda recta frontal perteneciente a un plano dado, necesariamente es paralela a la traza vertical del mismo plano.**

Por lo anterior se deduce que resulta de mucha utilidad en la solución de un problema, tener conocimiento de las proyecciones de alguna recta horizontal o frontal, ya que entonces se tiene determinada la dirección de alguna de las trazas del plano en estudio; o, en el caso de tener conocidas las trazas, se pueden considerar las proyecciones de rectas del plano dado, como las que se acaban de mencionar, para obtener proyecciones de puntos diferentes del plano, como puede observarse en seguida.

Problema No 1.—Completar las dos proyecciones del cuadrilátero: A(7.9, y_1, −1.3, B(12.2, y_2, −0.4), C(13.8, y_3, −1.2) y D(11.2, −0.9, z), que está en el plano: (9.0, −9.4) 18.0 (9.0, −4 6).

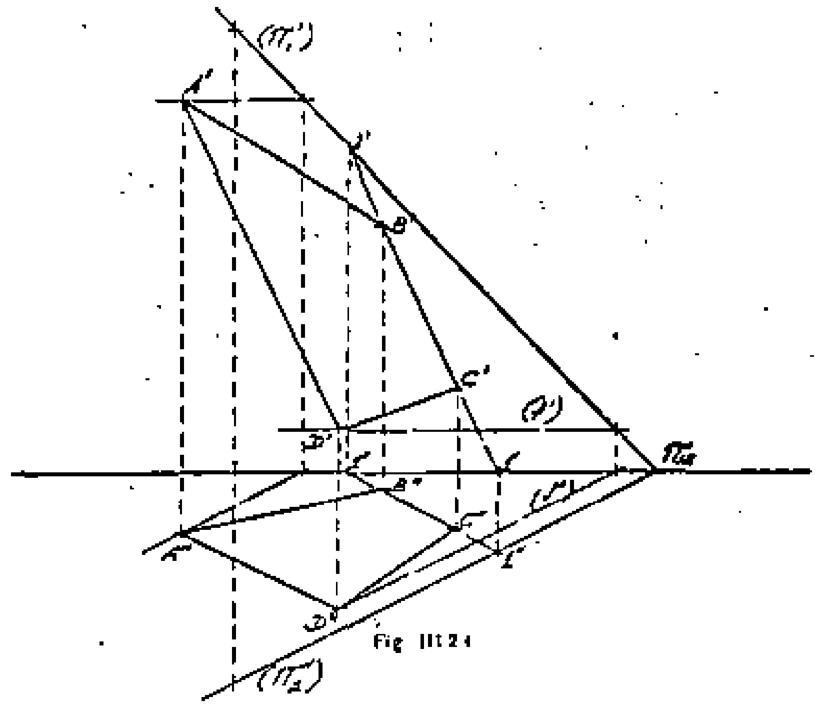


Fig III.2.1

Solución: (Fig. III.2.4).

1o.—Se prolonga $(B''C'')$ hasta la traza (π_2'') y (LT), para obtener los puntos $(1', 1'')$ y $(2', 2'')$ que definen la proyección horizontal $(1'\ 2')$ donde quedan localizadas las proyecciones B' y C' mediante sus referencias respectivas de B'' y C''.

2o.—Por D' se traza (l') paralela a LT, cuya proyección vertical (l'') debe ser paralela a la traza vertical (π_2''), y nos proporciona D'' donde se corta con la referencia que viene de D'.

3o.—Por A'' se dibuja la paralela a (π_2''), que viene a ser la proyección vertical de una recta frontal del plano, tal que su proyección horizontal, por ser paralela a LT, determina A' en la referencia trazada a partir de A''.

Problema No. 2.—Determinar las trazas del plano (Ω) formado por la recta que pasa por D(7.3, −1.3, 7.3) y E(7.3, −4.7, 1.6) y por la frontal que es concurrente con la anterior en E y contiene al punto F(12.8, y, −2.5) completando las dos proyecciones del triángulo.

Solución: (Fig. III.2.5).

1o.—Mediante la tercera proyección se obtienen las trazas de la recta de perfil (DE), considerando que se encuentra en la segunda región del espacio.

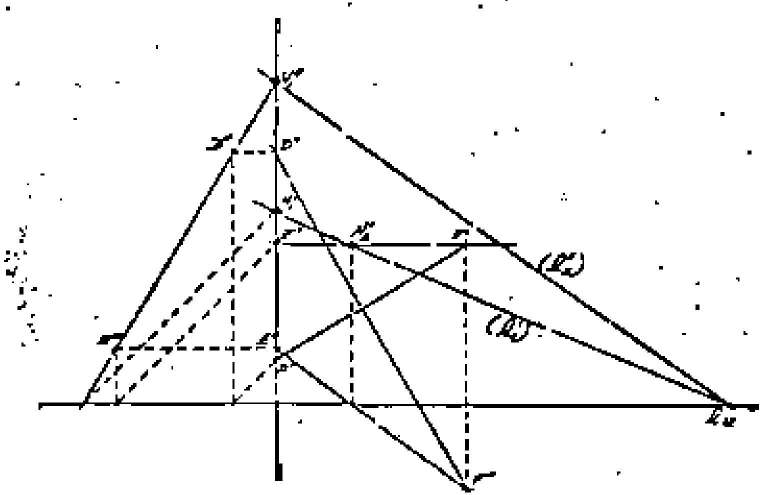


Fig. III.2.5

2o.—En seguida se traza la proyección vertical $(E''F'')$ de la frontal, cuya proyección horizontal $(E'F')$ es paralela a LT.

3o.—Se dibujan las dos proyecciones $(D'E'F')$ y $(D''E''F'')$ del triángulo (DEF), que se encuentra en el plano (Ω).

3.—DIFERENTES POSICIONES DE UN PLANO.

a) Nomenclatura.—Ahora que ya se conocen algunas características y propiedades de las trazas de un plano dado cualquiera, resultará fácil comprender que la posición relativa de un plano respecto a los del sistema de referencia, forzosamente tiene que estar comprendida, ya sea en el caso general, o en alguno de los casos particulares que en seguida de aquél se mencionan, como sigue:

— Plano cualquiera.—Representa el caso general, y corresponde a todo plano que se intersecta oblicuamente con los de proyección. Sus trazas forman ángulos oblicuos con LT.

— Plano vertical.—Es perpendicular al plano (H) y se corta oblicuamente con el (V), por cuya razón su traza vertical resulta perpendicular a LT, mientras que en su traza horizontal, oblicua respecto a LT, quedan coincidentes las proyecciones horizontales de todas las rectas que contiene.

— Plano de canto.—Es todo aquel plano que, siendo perpendicular a (V) es oblicuo respecto a (H), por cuya causa su traza vertical, oblicua respecto a LT, contiene las proyecciones verticales de todas sus rectas, y su traza horizontal es normal a LT.

— Plano de perfil.—Es todo plano que corta perpendicularmente a los dos de proyección (H y V) simultáneamente, por lo que puede considerarse como caso particular de los dos anteriores. Sus trazas son ambas normales a LT, confundiéndose en una sola, y las proyecciones de todas las rectas que puede contener el plano están situadas en dichas trazas.

— Plano frontal.—Es paralelo al vertical, y se corta normalmente con el horizontal de proyección; por eso no tiene traza vertical, y su traza horizontal es paralela a LT; sobre esta última traza coinciden las proyecciones horizontales de todas sus rectas.

— Plano horizontal.—Se intersecta perpendicularmente con el (V), y es paralelo al (H); su traza vertical es paralela a LT y contiene las proyecciones verticales de todos los puntos de todas las rectas del plano, cuyas proyecciones horizontales son diferentes; este plano no tiene traza horizontal.

— **Plano paralelo a LT.**—Corta oblicuamente a los dos planos de proyección (H y V), pero es siempre paralelo a la intersección de ambos (LT); por lo cual sus dos trazas resultan paralelas a LT, y no tienen ningún punto común sobre ella.

— **Plano que pasa por LT.**—Resulta ser un caso particular del anterior, porque corta oblicuamente a los dos planos de proyección, sólo que los intersecta simultáneamente a ambos por LT, la cual forma parte del plano dicho. Para que un plano de este tipo quede completamente determinado, es necesario conocer, además, uno de sus puntos fuera de LT.

Fácilmente puede observarse, de las anteriores explicaciones, que un plano de los tipos: vertical, de canto, de perfil frontal u horizontal, no es más que el plano proyectante de todas las rectas que contiene, sobre el plano de proyección al cual es perpendicular el plano considerado.

A manera de resumen, se presentan las monteas y la explicación relativa, de los planos que a continuación se mencionan definidos por sus trazas, como sigue:

Plano (Δ): (7.0, −4.5) 2.1 (7.0, −3.5) } Fig. III.3.1.
" (ε): (13.0, 3.0) 17.0 (17.0, 5.0) }
" (π): (12.0, 4.0) 12.0 (5.0, 3.5) }
" (Ω): (16.3, 3.5) 16.3 (16.3, 4.0) }
" (P): (8.0, −2.9) ∞ (8.0, ∞) } Fig. III.3.2.
" (Q): (14.0, ∞) ∞ (14.0, 4.0) }
" (R): (9.0, −3.5) ∞ (9.0, −1.8) }
" (S): [P(16.5, 2.5, 5.2) y (LT)] }

TRAZAS DE LOS DIFERENTES TIPOS DE PLANOS.

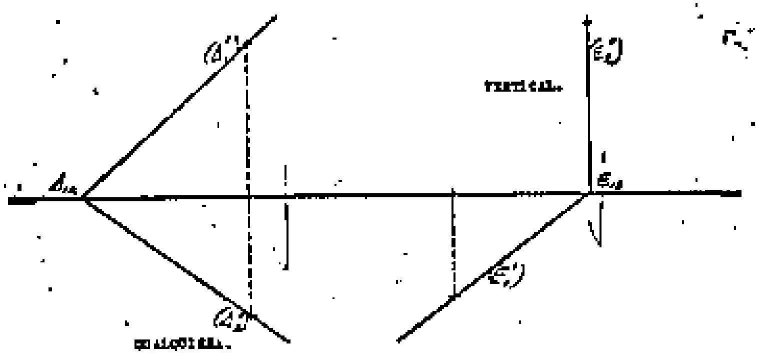
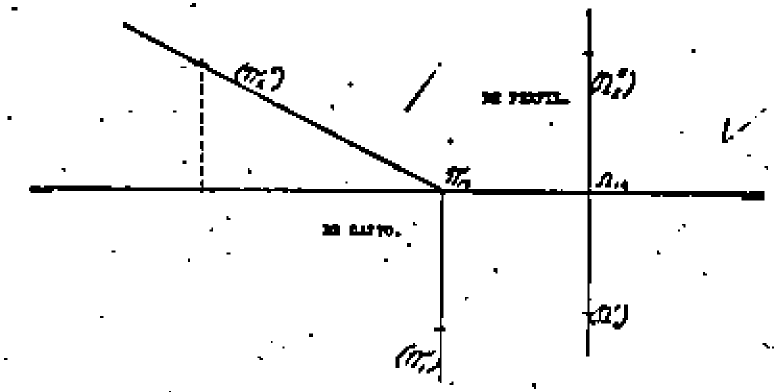


Fig. III.3.1.



TRAZAS DE LOS DIFERENTES TIPOS DE PLANOS.

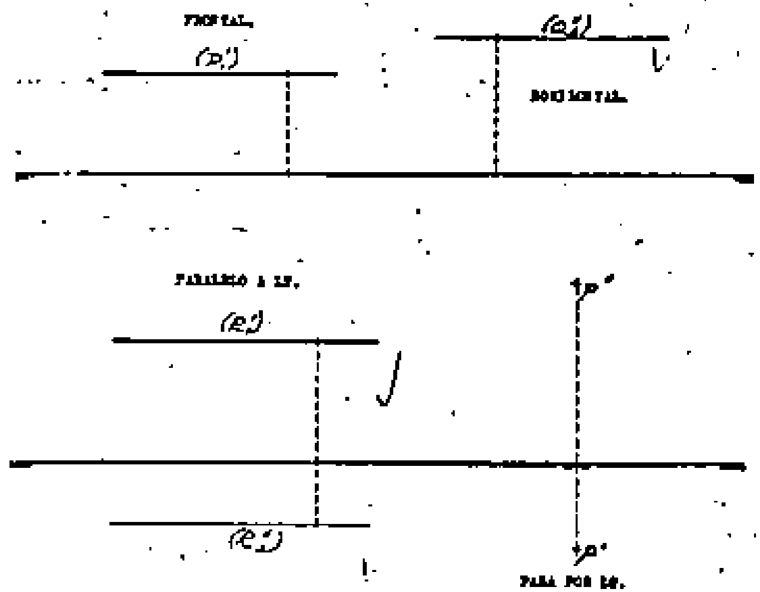


Fig. III.3.2.

Plano	*Nomenclatura*	*Traza Vertical*	*Traza Horizontal*
(Δ)	Cualquiera.	Oblicua a LT.	Oblicua a LT.
(Γ)	Vertical.	Perpend. a LT.	Oblicua a LT.
(π)	De Canto.	Oblicua a LT.	Perpend. a LT.
(Ω)	De Perfil.	Perpend. a LT.	Perpend. a LT.
(P)	Frontal.	No tiene.	Paralela a LT.
(Q)	Horizontal.	Paralela a LT.	No tiene.
(R)	Paralelo a LT.	Paralela a LT.	Paralela a LT.
(S)	Pasa por LT.	En LT.	En LT.

b) Rectas que contiene.—Considerando las diferentes posiciones que una recta puede presentar respecto al sistema de referencia, y conociendo también la disposición de un plano dado, referido al mismo sistema, mediante simple observación se puede concluir que no todos los diferentes tipos de planos citados en el inciso anterior son capaces de contener rectas dispuestas en todas las posiciones particulares conocidas (ni siquiera en iguales), sino que se presentan las diferencias que se mencionan en el cuadro siguiente:

Plano	*Tipo de Rectas que contiene.*
Cualquiera.	Cualquiera, frontal, horizontal y de perfil.
Vertical.	Cualquiera, horizontal y vertical.
De Canto.	Cualquiera, frontal y de punta.
De Perfil.	Vertical, de punta y de perfil.
Frontal.	Frontal, fronto-horizontal y vertical.
Horizontal.	Horizontal, fronto-horizontal y de punta.
Paralelo a LT.	Cualquiera, fronto-horizontal y de perfil.
Pasa por LT.	Cualquiera, fronto horizontal y de perfil.

Donde puede observarse, entre otras cosas, que:

— Sólo un plano cualquiera puede contener rectas frontales y horizontales simultáneamente.

— Sólamente dos tipos de planos: Paralelo a LT y que pasa por LT, contienen los mismos tipos de rectas, lo cual no es extraño si se recuerda que ya se mencionó que el último no es más que un caso particular del anterior.

— Etc.

Nota: Aunque en el inciso b), correspondiente a la página 45, se indicó la notación general para la determinación de un plano mediante sus trazas:

(punto traza horizontal), vértice, (punto traza vertical),

es importante ahora hacer notar que dicho sistema no se emplea comúnmente más que para la representación de planos de tipo cualquiera y paralelo a LT, puesto que se acostumbra definir los otros casos particulares (verticales, de canto, frontales, horizontales, etc.) mencionando entre sus datos alguna de sus características especiales.

4.—RECTAS DE MAXIMA PENDIENTE.—PROBLEMAS.

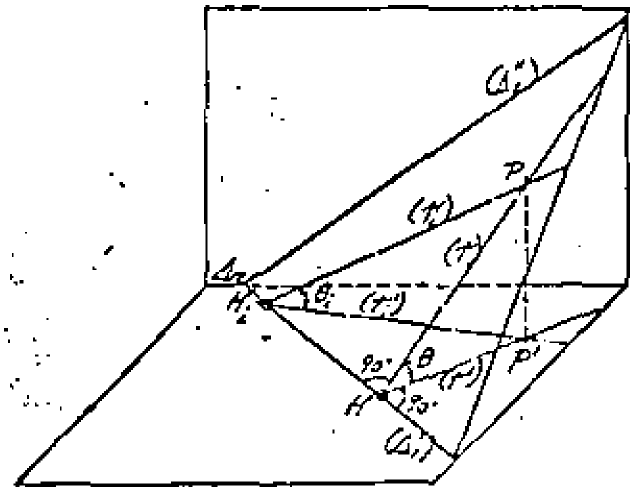


Fig. III.4.1.

a) Rectas de máxima pendiente.—La pendiente de una recta cualquiera (r_1), contenida en un plano (Δ), respecto a un plano fijo de referencia, se define como el valor de la tangente trigonométrica del ángulo (θ_1) formado por la recta y su proyección (r_1').

por ejemplo, sobre el plano; así, respecto al plano horizontal de proyección:

$$\text{Pend. de } (r_1) = \tan(\theta_1) = \frac{\overline{PP'}}{\overline{P'H_1'}}$$

Es fácil observar que el valor máximo que puede adquirir la pendiente de una recta (r), del plano (Δ), respecto al plano horizontal de proyección (H), ocurre solamente cuando (r) es perpendicular a la traza (Δ₁') del plano (Δ), con el plano de referencia considerado; entonces, se dice que la recta (r) es una recta de máxima pendiente del plano (Δ), respecto al horizontal de proyección.

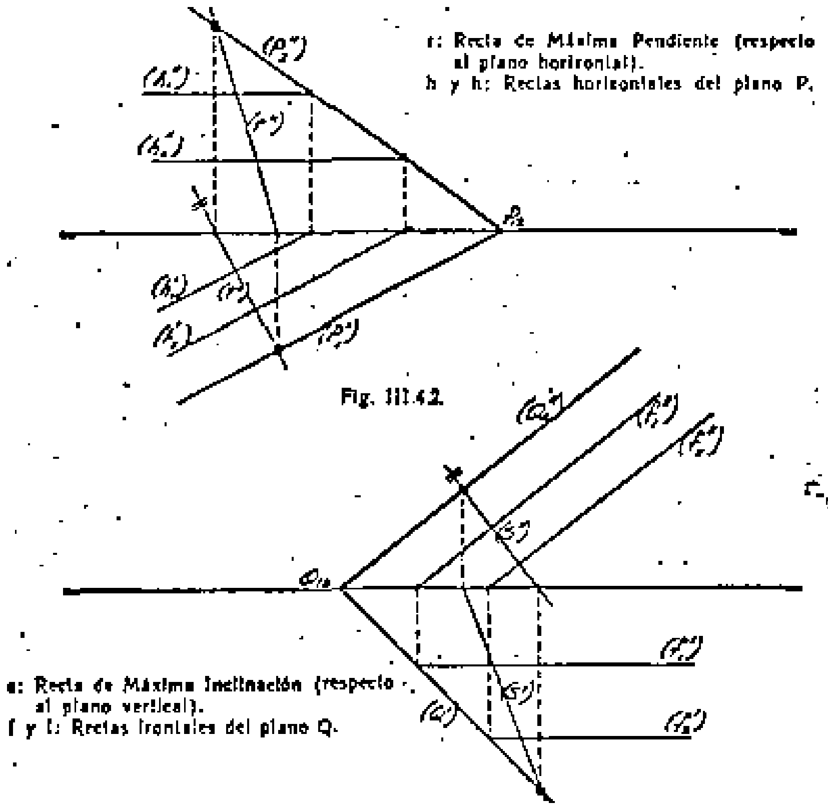


Fig. III.4.2.

Las rectas de máxima pendiente de un plano dado cualquiera, respecto al vertical de referencia, análogamente son perpendiculares a la traza vertical del plano dado, y en varias ocasiones se les designa como rectas de máxima inclinación.

A reserva de tratar posteriormente el problema con más detalle, por lo pronto puede anotarse que: "la perpendicularidad que existe entre toda recta de máxima pendiente de un plano cualquiera, y la traza de dicho plano en el de referencia considerado, solamente se manifiesta, en la montea, con la proyección de la recta en el mismo plano de referencia", y no en el otro plano de proyección. Es evidente que tal perpendicularidad también existe, y se manifiesta igualmente, entre las rectas de máxima pendiente respecto al plano horizontal (o vertical) de referencia, y las rectas horizontales (o frontales) del plano dado, por ser éstas últimas paralelas a la traza correspondiente. (Figs. III.4.2).

Las rectas de máxima pendiente de un plano dado cualquiera con alguno de los del sistema de referencia, se indican marcando su proyección en el plano respectivo con pequeñas dobles rayas transversales, como aparecen en las monteas de las figuras antes mencionadas.

Para los tipos particulares de planos que ya son conocidos, sus rectas de máxima pendiente presentan características que fácilmente pueden ser analizadas, atendiendo a las propiedades del caso particular en estudio.

b) Ejemplos.—De todas las explicaciones contenidas en el inciso anterior, pueden deducirse las aplicaciones del conocimiento de las rectas de máxima pendiente en la solución de problemas referentes a planos, como se muestra en seguida.

Problema No. 1.—Dado el segmento R(6.0, −1.2, 5.8), S(9.3, 3.2, 1.5), perteneciente a una recta de máxima pendiente del plano (π), respecto al horizontal de referencia, obtener las trazas de dicho plano, y trazar por P(4.6, y, 2.3) una horizontal, y por Q(12.6, 1.7, z) una frontal del mismo.

Procedimiento: (Fig. III.4.3).

1o.—Se obtienen las trazas: H', H" y V', V", de la recta de máxima pendiente respecto al plano (H).

2o.—Por H' se dibuja la traza horizontal (π_1') del plano, perpendicular a (R'S'), hasta π_{12} en LT, por donde también se dibuja (π_2''), uniendo ese último punto con V''.

3o.—Por P'' se traza la proyección vertical, paralelamente a LT, de la recta horizontal pedida, hasta la traza del plano, de donde se

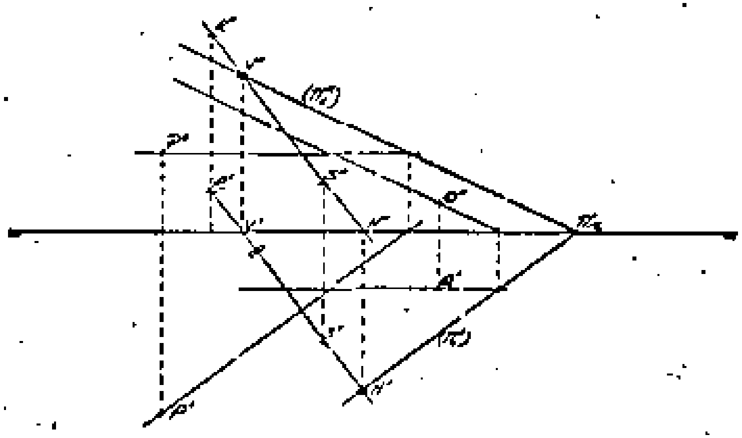


Fig. III.4.3.

lleve una referencia a LT, para dibujar ahí la proyección horizontal, hasta P', paralela a la traza (π_1'), o sea normal a (R'S').

4o.—De manera semejante, pero invirtiendo el procedimiento indicado en el paso anterior, se determinan las proyecciones homólogas de la recta frontal del plano que contiene al punto Q, como fácilmente puede observarse en la figura.

Problema No. 2.—Dados los puntos: M(6.6, 2.1, −6.4 y N(8.8, −2.5, −1.8), de una recta de máxima inclinación (respecto al vertical de referencia) de un plano (P), determinar sus dos trazas (P_1') y (P_2''), y completar las dos proyecciones del triángulo (MNO) que está en el mismo plano, siendo: O(12.5, y, −3.0).

Procedimiento: (Fig. III.4.4).

1o.—Se obtienen las trazas: H', H'' y V', V'' de la recta de máxima inclinación.

2o.—Por V'' se dibuja, normal a (M''N''), la traza vertical (P_2''). Por N'' se dibuja, paralela a la traza anterior, la proyección vertical de una frontal de (P), hasta llegar a LT en H_1'', de donde se lleva una referencia que se intersecta en H_1' con la proyección horizontal de la misma frontal, trazada paralelamente a LT por N'.

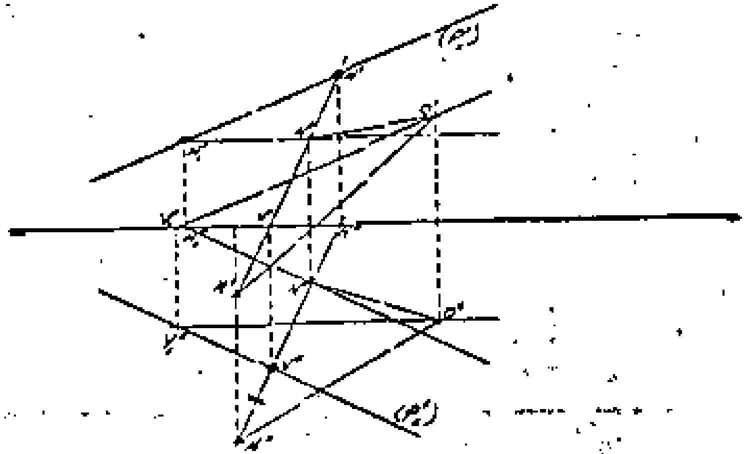


Fig. III.4.4.

3o.—Uniendo H' y H_1' queda definida la traza horizontal (P_1'). Por O'', paralela a LT se dibuja la proyección vertical de la recta horizontal de (P), hasta V_1'', de donde se lleva la referencia a LT, localizando V_1', para determinar la proyección homóloga faltante de la horizontal, que debiendo ser paralela a la traza (P_1'), permite determinar O', como se indica en la figura.

5.—EJERCICIOS.—(Serie III).

1.—Obtener las trazas del plano (π) formado por el segmento (CD), paralelo al segundo bisector, que se corta con (AB), siendo: A(6.6, 1.7, 7.5), B(14.6, 5.0, 2.0), C(5.6, y_1, 2.4) y D(13.2, y_1, 6.8).

2.—Dibujar las trazas (Δ_1') y (Δ_2'') del plano (Δ) formado por la horizontal que pasa por L y es concurrente con la recta que contiene a M y N, siendo: L(14.5, −2.0, 3.0), M(4.7, 5.2, 1.3) y N(11.2, 3.7, 5.0).

3.—Indicar la visibilidad de cada uno de los segmentos (AB), (BC) y (CA), y las trazas del plano que los contiene, considerando que: A(4.0, 4.5, −2.5), B(12.0, −5.0, 11.0) y C(15.0, 10.5, −4.5).

4.—Determinar la proyección horizontal K', con la condición de que el punto K se encuentre en el mismo plano (Ω), paralelo a LT, en que se encuentran L y M. Obtener las trazas (Ω_1') y (Ω_2'') y los puntos 1 y 2 en que las rectas (KL) y (KM) se intersectan con el primer bisector. Datos: K(8.2, y, 2.2), L(5.0, 1.5, 4.3) y M(0.9, 6.2, 1.4).

5.—Sin obtener las trazas del plano (Q), determinar las proyecciones (f'), (f'') y (h'), (h''), de una frontal (f) que pasa por C, y de una horizontal (h) que contiene al punto A, estando ambas rectas en el plano (Q), definido por los segmentos paralelos (AB) y (CD), siendo éste último del primer bisector. A(4.0, 0, 3.4), B(10.0, y_1, 7.0), C(6.4, y_2, 2.7) y D(12.0, y_3, z).

6.—Trazar una recta (r), de máxima inclinación, por el punto D(9.0, y, 6.3), que está en el mismo plano que los puntos A(5.0, 2.0, 3.5), B(12.0, 6.4, 0.8) y C(15.0, 1.1, 5.8). Dibujar también las dos proyecciones de una recta frontal que pase por A, y de una horizontal que contenga a B.

7.—Completar las proyecciones de los puntos: P(13.0, y, −3.4), Q(15.0, −2.0, z_1) y R(11.0, −3.7, z_2), que están en el plano (Ω): (13.3, −8.0) 2.5 (13.3, −7.0), trazando una horizontal por P, una frontal por Q y una recta de máxima pendiente por el punto R.

8.—Considerando que M(14.2, y, −7.5), N(14.2, −4.5, z_1) y O(6.5, −4.5, z_2), completar las dos proyecciones del triángulo (MNO), que se encuentra en el plano (P): (10.0, −6.0) ∞ (10.0, −9.0).

9.—Dado el segmento (RS): (8.8, −5.0, −2.3), (11.6, −1.7, −5.5), de una recta de máxima pendiente del plano (ε), determinar sus dos trazas (ε_1') y (ε_2''), así como las proyecciones homólogas del punto Q(15.0, y, z) que está sobre la frontal del plano que pasa por R.

10.—Dibujar las dos trazas de cada uno de los tres planos: (Δ), (ν) y (Ω), dados por una de sus rectas de máxima pendiente o de máxima inclinación, cuyos segmentos pasan por los puntos que en seguida se mencionan:

A(3.3, 5.2, −0.3, B(8.3, 0.8, 3.1),	de máxima inclinación.
C(11.0, 1.6, 5.1), D(11.0, 4.6, 1.1),	de máxima inclinación o de máxima pendiente.
E(13.5, 3.0, 4.5), F(17.7, 3.0, 1.2),	de máxima pendiente.

CAPITULO II

PROBLEMAS FUNDAMENTALES

IV.—INTERSECCIONES DE PLANOS Y DE RECTAS CON PLANOS.

1.—INTERSECCION ENTRE DOS PLANOS.—EJEMPLOS.

La intersección entre dos planos cualesquiera (Δ y ν) necesariamente es la recta (I), cuyos puntos todos pertenecen simultáneamente a los dos planos considerados. La determinación de dicha recta de intersección puede lograrse obteniendo las proyecciones de dos de sus puntos, por algún procedimiento como los que se muestran en los siguientes

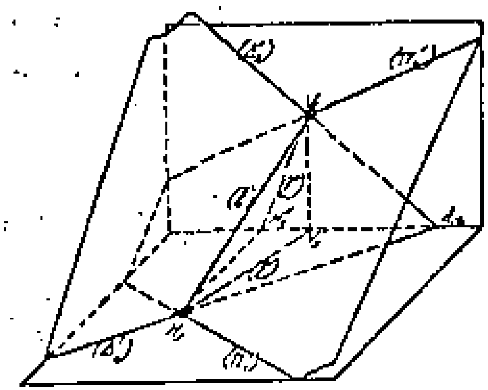


Fig. IV.1.1.

Casos:

1).—Cuando son conocidas las trazas de los planos, o pueden definirse fácilmente, su intersección está determinada por la recta que une los puntos comunes H_1 y V_1 de sus trazas respectivas, puntos que vienen siendo las trazas correspondientes de su recta de intersección en los planos de referencia.

Problema No. 1.—Obtener la intersección entre el plano (π): (7.4, 2.6) 3.1 (7.4, 5.4) y el plano (Δ), cuya recta de máxima pendiente pasa por: R(12.8, 1.2, 2.6) y S(15.6, 4.8, −3.4).

Procedimiento: (Fig. IV.1.2).

1o.—Se obtienen las trazas (H', H" y V', V") de la recta de máxima pendiente. Por H' se dibuja perpendicularmente a (R'S') la traza horizontal (Δ_1'), hasta LT, en Δ_{11}, desde donde se lleva la otra traza (Δ_1''), que debe pasar por V".

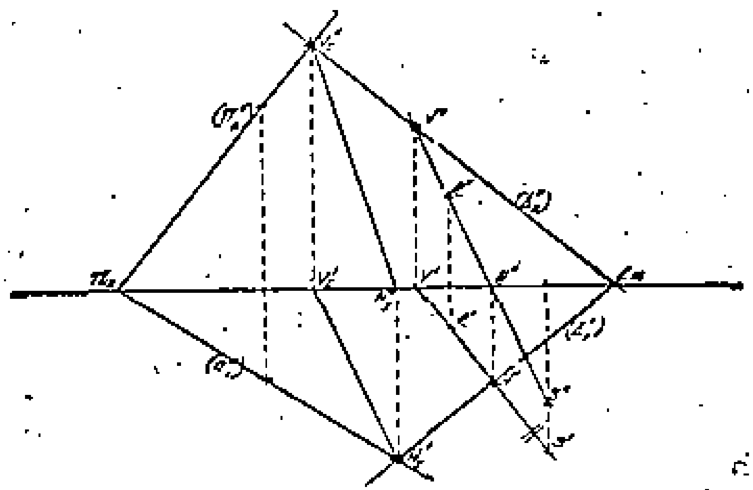


Fig. IV.1.2

2o.—Por los puntos comunes H_1' y V_1'' de las trazas de los planos considerados, se llevan referencias hasta LT, para localizar H_1'' y V_1', respectivamente, con lo cual quedan determinadas las dos proyecciones: (H_1' V_1' y H_1'' V_1'') de la intersección buscada.

Problema No. 2.—Obtener las proyecciones homólogas de la recta de intersección entre el plano (ϵ): (14.6, 4.0) ∞ (14.6, 5.7) y el plano (Ω), cuya recta de máxima pendiente pasa por: M(4.1, −3.5, −5.3) y N(8.5, −3.5, −19).

Procedimiento: (Fig. IV.1.3).

1o.—Se obtiene la traza H' de la recta de máxima pendiente (MN), por donde se dibuja, perpendicularmente a (M'N'), la traza horizontal de (Ω) que, por ser perpendicular también a LT, corresponde a un plano de canto, cuya otra traza (Ω_1'') es coincidente con (M"N").

2o.—Por los puntos comunes H_1' y V_1'' de las trazas correspondientes prolongadas, se llevan referencias hasta LT, donde se encuentran sus respectivas proyecciones homólogas H_1'' y V_1', con lo cual ya pueden dibujarse las dos proyecciones, horizontal y vertical ($H_1'V_1'$ y H_1'' V_1''), de la recta de intersección solicitada.

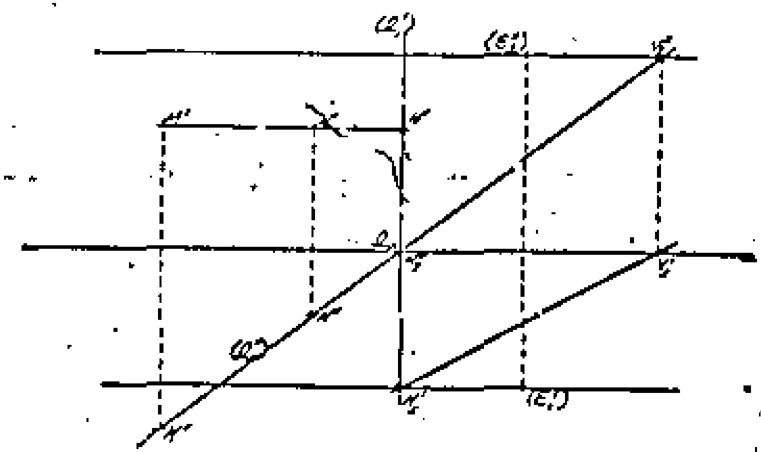


Fig. IV.1.3

2.—Cuando los dos planos no están determinados por sus trazas en el sistema de referencia, y no es conveniente obtenerlas primero, sino que en la solución del problema deben ser considerados únicamente los elementos dados que definen a dichos planos (tres puntos: dos rectas concurrentes, dos paralelas, etc.), se puede lograr la obtención de puntos comunes de los planos considerados, mediante el trazo de dos rectas, una de cada plano, tales que, no siendo paralelas y encontrándose en otro plano común, distinto a los correspondientes a los datos, su intersección determine un punto de la recta común que se busca.

Los planos más utilizados comúnmente para el trazo de esas últimas **rectas auxiliares** mencionadas que se cortan, pueden ser: horizontales o frontales; o sea que, las rectas auxiliares más empleadas en la solución de este tipo de problemas son las horizontales y frontales, cuyos planos que las contienen son los planos proyectantes de sus mismos nombres respectivos.

A pesar de que en algunas ocasiones tal vez pueda usarse con ventaja otro tipo de recta auxiliar y, por ende, otro tipo de plano que la contenga, en este Curso no se tratarán problemas en esa situación.

Para la mejor comprensión del procedimiento esbozado en los párrafos anteriores, a continuación se presentan los siguientes:

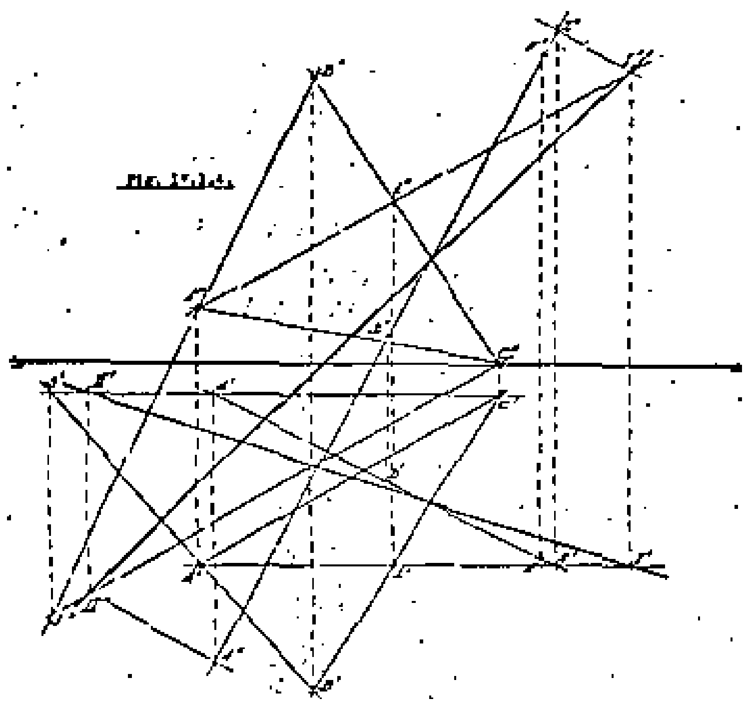


Fig. IV.1.4.

Problema No. 1.—Determinar la recta de intersección entre el plano (P), definido por los puntos: A(5.5, 5.8, 1.6), B(8.8, 9.5, 8.4) y C(14.3, 0.9, 0), y el plano (Q), tal que una de sus rectas de máxima inclinación pasa por D(11.0, 3.4, 0.8) y E(15.5, 5.5, 9.0).

Procedimiento: (Fig. IV.1.4).

1o.—Dibujando las proyecciones de los segmentos (AB), (BC) y (CA), por A' se traza la proyección horizontal de la frontal (A1) del plano (P), y de la que pasa por 2 del plano (Q), cuyas proyecciones verticales se obtienen llevando referencias por 1' y 2', como se indica. Se prolonga A"1" hasta cortar en I" la proyección vertical de la frontal de (Q), que pasa por 2"; después se localiza I'.

2o.—Igualmente se obtiene II", donde se cortan las proyecciones verticales de (C"3") de (P), y de la frontal de (Q) que pasa por 4", que se trazan a partir de la proyección horizontal (C'3').

3o.—Al localizarse II' se tiene como solución del problema las dos proyecciones (I'II') y (I"II") de la intersección.

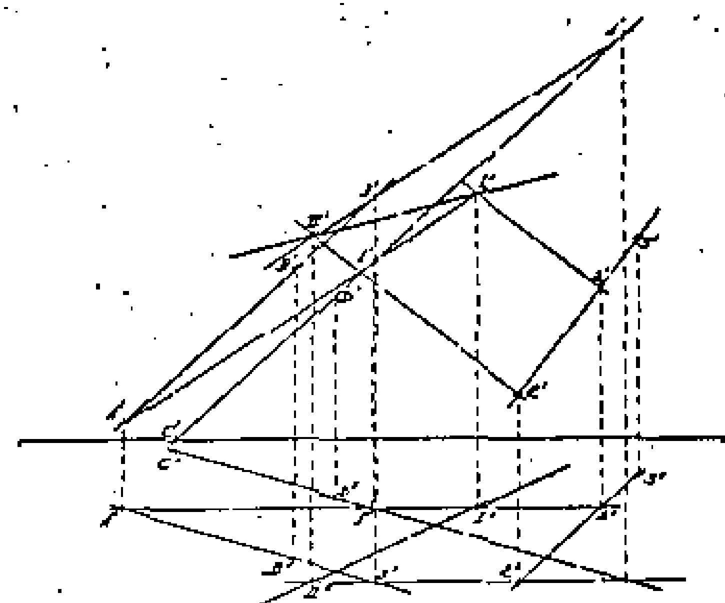


Fig. IV.1.5.

Problema No. 2.—Obtener las dos proyecciones de la recta de intersección del plano (▼), formado por las rectas parareles (AB) y (CD), con el plano (Δ), dado por su recta de máxima pendiente (RS), siendo: A(3.5, −0.5, −2.0), B(8.5, −5.0, −3.5), C(5.0, 0, −0.3, D(9.7, y, z), R(15.0, −1.3, −4.2) y S(18.5, −5.8, −1.0).

Procedimiento: (Fig. IV.1.5).

1o.—Se completan las dos proyecciones (C'D') y (C"D"), dibujándolas paralelamente a (A'B') y (A"B"); y se dibujan las proyecciones verticales coincidentes (A"1") de (▼), y por 2" de (Δ), de las horizontales respectivas, cuyas proyecciones horizontales (A' 1') y normal a (R'S') por 2', se obtienen trazando las correspondientes referencias, como se muestra en la figura. El punto común de ambas horizontales tiene las proyecciones: I' e I".

2o.—Por R" se trazan las proyecciones verticales, también confundidas, de otras dos rectas horizontales (3"4") ubicada en (▼) y por R" en (Δ), respectivamente, para obtener el otro punto común II, de proyecciones II' y II", siguiendo el mismo proceso indicado en el paso anterior. La solución tiene como proyecciones homólogas: (I'II') y (I"II").

2.—INTERSECCION DE UNA RECTA CON UN PLANO.

EJEMPLOS.

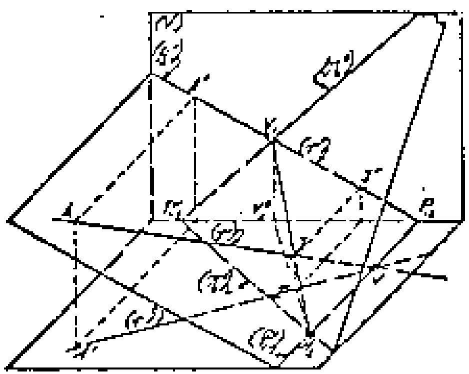


Fig. IV.2.1.

Como la intersección de una recta cualquiera (r) con un plano dado también cualquiera (▼) es el punto I común entre ambos, que también pertenece a la intersección de (▼) con un plano auxiliar (P) que contenga a (r), el problema de la determinación de ese punto de intersección se puede resolver fácilmente, en general, obteniendo primero la recta común (V, H,) entre el plano dado y uno de los planos proyectantes de aquella (el vertical o el de canto), y luego marcando el punto I de concurrencia entre ambas rectas (Fig. IV.2.1), como se indica en los siguientes

Ejemplos:

Problema No. 1.—Indicar las dos proyecciones del punto de intersección de la recta (AB): (5.5, 0.9, 2.5) (11.0, 3.5, 6.1), con el plano (Δ): (3.0, 4.0) ∞ (3.0, 6.5).

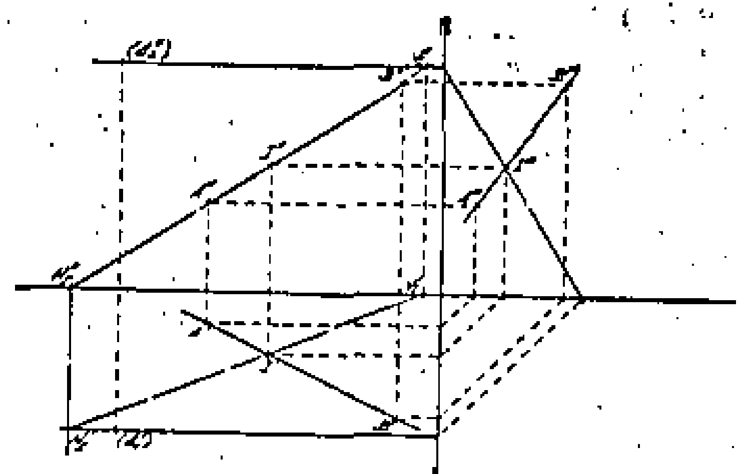


Fig. IV.2.2.

Procedimiento: (Fig. IV.2.2).

1o.—Utilizando como plano auxiliar el proyectante de canto de la recta, se obtienen los puntos comunes de las trazas (V_1', V_1'') y (H_1', H_1''), tales que la recta de intersección entre el plano (Δ) y el auxiliar, tiene como proyección horizontal (H_1' V_1'), que se corta con ($A'B'$) en el punto común I'.

2o.—Llevando por I' una referencia hasta ($A''B''$) se obtiene la proyección vertical I'' del punto de intersección buscado.

NOTA.—Debe observarse que este problema también puede ser resuelto utilizando la tercera proyección, como se indica.

Problema No. 2.—Obtener la intersección de la recta (r): (3.8, 2.2, 6.6) (12.8, 4.3, −0.9), con el plano (ε), dado por dos puntos: M(5.9, 4.7, −1.5) y N(8.9, 1.4, 4.7) de una de sus rectas de máxima pendiente.

Procedimiento: (Fig. IV.2.3).

1o.—Se obtienen las trazas (ε_1') y (ε_1''); y luego, usando como plano auxiliar el proyectante de canto (P) de (r), los puntos: H_1' y V_1'' de la recta de intersección entre ambos planos, y sus correspondientes proyecciones homólogas: H_1'' y V_1'.

2o.—El punto común I' de (r') y (H_1' V_1') es la proyección horizontal de la intersección de (r) con (ε), cuya proyección vertical se obtiene trazando la referencia desde I' hasta I'' sobre (r'').

Problema No. 3.—Determinar el punto de intersección de la recta que pasa por S(3.3, 4.0, 4.0) y T(9.3, 5.3, 0), con el plano definido por los puntos: P(1.7, 1.5, 0.7), Q(7.5, 8.2, 6.3) y R(10.7, 5.3, 2.1).

Procedimiento: (Fig. IV.2.4).

1o.—Dibujando las proyecciones de los segmentos (PQ), (QR) y (RP), y utilizando como plano auxiliar el proyectante de canto de (ST), se puede observar que éste último corta a ($P''Q''$) en $1''$, y a ($P''R''$) en $2''$, cuyas proyecciones horizontales, $1'$ y $2'$, se encuentran en las proyecciones horizontales ($P'Q'$) y ($P'R'$), respectivamente.

2o.—Obteniendo la proyección horizontal ($1'2'$) de la recta de intersección entre los planos (PQR) y el auxiliar de canto, de (ST), se determina su punto I' común entre ambos, cuya proyección vertical I'' se encuentra sobre ($S''T''$), como se indica.

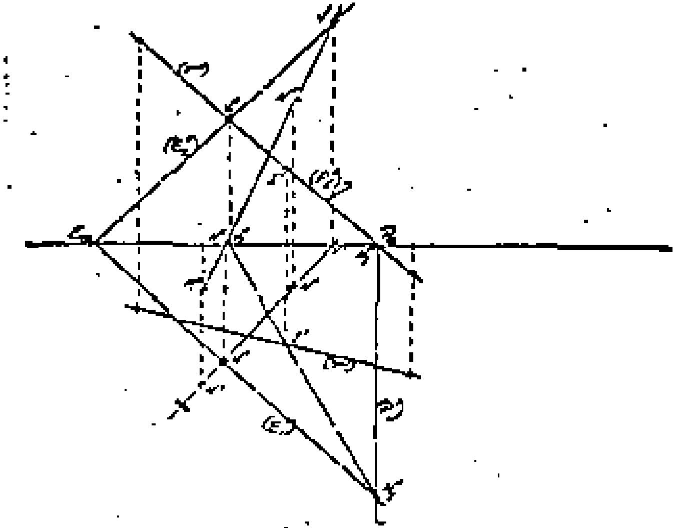


Fig. IV.2.3

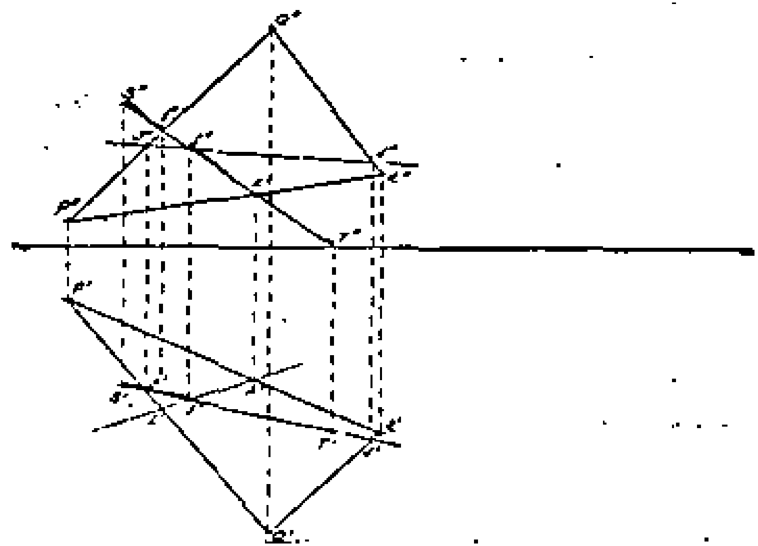


Fig. IV.2.4.

NOTA.—También se muestra en la figura que el mismo resultado se obtiene cuando se emplea como plano auxiliar el proyectante vertical de (ST), de traza horizontal coincidente con (S'T'), que tiene puntos comunes con el plano (PQR) en 3 y 4, cuyas proyecciones: 3', 3", 4', 4", se obtienen siguiendo el mismo procedimiento señalado en la figura anterior..

Problema No. 4.—Recta que pasa por un punto, y corta a dos rectas dadas.—Si consideramos que las rectas dadas: (l) y (r), son de tipo cualquiera (y ni concurrentes ni paralelas) y el punto P de la recta pedida no pertenece a ninguna de ellas, el problema tiene

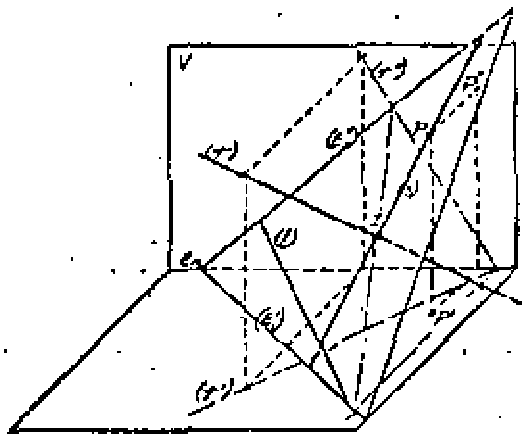


Fig. IV.2.5.

como única solución la que se obtiene siguiendo el procedimiento que se ilustra en la Fig. IV.2.5, que consta de los siguientes pasos:

Primero.—Construyendo un plano auxiliar (α) con el punto P y una de las rectas dadas.

Segundo.—Obteniendo la intersección I entre ese plano auxiliar y la otra recta dada. La solución es la recta (s), que pasa por P e I.

Ejemplo: Por el punto P(12.9, 4.7, 2.2) trazar una recta (s) que corte a las rectas (l) y (r), que contienen los segmentos que en seguida se indican: (l) = A(4.5, 4.3, 0), B(11.3, 0.8, 5.3), y (r) = C(6.8 0.9, 4.6), D(14.9, 10.0, 0).

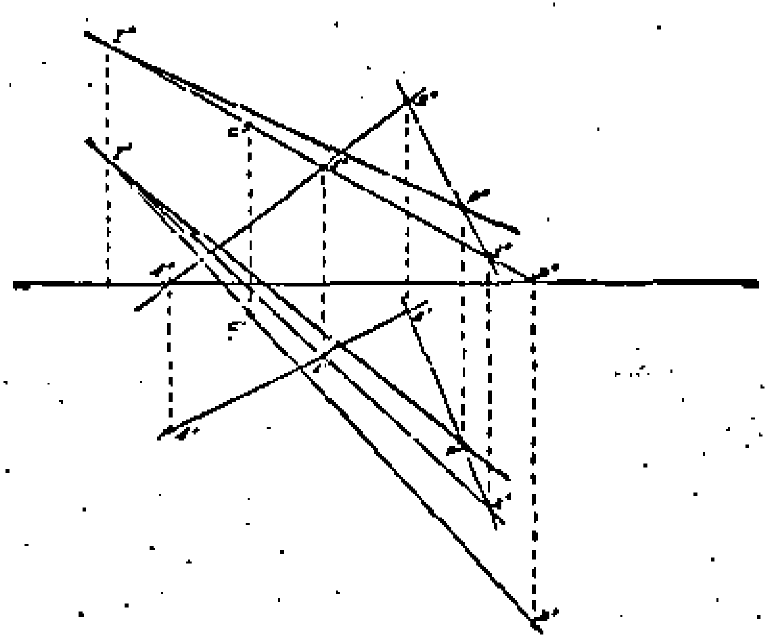


Fig. IV.2.6.

Procedimiento: (Fig. IV.2.6).

1o.—Se construye el plano auxiliar con la recta (AB) y el punto P, trazando las dos proyecciones de (BP): (B'P') y (B"P").

2o.—Se obtiene la intersección I entre dicho plano auxiliar y la otra recta (CD), utilizando el proyectante de canto, que corta a aquel en 1" y 2", de proyecciones horizontales 1' y 2', sobre (A'B' y (B'P'), respectivamente.

3o.—La intersección de la recta que pasa por 1' y 2' con (C'D'), es I', cuya referencia localiza a I" sobre (C"D").

La solución tiene como proyecciones homólogas: (P"I") y (P'I').

NOTA.—Si las rectas dadas en un problema como el presente fueran paralelas, con el punto P en su mismo plano o no, o concurrentes, la solución sería: Indeterminada, imposible o trivial, como es fácil observar a partir del procedimiento ilustrado antes, en la Fig. IV.2.5.

— Observación.—Debe haberse advertido ya, durante el desarrollo de los problemas anteriores que, en todo caso, la intersección de una recta con un plano puede ser obtenida utilizando uno de los planos proyectantes de la recta, y una recta del plano, que puede ser dato del mismo o determinarse previamente para ser usada como recta adicional.

3.—INTERSECCION DE FIGURAS PLANAS.—VISIBILIDAD.

a) Visibilidad.—Como durante el desarrollo del tema que acaba de anotarse es de especial interés analizar el aspecto relativo a la visibilidad de las figuras planas que se intersectan, previamente a su consideración debe establecerse que la convención que existe respecto a la visibilidad de una recta se puede hacer extensiva para las figuras planas, considerando que:

1o.—Todas las figuras planas son opacas; es decir, de dos figuras planas superpuestas, es visible la que está situada arriba y adelante de la otra, o sea que:

2o.—Son visibles en proyección vertical todos los puntos de una figura que tengan mayores alejamientos que los de la otra con los cuales coincidan en esa proyección.

3o.—Son visibles en proyección horizontal todos los puntos de las partes de una figura plana, cuyas cotas sean mayores que los de la otra figura con la cual coinciden en dicha proyección.

Es claro que la aplicación adecuada de la convención anterior exige cierta práctica, para adquirir la cual es recomendable seguir el criterio de analizar la visibilidad de dos en dos rectas (una de cada figura), comparando sus cotas en los puntos donde coinciden sus proyecciones horizontales, y sus alejamientos en donde exista coincidencia de sus proyecciones verticales, como puede observarse en el siguiente

Problema: Indicar en las dos proyecciones de la montea, la visibilidad correspondiente a la intersección de la recta (DE): (2.0, 2.6, 4.0) (12.1, 7.3, 2.2), con el triángulo (ABC): (3.4, 5.2, 3.0) (12.1, 8.5, 8.4) (7.6, 3.0, 1.1).

Procedimiento: (Fig. IV.31).

1o.—Se determina el punto de intersección (I', I"), utilizando el proyectante de canto de (DE), que corta al triángulo (ABC) en 1" y 2", en proyección vertical, y en 1' y 2', en proyección horizontal.

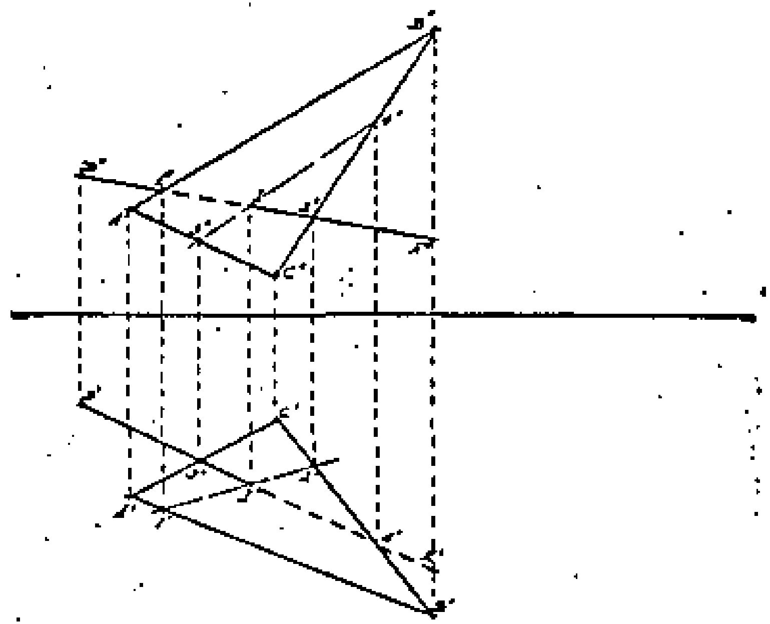


Fig. IV.31.

2o.—En la proyección vertical se observa que, antes de la intersección, en 1" es visible la recta (AB), cuyos puntos tienen alejamientos mayores que los de (DE); y que, después de la intersección, en 2", donde también hay coincidencia, es visible la recta (DE), pues sus puntos tienen alejamientos mayores que los de (CB).

3o.—En la proyección horizontal, la visibilidad se analiza observando las cotas de los puntos 3' de (AC) y (DE), antes de I, y 4', de (CB) y (DE), después de I, según el criterio ya anotado.

b) Intersección de figuras planas.—Los problemas de intersección de figuras planas (contenidas cada una en un mismo plano) se resuelven determinando (Fig. IV.3.2) los puntos de intersección de los segmentos de recta que constituyen los lados de cada una de ellas con el plano definido por la otra figura, ya que la citada intersección entre las dos figuras planas necesariamente forma parte de la recta

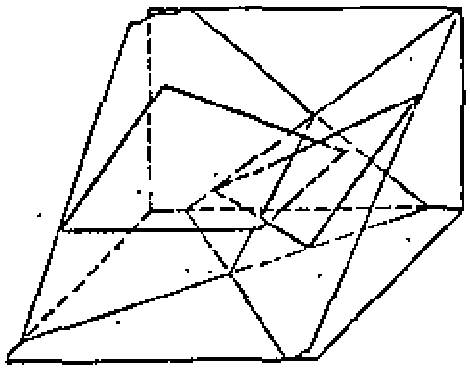


Fig. IV.3.2.

común a los planos que las contienen; para lo cual se siguen los procedimientos delineados al considerar los problemas relativos, como puede ser observado en los siguientes:

c) Ejemplos:

Problema No. 1.—Dibujar la montea que muestre la intersección entre el plano (Ω), dado por el segmento (MN): (5.5, 5.0, 0.9) (8.0, 2.0, 4.0) de una de sus rectas de máxima inclinación, y el triángulo (ABC): (7.0, 0, 1.0) (12.8, 5.6, 7.0) (15.4, 1.8, 3.5).

Procedimiento: (Fig. IV.3.3).

1o.—Se obtienen las trazas (Ω_1') y (Ω_2'') del plano dado por su recta de máxima inclinación, y se definen las intersecciones: I_1 e I_2 de las rectas (AB) y (AC) con el plano (Ω), utilizando los proyectantes de canto correspondientes a cada una de ellas, como se muestra.

2o.—En este problema la visibilidad se determina fácilmente por simple observación de la montea, y casi sin necesidad de aplicar el

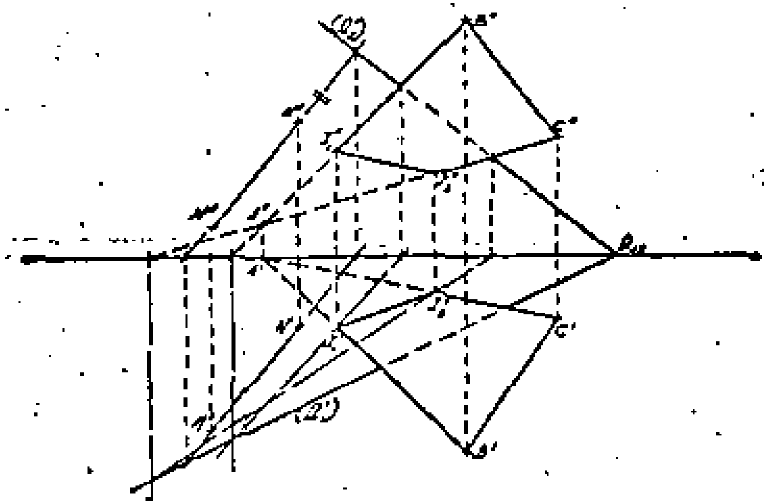


Fig. IV.3.3.

criterio antes anotado, de inspeccionar en cada una de las proyecciones, antes y después del punto de intersección, los puntos de coincidencia mencionados.

Problema No. 2.—Determinar la intersección y la visibilidad entre los triángulos: A(2.3, 6.6, 3.2), B(6.6, 1.1, 5.9), C(12.9, 5.6, 1.0) y D(3.8, 2.9, 1.0), E(14.7, 2.9, 3.4), F(8.1, 7.5, 5.9).

Procedimiento: (Fig. IV.3.4).

1o.—Se obtienen las intersecciones I_1 e I_2 de las rectas (DF) y (DE) con el plano del triángulo (ABC), utilizando sus respectivas proyectantes de canto, como se indica.

2o.—Se determina la visibilidad de la proyección vertical, observando los alejamientos de los puntos de proyecciones coincidentes en: 1", 2", 3" y 4", de acuerdo con el criterio expuesto en el inciso anterior, en la forma indicada mediante las flechas dibujadas en las referencias correspondientes.

3o.—De manera semejante se define la visibilidad en el plano horizontal, observando las cotas de los puntos de proyecciones horizontales coincidentes, que no aparecen marcados en la figura, para evitar mayores dificultades en la aplicación del criterio al complicarse el dibujo.

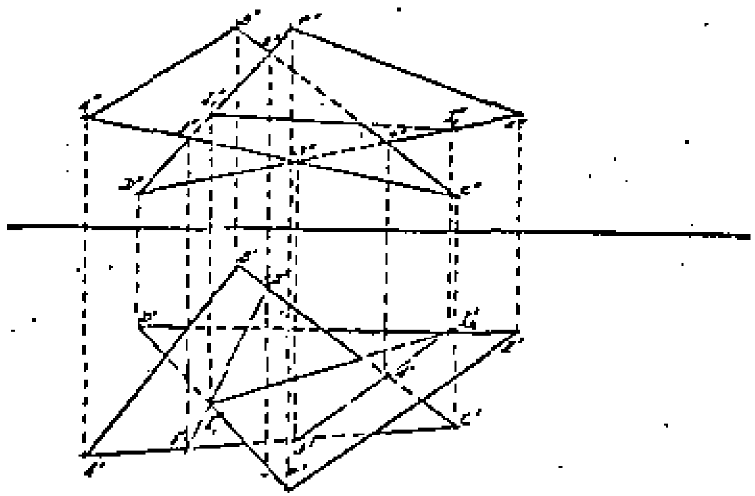


Fig. IV.3.4.

Problema No. 3.—Obtener la intersección y la visibilidad en las dos proyecciones, del cuadrilátero plano: A(6.9, 2.1, 6.0), B(14.9, y, 4.6), C(8.0, 8.5, 1.9), D(4.0, 5.0, 3.7), con el triángulo: E(3.0, 5.8, 6.4), F(13.7, 8.0, 2.4), G(12.3, 2.0, 0).

Procedimiento: (Fig. IV.3.5).

1o.—Dibujando la recta auxiliar (AC), y obteniendo primero en su proyección vertical, y luego en la horizontal, su intersección con (DB), así se determina B'.

2o.—Utilizando los proyectantes verticales de (GE) y (FE), se determina su correspondiente intersección con el plano del cuadrilátero, para poder dibujar posteriormente las proyecciones (I_1' I_2') y (I_1'' I_2'') de la recta común buscada.

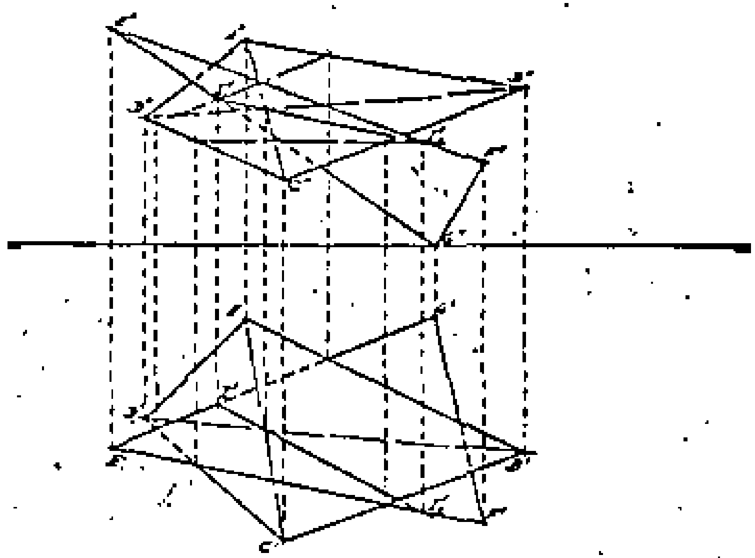


Fig. IV.3.5.

3o.—Aplicando el criterio conocido, se define la visibilidad de cada una de las dos proyecciones, mediante la observación de los puntos comunes de las dos figuras en cada una de sus proyecciones, y sus respectivas coordenadas (cota o alejamiento) en las otras proyecciones (las homólogas correspondientes).

4.—INTERSECCIONES CON LOS PLANOS BISECTORES. EJE DE HOMOLOGIA.

Si consideramos un plano cualquiera (π), definido por tres de sus puntos: A (9.1, 2.9, 2.1); B (13.9, 4.6, 6.1) y C (5.4, −1.3, 2.8), (Fig. IV.4.1), fácilmente pueden obtenerse dos de los puntos del plano que sean comunes con el segundo bisector, simplemente prolongando las proyecciones homólogas de dos cualesquiera de las rectas de (π),

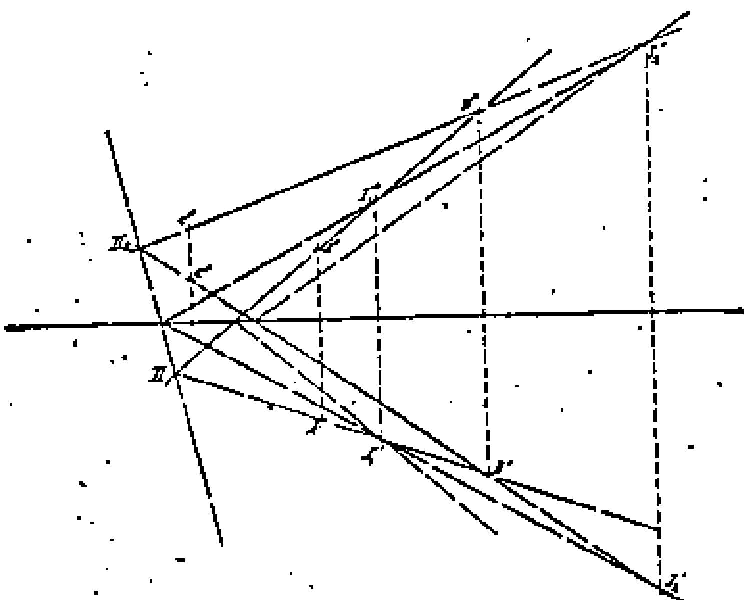


Fig. IV.4.1.

como por ejemplo las que pasan por (AB) y (BC), hasta obtener los respectivos puntos (II_1 y II_2) de coincidencia de sus proyecciones homólogas, y entonces queda definida la intersección entre los planos (π) y segundo bisector, que se designa como eje de homología de todas las rectas del plano dado, y corresponde al lugar geométrico de todos sus puntos de proyecciones homólogas coincidentes, por lo cual en él quedan situados los puntos de concurrencia de las dos proyecciones de las rectas contenidas en (π).

También resulta sencillo determinar la recta de intersección entre el mismo plano (π) y el primer bisector, mediante la obtención de dos puntos comunes, uno de cada recta, con el mencionado bisector, cuyas proyecciones deben ser simétricas respecto a la línea de tierra, y pueden ser obtenidas mediante el trazo de las líneas auxiliares ya utilizadas en la solución de problemas anteriores, simétricas a una de las proyecciones de cada recta, (A"B") y (B'C') por ejemplo, hasta su intersección con la proyección homóloga correspondiente, en I_1' e I_2'' y luego, mediante referencias localizando: I_1'' e I_2'.

Es claro que esta última recta de intersección: (I_1I_2), por estar formada por los puntos comunes de (π) y el primer bisector, debe corresponder a una recta que pasa por la línea de tierra (o por su prolongación) y, por lo tanto, ahí las proyecciones homólogas de uno de sus puntos se confunden.

El conocimiento del eje de homología que se acaba de definir, y a reserva de considerar posteriormente otro tipo de ejes de homología, puede representar ciertas ventajas en la solución de algunos problemas, como el que se muestra enseguida.

Ejemplo:—Completar las dos proyecciones del cuadrilátero plano: A (4.0, 5.0, 5.7), B (11.0, y_1, 3.4), C (6.0, y_2, 9.3), D (8.5, 4.4, z), tal que su plano se intersecta con el segundo bisector según la recta que pasa por II_1 (14.5, 5.0, −5.0) y II_2 (16.0, −6.7, 6.7).

Procedimiento: (Fig. IV.4.2).

1o.—Se prolonga la proyección vertical (A"B") hasta 1, sobre el eje de homología, para trazar enseguida la proyección horizontal (1A'), y localizar B' en la referencia que viene de B". De la misma manera, se prolonga (C"B") hasta 2, sobre el eje II_1II_2, para luego trazar (2B') prolongada hasta su intersección C' con la referencia que pasa por C".

2o.—La proyección horizontal (A'D') se prolonga hasta 3, sobre el eje, y luego se dibuja su proyección vertical (3A"), que determina D" donde se corta con la referencia de D'.

3o.—Se dibujan completas las proyecciones homólogas de los lados (AC), (CB), (BD) y (DA), del cuadrilátero.

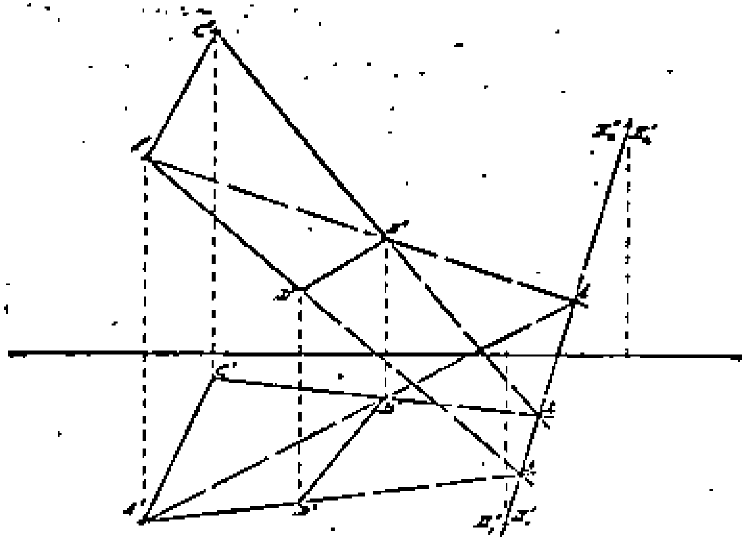


Fig. IV.4.2.

5.—EJERCICIOS. (Serie IV).

1.—Dados, el plano (π): (12.7, 3.9) 17.7 (12.7, 3.2), y una recta de máxima inclinación de (Δ): R(8.0, 5.8, 2.0), S(11.8, −2.7, 5.7), obtener la intersección entre ambos planos.

2.—Determinar la intersección entre los planos: (ε): (14.0, 4.3) 8.0 (8.0, 5.0), y (Ω): una de cuyas rectas de máxima pendiente pase por M(19.0, −0.9, 6.0) y N(19.0, −2.9, 1.4).

3.—Obtener la intersección entre el plano dado por la recta de máxima pendiente (RS): R(4.5, 4.0, 5.2), S(6.8, 1.2, 1.9), y el formado por las rectas (AB): A(9.7, 2.4, 2.0), B(15.5, 6.1, 5.5), y (BC): B(15.5, 6.1, 5.5), C(13.4, 3.5, 2.0).

4.—Determinar las proyecciones de la recta de intersección entre el plano que contiene los puntos: A(2.7, 2.7, 7.4), B(7.2, 3.6, 4.0) y C(10.0, 1.1, 5.6), y el que está definido por las rectas paralelas: D(11.3, 4.0, 2.7), E(16.8, 3.0, 7.5) y F(13.2, 7.2, 1.2), G(8.3, y, z).

5.—Obtener el punto de intersección I de la recta (AB): A(10.4, 2.5, 2.3), B(15.8, 4.1, 4.5), con el plano (Q) = (6.8, 3.5) 14.2 (6.8, 8.1), indicando su visibilidad.

6.—Dibujar en la montea las proyecciones de la recta de intersección entre el plano dado por los puntos: O(10.8, 1.7, 4.3), P(7.5, 1.0, 2.3), y Q(15.0, 7.9, 2.3), y el triángulo: A(3.2, 5.8, 7.4), B(9.5, 8.5 9.8), C(13.1, 1.9, 0.9), determinando las trazas del primer plano, y la visibilidad del triángulo.

7.—Indicar la visibilidad de los triángulos: A(5.0, 6.5, 1.3), B(9.8, 0.6, 5.9), C(16.4, 0, 2.6), y M(6.3, 1.2, 4.8), N(18.4, 0.9, 5.0), O(15.5, 6.3, 0.8), después de haber obtenido la intersección entre los planos que los contienen.

8.—Determinar la intersección del triángulo (EFG), con el cuadrilátero plano (ABCD), indicando la visibilidad en sus proyecciones, siendo: A(5.2, 5.6, 3.9), B(9.8, 2.5, 7.1), C(8.9, 8.4, 0), D(16.6, y, 3.4), E(5.2, 6.9, 0), F(13.8, 2.5, 7.4) y G(15.3, 8.2, 3.1).

9.—Determinar las intersecciones del plano dado por los segmentos concurrentes (AC) y (BC), con los planos bisectores, siendo: A(4.9, 5.2, 1.9), B(7.0, 0.3, 6.7) y C(10.5, 0.8, 3.4).

10.—Dados: el punto A y los puntos H_1(2.8, −5.0, 5.0) y H_2(4.3, 5.0, −5.0) del eje de homología del plano que lo contiene, completar las proyecciones del polígono formado por los puntos: A(8.1, 2.3, 2.0), B(11.2, y_1, 2.0), C(13.5, y_2, 5.2), D(10.0, y_3, 7.0), y E(6.1, y_4, 4.3).

11.—Trazar por P(14.0, 1.6, 2.8) una recta que corte a (CD): C(6.5, 1.8, 3.4), D(17.5, 7.1, 7.1), y a (AB): A(4.0, 1.2, 7.2), B(4.0, 6.0, 1.8).

12.—Datos: K(3.5, 9.0, 0), L(12.5, 0, 4.0), M(4.5, 1.3, 5.1), N(12.0, 7.0, 3.0) y O(10.2, 3.7, 1.1). Dibujar las dos proyecciones de una recta que, pasando por O, corte a las rectas (KL) y (MN).

V.—PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.

I.—PARALELISMO ENTRE RECTAS Y PLANOS.

a) **Rectas paralelas.**—Durante el estudio de la recta, al considerar las disposiciones relativas entre ellas, y de acuerdo con las definiciones establecidas por la Geometría clásica, ya se mencionó que "si dos o más rectas son paralelas, sus proyecciones homólogas correspondientes son paralelas".

La afirmación anterior, y su recíproca tienen validez aún para los casos especiales relativos a tipos particulares de rectas, como por ejemplo las de perfil, si se recuerda que, aunque en la mayoría de las veces la Geometría Descriptiva utiliza sólamente dos, son tres las proyecciones que definen completamente a un elemento geométrico cualquiera; y entonces, también en el caso excepcional mencionado de las rectas de perfil, su paralelismo puede quedar completamente definido si existe paralelismo entre las proyecciones de ellas en sólo dos de los planos del sistema de referencia, siempre que uno de ellos sea el tercer plano de proyección.

La definición de paralelismo entre dos rectas tiene aplicación inmediata al establecer como condición de paralelismo entre una recta cualquiera (r) y un plano dado (π), que en dicho plano exista alguna recta paralela a aquella. Es claro entonces que, considerando una recta y un plano paralelos, al existir en el plano otras rectas paralelas a la anterior, se puede determinar que (π) contiene una infinidad de rectas paralelas a (r).

También es fácil advertir que puede obtenerse una infinidad de planos paralelos a la recta (r), con sólo hacer pasar por otra recta cualquiera paralela a ella la multitud de planos, con diferente orientación, que son capaces de contener a ésta última.

Todo lo anteriormente anotado es clara advertencia de que la condición de paralelismo (entre dos rectas o entre una recta y un plano) no es, por sí sola, suficiente para que un problema quede completamente determinado, sino que es necesario contar con otros datos, como más adelante se verá.

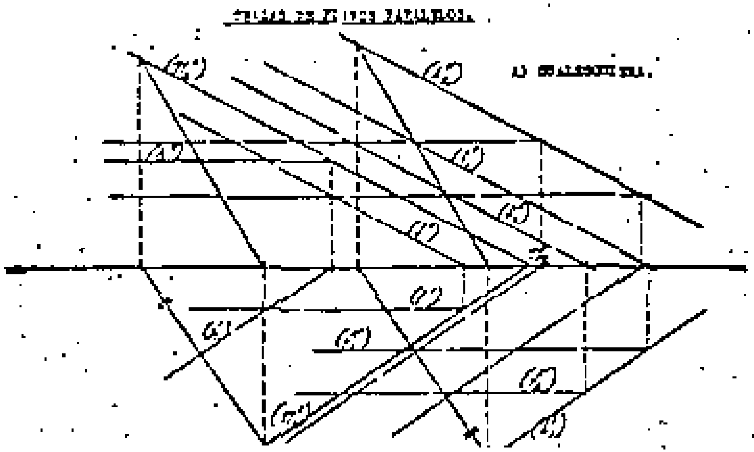
b) **Planos paralelos.**—De lo apuntado en el inciso anterior se puede concluir que, dos planos cualesquiera son paralelos si, y sólamente, si a toda recta contenida en uno de ellos corresponde una paralela contenida en el otro plano. Es decir que, para determinar el paralelismo

entre dos planos cualquiera, que pueden definirse cada uno por dos de sus rectas, **basta obtener en uno de los planos dos rectas concurrentes que sean paralelas respectivamente a otras dos rectas concurrentes contenidas en el otro plano,** ya que así se cumple seguramente la condición de paralelismo que se acaba de exponer.

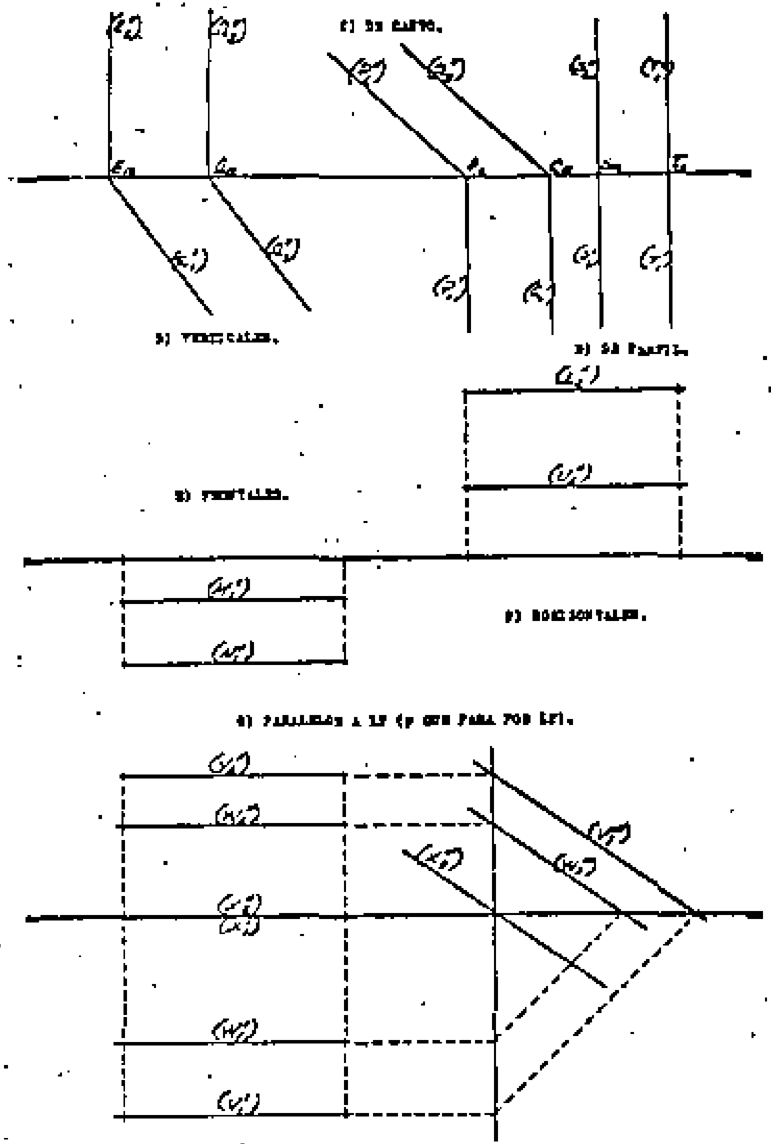
Por lo tanto resulta claro que dos planos dados son paralelos si **sus trazas en el mismo plano de referencia son paralelos,** siempre que ambas trazas de cada plano tengan entre sí un punto común. En la generalidad de los casos, según se ha visto ya, el punto común de las trazas de un plano se encuentra definido sobre la línea de tierra (o su prolongación), con excepción de los planos paralelos a LT (y los que pasan por LT), en cuyo caso es necesario observar tal concurrencia de sus mismas trazas, y el paralelismo con las del otro plano, en el tercer plano de referencia. Aún en los casos particulares de los planos frontal y horizontal, que sólamente tienen una traza en los planos de proyección, ésta debe ser paralela con la del otro plano del mismo tipo con el cual es paralelo el primer plano considerado.

También es de observarse que, al cumplirse todas las indicaciones anteriores, el paralelismo entre dos planos dados puede quedar también definido por el paralelismo entre sus rectas de máxima pendiente y/o de máxima inclinación.

Se concluye, por último, y puede observarse así en las Figs. V.1.1 que, cuando los planos dados son paralelos, también lo son las respectivas proyecciones correspondientes de todas sus rectas horizontales y frontales, y recíprocamente.



Figs. V.1.1.



Figs. V.1.1. (Continuación).

2.—PROBLEMAS DE PARALELISMO.

a) Recta paralela a un plano, que pase por un punto y una recta dados.—Considerando que los datos del problema se refieren a: (π) el plano, P el punto y (MN) el segmento de recta, la solución puede obtenerse, en general, mediante la aplicación de los tres pasos siguientes:

Primero.—Trazando por el punto P un plano auxiliar (Δ), paralelo al plano dado (π).

Segundo.—Obteniendo la intersección I de la recta que contiene al segmento dado (MN), con el plano auxiliar (Δ), y

Tercero.—Uniendo el punto P con I, queda resuelto el problema.

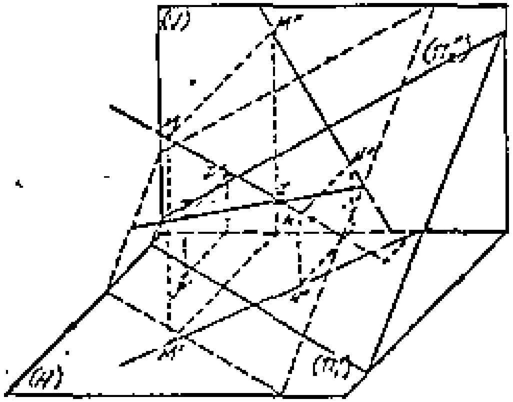


Fig. V.2.1.

Ejemplos:

Problema No. 1.—Por el punto P trazar una recta paralela al plano (π), dado por una de sus rectas de máxima pendiente, (RS), que además corte a la recta que pasa por M y N, siendo: P(11.1, 4.3,

1.4), R(14.0, 3.1, 0), S(17.0, 1.6, 6.3), M(6.4, 3.7, 3.5) y N(10.5, 2.8, 0).

Procedimiento: Fig. V.2.2).

1o.—Por la traza horizontal R' de (RS) se dibuja (π_1') normal a (R'V''), hasta π_{12}, que unido con V'' define (π_2''). Para trazar por P un plano auxiliar (Δ), paralelo a (π), se lleva la horizontal (h),

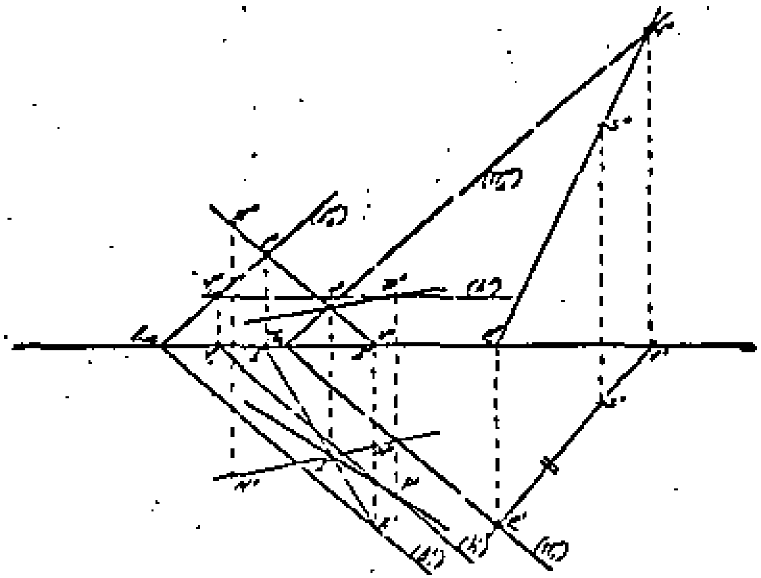


Fig. V.2.2.

de proyección vertical (h''), y cuya proyección horizontal (h') es paralela a (π_1'); por la traza V_1'' de esta horizontal se dibuja (Δ_2'') paralela a (π_2'') hasta Δ_{12}, donde empieza (Δ_1'), paralela a (π_1').

2o.—Utilizando el proyectante de canto de (MN), y mediante la recta que une los puntos 1′ y 2′, se obtiene I′, y luego por su referencia, sobre (M″N″) se localiza I″.

3o.—Trazando las dos proyecciones de (IP) queda resuelto el problema.

Problema No. 2.—Dadas las rectas paralelas: A(8.4, 0.8, 6.0), B(12.2, 2.9, 1.5) y C(7.5, 2.5, 2.7), D(15.3, y, z), el punto P(2.5, 3.5, 6.0) y el segmento M(5.0, 3.1, 3.6), N(11.0, 6.0, 5.4), trazar por P una recta que corte a la que pasa por (MN), y sea paralela al plano definido por (AB) y (CD).

Procedimiento: (Fig. V.2.3).

1o.—Como los tres puntos: A, B y C, definen el plano que los contiene, no es necesario obtener las proyecciones de D. Por P′ y P″ se trazan paralelas a las proyecciones horizontales y verticales de (AB)

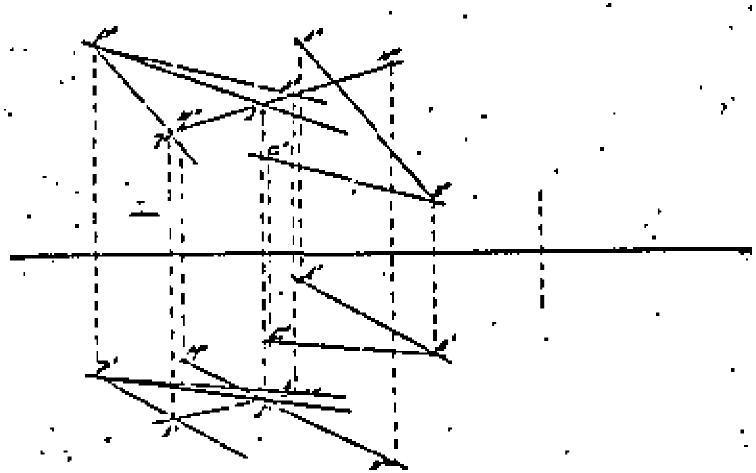


Fig. V.2.3.

y (BC), respectivamente, con lo cual queda definido el plano auxiliar, paralelo al dado, que contiene al punto P.

2o.—Se obtiene la intersección de (MN) con ese plano auxiliar, como se muestra en la figura, localizando 1″ y 2″; luego 1′ y 2′, para obtener I′ en la intersección de (1′ 2′) con (M′N′), y finalmente I″.

3o.—La solución está dada por la recta que contiene al segmento (PI), cuyas proyecciones homólogas, son: (P′I′) y (P″I″).

Problema No. 3.—Por el punto O, trazar una recta paralela al plano que pasa por LT y por el punto P, que corte a la recta que pasa por M y N, siendo: O(5.5, 3.8, 2.8), P(4.0, 2.4, 3.6), M(10.0, 0.8, 5.2) y N(7.5, 3.4, 0.9).

Procedimiento: (Fig. V.2.4).

Por sus datos, este problema puede resolverse utilizando la tercera proyección, como sigue:

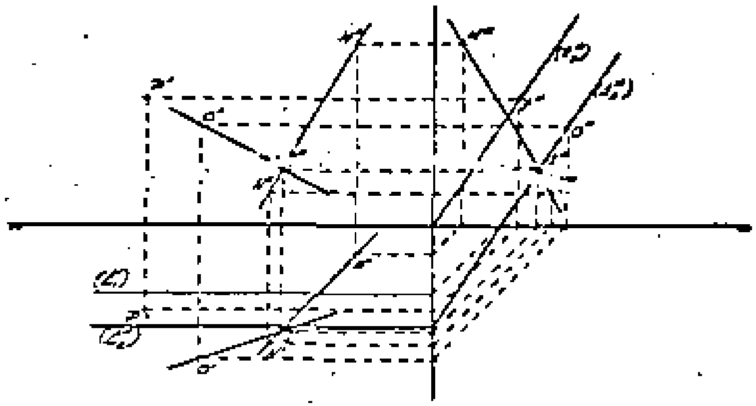


Fig. V.2.4

1o.—Dibujando las trazas de los planos paralelos: (•), que pasa por LT y contiene a P, y el auxiliar (Δ), que pasa por O.

2o.—Obteniendo la intersección I, entre el segmento (MN) y el plano (Δ), así como sus proyecciones correspondientes, mediante las referencias a partir de I‴.

3o.—La solución, correspondiendo a la recta que pasa por O e I, tiene como proyecciones: (O'I') y (O"I"), horizontal y vertical, respectivamente.

NOTA.—Debe observarse que, a pesar de que en los problemas anteriores los datos proporcionados conducen a la solución única que en cada ocasión se ha obtenido siguiendo el procedimiento ya mencionado (Fig. V.2.5), pueden existir ciertos casos excepcionales, de fácil identificación, como los siguientes:

— Si la recta dada (r) es paralela al plano (π), y no está contenida en el plano auxiliar (Δ), que pasa por P, no existe solución.

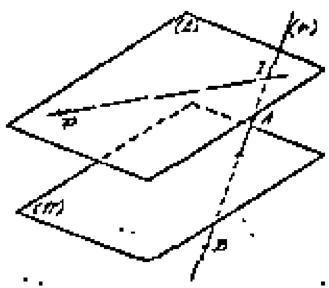


Fig. V.2.5.

— Si, como en el caso anterior, siendo (r), paralela a (π), está contenida en el plano (Δ), se tiene una infinidad de soluciones.

— Si el punto P está sobre (r), también es fácil advertir que puede tenerse una infinidad de soluciones.

b) Recta de dirección conocida, que corte a otras dos rectas dadas. En general, este tipo de problemas puede ser resuelto considerando que, dadas tres rectas: (l), (m) y (n), de las cuales la primera proporciona la dirección que debe tener la recta pedida, que también debe cortarse con las dos últimas; su disposición es tal que la solución es única, mediante los pasos siguientes:

1o.—Se construye un plano auxiliar (Δ), con la recta de dirección conocida y (m), una de las rectas dadas.

2o.—Se obtiene la intersección I, entre dicho plano auxiliar y la otra recta dada (n).

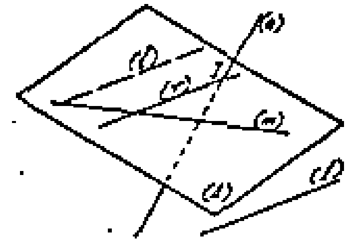


Fig. V.2.6.

3o.—Por I se dibuja la recta (r), paralela a (l), que cortando también a (m), es la solución del problema.

— Observación.—Es evidente que la disposición de los datos puede hacer que en problemas de este tipo se presenten algunos casos de excepción, como los siguientes:

1) Las rectas dadas, (m) y (n), se cortan, y (l) es paralela a alguna de ellas; no existe solución, porque sólo podrá cortarse a la otra.

2) Si (m) y (n) se cortan, y (l), no siendo paralela a alguna de ellas, se encuentra en un plano paralelo; se tiene una infinidad de soluciones, puesto que existe una infinidad de rectas paralelas a (l) que cortan a (m) y (n).

3) Si (m) y (n) son paralelas entre sí, pero no con (l), encontrándose esta última en un plano paralelo al determinado por las primeras; existe una infinidad de soluciones, pues cualquier recta paralela a (l) puede cortar a (m) y (n).

4) Si (m) y (n) son paralelas entre sí, y (l) no se encuentra en otro plano paralelo al que definen; no existe solución, pues sólo podrá

haber intersección entre una de las primeras y (l), pero no con la otra.

5) Si (l), (m) y (n) son paralelas; no existe solución, puesto que no pueden tener puntos comunes entre ellas.

Después de la observación anterior, se presentan ahora, como problemas de este tipo, de solución única, los siguientes.

Ejemplos:

Problema No. 1.—Determinar las proyecciones de la recta (r), paralela a (l) = A(4.0, 4.8, 0), B(10.5, 3.0, 5.5), que corte a (m) = C(7.2, 2.7, 3.6), D(15.8, 8.0, 2.6), y a (n) = F(6.5, 5.9, 7.4), G(14.3, −3.4, 1.8).

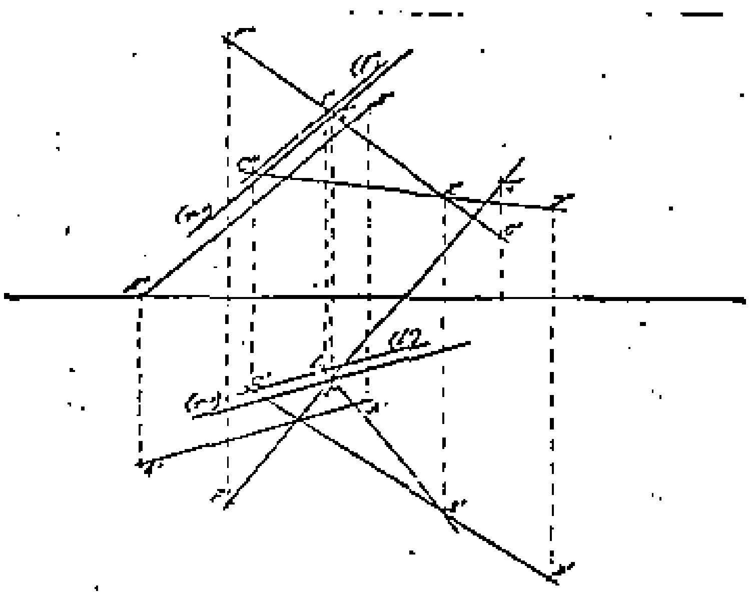


Fig. V.2.7.

Procedimiento: (Fig. V.2.7).

1o.—Trazando por C una paralela (l) a (AB), cuyas proyecciones (l') y (l") deben ser respectivamente paralelas a (A'B') y (A"B"), se

forma el plano auxiliar, que contiene también a (CD).

2o.—Se obtiene la intersección entre dicho plano y (FG), utilizando su proyectante de canto, localizando primero las proyecciones: 1" y 2", y 1' 2'; y después el punto de intersección (I', I"), como se ilustra en la figura.

3o.—La solución es la recta (r) = (r', r"), paralela a (l), que pasa por I, e intersecta a los segmentos dados: (CD) y (FG).

Problema No. 2.—Trazar una recta paralela a los planos (π): (2.5, 3.8) ∞ (2.5, 3.0), y (ε): (7.5, 2.7) 3.0 (7.5, 5.0), que se intersecte con las rectas que contienen los segmentos (MN) y (PQ), siendo: M(10.0, 4.5 2.0), N(14.3, 0.5, 4.3), P(11.0, 0.8, 1.3) y Q(16.5, 2.6, 3.8).

Procedimiento: (Fig. V.2.8).

1o.—Se obtiene la recta (I—II), común entre (π) y (ε); y trazando por N" una paralela a (I"II"), y por N' una paralela a (I'II'), se forma el plano auxiliar compuesto por (MN) y (I-II).

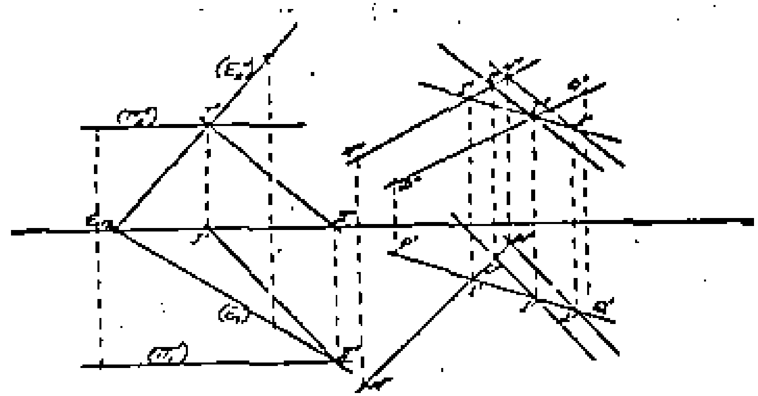


Fig. V.2.8.

2o.—Se encuentra la intersección (I', I") entre ese plano auxiliar y la otra recta (PQ), utilizando su proyectante vertical, que contiene los puntos (1', 1") y (2', 2"), obteniéndose dichas proyecciones en la forma indicada en la figura.

3o.—Por I″ se lleva una paralela a (I″II″), y por I′ otra paralela a (I′II′), que son las proyecciones de la recta buscada: paralela a (π) y (ε), y que corta a (MN) y (PQ), en (O′, O″) e (I′, I″) respectivamente.

3.—PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANOS.

a) **Rectas perpendiculares.**—La perpendicularidad entre dos rectas cualesquiera existe, según establece la Geometría Clásica, cuando ellas se intersectan formando ángulos rectos (de 90°), pero hace extensiva tal perpendicularidad al caso de que las rectas consideradas no se corten, sino que se crucen, siempre que al trazar una recta paralela a una de ellas, que se corte con la otra, se cumpla con la condición inicial, o sea que en su intersección se formen ángulos rectos. (Fig. V.3.1).

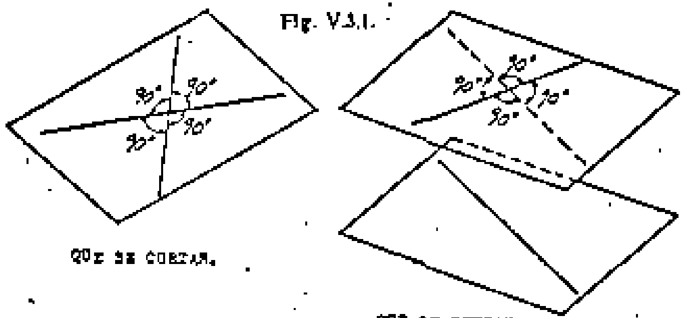


Fig. V.3.1.

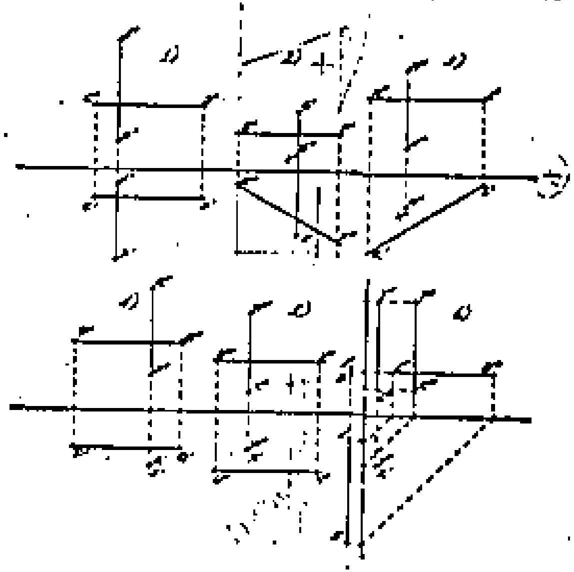
QUE SE CORTAN.

QUE SE CRUZAN.

Para realizar este estudio en general, la Geometría Descriptiva ha establecido ciertos procedimientos, sus llamados Métodos Especiales o Auxiliares, que serán analizados posteriormente, ya que tal condición de perpendicularidad no puede ser observada para todos los casos, utilizando sólo las monteas conocidas hasta ahora.

Sin embargo, para los tipos particulares de rectas conocidos, puede fácilmente observarse la existencia, en ciertos casos obligada

MONTEAS DE RECTAS DE PERPENDICULARIDAD OBLIGADA.



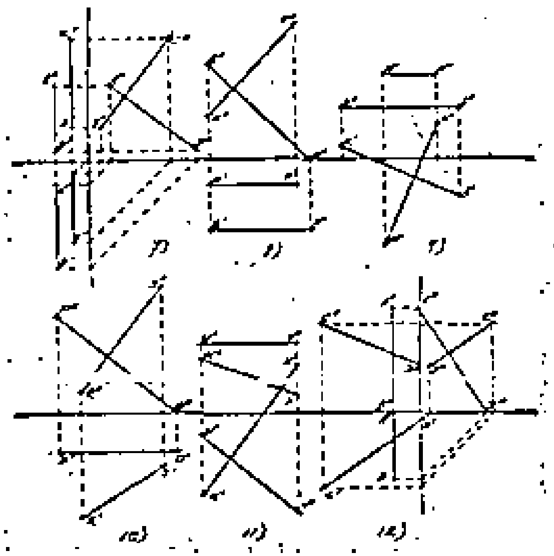
Figs. V.3.2.

(que siempre ocurre) y en otros ocasional (que puede ocurrir), de perpendicularidad entre dos rectas, mediante el simple análisis de sus proyecciones, como se muestra en seguida. (Figs. V.3.2).

Núm.	*Tipos de Rectas Comparadas*	*Perpendicularidad*	*Proyección Donde se Observa*
1	De perfil y Fronto-Horizontal.	Obligada.	Vertical y Horizontal.
2	Frontal y De Punta.	Obligada.	Horizontal.
3	Horizontal y Vertical.	Obligada.	Vertical.
4	Vertical y Fronto-Horizontal.	Obligada.	Vertical.
5	De Punta y Fronto-Horizontal.	Obligada.	Horizontal.
6	Vertical y De Punta.	Obligada.	Tercera Proyección.

Núm.	Tipos de Rectas Comparadas	Perpendicularidad	Proyección Donde se Observa
7	De perfil y De Perfil.	Ocasional.	Tercera Proyección.
8	Frontal y Frontal.	Ocasional.	Vertical.
9	Horizontal y Horizontal.	Ocasional.	Horizontal.
10	Cualquiera y Frontal.	Ocasional.	Vertical.
11	Cualquiera y Horizontal.	Ocasional.	Horizontal.
12	Cualquiera y de Perfil.	Ocasional.	Tercera Proyección.

MONTEAS DE RECTAS DE PERPENDICULARIDAD OCASIONAL.



Figs. V.3.2. (Continuación).

NOTA.—Es conveniente recalcar que, aunque es evidente que puede existir también perpendicularidad en el caso general de dos rectas cualesquiera, tal situación no puede analizarse por ahora, como ya se apuntó, sino que es motivo de aplicación de los Métodos Especiales (ó Auxiliares), que después, se estudiarán.

b) Planos perpendiculares.—Antes de realizar el estudio de la perpendicularidad entre dos planos cualesquiera, es necesario conocer la condición de:

Perpendicularidad entre una recta y un plano.—"Una recta cualquiera (r) es perpendicular a un plano dado cualquiera (ν), si, y sólamente, si éste último contiene dos rectas cualesquiera concurrentes, que sean perpendiculares a la primera", es un enunciado sencillo de la condición necesaria y suficiente para la existencia de la perpendicularidad entre una recta y un plano cualquiera, y no es difícil observar que puede ser consecuencia de una de las formas de generación de un plano, que antes se anotaron.

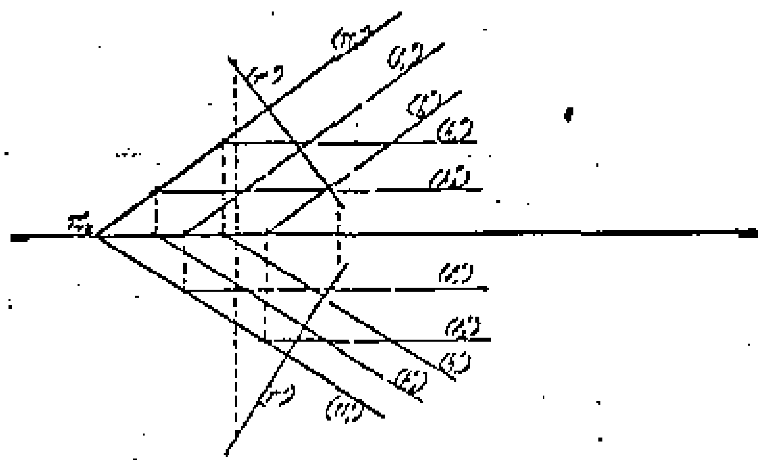


Fig. V.3.3.

Entonces, al observar la montea correspondiente a la condición anterior, debe tenerse que, al ser (r) perpendicular a (ν), lo es a todas las rectas contenidas en dicho plano, y distinguiendo entre ellas las frontales y horizontales, la proyección vertical (r") debe ser perpendicular a la proyección vertical de toda frontal del plano, y a su traza vertical (ν_1"); y por razón semejante, la proyección horizontal (r') de la recta resulta perpendicular a las mismas proyecciones de todas las horizontales del plano, y por lo tanto, a su traza horizontal (π_1'). Es decir, toda recta perpendicular a un plano dado cualquiera debe tener sus proyecciones respectivas normales a las trazas del plano, y a las de las rectas (frontales y horizontales) paralelas a éstas últimas. (Fig. V.3.3).

Problema.—Dibujar las trazas del plano (π), que es perpendicular a (l) = R(11.6, 0.8, 1.7), S(15.2, 5.2, 6.7), y contiene a los puntos: P(10.6, 2.6, 3.2) y Q(14.4, y, 1.7), obteniendo la proyección horizontal del último, y dibujando la recta (PQ).

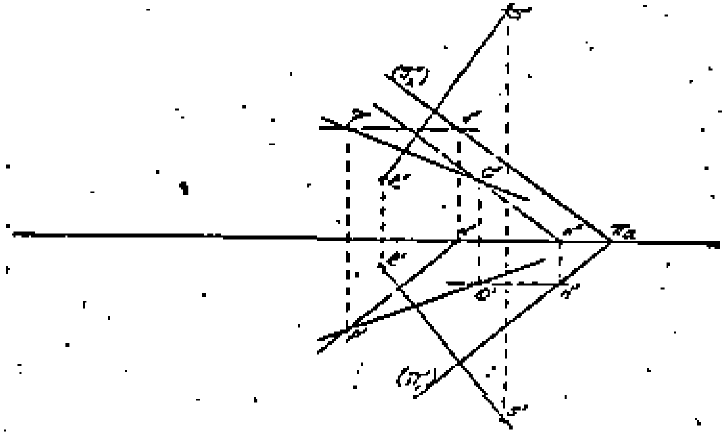


Fig. V.3.4.

Procedimiento: (Fig. V.3.4).

1o.—Por el punto P se dibuja una horizontal del plano, cuyas proyecciones homólogas son: (P"V"), paralela a LT, y (P'V'), normal a (l'), y tal que su traza vertical es (V', V"), con lo cual se puede dibujar (π_2'') normal a (l''), hasta π_{12}, sobre LT.

2o.—Por π_{12} y normal a (l'), se dibuja la otra traza (π_1') del plano, y dibujando por (Q") la proyección vertical de una frontal de (π), paralelamente a (π_2''), cuyo punto H' debe estar sobre (π_1'), su proyección horizontal, al ser paralela a LT, determina Q'.

Perpendicularidad entre dos planos.—Como ampliación del concepto de perpendicularidad entre una recta y un plano, se define la misma propiedad para dos planos, como sigue: "Un plano cualquiera (π) es perpendicular a otro plano cualquiera (Δ), si contiene cuando menos una recta (n) perpendicular a (Δ)".

Es evidente que la anterior condición de perpendicularidad de un plano (π) respecto a otro (Δ), no es suficiente para definirlo, puesto que por una misma normal (n) a (Δ) pueden concebirse una infinidad de planos normales a (Δ). Para definir completamente al plano (π) es necesario contar con otros datos, como otra de sus rectas, etc.

Problema.—Encontrar la intersección entre el plano (Δ), dado por su recta de máxima pendiente (AB): A(11.9, 2.0, 2.7), B(13.2, 3.9, −1.2), y su plano perpendicular (π), que contiene la recta (CD): C(3.2, 1.2, 3.5), D(8.6, 3.6, 5.9).

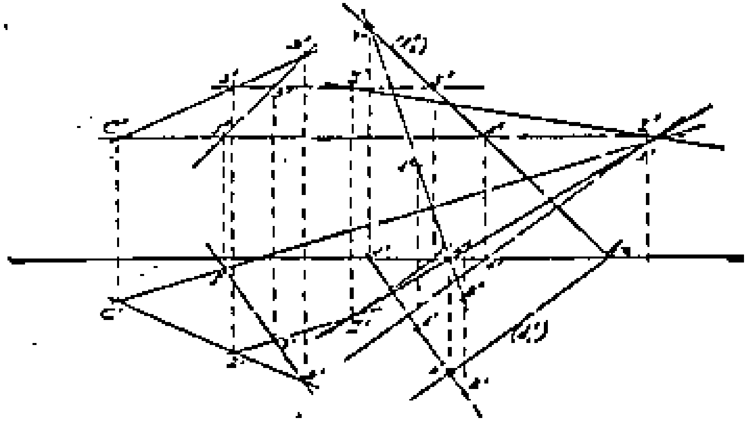


Fig. V.3.5.

Procedimiento: (Fig. V.3.5).

1o.—Se obtienen las trazas (H', H") y (V', V") de la recta de máxima pendiente, y de ellas las del plano: (Δ_1') y (Δ_2'').

2o.—Se forma el plano (π) con la recta (CD) y una normal a (Δ), que se hace pasar por D, perpendicularmente a las trazas.

3o.—Se determinan puntos comunes entre los dos planos, mediante las horizontales (C1) y (23), hasta definir los puntos I y II, por donde se dibuja la recta de intersección pedida.

NOTA.—Se ha podido observar en el problema anterior que la perpendicularidad entre dos planos considerados no se manifiesta entre sus trazas, lo cual es común cuando los planos en estudio son de tipo cualquiera; pero, tratándose de los tipos particulares conocidos, sí es posible, en ciertos casos, hacer el análisis de la perpendicularidad entre dos de ellos, atendiendo a sus trazas, como en los que se mencionan en el cuadro siguiente:

Tipos de Planos Comparados	*Perpendicularidad*	*Proyección Donde se observa*
De Perfil y Paralelo a LT.	Obligada.	Vert. y Horiz.
Horizontal y De Perfil.	Obligada.	Vertical.
Frontal y De Perfil.	Obligada.	Horizontal.
Frontal y Horizontal.	Obligada.	3a. Proyec.
De Canto y Frontal.	Obligada.	Horizontal.
Vertical y Horizontal.	Obligada.	Vertical.
Que Pasa por LT y Pasa por LT.	Ocasional.	3a. Proyec.
Paralelo a LT y Que Pasa por LT.	Ocasional.	3a. Proyec.
Paralelo a LT y Paralelo a LT.	Ocasional.	3a. Proyec.
De Canto y De Canto.	Ocasional.	Vertical.
Vertical y Vertical.	Ocasional.	Horizontal.

NOTA.—Aunque no puede ser observada en ninguno de los planos de referencia, siempre existe perpendicularidad (obligada) entre un plano de perfil y otro que pasa por LT, como es fácil comprender.

4.—PROBLEMAS DE PERPENDICULARIDAD.

a) Perpendicular común que corta a dos rectas dadas.—Excluyendo desde luego los casos de excepción (imposibilidad o indeterminación), que pueden presentarse al tratar de resolver un problema como el que se va a considerar, lo que depende desde luego de la disposición de los datos, la solución puede lograrse (cuando la excepción no ocurre) mediante el procedimiento general que consta de los siguientes pasos: (Fig. V.4.1).

1.—Trazando dos planos auxiliares (P) y (Q), cada uno respectivamente perpendicular a cada una de las rectas dadas (m) y (n), por puntos elegidos arbitrariamente.

2o.—Obteniendo la recta de intersección (I) entre los dos planos anteriores, que por ser común a ambos, corresponde a la dirección de la perpendicular común a las rectas dadas.

3o.—Dibujando una paralela (I_1) a la citada recta de intersección por un punto de una de las rectas dadas, queda determinado otro plano (R), que contiene a ambas.

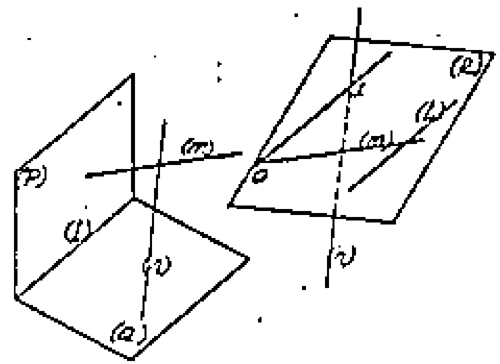


Fig. V.4.1.

4o.—Obteniendo el punto I de intersección de la otra recta dada (n) con el plano citado en el paso anterior, el problema queda resuelto al trazar por I una paralela a la recta de intersección obtenida en el 2o. paso, hasta su intersección O con la primera de las rectas dadas.

Ejemplos:

Problema No. 1.—Determinar las dos proyecciones de la perpendicular común, que corte a las rectas (m) y (n), tales que contienen los segmentos que en seguida se mencionan: (m) = A(9.1, 4.2, 3.8), B(14.0, 0.8, 1.8), y (n) = C(10.3, −0.5, 2.2), D(15.3, 3.0, 7,0).

Procedimiento: (Fig V.4.2).

1o.—Por un punto cualquiera de la montea se dibujan las trazas de los planos (P) y (Q), como sigue: (P_1') y (P_2'') perpendiculares a $(A'B')$ y $(A''B'')$, y (Q_1') y (Q_2'') normales a $(C'D')$ y $(C''D'')$, respectivamente, y se encuentran las proyecciones homólogas (l') y (l'') de la intersección entre ambos, que representa la dirección de la perpendicular común a las dos rectas dadas.

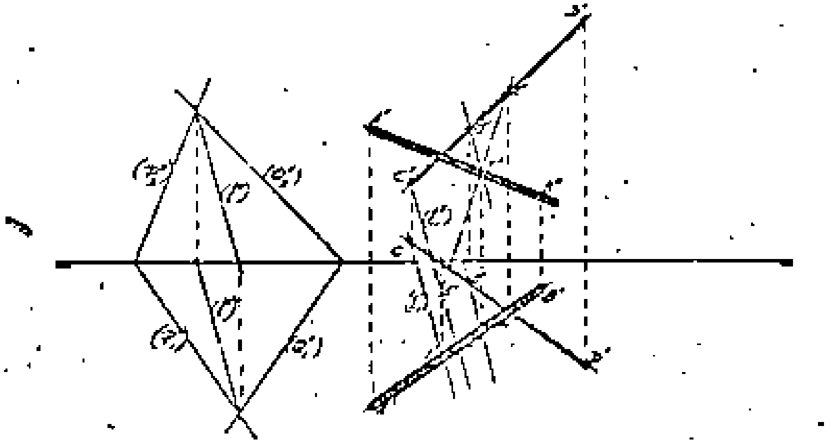


Fig. V.4.2.

2o.—Por C'' se lleva (l_1''), y por C', (l_1'), paralelamente a (l'') y (l'), formándose así un plano auxiliar (R) con la recta (n) = (CD), y (l_1).

3o.—Se obtiene la intersección I de (m) = (AB), con el plano (R), utilizando el proyectante vertical de (AB), que permite determinar primero los puntos $(1', 1'')$ y $(2', 2'')$, y luego I, de la manera ya conocida.

Dibujando por I una paralela a (l), hasta O, en sus dos proyecciones: $(I'O')$ y $(I''O'')$, queda resuelto el problema.

Problema No. 2. Trazar la perpendicular común a las rectas (r) y (s), que contienen los segmentos: (KL) = K(8.8, 4.2, 5.3), L(8.8, 1.4, 1.1), y (MN) = M(10.5, 2.4, 4.8), N(16.7, 3.3, 0.9), respectivamente, tal que se intersecte con ellas.

Procedimiento: (Fig. V.4.3).

1o.—Se dibujan los planos (P) y (Q), perpendiculares a (KL) y (MN), respectivamente, mediante sus trazas (P_1', P_2'') y (Q_1', Q_2''), como se muestra en la figura, utilizando la tercera proyección.

2o.—Se determina la recta de intersección entre dichos planos, de proyecciones homólogas (t') y (t''), que proporciona la dirección de la perpendicular común a (r) y (s).

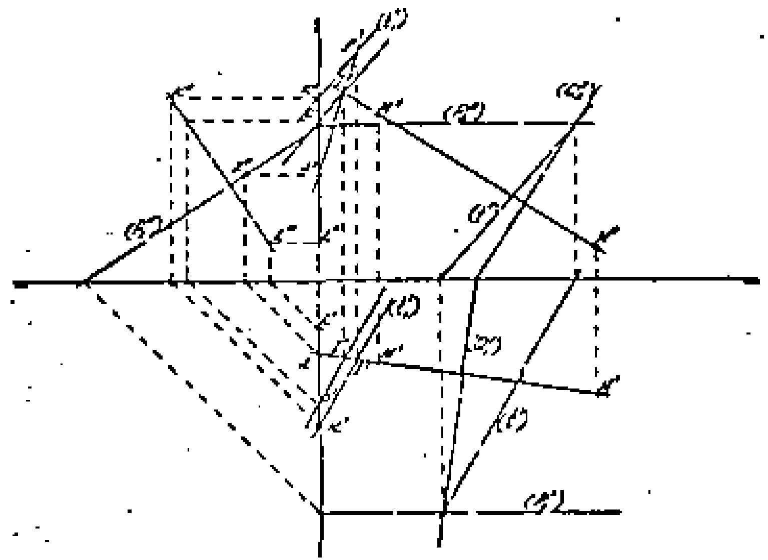


Fig. V.4.3.

3o.—Con (t_1', t_1''), paralela a (t', t''), y la recta (KL), se forma el plano auxiliar (R).

La intersección (I', I'') entre la recta (s) y el plano (R) se obtiene mediante el proceso indicado en la figura, utilizando el proyectante vertical de (s), empleando los puntos $(1', 1'')$ y $(2', 2'')$.

4o.—La solución se logra dibujando por I' una paralela a (t'), y por I'' una paralela a (t''), hasta O' y O'', respectivamente.

5.—EJERCICIOS. (Serie V).

1.—Por el punto O, dibujar una recta paralela al plano (ε), que corte a la recta (MN), siendo: O(5.9, 3.5, 6.9), M(16.0, 2.9, 6.9), N(11.4, 1.5, 2.9), (ε): (5.0, 3.8) 11.0 (5.0, 6.0).

2.—Por el punto O, trazar una recta paralela al plano (T), que corte a la recta (MN), siendo: O(10.9, 1.6, 3.8), M(4.0, 5.4, 5.5), N(9.9, 0, 1.9), y (T): (12.3, 5.4) ∞ (12.3, 7.6).

3.—Dibujar las dos proyecciones de una recta que pase por el punto A(15.2, 4.2, 8.4), sea paralela al plano dado por una de sus rectas de máxima inclinación: (RS) = R(8.4, 2.4, 5.5), S(13.5, 13.8, 0), y se intersecte con la recta que pasa por B(10.2, 3.8, 12.0) y C(18.4, −5.0, −2.2).

4.—Determinar la recta que, siendo paralela al plano del triángulo: A(5.5, 7.8, 5.5), B(14.8, 4.3, 8.5), C(11.2, 1.9, 2.0), corta a la recta (l) = M(3.5, 2.4, 11.8), N(9.5, 0.8, 1.2), y contiene al punto P(8.2, 2.8, 9.5).

5.—Trazar una recta (r), paralela a (l) = A(9.5, 2.2, 2.0), B(16.2, 4.7, 11.2), que corte a las rectas que contienen los segmentos: C(8.5, 7.5, 2.4), D(12.3, −1.1, 5.0), y E(10.8, 5.7, 10.0), F(17.4, 2.7, 5.2).

6.—Obtener una recta que sea paralela a los planos: (π), dado por una de sus rectas de máxima pendiente: M(8.0, −1.5, 7.5), N(11.3, 2.8, 1.8), y (Δ) = (9.0, 2.4) 5.0 (9.0, 4.2), y que además corte a las rectas que contienen los segmentos: P(10.0, 5.2, 3.5), Q(15.5, 1.3, 7.0), y S(14.5, 4.4, 1.8), T(20.5, 4.5, 3.8).

7.—Dado el plano (Q): (13.0, 3.9) 4.0 (13.0, 4.8), completar las proyecciones de sus puntos: A(8.2, y_1, 2.5) y B(13.0, 2.5, z_1). Determinar el punto C(5.0, y_2, z_2) que está sobre la normal a (Q) que pasa por A, para completar las proyecciones del triángulo rectángulo (ABC), y obtener las dos trazas del plano de dicho triángulo.

8.—Encontrar la intersección entre el plano (π), dado por una de sus rectas de máxima pendiente: M(4.0, 4.3, 7.5), N(9.5, 4.3, 2.2), y un plano perpendicular a él, que además contiene al segmento: A(8.1, 3.3, 5.6), B(14.8, 6.3, 8.0).

9.—Obtener la intersección entre los planos: (P), perpendicular a (KL): K(9.0, 5.6, 5.8), L(9.0, 1.5, 2.4), y (Q), normal a (MN): M(11.4, 5.2, 4.2), N(13.8, 9.0, 2.8), si contiene cada uno respectivamente los puntos: A(10.0, 3.0, 2.0) y B(15.3, −3.2, 5.0).

10.—Obtener las dos proyecciones de la perpendicular común que se intersecta con las rectas que contienen los segmentos: (m) = A(10.0, 5.0, 4.2), B(14.0, 1.2, 2.0), y (n) = C(9.2, −0.8, 3.2), D(15.5, 3.0, 7.0).

11.—Unir mediante una recta normal a ambas, a las rectas que contienen los segmentos: (r) = K(6.0, 2.0, 2.5), L(10.0, 4.5, 6.0) y (s) = M(11.4, 6.4, 5.9), N(11.4, 1.0, 3.2).

Capítulo III

METODOS ESPECIALES

VI.—CAMBIOS DE PLANOS.

1.—DESCRIPCION DEL METODO.

El Método Auxiliar de los **Cambios de Planos (o Substitución de los Planos de Referencia)** es utilizado en Geometría Descriptiva, a semejanza de la Substitución de Ejes que emplea la Geometría Analítica, para poder apreciar con facilidad, sólo que gráficamente, alguna propiedad o característica (generalmente magnitudes reales de distancias o ángulos) de un elemento geométrico que ya se encuentra definido respecto al sistema inicial de referencia, sin que tal elemento se mueva, sino por el contrario, cambiando sucesivamente cada uno de los planos de proyección, para obtener proyecciones diferentes a las iniciales del mismo elemento considerado.

Los Cambios de Planos, como se acaba de apuntar en el párrafo anterior, se efectúan sucesiva y alternativamente, y no pueden realizarse simultáneamente; es decir, durante su aplicación se procede primero a substituir uno de los dos planos usuales del sistema de referencia, y después el otro, y no es posible cambiar al mismo tiempo ambos, según puede observarse con claridad en la explicación que sigue: (Fig. VI.1.1).

— El cambio del plano vertical se realiza substituyendo la Línea de Tierra inicial (LT) por otra L_1T_1 de dirección cualquiera, oblicua respecto a aquella. La proyección horizontal (P') de un punto P del espacio, no se altera, pero al trazar por el mismo punto P' su referencia normal a la nueva L_1T_1, su alejamiento (y) necesariamente cambia a (y_1), no así su cota (z), que conserva su mismo valor inicial, llevado sobre la nueva referencia, a partir de L_1T_1, para determinar la nueva proyección vertical (P_1") del mismo punto P.

— El cambio del plano horizontal, por el contrario, produce cambios en la proyección horizontal (Q') a (Q_1') del punto Q, y en el valor inicial (z) de su cota respectiva, a (z_1); pero conserva la misma proyección vertical (Q") y el mismo valor de su alejamiento

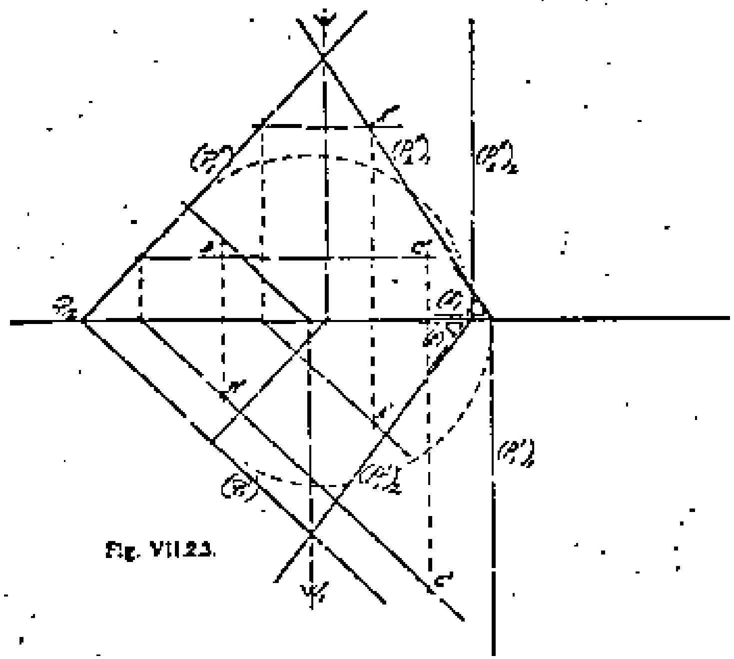


Fig. VII.2.3.

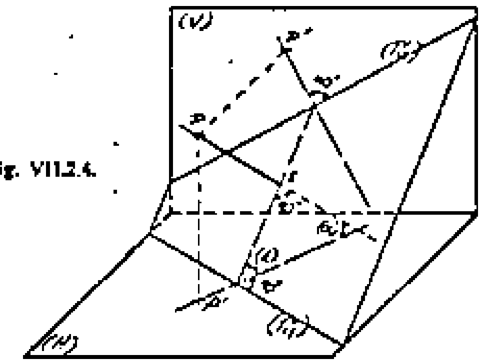
También puede observarse e indicarse en un cuadro, que los valores de los ángulos (A) y (B), que un plano dado puede formar con el horizontal y con el vertical de referencia, considerando la posición relativa del primero respecto a los segundos, son:

Tipo de Plano	(A)	(B)	(A + B)
Que pasa por LT.	0 < (A) < 90°	0 < (B) < 90°	90°
Paralelo a LT.	0 < (A) < 90°	0 < (B) < 90°	90°
Horizontal.	0	90°	90°
Frontal.	90°	0	90°
De Perfil.	90°	90°	180°
De Canto.	0 < (A) < 90°	90°	90° < (A + B) < 180°
Vertical.	90°	0 < (B) < 90°	90° < (A + B) < 180°
Cualquiera.	0 < (A) < 90°	0 < (B) < 90°	90° < (A + B) < 180°

cuyo conocimiento puede ser de utilidad en la solución de problemas de tipo recíproco del anterior, como el que se va a tratar en seguida.

c) **Trazas de un plano, dados los ángulos que forma con los planos de referencia.**—Como puede observarse fácilmente que el ángulo (A), formado por un plano dado cualquiera (π) con uno de los planos de proyección (H), es el complemento del (α) que se presen-

Fig. VII.2.4.



ta entre su normal y el mismo plano de proyección (Fig. VII.2.4), la solución a este problema que se está considerando puede lograrse obteniendo primero las dos proyecciones de la normal al plano, mediante los ángulos complementarios de los que el plano forma con los respectivos de referencia, y siguiendo el procedimiento indicado en el problema ilustrativo del inciso a) inmediato anterior (pág. 126), y después trazando normalmente a dichas proyecciones las trazas correspondientes del plano buscado, que puede quedar completamente determinado cuando además se conoce, por ejemplo, uno de los puntos que contiene.

Ejemplo.—Determinar las trazas del plano que contiene al punto Q(14.5, 4.8, 3.2), y forma con los planos horizontal y vertical de referencia, los ángulos (A) = 53° y (B) = 62°, respectivamente.

Procedimiento: (Fig. VII.2.5).

1o.—Por un punto cualquiera O, elegido arbitrariamente, se obtienen las dos proyecciones homólogas (O'P') y (O"P") de un segmento (OP) de la normal al plano buscado, que debe formar los ángulos (α) = 90° − 53° = 37°, y (β) = 90° − 62° = 28°, según el procedimiento ya conocido.

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO: GEOMETRIA DESCRIPTIVA SEPTIEMBRE-OCTUBRE 1982.

1.- Ing. Raúl Amor Berea
Director Técnico
Inmobiliaria Villa Las Manzanas, S.A.
Centro Comercial Plaza Las Flores, S.A.
Insurgentes Sur 92 - 1° Piso
México, D.F.
533 20 30

2.- Prof. Arturo V. Aguilar Cuevas
Subcoordinador de Dibujo
División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
UNAM
Coyoacán
04510 México, D.F.
550 52 15 Ext. 4606

3.- Ing. Joaquín Gutiérrez Guerra (Coordinador)
Coordinador de Dibujo Depto. de Metodología y Lenguajes
División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
UNAM
Coyoacán
04510 México, D.F.
550 52 15 Ext. 4606

4.- Ing. Daniel Serrano Mothelet
Auditor Técnico
Constructora CEDA, S.A. DE C.V.
Río Mixcoac No. 234
Col. Acacias
México, D.F.
595 10 06 (Casa)

5.- Ing. Ernesto Coloma Pastor

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

			septiembre
Presentación		40	Lunes 20
1. Origen y concepto de la geometría descriptiva	Ing. Raúl Amor Berea	30	Lunes 20
2. Concepto de proyección y sus elementos			
a) Elementos que dan origen a una proyección			
b) Proyección cilíndrica y proyección cónica			
c) Proyección cilíndrica ortogonal	Prof. Arturo V. Aguilar C.	50	Lunes 20
3. Marco de referencia, el punto sus proyecciones y propiedades.			
a) Ubicación del punto en el espacio			
b) Sistemas nomoédrico, diédrico. Sus convenciones y propiedades: abatimiento de planos.	Prof. Arturo V. Aguilar C.	120	Martes 21
4. La recta			
a) Su posición con respecto a los planos principales de proyecciones y sus características	Ing. Daniel Serrano M.	60	Miérc. 22
Ejercicios	Ing. Raúl Amor Berea	60	Miérc. 22
b) Magnitudes reales. Giros y cambios de planos	Ing. Daniel Serrano M.	90	Jueves 23
Ejercicios	Ing. Raúl Amor Berea	30	Jueves 23
c) Su intersección con los planos principales de proyección. Trazas		20	Viernes 24
d) Sus ángulos con los planos principales de proyección		20	Viernes 24
e) Mínima distancia entre un punto y una recta	Ing. Daniel Serrano M.	30	Viernes 24
Ejercicios	Ing. Raúl Amor Berea	50	Viernes 24
f) Rectas que se cruzan, distancia mínima entre ellas.		30	Lunes 27
g) Rectas que se intersecan y ángulo que forman entre sí	Ing. Daniel Serrano M.	30	Lunes 27
Ejercicios	Ing. Raúl Amor Berea	60	Lunes 27
5. Plano			
a) Plano definido por tres puntos, por un punto y una recta y por dos rectas: paralelas; o que se cortan	Ing. Daniel Serrano M.	20	Martes 28
* Plano definido por sus trazas	Prof. Arturo V. Aguilar C.	15	Martes 28
b) Posición de un plano respecto a los planos principales de proyección, sus trazas	Ing. Daniel Serrano M.	20	Martes 28
c) Rectas que contiene un plano	Ing. Daniel Serrano M.	30	Martes 28
Ejercicios	Ing. Raúl Amor Berea	35	Martes 28
d) Magnitudes reales de planos, abatimientos	Ing. Daniel Serrano M.	30	Miérc. 29

e) Paralelismo, perpendicularidad, intersección y ángulo entre una recta y un plano	Ing. Daniel Serrano M.	90	Miérc. 29
f) Intersección de dos planos. Angulo que forman entre sí y que forman con los p.p.p.	Ing. Daniel Serrano M.	40	Jueves 30
Ejercicios	Ing. Raúl Amor Berea	80	Jueves 30
6. Intersecciones y desarrollos			octubre
a) Concepto de generatriz, directriz, eje de revolución, superficie de revolución.	Ing. Ernesto Coloma Pastor	30	Viernes 1
b) Intersección de superficie con sólidos	Ing. Ernesto Coloma Pastor	90	Viernes 1
c) Intersecciones entre sólidos	Ing. Ernesto Coloma Pastor	120	Lunes 4
d) Desarrolos de cuerpos geométricos y piezas de transición.	Ing. Ernesto Coloma Pastor	120	Martes 5

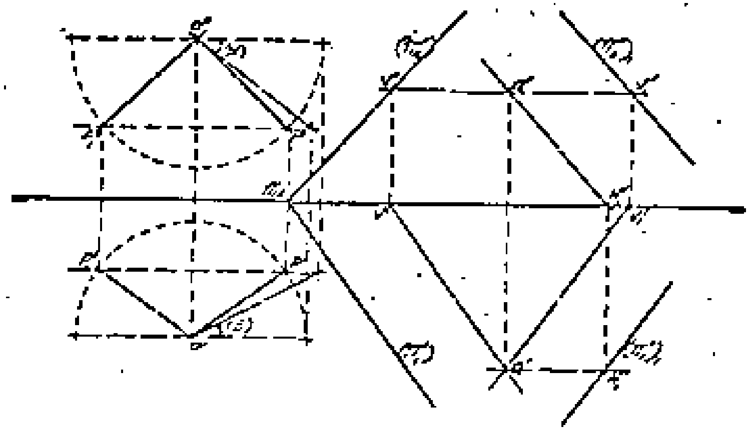


Fig. VII.2.5.

2o.—A partir de las proyecciones del punto dado Q se trazan las proyecciones, vertical y horizontal, de una recta horizontal del plano buscado, dibujándolas por Q″ paralela a LT y normalmente a (O′P′) por Q′, para obtener su traza vertical (V′, V″), de manera que (π_2″) se dibuja por V″ normal a (O″P″), hasta π_{12} sobre LT, de donde se traza (π_1′) paralelamente a la proyección horizontal de la recta horizontal antes dibujada, con lo cual el problema queda resuelto al quedar definido el plano (π) de acuerdo con los datos conocidos.

Se anota además, en la montea, el plano: [(π_1′)$_1$, (π_2″)$_1$], que representa la otra de las dos soluciones de este problema, según la dirección que se quiera tomar para la normal a (π), de las que se obtienen en el primer paso del procedimiento indicado, como también se muestra en la misma montea.

Nota.—Desde luego que igualmente debe haberse observado que el problema de la obtención de las trazas de un plano, dando sólo los valores de los ángulos que el plano forma con los de proyección, es indeterminado, ya que puede tener una infinidad de soluciones, que corresponden a toda una familia de planos paralelos, de la misma inclinación respecto al sistema de referencia, dada por la misma normal común a todos los planos de aquella. Sin embargo, como se ha visto en el ejemplo resuelto, otro dato (como uno de sus puntos) es, en general, suficiente para que el plano buscado quede determinado.

3.—EJERCICIOS. (Serie VII).

1.—Indicar en la montea los ángulos (α) y (β) que el segmento (AB) forma con los planos horizontal y vertical de referencia, siendo: A(5.1, 4.0, 1.9), y B(12.3, 0.7, −2.3).

2.—Obtener los valores de los ángulos (α) y (β) que el segmento M(10.5, −2.2, −6.8), N(14.8, −3.3, −2.2), forma con los planos de proyección del sistema.

3.—Dados: O(7.2, 6.8, 5.3), (α) = 35° y (β) = 50°, obtener las dos proyecciones de la recta (OQ), que forma los ángulos (α) y (β) con los planos horizontal y vertical de proyección, respectivamente, cuando Q(8.6, y, z).

4.—Determinar las dos proyecciones de los segmentos (AB) y (BC), tales que forman ángulos de 20° y 60°, y de 30° y 45°, con los planos horizontal y vertical, respectivamente, cada uno de ellos, siendo: A(5.4, y_1, z_1), B(9.0, 4.5, 5.9), y C(13.3, y_2, z_2).

5.—Mostrar en la montea los valores de los ángulos (A) y (B) que el plano (Q) forma con los de proyección, si una de sus rectas de máxima pendiente pasa por los puntos R(11.0, 1.5, 6.5) y S(13.2, 4.3, 0).

6.—Indicar los ángulos que forma con los planos de proyección el plano (Δ), que pasa por los puntos: A(7.6, 3.0, 2.0), B(10.0, 2.0, 6.0) y C(12.4, 3.5, 3.5).

7.—Dibujar en la montea las trazas del plano (τ), que forma ángulos: (A) = 70° y (B) = 50°, con el horizontal y con el vertical de proyección, respectivamente, si además se sabe que dicho plano contiene al punto Q(9.2, 2.2, 4.0).

VIII.—ABATIMIENTOS.

I.—DESCRIPCION DEL METODO.

a) **Explicaciones.**—El Método de Abatimientos, al igual que los Métodos antes descritos(Cambios de Planos y Rotaciones o Giros), se utiliza para resolver problemas que involucran magnitudes reales (longitudes y ángulos) y posiciones relativas, y también como ellos, su operación se realiza mediante la presentación de los elementos geométricos que intervienen, de manera que resulten situados en planos paralelos (o coincidentes) con alguno de los del sistema de referencia.

Sin embargo, y a pesar de que utiliza en cierta forma los procedimientos presentados por los Métodos antes señalados, como se verá en seguida, su aplicación es más amplia precisamente por la generalidad mayor de su procedimiento, que le permite ser empleado con facilidad en varios tipos de problemas.

Como el proceso fundamental de este Método consiste en efectuar la rotación de un plano (abatimiento) alrededor de una de sus rectas (charnela) previamente elegida, hasta conseguir que el plano, y con él los elementos geométricos que contiene, esté completamente abatido, o sea paralelo o coincidente con uno de los planos de referencia, es evidente que para realizar el abatimiento de un plano dado cualquiera, necesariamente debe elegirse como charnela una recta horizontal o frontal del plano, que puede ser, incluso, una de sus trazas.

Antes de efectuar un abatimiento para la resolución de un problema, es conveniente analizar el movimiento, durante el proceso, de un punto cualquiera P del plano dado (π), considerando que:

— Cuando se elige como charnela la traza horizontal (π_1) del plano, deben observarse los siguientes puntos importantes:

1o.).—El punto P se mueve siguiendo una trayectoria circular contenida en un plano perpendicular a la charnela, tal que su proyección en el plano horizontal queda confundida en la recta (P_0P'), normal a (π_1), sobre cuya normal forzosamente debe encontrarse la posición abatida P_0 del punto P (Fig. VIII.1.1).

2o.).—El radio de la trayectoria circular de P, debido a la rotación de (π) alrededor de la charnela (π_1) o eje de rotación, puede

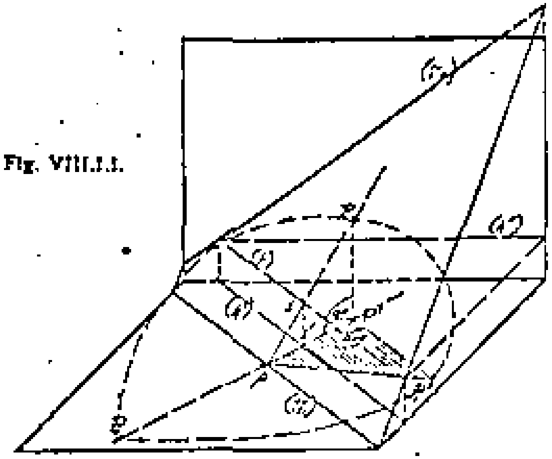


Fig. VIII.1.1.

determinarse observando (como en un Cambio de Planos) el triángulo rectángulo ($pP'P_1''$), llamado triángulo de abatimiento del punto P, donde sus catetos: ($P'P_1''$) y (pP') son respectivamente la cota de P y la distancia perpendicular de la charnela a su proyección en el plano de abatimiento, y la hipotenusa (pP_1'') es el radio de abatimiento de P, o sea el radio de la trayectoria de P durante el abatimiento, y corresponde a la distancia entre la charnela y la posición abatida P_0 del punto P.

Si se hubiera elegido como charnela una horizontal cualquiera del plano, como (h) por ejemplo, el plano de abatimiento sería el horizontal que contiene a (h), y en el triángulo de abatimiento se tendría para sus catetos, los siguientes valores: $(z_1 - z_h)$, igual a la diferencia de cotas, y ($I'I'$), distancia perpendicular de P' a la proyección horizontal (h') de la charnela.

De manera semejante se puede describir el proceso de un abatimiento efectuado en un plano vertical que, desde luego, puede ser el que forma parte del sistema de referencia.

Es costumbre mencionar, por todo lo anteriormente descrito, que para efectuar correctamente el abatimiento de un punto, debe lograrse primero la construcción correcta de su triángulo de abatimiento.

Puede notarse también ahora, con toda claridad que, en rigor, un abatimiento no es más que una rotación o giro, sólo que presenta un aspecto más amplio, ya que se realiza alrededor de un eje (la charnela) que no es necesariamente una recta de punta o vertical, y además el movimiento se realiza con suma facilidad, arrastrando a todos los puntos del plano considerado, con excepción de los que se encuentran en la charnela, ya que siendo el eje de rotación, es la única de las rectas del plano que permanece fija, por lo cual todos sus puntos, al no moverse, siguen conservando su misma posición inicial después del abatimiento.

El procedimiento utilizado por el Método de Abatimientos, que se acaba de explicar mediante la perspectiva convencional de la Fig. VIII.1.1, aplicado a las monteas correspondientes, se va a tratar ahora en los siguientes:

b) Ejemplos:

Problema No. 1.—Determinar las posiciones abatidas sobre cada uno de los planos de proyección de las trazas del plano (π): (13.8, 5.0) 9.5. (13.8, 6.8).

Procedimiento: (Fig. VIII.1.2).

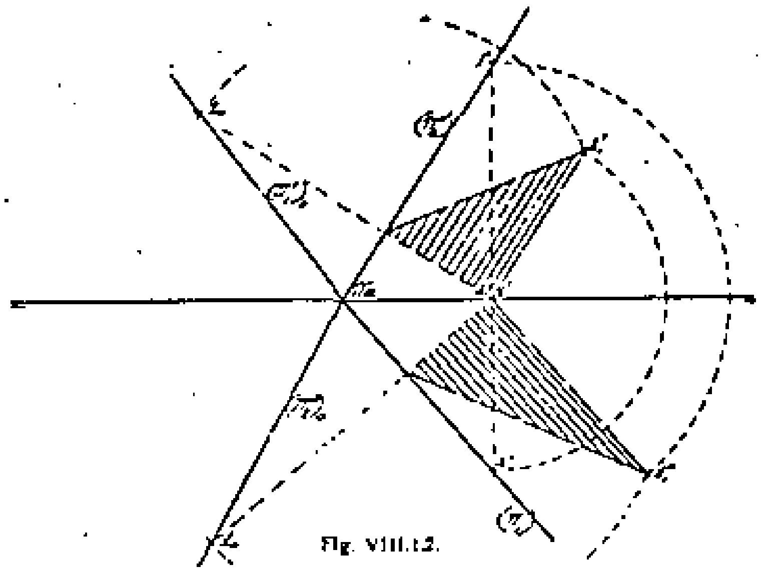


Fig. VIII.1.2.

1o.—Tomando como charnela la traza (π_1'), para abatir la otra traza (π_2'') sobre el plano horizontal, se toma uno cualquiera de sus puntos $(1', 1'')$, dibujando la proyección de su trayectoria normalmente a (π_1'), desde $1'$; se construye su triángulo de abatimiento, y en seguida se obtiene la posición abatida (1_0), como se indica en la figura. La traza vertical abatida se dibuja uniendo el punto π_{12}, que ha permanecido fijo, puesto que pertenece a la charnela, con la posición abatida (1_0).

2o.—Independientemente del paso anterior, utilizando como charnela la traza vertical (π_2'') para abatir la otra traza (π_1') sobre el vertical de referencia, se marcan las proyecciones $(2', 2'')$ de uno de sus puntos, dibujando su trayectoria de abatimiento normalmente a (π_2''), a partir de $2''$, y luego su triángulo de abatimiento, con cuya hipotenusa (radio de abatimiento) se obtiene la posición abatida $(\pi_1')_0$ al unirse π_{12} y 2_0, como se indica en la montea.

Problema No. 2.—Abatir sobre el plano horizontal el triángulo A(2.9, 3.3, 1.7), B(7.2, 0, 5.0), C(8.6, 3.2, 0).

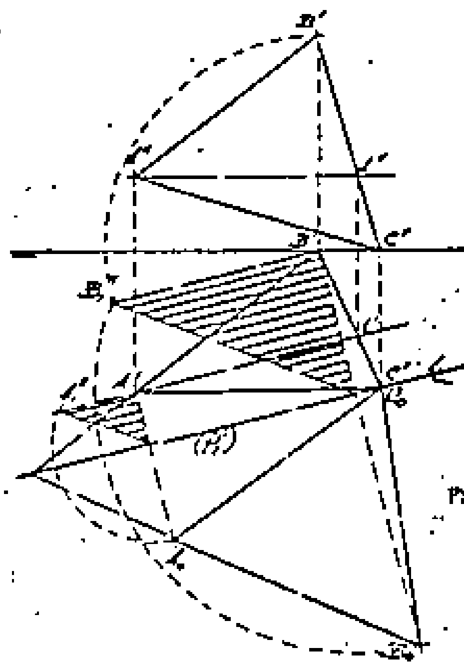


Fig. VIII.1.3.

Procedimiento: (Fig. VIII.1.3).

1o.—Se obtiene la traza horizontal (P_1'), dibujándola por C′ paralelamente a la proyección $(A'1')$ de la recta horizontal (A1), y tomando dicha traza como charnela, se dibujan perpendicularmente a ella las proyecciones de las trayectorias de A y B, a partir de A′ y B′, respectivamente.

2o.—Llevando paralelas a la charnela (W), también por A′ y B′, con catetos iguales a las cotas $(z_A = 1.7,\ z_B = 5.0)$ de A y B, y los otros catetos respectivos iguales a las distancias de la proyección horizontal de cada punto (A′ y B′) a la charnela, se construyen los triángulos de abatimiento correspondientes de los puntos considerados.

3o.—Uniendo los puntos abatidos A_0 y B_0 con $C' = C_0$ (que no se movió por ser un punto de la charnela), queda el triángulo mostrando la verdadera magnitud de sus lados y de sus ángulos.

Nota.—Debe observarse que pudieron haberse evitado los trazos relativos a la construcción del triángulo de abatimiento del punto A, mediante la prolongación de (A′B′) hasta la charnela y después uniendo el punto de su intersección con ésta con el punto abatido B_0, como se indica en la figura.

Problema No. 3.—Dadas las posiciones abatidas de los vértices de un triángulo: A_0(5.2, 1.4, 0), B_0(8.4, 6.1, 0) y C_0(4.2, 6.1, 0), y también abatidas las trazas: (12.5, 5.0) 3.2 (3.2, 9.0 − y) del plano (Δ) que lo contiene, obtener las proyecciones horizontal y vertical de dicho triángulo, deshaciendo el abatimiento.

Procedimiento: (Fig. VIII.1.4).

1o.—Como en general, para deshacer un abatimiento se tiene que invertir el procedimiento ya conocido, al tener en este problema todos los datos abatidos en el plano horizontal, se puede simplificar todo el proceso considerando, como charnela la traza horizontal (Δ_1'), y dibujando las rectas auxiliares $(2_0 1')$ y $(B_0 3')$, que contienen las posiciones abatidas A_0, B_0 y C_0, y además los puntos $1'$ y $3'$ sobre la charnela, y 2_0 sobre la traza vertical abatida de (Δ), dibujándose también las proyecciones de las trayectorias de los vértices, y de 2_0, normalmente a la charnela.

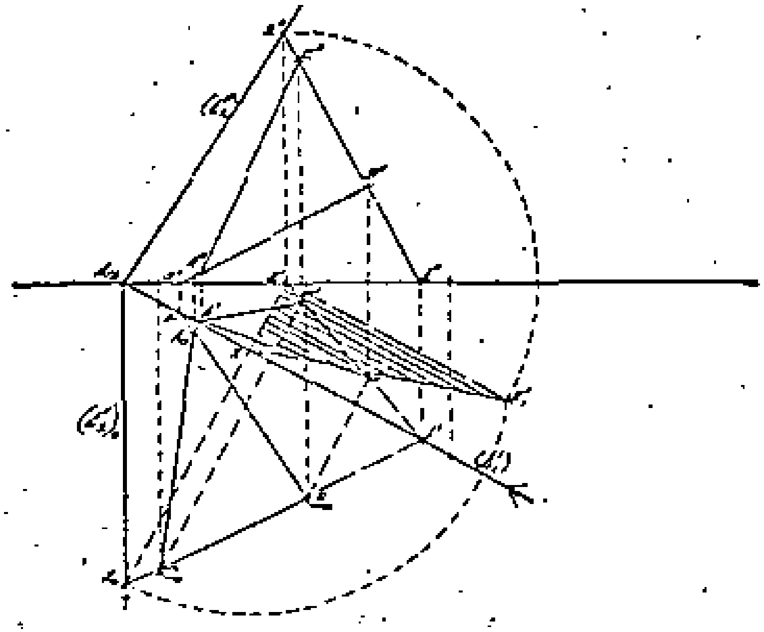


Fig. VIII.1.4.

2o.—Como 2_o es la posición abatida de un punto 2 de la traza vertical, su proyección 2′ debe quedar en LT, y al construir su triángulo de abatimiento con hipotenusa igual al radio de abatimiento $(2 - 2_o)$, inmediatamente se obtiene la magnitud (2′2″) de la cota de ese punto de (Δ_2''), la cual entonces puede trazarse uniendo la proyección 2″ obtenida, con el vértice Δ_{12}.

3o.—Trazando las referencias, se puede dibujar la proyección (1′2′) que, al cortar las trayectorias correspondientes, determina B′ y C′, y luego B″ y C″ mediante sus referencias llevadas hasta (2″1″).

4o.—Encontrando 3″, también por referencia de 3′, se pueden obtener las proyecciones (3′B′) y (3″B″), que definen primero A′, donde se corta la primera con la trayectoria de A_o, y luego refirién-

dola se determina A″, con lo cual quedan completas las proyecciones solicitadas del triángulo (ABC).

Problema No. 4.—Efectuar el abatimiento de los puntos: A(3.0, y_1, [illegible]), B(5.7, 1.2, 3.3) y C(8.0, y_1, 1.0), sobre cada uno de los planos de referencia, considerando que pertenecen todos al mismo plano (Δ): (10.0, 5.5) ⇒ (10.0, z).

Procedimiento: (Fig. VIII.1.5).

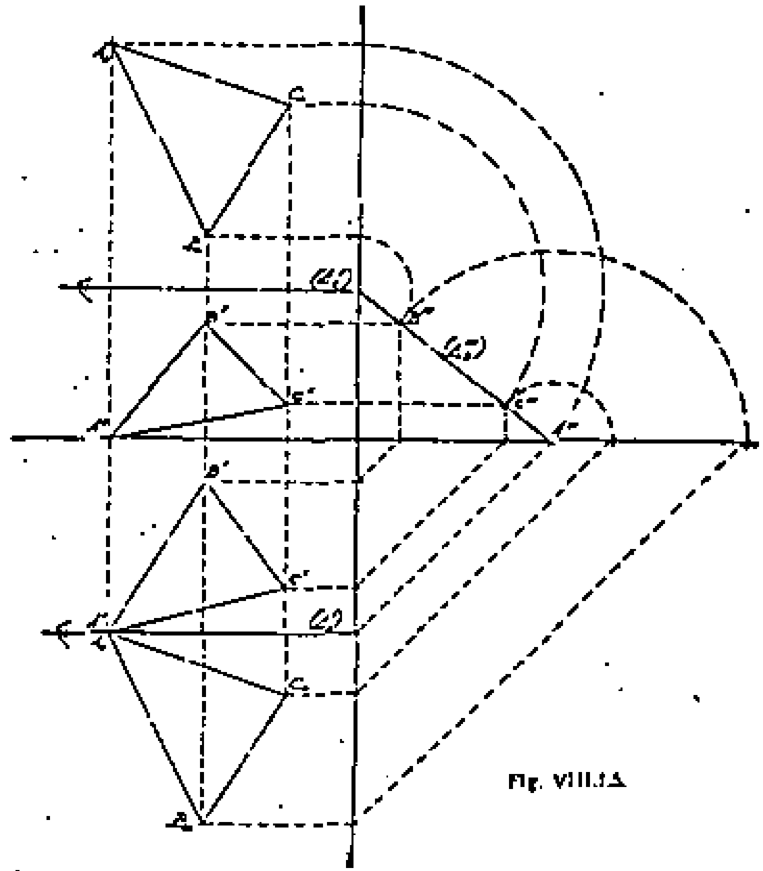


Fig. VIII.1.5

1o.—Mediante el uso del tercer plano de proyección se puede dibujar la tercera traza del plano dado (Δ_3'''), haciéndola pasar por B‴, para obtener en seguida las proyecciones horizontales faltantes (A′ y C′), utilizando las referencias como se indica.

2o.—Empleando las trazas respectivas como charnelas, y también la tercera proyección, fácilmente se efectúa el abatimiento de A, B y C, en cada uno de los planos de proyección, mediante las referencias indicadas, hasta su intersección con las trayectorias respectivas, normales a las trazas usadas como charnelas, sin necesidad de construir los triángulos de abatimiento que se requieren durante la aplicación general conocida del proceso.

Problema No. 5.—Realizar el abatimiento del triángulo: K(4.0, 6.0, 7.0), L(10.0, 1.8, 5.2), M(6.2, 8.5, 3.0), alrededor de una frontal de su plano, hasta dejarlo paralelo al plano vertical.

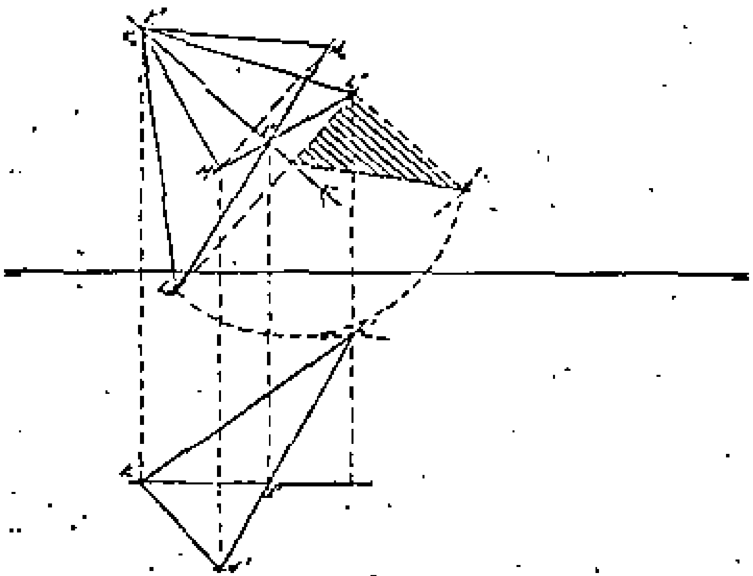


Fig. VIII.1.5.

Procedimiento: (Fig. VIII.1.6).

1o.—Se dibuja una frontal, como (K1) por ejemplo, y usándola como charnela sólo hay que efectuar el abatimiento de L y M, para lo cual se dibujan sus trayectorias perpendiculares a la proyección (K″1″) de la charnela utilizada.

2o.—Se dibuja el triángulo de abatimiento de L, con el cateto paralelo a la charnela igual a la diferencia de alejamientos entre L y la propia charnela, y cuya hipotenusa proporciona el radio de abatimiento de L, para situar L_0.

3o.—Trazando (L_0L'') hasta su intersección con la trayectoria de M, se obtiene M_0, y el problema queda resuelto, pues como K es un punto de la charnela, su posición abatida K_0 se encuentra en el mismo lugar.

2.—PROBLEMAS DE APLICACION.

Los problemas típicos que en seguida se van a resolver mediante la aplicación del Método de Abatimientos, son:

a) **Distancia de un punto a una recta.**—Dados un punto P, y una recta cualquiera (r), puede obtenerse la distancia perpendicular de P a (r), entre otras maneras, efectuando un abatimiento alrededor de una recta frontal u horizontal del plano que los contiene que, pasando por P se corte también con (r).

Ejemplo.—Obtener la distancia perpendicular entre P(7.0, 3.4, 4.6), y la recta que pasa por los puntos M(3.5, 1.1, 5.0) y N(9.0, 2.5, 1.0), indicando el segmento correspondiente en las proyecciones iniciales.

Procedimiento: (Fig. VIII.2.1).

1o.—Por P se dibuja la horizontal de proyecciones homólogas (1′P′) y (1″P″), y usándola como charnela se marca perpendicularmente la proyección de la trayectoria de N, dibujando su triángulo de abatimiento con su cateto paralelo a la charnela igual a la diferencia de cotas entre N y los puntos de la charnela, obteniéndose la hipotenusa o radio de abatimiento de N, para localizar la posición abatida de N_0.

2o.—Trazando (N_01') se determina la posición abatida (M_0N_0) de la recta, en el mismo plano de P, por lo cual su distancia resulta indicada en la montea por la perpendicular dibujada de P_o a M_oN_o, que resuelve el problema y cuyas proyecciones homólogas, que también se indican en la figura, se obtienen fácilmente mediante la inversión del proceso, para regresar a las proyecciones inicialmente conocidas.

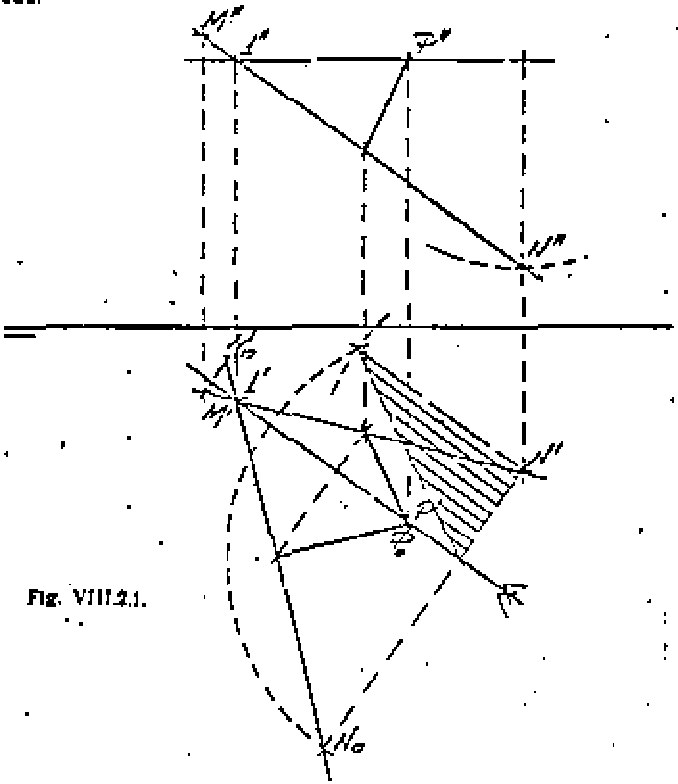


Fig. VIII.2.1.

b) Distancia entre dos rectas paralelas.—En realidad este problema es semejante al anterior, pues queda resuelto cuando se obtiene la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra paralela.

Ejemplo.—Datos: A (3.0, 1.2, 6.2), B (8.5, 2.6, 2.6), y C (3.0, 3.5, 4.5). Completando las proyecciones de la recta que, pasando por C, es paralela a la que pasa por A y B, obtener la distancia entre ambas paralelas, indicándola en las proyecciones iniciales.

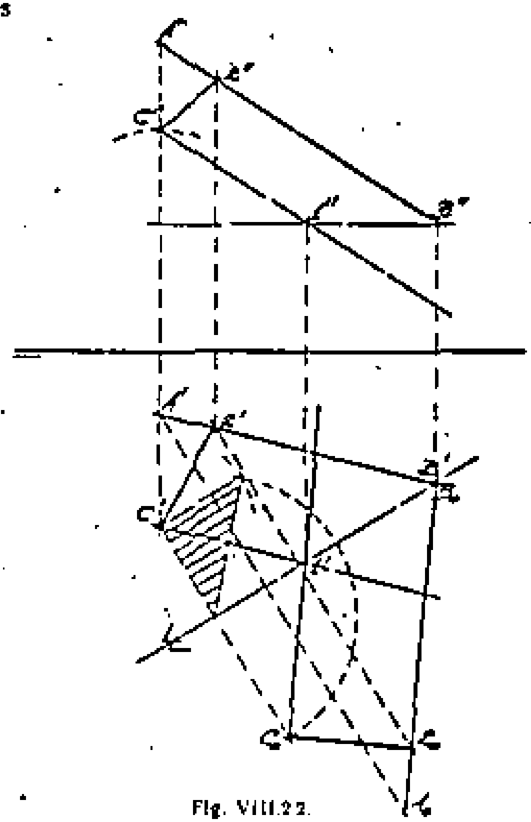


Fig. VIII.2.2.

Procedimiento: (Fig. VIII.2.2).

1o.—Se dibujan las proyecciones homólogas de la recta que pasa por C, paralelamente a las proyecciones (A'B') y (A"B"), y luego pueden trazarse las dos proyecciones (1"B") y (1'B') de una horizontal del plano que definen las paralelas mencionadas.

2o.—Tomando como charnela la horizontal anterior, se dibujan normalmente a su proyección (1'B') las trayectorias de A' y C', así como el triángulo de abatimiento de C, cuya hipotenusa es su radio de abatimiento y permite anotar la posición abatida C_o y la recta abatida (C_o1'), así como (A_oB_o) dibujada paralelamente a la anterior por $B_o' = B'$.

3o.—La distancia perpendicular entre ambas rectas dadas puede trazarse desde C_0 hasta $(A_0\ B_0)$, y luego deshacer el abatimiento de 2_0 normalmente a la charnela, para obtener 2' sobre (A'B'), y 2" por su referencia en (A"B"), con lo cual queda resuelto el problema como se indica en la figura.

c) **Angulo entre dos rectas no paralelas.**—Cuando las dos rectas dadas no se cortan, sino que se cruzan, antes de aplicar el Método de Abatimientos, por un punto elegido arbitraria y convenientemente sobre una de las rectas, se dibuja una paralela a la otra, y luego se efectúa el abatimiento de la misma manera que en los ejemplos de triángulos que antes han sido resueltos, tomando como charnela una recta frontal u horizontal del plano así formado.

Ejemplo.—Mostrar en la montea la verdadera magnitud del ángulo que se forma entre los segmentos: B(4.5, 7.5, 3.0), T(11.0, 1.0, 5.0), y A(6.0, 4.0, 8.0), C(11.4, 8.5, −2.6).

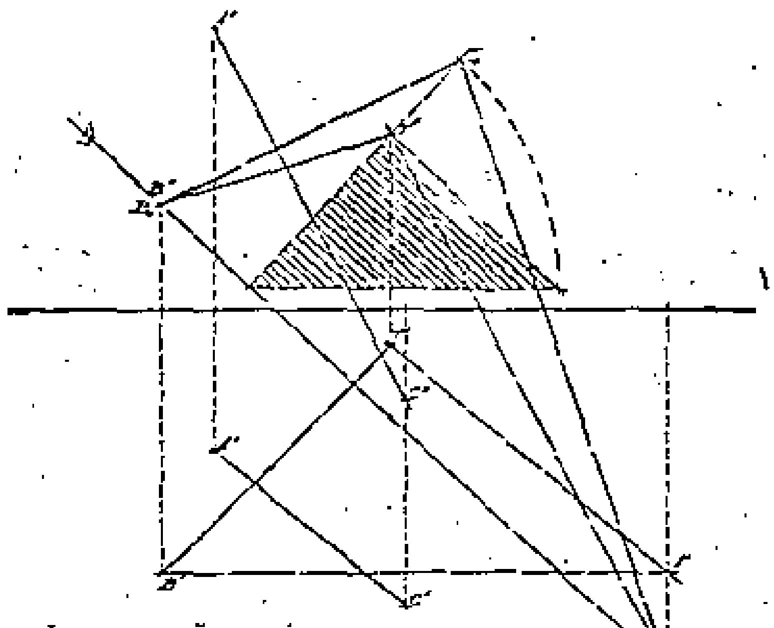


Fig. VIII.23.

Procedimiento: (Fig. VIII.23).

1o.—Por T' y T" se dibujan las proyecciones correspondientes (A'C') y (A"C") de (AC), para formar el plano donde se cortan el segmento (BT) y el paralelo a (AC), precisamente en T.

2o.—Por B se dibuja una frontal de dicho plano, mediante su proyección horizontal (B'1') paralela a LT, y su homóloga vertical (B"1"), obtenida por la referencia de 1' sobre la paralela a (A"C") por T".

3o.—Utilizándose la frontal anterior (B1) como charnela, se efectúa el abatimiento de T, dibujándose la trayectoria de T" perpendicular a la charnela, y el triángulo de abatimiento de T, con su cateto paralelo a la charnela igual a la diferencia de alejamientos entre los puntos de ella, y T'; con lo cual se obtiene el radio de abatimiento y luego el punto abatido T_0.

4o.—Como los puntos B y 1 están sobre la charnela, no se mueven durante el abatimiento, y sus posiciones abatidas en el plano frontal considerado corresponden a $B" = B_0$, y $1" = 1_0$, la verdadera magnitud del ángulo buscado es la que muestra en la figura, o sea: $\sphericalangle (B_0T_01_0)$.

Nota.—Desde luego que, cuando las rectas dadas se cortan en uno de sus puntos, el problema se resuelve de manera semejante, sólo que, en general, con mayor facilidad, pues directamente se efectúa el abatimiento, no habiendo necesidad de realizar la operación previa de concurrencia, como en el ejemplo, resuelto ahora.

d) **Angulo entre una recta y un plano.**—La medida del ángulo formado por una recta y un plano cualesquiera que se intersectan, puede lograrse con cierta facilidad de manera indirecta, obteniendo el valor del ángulo complementario que la recta mencionada forma con la normal al plano dado, tal como un problema de ángulo entre dos rectas, cuya consideración acaba de realizarse en el inciso anterior.

Ejemplo.—Obtener el valor real del ángulo (θ) formado por la recta que pasa por K(4.7, 3.8, 6.4) y L(8.0, 2.1, 3.8), y el plano (Q) formado por las rectas concurrentes (MN) y (NO), tales que: M(7.7, 1.5, 2.5), N(11.1, 1.0, 4.8) y O(14.4, 6.0, 0.3).

Procedimiento: (Fig. VIII.2.4).

1o.—Se dibujan las proyecciones ($M''1''$) y ($M'1'$) de una horizontal, y ($M''2''$) y ($M'2'$) de una frontal del plano (MNO).

2o.—Por K'' y K' se dibujan las proyecciones (r'') y (r') de la normal al plano, respectivamente perpendiculares a las proyecciones vertical ($M''2''$) y horizontal ($M'1'$) de la frontal y de la horizontal anteriores.

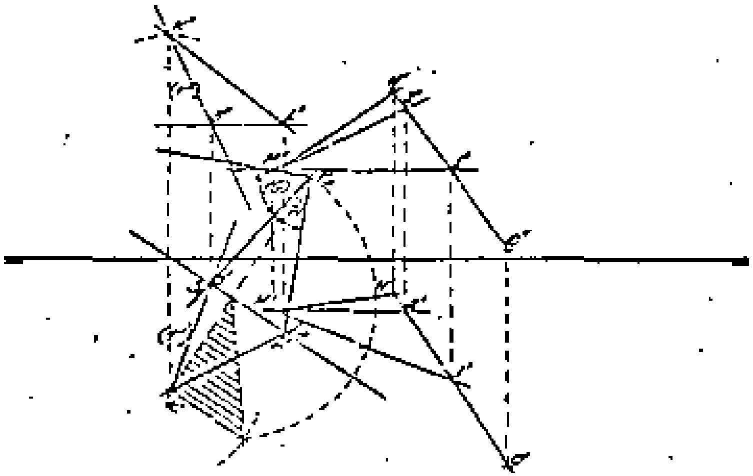


Fig. VIII.2.4.

3o.—Tomando como charnela la horizontal ($L3$), del plano de (KL) y (r), se dibuja normalmente a ($L'3'$) la trayectoria de K'; mediante el triángulo de abatimiento correspondiente se localiza la posición abatida K_0 sobre el plano horizontal, que es el vértice del ángulo (ϕ), formado entre (KL) y la normal (r), y se obtiene uniendo K_0 con $3_0 \equiv 3'$, y con $L_0 \equiv L'$, que no se movieron porque están sobre la charnela.

4o.—Entonces, el ángulo entre (KL) y el plano (MNO) es (θ), complemento de (ϕ).

NOTA.—Cuando en un problema de este tipo son conocidas las trazas del plano o pueden obtenerse fácilmente a partir de los datos, la solución se inicia directamente trazando por un mismo punto ele-

gido arbitraria y convenientemente en las proyecciones de la recta dada, las correspondientes de la normal al plano, dibujadas perpendicularmente a las trazas respectivas.

e) Angulo diedro.—El ángulo diedro, formado por dos planos que se intersectan, se mide mediante el que forman entre sí una recta de cada plano, que sea perpendicular a la recta de intersección entre ambos.

En Geometría Descriptiva, la medición anterior puede lograrse como sigue: (Fig. VIII.2.5).

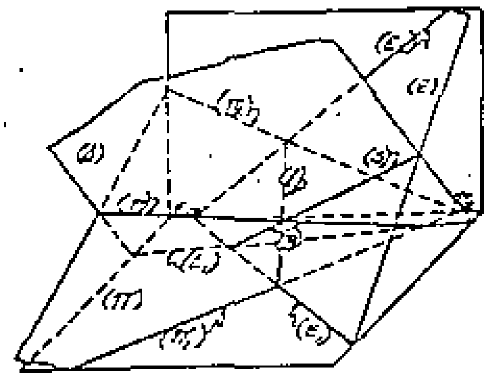


Fig. VIII.2.5.

1o.—Obteniendo la recta de intersección (I) entre los planos dados: (π) y (ε).

2o.—Construyendo un plano auxiliar (Δ), perpendicular a la intersección anterior (I) y, por lo mismo, a los dos planos (π) y (ε) considerados inicialmente.

3o.—Obteniendo las rectas de intersección (r) y (s) entre el plano auxiliar (Δ) y cada uno de los planos dados (π) y (ε).

4o.—Determinando, mediante un abatimiento, el ángulo (θ) formado por esas últimas rectas, que es la medida del ángulo diedro buscado.

Ejemplo No. 1.—Obtener la magnitud real del ángulo diedro formado por los dos planos: (π): (12.0, 4.6) 18.1 (12.0, 3.1), y (ε): (8.5, 3.2) 4.2 (8.5, 3.9), mediante un abatimiento.

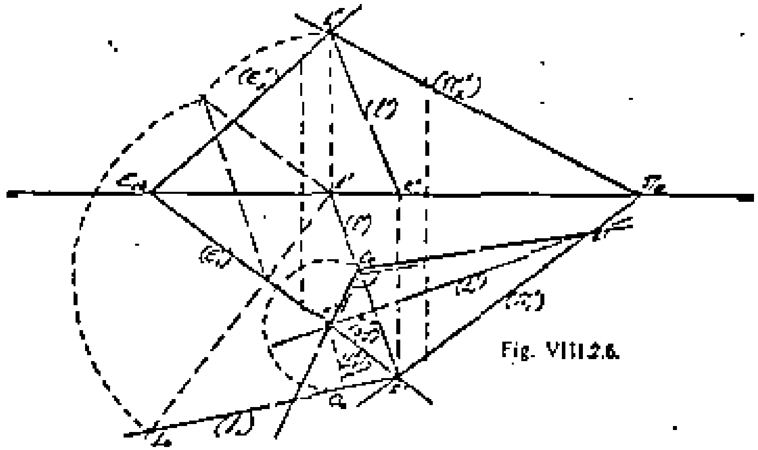


Fig. VIII.2.6.

Procedimiento: (Fig. VIII.2.6).

1o.—Se obtiene la intersección (1-2) entre (π) y (ε).

2o.—Se efectúa el abatimiento de dicha recta de intersección, alrededor de la traza (ε'_1), y normalmente a ella se dibuja el plano auxiliar, cuya traza horizontal (Δ_1') corta a (ε_1') en 3', y a (π_1') en 4', por donde deben pasar sus respectivas rectas de intersección.

3o.—El punto común O de los tres planos, está sobre (l), a una distancia real igual a ($3'O_0$), que debe mostrarse ahora en el abatimiento, teniendo como charnela la traza (Δ_1').

4o.—El ángulo diedro entre (π) y (ε) queda indicado por (B) = $\sphericalangle$ ($3'O_04'$), en verdadera magnitud.

NOTA.—Debe haberse observado que la traza (Δ_2'') del plano auxiliar se dibuja perpendicularmente a la intersección (l_0) de los planos dados (π) y (ε), después que ha sido abatida y, enseguida, utilizando el punto común entre (Δ_2'') y la traza horizontal (π_1') o (ε_1') que se tomó como charnela, se dibuja (Δ_1'), normalmente a (l'). Posteriormente se realiza el segundo abatimiento, alrededor de la charnela (Δ_1'), para obtener, como se indica en la figura, la posición aba-

tida O_0 del punto común a los tres planos, (π), (ε) y (Δ), que es el vértice del diedro buscado, el cual queda indicado por $\sphericalangle$ ($3'O_04'$), como antes se apuntó.

Ejemplo No. 2.—Determinar la verdadera magnitud del ángulo diedro formado entre los planos (P), dado por el segmento R(9.5, 0.7, 6.3), S(14.0, 3.9, 2.0), de una de sus rectas de máxima inclinación, y (Q): (5.0, 4.2) ∞ (5.0, 4.7).

Procedimiento: (Fig. VIII.2.7).

1o.—Se obtienen las trazas (P_1') y (P_2'') mediante las trazas de su recta de máxima inclinación; luego, las proyecciones ($1''2''$) y ($1'2'$) de la recta de intersección entre (P) y (Q).

2o.—Se efectúa el abatimiento de dicha recta de intersección (1-2), teniendo como charnela (P_1'), construyendo el triángulo de abatimiento, hasta tener su posición abatida (l_0).

3o.—Se introduce el plano auxiliar (Δ), dibujando (Δ_2'') normal a (l_0) hasta cortar a (P_1') en 3', de donde se dibuja (Δ_1') perpendicular a la proyección ($1'2'$), hasta el punto 4' que pertenece a la traza (Q_1').

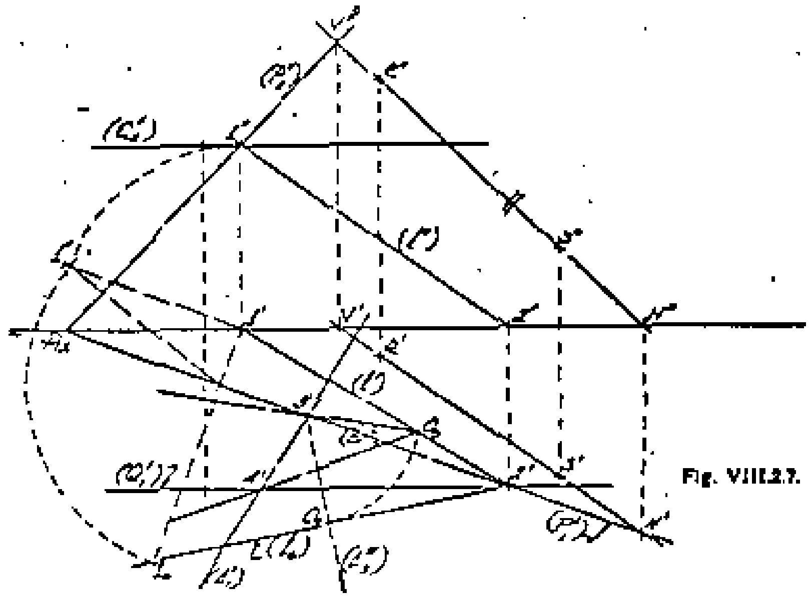


Fig. VIII.2.7.

4o.—Se abate sobre el plano horizontal, alrededor de (Δ_1'), el punto común de los tres planos (P), (Q) y (Δ), con la misma longitud real $(O_0 3')$, hasta (1'2'), donde se localiza el vértice O_0 del ángulo (B) = $\sphericalangle$ $(3'O_0 4')$, que es la solución del problema.

— También en este problema debe advertirse la simplificación utilizada durante el segundo abatimiento, alrededor de la traza (Δ_1') del plano auxiliar, para cuya introducción se efectúa el primer abatimiento, tomando como charnela la traza (P_1'). La simplificación consiste en tomar la magnitud real de la distancia entre 3' y O_0 del primer abatimiento, y usarla directamente para la localización de O_0, sobre (l'), durante el segundo.

3.—EJERCICIOS. (Serie VIII).

1.—Determinar las trazas del plano que contiene al triángulo: A(5.5, 2.0, 0), B(8.0, 0, 3.5), C(11.0, 4.0, 2.0), y luego mediante un abatimiento mostrar la verdadera magnitud de todos los elementos de dicho triángulo.

2.—Datos: Plano (P): (15.0, 9.0) 5.0 (15.0, 4.0), y triángulo (ABC): A(10.0, y_1, 0), B(15.0, 4.0, z_2), C(7.5, 0, z_3). Completar las proyecciones del triángulo, que está en el mismo plano dado, y mostrar las magnitudes reales de sus lados y de sus ángulos, por medio de un abatimiento en el plano vertical.

3.—Datos: Plano (π): (9.4, 5.0) ∞ (9.4, 7.5), y triángulo: M(2.0, 5.0, 0), N(7.5, 6.7, 0), O(4.5, 10.8, 0). Obtener las proyecciones del triángulo, que pertenece al mismo plano dado, y cuyos datos, lo presentan abatido en el plano horizontal, deshaciendo el abatimiento.

4.—Regresar al plano (ϵ): (11.0, 9.5) 3.5 (13.0, 7.0), el triángulo: A(3.0, 0, 4.5), B(11.0, 0, 7.5), C(6.0, 0, 11.0), que se encuentra abatido.

5.—Utilizando un abatimiento, obtener la distancia entre O y (AB), dibujando la perpendicular (OP), y trazar también una recta (OQ) que forme con (AB) un ángulo de 60°, mostrando dichos puntos P y Q en las proyecciones iniciales dadas de la recta (AB), siendo: A(7.5, 0, 1.4), B(14.0, 5.0, 5.5), O(6.0, 2.0, 4.0).

6.—Dados los puntos: K(5.0, 2.2, 6.0), L(10.5, 3.5, 3.0) y M(5.0, 4.5, 4.5), completar primero las proyecciones de la recta que pasa por M y es paralela al segmento (KL), y obtener después la distancia entre ambas, trazando por M su perpendicular común, que debe indicarse en las proyecciones iniciales.

7.—Mostrar en verdadera magnitud el ángulo formado entre las rectas que contienen los segmentos: A(3.8, 6.0, −2.2), B(10.0, 2.5, 5.5), y C(5.8, 2.5, 5.2), D(11.8, 6.0, 0).

8.—Obtener gráficamente la verdadera magnitud del ángulo (θ) formado entre el plano (P): (10.0, 6.5) 6.7 (10.0, 5.5), y la recta que pasa por R(4.0, 4.5, 6.0) y S(8.5, 2.2, 0.9).

9.—Determinar el valor del ángulo formado entre las rectas: (r) = P(4.9, 6.8, 4.0), Q(10.1, 1.7, 2.1), y (s) = U(6.2, 5.0, 1.1), V(10.6, 3.4, 6.2).

10.—Obtener el valor del ángulo diedro formado por los planos: (P): (8.5, 5.2) 4.7 (8.5, 2.3), y (Q): (12.5, 3.2) 15.8 (12.5, 2.8).

Capítulo IV

TRIEDROS Y POLIEDROS

IX.—TRIEDROS

1.—ANGULO TRIEDRO.—SUS ELEMENTOS.

En Geometría se define el ángulo triedro, ó simplemente el triedro, como aquel concepto geométrico formado por tres caras ó planos (de: tri = tres, y edros = planos), cuyas intersecciones (de dos en dos) son rectas concurrentes en un mismo punto.

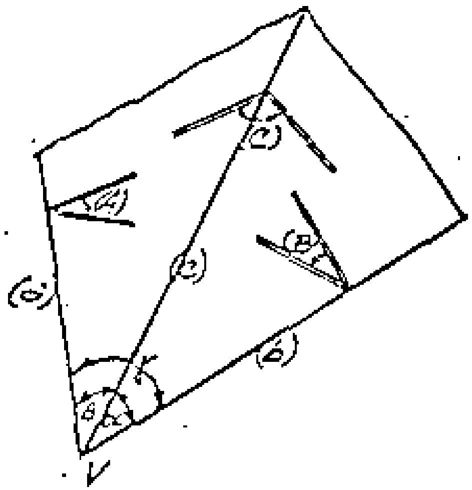


Fig. IX.1.1.

Entonces, los elementos que se distinguen en el concepto mencionado, son:

— Las tres caras del triedro.

— Las tres aristas, que son las rectas de intersección de cada dos de sus caras.

— Los tres ángulos planos, definidos entre cada par de aristas.

— Los tres ángulos diedros formados por cada dos de sus caras, y

— El vértice (ó cúspide) del triedro, definido por el punto común de concurrencia de las tres aristas.

De aquí que, para que un ángulo triedro quede totalmente determinado es necesario que sean conocidos todos sus elementos, lo cual ocurre cuando existen datos suficientes, como más adelante se verá.

Los problemas de triedros se acostumbran tratar en Geometría Descriptiva, dado sus métodos propios, considerando que un triedro está definido cuando se conocen sus tres aristas: (a), (b) y (c), ya que estas a su vez definen completamente al vértice, y a:

— Los tres ángulos planos: (α), (β) y (γ), formados entre (b) y (c), (c) y (a), y (a) y (b), respectivamente.

— Los tres ángulos diedros: (A), (B) y (C), correspondientes.

Por eso, los últimos seis valores, de: (α), (β) y (γ), y (A), (B) y (C), se dice que son, propiamente, los elementos de un triedro.

Debe observarse además que, para que sea posible la existencia de un triedro, se tienen que cumplir ciertas relaciones entre los valores de sus elementos (ángulos planos y ángulos diedros), tales como que:

— La suma de los valores de los tres ángulos planos no debe ser mayor o igual que: $2\pi = 360°$, o sea:

$$0 < (\alpha + \beta + \gamma) < 2\pi = 360°$$

— La suma de los valores de los ángulos diedros debe estar comprendida en el intervalo, de $\pi = 180°$ a $3\pi = 540°$, excluyendo dichos extremos; es decir:

$$\pi = 180° < (A + B + C) < 3\pi = 540°$$

— Ninguno de los anteriores seis elementos puede tener valor nulo.

2.—EL PROBLEMA GENERAL DEL TRIEDRO.—EJEMPLOS.

Como en Geometría Descriptiva un ángulo triedro puede considerarse constituido, en general, por tres planos cualesquiera, tales que uno de ellos coincida con uno de los del sistema de referencia, su tratamiento puede efectuarse mediante los procedimientos ya conocidos, como sigue:

1o).—Suponiendo que el triedro en estudio está formado por los planos (P), (Q) y (H) el horizontal de proyección, en la montea correspondiente (Fig. IX.2.1) sus aristas (a) y (c) son las trazas horizontales (P_1') y (Q_1'), mientras que (b) es la recta de intersección entre (P) y (Q).

2o.)—Los ángulos planos (α) y (γ) se obtienen efectuando el abatimiento de la recta de intersección (b), mediante uno de sus puntos, su traza vertical I por ejemplo, primero tomando como charnela a (P_1'), y luego a (Q_1'); mientras que (β) ya está mostrado en verdadera magnitud, entre (P_1') y (Q_1'), en el plano horizontal de referencia.

3o.)—Los ángulos diedros (A) y (C) quedan indicados, como se muestra en la montea, en los triángulos de abatimiento utilizados en el paso anterior, ya que en realidad equivalen a dos cambios de plano vertical que colocan a los planos dados (P) y (Q) como planos de canto, respecto a las líneas de tierra L_1T_1 y L_2T_2, correspondientemente.

4o.)—El ángulo diedro (B), según el procedimiento ya conocido, se obtiene mediante otro abatimiento, haciendo intervenir el plano auxiliar (Δ), cuya traza horizontal (Δ_1'), dibujada perpendicularmente a (b'), se utiliza como charnela para conocer la posición abatida O_a del punto común entre los tres planos (P), (Q) y (Δ), que se encuentra sobre (b'), en la forma simplificada que antes se explicó, en la intersección O_a de los arcos $1'O_a'$ y $2'O_a'$, trazados con centros en 1' y 2'.

NOTA.—Siendo el procedimiento anterior el que corresponde en general al problema de los ángulos triedros, o sea a la determinación de sus seis elementos (tres ángulos planos y tres ángulos diedros), puede ser aplicado, con las naturales modificaciones impuestas por los datos proporcionados en cada caso, a todo problema de este tipo, siempre que se tome en cuenta lógicamente dicha presentación de datos, que hacen variar el orden de los pasos mencionados, llegando incluso a la necesidad de aplicarlos de manera regresiva, como puede ser analizado en los problemas que más adelante se presentan.

Los datos de cada problema, a que se hace referencia en el párrafo anterior, son los valores de algunos de los elementos del triedro, y las incógnitas representan los valores de los elementos restantes, que deben obtenerse por la solución pedida.

Ejemplos:

Problema No. 1.—Determinar la verdadera magnitud de los tres ángulos planos y de los tres diedros, del triedro formado por el plano horizontal (H) y los planos (P) y (Q), tales que: (P): (7.5, 3.6) 4.6 (7.5, 2.5), y (Q): (10.5, 4.0) 15.2 (10.5, 4.4).

Nota.—Debe analizarse cuidadosamente la aplicación de cada uno de los pasos mencionados en el procedimiento general. Obsérvese que la distancia ($V'O_o'$) debe ser igual medida a cada lado de V', pues las dos rectas ($V'I_b$) representan distintos abatimientos de la misma recta de intersección (b) de los planos (P) y (Q).

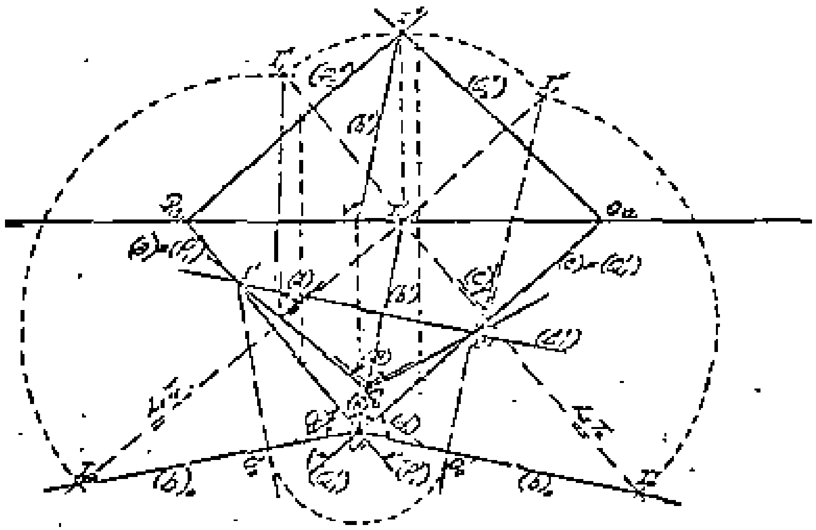


Fig. IX.2.1.

Problema No. 2.—Mostrar en magnitud real los seis elementos del triedro formado por el plano vertical y los planos (P) y (Q), con los mismos datos del problema anterior.

Procedimiento: (Fig. IX.2.2).

Nota.—Aunque en este problema el abatimiento se efectúa sobre el plano vertical de referencia, puede observarse fácilmente que el procedimiento utilizado es idéntico al correspondiente al caso general antes explicado.

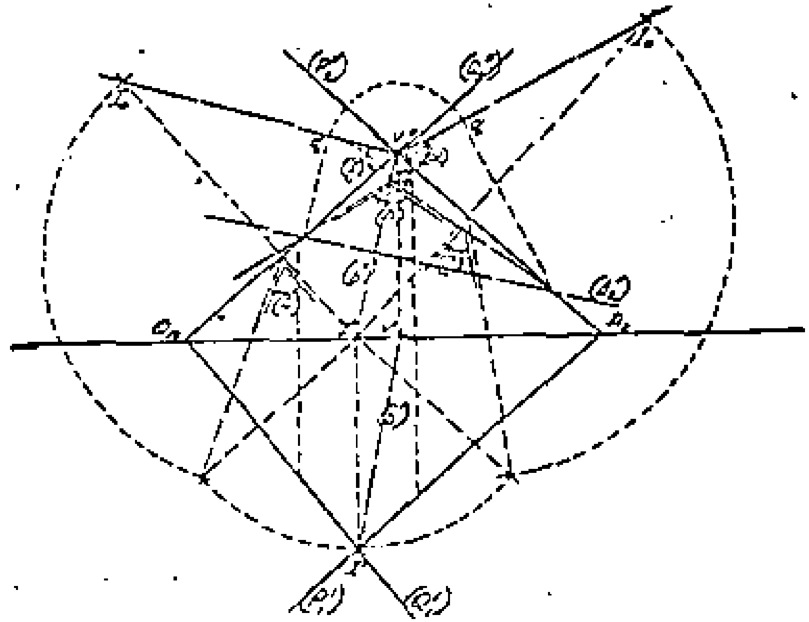


Fig. IX.2.2.

Problema No. 3.—Obtener la verdadera magnitud de los tres diedros del triedro formado por el plano horizontal y dos planos cualesquiera, cuyas aristas abatidas están dadas por los puntos R(5.0, 3.8, 0), S(6.8, 0, 0), T(14.7, 0, 0), U(16.6, 4.7, 0) y V(10.5, 6.6, 0).

Procedimiento: (Fig. IX.2.3).

Como en este caso los datos presentan abatidas las aristas del triedro en el plano horizontal de proyección, quedan indicados en verdadera magnitud los tres ángulos planos (o caras), para la solución del problema el procedimiento general resulta aplicado a la inversa; es decir, se principia por elegir arbitrariamente los puntos O_o', a partir de los cuales se trazan perpendiculares respectivas a (R'V') y (V'U'), para obtener 1' y 2', por donde se dibuja (Δ_1'), y normal a ella, por V', la recta de intersección (b'), cuyo punto 1' sirve para deshacer el abatimiento alrededor de las aristas (S'V') = (P_1'), y (V'T') = (Q_1'), dibujando sus trayectorias correspondientes perpendicularmente a ellas, y luego construyendo los triángulos de abatimiento con uno de sus catetos de esa misma dirección última, y el otro paralelo a cada charnela, y cuyas longitudes quedan determinadas como se muestra en la figura.

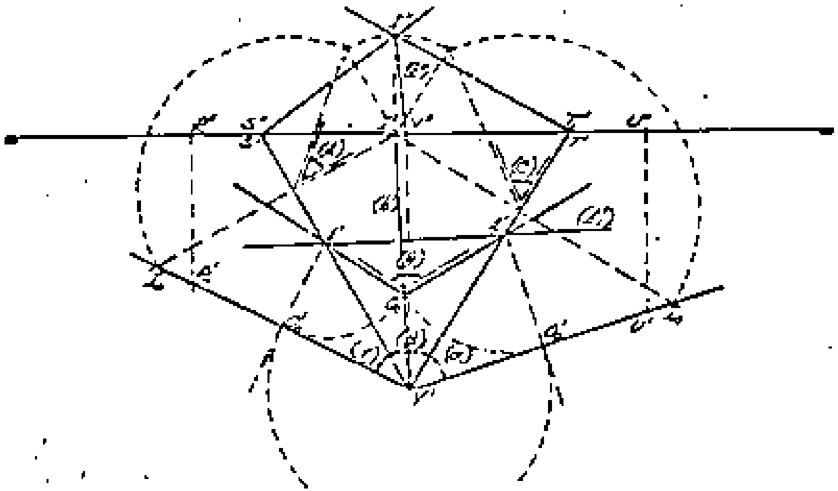


Fig. IX.2.3.

Problema No. 4.—Dados los puntos: R(3.2, 5.0, 0), S(6.3, 0, 0), T(13.3, 0, 0) y V(11.1, 8.7, 0), que corresponden a las aristas abatidas y al vértice de un triedro, que entre sí forman un ángulo diedro de 50°, obtener los valores de los restantes elementos.

Procedimiento: (Fig. IX.2.4).

1o.—Como en este problema los datos proporcionan **dos ángulos planos** y el diedro comprendido entre las caras correspondientes, se principia por elegir un punto cualquiera 1', de (S'V'), por donde se dibuja la normal que corta en 2_0 a (R'V'), y se construye el ángulo (A) = 50°, de manera que al deshacer el abatimiento se obtiene $3_1''$, y se completa el triángulo rectángulo de abatimiento, como se indica, determinándose la proyección 3' del punto 3 de la arista (b), cuya proyección horizontal (b') se dibuja de V' a 3', hasta 4' sobre LT.

2o.—Si se construye enseguida el triángulo de abatimiento de 4, mediante la referencia de 4' se llega a 4'', puede realizarse el otro

abatimiento de 4 tomando como charnela la traza (V'T'), y dibujando el triángulo de abatimiento correspondiente, que muestra el valor del diedro (C), y del ángulo plano (a).

3o.—La obtención del último diedro buscado, (B), para terminar de resolver este problema, se logra aplicando el procedimiento general que se muestra en la figura, mediante el abatimiento del punto 2 de la arista (b), tomando como charnela la traza (Δ_1') del plano auxiliar normal a (b).

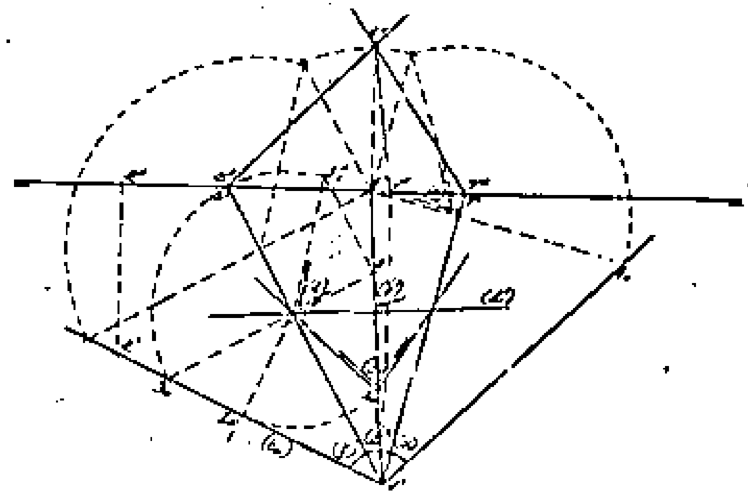


Fig. IX.2.4.

3.—EJERCICIOS. (Serie IX).

1.—Obtener los valores de los seis elementos del triedro formado entre el plano horizontal de proyección y los planos cualesquiera: (Δ): (7.5, 2.6) 3.3 (7.5, 4.7), y (ϵ): (11.5, 4.3) 15.5 (11.5, 3.0).

2.—Determinar los valores de los tres ángulos planos y de los tres diedros, del triedro formado por el plano horizontal de referencia y los planos cualesquiera: (π): (9.8, 3.0) 5.9 (9.8, 4.3), y (Ω): (13.8, 4.7) 18.2 (13.8, 2.6).

3.—Obtener los valores de los seis elementos del triedro formado entre el plano vertical de proyección y los dos planos cualesquiera (ν) y (θ), utilizando los mismos datos que el problema anterior proporciona.

4.—Mostrar en la montea las magnitudes reales de los seis elementos del triedro cuyas aristas abatidas, son: (MV), (NV), (PV) y (QV), tales que: M(4.0, 5.8, 0), N(5.3, 0, 0), P(10.4, 0, 0), Q(17.0, 2.8, 0) y V(12.3, 6.5, 0).

5.—Igual problema que el anterior, con los siguientes datos: M(4.4, 3.0, 0), N(10.9, 0, 0), P(16.1, 0, 0), Q(17.4, 6.0, 0) y V(9.0, 6.6, 0).

6.—Dados: el ángulo plano (β) = ∢ (SVT), la arista abatida (b_0) = (RV), que muestra la cara (γ), y el diedro (A) = 45°, comprendido entre las dos caras anteriores, obtener los valores de los otros tres restantes elementos del triedro, considerando que: R(4.3, 4.0, 0), S(7.3, 0, 0), T(15.0, 0, 0) y V(10.5, 6.5, 0).

X.—POLIEDROS.

1.—NOCIONES GENERALES.

Considerando que la Geometría Euclidiana proporciona los conocimientos relativos a las características de los cuerpos geométricos conocidos con el nombre genérico de poliedros (poli, muchos; edros, caras o planos), de las cuales en seguida se mencionan algunas, como que:

1o.—Constituyen una porción (un volumen) definida del espacio, limitada por un número fijo y finito de las caras o planos que lo forman.

2o.—Cada una de las caras es un polígono regular o irregular, cuyos lados son las aristas del poliedro, comunes en toda su longitud entre cada par de caras contiguas.

3o.—Existen puntos de concurrencia de tres o más aristas de un poliedro, donde, ya se sabe, queda definido el vértice de un ángulo triedro o poliedro, según el caso de ser tres o más las aristas concurrentes.

4o.—Todos los poliedros pueden ser agrupados en las clasificaciones de: regulares e irregulares, según sean las caras que los forman, y también distinguirse entre: convexos y cóncavos, según que cualquier recta del espacio intersecte sus caras en sólo dos, y en más de sus puntos, etc.

La Geometría Descriptiva considera los problemas relativos a poliedros como aquellos donde intervienen sus proyecciones, tales como los que se mencionan a continuación.

2.—POLIEDROS IRREGULARES.—EJEMPLOS.

Obtener, en todos los casos, las proyecciones de los poliedros irregulares que se mencionan, con los datos que en cada caso se indican.

a) **Problema No. 1.—Pirámide irregular de eje oblicuo.—Base:** A(7.4, 8.5, 0), B(3.9, 8.0, 1.2), C(5.9, 5.3, 3.0), D(0.4, 5.0, z), y vértice E(3.0, 1.2, 7.0). Mostrar las magnitudes reales de todas sus aristas en el desarrollo de la superficie total de la pirámide.

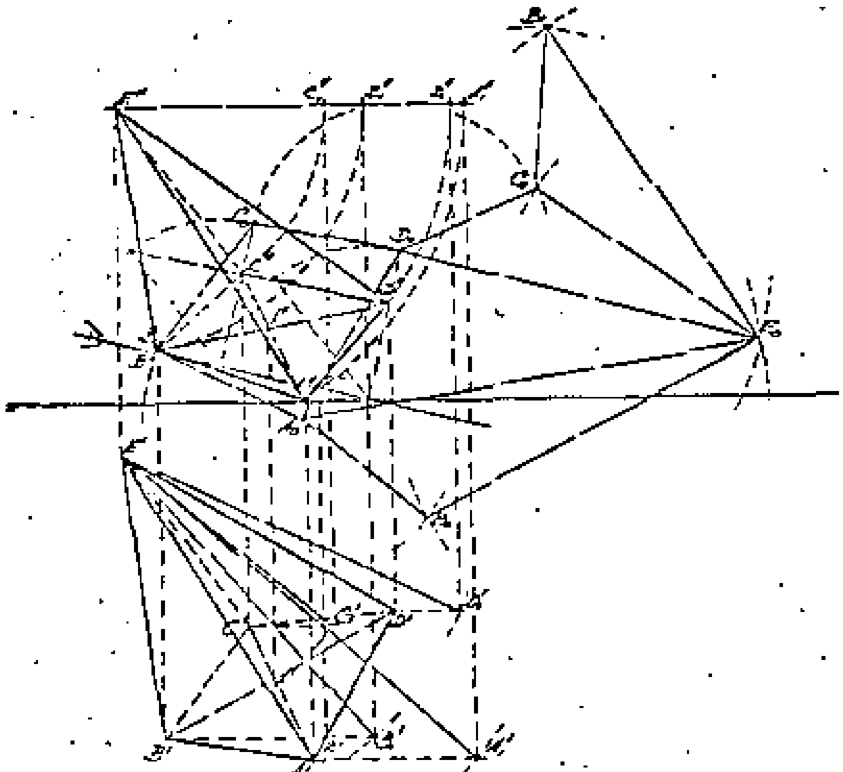


Fig. X.2.1.

Procedimiento: (Fig. X.2.1).

1o.—Mediante la diagonal (CA) se obtiene el punto 1 que, en proyección vertical 1″ al unirse con B″ define la posición de D″. Entonces se pueden trazar las dos proyecciones de los lados (AB), (BC), (CD) y (DA) de la base, y todas las aristas (AE), (BE), (CE) y (DE), de la pirámide.

2o.—Se traza la proyección horizontal (B′2′) de una frontal, cuya proyección vertical es (B″2″), que utilizada como charnela permite efectuar el abatimiento de los puntos A, C y D, de la base,

hasta A_0, C_0 y D_0, mediante los triángulos de abatimiento correspondientes.

3o.—Haciendo girar todas las aristas (EA), (EB), (EC) y (ED), alrededor de un eje de punta que pase por E, hasta dejarlas como segmentos horizontales, de proyecciones verticales: ($E''A_1''$), ($E''B_1''$), ($E''C_1''$) y ($E''D_1''$), en sus proyecciones horizontales: ($E'A_1'$), ($E'B_1'$), ($E'C_1'$) y ($E'D_1'$), se muestran sus verdaderas magnitudes.

4o.—Llevando esas magnitudes reales: ($E'A_1'$) = (E_0A_0), ($E'B_1'$) = (E_0B_0), ($E'C_1'$) = (E_0C_0), . . . a partir de la base ($A_0B_0C_0D_0$), mediante arcos de circunferencia, se obtiene el desarrollo de la superficie total de la pirámide, como se ilustra en la Fig. X.2.1.

b) Problema No. 2.—Prisma irregular, de bases iguales y paralelas: (ABCD) y (EFGH), tales que: A(4.0, 2.8, z), B(5.4, 5.3, 0.6), C(8.7, 4.0, 0.3), D(6.0, 1.4, 2.7), siendo sus aristas laterales iguales: (AE) = (BF) = (CG) = (DH), donde: H(13.4, 4.0, 8.5). Obtener además la intersección del prisma con el plano (π): (10.4, 3.8) 16.6 (10.4, 5.3), e indicar la visibilidad de los planos.

Procedimiento: (Fig. X.2.2).

1o.—Se localiza A″, dibujando las diagonales (B′D′) y (A′C′), que al cruzarse en 1′ y referirse a (B″D″) determinan 1″, por donde se dibuja la proyección vertical (A″C″) hasta la referencia que viene de A′.

2o.—Se dibuja (D″H″), y paralelas a ella, por A″, B″ y C″; por H″ paralelas a (D″C″) y (D″A″), y se completa la proyección vertical de la base superior del prisma trazando sus otros lados: (E″F″) y (F″G″) respectivamente paralelos a (A″D″) y (B″C″). También de la misma manera se completa la proyección horizontal de dicha base superior, mediante paralelas a (D′H′) por A′, B′ y C′, y luego dibujando las proyecciones de G′, F′, E′ de la base, mediante paralelas a (D′C′), (A′D′), etc., aunque es claro que las proyecciones homólogas de los últimos puntos deben quedar sobre la misma referencia.

3o.—Utilizando sus planos proyectantes de canto, se obtienen los puntos de intersección de las aristas laterales con el plano (π), siendo sus proyecciones: 1′, 1″; 2′, 2″; 3′, 3″, etc., y se determina la visibilidad en la forma ya conocida.

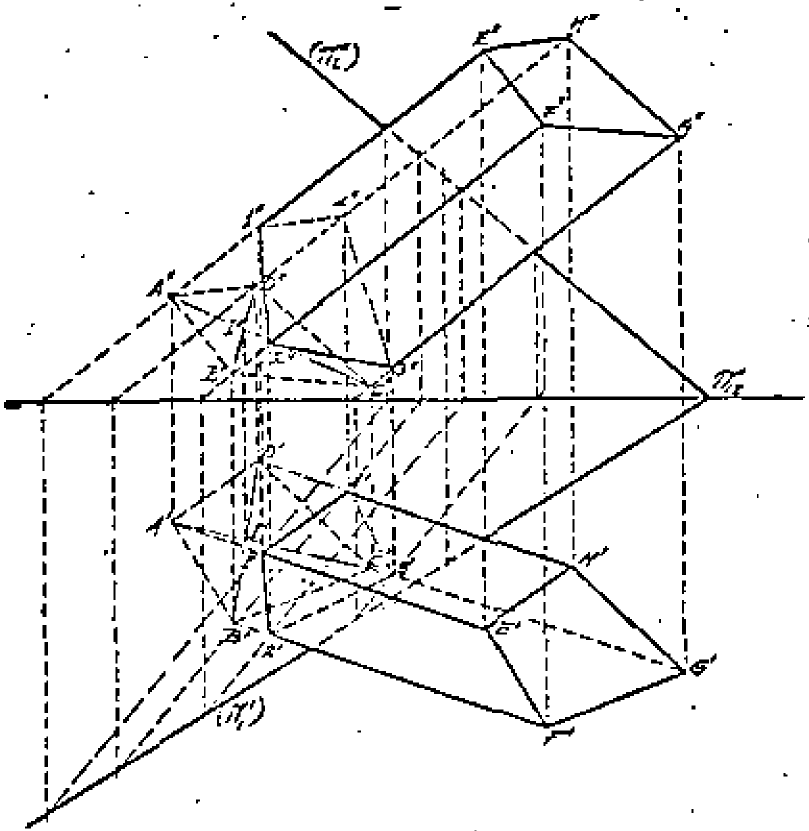


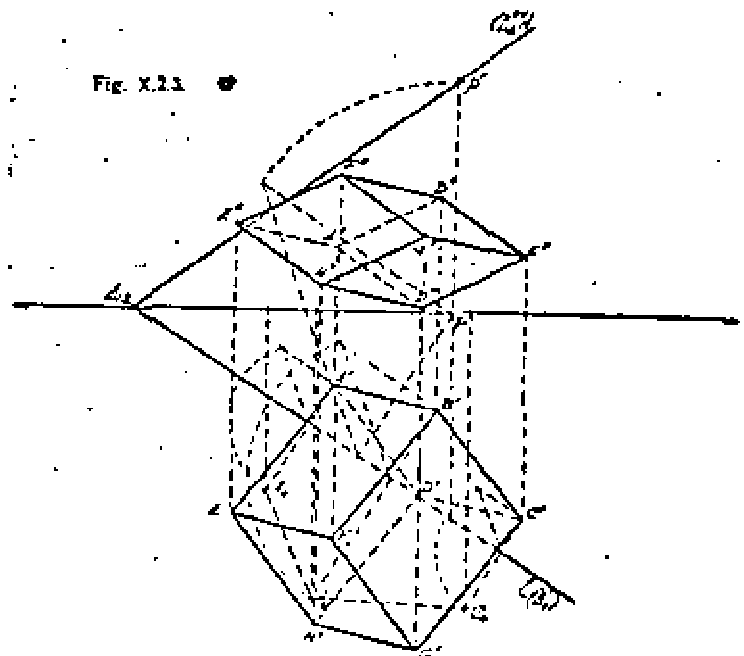
Fig. X.22.

c) **Problema No. 3.—Paralelepípedo.—**Dados los puntos abatidos: $A_0(7.5,\ 5.3,\ 0)$, $B_0(9.0,\ 8.4,\ 0)$ y $C_0(13.5,\ 8.7,\ 0)$, que son tres vértices del paralelogramo (ABCD), contenido en el plano (Δ): (13.0, 6.0) 3.5 (13.0, 6.8), deshacer el abatimiento y obtener completas las proyecciones del paralelogramo y del paralelepípedo que lo tiene como base, y cuyas aristas laterales son: (AE), (BF), (CG) y (DH), iguales y paralelas entre sí, siendo además: E(6.5, 6.0, 2.5).

Procedimiento: (Fig. X.23).

1o.—Para deshacer el abatimiento se toma un punto cualquiera (P′, P″) de la traza vertical, y se construye su triángulo de abatimiento; en seguida se dibujan paralelas a la hipotenusa por los puntos en que las trayectorias de abatimiento de A_0, B_0 y C_0, normales a (Δ_1'), cortan a esta última, para luego completar los triángulos de abatimiento de A, B y C, trazando los arcos que se muestran en

Fig. X.23.



la figura, y dibujando el otro cateto de cada uno, paralelo a (Δ_1') hasta su intersección con la trayectoria respectiva, donde quedan localizadas las proyecciones horizontales: A', B' y C'.

2o.—Por las proyecciones anteriores se dibujan las referencias normalmente a la línea de tierra, a partir de la cual se llevan las correspondientes cotas, iguales al cateto últimamente mencionado en el paso anterior. Se obtiene (D', D"), completando, mediante las paralelas indicadas, las proyecciones homólogas del paralelogramo (ABCD).

3o.—Paralelamente a (A"E") se dibujan las proyecciones verticales, y a (A'E') las proyecciones horizontales, de las aristas (BF), (CG) y (DH), completando las proyecciones homólogas de los lados de la base (EFGH) del paralelepípedo, mediante paralelas a las proyecciones respectivas de los lados correspondientes de (ABCD), como se muestra en la figura.

4o.—El problema puede terminarse indicando la visibilidad, y comprobando los trazos finales mediante las referencias que unen las proyecciones homólogas de los puntos obtenidos.

3.—POLIEDROS REGULARES.—EJEMPLOS.

Unicamente como ejemplos de aplicación de los conceptos y métodos ya estudiados, de la misma manera que se acaba de realizar en los tres problemas anteriores, relativos a poliedros irregulares (pirámide, prisma, paralelepípedo), se presentarán a continuación algunos problemas donde figuran poliedros regulares, como los siguientes:

a) Tetraedro.—Dados los puntos abatidos: $P_o(4.8,\ 5.8,\ 0)$ y $Q_o(9.3,\ 7.3,\ 0)$, que corresponden a los extremos de una arista del tetraedro (PQRS), tal que su cara (PQR) pertenece al plano (π): $(8.5,\ 4.5)\ \infty\ (8.5,\ 7.5)$, obtener el desarrollo de dicho poliedro regular, y deshacer el abatimiento para determinar sus proyecciones completas.

Procedimiento: (Fig. X.3.1).

1o.—Se completan los triángulos equiláteros que corresponden a las cuatro caras del tetraedro, y utilizando la tercera proyección se deshace el abatimiento de (PQR), como se muestra en la figura, obteniéndose todas las proyecciones de dichos puntos del plano (π), así como del punto auxiliar O.

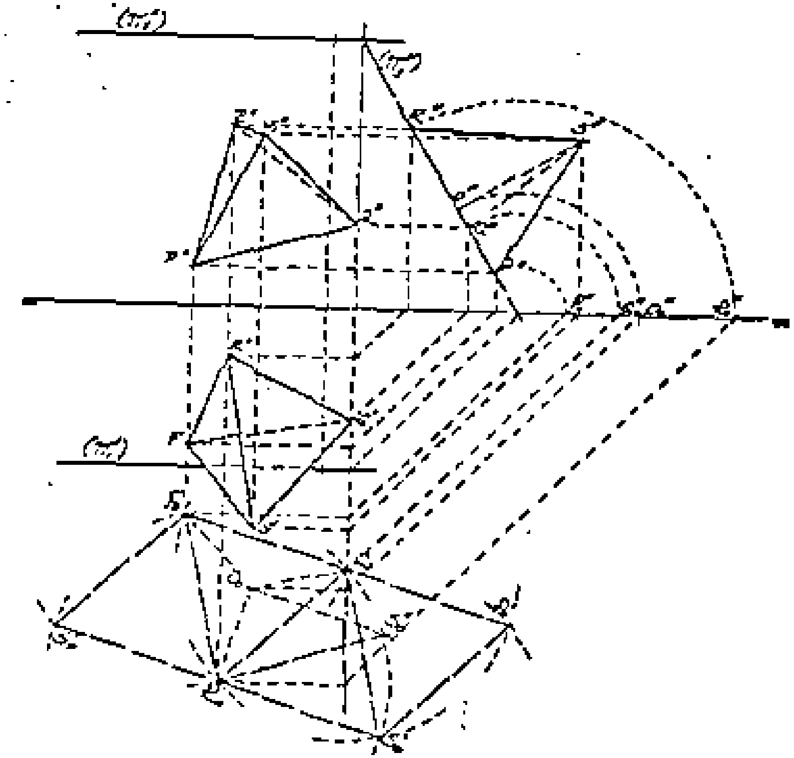


Fig. X.3.1.

2o.—Se determina la altura (O_oS_o'') del tetraedro, y llevando esa magnitud real a la tercera proyección, se marcan las proyecciones (S', S"), con lo cual pueden dibujarse completas las aristas del poliedro, que representan la solución del problema como se indica en la figura.

b). Exaedro o cubo.—Dado el cubo cuya cara (PQRS) está contenida en el plano vertical de referencia, tal que ninguno de sus puntos es de cota negativa, y cuyas aristas todas tienen una longitud igual a la del segmento P(8.4, 0, 2.1), Q(12.7, 0, 0), determinar las proyecciones completas de la porción del cubo comprendida entre los planos de proyección y el plano (Ω): (14.1; 6.6) 2.5 (14.1, 8.5).

Procedimiento: (Fig. X.3.2).

1o.—Se obtienen las proyecciones completas del cubo, dibujando en el plano vertical el cuadrado (P"Q"R"S"), y trazando las referencias de estos puntos a LT, a partir de donde se indican las proyecciones horizontales de las aristas: (P'J'), (Q'K'), (R'L') y (S'M'), de igual longitud que (P"Q").

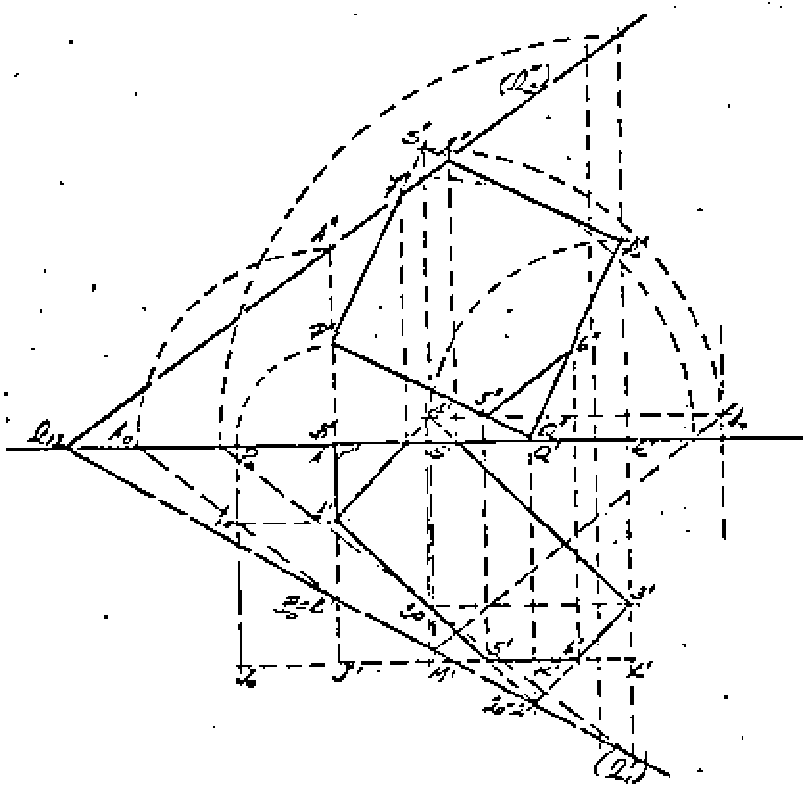


Fig. X.3.2.

2o.—Se determinan las proyecciones 1', 2', 3' y 4', de los puntos de intersección de cada una de las aristas (JP), (KQ), (LR) y (MS), como puede observarse, por ejemplo, en una de ellas, utilizando el abatimiento (A_oB_o) de la intersección (AB) del plano proyectante de perfil de la arista (JP) con el plano (Ω) dado, y (P_oJ_o) de la propia arista, obteniendo primero la posición abatida 1_o de dicha intersección y luego, deshaciendo el abatimiento, la proyección horizontal 1'. Igual puede observarse con el mismo detalle para los otros puntos mencionados al principio de este paso, excepto para 2', cuya posición está definida en la intersección de la traza ($Ω_1$') con la prolongación de (Q'K'), tal como se indica en la figura.

3o.—Uniendo los puntos anteriores, y marcando la visibilidad de la porción del cubo comprendida bajo el plano (Ω) y entre los del sistema de proyección, queda resuelto el problema. Debe observarse que, para poder representar en la forma indicada la visibilidad del trozo considerado del exaedro o cubo, es necesario suponer que el plano dado (Ω) es transparente y no opaco, pues en este último caso, la parte visible sería la que se encuentra limitada por los segmentos: (15), (56), (63), (38), (8S), (S7) y (71), que puede considerarse como la otra solución (simétrica) del problema.

c) Octaedro.—Dadas las posiciones abatidas: A_o(10.4, 0, 6.2) y B_o(5.0, 0, 5.5) de los extremos de una arista de un octaedro tal que su sección media (ABCD) se encuentra en el plano (ε): (10.4, 6.4) 1.7 (10.4, 6.2), completar las proyecciones homólogas de todos los vértices de dicho poliedro regular.

Procedimiento: (Fig. X.3.3).

1o.—Se construye el cuadrado ($A_oB_oC_oD_o$), indicando sus diagonales, que se cortan en E_o y F_o, dibujando sus trayectorias de abatimiento normales a ($ε_2$"). Se efectúa el abatimiento del punto auxiliar (I', I") del plano (ε) para obtener su triángulo de abatimiento, cuya hipotenusa sirve para dar la dirección de las de los triángulos de abatimiento de B y D, que se completan inmediatamente utilizando el radio de abatimiento conocido, como se muestra en la figura, obteniéndose B" y D". Dado que el punto A se encuentra sobre la charnela, ahí mismo se localiza A"; y dibujando por B" una paralela a (A"D"), y por D" una paralela a (A"B"), se completa la proyección vertical de la sección media (A"B"C"D").

2o.—Se llevan referencias por los puntos anteriores, normalmente a la línea de tierra, a partir de donde se miden los alejamientos de B y D, iguales a los catetos paralelos a la charnela de sus respectivos triángulos de abatimiento, y como A' está sobre LT, se completa la proyección horizontal (A'B'C'D') de la sección mediante paralelas.

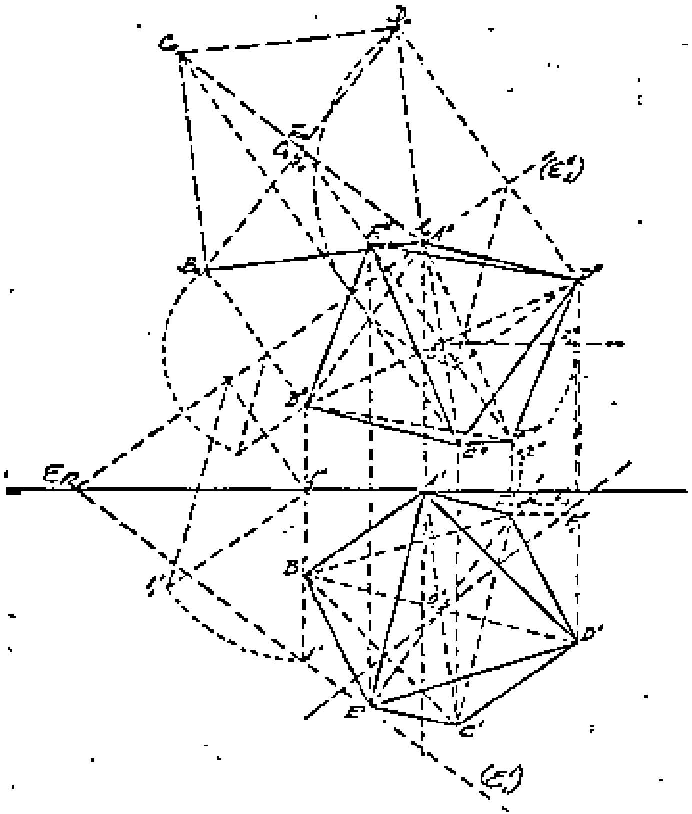


Fig. X.33.

3o.—Normalmente a las trazas (e_1') y (e_1'') se dibujan las proyecciones horizontal y vertical de la diagonal donde se localizan los otros vértices F y E del octaedro, por los puntos de concurrencia de las diagonales de la sección contenida en el plano (ϵ). Eligiendo un punto cualquiera (2', 2") sobre la proyección indefinida de la diagonal en cuestión, y mediante una rotación alrededor de un eje de punta, se la coloca en posición horizontal para medir en verdadera magnitud el segmento ($O'F_1'$) = (E_0C_0) y luego deshaciendo la rotación se determinan las proyecciones F' y F", y de la misma manera E' y E", con lo cual quedan conocidos todos los vértices del poliedro regular considerado, los cuales al ser unidos entre sí determinan las proyecciones buscadas.

4.—OBSERVACIONES.

1.—El presente Título (X.—Poliedros) del Curso no se refiere a conceptos o métodos fundamentales propios de la Geometría Descriptiva, sino que constituye simplemente la presentación de algunos problemas relativos a poliedros (irregulares o regulares) resueltos mediante la aplicación de los conceptos y métodos ya estudiados en los Capítulos antecedentes, y teniendo en cuenta las características y propiedades de dichos cuerpos geométricos, que se conocen provenientes de la Geometría Clásica.

2.—Dado que los problemas que se acaban de presentar, según lo expuesto en el párrafo anterior, son muy particulares, tanto en la presentación de sus datos y preguntas, como en el procedimiento seguido para su resolución, no se presenta al finalizar su exposición la acostumbrada Serie de Ejercicios, necesaria para la afirmación de los conocimientos adquiridos, sino que en este caso sólo se aconseja que los ejemplos presentados vuelvan a ser resueltos, en forma idéntica o con algunas variantes, de manera personal (sin recurrir a frecuentes consultas) por aquellos estudiantes que prefieran hacerlo con el fin de adquirir la habilidad suficiente para resolver otros problemas relacionados también con cuerpos geométricos.

3.—Entonces, fácilmente puede concluirse que, en los casos que el desarrollo del Curso así lo requiera, este Título X puede ser suprimido sin que tal hecho signifique algún detrimento en los conocimientos relativos a los conceptos y métodos de esta disciplina geométrica en estudio, ya que en tales casos únicamente habrán dejado de estudiarse algunos problemas particulares, lo cual no constituye el objeto del Curso, como ya se expuso al mencionar que su fin primordial no es el tratamiento de todos los casos particulares posibles, que pueden presentarse en el campo de la Geometría Descriptiva, sino más bien la exposición de sus conceptos fundamentales y procedimientos generales, que pueden ser empleados en la solución de problemas geométricos comunes.

Segunda Parte

PLANOS ACOTADOS

CAPÍTULO V

PUNTO, RECTA Y PLANO

XI.—EL PUNTO Y LA RECTA.

1.—CONCEPTOS GENERALES.

Tal como ya se mencionó, al principio del Capítulo I de los presentes Apuntes, para la resolución gráfica de problemas geométricos mediante la aplicación de la Teoría de los Planos Acotados, en Geometría Descriptiva se utiliza como sistema de referencia un solo plano de proyección, que se acostumbra considerar como plano horizontal, tal que divide al espacio geométrico tridimensional en dos regiones, una a cada lado de aquel, que se designan como región positiva a la superior, y región negativa a la inferior.

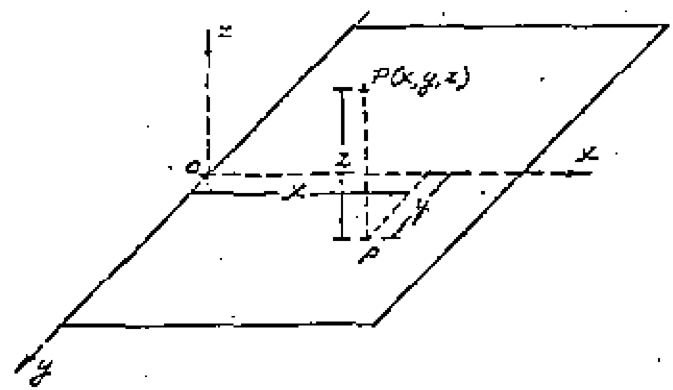


Fig. XI.1.1.

Entonces, al considerar sólo una simple proyección ortogonal de un punto cualquiera P del espacio, cuyas coordenadas (x, y, z) sabemos se designan en Geometría Descriptiva como (distancia, alejamiento y cota), respectivamente, es necesario acompañarla del dato que indique la posición del punto respecto al plano de referencia, proporcionando generalmente en forma numérica, el valor de la cota (z) de P respecto al plano (X, Y), que señale la región correspondiente con signo positivo o negativo.

Así establecido (Fig. XI.1.1), el sistema de referencia (X, Y, Z) usando en la Teoría de las Proyecciones Acotadas (o de los Planos Acotados) corresponde idénticamente al que se ha utilizado en la Doble Proyección Ortogonal y, por lo tanto, es igual al que la Geometría Analítica designa como un sistema izquierdo de coordenadas, sólo que ahora se presenta como:

— Un solo plano de proyección (X, Y), sobre el cual se determinan la primera y la segunda coordenadas (distancia y alejamiento) del punto P, cuya proyección se va ahora a representar con la letra minúscula p correspondiente al mismo nombre del punto en el espacio, y

— Un valor numérico adicional, positivo o negativo (z), que indica la posición del punto arriba o abajo del anterior plano de referencia, y corresponde a la tercera coordenada (cota) del punto considerado.

Es decir, dado que en la Teoría de los Planos Acotados el plano de referencia, donde se realiza la proyección de un punto cualquiera, es único y no está superpuesto con ningún otro plano, el valor (z) de la cota se acostumbra indicar numéricamente como un subíndice anotado en seguida de la designación p de la proyección del punto.

2.—PROYECCION ACOTADA DE UN PUNTO.

Por lo tanto, dado un punto cualquiera P (x, y, z) del espacio tridimensional, la Geometría Descriptiva lo acostumbra representar gráficamente, utilizando la Teoría de los Planos Acotados (o más propiamente dicho: de las Proyecciones Acotadas), como se muestra en la Fig. XI.2.1:

1o.—Trazando el eje de las X sobre el plano de referencia, en la misma posición correspondiente a la Línea de Tierra usada en la Doble Proyección Ortogonal, a la mitad de la altura del papel utilizado, y marcando sobre dicho eje, medido a partir del margen izquierdo, el valor de la distancia (x) del punto, considerada como antes, siempre positiva.

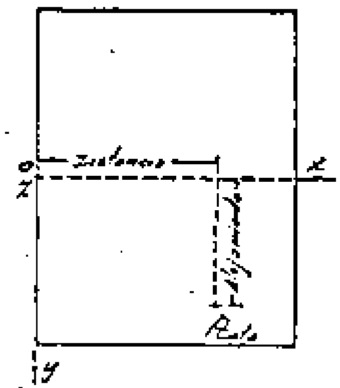


Fig. XI.2.1.

2o.—Trazando por esa marca una referencia normal al eje de las X, a partir del cual se lleva, sobre dicha referencia, el valor del alejamiento (y), hacia abajo o hacia arriba, según que su signo sea positivo o negativo, determinando ahí la proyección *p* del punto considerado, y

3o.—Escribiendo a continuación (de *p*) el valor numérico, positivo o negativo, de la cota (z) del punto P.

Es claro que, para la anterior representación gráfica de las unidades de longitud proporcionadas en los datos, debe utilizarse una escala adecuada y, por lo tanto, en todos los ejemplos y problemas que en este Curso aparecen expuestos, se considera que la escala utilizada es tal que las unidades de longitud correspondientes a los datos quedan representadas en centímetros en el plano de proyecciones acotadas de la Geometría Descriptiva, igual que en la doble proyección ortogonal.

Ejemplos.—(Fig. XI.2.2).—Dibujar las proyecciones acotadas, en el plano de referencia, de los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas se indican a continuación:

A(7.5, −9.3, 5.3), B(15.2, 7.4, 6.5), C(4.8, 5.0, −8.0), D(10.5, −7.4, −4.8), E(18.6, 3.2, −1.7), F(5.0, −6.5, 5.0), G(17.7, −4.4, −6.2) y H(12.2, 6.8, 3.6).

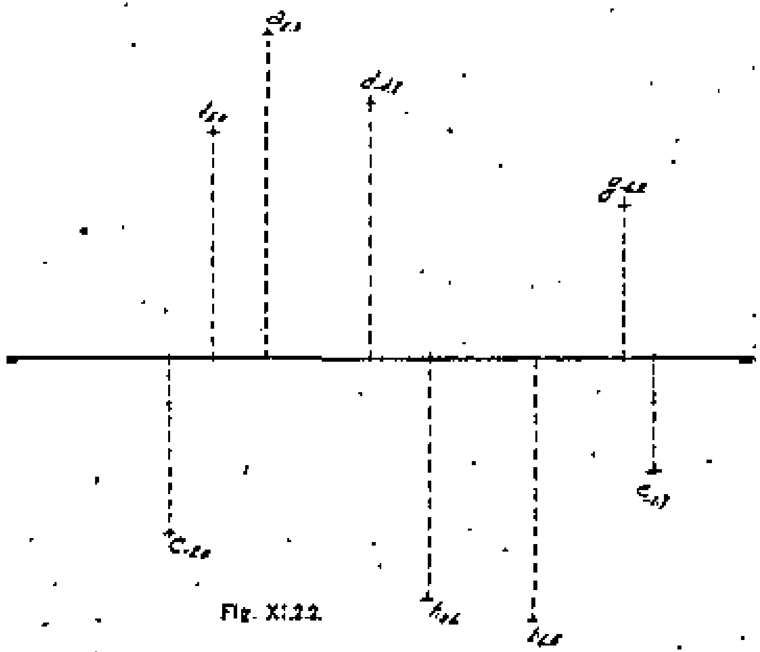


Fig. XI.2.2.

NOTA.—Se acostumbra distinguir de los demás puntos de un conjunto considerado, a todos los puntos cuya cota (z) tiene un valor entero, designándolos como puntos de cota redonda, tales como C y F de los presentes ejemplos.

3.—PROYECCIONES ACOTADAS DE UNA RECTA.

a) Pendiente de un segmento.—Cuando se obtienen las proyecciones ortogonales acotadas (p_{z_p} y q_{z_q}) de dos puntos cualesquiera (P y Q) del espacio, el segmento (p_{z_p} q_{z_q}) es la proyección acotada del segmento (PQ), y las prolongaciones respectivas representan la

recta indefinida que contiene los puntos dados, como puede observarse en la Fig. XI.3.1.

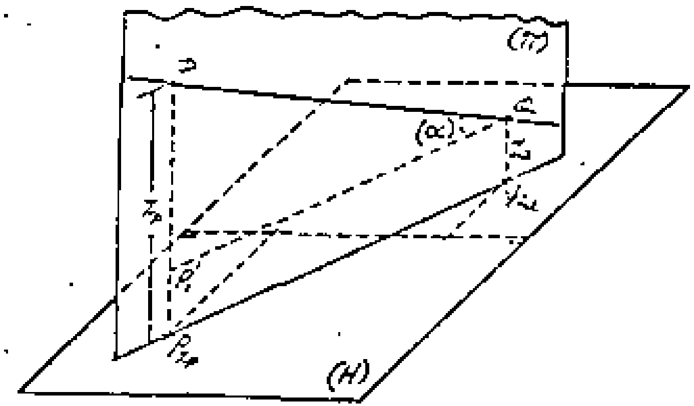


Fig. XI.3.1.

El plano (π), normal a (H), que está definido por las rectas proyectantes ortogonales que contienen los puntos: P, p_{z_p} y Q, q_{z_q}, es el plano proyectante del segmento (PQ) y de la recta que lo contiene, y su intersección con el plano de referencia (H) es precisamente la proyección buscada del segmento dado.

El valor algebraico del cociente: $m = \dfrac{z_q - z_p}{\overline{|q_{z_q}\; p_{z_p}|}} = \tan(\alpha)$, es

la pendiente del segmento (PQ) y de la recta indefinida que contiene a dichos puntos; debiendo observarse que la pendiente del segmento (PQ) es del mismo valor absoluto, pero de signo contrario a la del segmento (QP), de dirección (ó sentido) opuesta a la del primer segmento mencionado.

Así, dadas las coordenadas de los puntos: P(5.2, 2.4, 9.0) y Q(12.4, −8.8, 1.8), la representación del segmento que los contiene, en el plano de proyecciones acotadas, se muestra en la Fig. XI.3.2, a partir donde se puede calcular la pendiente del segmento (PQ):

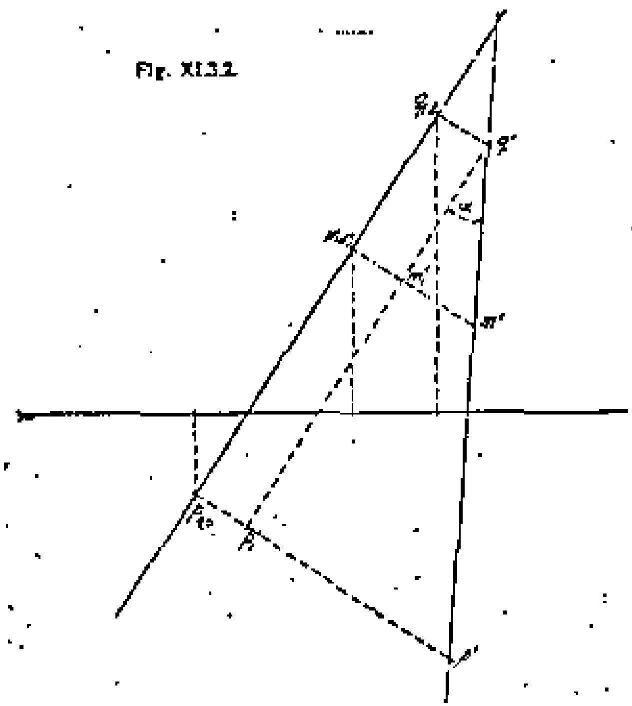


Fig. XI.3.2

$$m = \frac{1.8 - 9.0}{|pq|} = -\frac{7.2}{13.3} = -0.54,$$ donde por el signo negativo, se observa que dicho segmento es descendente de P hacia Q, y que:

$$(\alpha) = \text{ang tan } m = \text{ang tan } (0.54) = 28°20'.$$

es el valor del ángulo formado entre la recta dada (PQ) y su proyección acotada ($p_{9.0}q_{1.8}$), o sea con el plano de referencia.

b) Superposición o abatimiento de plano proyectante de un segmento.—Cuando el plano proyectante de la recta (PQ) se considera superpuesto con el plano horizontal (H) de referencia (Figs. XI.3.2 y XI.3.3) mediante una supuesta rotación alrededor de un eje que coin-

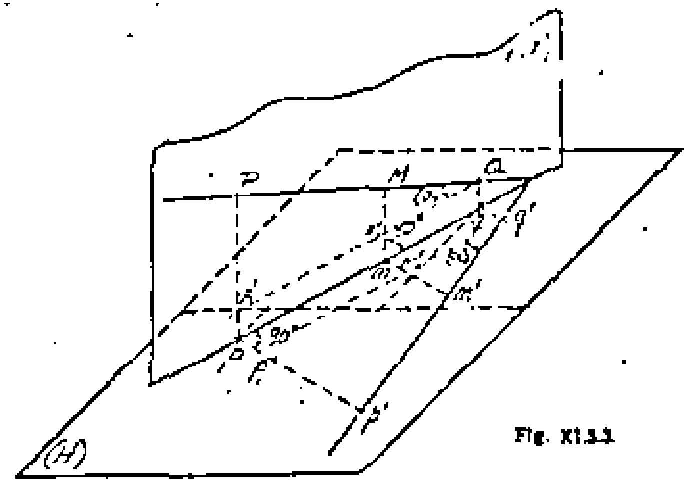


Fig. XI.3.3

cide con la proyección acotada de aquella misma, la figura abatida que se obtiene, del trapecio (pPqQ) = (pp'qq'), muestra gráficamente en magnitud real: la longitud (PQ) = (p'q'), el ángulo (α), las cotas (pp') = (pP) y (qq') = (qQ) de los puntos P y Q, respectivamente, y la de cualquier otro punto de la misma recta, tal como M, cuya cota es (mM) = 4.3, midiéndola directamente sobre la normal trazada de m' a la proyección acotada del segmento, o bien midiendo primero (qm), y calculando después:

$$(mM) = (mm') = (mm_1') + (qm) \tan (\alpha)$$
$$= 1.8 + \underbrace{4.7 \times 0.54}_{2.55} = 4.35.$$

Es obvio que la magnitud real puede también calcularse a partir de la medida de *(pq)*, como sigue:

$$|PQ| = \sqrt{(pq)^2 + (Z_q - Z_p)^2} = \sqrt{(13.3)^2 + (7.2)^2} = 15.1$$

También el problema recíproco puede resolverse mediante este procedimiento del abatimiento del plano proyectante del segmento, girado alrededor de la proyección acotada, hasta quedar superpuesto con el plano horizontal de referencia (Fig. XI.3.3); es decir, puede determinarse gráficamente la proyección acotada de un punto del segmento dado, cuando se conoce su cota.

Por ejemplo, pueden determinarse gráficamente las coordenadas faltantes (distancia y alejamiento) de los puntos C y D, contenidos en el segmento (AB): A(7.1, 6.8, 1.7), B(16.0, −2.7, 6.3), si se sabe que sus cotas respectivas son: 3.1 y 5.35, efectuando la representación gráfica de la proyección acotada y el abatimiento convencional como se indica en la Fig. XI.3.4, para medir las longitudes

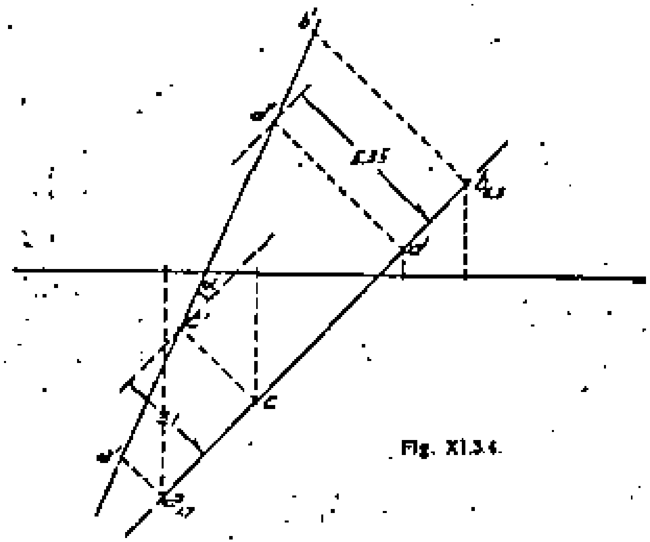


Fig. XI.3.4.

correspondientes a los valores buscados de las coordenadas de C y D, obteniendo como solución: C(9.8, 3.85, 3.1) y D(14.2, −0.75, 5.35).

c) **Rectas horizontales y verticales.**—Claramente puede observarse (Fig. XI.3.5) que:

— Cuando dos puntos cualesquiera de un segmento de recta tienen cotas iguales, su pendiente resulta igual a cero y, en ese caso, la recta que los contiene, siendo paralela al plano horizontal de referencia, se conoce como recta horizontal, definida precisamente por esa característica de estar formada por puntos de cotas iguales, debido a lo cual en su proyección acotada pueden marcarse dos cualesquiera de sus puntos con sus cotas iguales (por ejemplo: $a_{4.1}$, $b_{4.1}$), o simplemente designarse por una sola literal con la cota de todos los puntos de la recta dada.

— Cuando las proyecciones de dos puntos cualesquiera de una recta resultan coincidentes en el plano horizontal de referencia, su pendiente no está definida, pues se trata de una recta vertical que, siendo perpendicular al plano de proyección, todos sus puntos se re-

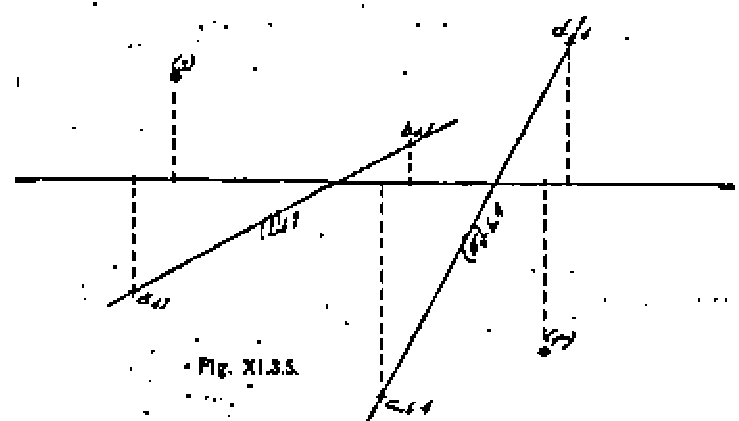


Fig. XI.3.5.

presenten en él confundidos en un solo punto, cuyas dos coordenadas: distancia y alejamiento, corresponden a todos los puntos de la recta, mientras que la cota es variable de unos a otros. Esta recta se acostumbra indicar por la proyección de un solo punto encerrado dentro de un pequeño círculo.

Así, en la Fig. XI.3.5, se muestran como ejemplos, las proyecciones acotadas de las rectas que contienen los segmentos que se mencionan:

(l): A(3.6, 3.3, 4.8), B(11.8, −1.2, 4.8).
(m): C(11.0, 6.4, −6.4, D(16.5, −4.3, −6.4).
(r): E(15.8, 5.0, z), F(15.8, 5.0, z).
(s): G(4.8, −3.1, z), H(4.8, −3.1, z).

d) **Intervalo de un segmento.**—Al emplear el método ya conocido para localizar las proyecciones acotadas de puntos cualesquiera de cotas conocidas de una recta dada, la longitud que se obtiene entre las proyecciones de dos puntos consecutivos de cota redonda se acostumbra designar como intervalo de la recta, o también como su módulo.

Los puntos de cota redonda: A, B, C, D, E, . . . , se proyectan en: a, b, c, d, e, . . . , a intervalos iguales sobre la proyección acotada de la recta que contiene al segmento (PQ) considerado, de manera que el módulo resulta:

$$I = \frac{1}{|\tan \alpha|} = \frac{1}{|m|}$$

en valor positivo igual al recíproco de la pendiente.

Para localizar gráficamente las proyecciones acotadas de los puntos de cota redonda, después de considerar el abatimiento de la recta se dibujan horizontales (h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3, . . .) cuyas intersecciones definen esos puntos de cota redonda con el segmento dado, que se refieren a la proyección acotada correspondiente, como se ilustra en la Fig. XI.3.6.

Claro que, cuando se conocen las proyecciones de dos puntos de cota redonda de un segmento, el módulo o intervalo se obtiene fácilmente dividiendo la longitud existente entre ambas proyecciones entre la diferencia de cotas de los puntos respectivos, y llevando ese inter-

valo sobre la proyección acotada de la recta, a partir de uno de los puntos conocidos, hasta modular o graduar toda la proyección.

Cuando no se conoce algún punto de cota redonda, sino que los datos corresponden a proyecciones acotadas de puntos cualesquiera, puede emplearse el mismo procedimiento, sólo que una vez calculado el valor del intervalo tiene que determinarse la proyección del punto de cota redonda más próximo a una de las proyecciones acotadas conocidas, midiendo a partir de esa posición una fracción del módulo proporcional a la diferencia de las cotas entre dichos puntos, como puede observarse también en el ejemplo de la Fig. XI.3.6, donde, siendo: P(4.2, −4.2, 4.6) y Q(12.2, 2.0, −1.8), se tiene:

$$m = \frac{4.6 - (-1.8)}{\overline{(p_{4.6}q_{-1.8})}} = \frac{6.4}{10.1} = 0.633; \quad I = \frac{1}{.633} = 1.58,$$

$$(\alpha) = \text{ang tan } (0.633) = 32°20'; \quad \overline{(p_{4.6}a_{4})} = 0.6 \times 1.58 = 0.95.$$

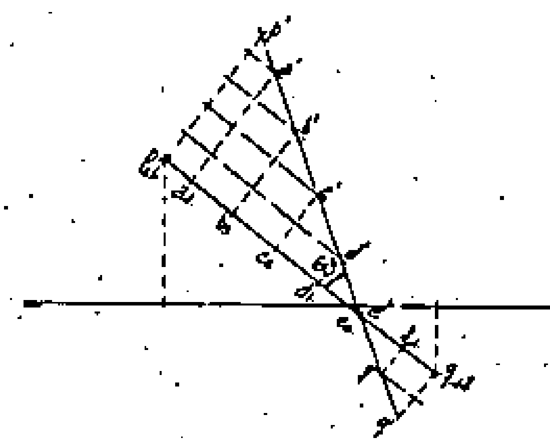


Fig. XI.3.6.

El punto de cota redonda igual a cero, de una recta dada cualquiera, por pertenecer simultáneamente a dicha recta y al plano horizontal de referencia, corresponde a la intersección entre ambos elementos (recta y plano), y se designa como la traza de la recta.

NOTA.—El intervalo de una recta horizontal del espacio no está definido y, por lo tanto, una recta de este tipo particular no puede graduarse o modularse, ya que todos sus puntos son de una misma cota. Tampoco pueden ser graduadas las rectas verticales, porque al tener un intervalo igual a cero, las proyecciones acotadas de todos sus puntos son coincidentes, como ya antes se observó.

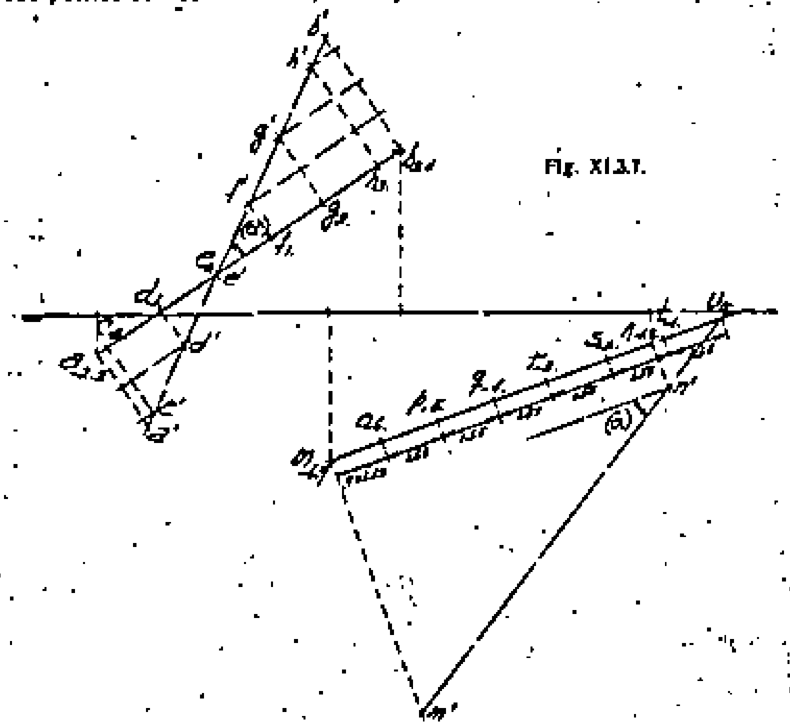


Fig. XI.3.7.

Ejemplos: (Figs. XI.3.7).

Problema No. 1.—Obtener gráficamente los puntos de cota redonda y la traza de la recta que contiene los puntos: A(2.0, 1.0, −2.2) y B(9.8, −4.2, 3.4).

Solución: (Se puede observar detalladamente en la figura).

Problema No. 2.—Determinar los valores de: la pendiente (m), el ángulo (α) que forma con su proyección, el intervalo (i), la traza u_0 y las proyecciones de los puntos de cota redonda comprendidos entre: M(7.9, 3.8, −6.9) y N(16.2, 0.8, −1.2).

Solución: Midiendo:

$$\overline{(m_{-6.9}n_{-1.2})} = 8.8,$$

y luego calculando:

$$m = \frac{-1.2 - (-6.9)}{8.8} = 0.646,$$

$$\alpha = \text{ang tan } (0.646) = 32°50'.$$

$$i = 1.55; \quad \overline{(m_{-6.9}0_{-1})} = .9 \times 1.55.$$

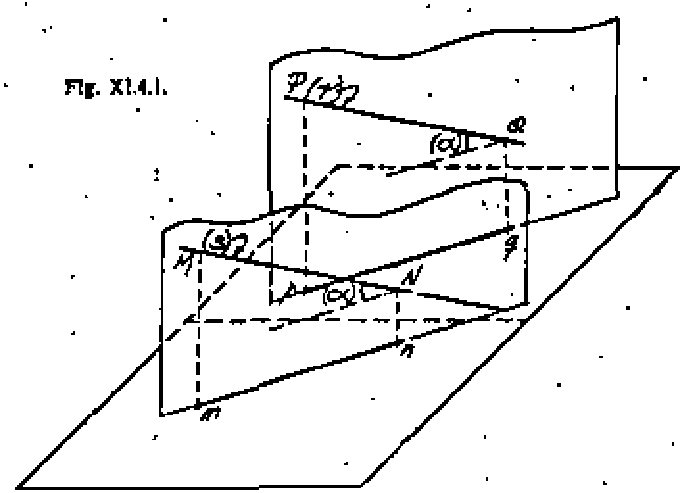
4.—POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.

a) **Rectas paralelas.**—Cuando se tienen dos rectas paralelas, (r) y (s), sus planos proyectantes son paralelos (ya que cada uno contiene una recta paralela al otro, y ambos tienen la misma dirección, por ser perpendiculares al plano de referencia) y, por lo tanto, las proyecciones acotadas también son paralelas entre sí (Fig. XI.4.1).

Y como, por otra parte, al tratarse de dos rectas paralelas (de direcciones iguales), el ángulo que cada recta forma con el plano de proyección tiene el mismo valor (α), sus pendientes resultan iguales, en la Geometría Descriptiva se establece como condición necesaria para el paralelismo entre dos rectas: "que sus proyecciones acotadas sean paralelas, y sus pendientes iguales", la cual también resulta suficiente, dado que la recíproca también es verdadera, como fácilmente puede demostrarse invirtiendo el razonamiento anterior.

Entonces, al aplicar la Teoría de los Planos Acotados, dos rectas son paralelas cuando sus proyecciones acotadas lo son, y sus pendientes son iguales en magnitud y signo, lo cual también establece igualdad entre sus ángulos con el plano de referencia, y entre sus intervalos o módulos; aunque estas últimas igualdades entre ángulos y mó-

Fig. XI.4.1.



dulos deben cumplirse no sólo en sus magnitudes, sino también en su sentido de crecimiento o decrecimiento.

Las dos condiciones anteriores (paralelismo de proyecciones e igualdad de módulos) determinan gráficamente el paralelismo entre dos rectas, para la solución de problemas relativos, lo que también puede lograrse utilizando sólo la primera de las condiciones que se acaban de mencionar y calculando después la pendiente de aquella cuyos datos sean suficientes para ello, como puede observarse en los siguientes

Ejemplos:

Problema No. 1.—Dado el segmento de recta: A(2.6, 1.4, −1.7), B(10.2, −3.9, −6.3), trazar por los puntos C(5.9, −4.7, −5.1), D(14.3, −1.4, −3.2) y E(17.8, 4.3, −4.3), otras paralelas.

Solución: (Fig. XI.4.2).

1o.—Por las proyecciones acotadas de los otros puntos (C, D y E) se trazan paralelas a la del segmento dado (AB).

2o.—Se gradúa la proyección acotada (ab), gráficamente como se indica, mediante el abatimiento ya conocido de la recta, y luego se calcula: la pendiente (m), el intervalo: I = l/m, para efectuar la

graduación de los otros segmentos, ya que los intervalos de (AB) se obtienen directamente de su proyección abatida, mediante las horizontales de cota redonda: −6., −5., −4., . . . , que se muestran en la figura, como se acabó de anotar.

3o.—Se calculan las fracciones de intervalo: $0.9 \times I$, $0.8 \times I$, y $0.7 \times I$, necesarias para localizar los puntos de cota redonda: −6., −4., y −5., próximos a: $c_{-5.1}$, $d_{-3.2}$ y $e_{-4.3}$, respectivamente.

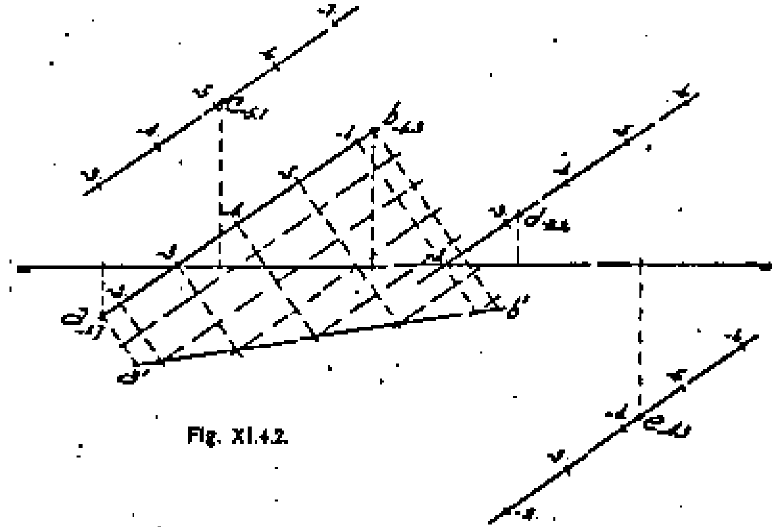


Fig. XI.4.2.

$$m = \frac{4.6}{9.3} = 0.495, \quad I = \frac{1}{0.495} \doteq 2.02, \quad 0.9 \times I = 1.818,$$

$$0.8 \times I = 1.616, \quad 0.7 \times I = 1.414.$$

4o.—Ya conocidos los anteriores puntos de cota redonda, se marcan los demás llevando a continuación de aquellos otros intervalos iguales.

Problema No. 2.—Dados los puntos: P(4.0, 2.7, 5.8) y Q(11.0, −3.8, z), de un segmento de recta de pendiente igual a −0.50, dibujar por R(12.8, 6.3, 4.4) y S(5.5, −4.5, 0), las proyecciones graduadas de otras rectas paralelas a la primera.

Solución: (Fig. XI.4.3).

1o.—Se dibuja la proyección acotada *(pq)*, y se trazan paralelas a ella por *r* y *s*.

2o.—Se calcula el intervalo: $I = \frac{1}{|0.5|} = 2$, y las fracciones del mismo: $0.8\,I = 1.6$ y $0.4\,I = 0.8$, correspondientes a las proyecciones de los puntos de cota redonda próximos a $p_{3\text{-}4}$ y $r_{4\text{-}4}$ respectivamente, para indicar enseguida, a partir de ellos, la graduación de las rectas pedidas, con el intervalo calculado.

3o.—Se obtiene la cota del punto Q, después de haber medido: $\overline{pq} = 9.6$, y calculando: $z = 5.8 - 9.6 \times 0.5 = 5.8 - 4.8 = 1.0$.

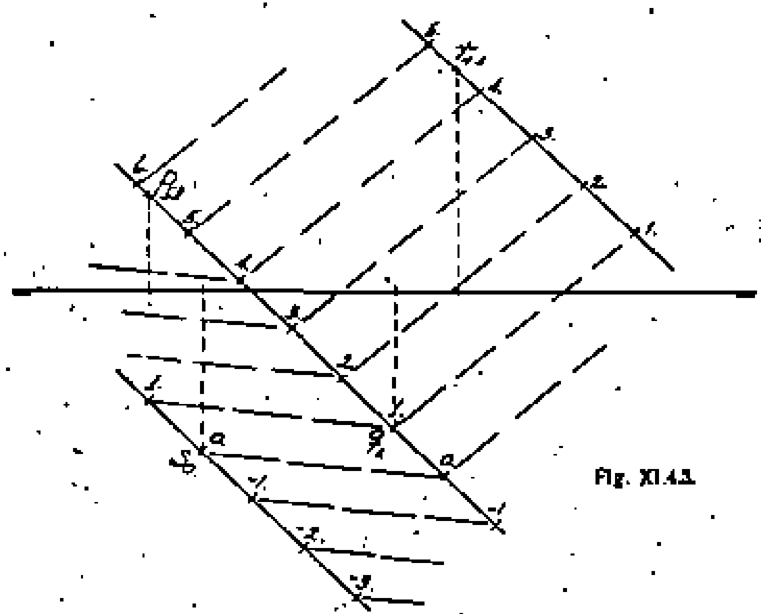


Fig. XI.4.3.

NOTA.—Puede observarse que las rectas que unen puntos de cotas iguales forman paralelogramos.

b) **Rectas concurrentes.**—Cuando se tienen dos rectas cualesquiera (no paralelas), que contienen los segmentos (FG) y (KL), sus planos proyectantes, (π) y (Δ), se intersectan de manera que la recta común entre ambos es la vertical (v), proyectante simultánea de un punto de (FG) y de otro de (KL), de proyecciones coincidentes en el plano (H) de referencia, sólo que dichos puntos no tienen cotas iguales si las rectas correspondientes a los segmentos considerados sólamente se cruzan, sin intersectarse, mientras que si las rectas se cortan, esos puntos de proyecciones coincidentes tienen sus cotas iguales, como puede observarse entre las rectas (KL) y (MN) (Fig. XI.4.4).

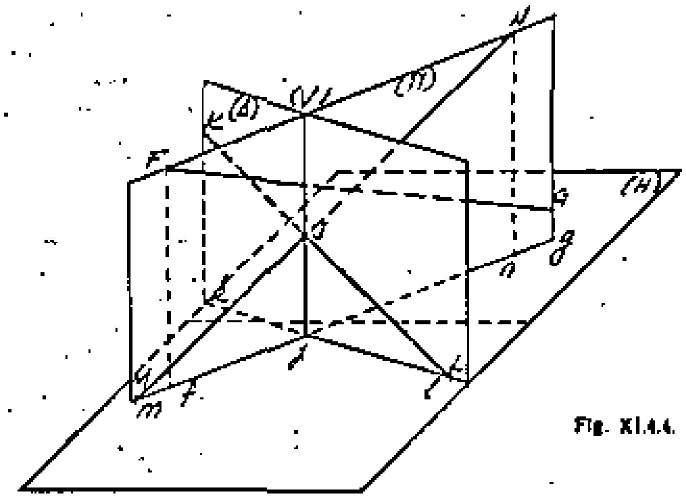


Fig. XI.4.4.

Por lo tanto, en la Teoría de los Planos Acotados se define como condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean concurrentes: "que sus proyecciones se corten en un punto tal cuyas cotas sean iguales", ya sea que se considere como perteneciente a una o a otra de las dos rectas consideradas.

Ejemplos:

Problema No. 1.—Dados: K(6.3, 1.0, 2.2), L(14.5, −4.5, 5.8), M(6.7, −7.0, 4.8) y N(16.0, 0, z), determinar gráficamente la cota (z) del punto N, si se sabe que los segmentos (KL) y (MN) son concurrentes, calculando también las coordenadas del punto J de concurrencia.

Solución: (Fig. XI.4.5).

1o.—Se dibujan las proyecciones de los dos segmentos (KL) y (MN), obteniendo así la proyección del punto J de concurrencia.

2o.—Se efectúa el abatimiento de (KL), para determinar la cota (j'j) de ese punto de concurrencia, cuyo valor llevado normalmente a la proyección (mn), junto con la cota de M, permite dibujar el abatimiento (m'n'), prolongándolo hasta la normal a (mn) por n.

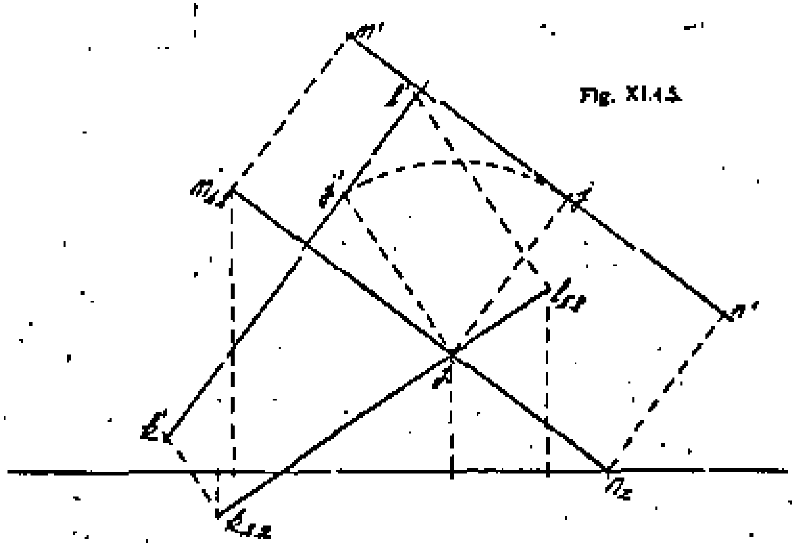


Fig. XI.4.5.

3o.—La longitud (n'n) = 4.8, es la cota buscada del punto N, y las coordenadas del punto de intersección se pueden medir directamente en la figura, obteniéndose: J(12.1, −2.9, 4.8), o sea que el segmento (MN) resulta ser horizontal.

Nota.—También puede resolverse este problema calculando:

$$m_{(kl)} = \frac{5.8 - 2.2}{9.8} = .367$$

$$(j'j) = 2.2 + .367 \times 7.05 = 2.2 + 2.6 = 4.8.$$

$$m_{(mn)} = \frac{4.8 - 4.8}{11.65} = 0.$$

$$z = 4.8 + 0 = 4.8.$$

Problema No. 2.—Siendo los segmentos (AB) y (CB) concurrentes en B(11.0, 2.7, 1.2), y sabiendo que sus respectivas pendientes son: −0.55 y 0.85, completar las coordenadas de: A(5.2, −3.6, z_1) y C(3.4, 4.7, z_2).

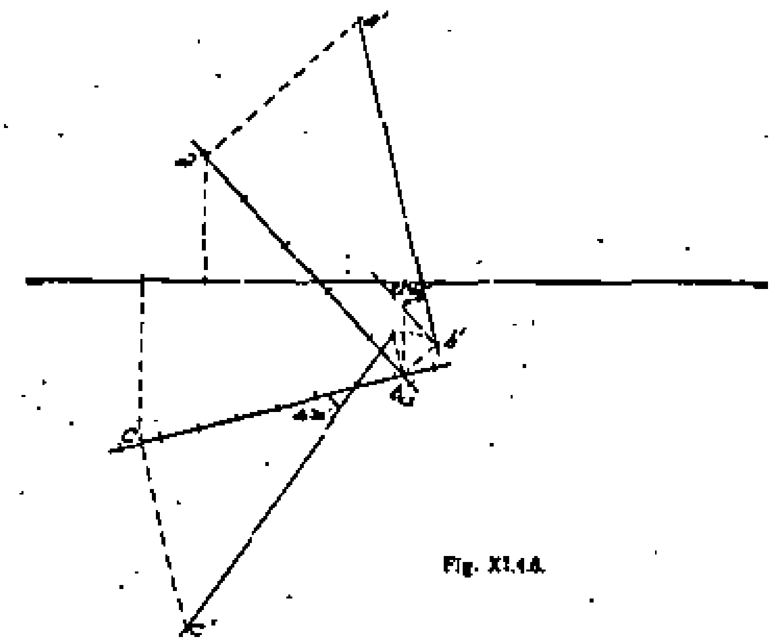


Fig. XI.4.6.

Solución: (Fig. XI.4.6).

1o.—Se dibujan las proyecciones de ambos segmentos, midiendo las longitudes: $(\overline{ab}) = 8.6$, y $(\overline{cb}) = 7.9$.

2o.—Se calculan los valores.

$$z_1 = 1.2 - 8.6(-0.55) = 1.2 + 4.7 = 5.9.$$
$$z_2 = 1.2 - 7.9(0.85) = 1.2 - 6.7 = -5.5,$$

siendo los intervalos de (ab) y (cb), respectivamente:

$$i = \frac{1}{0.55} = 1.82 \qquad i = \frac{1}{0.85} = 1.18.$$

Nota.—También puede obtenerse la solución gráficamente, dibujando los abatimientos de los segmentos dados, a partir de la cota $(\overline{b'b})$ de B, y de los valores de los ángulos:

$$(\alpha_1) = \text{ang tan } (-0.55) = 28°45'.$$
$$(\alpha_2) = \text{ang tan } (0.85) = 40°20'.$$

5.—EJERCICIOS. (Serie XI).

1.—Dibujar las proyecciones acotadas, y determinar gráficamente su graduación, marcando los intervalos y los ángulos que forman con el plano horizontal de referencia, de las rectas que contienen los siguientes puntos:

a) A(4.3, −2.5, 2.3) y B(16.4, −2.5, 7.5).
b) C(3.4, 6.5, 4.0) y D(11.8, 3.5, −6.5).
c) E(6.6, −4.7, 2.3) y F(17.6 4.0, z), y es horizontal.
d) G(14.6, −5.3, z), y es vertical.

2o.—Calcular los valores de la pendiente, los intervalos y los ángulos que forman con el plano horizontal de referencia, marcando las proyecciones de sus puntos de cota redonda, para las rectas que pasan por los puntos siguientes:

a) K(4.7, −2.0, 2.8) y L(13.5, −7.0, −5.1).
b) M(9.5, −2.2, −1.7) y N(19.3, 5.9, −7.6).
c) P(3.1, 3.5, −1.5) y Q(14.7, 3.5, 5.0).

3.—Dados los puntos: A(15.4, −5.0, −6.2), B(11.1, 4.1, −0.8) y C(3.0, 1.3, 5.8), dibujar por cada uno de ellos las proyecciones acotadas de rectas paralelas a la que está definida por los puntos: D(10.2, −1.6, 2.9) y E(17.2 5.3, −4.1), determinando las proyecciones acotadas de sus puntos de cota redonda.

4.—Datos: M(4.5, 4.7, 2.6), N(13.1, −1.2, z), J(6.5, −3.5, 6.7), K(12.2, 4.3, 1.6), L(14.3, −4.9, −1.9), y (m) = −0.42. Dibujar las proyecciones graduadas acotadas de las rectas que pasan por cada uno de los puntos J, K y L, y son paralelas a la que contiene al segmento (MN), cuya pendiente es (m), calculando también la cota de N.

5.—Obtener gráficamente el valor de la cota del punto S, sabiendo que los segmentos (PQ) y (RS) son concurrentes, determinando también las coordenadas del punto O de concurrencia, y marcando sus intervalos, sabiendo que: P(7.9, 3.6, 3.1), Q(18.1, −4.5, 7.7), R(2.8, −1.3, −2.8) y S(11.4, 3.7, z).

6.—Siendo concurrentes en Q(15.4, 2.4, 2.1) los segmentos (PQ) y (MQ), de pendientes iguales a −0.33 y 0.70, respectivamente, completar las coordenadas de P(3.5, −4.3, z_1) y M(5.6, 5.0, z_2), y dibujar las proyecciones de sus puntos de cota redonda.

7.—Utilizando uno de los métodos conocidos (gráfico o numérico) o ambos combinados, determinar si alguno de los segmentos (KL), (MN) y (PQ) es concurrente con otro de ellos, sabiendo que: K(2.4, 3.3, −3.0), L(10.5, −8.9, 6.0), M(1.8, 0.6, 2.5), N(18.4, 5.9, 8.6), P(7.8, −8.0, 3.6), Q(15.6, 7.0, z), y que la pendiente de (PQ) es igual a 0.26, calculando en caso dado las coordenadas de dicho punto de intersección J.

8.—Determinar gráficamente las coordenadas de los puntos de intersección de cada dos de los segmentos de proyecciones coincidentes:

a) A(4.6, 1.4, 6.0), B(14.2, 6.8, 1.7) y C(4.6, 1.4, −2.2), D(14.2, 6.8, 5.2).

b) M(7.8, 2.4, 5.5), N(17.2, −4.3, 1.2) y P(7.8, 2.4, 1.8), Q(17.2, −4.3, 4.9).

utilizando sus abatimientos, y calcular también sus pendientes, intervalos y ángulos correspondientes.

XII.—EL PLANO EN EL ESPACIO

1.—PUNTOS Y RECTAS DE UN PLANO.

a) Definición.—Como tres puntos diferentes, no alineados, definen siempre un plano, en la Teoría de las Proyecciones Acotadas se determina un plano cualquiera (π) cuando se conocen las proyecciones acotadas de tres de sus puntos no colineales, o de otros datos que permitan tal conocimiento, como las proyecciones acotadas, por ejemplo, de dos de sus rectas, concurrentes o paralelas, que sabemos corresponden a otras maneras de representar el plano considerado.

Así (Fig. XII.1.1), el plano (π) queda completamente determinado cuando, al ser conocidas las coordenadas de tres de sus puntos: A, B y C, pueden representarse sus proyecciones acotadas correspondientes, a partir de las cuales pueden obtenerse las de las rectas (AB), (BC) y (AC), concurrentes de dos en dos, que pasan por dichos puntos, así como la proyección de la recta paralela a uno cualquiera

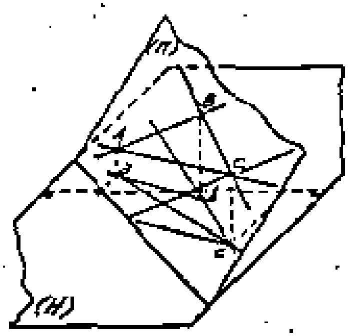


Fig. XII.1.1.

de los segmentos definido por dos de esos puntos (A y B, por ejemplo), que pase por el otro C.

Ya representadas así esas rectas del plano, pueden ser graduadas de la manera conocida, y entonces permiten obtener las coordenadas de otros puntos de aquél, como se ilustra en el siguiente:

Ejemplo: Dado el plano (π), que contiene los puntos A(5.0, $-$1.0, 1.5), B(12.1, $-$4.3, 6.0) y C(17.5, 5.3, 0.8):

a) Graduar las proyecciones de las rectas que resultan de unir dichos puntos.

b) Dibujar la proyección graduada de una recta paralela a (AB), que pase por C, y

c) Determinar los valores de las coordenadas faltantes (cotas) de los puntos: D(3.8, 3.4, z_1) y E(16.0, $-$2.5, z_2), del mismo plano (π).

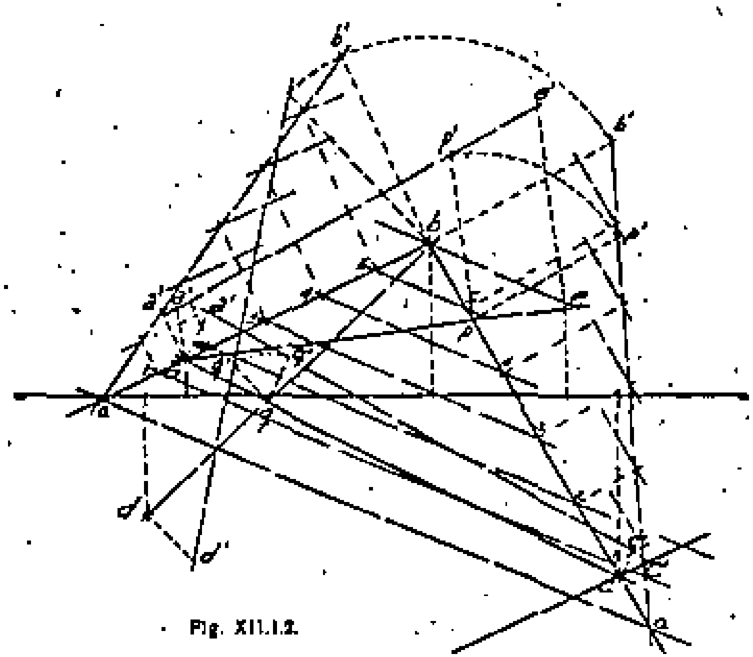


Fig. XII.1.2.

Solución: (Fig. XII.1.2).

1o.—Después de dibujar las proyecciones de las rectas que unen los puntos dados, se efectúan los abatimientos y la graduación de dos de ellas: *(ab)* y *(bc)*, mediante las horizontales de cota redonda que se indican en la figura, dibujadas paralelamente a cada una de las proyecciones consideradas.

2o.—Por *c* se dibuja una paralela a *(ab)*, que al ser graduada en iguales intervalos que ella, representa la proyección acotada de la recta del mismo plano (π), que pasa por C, y es paralela a (AB).

3o.—Dibujando las proyecciones de rectas del plano dado, que unan los puntos D y E con B y A, respectivamente, se obtienen las cotas de sus puntos de intersección Q y P, con los segmentos correspondientes (AC) y (BC), a partir de los abatimientos de estos últimos, cuyos valores al referirse normalmente a *(db)* y *(ae)*, proporcionan los abatimientos de (BQ) y (AP) que al ser prolongados permiten medir las cotas buscadas: $z_1 = \overline{d'd} = 1.9$ y $z_2 = \overline{e'e} = 5.9$.

Nota.—Puede observarse que, si se trazan las rectas de unión de las proyecciones de los puntos de cota redonda de los segmentos (AB) y (BC), quedan representadas las proyecciones de las horizontales del plano, cuyas cotas sean las correspondientes (1-1, 2-2, 3-3, 4-4, . . .), y donde (0-0) es la traza horizontal del plano (π).

b) **Rectas horizontales y de máxima pendiente.**—En el ejemplo ilustrativo anterior se puede observar que, cuando se conocen las proyecciones graduadas de dos rectas cualesquiera de un mismo plano, pueden trazarse las proyecciones de sus rectas horizontales con sólo unir las proyecciones de los puntos de cotas redondas iguales, de ambas rectas.

De esa manera quedan indicadas, por las proyecciones de las horizontales antes mencionadas, las intersecciones del plano dado con planos paralelos al de referencia, y cuyos puntos son todos de cotas redondas iguales (Fig. XII.1.3). La horizontal de cota igual a cero es la intersección del plano dado cualquiera con el horizontal de proyección, recta que se designa como la traza del plano.

Sabiendo ya que la pendiente de una recta dada cualquiera es igual al valor de la tangente trignométrica del ángulo que la recta forma con su propia proyección, o sea con el plano de referencia ($m = \tan \alpha$), es fácil observar que las rectas de máxima pendiente que se encuentran en dicho plano son todas aquellas que resultan perpen-

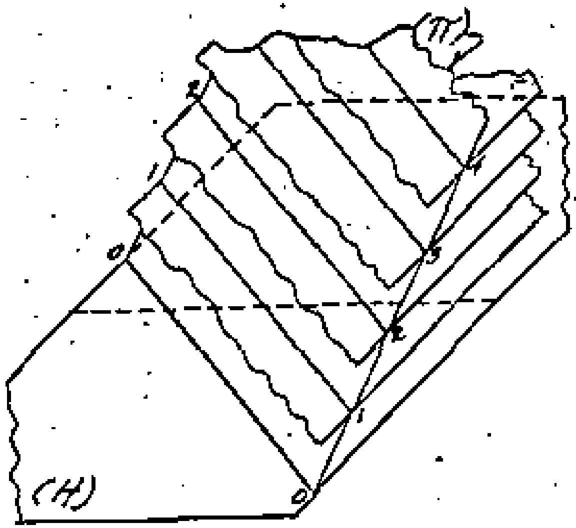


Fig. XII.1.3.

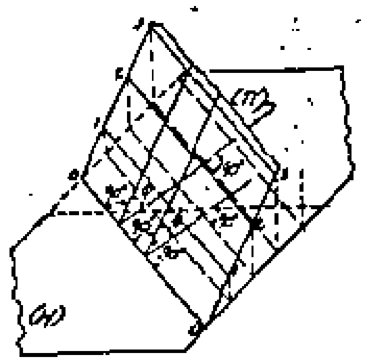


Fig. XII.1.4

diculares a su traza, y a todas sus rectas horizontales (Fig. XII.1.4), ya que así es como el ángulo (α) adquiere su valor máximo (ϕ).

Respecto a lo anterior, pueden anotarse las siguientes

Observaciones:

1a.—Ese valor máximo (ϕ) se designa como el del **ángulo entre el plano cualquiera y el horizontal de referencia**, y puede obtenerse gráficamente efectuando el abatimiento de una de las **rectas de máxima pendiente.**

2a.—La longitud correspondiente al intervalo o módulo de una recta de máxima pendiente resulta ser el menor de los valores correspondientes a todas las demás rectas del mismo plano, ya que $\tan \phi$ es el máximo valor de (m), y ese intervalo se conoce frecuentemente como **escala de pendiente** del plano.

3a.—La proyección de una recta de máxima pendiente se acostumbra representar, en la Teoría de los Planos Acotados, mediante dos rectas paralelas, muy próximas, una un poco más gruesa que la otra, donde se indica su graduación marcando sus puntos de cota redonda, a intervalos o módulos correspondientes **a la escala de pendiente** del plano en que se encuentra.

Ejemplos:

Problema No. 1.—Dados los segmentos: **A**(10.4, −7.5, −2.0), **B**(17.8, 2.5, 7.3) y **C**(8.1, 5.1, z), **D**(13.0, 2.5, 5.0), contenidos en un plano (Δ), obtener numéricamente: **La cota de C y los valores de sus intervalos;** dibujar las proyecciones de **rectas horizontales de cota redonda,** y mostrar gráficamente **la escala de pendiente y el ángulo** que forman el plano (Δ) y el horizontal de referencia.

Solución: (Fig. XII.1.5).

1o.—Como las dos rectas son del mismo plano, deben cortarse en E, donde coinciden sus proyecciones, cuya cota se calcula como punto de (AB):

$$m = \frac{7.3 + 2}{12.4} = \frac{9.3}{12.4} = 0.75, \therefore I = 1.33$$

$$z = -2.0 + \overbrace{10.15 \times 0.75}^{7.6} = 5.6,$$

y entonces puede calcularse la pendiente de (DE):

$$m = \frac{5.6 - 5}{3.9} = 0.154, \therefore I = 6.5,$$

y la cota de C:

$$z = 5.6 - 0.154 \times 9.5 = 4.1.$$

2o.—Con los valores de los intervalos calculados: 1.33 y 6.5, se efectúa la graduación de las proyecciones (ab) y (cd), respectivamente, dibujando en seguida las proyecciones que unen sus puntos de iguales cotas redondas.

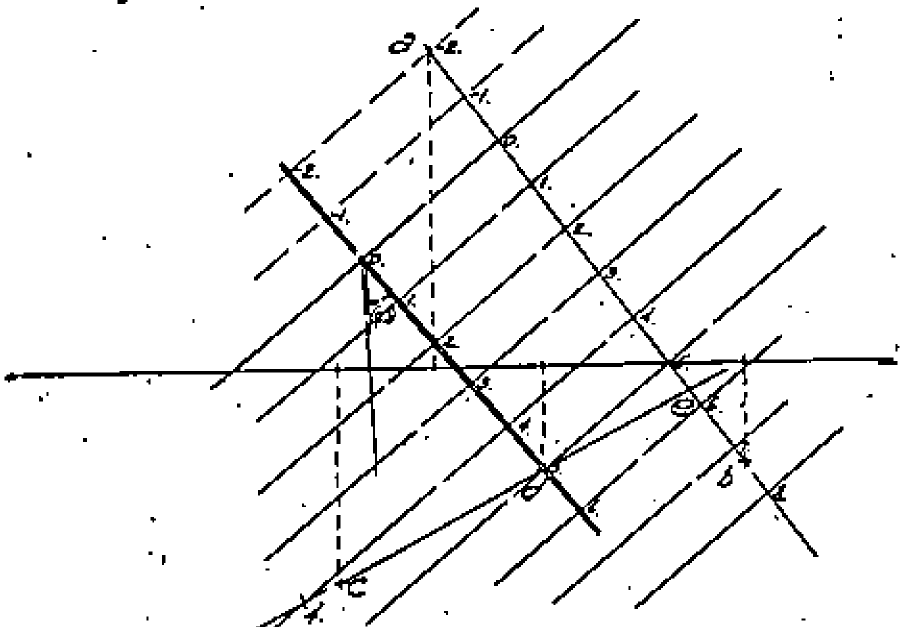


Fig. XII.1.5.

3o.—Dibujando una perpendicular a las proyecciones de todas las horizontales, por d, se tiene la proyección de una recta de máxima pendiente, donde queda indicada la escala de pendiente del plano (Δ), y efectuando el abatimiento sobre el de proyección queda también indicado el ángulo (ϕ), que se forma entre el plano considerado y el de referencia, como se muestra en la figura.

Problema No. 2.—Dados los puntos M(4.4, 2.3, 3.5) y N(13.8, —6.0, 3.5) y el valor $(\phi) = 30°$ del ángulo que el plano (Ω) forma con el horizontal de proyección, determinar gráficamente los valores

de: las cotas de otros dos puntos, P(7.6, 5.0, z_1) y Q(16.0, 6.0, z_2) del mismo plano, su escala de pendiente y su traza.

Solución: (Fig. XII.1.6).

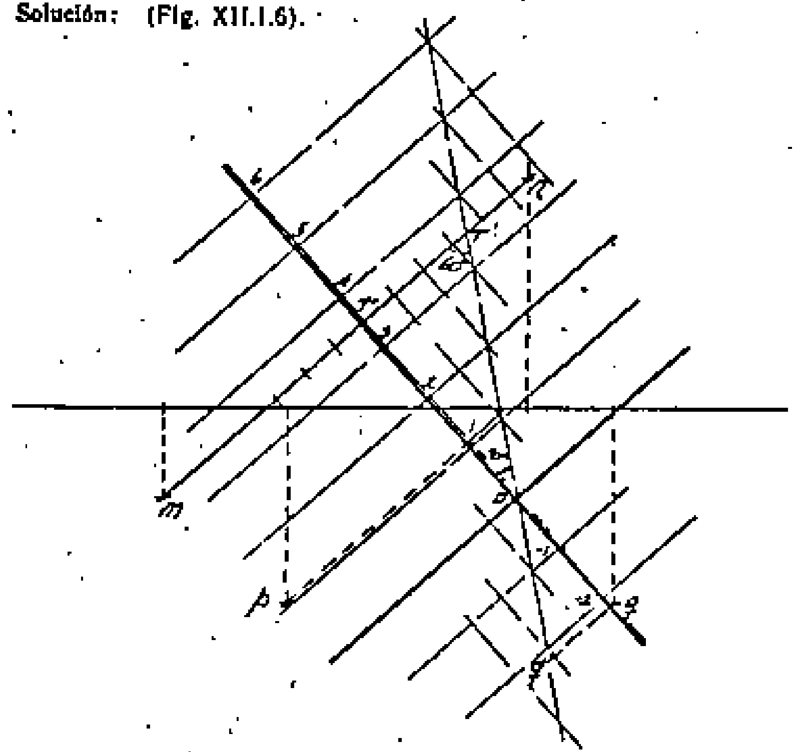


Fig. XII.1.6.

1o.—Se dibuja la proyección de la horizontal (MN) del plano, y perpendicularmente a ella la de una de las rectas de máxima pendiente (QR), por uno cualquiera de los puntos de aquella, r por ejemplo, a partir del cual se lleva la cota $(r'r) = 3.5$.

2o.—Se traza el ángulo $(rr'O) = (90° - \phi) = 60°$, y luego las paralelas a (rq), de cotas redondas, hasta su intersección con el abatimiento $(r'q')$, de la recta de máxima pendiente, a partir de cuyos puntos se dibujan las proyecciones de las horizontales con las respectivas cotas redondas, que marcan sobre (rq) la escala de pendiente de (n), siendo la traza del plano la que corresponde a la cota O.

3o.—Las cotas de los puntos P y Q se miden a partir de (rq), hasta (r'q'), en dirección de las horizontales, obteniéndose:

$$z_1 = 1.1 \quad \text{y} \quad z_2 = 2.2.$$

NOTA.—Es claro que se obtiene otra solución cuando el ángulo $(90° - \phi)$ se mide hacia el otro lado de (mn): o sea que, para determinar la solución única en un problema de este tipo, es necesario conocer, además de la pendiente o del ángulo que el plano dado forma con el de referencia, la dirección de su crecimiento o decrecimiento.

Problema No. 3.—Conocidos los puntos: J(7.5, −5.0, 1.2) y K(13.2, 7.8, 5.6), y sabiendo que la pendiente del plano (π) que los contiene es igual a: tan (ϕ) = 0.7, determinar: su escala de pendiente, su traza, y la cota del punto M(6.3, 2.3, z), que también se encuentra en (π).

Solución: (Fig. XII.1.7).

1o.—Se dibuja la proyección (jk) y también el abatimiento (j'k') de la recta (JK) que une los puntos dados, para obtener su traza

2o.—Se calcula (ϕ) = ang tan 0.7 = 35°, y se traza el ángulo (θ) = (90° − ϕ) = 55°, para poder dibujar el arco $O.O_1$, de radio igual a (kO_1) y en seguida las tangentes a dicho arco, que pasan por O de la recta (JK).

3o.—Eligiendo una de las dos soluciones posibles, como se muestra en la figura, queda determinada la traza del plano (π) y, normalmente a ella, por k, la proyección de una recta de máxima pendiente, cuya graduación se logra utilizando el abatimiento ya efectuado de (JK).

4o.—La cota del punto M, z = (m m') = 5.6, se obtiene a partir del abatimiento de una recta de máxima pendiente del mismo plano dado, que puede trazarse por dicho punto M.

c) **Observaciones.**—Del tratamiento realizado hasta aquí de un plano dado cualquiera, utilizando la Teoría de los Planos Acotados, pueden desprenderse las siguientes observaciones:

1a.—Un plano dado cualquiera queda completamente determinado cuando se conoce o se logra definir totalmente una de sus rectas de máxima pendiente, ya sea mediante el conocimiento completo de:

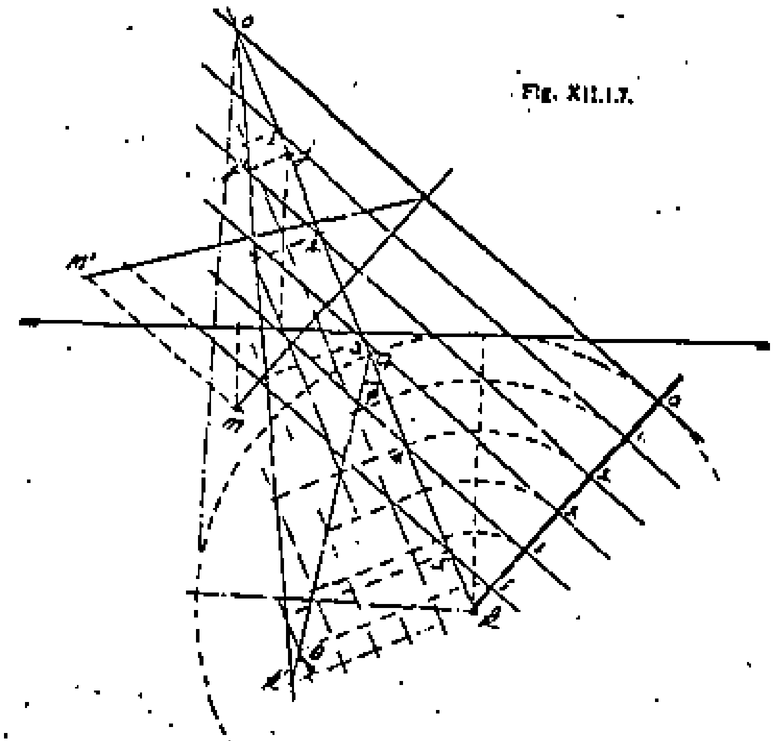


Fig. XII.1.7.

dos de sus puntos, uno de sus puntos y su pendiente o ángulo que forma con el plano de referencia (incluyendo la dirección del crecimiento), o la escala de pendiente, etc.

2a.—La solución de un problema como los tratados en los anteriores ejemplos ilustrativos, puede lograrse totalmente mediante la aplicación de un método gráfico únicamente, o efectuando también operaciones numéricas, ya sea siguiendo el procedimiento expuesto en la solución mostrada en cada caso (gráfico o numérico), o el que dejó de emplearse para el mismo objeto.

3a.—Las rectas de máxima pendiente no pueden ser empleadas en la solución de un problema particular con la misma utilidad que en el caso general de planos cualesquiera, cuando se consideran casos como los que siguen:

— **Planos horizontales.**—Para este tipo de planos, que pueden ser indicados por la cota de uno cualquiera de sus puntos (ya que todos tienen cotas iguales), no resultan definidas sus rectas de máxima pendiente, pues siendo horizontales todas sus rectas, sus pendientes son todas nulas, y su intervalo o módulo resulta indefinido. No tienen traza o intersección con el plano de referencia, pues le son siempre paralelos.

— **Planos verticales.**—Para todos los planos verticales, como es fácil observar, sus rectas de máxima pendiente resultan ser normales al plano de referencia, por lo cual las proyecciones de todos sus puntos resultan coincidentes, sin que pueda definirse su pendiente o graduación, ya que el ángulo $\phi = 90°$. Estos planos pueden darse por su traza o intersección con el plano de referencia, donde quedan coincidentes las proyecciones de todos sus puntos; es decir, un plano vertical queda determinado cuando se conocen las proyecciones de dos cualesquiera de sus puntos, tales que no se encuentren sobre una misma recta vertical (de máxima pendiente) del plano considerado.

2.—RELACIONES ENTRE PLANOS.

a) **Planos paralelos.**—La condición general establecida por la Geometría Euclidiana para definir el paralelismo entre dos planos cualesquiera, de que en cada uno de ellos existan dos rectas concurrentes paralelas respectivamente a otras dos rectas concurrentes que se encuentren en el otro, puede ser aplicada directamente en Geometría Descriptiva para la solución de problemas relativos, así como la consecuente condición de que exista paralelismo entre las correspondientes normales a los planos considerados.

Sin embargo, en la Teoría de los Planos Acotados resulta más fácil aplicar como condición necesaria y suficiente de paralelismo entre dos planos dados cualesquiera, que las respectivas rectas de máxima pendiente sean paralelas entre sí, lo cual ocurre cuando ambas proyecciones son paralelas y tienen intervalos iguales y con el mismo sentido de crecimiento.

Desde luego que, no siendo la condición de paralelismo de un plano respecto a otro suficiente para que el primero quede comple-

tamente determinado, se requiere siempre contar con otro dato para dicho objeto, como puede ser uno de sus puntos, tal como se observa en los siguientes

Ejemplos:

Problema No. 1.—Determinar la traza del plano (Δ) y el alejamiento de uno de sus puntos Q(16.6, y, 2.2), si dicho plano contiene también al punto P(10.2, 4.4, 4.2), y es paralelo al que está definido por una de sus rectas de máxima pendiente que pasa por R(6.2, −1.9, 4.7) y S(11.6, −7.9, 0).

Solución: (Fig. XII.2.1).

1o.—Se realiza el abatimiento de (RS) y se dibuja (p'O.) paralela a ella, a partir de la proyección abatida p' de P, hasta intersectar la propia proyección de la última (pO.), dibujada paralelamente a (rs).

2o.—Por O. se dibuja la traza (Δ_a) normal a (pO.).

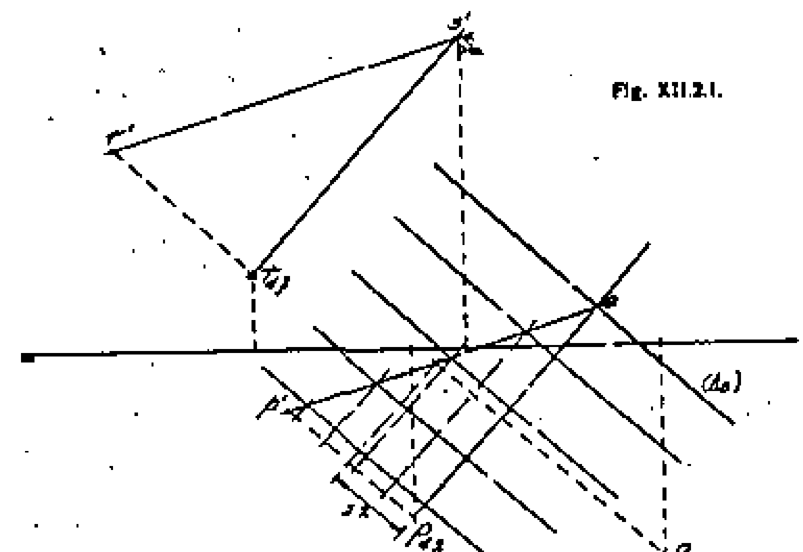


Fig. XII.2.1.

3o.—Sobre (pp') se mide la cota de Q, igual a 2.2, por donde se lleva el abatimiento de la horizontal de esa cota, obteniendo el punto de (pO.) que le pertenece, y en la intersección de la proyección de esa horizontal del plano, paralela a su traza (Δ_0), mediante la referencia dibujada con la distancia de Q, se tiene la proyección q, hasta donde se mide su alejamiento, que resulta ser igual a 5.6.

Problema No. 2.—Determinar las proyecciones graduadas de las rectas de máxima pendiente, y las trazas horizontales de los planos paralelos: (π), que contiene los puntos P(11.0, 6.4, 2.4), Q(13.0, −2.2, −1.6), R(17.5, 6.4, 5.3) y (Ω), que pasa por S(5.0, −5.0, −1.8).

Solución: (Fig. XII.2.2).

1o.—Se efectúa la graduación de las proyecciones de (QP) y (QR), mediante su abatimiento de la manera ya conocida, dibujándose en seguida las proyecciones de las horizontales del plano (π)

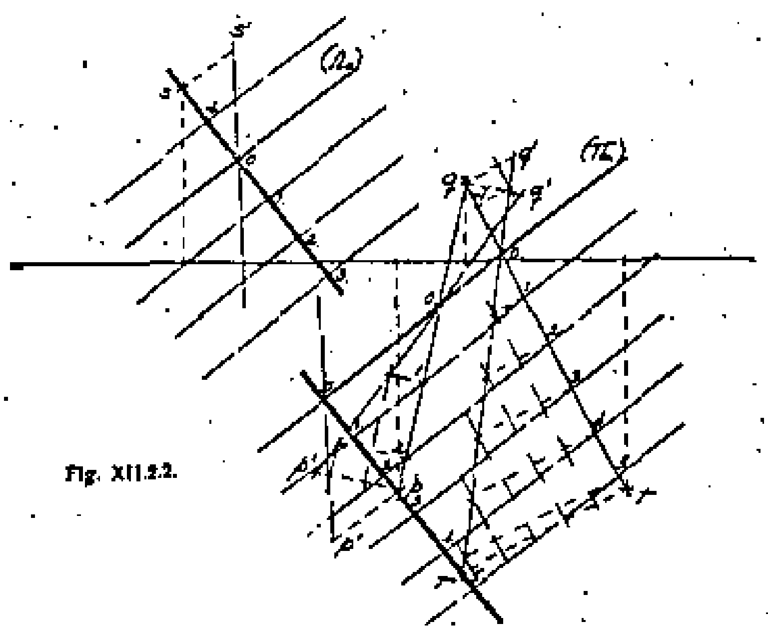


Fig. XII.2.2.

uniendo las proyecciones de los puntos de cota redonda de los segmentos citados, cuyos valores son iguales.

2o.—Se dibuja por p la proyección de una recta de máxima pendiente, perpendicular a las horizontales, que marcan sobre la primera la graduación buscada de la escala de pendiente del plano (π).

3o.—Por s y s' se dibujan paralelas a la proyección y al abatimiento de la anterior recta de máxima pendiente, y al llevar sobre la primera la misma escala de pendiente, a partir de su intersección O, con su propio abatimiento, queda resuelto el problema con sólo indicar la traza y algunas horizontales del otro plano (Ω).

Problema No. 3.—Definir los planos paralelos (Δ) y (ϵ), considerando que el primero contiene a la recta que pasa por los puntos: A(5.1, −1.7, 1.0) y B(11.8, −6.0, 5.0), y que en el segundo se encuentra el segmento C(8.5, −6.0, 5.8), D(13.7, 8.0, 1.2), obteniendo sus trazas respectivas y su común escala de pendiente.

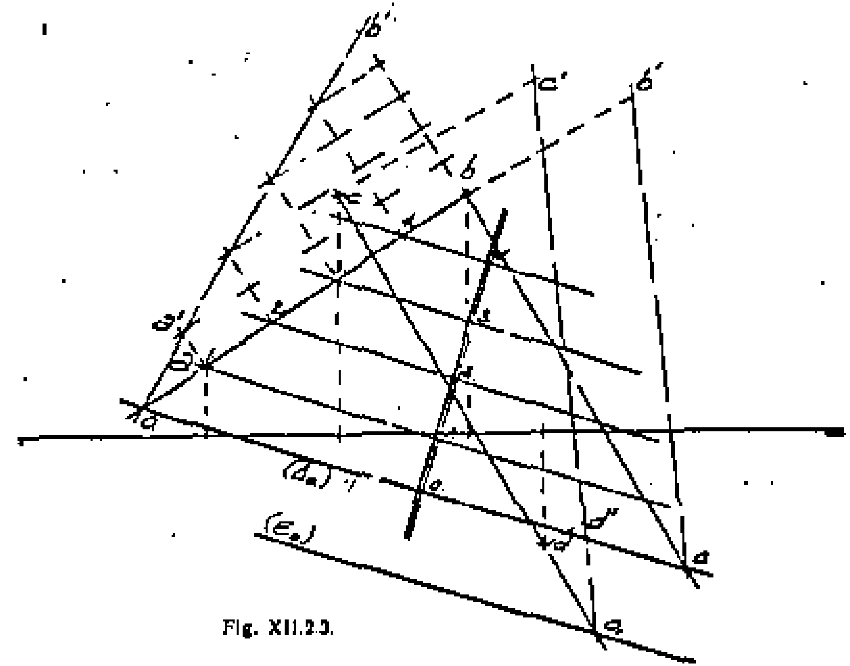


Fig. XII.2.3.

Solución: (Fig. XII.2.3).

1o.—Se dibujan las proyecciones y los abatimientos de los segmentos (AB) y (CD), obteniéndose la graduación de la primera recta, y solamente la traza O_1 de la segunda.

2o.—Por B se considera una recta paralela a (CD), tal que sus proyecciones y sus abatimientos sean paralelos, siendo trazados mediante los triángulos semejantes $(cc'O_1)$ y $(bb'O_.)$, que se muestran en la figura.

3o.—Por cada uno de los puntos de cota redonda de (ab), se dibujan paralelas a la recta (OO) = (Δ_o), traza del plano (Δ), que vienen siendo las proyecciones de las rectas horizontales de dicho plano; y al dibujar por O_1 otra paralela también a las anteriores, queda representada la traza (π_o) del otro plano solicitado, que contiene al segmento (CD).

4o.—La escala de pendiente de ambos planos es la misma, por tratarse de planos paralelos, y su representación gráfica puede obtenerse mediante una normal a las trazas (Δ_o) y (π_o), que pase por un punto cualquiera, como se indica en la figura.

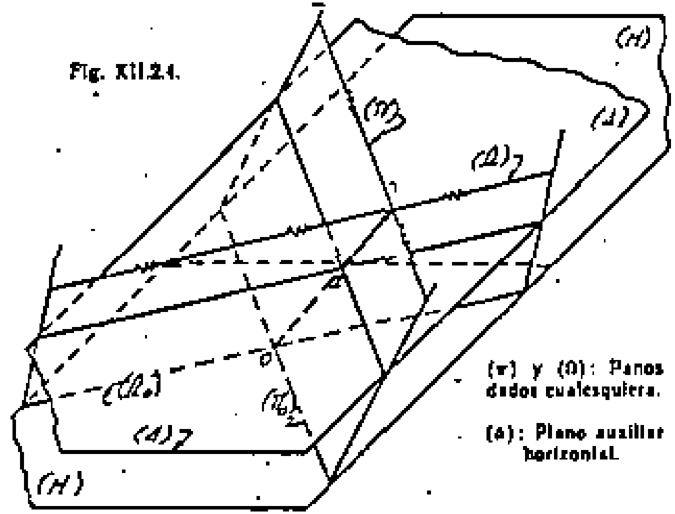
Nota.—Se observa que, aunque la solución de los tres problemas anteriores se obtuvo aplicando solamente el procedimiento gráfico, también pudo lograrse el mismo resultado efectuando las operaciones numéricas ya explicadas en algunos ejemplos ilustrativos antes resueltos.

b) **Intersección de dos planos.**—Dos planos dados cualesquiera (no paralelos) se intersectan forzosamente según la recta que contiene los puntos comunes entre ambos. Dicha recta de intersección queda definida cuando se conocen dos de sus puntos, lo cual se logra con cierta facilidad mediante el empleo de planos auxiliares horizontales, que ya sabemos siempre cortan a los planos cualesquiera según rectas horizontales, una en cada plano, que a su vez concurren en un punto común (I), perteneciente a la recta de intersección buscada (Fig. XII.2.4).

Partiendo del punto común O de las dos trazas en el plano (H) de referencia, puede facilitarse la solución de un problema de este tipo utilizando entonces solamente uno de los planos auxiliares ya mencionados, para determinar el otro de los puntos I necesario para

poder trazar la recta de intersección buscada (OI) entre los planos (π) y (Ω), como se muestra en la figura.

Fig. XII.2.4.



(π) y (Ω): Planos dados cualesquiera.

(Δ): Plano auxiliar horizontal.

Ejemplos:

Problema No. 1.—Obtener la intersección entre los planos (π), que contiene los puntos P(9.7, 2.4, 2.0), Q(15.5, 6.1, 5.5), R(13.4, 3.5, 2.0), y (Ω), dado por la recta de máxima pendiente que pasa por: M(4.5, 4.0, 5.2) y N(6.8, 1.2, 1.9).

Solución: (Fig. XII.2.5).

1o.—Se gradúa el segmento (PQ), de (π), mediante su abatimiento, con lo cual se puede trazar la proyección de la horizontal de cota redonda igual a 4., así como su traza (π_o), ya que siendo (PR) una horizontal, las otras son paralelas a ella.

2o.—Se gradúa (mn), y se dibujan las horizontales de (Ω) cuyas cotas redondas sean iguales a 2. y 4., y la traza (Ω_o), normalmente a (mn).

3o.—Puede trazarse la intersección entre ambos planos, uniendo el punto común O_1 de las trazas, con la intersección I de las horizontales de cota igual a 4., con lo cual queda resuelto el problema, simplemente midiendo y anotando: O(10.4, 1.5, 0) e I(4.1, 1.8, 4.0).

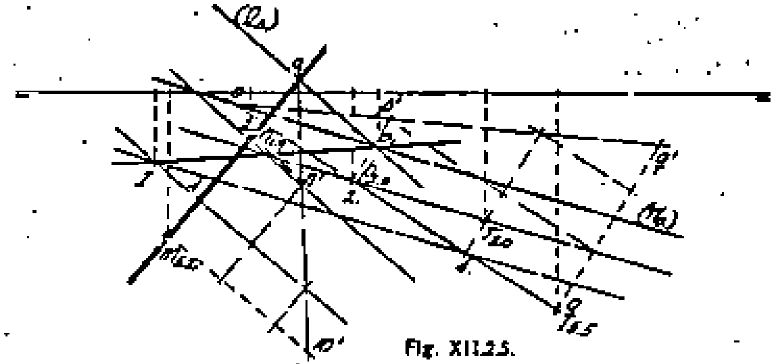


Fig. XII.2.5.

(Nota.—Los mismos valores de los datos de este problema son utilizados en el ejercicio 3 de la Serie IV, cuya solución se pide en la página 80 de los presentes Apuntes, utilizando el método de la Doble Proyección Ortogonal).

Problema No. 2.—Determinar la proyección acotada de la recta de intersección entre los planos: (π), que pasa por el punto P(4.2, 1.5, 12.8); y cuyas rectas de máxima pendiente son paralelas al segmento R(3.1, −5.0, 9.9), S(8.3, 2.6, 4.3), y (Δ), que contiene los puntos: J(16.2, 4.0, 10.1), K(10.5, −4.0, 11.4) y M(13.5, 9.0, 5.3).

Solución: (Fig. XII.2.6).

1o.—Se gradúan las proyecciones (mk) y (mj), empleando los abatimientos relativos al punto de menor cota, como se indica en la figura, de manera que el abatimiento del punto de mayor cota resulte efectuado con la diferencia entre las cotas de ambos extremos del segmento, midiéndose también esa longitud normalmente a su proyección; en seguida se dibujan las proyecciones de las horizontales de cota redonda del plano (Δ), uniendo los puntos de iguales cotas de los dos segmentos considerados inicialmente.

2o.—Se realiza también un abatimiento relativo sobre la proyección (rs), de la paralela a sus rectas de máxima pendiente del plano (π), y luego se dibuja por P una de estas últimas, de abatimiento paralelo al de (RS), por un punto cualquiera de la normal trazada a partir de p, al cual se le considera una cota de 12.8, igual a la del punto P, y a partir de ahí se van marcando los puntos de cotas redondas descendentes, para poder trazar después las proyecciones de las horizontales correspondientes.

3o.—Finalmente, obteniendo los puntos comunes entre cada par de horizontales de iguales cotas redondas, como entre las de 7, y las de 11., se determinan dos puntos respectivos, I y II, de la recta de intersección buscada existente entre los planos dados, tales que sus coordenadas medidas sobre el plano de referencia de las proyecciones acotadas, resultan iguales a: I(13.8, 6.5, 7.0), II(12.8, −0.8, 11.0), como puede apreciarse fácilmente, considerando la escala utilizada.

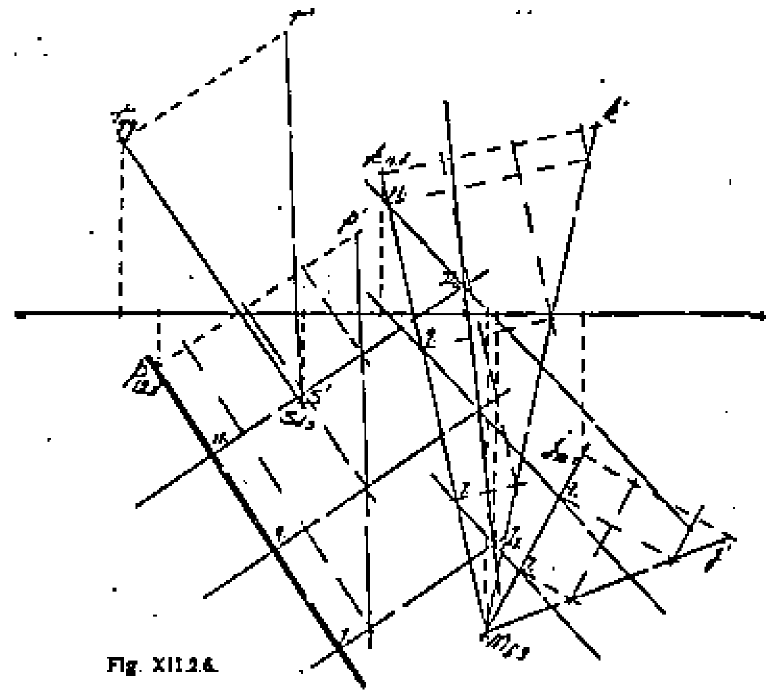


Fig. XII.2.6.

Problema No. 3.—Encontrar la recta de intersección entre los planos: (π), dado por los puntos A(3.1, 0, 0), B(7.4, 2.6, 0), C(7.4, 0, 5.4), y (Δ), cuya recta de máxima pendiente es: R(12.8, 1.2, 2.6), S(15.6, 4.8, −3.4).

(NOTA.—Debe observarse que los datos de este problema fueron tomados del Problema No. 1, resuelto en la página 62, por el Método de la Doble Proyección Ortogonal).

Solución: (Fig. XII.2.7)

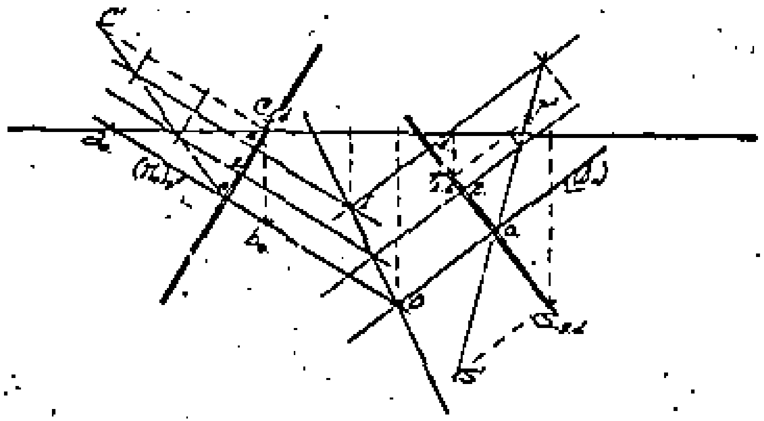


Fig. XII.2.7.

1o.—Como los puntos A y B tienen cota nula, la proyección (ab) representa la traza del plano (π), y entonces, dibujando por c una normal a (πₕ), se tiene la proyección de una de las rectas de máxima pendiente, cuya graduación se efectúa mediante su abatimiento, como aparece indicado en la figura, para dibujar las proyecciones, paralelas a la traza, de otras horizontales de cota redonda, como las de 2., 4., etc.

2o.—También se gradúa de la misma manera el segmento (RS), de (Δ), y se dibujan la traza (Δₕ) y las horizontales mostradas, normalmente a la proyección (rs) de la recta de máxima pendiente del segundo plano.

3o.—Las intersecciones de cada dos proyecciones de rectas horizontales de iguales cotas redondas, corresponden a puntos de la recta común entre los dos planos dados, como O(11.2, 4.9, 0) e I(9.8, 2.1, 4.0), cuyas coordenadas fueron obtenidas midiendo directamente en la figura.

— Observación.—El procedimiento que consiste en efectuar el abatimiento relativo de un segmento, mediante una elevación del plano de proyección hasta un punto cualquiera de cota conocida, como puede ser el extremo del segmento cuya cota sea menor que la del otro, se realiza también perpendicularmente a la proyección del segmento, en una longitud igual a la diferencia de cotas entre el punto por abatir y el plano elevado de comparación. Es comúnmente utilizado este procedimiento cuando las cotas de los puntos del segmento por abatir son bastante grandes y, por lo tanto, resulta difícil su abatimiento normal dentro de los límites del dibujo, debido a la escala generalmente utilizada, como ha ocurrido durante la solución del Problema No. 2, que fue resuelto en páginas inmediatas anteriores, mediante abatimientos relativos efectuados elevando el plano de proyección hasta el extremo de cada segmento cuya cota es menor.

Para una mejor comprensión del procedimiento, se vuelve a ilustrar con el siguiente

Ejemplo.—Dados los segmentos: A(7.2, −1.5, −5.0), B(14.7, 2.6, −10.0) y C(7.8, 4.5, 8.5), D(17.5, −1.2, 19.5), efectuar sus abatimientos relativos elevando el plano de proyección hasta el punto de menor cota de cada uno. Realizar también el abatimiento normal (sin elevar el plano de referencia) del primero de los segmentos considerados, y elevando para el segundo dicho plano de comparación hasta la cota 10.0.

Solución: (Fig. XII.2.8).

1o.—El abatimiento normal del primer segmento está representado por (a'b'), y el relativo a su extremo de menor cota (−10.0) es (a"b").

2o.—El abatimiento relativo del segundo respecto al extremo de cota menor (8.5) es (c'd'); y el referido al plano de comparación elevado hasta la cota 10.0, es (c"d").

NOTA.—Puede observarse que, una vez efectuado el abatimiento relativo de un punto de un segmento, se puede determinar la cota del plano de referencia, conociendo la cota de dicho punto, y midiendo la distancia entre su abatimiento (del punto) y la proyección del segmento.

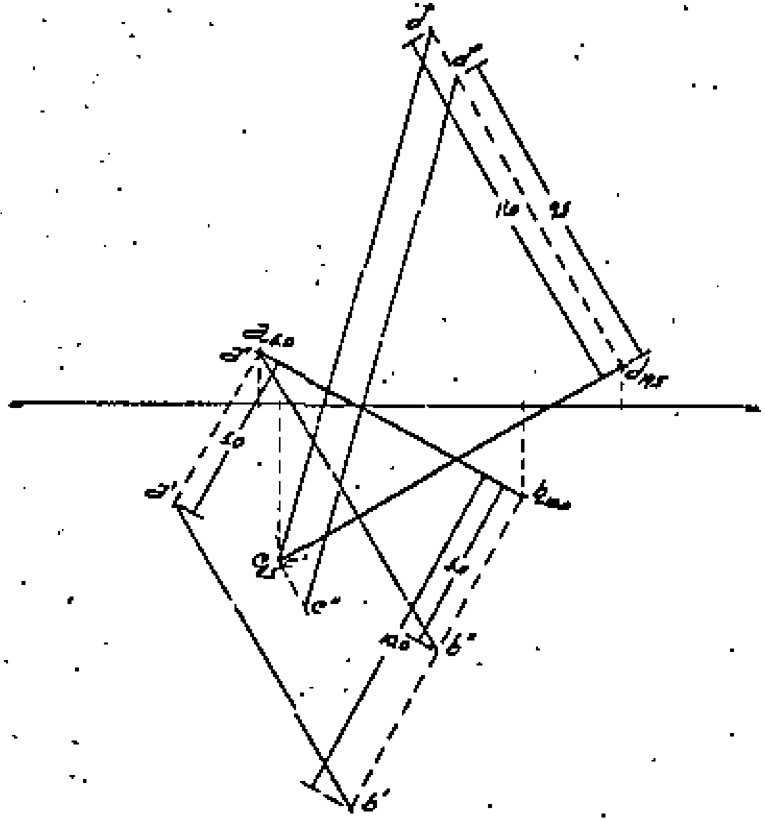


Fig. XII.2.8.

c) **Intersección de una recta con un plano.**—El procedimiento general para determinar el punto común o de intersección entre una recta (r) y un plano (π) dados cualesquiera, consiste en obtener primero la intersección (OI) entre el plano vertical (V) proyectante de la recta, y el plano dado (π); y después, el punto I de concurrencia entre esa recta de intersección y la recta dada, mediante un abatimiento de sus respectivos segmentos, que es la solución del problema, ya que dicho punto I pertenece tanto a la recta (r) como al plano (π) y, por lo tanto es la intersección buscada (Fig. XII.2.9).

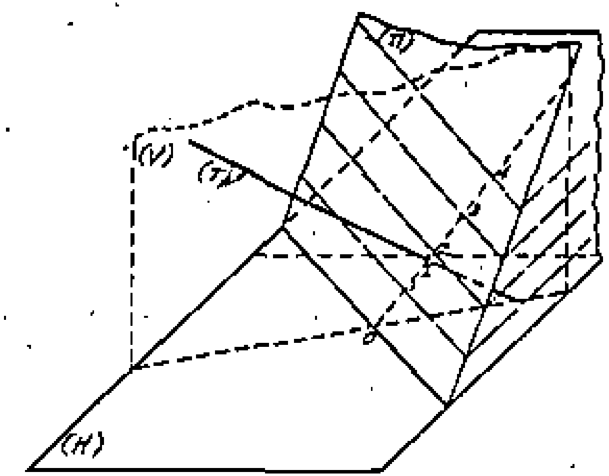


Fig. XII.2.9.

Dado que la recta de intersección (OI) tiene su proyección coincidente con la de (r), sus abatimientos pueden efectuarse simultáneamente al superponer el plano proyectante (V) con el horizontal (H) de referencia, utilizando los puntos de (OI) que tienen cotas redondas (0., 1., 2., ...), correspondientes a las horizontales del plano dado (π), como fácilmente puede observarse en la figura.

El procedimiento general anterior, que resulta de gran sencillez cuando se aplica utilizando la Teoría de los Planos Acotados, requiere que como primer paso se obtengan las proyecciones de rectas horizontales de cota redonda del plano dado, para poder proceder en seguida al abatimiento de la recta dada y de la intersección entre aquél y el proyectante vertical de ésta, como se ilustra en los siguientes

Ejemplos:

Problema No. 1.—Determinar las coordenadas del punto de intersección I entre el plano (π), que contiene los puntos A(10.2, −5.5, 9.4), B(12.0, 5.2, 1.2), C(15.5, 2.0, 6.5), y la recta (r), que pasa por P(4.7, 3.2, 8.2) y Q(12.8, 1.6, 2.2).

Solución: (Fig. XII.2.10).

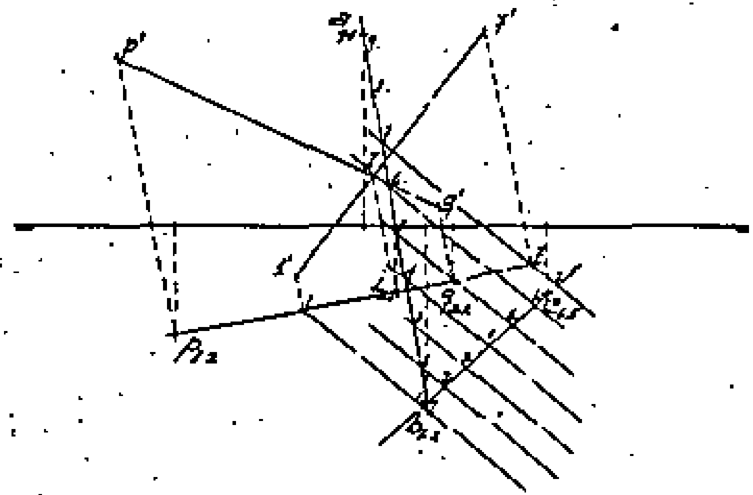


Fig. XII.2.10.

1o.—Se dibujan las proyecciones acotadas de todos los puntos dados, para medir las longitudes: (ba) = 10.9, y (bc) = 4.75, y efectuar la graduación de los segmentos (BA) y (BC), calculando numéricamente sus pendientes, sus intervalos, y las proyecciones de sus puntos de cota redonda, como sigue:

De (BA): $m = \dfrac{9.4 - 1.2}{10.9} = 0.75, \quad i = 1.33,$

$(b2.) = 0.8 \times 1.33 = 1.06.$

De (BC): $m = \dfrac{6.5 - 1.2}{4.75} = 1.12, \quad i = 0.895,$

$(b2.) = 0.8 \times .895 = 0.715.$

Uniendo los puntos de iguales cotas redondas se tienen las proyecciones de las horizontales del plano (π), que aparecen indicadas en la figura, después de haber marcado los puntos que se acaban de calcular.

2o.—Sobre la proyección prolongada de (pq) se marcan los puntos de cota redonda correspondientes a las horizontales del plano, para poder efectuar el abatimiento simultáneo de la recta (PQ) y de la de intersección de su plano proyectante con el plano dado, utilizando dos de los puntos de cota redonda conocidos de la última recta, como fueron 1. y 7.

3o.—Se obtiene la intersección entre las dos rectas mencionadas, y se deshace el abatimiento para marcar la proyección acotada de dicho punto I(11.1, 1.9, 3.4), cuyas coordenadas se miden directamente en la figura, teniendo en cuenta la escala utilizada.

Nota.—Es claro que también pudieron obtenerse gráficamente las proyecciones de los puntos de cota redonda del plano, efectuando el abatimiento de los segmentos (BA) y (BC), como se ha efectuado en una gran mayoría de los Ejemplos tratados con anterioridad, pero no se hizo así no sólo para practicar el procedimiento numérico que ha sido poco usado hasta ahora, sino también para evitar una mayor cantidad de trazos en la solución del problema.

Problema No. 2.—Indicar la proyección acotada del punto de intersección entre la recta J(8.5, −1.4, −2.0), K(15.0, 4.4, 6.1),

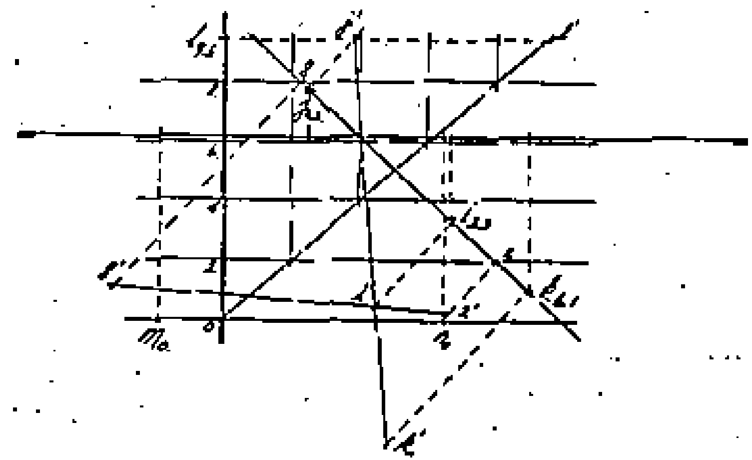


Fig. XII.2.11.

y el plano que contiene los puntos: L(6.0, −2.8, 9.5), M(4.2, 5.3, 0) y N(12.5, 5.3, 0).

Solución: (Fig. XII.2.11).

1o.—Como (MN) es una horizontal del plano, puesto que ambos puntos tienen la misma cota, se puede trazar una recta de máxima pendiente por L, dibujando su proyección perpendicularmente a (mn), y sobre ella la escala de pendiente del plano, para dibujar enseguida otras horizontales del plano, hasta sus intersecciones con (jk).

2o.—Se efectúa el abatimiento de (JK) y de la intersección (28) de su proyectante con el plano dado, obteniéndose el punto I(12.7, 2.4, 3.3), cuyas coordenadas se miden directamente en la figura, teniendo en cuenta la escala utilizada.

Problema No. 3.—Obtener la intersección de la recta (r): A(5.0, −4.7, 6.3), B(15.8, 3.3, 0.4), con el plano (ε), dado por los pun-

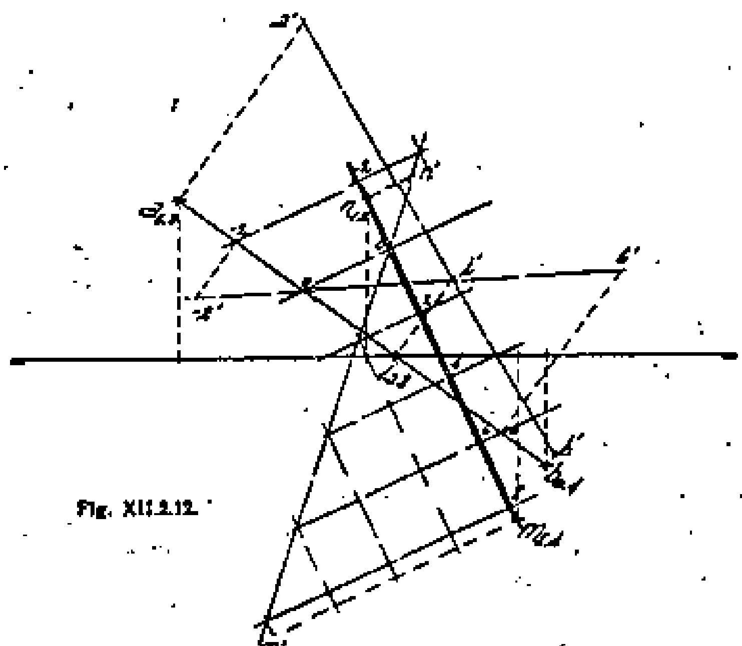


Fig. XII.2.12.

tos: M(15.0, 4.9, 8.4) y N(10.5, −4.7, −1.5), de una de sus rectas de máxima pendiente.

Solución: (Fig. XII.2.12).

1o.—Se efectúa la graduación de la proyección (mn), gráficamente, mediante su abatimiento, para dibujar las horizontales del plano, prolongadas hasta intersectar la proyección (ab).

2o.—Se realiza el abatimiento de (AB) y de los puntos coincidentes de cota redonda de la recta de intersección (OI) del plano (ε) con el proyectante de la primera.

3o.—Se refiere a la proyección (ab) el punto de intersección I entre las dos rectas mencionadas, hasta obtener su proyección, que por simple coincidencia en este problema quedó localizada en el eje de simetría; de manera que sus coordenadas, medidas a escala sobre la figura, son: I(11.4, 0, 2.8).

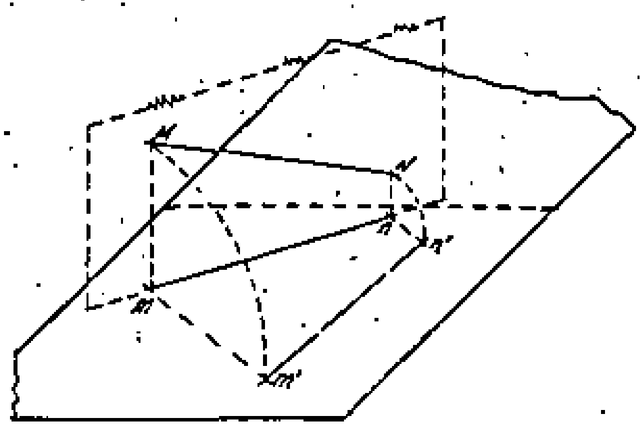
3.—ABATIMIENTO DE UN PLANO CUALQUIERA.

Debe haberse observado ya que en la solución de los problemas presentados en páginas anteriores, aplicando la Teoría de los Planos Acotados, se ha utilizado con mucha frecuencia el recurso fundamental para la representación de las cotas de los puntos cuya proyección se considera, de abatir un segmento respecto a su propia proyección acotada, que consiste en la superposición del plano proyectante vertical continente del segmento dado, con el plano horizontal de proyección (o con otro plano horizontal de cota conocida), mediante una rotación del primero alrededor de su intersección (la propia proyección del segmento) con el segundo; que ha sido designado como abatimiento de un segmento.

Ahora se presenta el caso de considerar la rotación de un plano de tipo cualquiera, hasta dejarlo paralelo o coincidente con el horizontal de proyección, según que se tome como eje una horizontal cualquiera o la traza del plano, cuyo procedimiento se acostumbra designar: abatimiento de un plano cualquiera, y donde pueden observarse, entre otras de sus características fundamentales, las siguientes: (Fig. XII.3.1).

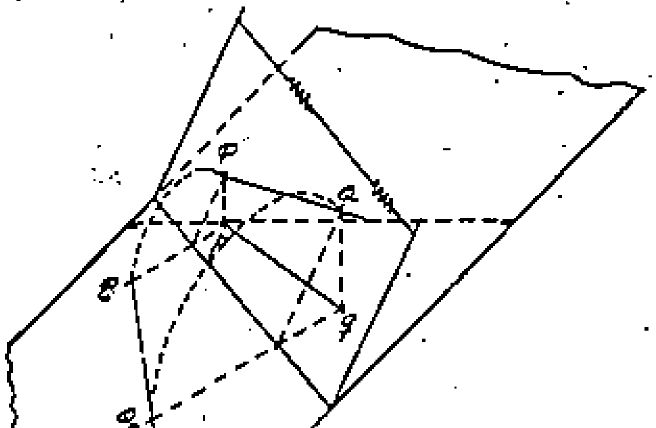
1a.—La rotación se verifica según un ángulo diferente de 90° = π/2, igual para todos los puntos del plano dado.

2a.—El radio de abatimiento no es igual a la cota del punto considerado, sino que resulta ser la hipotenusa del triángulo rectángulo construído tomando como catetos a la mencionada cota y a la distancia entre la proyección del punto y la traza del plano, como se puede observar fácilmente en la figura antes citada.



ABATIMIENTO DE UN SEGMENTO.—

Figs. XII.3.1.



ABATIMIENTO DE UN PLANO CUALQUIERA.—

3a.—La trayectoria de abatimiento de un punto dado cualquiera es siempre perpendicular a la traza del plano que lo contiene, y pasa por la proyección acotada del punto.

El eje de rotación para el abatimiento de un plano es la charnela del abatimiento, y las posiciones abatidas de puntos cualesquiera M, N, P, . . . de un plano dado, se acostumbran designar como M_o, N_o, P_o . . .

El proceso de abatimiento de un plano cualquiera se utiliza con ventaja en la solución de algunos problemas que piden magnitudes reales de figuras planas, ya sean longitudes o ángulos, y su aplicación puede estudiarse en los siguientes

Ejemplos:

Problema No. 1.—Mostrar en verdadera magnitud los lados y los ángulos del triángulo A(6.0, −2.2, 3.0), B(6.9, 2.2, 6.0), C(11.6, 2.8, 1.5).

Solución: (Fig. XII.3.2).

1o.—Se realizan los abatimientos de los segmentos (AB) y (CB), para determinar sus trazas, en los puntos de intersección con sus respectivas proyecciones. Al unir dichas dos trazas queda definida la traza (MN) del plano que contiene los tres puntos dados.

2o.—Dibujando por *b*: una paralela a la traza, de longitud igual a la cota de B; y una perpendicular a la traza, se tienen los dos catetos del triángulo de abatimiento del punto B, cuya hipotenusa es el radio de abatimiento, que se lleva sobre la trayectoria de abatimiento, como se indica en la figura, para obtener la posición abatida B_o.

3o.—Como los puntos auxiliares M y N no cambian de posición al efectuarse el abatimiento del plano, por estar contenidos en el eje de rotación (charnela), al unirse respectivamente con B_o se determinan las posiciones abatidas A_o y C_o, en las intersecciones con las trayectorias de abatimiento de los puntos A y C, dibujadas normalmente a la traza del plano desde las proyecciones a y c, con lo cual queda resuelto el problema al tener indicadas en la figura las verdaderas magnitudes de los lados y de los ángulos del triángulo (ABC), mostrados en su abatimiento ($A_oB_oC_o$).

(También pudieron ser calculados, durante el primer paso de esta solución, las pendientes y los intervalos de los dos segmentos mencionados, para efectuar en seguida su graduación, y trazar las horizontales y la traza del plano, que se usó como charnela, pero como se ha visto tales cálculos no son necesarios).

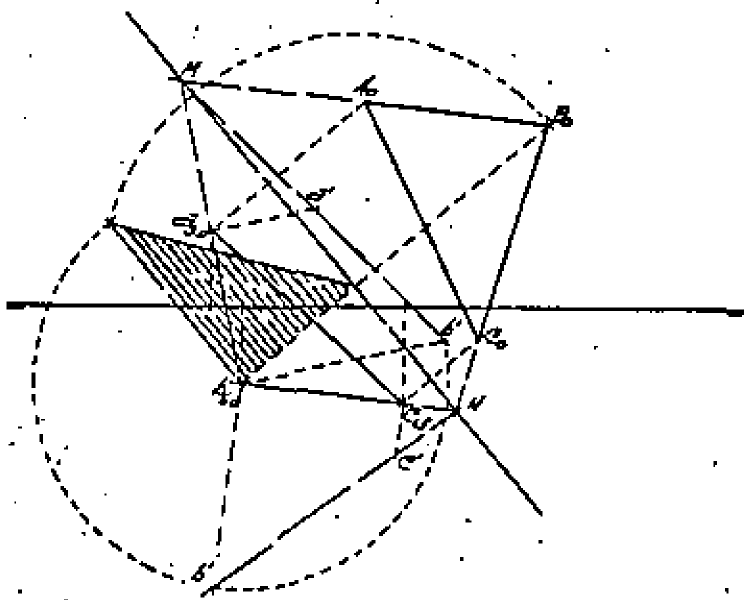


Fig. XII.8.2.

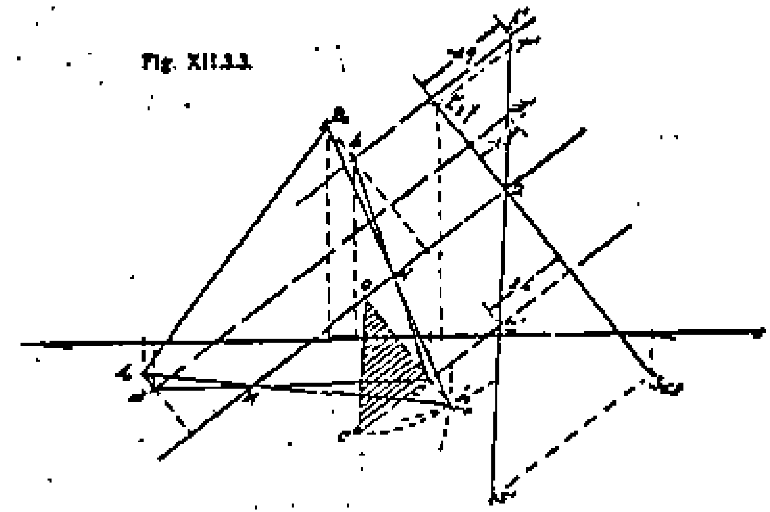
Problema No. 2.—Dadas las posiciones abatidas de los puntos A_o(3.7, 0.9, 0) y B_o(9.1, −6.2, 0), determinar las proyecciones acotadas de los tres vértices del triángulo equilátero (ABC), que se encuentra en el plano dado por la recta de máxima pendiente R(12.3, −6.8, −2.7), S(18.3, 1.2, 5.8).

Solución:. (Fig. XII.8.3).

1o.—Se efectúa el abatimiento del segmento (RS), por cuya traza O., y normal a (rs) se dibuja la traza (MN), quedando también representado por dicho abatimiento el perfil del plano.

2o.—Con la longitud $\overline{A_oB_o}$ se construye el triángulo equilátero abatido ($A_oB_oC_o$). Se marcan las trayectorias de abatimiento de los

Fig. XII.8.3.



vértices perpendicularmente a la traza (MN), y por O, paralela a (r's'), y de longitud igual a $\overline{OC_o}$ se dibuja la hipotenusa que completa el triángulo de abatimiento asciurado (c'Oc), del punto C, cuya proyección queda definida en *c*.

3o.—Como los puntos auxiliares M y N son del eje de abatimiento, su posición es la misma antes y después del proceso, por lo cual al prolongarse las rectas (cM) y (cN), quedan determinados los respectivos puntos *a* y *b*, sobre las trayectorias de los puntos abatidos A_o y B_o, al deshacer la rotación.

Midiendo sobre la figura anterior, de acuerdo con la escala empleada, se obtiene como solución: A(4.0, 1.4, −1.4), B(9.8, −5.2, −2.9) y C(12.0, 1.3, 2.6), aunque es evidente que pudo haberse obtenido otro resultado si el triángulo abatido se hubiera construido, durante el 2o. paso, hacia el otro lado del segmento (A_oB_o).

Problema No. 3.—Representar en verdadera magnitud la distancia perpendicular entre el punto J(6.5, −2.6, 18.5), y el segmento que pasa por K(12.3, −4.0, 27.5) y L(15.5, 3.2, 13.5), mediante un abatimiento del plano que contiene a los tres puntos citados.

Solución: (Fig. XII.3.4).

1o.—Considerando los segmentos (JK) y (LK), calculando sus pendientes y módulos, se tiene:

$$\text{De (JK):}\quad m = \frac{27.5 - 18.5}{6.0} = 1.50,\quad i = \frac{1}{1.5} = 0.67,\quad 0.5\ i = 0.335;$$

$$\text{De (LK):}\quad m = \frac{27.5 - 13.5}{7.85} = 1.78,\quad i = \frac{1}{1.78} = 0.56,\quad 0.5\ i = 0.28;$$

con lo cual se pueden dibujar los puntos de cota redonda de cada segmento y, al unir los de cotas iguales, las correspondientes horizontales del plano definido por los tres puntos.

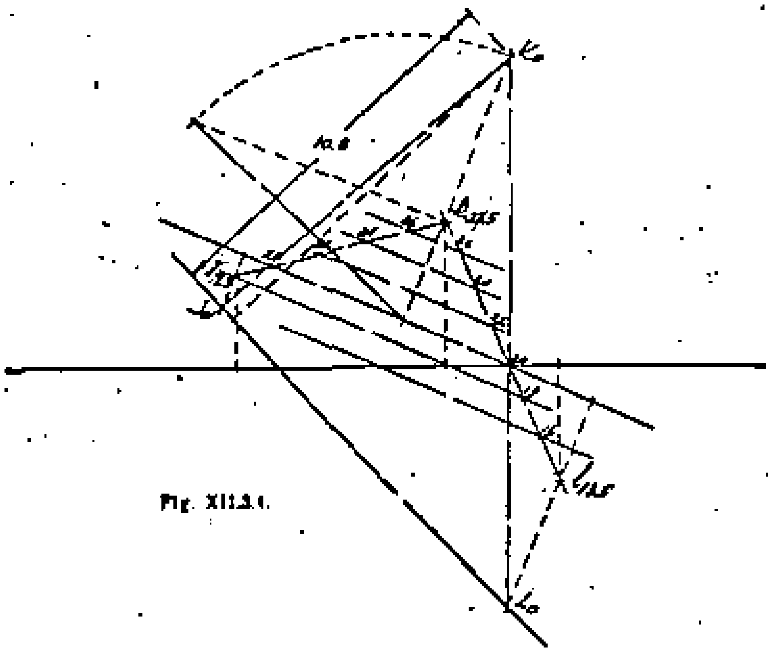


Fig. XII.3.4.

2o.—Como no es posible, por la limitación del espacio disponible, teniendo en cuenta la escala utilizada, efectuar el abatimiento alrededor de la traza del plano, al tomar como charnela la horizontal de cota 20, y dibujar perpendicuarmente a ella las trayectorias de abatimiento de los tres puntos, de manera que el cateto paralelo a la charnela del triángulo de abatimiento del punto K, sea igual a la cota de K menos la cota de la charnela, o sea: 27.5 − 20.0 = 7.5, se obtiene primero el radio de abatimiento, y después la posición abatida K_o.

3o.—Como los puntos auxiliares de cota 20, de los segmentos (JK) y (LK) están sobre la charnela, su posición no se altera antes y después del abatimiento, por lo que al unirlos con K_o, determinan en su intersección con las trayectorias de abatimiento correspondientes, las posiciones abatidas J_o y L_o, tales que su distancia perpendicular a K_o, solución a este problema, se obtiene en la figura igual a 10.8.

Observación.—Es de advertirse que, en la solución de problemas como los que han sido presentados, relativos al abatimiento de un plano dado cualquiera, se puede utilizar el concepto de abatimiento de un segmento, pues éste último se encuentra siempre incluido en los fundamentos de la Teoría de los Planos Acotados, ya que en rigor, corresponde a la forma gráfica de considerar las cotas, cuyos valores sólo aparecen indicados en las proyecciones de los puntos considerados. Es decir, mientras que el abatimiento de un plano es un procedimiento usado para la solución de algunos problemas, el abatimiento de los puntos de un segmento es un concepto implícito en la Teoría de los Planos Acotados.

4.—EJERCICIOS. (Serie XII).

1.—Dados los puntos: A(5.7, 2.2, 0.5), B(12.4, 5.2, 7.0) y C(16.2, −4.8, 1.4), obtener la graduación de las rectas que los unen, así como la escala gráfica de pendientes del plano que definen, y dibujar la proyección de una de las rectas de máxima pendiente, que contiene al punto D(9.3, −5.6, z), calculando antes la cota de dicho punto.

2.—Determinar las coordenadas del punto I de concurrencia entre los segmentos: K(5.8, −5.8, 0.8), L(13.1, 5.6, 6.2) y M(7.5, 3.5, 5.1), N(14.3, 1.5, z), así como sus trazas, la traza del plano que los contiene, y la escala gráfica de pendientes del mismo, después de haber dibujado las proyecciones de algunas de sus rectas horizontales.

3.—Dado el segmento: P(5.2, 1.6, 0.9), Q(10.7, −5.5, 4.8), obtener su graduación, y trazar por R(8.5, 4.3, −2.1) una recta paralela a él, determinando además la traza del plano que contiene ambas paralelas, y la cota (z) del punto S(14.7, 6.0, z) que se encuentra también en dicho plano.

4.—Obtener la proyección acotada de la recta de intersección entre los planos: (π), que contiene los puntos: M(3.4, 0.6, 3.0), N(6.8, 3.2, 1.0), P(9.2, −4.3, 4.3), y (Ω), dado por el segmento: R(10.6, −6.6, 7.2), S(14.9, −3.9, 2.2), de una de sus rectas de máxima pendiente.

5.—Encontrar la intersección entre los planos: (Δ), que está definido por los puntos: A(4.7, −4.5, 21.0), B(10.4, −4.5, 21.0), C(6.9, 4.1, 30.5), y (ε), que contiene al punto F(14.8, 2.6, 24.8), y una de cuyas rectas de máxima pendiente pasa por D(12.6, −3.7, 21.8) y E(18.0, 1.7, z).

6.—Indicar la proyección de la recta común entre los planos (Δ) y (π), si: el primero pasa por el punto D(7.7, 2.1, 13.5), y es paralelo al plano que define el triángulo A(5.1, 4.9, 11.5), B(6.1, −6.0, 6.5), C(9.3, −3.9, 9.2), y el segundo contiene al punto P(12.1, 6.3, 19.5), y sus rectas de máxima pendiente son paralelas al segmento: Q(10.3, 5.7, 17.8), R(16.0, −1.7, 7.7).

7.—Obtener la intersección de la recta que pasa por A(3.8, 2.2, 6.6) y B(12.8, 4.3, −0.9), con el plano (ε), dado por dos puntos: M(5.9, 4.7, −1.5) y N(8.9, 1.4, 4.7) de una de sus rectas de máxima pendiente.

8.—Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta (AB): (5.5, 0.9, 2.5), (11.0, 3.5, 6.1), con el plano (Δ), tal que contiene los puntos: P(3.0, 4.0, 0), Q(3.0, 0, 6.5), R(6.0, 4.0, 0).

9.—Encontrar la proyección acotada del punto de intersección I entre la recta que pasa por: R(5.4, −3.0, 1.3), S(15.0, 4.8, 5.4), y el plano definido por el punto T(7.9, −5.7, 6.4) y la recta horizontal U(5.4, 3.8, z), V(16.0, −2.8, z), para z = 4.4.

10.—Obtener la verdadera magnitud de los lados y de los ángulos del triángulo (JKL), mediante un abatimiento de su plano, considerando que: J(6.8, 2.8, −1.7), K(9.9, −3.8, 2.8), L(14.2, 3.3, −4.7).

11.—Deshaciendo el abatimiento, determinar las proyecciones acotadas de los vértices del triángulo rectángulo isósceles, cuyas posiciones abatidas son: A_o(4.5, 1.7, 0), B_o(9.5, 1.7, 0), M_o(9.5, 6.7, 0), considerando que dicho triángulo inicialmente se encuentra en el plano (Δ), una de cuyas rectas de máxima pendiente pasa por: C(6.0, −2.8, 0), D(8.0, −6.0, 2.8).

12.—Mostrar en magnitud real la distancia perpendicular entre el punto P(11.1, −7.1, 10.0), y la recta que contiene al segmento (QR): (7.6, −2.6, 1.6), (15.7, −2.6, 6.4).

APENDICE

A.—OBSERVACIONES GENERALES

I.—RESOLUCION GENERAL DE PROBLEMAS.

a) **Continuación de planos acotados.**—Como puede ya advertirse en esta etapa del Curso, al continuar el desarrollo de la Teoría de los Planos Acotados (o de las Proyecciones Acotadas) necesariamente se llega a la exposición de problemas como los que ya fueron resueltos mediante la Doble Proyección Ortogonal, constituyendo prácticamente una repetición de los mismos procedimientos generales, aún cuando las técnicas de su aplicación pueden tener diferencias, por lo cual en los presentes Apuntes ya no se continúa el desarrollo mencionado.

Es claro, por lo tanto que, cuando se quiere ofrecer la resolución de tales problemas en Geometría Descriptiva, mediante la Teoría de los Planos Acotados, se puede principiar el Curso precisamente por la Parte que en estas Notas se ha presentado en segundo término; pero, entonces, ya resulta repetitivo su tratamiento por el Método de la Doble Proyección Ortogonal.

La observación contenida en los párrafos anteriores obliga a que el desarrollo de un buen Curso de Geometría Descriptiva tenga como principio alguno de los dos Métodos Fundamentales conocidos, de acuerdo con los objetivos primordiales perseguidos, o que, en todo caso, se opte por una presentación combinada como la del presente Curso, que también puede ser expuesta tratando el Título XI (El Punto y la Recta) inmediatamente antes, o después, del Capítulo I (Elementos Geométricos), por ejemplo.

Entonces, y tal como ya se hizo notar en su oportunidad, de toda la anterior reflexión se concluye la siguiente evidencia: **"planteado un problema geométrico cualquiera, como los tratados en capítulos anteriores, su resolución puede lograrse en Geometría Descriptiva mediante la aplicación, ya sea del Método de la Doble Proyección Ortogonal o de la Teoría de los Planos Acotados"**, con más o menos prestancia según el tipo particular del problema, la presentación de los datos, las respuestas solicitadas, etc.

b) **Igualdad de escalas.**—Para la resolución de un problema por cualquiera de los procedimientos o métodos conocidos, es conveniente el empleo de una misma escala para la representación gráfica, en vez de las dos que algunos autores acostumbran emplear (quizá con objeto de lograr mejor distinción): milímetros, en la Doble Proyección Ortogonal; y centímetros, en la Teoría de los Planos Acotados.

Por lo tanto, y habiendo experimentado el uso de ambas escalas mencionadas, en el presente Curso se decidió el empleo de solamente una de ellas, de manera que se considera siempre que todas las unidades de longitud correspondientes a los datos quedan representadas en centímetros, porque el uso de dicha escala permite entonces la opción inmediata de poder resolver indistintamente, sin ninguna dificultad, un problema dado cualquiera, según uno u otro de los métodos tantas veces mencionados, como se procede a mostrar en los siguientes

c) **Ejemplos de Aplicación.**

Problema No. 1.—Por el punto O(10.7, −2.3, 2.8), trazar una recta que corte al segmento determinado por M(6.3, 2.9 −2.2) y N(9.2, 7.8, 4.0), y que sea paralela al plano (Δ), definido por los puntos: P(5.3, −3.0, 4.9), Q(5.3, 2.9, 1.3) y R(12.0, −3.0, 0).

Procedimiento general:

1o.—Por el punto O se construye un plano auxiliar paralelo al plano dado (Δ).

2o.—Se obtiene el punto de intersección I entre el mencionado plano auxiliar y la recta dada (MN).

3o.—La solución del problema queda mostrada trazando el segmento definido por los puntos O e I.

El procedimiento anterior resulta aplicado como sigue:

Según la teoría de los planos acotados.—Solución: Fig. A.1.1).

— Se efectúa la graduación de los segmentos (QP) y (RP), respectivamente, calculando:

$$m = \frac{4.9}{6.7} = 0.73, \quad \therefore \quad I = 1.37.$$

$$m = \frac{3.6}{5.9} = 0.61, \quad \therefore \quad I = 1.64, \quad 0.7\, I = 1.15.$$

para dibujar no varias horizontales de cota redonda, sino sólo su traza (Δ_o), y normalmente a esta última una recta graduada de máxima pendiente, que contiene a P, efectuando su abatimiento.

— Por O se lleva una paralela, en proyección y abatimiento, a la última recta mencionada, obteniendo la traza del plano auxiliar, paralelo a (Δ), que contiene a O, cuya intersección I con el segmento (MN) se determina efectuando el abatimiento del último y de la recta de intersección entre el proyectante vertical de (MN) y el plano auxiliar considerado, cuya última recta resulta definida mediante dos de sus puntos de cota redonda conocida, que se encuentran en el plano, como son 6 y 0, que aparecen indicados en la figura.

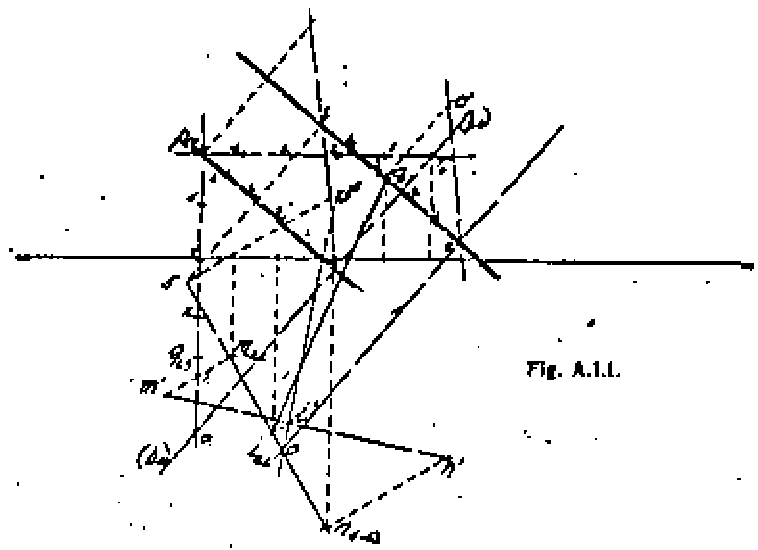


Fig. A.1.1.

— La intersección de (MN) y (5—0) proporciona el punto cuyas ordenadas medidas en la figura, son: I(76, 5.1, 0.6). Uniendo I con O se obtiene el resultado buscado.

Según el Método de la Doble Proyección Ortogonal

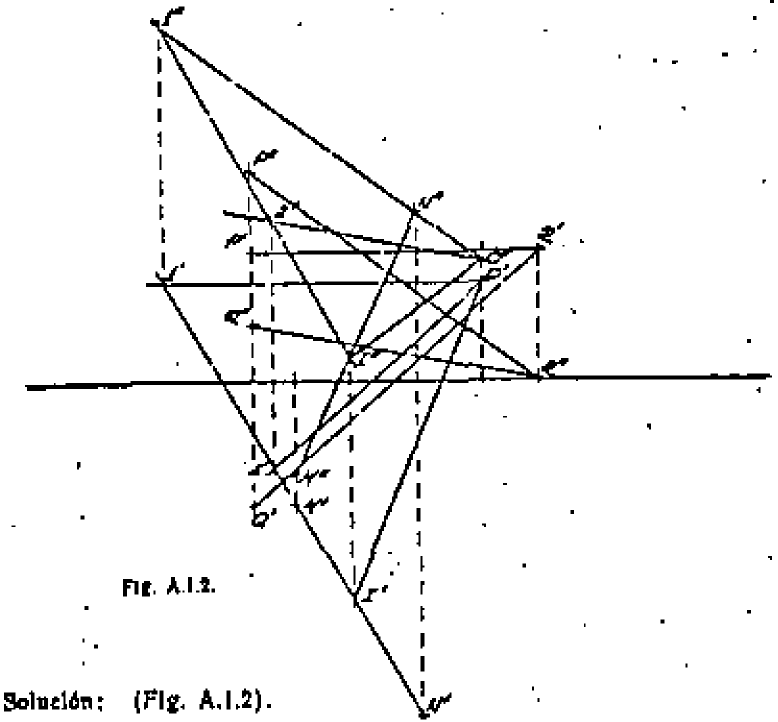


Fig. A.1.2.

Solución: (Fig. A.1.2).

— Se construye el plano auxiliar trazando por (O′, O″) paralelas respectivas a (Q′R′, Q″R″) y (P′R′, P″R″).

— Se obtiene el punto de intersección (I′, I″) entre el plano auxiliar antes mencionado, y el segmento (M′N′, M″N″), determinándolo como el punto común de dicho segmento y de la recta de intersección (1′2′, 1″2″) entre su proyectante vertical (de MN) y el plano auxiliar, tal que en la figura puede obtenerse al medir, teniendo en cuenta la escala empleada: I(7.6, 5.1, 0.6).

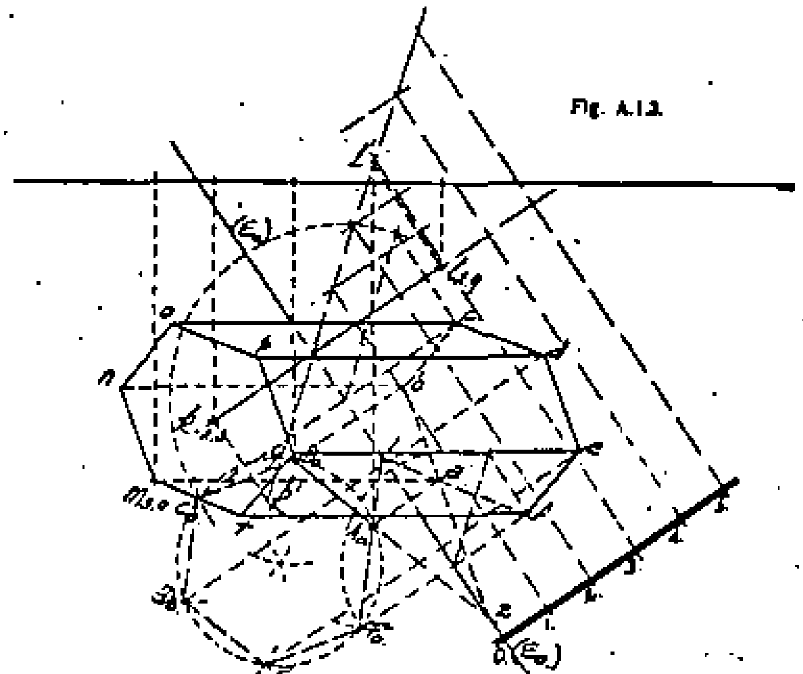
— La solución del problema resulta el segmento: (OI) = (O′I′, O″I″), que coincide con el resultado obtenido por el otro Método.

Problema No. 2.—Dadas las posiciones abatidas: A_o(11.5, 8.1, 0), B_o(9.6, 6.6, 0), de dos vértices consecutivos de un exágono (ABCDEF), contenido en el plano (ε) cuya recta de máxima pendiente pasa por K(7.7, 5.7, −2.3) y L(13.1, 2.0, 2.9), construir el prisma exagonal cuyas aristas laterales son todas iguales entre sí: (AM) = (BN) = (CO) = (DP) = (EQ) = (FR), siendo M(6.3, 7.1, 3.0).

Procedimiento general:

1o.—Se completa el exágono (ABCDEF), y se deshace el abatimiento.

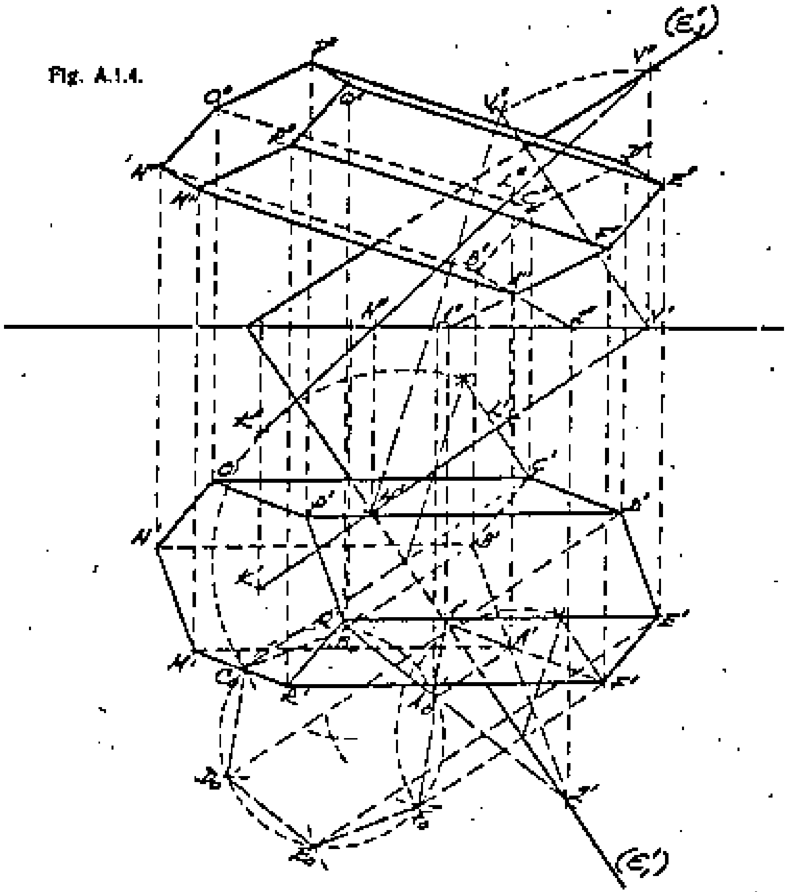
Fig. A.1.3.



Por la teoría de los Planos Acotados

2o.—Por las proyecciones obtenidas de los vértices del exágono se trazan las proyecciones de las aristas, todas paralelas a (AM).

Fig. A.1.4.

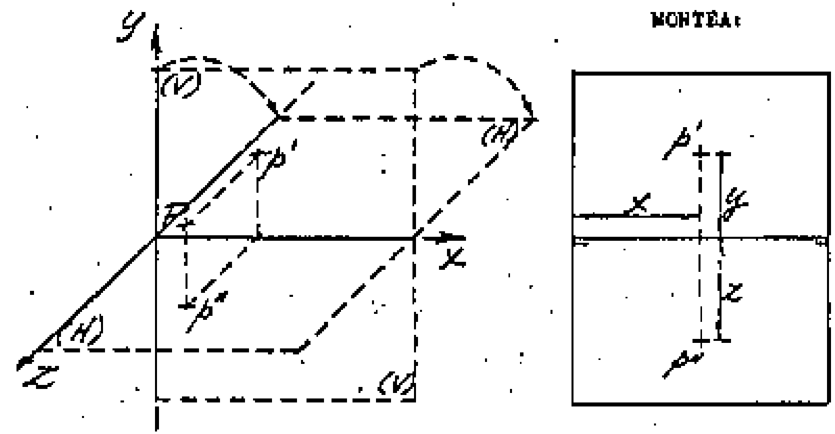


Por el Método de la Doble Proyección Ortogonal

3o.—Se determina el otro extremo de cada una de las aristas, considerando que son de la misma longitud; y dibujando la base superior (MNOPQR) de lados paralelos a los correspondientes de la base inferior (ABCDEF).

2.—OTROS SISTEMAS DE REFERENCIA.

a) **Sistema derecho convencional.**—El desarrollo completo de todos los conocimientos de la Geometría Descriptiva, es decir, la solución de los problemas geométricos mediante la aplicación de sus propios métodos, también puede lograrse utilizando un sistema de referencia que, si bien no es el que se ha usado ahora en los presentes Apuntes, su empleo resulta igualmente sencillo y ha sido utilizado en la anterior edición (de prueba) de los mismos, tal es el caso del **sistema derecho convencional**, cuya aplicación además se realizó empleando otra nomenclatura, como se ilustra en seguida:



Figs. A.2.1.

en cuyas figuras puede observarse claramente la convención para designar las proyecciones de un punto cualquiera **P** del espacio tridimensional, tal que sus coordenadas son (x, y, z), con la **letra minúscula** del mismo nombre que la mayúscula que designa al punto: con un apóstrofe para la proyección vertical, y con dos apóstrofes para la proyección en el plano horizontal; así, en los planos de referencia superpuestos mediante la rotación conocida, que se indica en la figura, o sea en la montea, el punto en cuestión queda identificado por sus dos proyecciones: P = (p', p'').

Es fácil observar que en este caso las coordenadas de un punto cualquiera (abscisa, ordenada, cota) se designan: (distancia, cota, alejamiento) con los mismos nombres conocidos, pero cuya disposición correcta no corresponde a la que se ha empleado hasta ahora en los presentes Apuntes (distancia, alejamiento, cota), por lo cual, para resolver adecuadamente los problemas que han sido presentados ya, tanto en los Ejemplos Ilustrativos resueltos, como en las Series de Ejercicios propuestas, mediante este Sistema Derecho Convencional, es preciso cambiar el orden de los dos últimos valores de las coordenadas de los puntos que se mencionan en los datos.

Entonces, cuando se emplea el sistema derecho de referencia mencionado, así como la nomenclatura relativa correspondiente a las proyecciones de un punto: $P = (p', p'')$ (proyección vertical, proyección horizontal), la designación para el orden debido de sus coordenadas (del punto) en Geometría Descriptiva, debe ser: (distancia, cota, alejamiento), cualquiera que sea el Método requerido para la solución de un problema, como puede observarse en los siguientes

Ejemplos:

Problema No. 1.—Determinar la intersección entre los planos: (Δ), definido por los puntos P(5.5, 1.6, 5.8), Q(8.8, 8.4, 9.5), R(14.3, 0, 0.9); y (ϵ), dado por el segmento S(11.0, 0.8, 1.7), T(15.5, 9.0, 6.4) de una de sus rectas de máxima pendiente.

El procedimiento general, ya conocido, para resolver problemas de intersección de planos, como el presente, consistente en la utilización de planos auxiliares horizontales, puede observarse en las Figs. A.2.2 y A.2.3, según que se aplique el Método de la Doble Proyección Ortogonal o la Teoría de los Planos Acotados.

Con el objeto de evitar una innecesaria complicación en la figura, no se aplica el procedimiento gráfico para la graduación de los planos (Δ) y (ϵ), sino que se calculan numéricamente los valores de los intervalos, como sigue:

De (PQ): $\dfrac{5.0}{8.4 - 1.6} = \dfrac{5.0}{6.8} = 0.735, \qquad 0.6\ I = 0.44.$

De (RQ): $\dfrac{10.2}{8.4} = 1.21.$

De (ST): $\dfrac{6.5}{9. - 0.8} = \dfrac{6.5}{8.2} = 0.79.$

Por el Método de la Doble Proyección Ortogonal

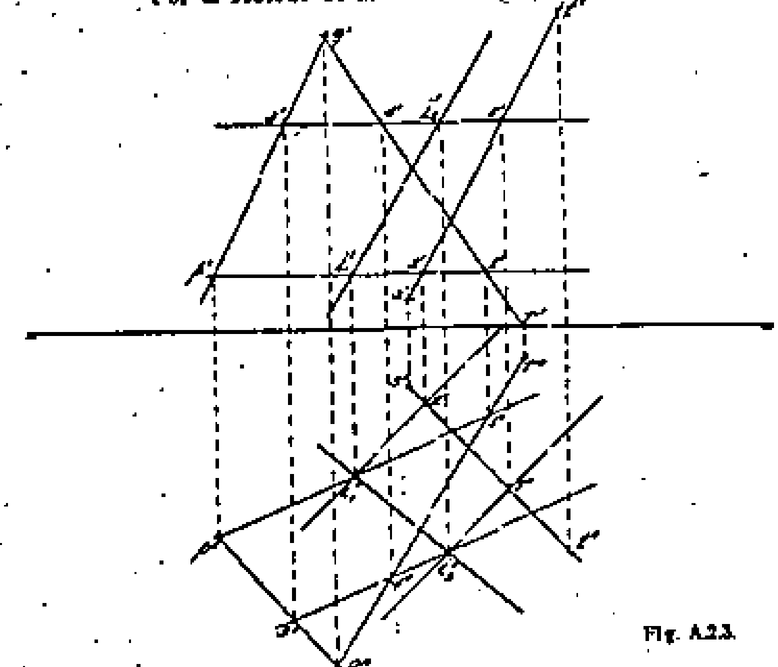


Fig. A.2.3

Por la Teoría de las Proyecciones Acotadas

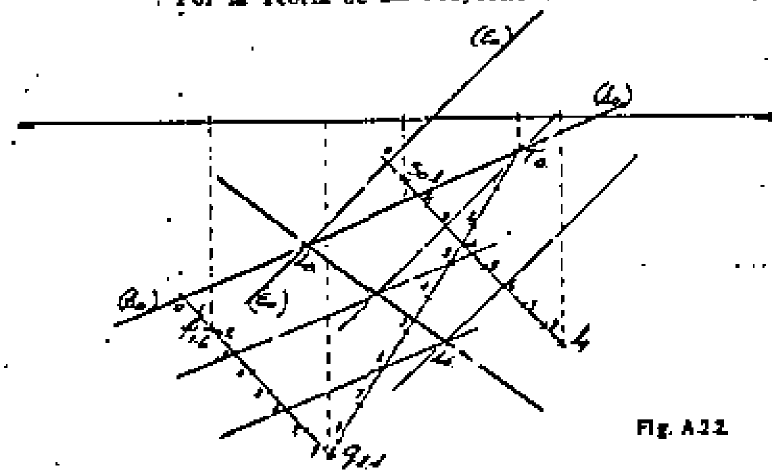


Fig. A.2.2

La recta de intersección queda definida por dos puntos comunes entre ambos planos, los de proyecciones acotadas: l_8 e l_4, por ejemplo.

Problema No. 2.—Obtener los valores de los tres ángulos diedros del triedro cuyos ángulos planos o caras, están dados por el vértice (V) y los puntos (R, S, T, U) cuyas posiciones abatidas son: V_0(10.5, 0, 6.6), R_0(5.0, 0, 3.8), S_0(6.8, 0, 0), T_0(14.7, 0, 0) y U_0(16.6, 0, 4.7), deshaciendo el abatimiento.

El procedimiento general para resolver este problema, que antes ya fue tratado en la página 161, con los mismos datos, consiste en deshacer el abatimiento para indicar los valores de los diedros (A) y (C), adyacentes en el plano horizontal, y después efectuar el abatimiento del otro diedro (B), como se ilustra en seguida.

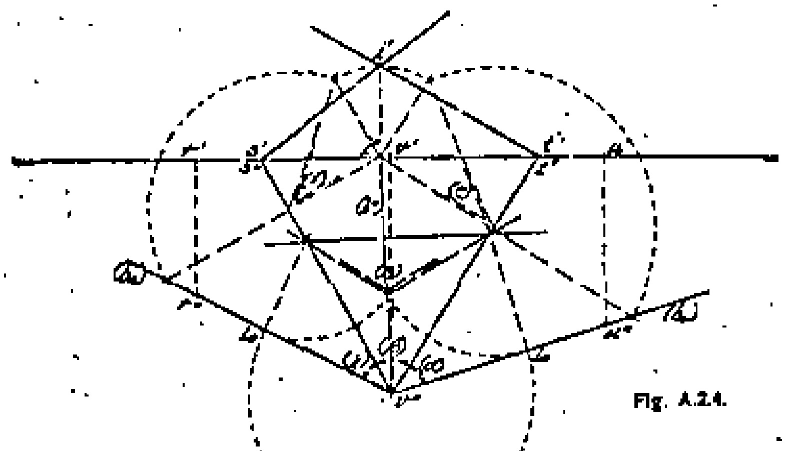


Fig. A.2.4.

Según el Método de la Doble Proyección Ortogonal

El proceso mostrado para deshacer el abatimiento es el mismo en los dos métodos, y se inicia eligiendo un punto cualquiera (I_0) en la arista abatida (b_0), en sus dos posiciones indicadas, tomadas a igual distancia del vértice.

Además, puede advertirse aquí claramente, dada la similitud no sólo del resultado obtenido, sino también del procedimiento mostrado en la figura correspondiente, que la solución de un problema en Geometría Descriptiva es independiente del sistema de referencia y del método que se utilice para obtenerla, cuya elección adecuada de-

penderá en caso dado, de la disposición de los datos y del tipo de la respuesta solicitada, aunque en muchas ocasiones las diferencias resultantes pueden no ser dignas de tomarse en consideración, como en el presente ejemplo.

Según la Teoría de los Planos Acotados

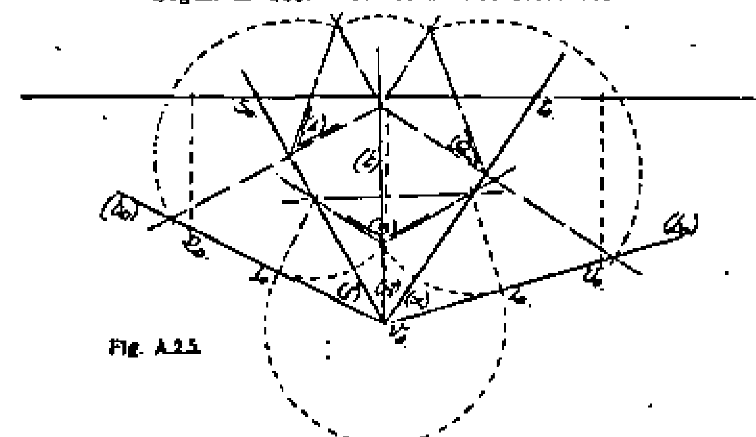


Fig. A.2.5

b) Sistema derecho marginal.—Otra disposición del sistema de referencia, más particular todavía que los dos anteriores conocidos, es el que genéricamente puede ser designado como sistema **marginal**, por considerarse siempre su situación en las márgenes extremas o límites del papel utilizado, tal como el **sistema derecho** que se ilustra en la figura siguiente:

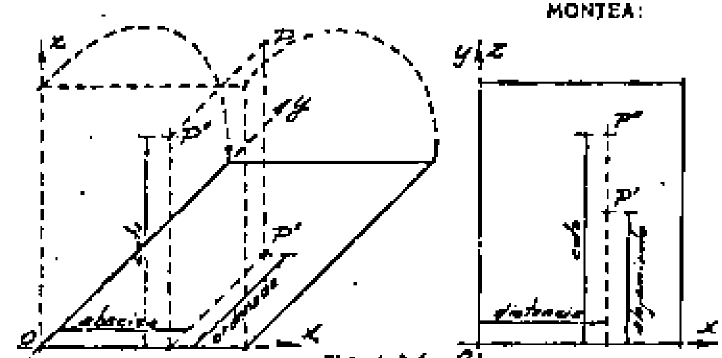


Fig. A.2.6

en cuyo caso resulta que los valores de las coordenadas de un punto cualquiera (abscisa, ordenada, cota) son siempre todas positivas (y no solamente la abscisa, como en los dos sistemas ya tratados), por suponerse que este sistema de referencia se encuentra situado más hacia adelante, más hacia abajo y más hacia la izquierda, que cualquier punto considerado del espacio tridimensional.

Designando en este caso, como en el sistema izquierdo, los valores relativos a las coordenadas de un punto, con los nombres de: distancia, alejamiento y cota, precisamente en ese orden, y midiéndolos como ya se sabe: la distancia (= abscisa) a lo largo del eje de las X, el alejamiento (= ordenada) paralelamente al eje Y, y la cota (= cota) en el sentido del eje de las Z, teniendo siempre en cuenta que dichos ejes ahora se encuentran localizados en las márgenes del papel, se resuelven problemas utilizando alguno de los métodos fundamentales, como se muestra en seguida:

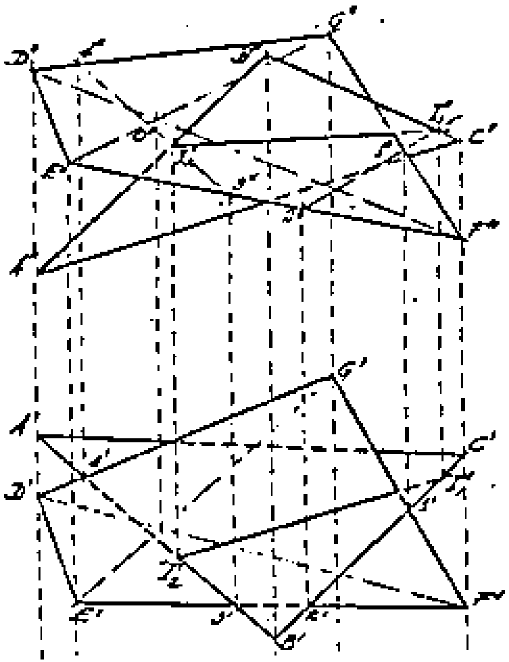


Fig. A.2.7.

Problema No. 1.—Determinar la intersección y la visibilidad entre el triángulo A(6.0, 11.0, 14.8), B(11.5, 6.0, 19.8), C(16.0, 10.3, 17.7), y el cuadrilátero plano: D(6.0, 9.6, 19.6), E(6.8, 7.0, 17.4), F(16.0, 6.6, 15.4), G(13.0, 12.3, Z).

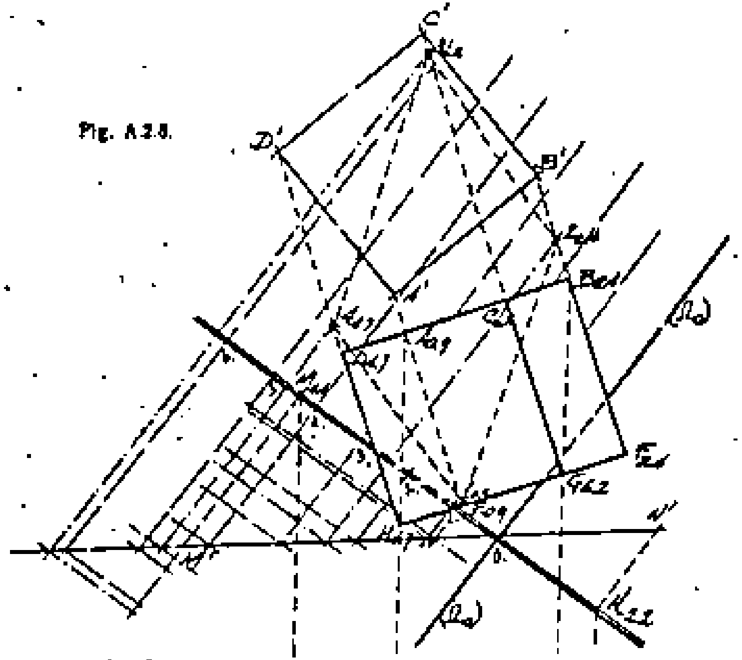
La solución del problema anterior aplicando la Teoría de los Planos Acotados no resulta conveniente, por estar los datos de los planos de tal manera dispuestos que sus rectas horizontales se cortan muy oblicuamente.—(Fig. A.2.7).

Problema No. 2.—Obtener la intersección entre el cubo cuyas caras (ABCD) y (EFGH) se encuentran en planos verticales, de cotas todas positivas, y el plano (Ω) tal que una de sus rectas de máxima pendiente pasa por M(10.7, 8.3, 4.4) y N(17.4, 3.6, −2.2), cuando se conocen los extremos: A(13.0, 9.7, 0.9) y B(16.6, 11.0, 2.4) de una de las aristas del citado cubo.

Solución: (Fig. A.2.8).

1o.—Se efectúa el abatimiento del segmento (AB), y sobre su plano proyectante se completa la cara cuadrada (ABCD); se desha-

Fig. A.2.8.



ce el abatimiento, dibujándose las proyecciones de las aristas horizontales (AE), (BF), (CG) y (DH) normalmente a la de (AB), para obtener la proyección completa del cubo.

NOTA.—La notación utilizada como prueba en este problema, consiste de las mismas letras mayúsculas que designan los puntos correspondientes del espacio tridimensional.

2o.—Se realiza la graduación del plano (θ) mediante sus horizontales de cota redonda, trazadas abatiendo el segmento (MN) de la recta de máxima pendiente conocida; también se dibujan las horizontales del plano cuyas cotas son iguales a las de las respectivas aristas del cubo.

3o.—Los puntos comunes entre las últimas rectas mencionadas (horizontales del plano y aristas del cubo de iguales cotas) determinan la intersección buscada, cuyas proyecciones acotadas se indican en la figura. Se termina el problema mostrando la visibilidad de las proyecciones.

NOTA.—La ventaja observada durante el empleo de este sistema (derecho) marginal es que, en la montea obtenida no aparece la línea de tierra; pero, en cambio, se necesita que el corte del papel utilizado sea lo más rectangular posible, y que las medidas requeridas se tomen con cierta incomodidad, respecto a los otros sistemas de referencia antes presentados.

3.—BIBLIOGRAFIA.

1.—GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.—Planos Acotados, Doble Proyección Ortogonal y Perspectiva Lineal).—Arq. Adrián Giombini.—6a. Edic.—México, 1959.
2.—ELEMENTOS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.—Ing. Jorge Betancourt Cuevas.—México. Edic. 1969.
3.—TEMARIO PARA LOS CURSOS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.—Arq. Adrián Giombini.—4a. Edic.—México.—1967.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

ANEXO A

SEPTIEMBRE, 1982

de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

PROYECCIÓN
Y sus diferentes acepciones

. Ya que el diseñador siempre ha de PROYECTAR imágenes y .....

. Ha de saber que puede PROYECTAR una determinada figura que se destaque.....

. O bien PROYECTAR conscientemente una ambivalencia de imágenes de forma.....

. El PROYECTO de este edificio lo realizó.....

. El arte de PROYECTAR,

. El avión se PROYECTÓ a las.....

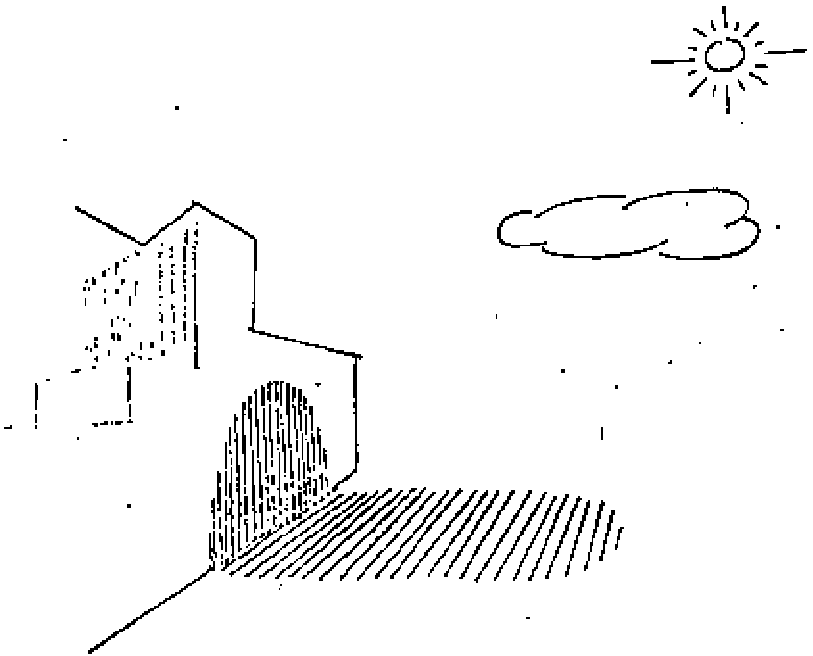
. PROYECTO arquitectónico....

. Haz favor de PROYECTAR.....

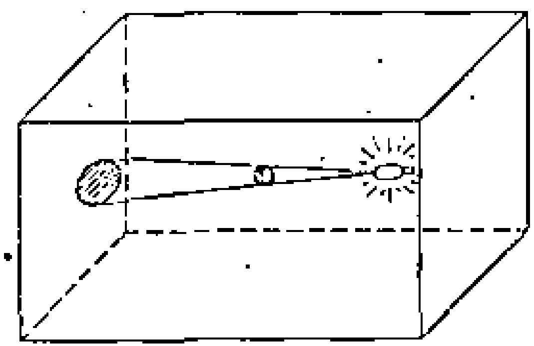
. La PROYECCIÓN de la película, será.....

PROYECCIÓN
. La PROYECCIÓN del futuro ingeniero deberá...

. Unas nubecitas pasan velozmente delante del sol, PROYECTANDO su sombra sobre las cosas y modificando continuamente la intensidad de la luz.

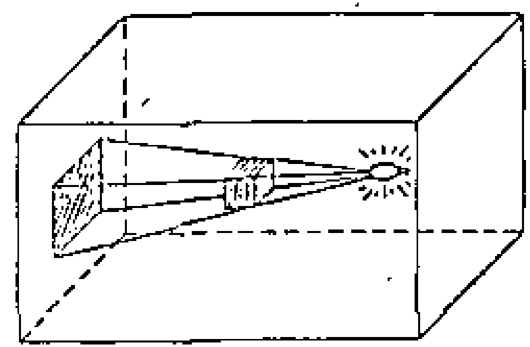


PROYECCIÓN
A través del concepto Sombra



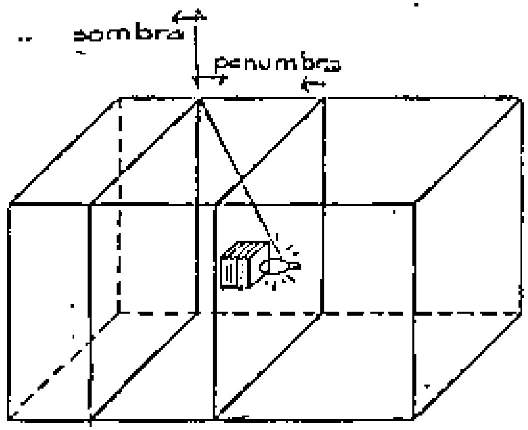
la sombra de un punto en el espacio, es lo que llamaremos PROYECCION de un punto. La sombra o proyección, será mayor que el tamaño del punto que la provoca, cuando la fuente luminosa esté a una distancia finita.

PROYECCIÓN
A través del concepto Sombra



La sombra de un objeto, provocará una sombra cada vez mayor, en cuanto sea menor la distancia entre el objeto y la fuente luminosa.

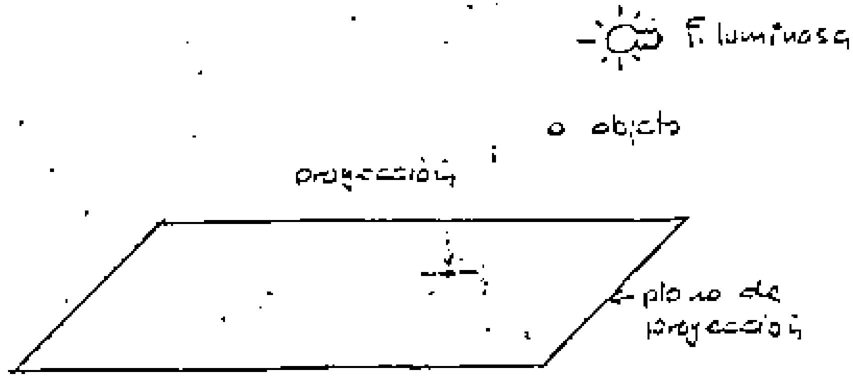
PROYECCIÓN



Si la fuente luminosa tocara el cuerpo iluminado, la sombra abarcaría cuatro caras interiores de un recinto.

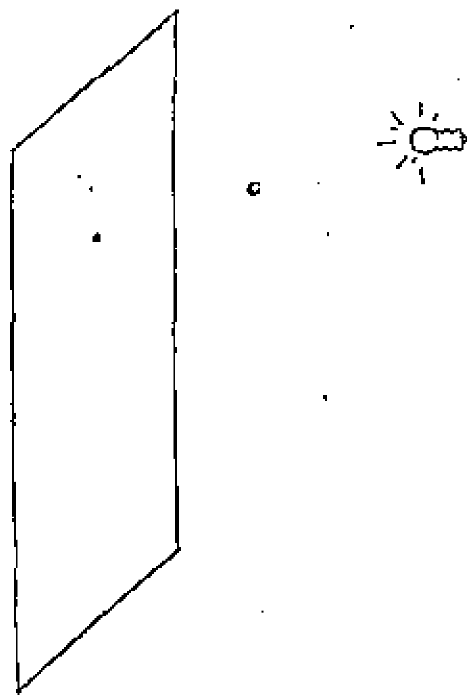
PROYECCIÓN

En un plano horizontal



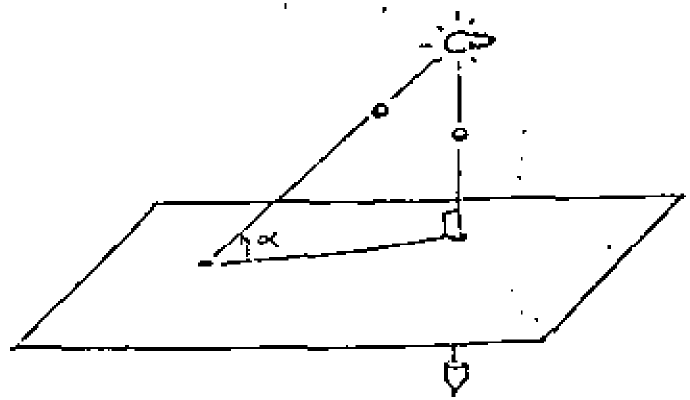
Plano horizontal. Es aquella superficie que tiene una posición en el espacio, igual a la posición de la superficie superior de un líquido en reposo.

PROYECCIÓN
En un plano vertical



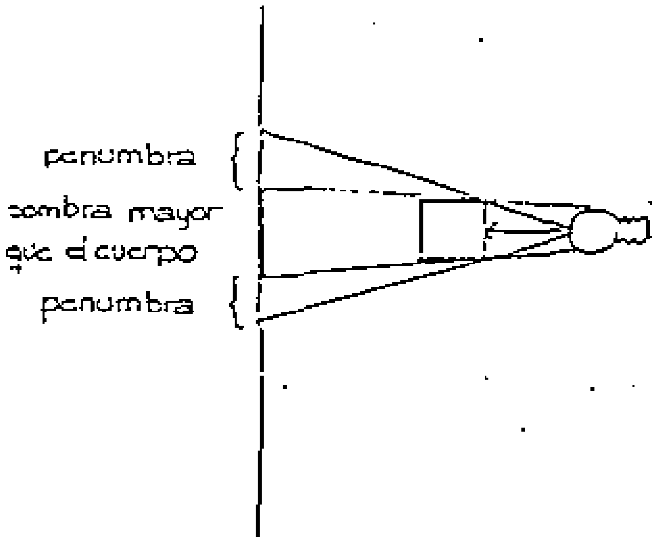
PLANO VERTICAL, Es aquella superficie que tiene contenida en él, la posición de una plomada

PROYECCIÓN
Y sus elementos



Los elementos que dan origen a una proyección son: fuente luminosa, objeto en el espacio, plano de proyección, a través de una línea proyectante con características tales como; perpendicularidad y oblicuidad.

PROYECCIÓN
En un plano, con foco finito

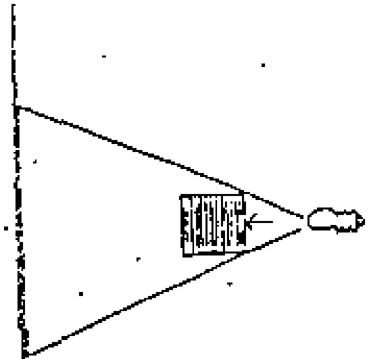


Para concebir mejor el concepto de proyección, a partir del concepto sombra, eliminaremos las zonas de penumbra.

PROYECCIÓN
Cónica – Cilíndrica

Con foco a distancia finita.
Rayos divergentes.

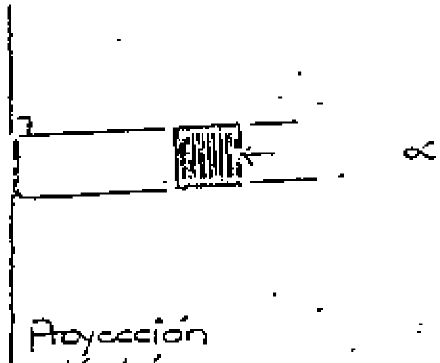
Sombra mayor que el objeto



Proyección Cónica

Con foco en el infinito.
Rayos paralelos.

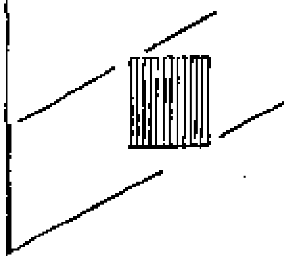
Sombra igual al tamaño del objeto



Proyección cilíndrica

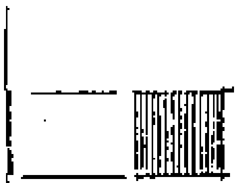
PROYECCIÓN
Cilíndrica

Con rayos luminosos de incidencia oblicua al plano de proyección



Cilíndrica . oblicua

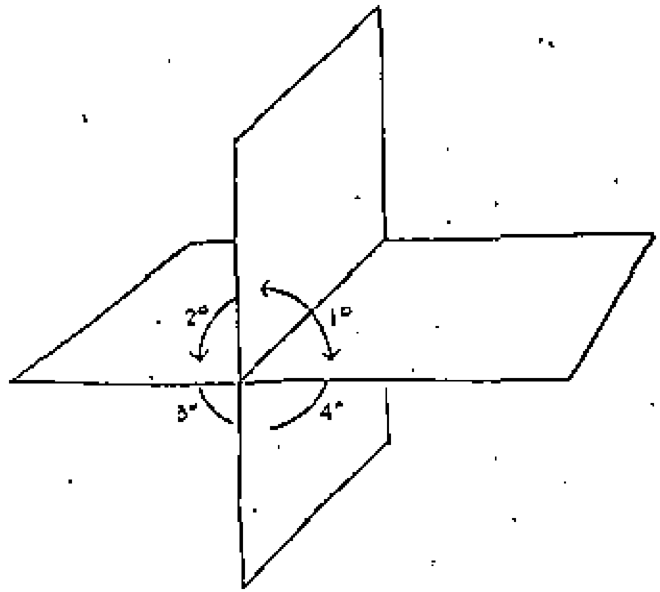
Con rayos luminosos de incidencia perpendicular al plano de proyección



Cilíndrica ortogonal

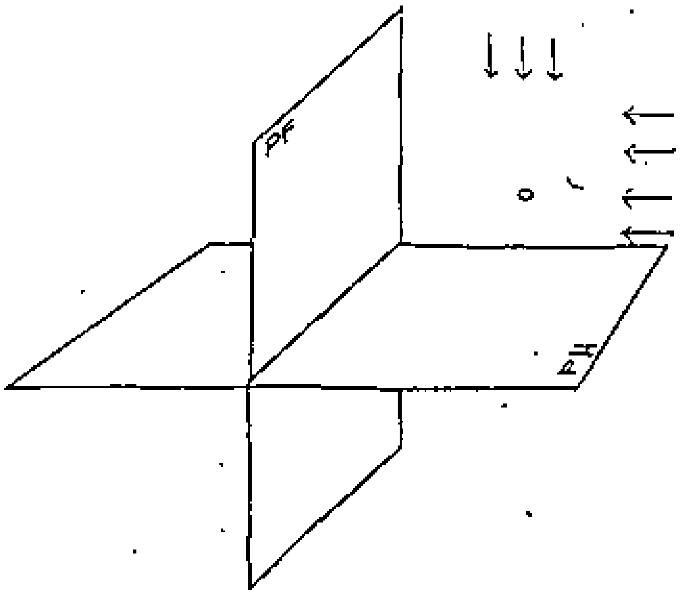
TIPO PROYECCION	POSICION DEL FOCO	RAYO LUMINOSO	TAMAÑO DE LA SOMBRA	INCIDENCIA
CILINDRICA	INFINITO	PARALELO	IGUAL AL REAL	$\perp$ ORTOGONAL $\angle$ OBLICUA
CONICA	FINITA	DIVERGENTE DEL FOCO	MAYOR AL TAM. REAL	

PROYECCIÓN
Diédrica



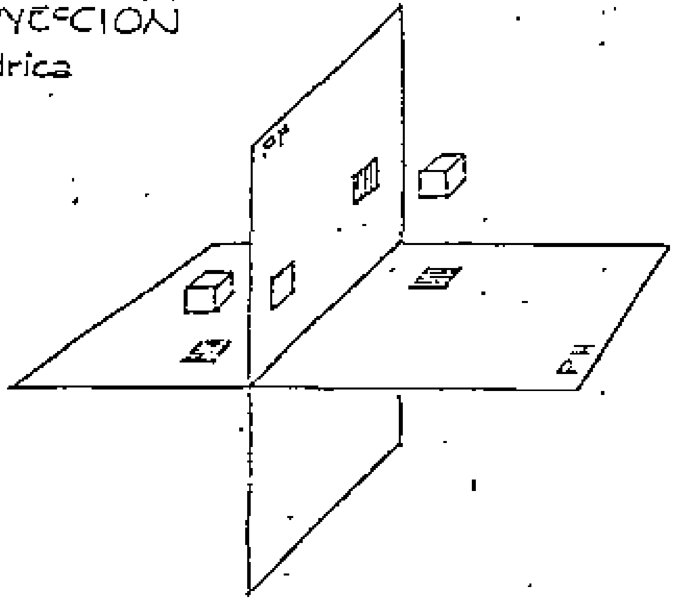
Dos planos perpendiculares entre sí, crean en el espacio un ángulo diedro y originan cuatro regiones llamadas cuadrantes, que se numeran en el sentido contrario al de las manecill del reloj.

PROYECCIÓN
Diédrica



Como la sombra de un punto, sólo se proyecta en un plano de proyección, para que exista sombra en dos planos, se requiere de una convención. Por cada punto analizado en el espacio, se requiere de la posición de dos fuentes luminosas. Una de derecha a izquierda, otra de arriba hacia abajo ⊥

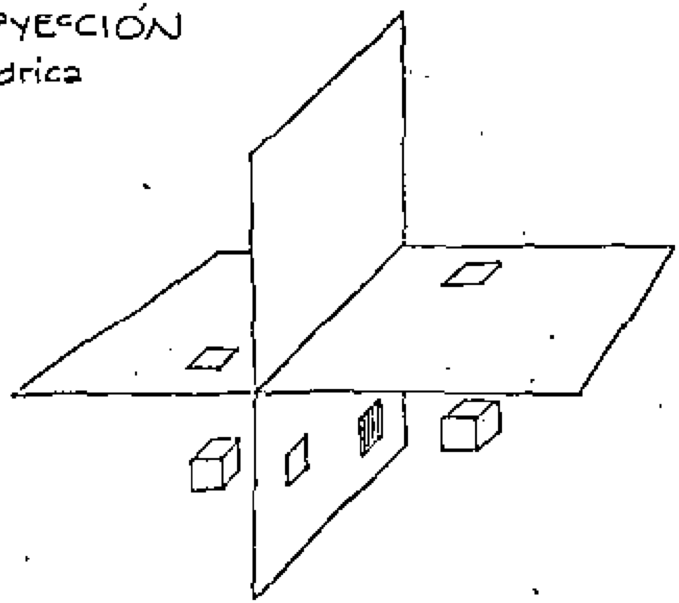
PROYECCIÓN
Diédrica



En el primer cuadrante, planos opacos y proyección como sombra.

En el segundo cuadrante; plano horizontal opaco, plano frontal transparente. En el plano horizontal la proyección como sombra, en el frontal sólo como vista.

PROYECCIÓN
Diédrica

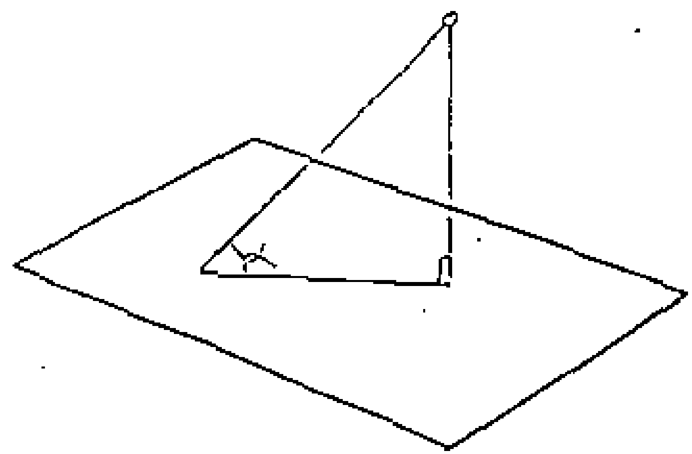


En el tercer cuadrante, el plano horizontal y el frontal deberán considerarse transparentes, sus proyecciones vistas.

En el cuarto cuadrante, el plano horizontal transparente, su proyección como vista, el plano frontal opaco su proyección como sombra.

PROYECCIÓN
Definición

Es la intersección de la línea proyectante que contiene al punto del espacio, con el plano de proyección



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

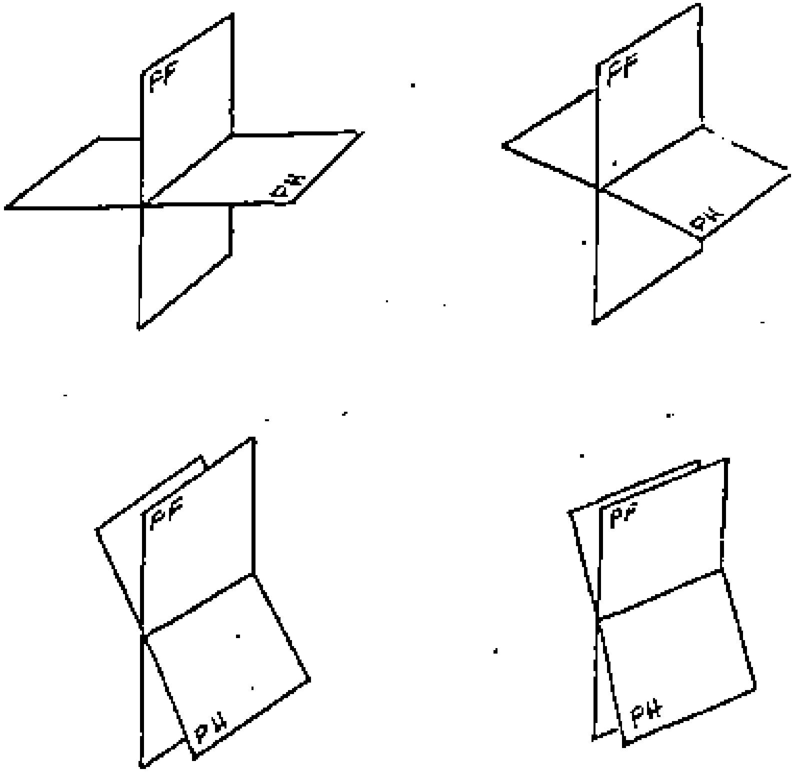
GEOMETRIA DESCRIPTIVA

ANEXO B

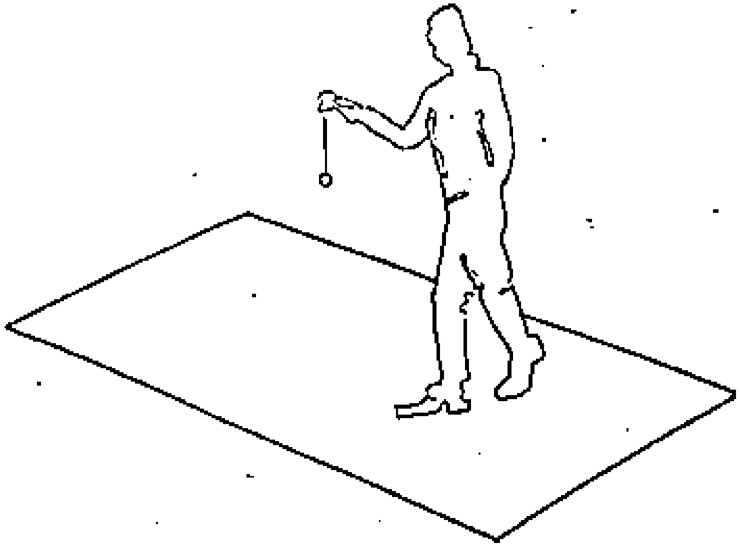
SEPTIEMBRE, 1982

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

PROYECCIÓN
Abatimiento de planos

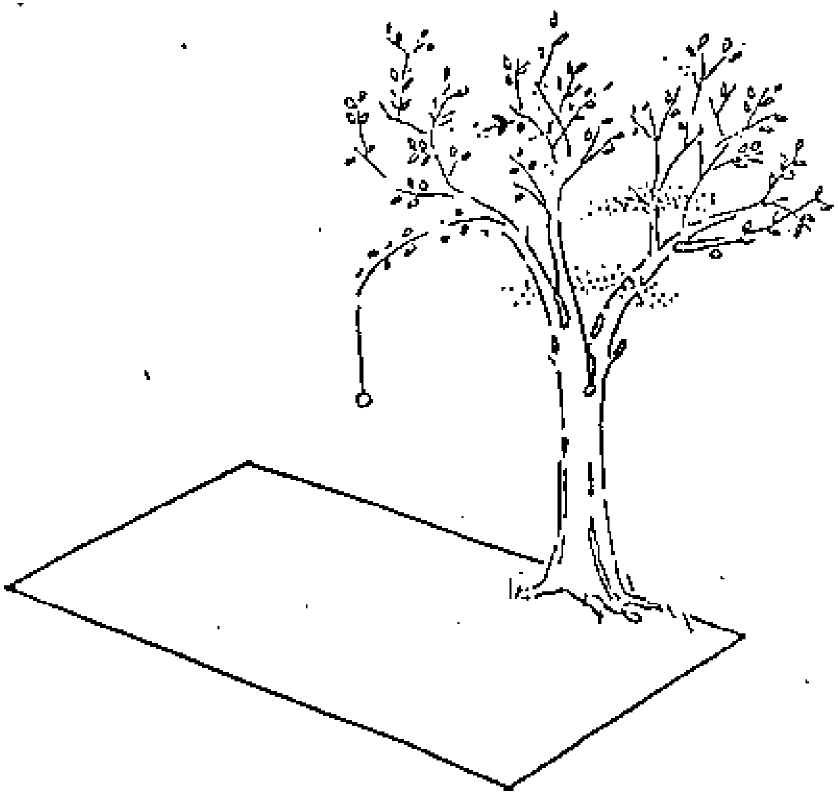


PROYECCIÓN
Ubicación de un punto del espacio en un plano



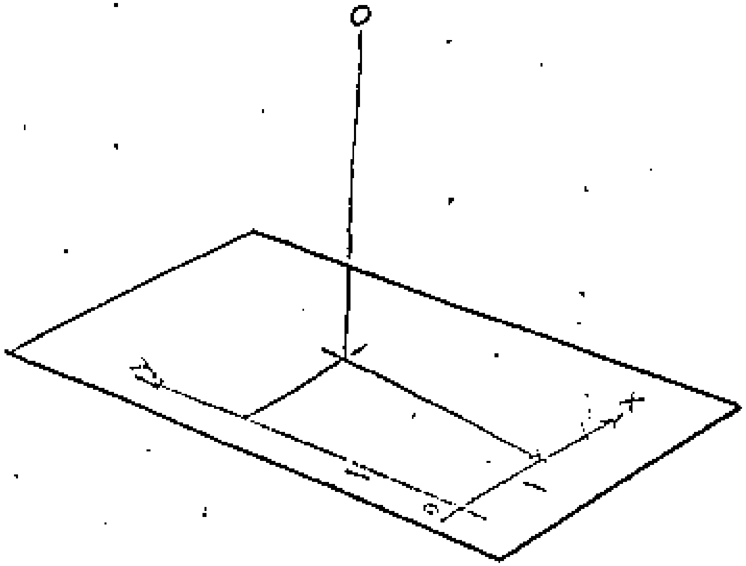
③

PROYECCIÓN
Ubicación de un
punto del espacio
en un plano

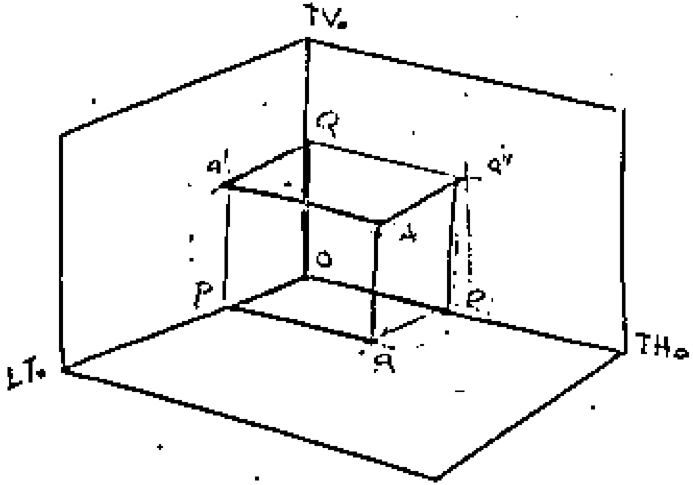


④

PROYECCIÓN
Ubicación de un
punto del espacio
en un plano

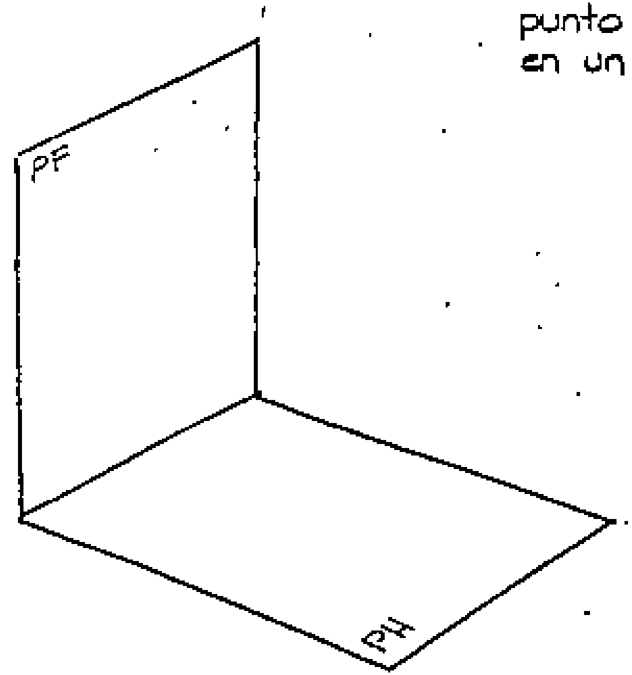


PROYECCIÓN
Ubicación de un
punto en un triedro

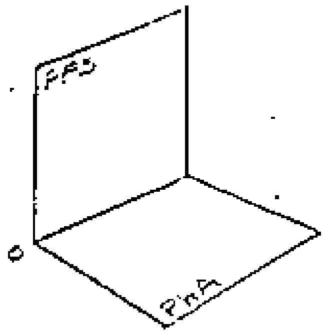


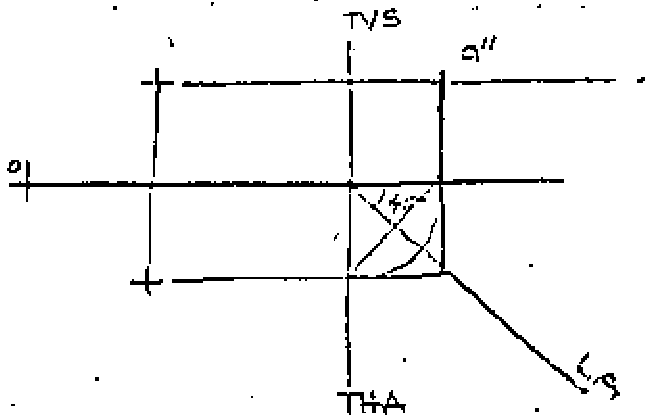
Distancia = $\overline{a''A}$, $\overline{Qa'}$, $\overline{OP}$, $\overline{Ra}$
Alejamiento = $\overline{a'A}$, $\overline{Qa''}$, $\overline{Oe}$, $\overline{Pa}$
Cota = $\overline{aA}$, $\overline{Ra''}$, $\overline{Pa}$, $\overline{OQ}$

PROYECCIÓN
Ubicación de un
punto del espacio
en un diedro

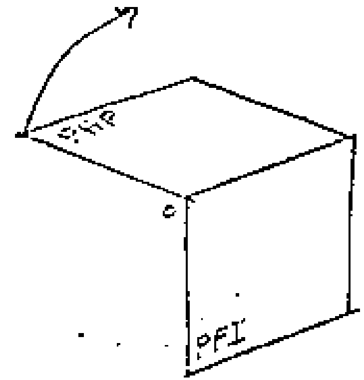


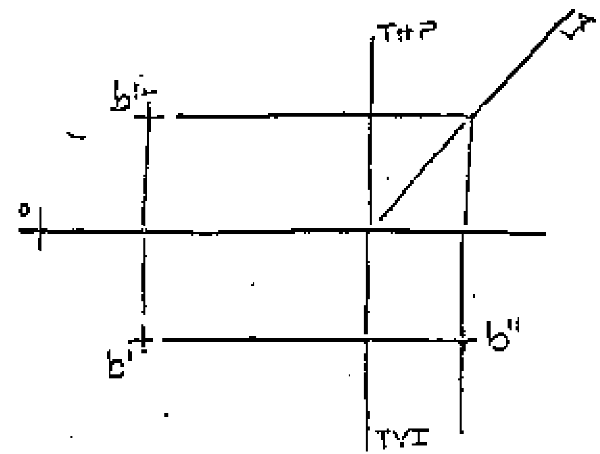
PROYECCIÓN
Montea del primer cuadrante





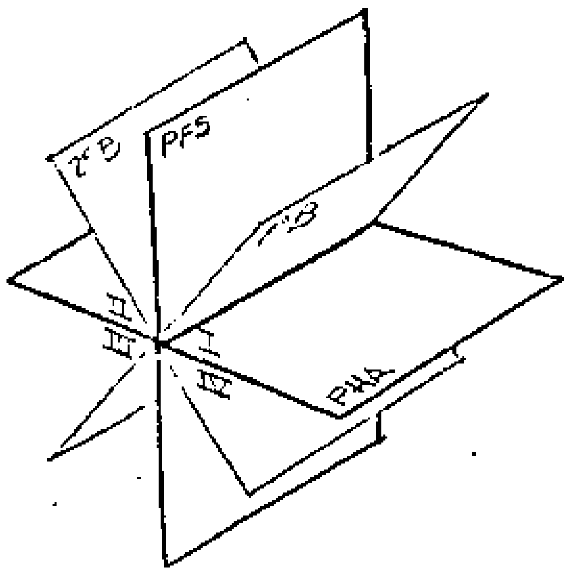
PROYECCIÓN
Montea del tercer cuadrante





PROYECCIÓN

Planos bisectores



Punto	Posición	Alejamiento	Cota
A	Primer cuadrante	+	+
B	Segundo cuadrante	−	+
C	Tercer cuadrante	−	−
D	Cuarto cuadrante	+	−
E	Horizontal anterior	+	0
F	Horizontal posterior	−	0
G	Frontal superior	0	+
H	Frontal inferior	0	−
J	Línea de tierra	0	0

Todo punto del primer bisector, tiene su alejamiento o cota de igual magnitud y del mismo signo, según el cuadrante donde esté, luego todo punto cuyas proyecciones sean simétricas a la línea de tierra, pertenece al primer bisector.

Todo punto del segundo bisector, tiene su alejamiento o cota de igual magnitud pero diferente signo, luego todo punto cuyas proyecciones sean coincidentes, pertenece al segundo bisector.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

A N E X O C

SEPTIEMBRE , 1982

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

Ejercicio ①. Por los puntos dados, trazar las rectas que se indican

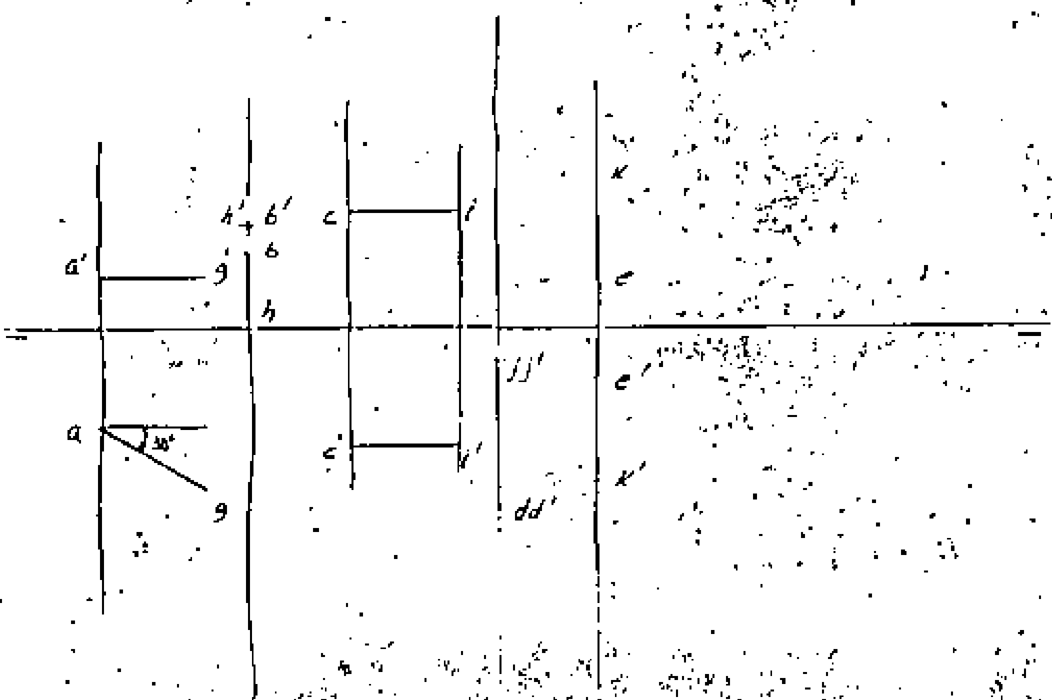
Por A (20, 19, 10), una recta horizontal que forme 30° con el P.F.

Por B (30, 15, 20), una recta de punta

Por C (70, -23, 23), una recta fronto-horizontal

Por D (100, 35, -35), una recta de perfil del 2º Bisector

Por E (120, -10, -X), una recta de perfil del 1er Bisector

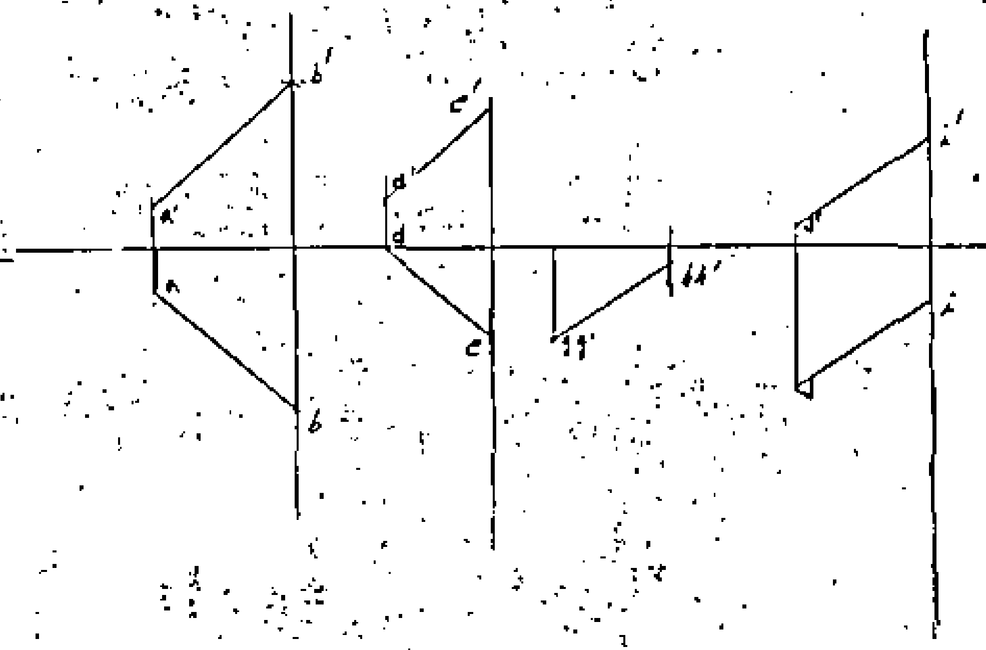


Ejercicio ②. Desde A (35, [illegible], [illegible]) trazar una recta oblicua del 1º bisector

Desde D (82, 0, [illegible]) trazar una paralela a la horizontal

Desde G (116, 10, -10) trazar una recta oblicua del 2º bisector

Desde J (145, 10, x) trazar una recta paralela a la horizontal

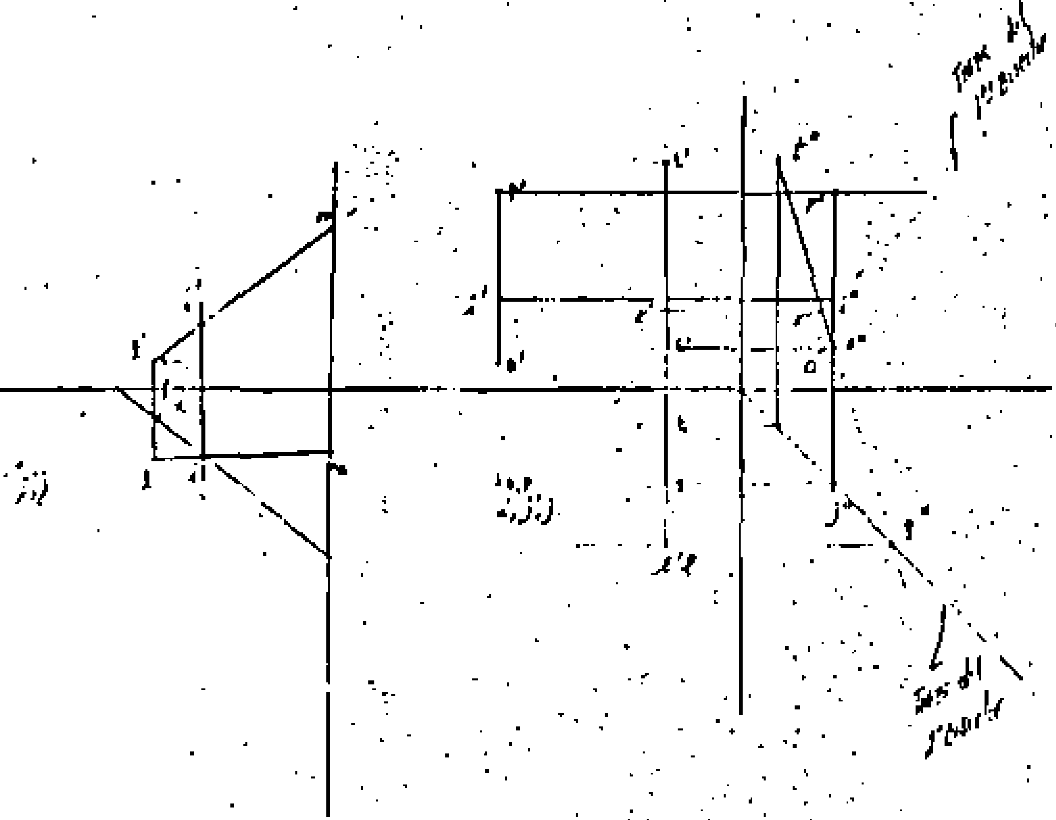


Ejercicio ③ Determinar los puntos comunes con los planos bisectores de las siguientes Rectas:

Recta LM L(37,13,7) M(72,0,35)

Recta OP O(105,10,6) P(105,18,40)

Recta ST S(139,18,9) T(139,7,46)

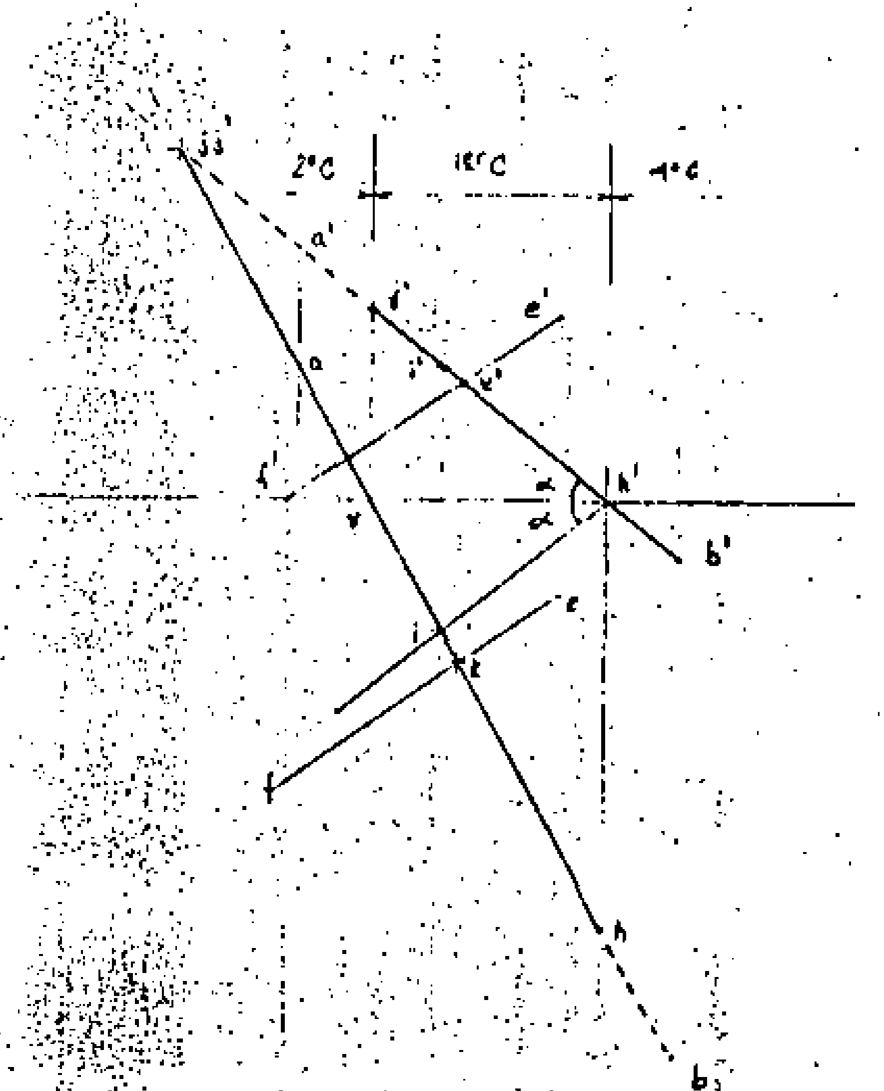


Ejercicio ④ 1º Determinar la visibilidad de la recta AB y sus puntos com... con los bisectores.

2º Determinar la proyección horizontal de la recta EF con la condición de que corte a la recta AB y sea paralela al 1er Bisector.

Recta AB A(22,-21,60) B(159,109,71)

Recta EF E(138, x, 37) F(81, x, 0)



Ejercicio (5)

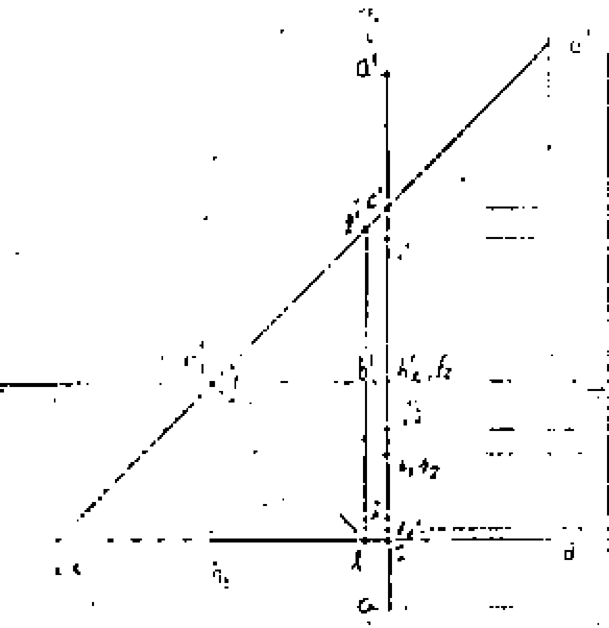
1.- Determinar la proyección horizontal del punto C, que está en la recta AB

2.- Por el punto C hacer pasar una recta frontal.

3.- Determinar las trazas de las dos rectas, visibilidad y puntos comunes con los planos bisectores.

Recta AB A(14, 44, 61), B(14, 14, 4)

Punto C (14, x, 35)



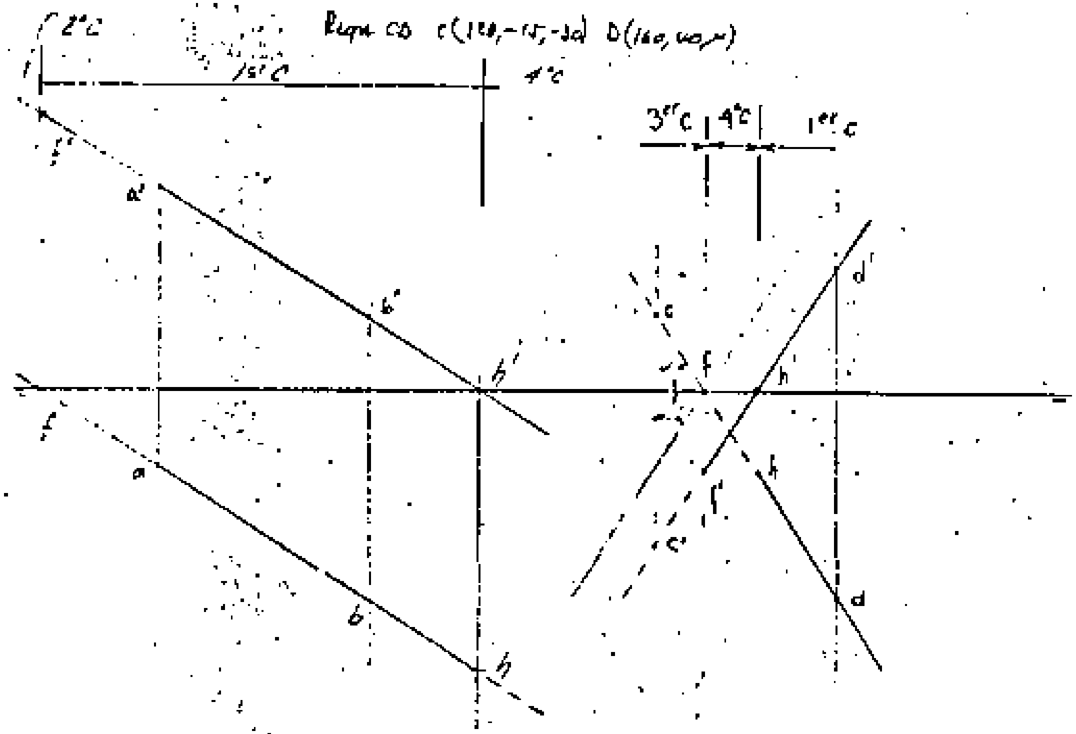
Ejercicio (6)

1.- Determinar la PH de la Recta AB para que sea Ual 2º cuadrante visibilidad y trazas.

Recta AB A(20, 15, 40) B(68, x, 15)

2.- Determinar la PF de la Recta CD para que sea Ual 1º cuadrante visibilidad y trazas

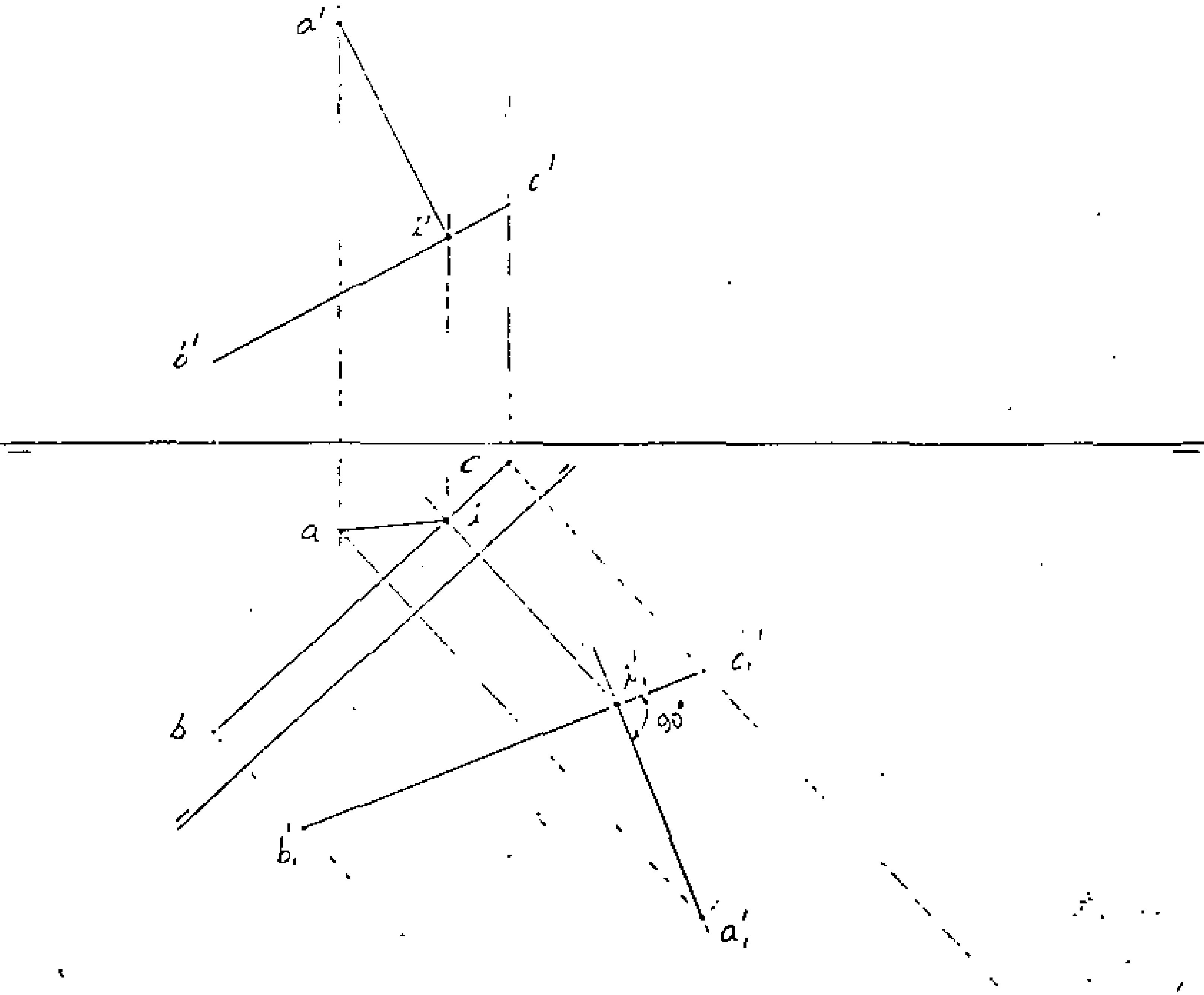
Recta CD C(120, -15, -30) D(160, 40, x)



Ejercicio (7) Trazar por el punto A una perpendicular a la recta BC

Punto A (60,15,74)

Recta $\overline{BC}$ B(38,51,14) C(90,3,42)



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

A N E X O D

SEPTIEMBRE, 1982

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

Se dice que:

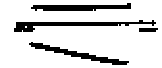
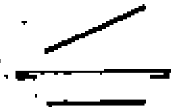
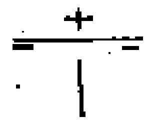
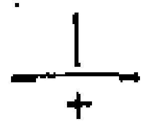
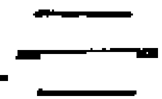
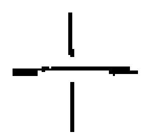
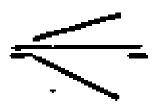
Si un punto se desplaza en el espacio, generará una recta, así mismo, si una recta se desplaza en el espacio, generará un plano.

Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, todos los puntos de ella, pertenecerán también a dicho plano; por lo mismo, se dice que la recta está contenida en el plano o que el plano contiene a dicha recta

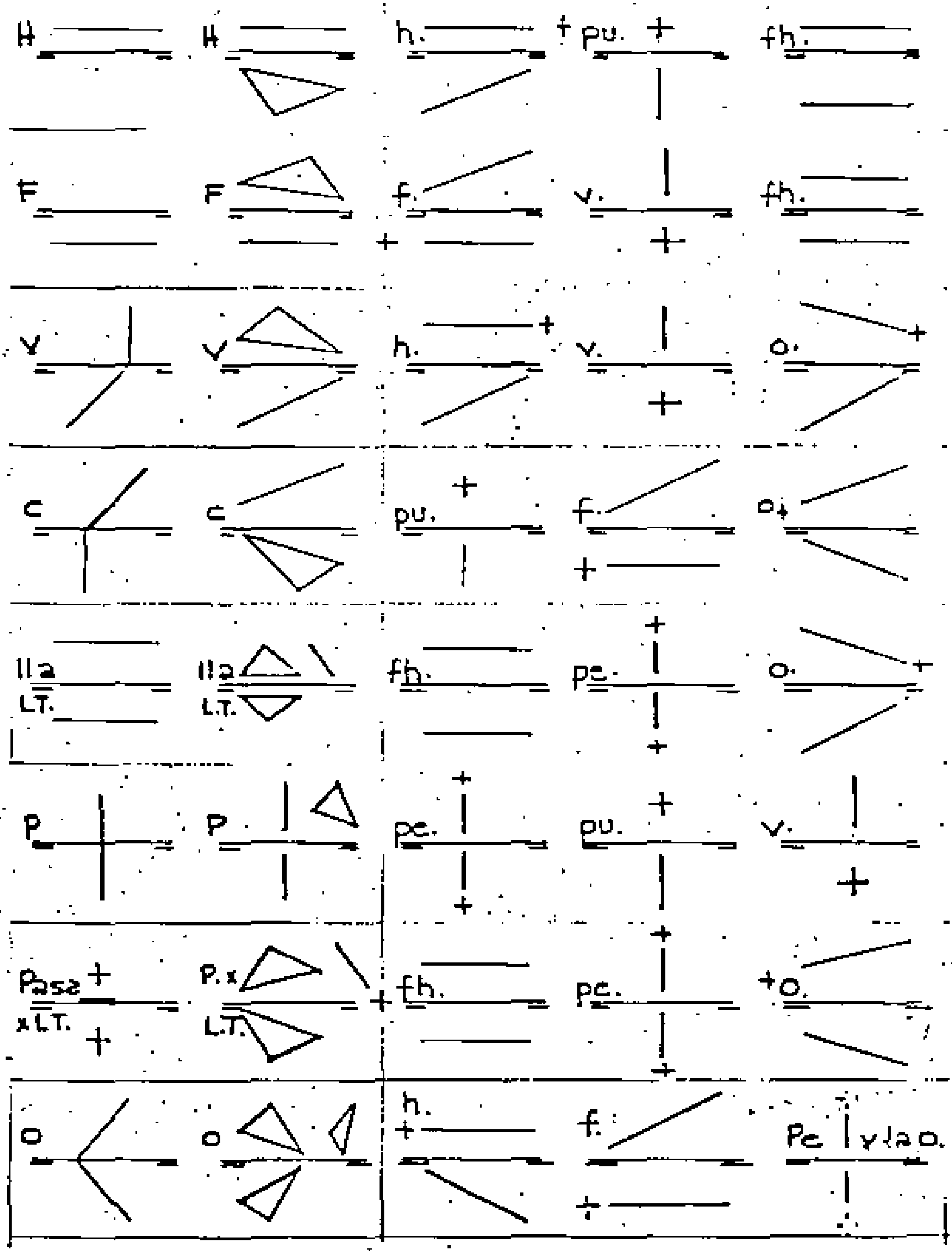
También se dice que, la prolongación de una recta en el espacio atravezará en un momento dado a un plano principal de proyección (con excepción de la recta fronto-horizontal), en ese momento, existe intersección y a esta intersección se le conoce como traza de la recta

4 Puntos fundamentales:

- La línea, cuya proyección sea un punto
- El plano cuya proyección sea de filo
- La longitud verdadera de una recta
- La forma y tamaño verdadero de un plano

RECTAS TIPO	MONTEA	TIPO DE PLANOS H	F	V	C	‖AL	P	PLT	O
HORIZONTAL		✓		✓					✓
FRONTAL			✓		✓				✓
PUNTA		✓			✓		✓		
VERTICAL			✓	✓			✓		
FRONTO HORIZONTAL		✓	✓			✓		✓	
PERFIL						✓	✓	✓	✓
OBLICUA				✓	✓	✓		✓	✓
		3	3	3	3	3	3	3	4

PLANOS x TRAZAS Y x PROY. RECTAS A TRAVES DE SUS PROY.



GEOMETRIA DESCRIPTIVA

ANEXO "E"

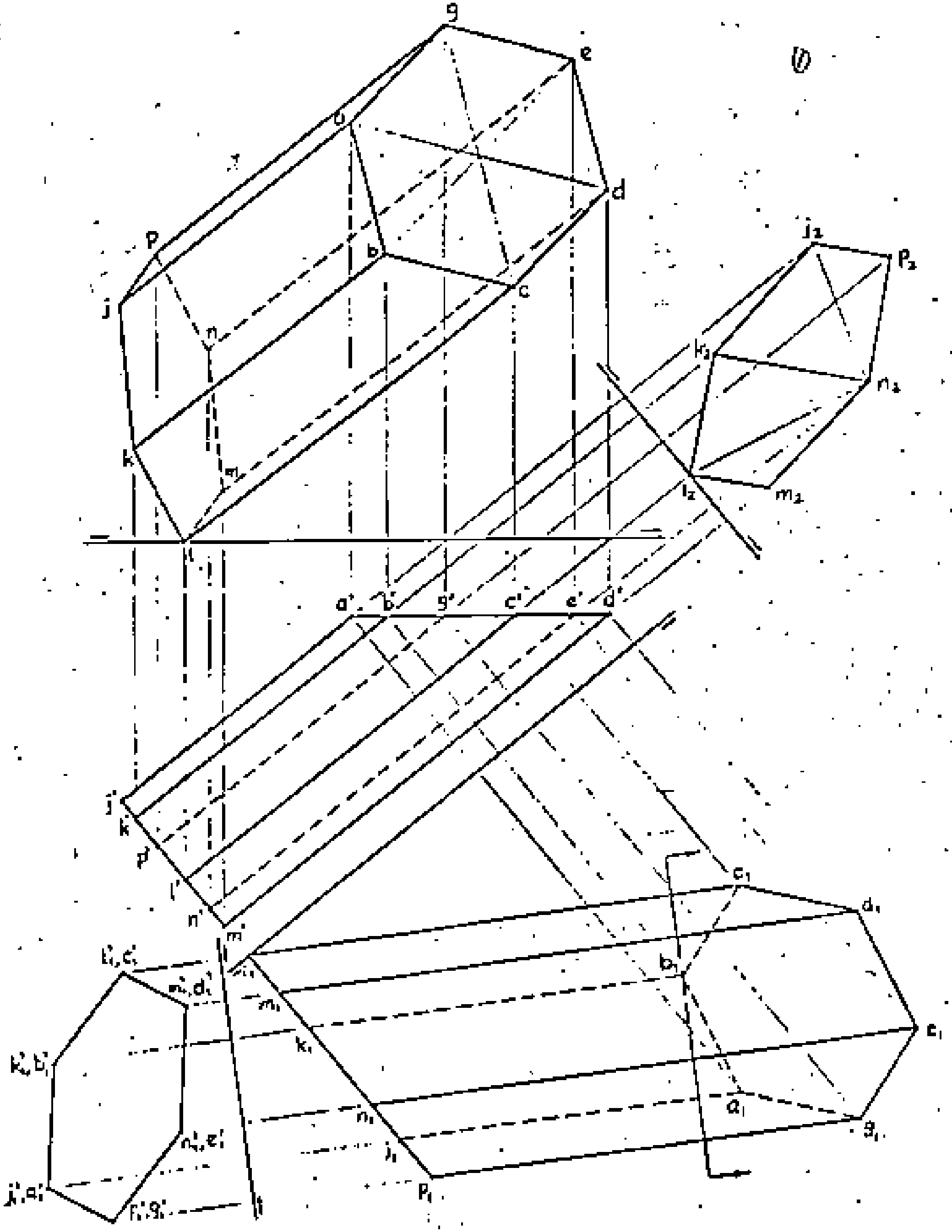
SEPTIEMBRE ,1982.

App

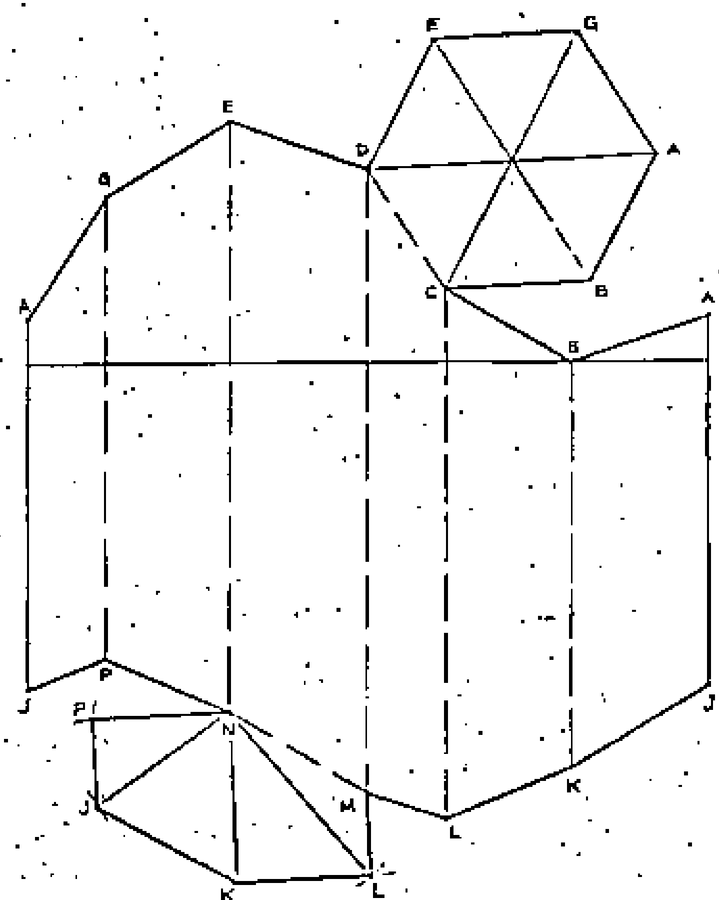
Ing Jose Luis Gutierrez G

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

(1)



(2)



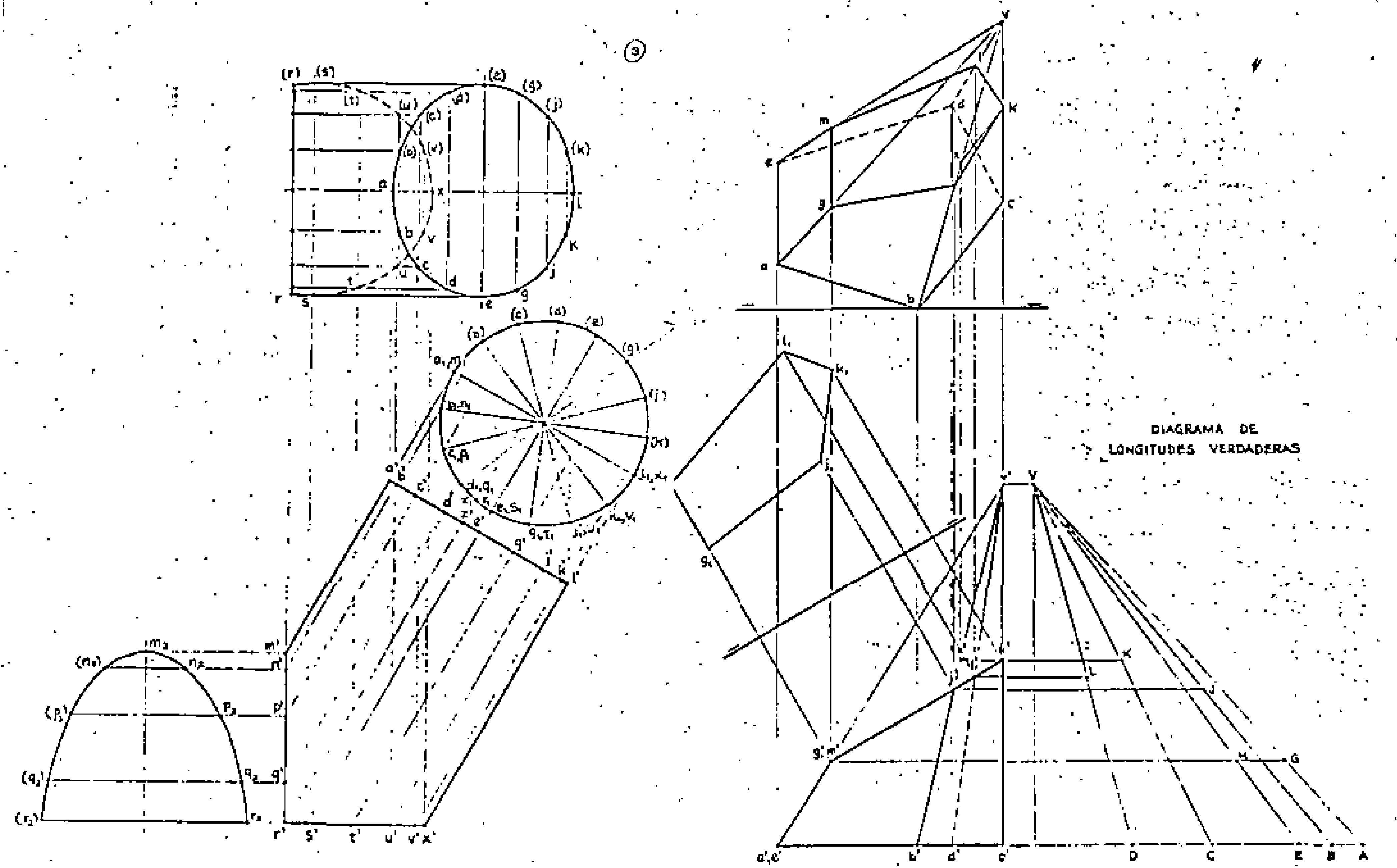
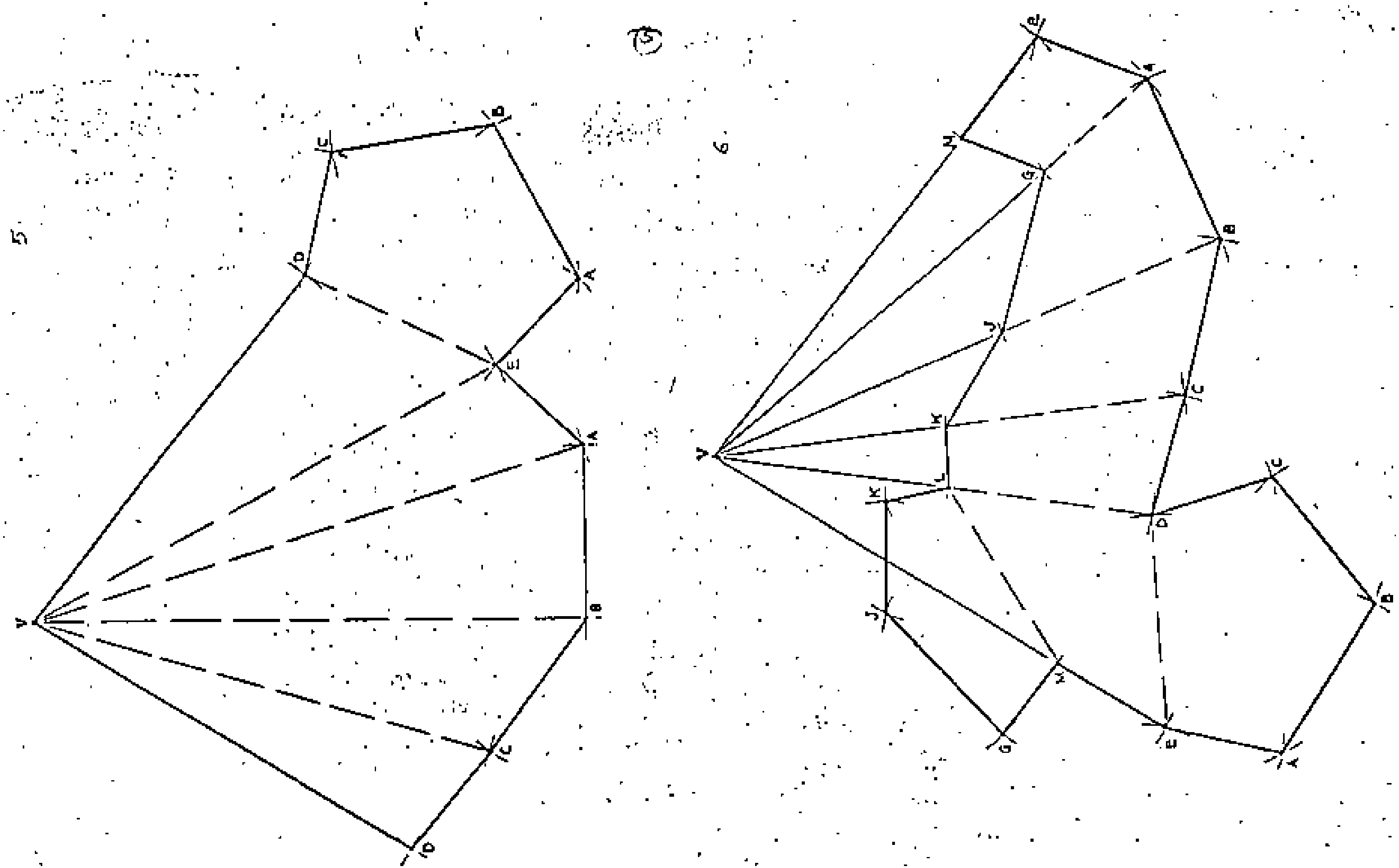
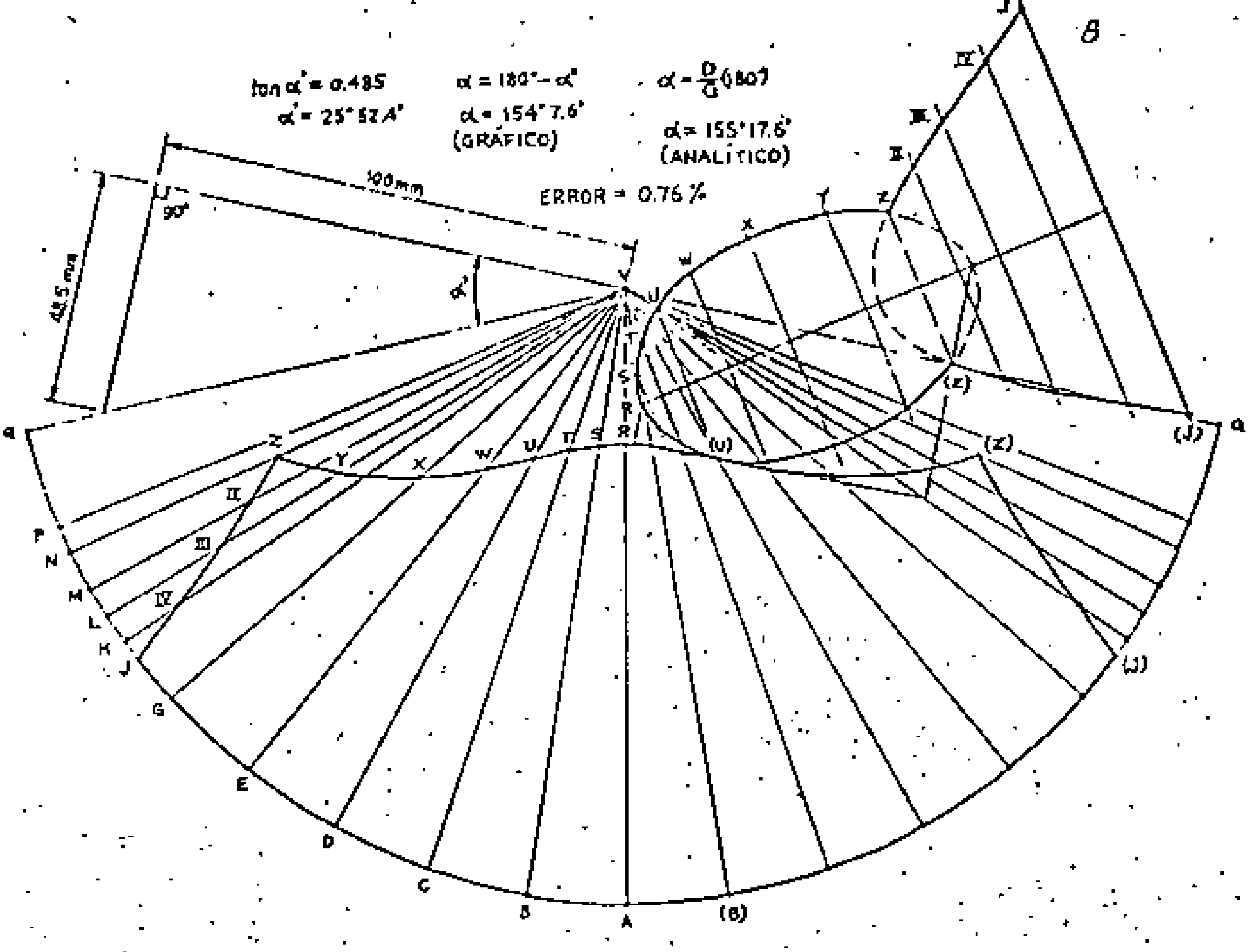
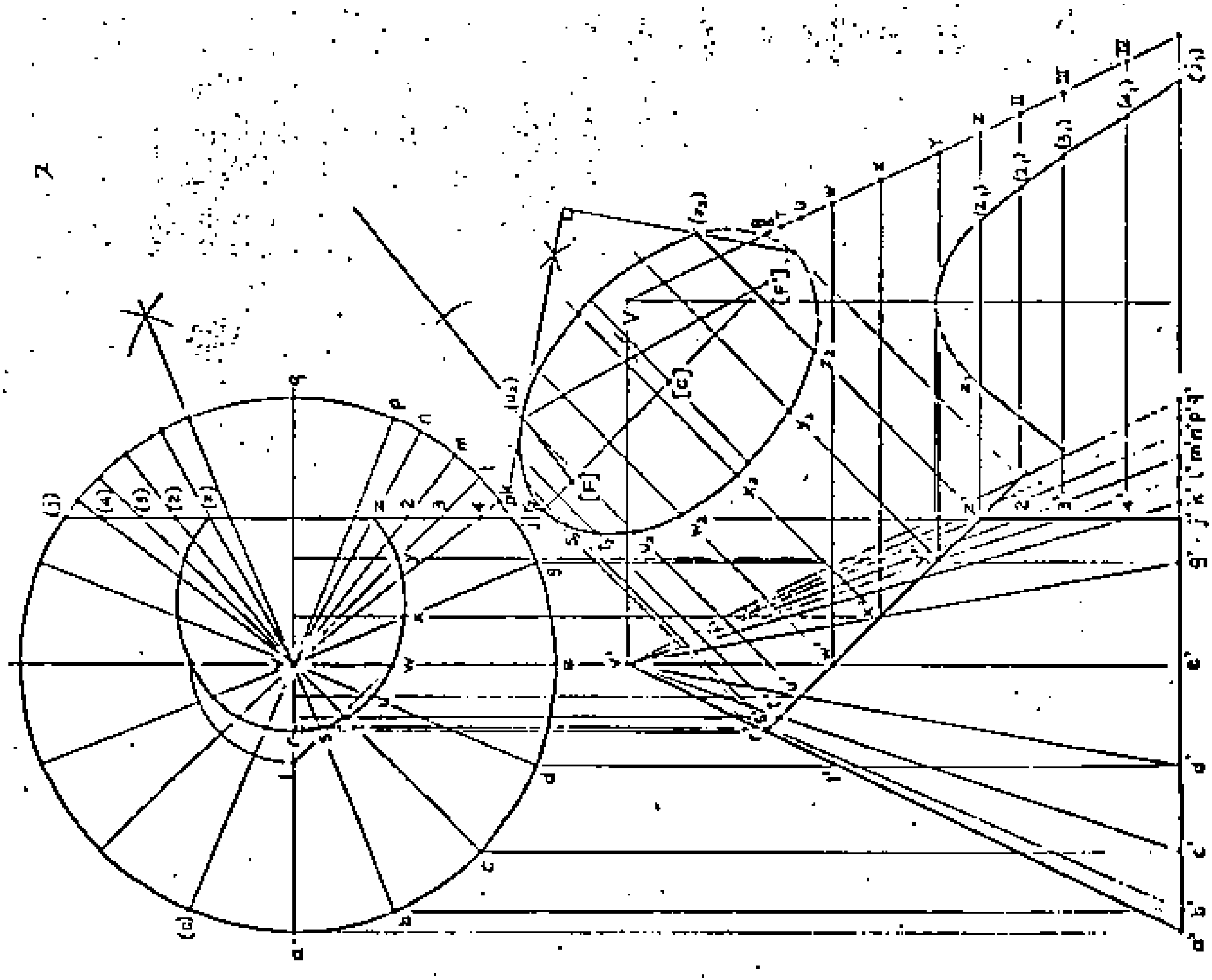


DIAGRAMA DE
LONGITUDES VERDADERAS





B
tan α' = 0.485
α' = 25° 52.4'
α = 180° − α'
α = 154° 7.6'
(GRÁFICO)
α = D/G (180°)
α = 155° 17.6'
(ANALÍTICO)
ERROR = 0.76 %
100 mm
48.5 mm



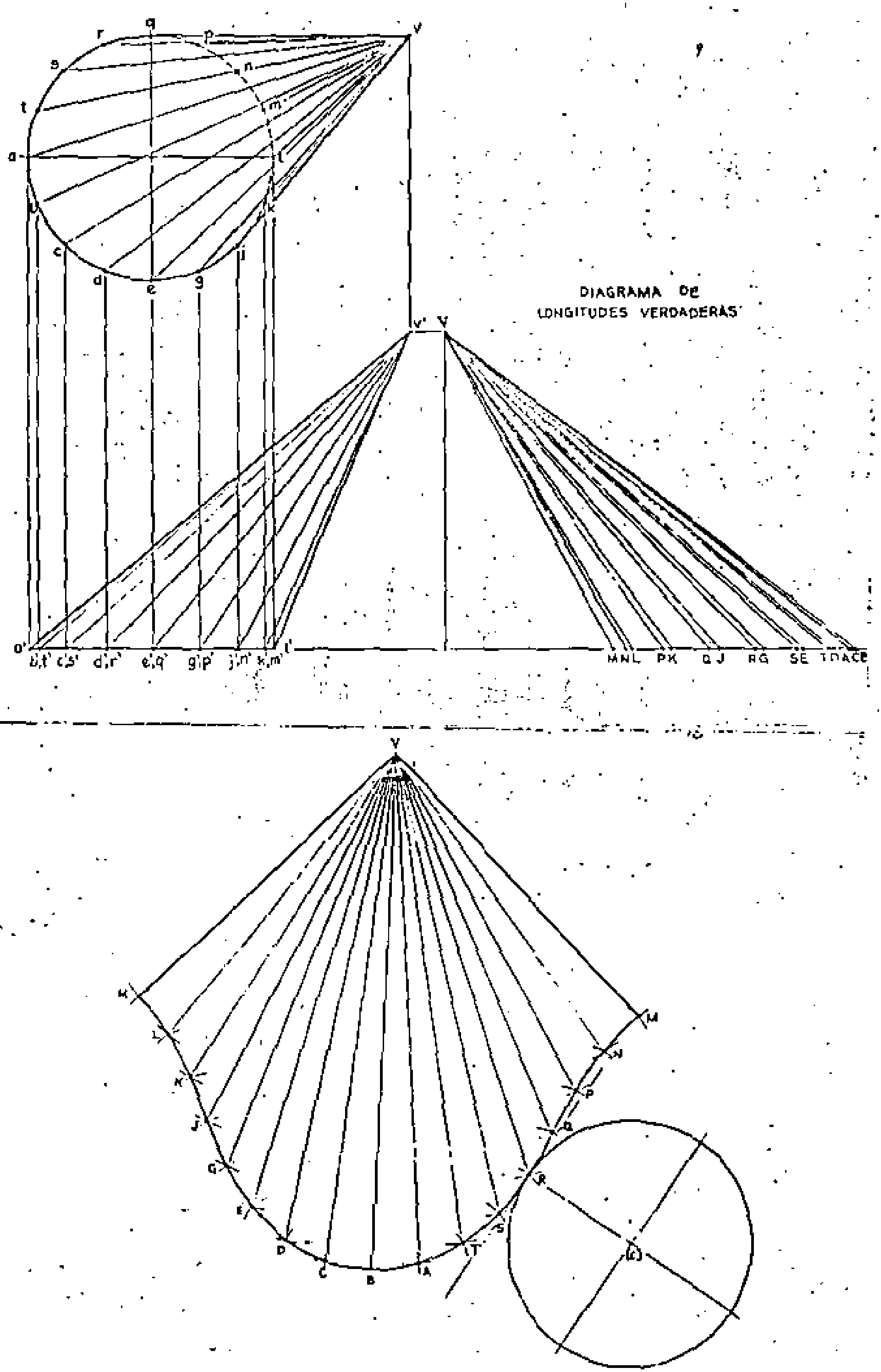


DIAGRAMA DE
LONGITUDES VERDADERAS
v
v'
V
a
b
c
d
e
g
j
k
l
m
n
p
q
r
s
t
a'
b',t'
c',s'
d',r'
e',q'
g',p'
j',n'
k,m'
l'
MNL
PK
QJ
RG
SE
TDACB
M
N
P
Q
R
S
T
A
B
C
D
E
G
J
K
L

11

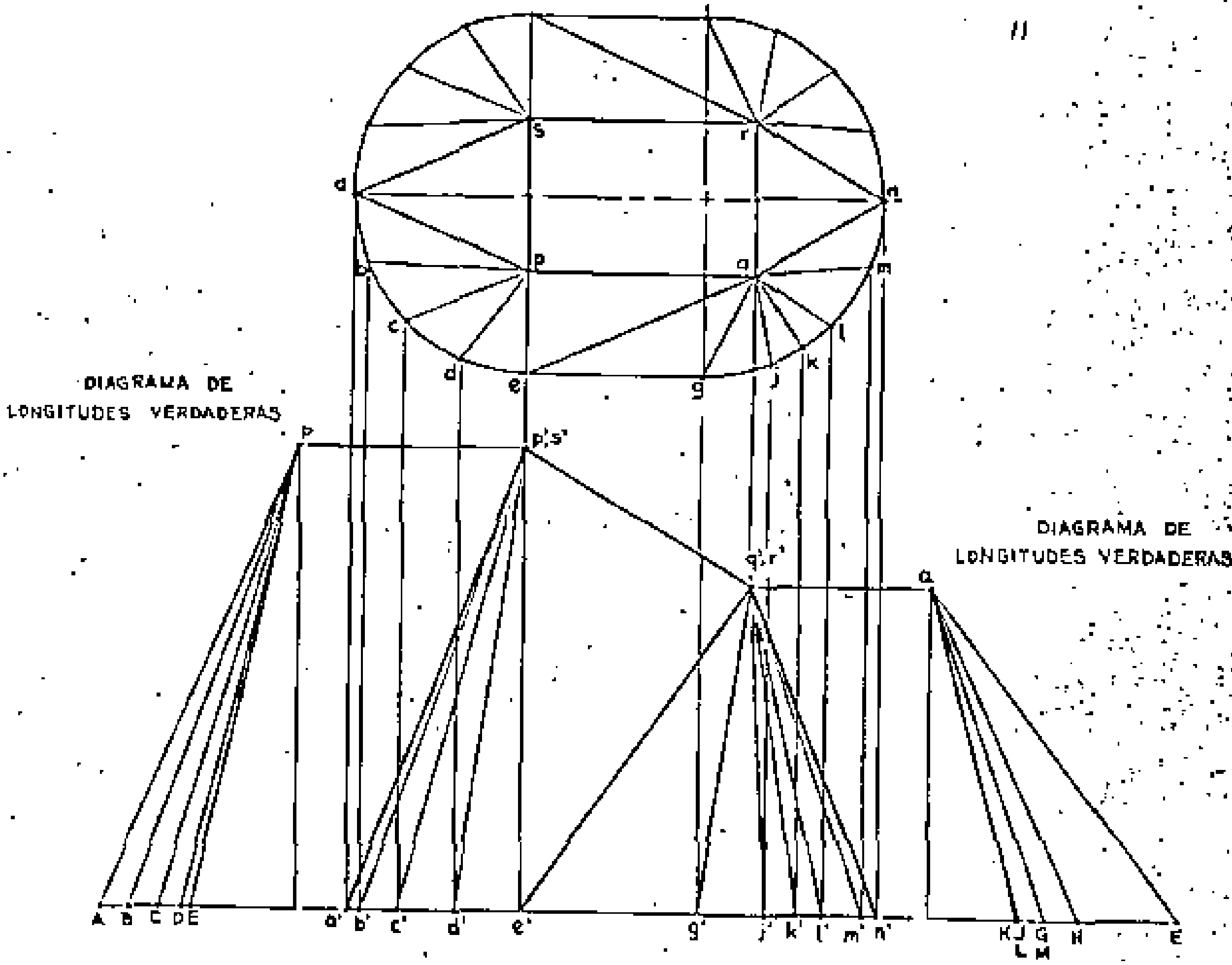
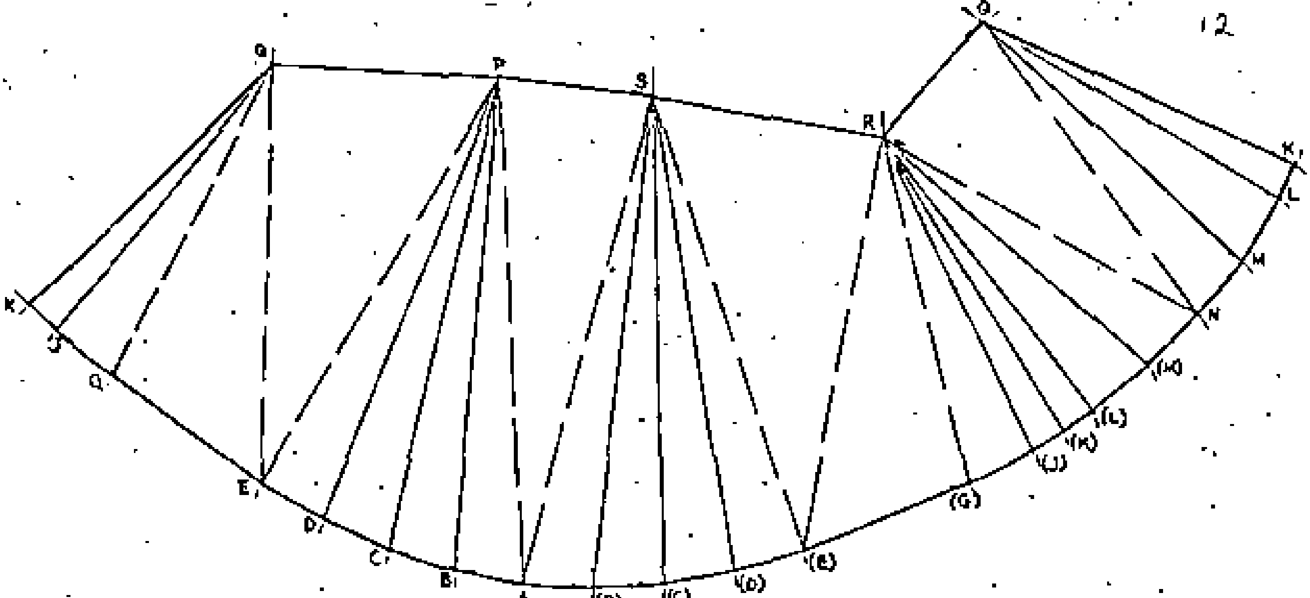


DIAGRAMA DE
LONGITUDES VERDADERAS
DIAGRAMA DE
LONGITUDES VERDADERAS

12



D[illegible]torio de Alumnos del [illegible] GEOMETRIA [illegible]RIPTIVA, Sep-
tiembre - Octubre de 1 9 8 2.

1. Francisco J. Alonso Núñez
UNAM
Adjunto de Profesor
Av. Universidad No. 3000
México, D.F.
04510 Código Postal
550 52 15 Ext.4606

Playa Sur 17-102
Militar Marte
Iztacalco
08830 México, D.F.

2. Alfredo Arenas González
Técnico Académico
Anexo Facultad de Ingeniería
UNAM
Coyoacán
04510 México, D.F.
550 52 15 Ext.4606

Crisantemos Mz.1 Lt.1
Cumbres de Tepetongo
Tlalpán
México, D.F.

3. Rogelio Cruz Rodríguez
Panamer Electro Industrial, S.A.
Holanda 3
Coyoacán
México, D.F.
544 46 26

San Alfredo 16
La Magdalena
Culhuacán
Coyoacán
México, D.F.

4. Bertha G. Estrada Rodríguez
SAHOP
Av. Universidad y Xola
Narvarte
B.Juárez
México, D.F.
538 28 38

Tiva 14
Culhuacán
Iztapalapa
México, D.F.
581 30 90

5. Marco A. Gómez Ramírez
División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
UNAM
550 52 15 Ext.4606

Carlos Duplán M. 24
Colonial Iztapalapa
México, D.F.
691 48 73

6. Carlos A. Guevara de León
Facultad de Ingeniería
UNAM
México, D.F.

Rosa de Oro 46
Residencial Ermita
Iztapalapa
09710 México, D.F.
692 07 24

7. Alfonso Gutiérrez Ariza
Instituto de Ingeniería
México, D.F.
550 52 15 Ext.3645

Priv. de Juan Tinoco 2
Merced Gómez
A.Obregón
01600 México, D.F.
651 34 81

8. Jorge L. Herrera Arellano
División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
México 04510, D.F.

Sur 101 A No.250
Col. Héroes de Churubusco
Iztapalapa
09090 México, D.F.
582 00 50

[illegible] Irma Hinoj[illegible] Félix
Facultad de Ingeniería
Anexo de Ingeniería
UNAM
550 52 15 Ext.3764

Coquimbo
Lindavista
G.A.Madero
México, D.F.
586 88 20

10. Héctor G. Hofmann Flores
Facultad de Ingeniería
UNAM
México, D.F.

Andador 25-D-2
Alianza Popular
04800 México, D.F.
684 10 86

11. Patricia A. López González de Cossío
S A R H O
Av. Universidad y Xola
Narvarte
B.Juárez
México, D.F.
538 28 38

Calzada de Tlalpán 831
Postal
B.Juárez
03410 México, D.F.
579 88 23

12. Yukihiro Minami Koyama
Facultad de Ingeniería
UNAM
Coyoacán
México, D.F.
550 52 15 Ext.4606

Coruña 400
V.Piedad
Iztacalco
08200 México, D.F.

13. Jorge T. Paniagua Ballinas
Facultad de Ingeniería
Anexo Facultad de Ing.
UNAM
México, D.F.
550 52 15 Ext.4606

Sur 73 No.4450 Depto.381
Viaducto Piedad
Iztacalco
México, D.F.
550 52 15 Ext.4606

14. José L. Ramírez Alfaro
Facultad de Ingeniería
UNAM
México, D.F.

Eulalia Guzmán 128 A No.3
Sta. Ma. la Ribera
Cuauhtémoc
06400 México, D.F.
547 97 95

15. J.Joaquín L. Ramírez Vega
Facultad de Ingeniería
UNAM
Coyoacán
04510 México, D.F.

Santa Ana 16-3
Sn. Francisco Culhuacán
Coyoacán
México, D.F.

16. José Rodríguez González
Profesor
Facultad de Ingeniería
UNAM
México, D.F.
550 52 15 Ext.4606

Neptuno 31
Sn. Simón
Cuauhtémoc
México, D.F.
583 98 04

17. Heriberto J.Román Beltrán
SAHOP
Reforma 77-9° Piso
Juárez
México, D.F.
546 65 77

Ret. 20 # 25
Col. Avante
México, D.F.
549 13 58

18. Alfonso Sánchez Guzmán
Facultad de Ingeniería
UNAM
Av. Universidad No. 3000
México, D.F.

18 de Marzo No. 3
Huichapan, Xochimilco
México, D.
676 26 18

19. Manuel Tejada de León Arredondo
Facultad de Ingeniería
UNAM
México, D.F.

Playa Encantada 14
Militar Marte
Iztacalco
México, D.F.
579 40 19