



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL

DISEÑO, ANÁLISIS Y CONTROL DE UN MANIPULADOR
ROBÓTICO

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECATRÓNICO

PRESENTA:
JUAN JOSÉ ALEJANDRO CABELLO MALDONADO

DIRECTOR DE TESIS:
M.I. BILLY ARTURO FLORES MEDERO NAVARRO



CIUDAD DE MÉXICO

ABRIL, 2013

Diseño, Análisis y Control de un Manipulador Robótico

por

Juan José Alejandro Cabello Maldonado

Tesis presentada para obtener el título de

Ingeniero Mecatrónico

en la

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Abril, 2013

*A mi Universidad, por brindarme la experiencia más maravillosa de mi vida.
A mis profesores, por siempre exigir esforzarme y dar lo mejor de mí.
Pero sobre todo, a mis padres y hermano, por haberme apoyado incondicionalmente a lo largo de este
camino que concluyo.*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. La Mecatrónica	1
1.2. Diseño Mecatrónico	2
1.3. Robótica	3
1.4. Alternativa para el análisis cinemático y dinámico de manipuladores robóticos	4
2. Cinemática y dinámica de cuerpos rígidos	6
2.1. Introducción	6
2.2. Cinemática del cuerpo rígido	7
2.2.1. Rotación en \mathbb{R}^3	7
Coordenadas exponenciales para la rotación	11
2.2.2. Movimiento general de cuerpo rígido en \mathbb{R}^3	12
Representación Homogénea	13
Coordenadas exponenciales para el movimiento de cuerpo rígido y <i>twists</i>	15
2.2.3. La representación geométrica de los <i>twists: Screws</i>	18
2.2.4. Velocidad de un cuerpo rígido	21
Velocidad angular	21
Velocidad de un cuerpo rígido	23
Velocidad del movimiento del tipo <i>Screw</i>	25
Transformación de coordenadas	26
2.3. Dinámica de cuerpo rígido	27
2.3.1. <i>Wrenches</i>	27
Las coordenadas del <i>screw</i> de un <i>Wrench</i>	29
2.3.2. Método de Lagrange	31
Propiedades inerciales de los cuerpos rígidos	32

Ecuaciones de Newton-Euler para cuerpo rígidos	34
3. Cinemática, dinámica y control de manipuladores robóticos	36
3.1. Introducción	36
3.2. Cinemática de manipuladores robóticos	37
3.2.1. Cinemática directa	37
La fórmula del producto de exponenciales	38
Área de trabajo de un manipulador	39
3.2.2. Cinemática inversa	39
3.2.3. Cinemática directa diferencial	39
Velocidad del órgano terminal	40
Análisis de la manipulabilidad usando el Jacobiano	41
3.2.4. Cinemática inversa diferencial	42
3.3. Dinámica de manipuladores robóticos	43
3.3.1. Fuerzas en el órgano terminal	44
3.3.2. Dinámica de manipuladores robóticos seriales	44
3.4. Control de manipuladores robóticos	47
3.4.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	47
3.4.2. Control de posición y seguimiento de trayectoria	50
Torque Calculado	51
Controlador PD	52
4. Producto mecatrónico: manipulador robótico	53
4.1. Introducción	53
4.2. Diseño conceptual	55
4.2.1. Definición del objetivo	55
4.2.2. Necesidades del cliente	56
4.2.3. Lista de especificaciones	58
4.2.4. Pesos ponderados	60
4.2.5. Lluvia de ideas	61
4.2.6. Selección de la solución más adecuada	62
4.3. Diseño mecánico	62
4.3.1. Bosquejo a mano alzada	62
4.3.2. Dibujos en CAD	62
4.3.3. Simulaciones CAE	64

Resultados del análisis cinemático	66
Resultados del análisis por elemento finito	71
4.3.4. Elaboración de los planos para la manufactura del producto	73
4.4. Diseño eléctrico	74
4.4.1. Definición de los actuadores	74
4.4.2. Definición de la fuente de poder	74
4.4.3. Definición de los circuitos eléctricos	75
4.5. Diseño del controlador	76
4.5.1. Controlador de la base	76
4.5.2. Controlador del hombro	76
4.5.3. Controlador del codo	77
4.6. Diseño electrónico	77
4.6.1. Definición de los sensores	77
4.6.2. Definición del microcontrolador	78
4.6.3. Definición del programa embebido	79
Funciones <i>rangleo</i> y <i>angleo</i>	79
Funciones <i>readhombro</i> y <i>readcodo</i>	80
Funciones <i>GyroInit</i> , <i>AccelInit</i> y <i>CompassInit</i>	80
Función <i>offset</i>	81
Función <i>readgyro</i>	81
Función <i>readacc</i>	81
Función <i>readmag</i>	81
Funciones <i>deg2rad</i> y <i>rad2deg</i>	81
Función <i>control</i>	81
Función <i>direccion</i>	82
Función <i>writemotor</i>	82
Funciones <i>movehombro</i> , <i>movecodo</i> y <i>movebase</i>	82
Función <i>prueba</i>	83
Función <i>setup</i>	83
4.7. Presentación del prototipo	84
4.8. Pruebas al producto mecatrónico	86
4.8.1. Prueba 1	86
4.8.2. Prueba 2	87
4.8.3. Prueba 3	88

4.8.4. Prueba 4	89
4.8.5. Interpretación de las pruebas	90
5. Análisis del producto mecatrónico: manipulador robótico	91
5.1. Introducción	91
5.2. Análisis cinemático	92
5.2.1. Cinemática directa	92
5.2.2. Cinemática inversa	97
5.2.3. Cinemática directa diferencial	99
5.3. Análisis dinámico	101
5.4. Control del manipulador robótico	106
6. Ejemplo para la docencia: Obtención de una trayectoria usando acelerómetros y Matlab	109
6.1. Objetivo	109
6.2. Ejercicio 1	109
6.2.1. Resolución del ejercicio 1	109
6.3. Ejercicio 2	110
6.3.1. Resolución del ejercicio 2	110
6.4. Ejercicio 3	113
6.4.1. Resolución del ejercicio 3	113
7. Conclusiones	116
8. Bosquejos	120
9. Dibujos en CAD y Propiedades Mecánicas	126
10. Planos	137
11. Datasheets	147
12. Código Fuente	148
13. Códigos de Matlab	159

Índice de figuras

1-1. Componentes básicos de un sistema mecatrónico	3
2-1. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto	8
2-2. Trayectoria generada por la rotación alrededor del eje ω	11
2-3. Movimiento de Cuerpo Rígido	12
2-4. (a)Rotación alrededor del eje ω (b)Traslación paralela al vector v	16
2-5. Movimiento tipo <i>screw</i>	18
2-6. Transformación de <i>wrenches</i> entre diferentes marcos de referencia	28
2-7. Marcos de referencia para calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento .	33
4-1. Robot tipo KUKA	57
4-2. Bosquejo	63
4-3. Ensamble del Manipulador Robótico	63
4-4. Ensamble utilizado para las simulaciones CAE	66
4-5. Fuerza \vec{R}_x	67
4-6. Fuerza \vec{R}_y	67
4-7. Fuerza \vec{R}_z	67
4-8. Magnitud de \vec{R}	67
4-9. Momento \vec{R}_x	68
4-10. Momento \vec{R}_y	68
4-11. Momento \vec{R}_z	68
4-12. Magnitud de \vec{M}	68
4-13. Fuerza \vec{R}_x	69
4-14. Fuerza \vec{R}_y	69
4-15. Fuerza \vec{R}_z	69
4-16. Magnitud de \vec{R}	69

4-17. Momento \vec{R}_x	70
4-18. Momento \vec{R}_y	70
4-19. Momento \vec{R}_z	70
4-20. Magnitud de \vec{M}	70
4-21. Deformación sufrida debido a las cargas y esfuerzos mecánicos	71
4-22. Esfuerzos (1)	72
4-23. Esfuerzos (2)	72
4-24. Fuerzas de reacción	72
4-25. Explosivo del modelo	73
4-26. Circuito para el uso del Puente H	75
4-27. Respuestas Dinámicas	76
4-28. Sensores	77
4-29. Arduino Mega	79
4-30. Piezas del manipulador	84
4-31. Ensamble preliminar	85
4-32. Ensamble Final	85
4-33. Trayectoria 1	86
4-34. Trayectoria 2	87
4-35. Trayectoria 3	88
4-36. Trayectoria 4	89
4-37. Trayectoria 5	90
5-1. Diagrama simplificado del manipulador robótico	92
5-2. Espacio de trabajo del manipulador	96
5-3. Cinemática Inversa del manipulador en un plano	97
5-4. Simulaciones de la trayectoria con diferentes ganancias	98
5-5. Trayectorias calculadas por cinemática inversa	99
5-6. Diagrama del manipulador	101
5-7. Movimiento de trayectoria plana	107
5-8. Dinámica del error del Manipulador Robótico	108
6-1. Aceleraciones sin filtrar	110
6-2. Aceleraciones después de ser filtrados	111
6-3. Aceleración inercial	113
6-4. Perfil de velocidades	114

6-5. Perfil de posición	114
6-6. Trayectoria obtenida y sus proyecciones	115
8-1. Bosquejo uno	120
8-2. Bosquejo dos	121
8-3. Bosquejo tres	122
8-4. Bosquejo cuatro	123
8-5. Bosquejo cinco	124
8-6. Bosquejo seis	125
10-1. Plano de la abrazadera del hombro	138
10-2. Plano de la abrazadera del codo	139
10-3. Plano de la base	140
10-4. Plano de la cara lateral derecha	141
10-5. Plano de la cara lateral izquierda	142
10-6. Plano del eje de la junta del hombro	143
10-7. Plano del eje de la junta del codo	144
10-8. Plano del eslabón del hombro	145
10-9. Plano del eslabón del codo	146

Índice de cuadros

4-1. Necesidades agrupadas en bloques	58
4-2. Especificaciones de materiales	58
4-3. Especificaciones de los motores	59
4-4. Especificaciones de Poleas Dentadas	59
4-5. Especificaciones de Engranés	59
4-6. Matriz de decisión para los materiales	60
4-7. Matriz de decisión de los motores	61
4-8. Transmisión	61
4-9. Subensamble de la junta de revolución de la base (hombro)	64
4-10. Subensamble de las juntas del brazo (codo y muñeca)	65
4-11. Propiedades del motor de CD	74
4-12. Propiedades del Servomotor Invenscience i00600 Torxis Servo	74
4-13. Propiedades del Servomotor GSW	75
4-14. Errores y Desviaciones Estándar por eje	87
4-15. Errores y Desviaciones Estándar por eje	87
4-16. Errores y Desviaciones Estándar por eje	88
4-17. Errores y Desviaciones Estándar por eje	89
4-18. Errores y Desviaciones Estándar por eje	90
5-1. Datos del manipulador	101
9-1. Cara inferior	126
9-2. Cara lateral uno	127
9-3. Cara lateral dos	128
9-4. Base	129
9-5. Sujetador codo	130

9-6. Sujetador hombro	131
9-7. Eslabón uno	132
9-8. Eslabón dos	133
9-9. Eje de la base	134
9-10. Eje del hombro	135
9-11. Eje del codo	136

Diseño, Análisis y Control de un Manipulador Robótico

por

Juan José Alejandro Cabello Maldonado

Resumen

Los objetivos de esta tesis son los siguientes:

- Dar a conocer una metodología basada en el álgebra lineal y la teoría de *Screws* para el análisis cinemático y dinámico de manipuladores robóticos.
- Describir la metodología de diseño y construcción empleados para la construcción del manipulador robótico usado en esta tesis.
- La construcción del manipulador robótico citado para la docencia de la materia de robótica.
- Aplicar la metodología descrita en esta tesis en el manipulador robótico construido.

Agradecimientos

Es para mí un gran placer reconocer y agradecer a quienes han colaborado de una u otra forma a la realización de esta tesis. Quiero empezar por agradecer al programa *PAPIME* con proyecto número *PE100911: Diseño de productos mecatrónicos* y al Dr. Jesús Manuel Dorador por haber creído en mi proyecto de tesis y haberme dado todas las oportunidades y facilidades para realizarlo. La colaboración, asesoría e instrucción de mi director de tesis, el M.I. Billy Arturo Flores Medero Navarro, a lo largo de la realización de este proyecto fueron invaluableles. Sin ellas, este proyecto no habría sido realizado ni terminado en tiempo ni forma.

Quiero también agradecer al Dr. Álvaro Ayala por sus comentarios e introspecciones que ayudaron de manera significativa a mejorar el diseño mecánico de este proyecto. También quiero agradecer al Ing. Erik Peña, por todos sus comentarios y asesoría, gracias a ellos varios problemas surgidos fueron resueltos de una forma rápida y efectiva. Al Ing. Yair Bautista por permitirme usar su laboratorio y equipo, por sus pláticas, comentarios y asesorías a lo largo de mi estancia. Al Sr. Padilla e hijo, por su paciencia y experiencia en la manufactura y armado del prototipo.

Quiero agradecer a mi Universidad y a mi Facultad por todo lo que me brindaron a lo largo de estos cinco años, pero sobretodo hacer una mención especial a la Dirección General de Cooperación e Internacionalización (DGCEI), por haberme dado la oportunidad, junto con mis padres, Universidad y Facultad, de cumplir uno de mis más grandes sueños, el estudiar por un año en la Universidad de California Berkeley, donde mis capacidades fueron exigidas al máximo, y donde descubrí mi pasión por la robótica.

Pero por sobretodo, quiero agradecer a mis padres y a mi hermano por todo el apoyo, comprensión y aliento que me dieron durante todo este tiempo. No existen palabras para agradecerles todo lo que me han dado y hecho por y para mí. Sin ellos, nada de ésto sería posible.

Ciudad Universitaria, Abril 2013
Juan José Alejandro Cabello Maldonado.

Capítulo 1

Introducción

1.1. La Mecatrónica

La ingeniería mecánica experimentó un rápido crecimiento durante el siglo XIX debido a las grandes necesidades que surgieron gracias a la Revolución Industrial. Las necesidades tecnológicas de la época eran muchas; las minas necesitaban bombas con capacidades nunca antes concebidas para mantener sus pozos secos, los sistemas de transporte necesitaban ahora más potencia para poder desplazar las ahora grandes cantidades de materia prima y productos, las estructuras comenzaron a atravesar abismos más grandes y a llegar a alturas más impactantes. La manufactura dejó los talleres para mudarse a las grandes fábricas. Fundamentos, conocimientos y tecnologías debieron ser desarrollados para poder proveer de los materiales y herramientas necesarios para este rápido y exitoso crecimiento industrial, esto marcó el nacimiento de las diferentes disciplinas de la ingeniería [1].

Durante todo el siglo XX, las diferentes ramas de la ingeniería mantuvieron una distancia muy marcada entre cada una de ellas; desarrollándose de una manera separada debido a que se veían a estas ramas como mutuamente exclusivas. Sin embargo, la tendencia actual ha llevado a una sinergia entre las diferentes ramas de la Ingeniería. Esta tendencia, se podría decir que empezó gracias a la nueva revolución tecnológica que significó el descubrimiento y aplicación de los materiales semiconductores en el área de la Ingeniería Eléctrica; dando la pauta al área de la Electrónica. La Electrónica abrió el paso a un desarrollo impresionante en las áreas de las telecomunicaciones y la información. Computadoras capaces de realizar miles de cálculos por segundo. Dispositivos que permiten comunicar a personas que se encuentran al otro lado del mundo de manera instantánea.

La incursión de los dispositivos electrónicos en nuestra vida diaria es casi tan profunda que hoy en día que parece imperceptible. Si se voltea alrededor se verá que estamos rodeados de dispositivos que basan

sus funcionamientos en ellos; teléfonos inteligentes con conexión de datos, autos con la capacidad de distribuir la fuerza de frenado, computadoras capaces de supervisar procesos químicos e incluso nucleares. Se debe entender que la forma en que se trata ahora la información de cualquier proceso ingenieril obliga a utilizar dispositivos electrónicos, no importando el área en la que se especialice. Es aquí donde nace la necesidad de tener un área de la ingeniería que logre retomar los aspectos de las áreas de la ingeniería tradicional y les de una enfoque más amplio dirigido al diseño de sistemas integrales. Aquí nace el área de la Ingeniería Mecatrónica.

La Mecatrónica es un campo de la Ingeniería con un enfoque interdisciplinario la cual se ocupa del diseño de productos cuya función recae y depende de la integración de los componentes mecánicos y electrónicos los cuales estarán coordinados por una arquitectura de control [1]. La palabra mecatrónica surge como tal en el año de 1969 cuando Tetsuro Mori, ingeniero de la empresa japonesa Yaskawa Electric Co., la comenzó a utilizar en diferentes eventos y conferencias internacionales para referirse a aquellos sistemas que involucraban aspectos electromecánicos. Las principales disciplinas que involucra la mecatrónica son la mecánica, la electrónica, la teoría de control y la informática. Un ingeniero mecatrónico debe ser capaz de diseñar y seleccionar circuitos digitales y analógicos, arquitecturas digitales de control, componentes mecánicos, sensores, actuadores y componentes basados en microcontroladores para que el producto final pueda alcanzar su objetivo.

Los sistemas mecatrónicos son comúnmente conocidos como productos inteligentes debido a que tienen una inclusión muy importante de lógica, retroalimentación y procesamiento computacional que en un diseño complejo podría parecer simular un proceso de pensamiento humano. Esto implica un diseño y conceptualización que abarcará diferentes ramas de las ciencias para cumplir el objetivo de hacer ver al sistema inteligente. El ingeniero mecatrónico debe ser un generalista, dispuesto a buscar y aplicar conocimiento de una amplia gama de fuentes.

1.2. Diseño Mecatrónico

La figura 1-1 muestra los componentes típicos de un sistema mecatrónico. Los actuadores producen la acción a realizar por el sistema; ya sea producir movimiento o aumentar la temperatura. Los sensores detectan el estado de los parámetros del sistema; los circuitos de procesamiento e interfaz de señales proveen las conexiones necesarias entre los circuitos de control y los actuadores. Un despliegue gráfico provee retroalimentación visual al usuario.

Sin embargo, para lograr la mejor integración de los componentes se debe seguir una metodología que ayude a alcanzar el diseño más eficaz del sistema electromecánico inteligente; éste se le conoce como el

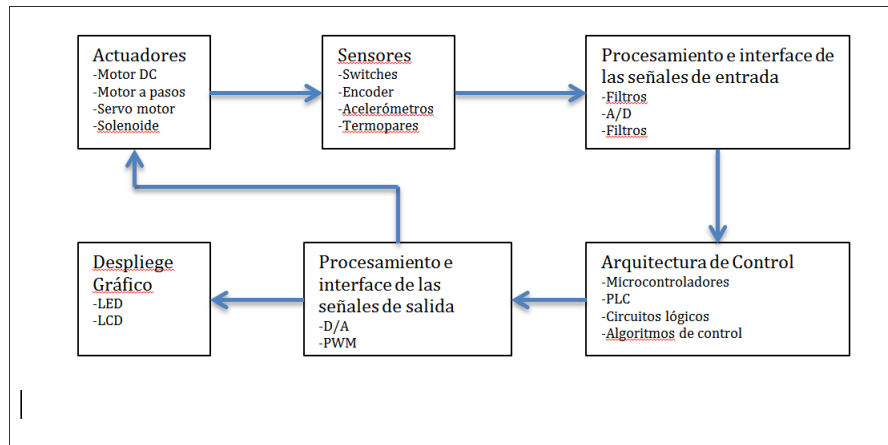


Figura 1-1: Componentes básicos de un sistema mecatrónico

Diseño Mecatrónico [1].

1.3. Robótica

La robótica es un ejemplo claro y más que completo de un diseño mecatrónico, ya que las áreas de la mecánica, eléctrica, electrónica y control se unen en una sinergia para lograr una sistema óptimo. En los últimos años, la concepción y el uso de robots ha evolucionado de ser una simple idea de ciencia ficción a una realidad de componentes electromecánicos controlados por una computadora que han sido integrados en una amplia variedad de procesos industriales [10]. Ahora parece tan natural observar manipuladores robóticos soldando y pintando en líneas de producción de automóviles o robots móviles viajando a otros planetas a recolectar información que aún no podemos llegar.

La palabra robot fue introducida en 1921 por el escritor checo Karel Capek en su obra R.U.R (*Rossum's Universal Robots*) en donde se describen máquinas que asemejan a los seres humanos que trabajan sin parar. En la obra, los robots eventualmente se rebelan contra sus creadores y aniquilan a la raza humana. La obra ayudó al nacimiento de muchas más obras de ciencia ficción que han contribuido a nuestra percepción de un robot que asemeja a los seres humanos dotados con inteligencia e inclusive con personalidad. Por lo tanto, no es sorpresa que los robots de hoy en día nos puedan parecer primitivos cuando los comparamos con las expectativas creadas por la industria del entretenimiento.

Los primero manipuladores robóticos aparecen después de la Segunda Guerra Mundial. Fue un manipulador mecánico controlado a distancia desarrollado por *Argonne and Oak Ridge National Laboratories* para manipular materiales radioactivos. Estos mecanismos eran del tipo maestro-esclavo y consistían en un manipulador maestro guiado por el usuario a través de una serie de movimientos que eran imitados

por la segunda unidad. La unidad secundaria estaba conectada con el manipulador maestro por medio de una serie de eslabones. Estos eslabones fueron remplazados por actuadores eléctricos o hidráulicos. Estos mecanismos fueron llamados teleoperadores.

En paralelo empezaba el desarrollo de las máquinas de control numérico (CNC) para el maquinado de piezas más precisas, especialmente para partes de aeronaves. Los primeros robots, desarrollados por George Devol en 1954, remplazaron el manipulador maestro de los teleoperadores por los controladores de los CNC. Él llamó a estos nuevos teleoperadores "dispositivo articulado de transferencia programable". La patente de estos nuevos dispositivos fueron comprados por Joseph Engelberger quien creó una compañía llamada *Unimation*. Unimation instaló los primeros manipuladores robóticos en una planta de General Motors en 1961. La innovación clave fue que estos manipuladores eran programables a un costo muy bajo y eran capaces de hacer muchas funciones. Muchos otros manipuladores robóticos fueron creados después como el manipulador de Stanford, el brazo de Boston o el brazo AMF (*American Machine and Foundry*).

Mientras que las aplicaciones de los robots industriales crecieron, diferentes tipos de métodos de actuación fueron utilizados. Para aplicaciones ligeras, robots actuados por motores eléctricos fueron utilizados. Sin embargo, uno de los problemas con los motores eléctricos es que alcanzan su máxima potencia a altas velocidades, por lo que trenes de engranes tienen que ser utilizados.

En 1980 la mayor parte de la investigación en robótica estaba dedicada en algoritmos para el control, planeación de trayectoria y la instrumentación de los robots. Entre los primeros métodos más eficientes encontrados fue utilizar los métodos de Lagrange para calcular la fuerza de Coriolis y la gravedad en términos de la dinámica del robot. Es este acercamiento el cual se explorará en esta tesis.

1.4. Alternativa para el análisis cinemático y dinámico de manipuladores robóticos

Generalmente el problema de crear las ecuaciones de movimiento y dinámicas de una cadena cinemática son sólo un problema de mecánica clásica. Sin embargo, la complejidad que uno encuentra en el proceso nos hace buscar una forma alternativa de atacar el problema. En esta tesis se muestra una forma distinta al enfoque clásico, la cual se basa en la energía cinética asociada a una cadena cinemática y después utilizar la expresión obtenida para obtener la ecuación dinámica. Esta representación es deseable en muchas aplicaciones tales como control adaptativo o la calibración de robots donde es necesario identificar los distintos estados del sistema. La energía cinética es expresada usando operaciones geométricas estándares tales como la multiplicación, la exponencial y los mapeos de adjuntas. Se toma

ventaja de las identidades teóricas de los grupos de Lie para simplificar las expresiones de las derivadas de la matriz de inercia, la cual aparece en las ecuaciones de Lagrange. Las ecuaciones de movimiento de una cadena serial cinemática son descritas en una forma general que no requiere adaptaciones para problemas específicos. Finalmente se usará esta representación para clasificar cadenas dinámicamente balanceadas.

Capítulo 2

Cinemática y dinámica de cuerpos rígidos

2.1. Introducción

El estudio de la cinemática, dinámica y control de los manipuladores robóticos tienen como principio fundamental el estudio del movimiento de cuerpos rígidos. El movimiento de cuerpo rígido es aquel que mantiene la distancia constante entre los puntos que conforman el cuerpo en estudio. En esta tesis se proveerá de una herramienta útil y elegante para describir el movimiento de cuerpo rígidos basada en el Álgebra Lineal y *Theory of Screws*.

Los elementos de *Theory of Screws* puede ser encontrada en el libro de Chasles and Poinot [10]. En esta obra se se demostró que cualquier cuerpo rígido puede ser desplazado de una posición a otra por medio de un movimiento que consiste de una rotación a través de una línea recta seguida por una translación paralela a la línea antes mencionada. A este movimiento se le denomina como *screw motion*, mientras que la versión infinitesimal, que nos proporcionará información acerca de la velocidad instantánea, se le denomina *twist*. Estos dos conceptos son fundamentales para el tratamiento de la cinemática de los manipuladores robóticos que se explotará en esta tesis.

La *Theory of Screws* no sólo nos dará información acerca de la posición y velocidad instantánea de los cuerpo rígidos que conforman al manipulador robótico, sino que también nos darán información acerca de las fuerzas que actúan sobre ellos. Ya que un conjunto de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden ser remplazadas por una sola fuerza aplicada a lo largo de una línea y un par sobre la misma dirección. A esta representación se le conoce como *wrench*. Los *wrenches* están conformados por dos *twists* (la fuerza y el par), por lo que todas las herramientas de los *twists* podrán ser extrapoladas a los

wrenches.

Existen dos ventajas principales que justifican el uso de *screws*, *twists* y *wrenches* [10]. La primera es que permiten una descripción global del movimiento de cuerpo rígido que no sufre de singularidades debido al uso de sistemas de coordenadas locales. La segunda ventaja es que la *theory of screws* provee una descripción muy geométrica que simplifica el análisis de mecanismos.

2.2. Cinemática del cuerpo rígido

Se le denomina a $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como una transformación de cuerpo rígido si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

1. La distancia entre dos puntos es constante: $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\| \forall p, q \in \mathbb{R}^3$
2. El producto cruz es preservado: $g(v \times w) = g(v) \times g(w) \forall v, w \in \mathbb{R}^3$
3. El producto punto es preservado: $v_1^T v_2 = g(v_1)^T g(v_2) \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

Esto muestra que la transformación g mantiene la ortogonalidad entre vectores por lo que se infiere que las transformaciones de cuerpo rígido toman un sistema ortogonal y lo mapean a otro sistema ortogonal. Así que para realizar un seguimiento del movimiento de los cuerpos rígidos se coloca un sistema de coordenadas cartesiano en cualquier punto de cada cuerpo rígido. Ya que fueron definidos los sistemas de coordenadas, se determina la *configuración* de los cuerpos rígidos al estudiar el movimiento relativo entre el sistema de coordenadas de cada cuerpo y un sistema de coordenadas fijo. Una característica fundamental de los vectores ortonormales base de los sistemas de coordenadas $\{e_1, e_2, e_3\}$ es que deben cumplir que $e_3 = e_1 \times e_2$.

Lo anterior indica que la acción de una transformación g en un sistema de coordenadas ligado a un cuerpo rígido describe el movimiento experimentado por el cuerpo. En términos matemáticos significa que si se describe la *configuración* de un cuerpo rígido por medio de un sistema de coordenadas formado por una base de vectores ortonormales $\{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_3 = e_1 \times e_2$ el cual está ligado a un punto p , entonces la *configuración* del cuerpo rígido después de la transformación g , es descrita por el sistema de coordenadas formado por una base de vectores ortonormales $\{g(e_1), g(e_2), g(e_3)\}$ ligado al punto $g(p)$.

2.2.1. Rotación en \mathbb{R}^3

Se empieza el estudio del movimiento de cuerpos rígidos considerando únicamente la rotación de un objeto. Se describe la rotación del cuerpo mediante una orientación relativa entre un sistema de

coordenadas ligado al cuerpo y uno fijo, también llamado inercial.

Sea A el sistema de coordenadas inercial y B el sistema de coordenadas ligado al cuerpo y los vectores $\{x_{ab}, y_{ab}, z_{ab}\} \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de los ejes principales de B relativo a A , tal como se muestra en la figura 2-1:

Entonces se construye la *matriz de rotación* entre A y B como:

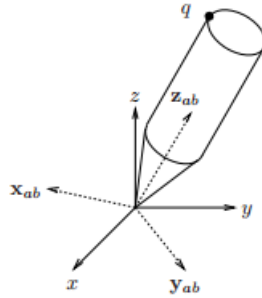


Figura 2-1: Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} x_{ab} & y_{ab} & z_{ab} \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

Para obtener los vectores x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} se recurre a la definición de proyección de vectores

$$\vec{a}_b = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|} \quad (2-2)$$

donde:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \vec{b} \quad (2-3)$$

Ahora se define el punto p en términos de los dos marcos de referencia

$$\begin{aligned} p_a &= x_{pa} \hat{i}_a + y_{pa} \hat{j}_a + z_{pa} \hat{k}_a \\ p_b &= x_{pb} \hat{i}_b + y_{pb} \hat{j}_b + z_{pb} \hat{k}_b \end{aligned} \quad (2-4)$$

donde los vectores $\hat{i}_a, \hat{j}_a, \hat{k}_a$ son los vectores ortonormales base de marco de referencia A , los mismo sucede con los vectores base de B . Ahora utilizando la ecuación 2-2 se realiza el cambio de coordenadas

del marco de referencia A al B para cada componente como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}x_{pb} &= x_{pa}\langle \hat{i}_a, \hat{i}_b \rangle + y_{pa}\langle \hat{j}_a, \hat{i}_b \rangle + z_{pa}\langle \hat{k}_a, \hat{i}_b \rangle \\y_{pb} &= x_{pa}\langle \hat{i}_a, \hat{j}_b \rangle + y_{pa}\langle \hat{j}_a, \hat{j}_b \rangle + z_{pa}\langle \hat{k}_a, \hat{j}_b \rangle \\z_{pb} &= x_{pa}\langle \hat{i}_a, \hat{k}_b \rangle + y_{pa}\langle \hat{j}_a, \hat{k}_b \rangle + z_{pa}\langle \hat{k}_a, \hat{k}_b \rangle\end{aligned}\quad (2-5)$$

De las ecuaciones 2-5 se observa que pueden ser acomodadas de forma matricial, como se muestra a continuación:

$$\vec{p}_b = \begin{bmatrix} \langle \hat{i}_a, \hat{i}_b \rangle & \langle \hat{j}_a, \hat{i}_b \rangle & \langle \hat{k}_a, \hat{i}_b \rangle \\ \langle \hat{i}_a, \hat{j}_b \rangle & \langle \hat{j}_a, \hat{j}_b \rangle & \langle \hat{k}_a, \hat{j}_b \rangle \\ \langle \hat{i}_a, \hat{k}_b \rangle & \langle \hat{j}_a, \hat{k}_b \rangle & \langle \hat{k}_a, \hat{k}_b \rangle \end{bmatrix} \vec{p}_a \quad (2-6)$$

Por lo que resulta que la *matriz de rotación* se define de la siguiente forma:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} \langle \hat{i}_a, \hat{i}_b \rangle & \langle \hat{j}_a, \hat{i}_b \rangle & \langle \hat{k}_a, \hat{i}_b \rangle \\ \langle \hat{i}_a, \hat{j}_b \rangle & \langle \hat{j}_a, \hat{j}_b \rangle & \langle \hat{k}_a, \hat{j}_b \rangle \\ \langle \hat{i}_a, \hat{k}_b \rangle & \langle \hat{j}_a, \hat{k}_b \rangle & \langle \hat{k}_a, \hat{k}_b \rangle \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

Las matrices de rotación tienen dos muy importantes propiedades debido a que las columnas que las conforman son mutuamente ortonormales. Las propiedades son las siguientes:

$$RR^T = R^T R = I \det R = \pm 1 \quad (2-8)$$

Sin embargo al haber definido que nuestros marcos de referencia cumplen la condición de $e_3 = e_1 \times e_2$, donde los vectores ortonormales son en este caso los renglones de la matriz. Recordando que el determinante se obtiene como:

$$\det R = r_1^T (r_2 \times r_3)$$

entonces:

$$\det R = r_1^T \times r_1 = \| r_1 \|^2 = 1 \quad (2-9)$$

Con esto se asegura que el determinante de las matrices de rotación siempre son +1. Esto lleva a la definición del conjunto de matrices de 3×3 que cumplen las condiciones 2-8 y 2-9 a las que se denomina $SO(3)$ ó *special orthogonal group*. Con esta información se define el *espacio de matrices de*

rotación en \mathbb{R}^3 como:

$$SO(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} : RR^T = I, \det R = +1\} \quad (2-10)$$

$SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es un grupo bajo la operación binaria de la multiplicación matricial. Un conjunto G junto con una operación binaria \circ definida sobre los elementos de G es llamado *grupo* si satisface los siguientes axiomas:

1. Cerradura: Si $g_1, g_2 \in G$ entonces $g_1 \circ g_2 \in G$
2. Identidad: Existe un elemento identidad e tal que $g \circ e = e \circ g = g, \forall g \in G$
3. Inversa: Para cada $g \in G$ existe un elemento único $g^{-1} \in G$ tal que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$
4. Asociatividad: Si $g_1, g_2, g_3 \in G$ entonces $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$

Cada configuración de un cuerpo rígido que sea libre de rotar relativo a un marco de referencia fijo puede ser identificado con una $R \in SO(3)$ única. Bajo este parámetro, el grupo $SO(3)$ es referido como el *espacio de configuración* del sistema y una trayectoria del sistema es la curva $R(t) \in SO(3)$ para cada $t \in [0, T]$. Las matrices de rotación pueden ser combinadas para formar nuevas matrices de rotación utilizando la multiplicación matricial. Por ejemplo, si el marco de referencia C tiene una orientación R_{bc} relativa al marco de referencia B y B tiene una orientación R_{ab} relativa a otro marco A entonces la orientación del marco C relativo al marco A está dado por:

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc} \quad (2-11)$$

La ecuación 2-11 se conoce como la *regla de composición* para rotaciones.

Al ser el producto cruz un operador lineal, este puede ser representado con una matriz, por lo que definimos:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

Por lo que podemos escribir el producto cruz como:

$$a \times b = \hat{a}b = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} b \quad (2-13)$$

Esta representación es muy útil a lo largo de este planteamiento.

Coordenadas exponenciales para la rotación

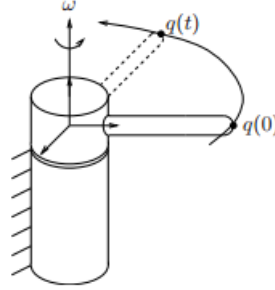


Figura 2-2: Trayectoria generada por la rotación alrededor del eje ω

Se desea describir la rotación del punto q alrededor del eje ω tal como se muestra en la figura 2-2. Ahora se considera la velocidad del punto q ligado al cuerpo rígido. Si se rota el cuerpo con una velocidad constante unitaria alrededor del eje ω , la velocidad del punto, \dot{q} es descrita como:

$$\dot{q} = \omega \times q(t) = \hat{\omega}q(t) \quad (2-14)$$

La expresión 2-14 es una ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo, el cual al resolverla resulta:

$$q(t) = e^{\hat{\omega}t}q(0) \quad (2-15)$$

donde $q(0)$ es la posición inicial y $e^{\hat{\omega}t}$ es la matriz exponencial

$$e^{\hat{\omega}t} = I + \hat{\omega}t + \frac{(\hat{\omega}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}t)^3}{3!} + \dots \quad (2-16)$$

Por lo que si se rota alrededor del eje ω con una velocidad unitaria constante por θ unidades de tiempo, entonces la rotación está dada por

$$R(\omega, \theta) = e^{\hat{\omega}\theta} \quad (2-17)$$

Por definición se sabe que la matriz $\hat{\omega}$ es una matriz antisimétrica, es decir, $\hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$. El espacio vectorial de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ será denotado como $so(n)$, es decir:

$$so(n) = \{S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S^T = -S\} \quad (2-18)$$

El conjunto de $so(3) \subset \mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Para obtener la solución de la exponencial matricial usualmente se recurre a la serie infinita de Taylor. Sin embargo no es muy útil para efectos prácticos. Por lo que recurriremos a la *Fórmula de Rodrigues* para obtener la exponencial matricial [4]:

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \hat{\omega} \sin \theta + \hat{\omega}^2(1 - \cos \theta) \quad (2-19)$$

Con base en lo anterior y sabiendo que la matriz antisimétrica $\hat{\omega} \in so(3)$ y que $\theta \in \mathbb{R}$ se determina que $e^{\hat{\omega}\theta} \in SO(3)$. La demostración es la siguiente:

$$[e^{\hat{\omega}\theta}]^{-1} = e^{-\hat{\omega}\theta} = e^{\hat{\omega}^T\theta} = [e^{\hat{\omega}\theta}]^T \quad (2-20)$$

Eso lleva a que $R^{-1} = R^T$ y por lo tanto $R^T R = I$ tal como se desea. Esto demuestra que la mapeo exponencial transforma matrices antisimétricas a matrices ortogonales. Geométricamente, las matrices antisimétricas corresponden a un eje de rotación, por el mapeo de $w \mapsto \hat{w}$ y el mapeo exponencial genera la rotación correspondiente en torno al eje ω por una cantidad específica θ . **Todas** las matrices de rotación pueden ser representadas como la matriz exponencial de alguna matriz antisimétrica [14].

2.2.2. Movimiento general de cuerpo rígido en \mathbb{R}^3

El movimiento de cuerpo rígido consiste generalmente de rotación y traslación. El procedimiento para representar un movimiento de traslación puro es muy sencillo, sólo se escoge cualquier punto del cuerpo y se le da seguimiento a las coordenadas del punto relativo a un marco de referencia conocido. Esto nos da una curva $p(t) \in \mathbb{R}^3, t \in [0, T]$, para una trayectoria del cuerpo completo. Sin embargo el movimiento

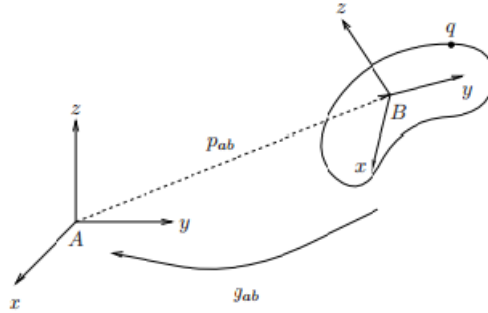


Figura 2-3: Movimiento de Cuerpo Rígido

general de un cuerpo rígido, incluyendo la traslación y rotación, es mucho más complejo. Basándose en la figura 2-3 se busca describir la posición y orientación relativa del marco de referencia ligado al cuerpo rígido B con respecto al marco de referencia inercial A . Entonces sea $\vec{p}_{ab} \in \mathbb{R}^3$ el vector de posición del

origen del marco de referencia B con respecto al marco de referencia A . Entonces la configuración del sistema consiste de una pareja (p_{ab}, R_{ab}) y el espacio de configuraciones del sistema se le denomina como $SE(3)$ ó *grupo euclidiano especial* cuya definición es:

$$SE(3) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

y en general:

$$SE(n) := \mathbb{R}^n \times SO(n)$$

Los elementos de $SO(3)$ sirven para denotar la transformación de un sistema de coordenadas a otro. En otras palabras, si se tiene que $q_a, q_b \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas del punto q con respecto al marco de referencia A y B respectivamente. Dado q_b se puede encontrar q_a por medio de la transformación de coordenadas:

$$q_a = p_{ab} + R_{ab}q_b \quad (2-21)$$

Donde $g_{ab} = (p_{ab}, R_{ab}) \in \mathbb{R}^3$ es la expresión que denota la configuración del marco de referencia B con respecto al marco de referencia A . Por lo que se define la acción de una transformación de cuerpo rígido sobre un punto como:

$$g(q) = p + Rq$$

tal que:

$$q_a = g_{ab}(q_b)$$

Representación Homogénea

Las transformaciones realizadas a vectores y puntos por las transformaciones de cuerpo rígido tienen una representación bastante sencilla y útil en \mathbb{R}^4 llamada *representación homogénea*. Esta representación consiste en colocar un número 1 al final del vector $v \in \mathbb{R}^4$ si éste representa un punto $q \in \mathbb{R}^3$, y se colocará un 0 si representa un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Es decir:

La representación de un punto es la siguiente:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La representación de un vector es la siguiente

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta definición se desprenden una reglas muy importantes:

1. Las sumas y restas de vectores serán vectores.
2. La suma de un vector y un punto es un punto.
3. La resta entre dos puntos resultará en un vector.
4. La suma entre dos puntos no tendrá significado alguno

Con esta notación ahora se denotan a las transformaciones $q_a = g_{ab}(q_b)$ como:

$$q_a = \begin{bmatrix} q_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = g_{ab}q_b$$

donde:

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al igual que en el caso de las rotaciones, las transformaciones de cuerpo rígido $g \in SE(3)$ poseen la *regla de la composición*, la cual consiste en la multiplicación matricial entre las configuraciones de marco de

referencia $g \in SO(3)$, tal como se muestra en la ecuación 2-22

$$g_{ac} = g_{ab}g_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

Gracias a la representación homogénea se obtiene que el conjunto de transformaciones de cuerpo rígido $g \in SE(3)$ bajo la operación binaria de la multiplicación matricial forma un grupo [11] y por consecuencia:

1. Si $g_1, g_2 \in SE(3)$ entonces $g_1g_2 \in SE(3)$
2. El elemento identidad e es la matriz identidad $I^{4 \times 4}$
3. Si $g \in SE(3)$ entonces el elemento inverso g^{-1} se obtiene de una forma simple:

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

de tal forma que:

$$g^{-1} = (-R^T p, R^T)$$

4. La multiplicación matricial es asociativa

Usando la representación homogénea para un vector $\vec{v} = s - r$ donde s y r son puntos en \mathbb{R}^3 , se puede obtener la transformación de cuerpo rígido de \vec{v} al aplicar la transformación de la siguientes forma:

$$g(\vec{v}) = g(s) - g(r) = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

Y como se puede observar, gracias a tener el 0 en el último elemento de del vector columna, se puede utilizar la multiplicación matricial para representar la acción de un movimiento de cuerpo rígido, pero en este caso, de un vector y no sólo de un punto.

Coordenadas exponenciales para el movimiento de cuerpo rígido y *twists*

Considere el cuerpo rígido de la figura 2-4. Si se enfoca primero a la rotación sobre el eje $\omega \in \mathbb{R}^3$ donde $\|\omega\| = 1$ y el punto $q \in \mathbb{R}^3$. Asumiendo que el cuerpo rota a velocidad unitaria constante, entonces

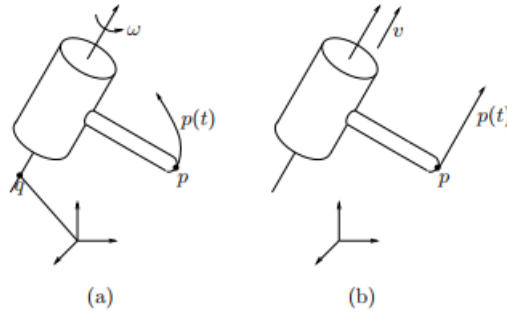


Figura 2-4: (a) Rotación alrededor del eje ω (b) Traslación paralela al vector v

la velocidad del punto $p(t)$ es:

$$\dot{p}(t) = \omega \times (p(t) - q) \quad (2-24)$$

Para obtener la representación homogénea de la ecuación 2-24 definimos la matriz $\hat{\xi}$ como:

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

donde se tiene que $v = -\omega \times q$. Entonces la ecuación 2-24 puede ser representada en notación homogénea como:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & -\omega \times q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{\xi} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{p}(t) = \hat{\xi} p$$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$p(t) = e^{\hat{\xi}t} p(0)$$

Donde $e^{\hat{\xi}t}$ es la matriz exponencial de la matriz de $\hat{\xi}t$. La escalar t representa la rotación debido a que se está girando a velocidad unitaria. Ahora para el caso de la traslación, observando la figura 2-4, se obtiene la velocidad del punto $p \in \mathbb{R}^3$ como:

$$\dot{p}(t) = v \quad (2-26)$$

Cuya solución, es igual a $e^{\hat{\xi}t}p(0)$, donde t es la cantidad total de traslación y

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

Podemos observar que la matriz $\hat{\xi}$ dada en las ecuaciones 2-25 y 2-27 son una generalización de las matrices antisimétricas $\hat{\omega} \in so(3)$. Por lo que ahora se define a este nuevo conjunto como:

$$se(3) = \{(v, \hat{\omega}) : v \in \mathbb{R}^3, \hat{\omega} \in so(3)\} \quad (2-28)$$

Los elementos de $se(3)$ se le conoce como *twist* o generadores diferenciales del grupo Euclidiano [2]. Para simplificar la notación, se parametriza a $\hat{\xi}$ en un vector $\xi \in \mathbb{R}^6$ como se muestra a continuación:

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \xi = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

A $\xi = (v, \omega)$ se le conoce como las coordenadas del *twist* $\hat{\xi}$.

Un elemento de $se(3)$ se mapea a un elemento de $SE(3)$ gracias al operador exponencial [10], el cual se define como:

Para el caso donde $\omega = 0$:

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

Para el caso donde $\omega \neq 0$:

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})(\omega \times v) + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

Se observa que en ambos casos que la transformación $g = e^{\hat{\xi}\theta}$ pertenece a $SE(3)$. Además cabe destacar que esta transformación tiene un significado muy diferente a aquellas transformaciones que únicamente cambiaban de un sistema de coordenadas a otro. Se debe interpretar a esta transformación exponencial como el mapeo de puntos desde sus coordenadas iniciales $p(0) \in \mathbb{R}^3$ a sus coordenadas respectivas después

de que el movimiento de cuerpo rígido fue aplicado, es decir:

$$p(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} p(0)$$

En esta ecuación, $p(0)$ y $p(\theta)$ están referidas a un solo marco de referencia. Sin embargo, si se considera a $g_{ab}(0)$ como la configuración inicial de un cuerpo rígido relativa a un marco de referencia A , entonces la configuración final con respecto al mismo marco de referencia A está dado por:

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0) \quad (2-32)$$

Entonces el mapeo exponencial de un *twist* representa el movimiento relativo de un cuerpo rígido. Esta interpretación es muy útil para poder estudiar el desarrollo del movimiento de un manipulador robótico desde su configuración inicial hasta su configuración final.

2.2.3. La representación geométrica de los *twists*: *Screws*

Considere a un movimiento de cuerpo rígido el cual consiste en una rotación alrededor de un vector cualquiera en el espacio por una cantidad de θ radianes, seguida por una traslación sobre ese mismo vector por una cantidad d . A este movimiento de cuerpo rígido se le conoce como *movimiento tipo screw* [2]. Ahora se define el *pitch* de un *screw* como la relación entre la rotación y la traslación del cuerpo; $h = d/\theta$. Entonces la traslación total de cuerpo después de haber rotado θ radianes es $h\theta$.

Basándose en la figura 2-5 se define al eje del *screw* como una línea en el espacio que pasa por un

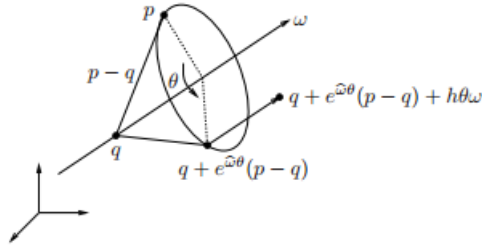


Figura 2-5: Movimiento tipo *screw*

punto $q \in \mathbb{R}^3$ y con el vector unitario de dirección $\omega \in \mathbb{R}^3$, por lo que el eje resulta como el conjunto de puntos:

$$l = \{q + \lambda\omega : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (2-33)$$

Cabe destacar que esta definición del eje del *screw* sólo funcionará cuando el movimiento conste de una traslación diferente de cero, seguida por una traslación.

En el caso de una rotación nula, el eje del *screw* debe ser definido de una forma diferente. Se define al eje como la línea que pasa por el origen del marco de referencia en la dirección de la traslación dada por un vector $v \in \mathbb{R}^3$. Por convención, el *pitch* de un *screw* es ∞ y la cantidad de traslación está dado por $\|v\|$ [2]. Con estos antecedentes, ahora se define formalmente el concepto de *screw*.

Un *screw* S consiste de un eje l , un *pitch* h y una magnitud M . Un movimiento de tipo *screw* representa una rotación por la cantidad $\theta = M$ alrededor de un eje l seguida por una traslación por la cantidad $h\theta$ paralela al eje l . Si $h = \infty$, entonces el movimiento de tipo *screw* consiste de una traslación a lo largo del eje l por una cantidad M .

Para obtener la transformación de un cuerpo rígido asociada a un *screw* se debe analizar el movimiento de un punto $p \in \mathbb{R}^3$, tal como se muestra en la figura 2-5:

$$g(p) = q + e^{\hat{\omega}\theta}(p - q) + h\theta\omega$$

Y su representación homogénea:

$$g \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})q + h\theta\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como esta representación debe ser válida para todo $p \in \mathbb{R}^3$, el movimiento de cuerpo rígido dado por el *screw* es:

$$g = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})q + h\theta\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

Y este movimiento representa la transformación de los puntos del cuerpo rígido desde su configuración inicial ($\theta = 0$) hasta su configuración final con respecto a un marco de referencia fijo.

Algo importante a destacar es que la transformación representada por 2-31 y la representada por 2-34 tienen la misma forma. De hecho, si se escoge a $v = -\omega \times q + h\omega$, entonces $\xi = (v, \omega)$ genera el movimiento de tipo *screw* representado en la ecuación 2-34. Y en el caso de una traslación pura, el movimiento de cuerpo rígido es descrito por el *screw*:

$$g = \begin{bmatrix} I & \theta v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

Que es precisamente la representación del movimiento generado por $e^{\hat{\omega}\theta}$ para $\xi = (v, 0)$. Por lo que se concluye que un movimiento de tipo *screw* corresponde a un movimiento a través de un *twist* constante por una cantidad igual a la magnitud del *screw*.

Ahora se puede definir un *screw* asociado a cada *twist*. Sea $\hat{\xi} \in so(3)$ un *twist* con coordenadas $\xi = (v, \omega) \in \mathbb{R}^6$, donde asumimos que $\|\omega\| \neq 1$, permitiendo la traslación y la rotación, las siguientes

expresiones son las coordenadas del *screw* de un *twist*:

1. *Pitch*:

$$h = \frac{\omega^T v}{\|\omega\|^2} \quad (2-36)$$

El *pitch* de un *twist* es la razón entre el movimiento de traslación y el de rotación. Si $\omega = 0$, se dice que ξ tiene un *pitch* infinito.

2. Eje:

Si $\omega \neq 0$

$$l = \frac{\omega \times v}{\|\omega\|^2} + \lambda \omega : \lambda \in \mathbb{R} \quad (2-37)$$

Si $\omega = 0$

$$l = 0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R} \quad (2-38)$$

3. Magnitud:

Si $\omega \neq 0$

$$M = \|\omega\| \quad (2-39)$$

Si $\omega = 0$

$$M = \|v\| \quad (2-40)$$

La magnitud de un *screw* es la rotación neta si el movimiento involucra una componente rotacional, o la traslación neta si no la involucra. Si se define que $\|\omega\| = 1$, entonces el *twist* $\hat{\xi}\theta$ tendrá magnitud $M = 0$.

Existen casos especiales de movimientos de tipo *screw* que son de suma importancia en el estudio de manipuladores robóticos. Uno de estos casos es aquel donde el *pitch* del *screw* es cero, ya que este caso corresponde a un movimiento de rotación pura, el cual modela a una junta de revolución de un manipulador. El eje del *screw* corresponde al eje de rotación de la junta. Y un *pitch* infinito representará a un movimiento de traslación pura, lo cual modela a una junta prismática. Finalmente se define a un *twist unitario* como aquel *twist* donde $\|\omega\| = 1$ o en el caso de $\|\omega\| = 0$, $\|v\| = 1$, es decir que se tiene una magnitud $M = 1$. Los *twist unitarios* son útiles debido a que permiten expresar movimientos de cuerpos rígidos debido a juntas rotacionales o prismáticas como $g = e^{\hat{\xi}\theta}$ donde θ corresponde a la cantidad de traslación o rotación.

El teorema de Chasles indica que todo movimiento general de un cuerpo rígido puede ser realizado por una rotación alrededor de un eje combinada con una traslación paralela al mismo eje [2].

Por lo que si un marco de referencia B es ligado a un cuerpo rígido, y éste experimenta un movimiento de tipo *screw*, la configuración instantánea del marco de referencia B con respecto al marco de referencia A está dado por:

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0) \quad (2-41)$$

El término $g_{ab}(0)$ representa la transformación de las coordenadas de un punto en B a unas coordenadas en A . Mientras que $e^{\hat{\xi}\theta}$ transforma el punto de su posición inicial a su posición final en A .

2.2.4. Velocidad de un cuerpo rígido

El acercamiento que se hará a la velocidad de cuerpo rígido sera por medio del movimiento representado por $g(t)$, es decir, una curva parametrizada por el tiempo t en $SE(3)$. Sin embargo, no es posible obtener la velocidad del cuerpo simplemente derivando la curva $g(t)$ debido a que $SE(3)$ no es un espacio Euclidiano. De hecho $\dot{g}(t)$ no pertenece ni a $SE(e)$ ni a $se(3)$. Por lo que se muestra que la representación adecuada de la velocidad de un cuerpo rígido será a través de los *twists*.

Velocidad angular

Se comienza por estudiar el caso de la velocidad rotacional en \mathbb{R}^3 . Si se considera a $R_{ab}(t) \in SO(3)$ como la curva que representa la trayectoria de un objeto ligado al marco de referencia B con respecto al marco de referencia A , pero que únicamente está rotando. Se llama al marco de referencia A como el marco de referencia *espacial*, mientras que al marco de referencia B se denomina como el marco de referencia *corporal*. Siguiendo estos preceptos se dice que cualquier punto q ligado a un cuerpo rígido sigue una trayectoria en las coordenadas espaciales si:

$$q_a(t) = R_{ab}(t)q_b \quad (2-42)$$

Debe notarse que el punto q_b está ligado al marco *corporal*. Por lo que la velocidad del punto en coordenadas espaciales será:

$$v_{q_a} = \frac{d}{dt}q_a(t) = \dot{R}_{ab}(t)q_b \quad (2-43)$$

Por lo que \dot{R}_{ab} transforma las coordenadas del *corporales* del punto p a la velocidad *espacial* de ese punto. Sin embargo, esta representación no es de mucha utilidad debido a que se necesita nueve números para representar la velocidad de un cuerpo rotando. Por lo que se busca utilizar una notación más compacta, para ese propósito se reescribe a la ecuación 2-43 como:

$$v_{q_a}(t) = \dot{R}_{ab}(t)R_{ab}^{-1}(t)R_{ab}(t)q_b \quad (2-44)$$

donde $\dot{R}_{ab}(t)R_{ab}^{-1} \in so(3)$, es decir, son antisimétricas. La prueba es la siguiente:

Dado que $R(t) \in SO(3)$:

$$\begin{aligned} R(t)R(t)^T &= I \\ \frac{d}{dt}[R(t)R(t)^T = I] &= \dot{R}(t)R(t)^T + R(t)\dot{R}(t)^T \\ \dot{R}(t)R(t)^T &= -(\dot{R}(t)R(t)^T)^T \end{aligned}$$

Por lo que $\dot{R}(t)R(t)^{-1} = \dot{R}(t)R(t)^T$ es una matriz antisimétrica. La prueba de que $R(t)^{-1}\dot{R}(t)$ es una matriz antisimétrica se obtiene al diferenciar la identidad $R(t)^T R(t) = I$

Gracias a que $\dot{R}_{ab}(t)R_{ab}^{-1} \in so(3)$, ahora se usa una representación más sencilla de la velocidad de un cuerpo rotando utilizando un vector en \mathbb{R}^3 . Por lo que se define a la *velocidad angular instantánea espacial* denotada $\omega_{ab}^s \in \mathbb{R}^3$ como:

$$\hat{\omega}_{ab}^s = \dot{R}_{ab}R_{ab}^{-1} \quad (2-45)$$

El vector ω_{ab}^s corresponde a la velocidad del objeto desde el marco de referencia espacial A . De forma similar, se define la *velocidad angular instantánea corporal* denotada como $\omega_{ab}^b \in \mathbb{R}^3$ como:

$$\hat{\omega}_{ab}^b = R_{ab}^{-1}\dot{R}_{ab} \quad (2-46)$$

La velocidad angular instantánea corporal describe la velocidad angular vista desde el marco de referencia corporal B . De estas dos ecuaciones se obtiene la relación entre ambas:

$$\hat{\omega}_{ab}^b = R_{ab}^{-1}\hat{\omega}_{ab}^s R_{ab} \longrightarrow \omega_{ab}^b = R_{ab}^{-1}\omega_{ab}^s \quad (2-47)$$

Con base en lo anterior ahora se expresa la ecuación 2-44 como:

$$v_{q_a}(t) = \hat{\omega}_{ab}^s R_{ab}(t)q_b = \omega_{ab}^s(t) \times q_a(t) \quad (2-48)$$

Y ahora se obtiene la velocidad angular corporal como:

$$v_{a_b}(t) = R_{ab}^T(t)v_{q_a}(t) = \omega_{ab}^b(t) \times q_b \quad (2-49)$$

Ahora se cuenta con una descripción compacta de la velocidad angular de un cuerpo rígido en términos de las velocidad angulares espaciales y corporales ω_{ab}^s y ω_{ab}^b .

Velocidad de un cuerpo rígido

Ahora se considera el caso general donde $g_{ab}(t) \in SE(3)$ es una curva parametrizada por el tiempo, la cual representa la trayectoria de un cuerpo rígido. Tal como en la rotación, \dot{g}_{ab} no tiene un significado útil, sin embargo, los términos $\dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1}$ y $g_{ab}^{-1}\dot{g}_{ab}$ sí lo tienen. Si

$$g_{ab}(t) = \begin{bmatrix} R_{ab}(t) & p_{ab}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{ab}(t) & \dot{p}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ab}^T & -R_{ab}^T p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{ab}R_{ab}^T & -\dot{R}_{ab}R_{ab}^T p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa como $\dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1}$ tiene la forma de un *twist*. Así que de forma análoga a la velocidad angular, se define la *velocidad espacial* $V_{ab}^s \in se(3)$ como:

$$\hat{V}_{ab}^s = \dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1} \quad (2-50)$$

ó

$$V_{ab}^s = \begin{bmatrix} v_{ab}^s \\ \omega_{ab}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{R}_{ab}R_{ab}^T p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ (\dot{R}_{ab}R_{ab}^T)^\vee \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

donde definimos al operador \vee como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\vee = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

Por lo que si se define un punto q ligado al cuerpo rígido en coordenadas espaciales se tiene:

$$q_a(t) = g_{ab}(t)q_b$$

derivando:

$$v_{q_a} = \dot{q}_a = \dot{g}_{ab}q_b = \dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1}q_a$$

por lo tanto:

$$v_{q_a} = \hat{V}_{ab}^s q_a = \omega_{ab}^s \times q_a + v_{ab}^s$$

La interpretación de la velocidad espacial es que el *screw* asociado a \hat{V}_{ab}^s da el eje, el *pitch* y la magnitud instantánea asociados al movimiento relativo con respecto al marco de referencia espacial.

También es posible obtener la velocidad del cuerpo rígido con respecto al marco de referencia instantáneo corporal como:

$$\hat{V}_{ab}^b = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{R}_{ab} & R_{ab}^T \dot{P}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

ó

$$V_{ab}^b = \begin{bmatrix} v_{ab}^b \\ \omega_{ab}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{P}_{ab} \\ (R_{ab}^T \dot{R}_{ab})^\vee \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

Por lo que la velocidad de un punto q en el marco de referencia corporal está dado por:

$$v_{q_b} = g_{ab}^{-1} v_{q_a} = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} q_b = \hat{V}_{ab}^b q_b \quad (2-54)$$

Entonces la acción de \hat{V}_{ab}^b es tomar las coordenadas corporales del punto q_b y regresar la velocidad de ese punto en las coordenadas corporales v_{q_b} :

$$v_{q_b} = \hat{V}_{ab}^b q_b = \omega_{ab}^b \times q_b + v_{ab}^b \quad (2-55)$$

La velocidad corporal es la velocidad del origen de marco de referencia corporal relativa al marco de referencia espacial vista desde el marco de referencia corporal.

La velocidad espacial y la velocidad corporal de un cuerpo rígido están relacionadas por una transformación de similitud a la cual la denominamos la *transformación adjunta*. La matriz de 6×6 que transforma los *twists* de un marco de referencia a otro se le llama *adjunta*. A la adjunta asociada a la transformación g se le representa como Ad_g . Entonces, dado $g \in SE(3)$ que transforma un sistema de coordenadas a otro la $Ad_g : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ está dada por:

$$Ad_g = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

La demostración se puede consultar en [11]. Por lo que la adjunta transforma el las coordenadas del *twist* de velocidad corporal a las coordenadas del *twist* de velocidad espacial. La Ad_g es invertible y su inversa está dada por:

$$Ad_g^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -(R^T p)^\vee R^T \\ 0 & R^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \hat{p} \\ 0 & R^T \end{bmatrix} = Ad_{g^{-1}} \quad (2-57)$$

Es conveniente definir las velocidades sin hacer referencia a sus marcos de referencia específicos. Por lo que para una transformación de cuerpo rígido $g \in SE(3)$, definimos la velocidad espacial como:

$$\begin{aligned} \hat{V}^s &= \dot{g}g^{-1} \\ V^s &= \begin{bmatrix} v^s \\ \omega^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{R}R^T p + \dot{p} \\ (\dot{R}R^T)^\vee \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-58)$$

Y la velocidad corporal como:

$$\begin{aligned} \hat{V}^b &= g^{-1}\dot{g} \\ V^b &= \begin{bmatrix} v^b \\ \omega^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T \dot{p} \\ (R^T \dot{R})^{vee} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-59)$$

Por lo que la ambas velocidades se relacionan por medio de la adjunta de la siguientes manera:

$$V^s = Ad_g V^b \quad (2-60)$$

Velocidad del movimiento del tipo *Screw*

Sea la transformación de cuerpo rígido $g \in SE(3)$ donde:

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0) \quad (2-61)$$

representa la configuración del cuerpo rígido del marco de referencia B con respecto al marco de referencia A . Y considerando que el *twist* $\hat{\xi}$ es constante:

$$\frac{d}{dt}(e^{\hat{\xi}\theta}) = \hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta} \quad (2-62)$$

Por lo que la velocidad espacial del movimiento de cuerpo rígido es:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab}^s &= \dot{g}_{ab}(\theta)g_{ab}^{-1}(\theta) \\ &= (\hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta}g_{ab}(0))(g_{ab}^{-1}(0)e^{-\hat{\xi}\theta}) \\ &= \hat{\xi}\dot{\theta}\end{aligned}$$

Y la velocidad corporal puede ser calculada como:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab}^b &= g_{ab}^{-1}(\theta)\dot{g}_{ab}(\theta) \\ &= (g_{ab}^{-1}(0)e^{-\hat{\xi}\theta})(\hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta}g_{ab}(0)) \\ &= (g_{ab}^{-1}(0)\hat{\xi}g_{ab}(0))\dot{\theta} = (Ad_{g_{ab}^{-1}(0)})^\wedge\dot{\theta}\end{aligned}$$

Transformación de coordenadas

Así como es posible hacer la composición de transformaciones de cuerpo rígido para encontrar $g_{ac} \in SE(3)$ dados $g_{ab}, g_{bc} \in SE(3)$, es posible determinar la velocidad de un marco de referencia relativo a un tercero dadas las velocidades relativas entre los otros dos marcos de referencia.

- Considere el movimiento de tres marcos de referencia, A, B, C . La siguiente relación existe entre sus velocidades espaciales:

$$V_{ac}^s = V_{ab}^s + Ad_{g_{ab}}V_{bc}^s \quad (2-63)$$

- Considere el movimiento de tres marcos de referencia A, B, C . La siguiente relación existe entre sus velocidades corporales:

$$V_{ac}^b = Ad_{g_{bc}^{-1}}V_{ab}^b + V_{bc}^b \quad (2-64)$$

Las reglas anteriores pueden ser aplicadas también a *twists* constantes, como aquellos utilizados para modelar articulaciones de revolución o prismáticas. Si ξ es un *twist* que representa el movimiento de un *screw* y es desplazado al aplicar una transformación de cuerpo rígido $g \in SE(3)$, el nuevo *twist* se obtiene la siguiente ecuación:

$$\xi' = Ad_g\xi \quad \hat{\xi}' = g\hat{\xi}g^{-1}$$

- Usando la notación utilizada, las siguientes relaciones son de importancia:

$$V_{ab}^b = -V_{ba}^s \quad V_{ab}^b = -Ad_{g_{ba}}V_{ba}^b$$

2.3. Dinámica de cuerpo rígido

En esta sección se estudian las fuerzas y los momentos que actúan en cuerpos rígidos. Además de que se presenta el planteamiento Lagrangiano para el estudio de la dinámica de los cuerpo rígidos el cual es de mucha utilidad en el estudio de manipuladores robóticos.

2.3.1. *Wrenches*

Una fuerza generalizada aplicada sobre un cuerpo rígido consiste de una componente lineal (fuerza pura) y un componente angular (momento puro) actuando sobre un punto. Se puede generalizar esta fuerza como un vector en \mathbb{R}^6 :

$$F = \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}$$

Donde $f \in \mathbb{R}^3$ es la componente lineal y $\tau \in \mathbb{R}^3$ es la componente angular del par fuerza/momento conocido como *wrench*. Los valores del vector *wrench* $F \in \mathbb{R}^6$ dependen del marco de referencia que se esté utilizando. Por ejemplo, si B es un marco de referencia ligado al objeto, entonces se escribe a la fuerza como $F_b = (f_b, \tau_b)$ si ésta está aplicada en el origen de B donde f_b y τ_b están referidas al marco de referencia B .

Se operan los *wrenches* y los *twists* para definir el *trabajo instantáneo*. Se considera el movimiento de cuerpo rígido parametrizado por $g_{ab}(t)$, donde A es el marco inercial y B es el marco de referencia ligado al cuerpo rígido. Sea $V_{ab}^b \in \mathbb{R}^6$ la velocidad instantánea corporal del cuerpo rígido y sea F_b el *wrench* aplicado al cuerpo. Se debe notar que ambos vectores están relativos al marco de referencia ligado al cuerpo rígido. Con base en lo anterior, podemos definir la *diferencial de trabajo* como:

$$\partial W = V_{ab}^b \dot{F}_b = (v \cdot f + \omega \cdot \tau) \quad (2-65)$$

Por lo que el trabajo total generado por el *wrench* F_b a través de un *twist* V_{ab}^b en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dado por:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} V_{ab}^b \cdot F_b dt \quad (2-66)$$

Se dice que dos *wrenches* son equivalentes si generan el mismo trabajo para todo movimiento de cuerpo rígido. Los *wrenches* equivalentes pueden ser utilizados para reescribir un *wrench* en términos de otro aplicado en otro punto, ambos con respecto al mismo marco de referencia. Para lograr transformar un

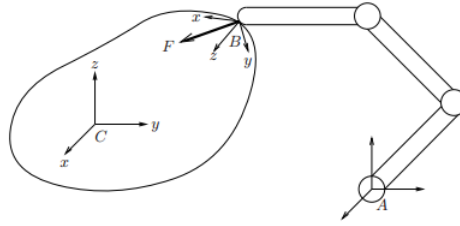


Figura 2-6: Transformación de *wrenches* entre diferentes marcos de referencia

wrench aplicado en un marco de referencia B en otro aplicado en el marco de referencia C , ambos ligados del mismo cuerpo rígido, tal como se muestra en 2-6; se utiliza la *adjunta* de la siguiente manera:

$$F_c = Ad_{g_{bc}}^T F_b$$

desarrollando:

$$\begin{bmatrix} f_c \\ \tau_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{bc}^T & 0 \\ -R_{bc}^T p_{bc} & R_{bc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_b \\ \tau_b \end{bmatrix}$$

Se observa como la transformación adjunta rota los vectores de fuerza y par del marco de referencia B al C e incluye un par adicional $-p_{bc} \times f_b$, el cual representa el torque que resulta al aplicar la fuerza f_b a una distancia $-p_{bc}$.

También es posible representar un *wrench* con respecto a un marco de referencia que no esté ligado al cuerpo rígido, tal como se muestra en la 2-6. Sea el marco de referencia A que se encuentra fuera del cuerpo rígido, y el marco de referencia B ligado al cuerpo, entonces el *wrench* F escrito en términos del marco de referencia A se obtiene de la siguiente manera:

$$F_a = Ad_{g_{ba}}^T F_b \tag{2-67}$$

Este *wrench* representa a el par *fuerza/momento* aplicado tal como si el marco de referencia A estuviera ligado al cuerpo rígido. Esto no es lo mismo que simplemente reescribir las componentes de F_b en las coordenadas de A , ya que la aplicación de la fuerza F_a es el origen de marco de referencia A y no el origen del marco de referencia B .

Si hay varios *wrenches* aplicados sobre un mismo cuerpo, entonces el *wrench* neto que actúa sobre el cuerpo se puede construir con la suma de todos los vectores *wrench*. Cabe destacar que todos los

wrenches deben estar referidos al mismo marco de referencia. Es decir, uno puede sumar *wrenches* si éstos representan fuerzas y torques aplicados en un mismo punto. Así como se define la velocidad espacial y la corporal, de forma análoga, se define la representación corporal y espacial de los *wrenches*. Con base en lo anterior, se define a $g \in SE(3)$ como la configuración del cuerpo rígido y a F^b como el *wrench* corporal y a F^a como el *wrench* espacial. Entonces se relacionan ambos *wrenches* por medio de la adjunta, como se muestra a continuación:

$$F^b = Ad_g^T F^a \quad (2-68)$$

De aquí se desprende una propiedad muy interesante en donde el trabajo realizado siempre será el mismo, ya sea usando el marco de referencia corporal o espacial. Es decir:

$$\partial W = V^b F^b = V^a F^a \quad (2-69)$$

Las coordenadas del *screw* de un *Wrench*

Tal como sucede con los *twists*, es posible generar un *wrench* al aplicar una fuerza a lo largo de un eje en el espacio mientras se aplica un torque alrededor del mismo eje. El *Teorema de Poinsot* dice que cada *wrench* es equivalente a una fuerza y a un torque aplicado a lo largo de un mismo eje [2]. Sea S un *screw* con eje $l = \{q + \lambda\omega : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\|\omega\| = 1$ con un *pitch* h y una magnitud M . Se construye un *wrench* a partir de este *screw* al aplicar una fuerza de magnitud M a lo largo de la línea l y un torque con magnitud hM . Si $h = \infty$ entonces se genera un torque puro alrededor del eje l . El *wrench* resultante es:

Para h finito:

$$F = M \begin{bmatrix} \omega \\ -\omega \times q + h\omega \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

Para $h = \infty$

$$F = M \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2-71)$$

En donde el término $-\omega \times q$ representa el *offset* entre el eje del *screw* y el origen del marco de referencia. Por lo que se llama a F como el *wrench* a través del *screw* S . Cabe destacar que todos los componentes de F y por lo tanto F misma están referidos a un marco de referencia fijo. Por lo que F representa el

wrench espacial aplicado a un cuerpo rígido.

Al dar el mismo tratamiento que a los *twists*, obtenemos las coordenadas del *screw* que representa al *wrench*, las cuales son:

1. *Pitch*:

$$h = \frac{f^T \tau}{\|f\|^2} \quad (2-72)$$

Si el *pitch* del *wrench* es la relación entre el torque angular y la fuerza linear. Si $f = 0$, se dice que F tiene un *pitch* infinito.

2. Eje:

Si $f \neq 0$:

$$l = \left\{ \frac{f \times \tau}{\|f\|^2} + \lambda f : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (2-73)$$

Si $f = 0$:

$$\{0 + \lambda \tau : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (2-74)$$

El eje l es una línea dirigida a través de un punto. Para $f \neq 0$, el eje es una línea en la dirección de f que pasa por el punto $q = \frac{f \times \tau}{\|f\|^2}$. Y para $f = 0$, el eje pasa por una línea con la dirección de τ pasando por el origen del marco de referencia.

3. Magnitud:

Si $f \neq 0$:

$$M = \|f\| \quad (2-75)$$

Si $f = 0$:

$$M = \| \tau \| \quad (2-76)$$

La magnitud del *screw* es la fuerza neta lineal, si el movimiento contiene una componente lineal, o la magnitud del torque neto si no hay componente lineal

2.3.2. Método de Lagrange

Existen diferentes métodos para describir la dinámica de un sistema físico. Todos los métodos producen un conjunto equivalentes de ecuaciones, pero con diferentes planteamientos. El método de Lagrange es uno de ellos. Este método descansa en el estudio de las propiedades de la energía del sistema para obtener las ecuaciones de movimiento. Se escogió este método por su relativa simplicidad en comparación con los métodos clásicos, además de que nos da una representación más ordenada que ayuda a la aplicación algoritmos de control recursivos y fáciles de programar. Sea un sistema de n partículas que obedecen la Segunda Ley de Newton. Sea F_i la fuerza aplicada sobre la i -ésima partícula y sea m_i la masa de la partícula y r_i su posición, entonces la segunda ley de Newton puede ser escrita como $F_i = m_i \ddot{r}_i$ donde $r_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n$.

Sin embargo, el interés radica en un grupo de partículas ligadas unas a otras, no independientes. Por lo que se describirá esta interconexión como *restricciones* entre las posiciones de las partículas. Cada restricción será representada por una función $g_j : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_j(r_1, \dots, r_n) = 0$ para $j = 1, \dots, k$.

Una restricción actúa sobre un sistema de partículas a través de la aplicación de *fuerzas de restricción*. Estas fuerzas son determinadas de tal manera que la ecuación $g_j(r_1, \dots, r_n) = 0$ sea satisfecha. Una forma de visualizar las restricciones sería si se les viera como una superficie suave en \mathbb{R}^n , las fuerzas de restricción serían normales a la superficie y restringirían las velocidades del sistema tangentes a la superficie.

Sin embargo, este acercamiento, aunque intuitivo, no es útil. Por lo que ahora se describirá el movimiento del sistema en términos de un conjunto más pequeño de variables que describan completamente la configuración del sistema. Sea un sistema de n partículas con k restricciones, busquemos un conjunto de $m = 3n - k$ variables q_1, \dots, q_m y de funciones suaves f_1, \dots, f_n tal que $r_i = f_i(q_1, \dots, q_m)$ cumplan $g_j(r_1, \dots, r_n) = 0$.

Llamamos al conjunto q_i como las *coordenadas* generalizadas del sistema. Para un manipulador robótico que consiste de eslabones rígidos, estas coordenadas siempre son los ángulos de las articulaciones. Los valores de estos ángulos determinan la configuración del sistema.

Ya que las coordenadas generalizadas son suficientes para darnos la posición de las partículas, podemos

ahora escribir las ecuaciones de movimiento en términos de estas coordenadas. Para lograrlo, debemos también expresar las fuerzas externas aplicadas al sistema en función de las componentes de las coordenadas generalizadas, a estas fuerzas se les conoce como *fuerzas generalizadas*. Para un manipulador robótico las fuerzas generalizadas son los torques aplicados a los ejes de revolución de las juntas.

Para obtener las ecuaciones de movimiento, definimos el *Lagrangiano* L como la diferencia de energía cinética y potencial de sistema, es decir:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (2-77)$$

Donde T es la energía cinética y V es la energía potencial descritas en las coordenadas generalizadas. Por lo que las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico con coordenadas generalizadas $q \in \mathbb{R}^m$ y Lagrangiano L están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Upsilon_i \quad (2-78)$$

donde $i = 1, \dots, m$ y Υ_i es la fuerza externa actuando sobre la i -ésima coordenada generalizada.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, $\frac{\partial L}{\partial q}$ y Υ son vectores renglón, sin embargo usualmente se utilizan como vectores columna por conveniencia.

Propiedades inerciales de los cuerpos rígidos

Para poder utilizar las ecuaciones de Lagrange a un robot, primero se calcula la energía potencial y cinética de los eslabones que componen al manipulador en función de los ángulos y velocidades de las juntas. Como cada eslabón es un cuerpo rígido, su energía potencial y cinética pueden ser definidas en función de su masa total y sus momentos de inercia alrededor del centro de masa.

Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ el volumen ocupado por un cuerpo rígido y $\rho(r)$ donde $r \in V$ sea la distribución de masa del cuerpo. Si el objeto está hecho de un material homogéneo, entonces $\rho(r) = \rho$, una constante. La masa del cuerpo es la integral de volumen de la densidad de masa:

$$m = \int_V \rho(r) dV \quad (2-79)$$

Y el centro de masa está definido como:

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \int_V \rho(r) r dV \quad (2-80)$$

Considere el cuerpo mostrado en la figura 2-7, para obtener la energía cinética primero se liga un marco de referencia al centro de masa del objeto y definimos a $g = (p, R)$ como la trayectoria del cuerpo relativa

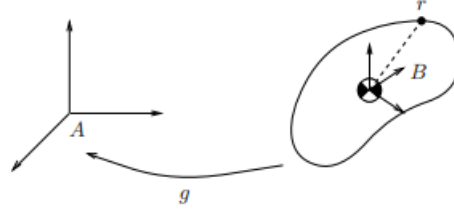


Figura 2-7: Marcos de referencia para calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento

al marco de referencia inercial. Sea $r \in \mathbb{R}^3$ las coordenadas de un punto del cuerpo relativa al marco de referencia del cuerpo. La velocidad de ese punto está dada por:

$$\dot{p} + \dot{R}r \quad (2-81)$$

y la energía cinética del objeto está dada por la integral:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \|\dot{p} + \dot{R}r\|^2 dV \quad (2-82)$$

La cual se puede simplificar como:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \|\dot{p}\|^2 + \frac{1}{2} \omega^T \mathcal{I} \omega \\ T &= \frac{1}{2} (V^b)^T \begin{bmatrix} m\mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} V^b \\ T &= \frac{1}{2} (V^b)^T \mathcal{M} V^b \end{aligned} \quad (2-83)$$

Donde $\hat{V}^b = g^{-1}\dot{g} \in se(3)$ es la *velocidad del cuerpo* y al matriz simétrica

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

es el *tensor de inercia* y la matriz simétrica y positiva definida

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m\mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

es la *matriz generalizada de inercia* [13].

Ecuaciones de Newton-Euler para cuerpo rígidos

Las ecuaciones de Lagrange dan un método muy general para la obtención de las ecuaciones de movimiento para sistemas mecánicos. Sin embargo, para un cuerpo rígido con configuración $g \in SE(3)$, las ecuaciones de Lagrange no pueden ser utilizadas directamente a menos que elijamos una parametrización local para la configuración del cuerpo. Pero ya que todas las parametrizaciones en $SE(3)$ son singulares en alguna configuración, este método sólo puede ser usado de manera local. Sin embargo, esto no es muy útil para el desarrollo de la dinámica de los manipuladores robóticos. Por lo que se debe buscar una caracterización global de la dinámica del cuerpo rígido sujeto a fuerzas y torques externos. Por lo que se recurrirá a las ecuaciones de Newton-Euler para lograr esa caracterización global que requerimos. Sea $g = (p, R) \in SE(3)$ una configuración de un marco de referencia ligado al centro de masa del cuerpo rígido, relativo al marco de referencia inercial. Sea f una fuerza aplicada en el centro de masa con coordenadas f referidas al marco de referencia inercial. La ecuación de movimiento de traslación se obtiene de la segunda ley de Newton en función del momento lineal $m\dot{p}$ como:

$$f = \frac{d}{dt}(m\dot{p}) \quad (2-84)$$

Y al ser la masa del cuerpo rígido constante, el movimiento de traslación del centro de masa se convierte en:

$$f = m\ddot{p} \quad (2-85)$$

Estas ecuaciones son independientes del movimiento angular del cuerpo rígido.

De forma similar, las ecuaciones que describen el movimiento angular son obtenidas de forma independiente del movimiento lineal. Por lo que ahora se considera el movimiento angular del cuerpo rígido alrededor de un punto sujeto a un torque τ externo. Para obtener la ecuación de movimiento angular, igualamos el cambio del momento angular con el torque aplicado. El momento angular relativo al marco de referencia inercial está dado por $\mathcal{I}'\omega^s$ donde

$$\mathcal{I}' = R\mathcal{I}R^T \quad (2-86)$$

es el tensor instantáneo de inercia relativo al marco de referencia inercial y ω^s es la velocidad angular espacial. Por lo que las ecuaciones de movimiento angular están dadas por:

$$\tau = \frac{d}{dt}(\mathcal{I}'\omega^s) = \frac{d}{dt}(R\mathcal{I}R^T\omega^s) \quad (2-87)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}^3$ está referido al marco de referencia inercial. Por lo que desarrollando la ecuación 2-87 da como resultado:

$$\mathcal{I}'\dot{\omega} + \omega^s \times \mathcal{I}'\omega^s = \tau \quad (2-88)$$

A la ecuación 2-88 se le conoce como la *ecuación de Euler*

Las ecuaciones 2-88 y 2-85 describen la dinámica del cuerpo rígido en términos de una fuerza y torque aplicados en el centro de masa del objeto. Sin embargo, las coordenadas de los vectores de fuerza y torque no están referenciados al marco de referencia corporal, sino al espacial, por lo que hay una incongruencia en las coordenadas de los componentes. Entonces para corregir esa incongruencia se representan los vectores de fuerza, torque y velocidad como *twist* y *wrenches*. Por lo que para expresar la dinámica en función de *twists* y *wrenches*, se reescribe la segunda ley de Newton usando la velocidad corporal $v^b = R^T\dot{p}$ y la fuerza aplicada al cuerpo como $f^b = R^T f$, por lo que la ecuación resulta:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{p}) = \frac{d}{dt}(mRv^b) = Rm\dot{v}^b + \dot{R}mv^b$$

Premultiplicando por R^T :

$$m\dot{v}^b + \omega^b \times mv^b = f^b \quad (2-89)$$

La ecuación 2-89 es la segunda ley de Newton en coordenadas corporales.

De forma similar se reescribe la ecuación de Euler en términos de las coordenadas corporales. Usando $\omega^b = R^T\omega^s$ como la velocidad angular corporal y a $\tau^b = R^T\tau^s$ como el torque referido al marco de referencia corporal, la ecuación es:

$$\mathcal{I}\dot{\omega}^b + \omega^b \times \mathcal{I}\omega^b = \tau^b \quad (2-90)$$

La ecuación 2-90 es la ecuación de Euler en coordenadas corporales. Debe notarse que en el marco de referencia corporal, el tensor de inercia es constante, por lo que se utiliza \mathcal{I} y no $\mathcal{I}' = R\mathcal{I}R$.

Si se combinan las ecuaciones 2-89 y 2-90 las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido sujeto a un *wrench* F aplicado en el centro de masa y referido al marco de referencia corporal son:

$$F^b = \begin{bmatrix} m\mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}^b \\ \dot{\omega}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^b \times mv^b \\ \omega^b \times \mathcal{I}\omega^b \end{bmatrix} \quad (2-91)$$

A esta ecuación 2-91 se le conoce como la *ecuación de Newton-Euler* en coordenadas corporales. Esta ecuación da una descripción global de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido sujeto a un *wrench* externo.

Capítulo 3

Cinemática, dinámica y control de manipuladores robóticos

3.1. Introducción

La cinemática de un manipulador robótico describe la relación entre el movimiento de las articulaciones del manipulador y el movimiento resultante de los cuerpos rígidos de los que está conformado el robot.

Los manipuladores robóticos modernos están contruidos usualmente conectando diferentes eslabones utilizando juntas de revolución, prismáticas, helicoidales, cilíndricas, esféricas o planas [15]. Debido a que las juntas restringen el movimiento de los eslabones adyacentes a un subgrupo de $SE(3)$, las herramientas adquiridas en el capítulo anterior son de mucha utilidad y dan una base bien fundamentada para poder atacar el problema de la cinemática de los manipuladores robóticos. El elemento principal del análisis de la cinemática descansa en la *fórmula del producto de exponenciales*, la cual representa la cinemática de un mecanismo de cadena abierta, como el producto de las exponenciales de los *twists*. El producto de exponenciales provee una representación global y geométrica de la cinemática del manipulador que simplifica el análisis de una manera substancial.

Posteriormente se obtienen las ecuaciones de movimiento para un manipulador robótico serial y usando las estructuras presentes en la dinámica, se construyen leyes de control para el seguimiento asintótico de una trayectoria deseada. En la derivación de la dinámica se hace uso de forma explícita de los *twists* para representar la cinemática del manipulador y explorar el papel que juega la cinemática en las ecuaciones de movimiento. Se asume familiaridad con la dinámica y el control de sistemas físicos.

Se describe la dinámica de los manipuladores robóticos usando un conjunto de ecuaciones diferenciales

ordinarias no lineales de segundo orden que dependerán de la cinemática y las propiedades inerciales del robot. A pesar de ser posible obtener estas ecuaciones con la suma de las fuerzas y torques actuando en los eslabones de robot, se usa el tratamiento Lagrangiano. Esta técnica tiene la bondad de sólo requerir la energía potencial y cinética del sistema.

Ya obtenidas las ecuaciones de movimiento del manipulador, el problema inverso es tratado: el control del manipulador el cual involucra obtener las fuerzas y torques necesarios para lograr que el manipulador siga una trayectoria deseada. De tener el modelo perfecto del manipulador podríamos calcular de forma exacta las fuerzas y torques necesarios para lograr la trayectoria deseada, pero en la práctica, esto no es posible, por lo que se necesita utilizar una ley de control con retroalimentación que adapte y actualice los torques necesarios en respuesta a las desviaciones innatas del sistema para que de esa forma obtener la trayectoria deseada.

3.2. Cinemática de manipuladores robóticos

En esta sección se obtiene la fórmula del producto de exponenciales para ser utilizada en la cinemática directa de un manipulador serial arbitrario. Posteriormente, se discute el problema inverso de encontrar el conjunto de los ángulos de las juntas que provoca la posición deseada del órgano terminal.

3.2.1. Cinemática directa

La cinemática directa determina la configuración del órgano terminal dadas las configuraciones relativas de cada par adyacente de eslabones del robot. En esta tesis se enfoca en el estudio de los manipuladores seriales, aunque cabe destacar que todos los métodos vistos en esta tesis pueden ser utilizados para modelar y controlar manipuladores paralelos. Por convención se empieza a enumerar las juntas comenzando desde la base, es decir, el eslabón 0 será la base del manipulador y el eslabón n será el órgano terminal.

Se define a Q como el conjunto de todos los posibles valores que pueden tener las configuraciones de las juntas del manipulador, ya sean de revolución o prismáticas. El número de grados de libertad de un manipulador robótico es igual al número de juntas que éste presente. Se ligan dos marcos de referencias muy particulares a todo manipulador robótico serial. Uno de ellos es el marco S llamado marco de referencia de la base, el cual está ligado a la base del manipulador. El otro es el marco de referencia ligado al órgano terminal T .

Ahora se puede definir formalmente a la cinemática directa; dados los ángulos correspondientes a cada junta $\theta \in Q$, se desea conocer la configuración del marco de referencia T relativo al marco de referencia S . La cinemática directa es representada por la transformación g_{st} el cual transforma los ángulos de

cada junta en elementos de $SE(3)$, es decir: $g_{st} : Q \rightarrow SE(3)$.

La transformación de la cinemática directa es construida a través de la composición de los movimientos individuales de cuerpo rígido de cada eslabón del manipulador. Es decir:

$$g_{st}(\theta) = g_{sl_1}(\theta_1)g_{l_1l_2}(\theta_2)\dots g_{l_{n-1}l_n}(\theta_n)g_{l_nt} \quad (3-1)$$

La fórmula del producto de exponenciales

Una descripción más geométrica de la cinemática puede ser obtenida usando el hecho de que cada movimiento de los eslabones puede ser representado por un *twist* asociado al eje de revolución de la junta. Recordando que si ξ es un *twist*, entonces el movimiento de cuerpo rígido asociado está dado por:

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0) \quad (3-2)$$

Con base a lo anterior se define a S como el marco de referencia ligado a la base del manipulador robótico y T el marco de referencia ligado al órgano terminal. Se define a la *configuración de referencia* del manipulador como aquella configuración donde $\theta = 0$ y sea $g_{st}(0)$ la representación de la transformación entre los marcos de referencia T y S cuando el manipulador está en su configuración de referencia. Para cada junta se construye un *twist* ξ_i que corresponde al movimiento de tipo *screw* del i – *esimo* eslabón. Para una junta de revolución, el *twist* ξ_i está representado como:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} -\omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

donde $\omega_i \in \mathbb{R}^3$ es el vector unitario en la dirección del eje del *twist* y $q_i \in \mathbb{R}^3$ es cualquier punto sobre el eje. Para una junta prismática, el *twist* está representado como:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

donde $v_i \in \mathbb{R}^3$ es el vector unitario en la dirección de la traslación. Todos los vectores y puntos especificados están referidos al marco de referencia S .

Combinando los movimientos individuales de cada junta, la transformación de la cinemática directa $g_{st} : Q \rightarrow SE(3)$ está dada por:

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1\theta_1} e^{\hat{\xi}_2\theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n\theta_n} g_{st}(0) \quad (3-5)$$

Los *twists* ξ_i deben ser numerados de forma secuencial empezando desde la base hasta el órgano terminal, $g_{st}(\theta)$ da la configuración del órgano terminal independientemente del orden en las que son hechas las rotaciones y traslaciones. La ecuación 3-5 es conocida como la *fórmula del producto de exponenciales* para la cinemática directa del manipulador.

Área de trabajo de un manipulador

El *área de trabajo* de un manipulador está definida como el conjunto de todas las configuraciones posibles del órgano terminal. Si Q es el espacio de configuración del manipulador y $g_{st} : Q \rightarrow SE(3)$ es el mapeo de la cinemática directa, entonces el *espacio de trabajo* W está definido por el conjunto

$$W = \{g_{st}(\theta) : \theta \in Q\} \subset SE(3) \quad (3-6)$$

3.2.2. Cinemática inversa

La cinemática inversa consiste en obtener los valores de los ángulos de las juntas para poder alcanzar una configuración deseada del órgano terminal. Ésto quiere decir que dada la transformación de la cinemática directa $g_{st} : Q \rightarrow SE(3)$ y una configuración deseada $g_d \in SE(3)$ se desea resolver la ecuación

$$g_{st}(\theta) = g_d \quad (3-7)$$

para alguna $\theta \in Q$. La ecuación puede tener múltiples soluciones, una solución única o ninguna. La pregunta de cómo resolver la ecuación 3-7 es un área con una muy activa investigación. En particular, el problema radica en el número de soluciones a la ecuación 3-7 y de cómo pueden ser calculadas esas soluciones en tiempo real. Varias propuestas se aproximan al problema usando la teoría de eliminación clásica [10], la cual consiste en un procedimiento sistemático que de forma simultánea elimina $n - 1$ variables de un sistema de n polinomios con n variables para obtener un solo polinomio con una sola variable. Este procedimiento junto con muchos otros pueden ser consultados en [9].

3.2.3. Cinemática directa diferencial

Además de la relación entre los ángulos de las juntas y la configuración del órgano terminal, se necesita el conocimiento de la relación entre las velocidades de las juntas y las del órgano terminal. La herramienta que ayuda al estudio de estas relaciones es el *Jacobiano* del manipulador.

Tradicionalmente se describe al Jacobiano de un manipulador derivando la expresión de la cinemática directa. Ésto funciona cuando la cinemática directa está representada como una transformación $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, en cuyo caso el Jacobiano es la transformación lineal $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Sin embargo, al

usar la representación de la cinemática directa como $g : \mathbb{R}^n \rightarrow SE(3)$, el Jacobiano ya no puede ser obtenido de esta forma [8]. Para lidiar con este problema se utilizan las herramientas adquiridas para el movimiento de cuerpo rígido para escribir el Jacobiano en términos de los *twists*. La fórmula del producto de exponenciales nos da una descripción y obtención muy sencilla del Jacobiano del manipulador.

Velocidad del órgano terminal

Sea $g_{st} : Q \rightarrow SE(3)$ la representación de la cinemática directa de un manipulador. Si las juntas se mueven a lo largo de la curva $\theta(t) \in Q$, entonces el órgano terminal sigue la trayectoria descrita por $g_{st}(\theta(t)) \in SE(3)$. Por lo que la velocidad instantánea espacial del órgano terminal está descrita por el *twist*:

$$\hat{V}_{st}^s = \dot{g}_{st}(\theta)g_{st}^{-1}(\theta)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\hat{V}_{st}^s = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} g_{st}^{-1}(\theta) \right) \dot{\theta}_i \quad (3-8)$$

Se observa como la velocidad instantánea del órgano terminal depende linealmente de las velocidades de cada junta. En las coordenadas de *twist*, la velocidad del órgano terminal puede ser representada como:

$$V_{st}^s = J_{st}^s(\theta)\dot{\theta} \quad (3-9)$$

donde:

$$J_{st}^s = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} g_{st}^{-1}(\theta) \right) \quad (3-10)$$

Llamamos a la matriz J_{st}^s como el *Jacobiano espacial del manipulador*. Si se utiliza la fórmula del producto de exponenciales para representar la cinemática directa del manipulador, el Jacobiano espacial se obtiene como:

$$J_{st}^s(\theta) = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi'_2 & \dots & \xi'_n \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

donde:

$$\xi'_i = Ad_{(e^{\xi_1} \dots e^{\xi_{i-1}} \theta_{i-1})} \xi_i \quad (3-12)$$

[14] El Jacobiano representado de esta forma arroja propiedades muy interesantes:

1. ξ_i depende únicamente de los ángulos θ_1 a θ_{i-1}
2. Todos los *twists* están referidos al marco de referencia S , por lo que la estructura del Jacobiano puede ser obtenida por inspección.
3. Los Jacobianos pueden ser definidos para cualquier otro cuerpo dentro del mecanismo, tal que $V_{si}^s = J_i(\theta)\dot{\theta}$ donde

$$J_{si}^s = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (3-13)$$

Esto gracias a la propiedad 1.

El Jacobiano espacial también nos puede ayudar a obtener la velocidad instantánea de un punto q ligado a algún cuerpo del manipulador con respecto al marco de referencia S :

$$v_q^s = \hat{V}_{si}^s q^s = (J_{si}^s(\theta)\dot{\theta}) \wedge q^s \quad (3-14)$$

$$(3-15)$$

donde i representa el eslabón deseado, si éste fuera el órgano terminal entonces $i = t$.

Es posible también relacionar el Jacobiano espacial con el Jacobiano corporal con la ecuación 3-16

$$J_{st}^s(\theta) = Ad_{g_{st}(\theta)} J_{st}^b(\theta) \quad (3-16)$$

Análisis de la manipulabilidad usando el Jacobiano

La manipulabilidad del robot puede ser analizada gracias a las propiedades intrínsecas del Jacobiano como operador lineal; tal como el espacio columna, el kernel, el rango y las singularidades [4].

■ Espacio Columna de $J(\theta)$

El espacio columna representa todos los posibles *twists* que pueden ser desarrollados por el órgano terminal.

■ Kernel de $J(\theta)$

El *kernel* es el conjunto formado por aquellas configuraciones que cumplan con $V_{st}^s(t) = J(\theta)\dot{\theta} = 0$.

Por lo que la representación física del *kernel* son todas aquellas configuraciones que no cambian de forma alguna la configuración del órgano terminal

■ **Rango de $J(\theta)$**

Para obtener el rango de $J(\theta)$ se busca si hay dependencia lineal entre sus columnas [6]. El rango de $J(\theta)$ será siempre igual o menor a seis; por lo que se cumple que $rank(J(\theta)) + kernel(J(\theta)) = 6$. Si $rank(J(\theta)) < 6$, entonces el $kernel(J(\theta)) > 0$, ésto significa que existe una *singularidad cinemática*. El significado físico es que no importa que $\dot{\theta}$ se aplique, no habrá movimiento en cierta dirección, además de que si se aplicara un *wrench* en esa dirección (la relación entre el Jacobiano y los *wrenches* se explora en la siguiente sección de dinámica) no tendrá efecto en el mecanismo. Además de que en las configuraciones cercanas a las singularidades, las velocidades son extremadamente grandes. Por todas estas consecuencias físicas, se deben evitar al mayor grado posible las singularidades.

3.2.4. Cinemática inversa diferencial

El problema de la cinemática inversa diferencial es el cómo obtener las velocidades de las juntas $\dot{\theta}$ para mover el órgano terminal a una velocidad deseada. Para ello se parte de la definición de la velocidad del órgano terminal $V_{st}^s = J(\theta)\dot{\theta}$ donde $J(\theta) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$. Por lo general, el Jacobiano no es una matriz cuadrada, por lo que tenemos tres posibilidades:

1. Si $n = 6$ y $rank(J) = 6$, entonces $J(\theta)$ es una matriz cuadrada por lo que se puede obtener $\dot{\theta} = J^{-1}(\theta)V_{deseada}$.
2. Si $n < 6$, no todas las configuraciones pueden ser obtenidas.
3. Si $n > 6$ y $rank(J(\theta)) = 6$, entonces hay múltiples soluciones.

Si $n > 6$ se le denomina al manipulador como *redundante*, ya que tiene grados de libertad extra, además de que el Jacobiano espacial tiene un kernel no trivial. Sin embargo, tener un manipulador redundante tiene ventajas significativas, ya que tiene la libertad de moverse entre obstáculos, además de que podrán evitar las configuraciones singulares. Aunque tendrán la desventaja de tener más masa y complejidad. Para obtener la solución de la cinemática inversa diferencial para manipuladores redundantes se define la ecuación:

$$J(\theta)\dot{\theta}_* = V_{deseada}$$

Sabemos que para que $v \in \text{kernel}(J(\theta))$ se debe cumplir:

$$J(\theta)v = 0$$

Por lo que la ecuación a resolver se vuelve:

$$J(\theta)(\dot{\theta}_* + v) = J(\theta)\dot{\theta}_* + J(\theta)v = J(\theta)\dot{\theta}_* + 0 = J(\theta)\dot{\theta}_* = V_{deseada}$$

Entonces si $\dot{\theta}_*$ es una solución para $J(\theta)\dot{\theta}_* = V_{deseada}$, entonces también lo será para $\dot{\theta} + v$ para toda $v \in \text{kernel}(J(\theta))$

Con este planteamiento se puede elegir una solución de $\dot{\theta}$ que satisfaga una restricción, por ejemplo:

Minimizar $\|\dot{\theta}\|$:

$$\dot{\theta} = J^+(\theta)V_{deseada} = J^T(JJ^T)^{-1}V_{deseada} \quad (3-17)$$

Minimizar la energía $\frac{1}{2}\dot{\theta}^T M \dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = M^{-1}J^T(JM^{-1}J^T)^{-1}V_{deseada} \quad (3-18)$$

3.3. Dinámica de manipuladores robóticos

La gran mayoría de los manipuladores robóticos son impulsados por actuadores eléctricos, hidráulicos ó neumáticos, los cuales aplican torques o fuerzas, en el caso de actuadores lineales, en las juntas del manipulador. La dinámica de un robot manipulador describe como el robot se mueve en respuesta a las fuerzas o torques del actuador. Por simplicidad se asume que los actuadores no tienen dinámica propia y por lo tanto podrán desarrollar el torque necesario a las juntas del robot. Esta suposición ayuda a estudiar la mecánica inherente del manipulador sin preocuparse de cómo las juntas son actuadas.

3.3.1. Fuerzas en el órgano terminal

El Jacobiano puede ser utilizado para describir la relación entre los *wrenches* aplicados en el órgano terminal y los torques de las juntas. Esta relación es fundamental para entender como programar a un robot para interactuar con su entorno.

Para obtener la relación entre los *wrenches* y los torques, se calcula el trabajo asociado a la aplicación de un *wrench* a través de un desplazamiento del órgano terminal. Sea $g_{st}(\theta(t))$ la representación del movimiento del órgano terminal y el trabajo neto realizado a éste por el *wrench* F_t sobre un tiempo de intervalo $[t_1, t_2]$, entonces:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} V_{st}^b \cdot F_t dt \quad (3-19)$$

donde V_{st}^b es la velocidad del órgano terminal. El trabajo será el mismo que el realizado por todas las juntas, despreciando la fricción, por lo que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta} \cdot \tau dt = W = \int_{t_1}^{t_2} V_{st}^b \cdot F_t dt \quad (3-20)$$

Como esta relación debe cumplirse para cualquier intervalo de tiempo, los integrados deben ser iguales. Por lo que usando el Jacobiano para relacionar V_{st}^b y $\dot{\theta}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^T \tau &= \dot{\theta}^T (J_{st}^b)^T F_t \\ \tau &= (J_{st}^b)^T F_t \end{aligned} \quad (3-21)$$

Esta ecuación relaciona el *wrench* del órgano terminal con los torques de las juntas que son equivalentes a un *wrench* aplicado al órgano terminal. Al igual que en la velocidad del órgano terminal, el Jacobiano puede dar el torque equivalente de un *wrench* F sobre el cuerpo i como:

$$\tau = (J_{si}^b)^T F_t \quad (3-22)$$

3.3.2. Dinámica de manipuladores robóticos seriales

Para obtener las ecuaciones que describen el movimiento de los manipuladores robóticos seriales se hace uso del tratamiento de la cinemática vista en esta tesis, además se utiliza el método de Lagrange en función de los ángulos y velocidades angulares de las juntas del manipulador serial.

Para calcular la energía cinética de un manipulador robótico serial con n grados de libertad, se suma la energía cinética de cada eslabón. Para este propósito se define el marco de referencia L_i ligado al centro de masa de cada eslabón, por lo que la configuración del manipulador relativa a al marco de referencia

ligado a la base S está dada por:

$$g_{sl_i}(\theta) = e^{\xi^1 \theta_1} \dots e^{\xi^i \theta_i} g_{sl_i}(0) \quad (3-23)$$

Por lo que la velocidad corporal del centro de masa del eslabón i está dada por:

$$V_{sl_i}^b = J_{sl_i}^b(\theta) \dot{\theta} \quad (3-24)$$

Para simplificar la notación se usa $J_i = J_{sl_i}^b$. Con base en lo anterior, se puede representar a la energía cinética del i -ésimo eslabón como:

$$T_i(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} (V_{sl_i}^b)^T \mathcal{M}_i V_{sl_i}^b = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T J_i^T(\theta) \mathcal{M}_i J_i(\theta) \dot{\theta} \quad (3-25)$$

Donde \mathcal{M}_i es la matriz generalizada de inercia para el i -ésimo eslabón. Ahora la energía cinética total está dada por:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{i=1}^n T_i(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} \quad (3-26)$$

La matriz $M(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se le conoce como la *matriz de inercia del manipulador*, en función de los Jacobianos de los eslabones J_i . La matriz de inercia del manipulador está definida como:

$$M(\theta) = \sum_{i=1}^n J_i^T(\theta) \mathcal{M}_i J_i(\theta) \quad (3-27)$$

A continuación se obtiene la energía potencial del manipulador. Por lo que se define a $h_i(\theta)$ como la altura del centro de masa del eslabón i -ésimo. Por lo que la energía potencial está definida por:

$$V_i(\theta) = m_i g h_i(\theta) \quad (3-28)$$

donde m_i es la masa del i -ésimo eslabón y g es la constante de la gravedad. Por lo que la energía potencial total está dada por la suma de la contribución de cada eslabón:

$$V(\theta) = \sum_{i=1}^n V_i(\theta) = \sum_{i=1}^n m_i g h_i(\theta) \quad (3-29)$$

Por lo que combinando ambas para obtener el Lagrangiano, éste resulta:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} - V(\theta) \quad (3-30)$$

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas al substituir el Lagrangiano en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \Upsilon_i$$

Donde Υ_i representa el torque ejercido por el actuador y otras fuerzas generalizadas no conservativas actuando en el eslabón i -ésimo, por lo que el lagrangiano nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{\theta}_j \right) = \sum_{j=1}^n (M_{ij} \ddot{\theta}_j + \dot{M}_{ij} \dot{\theta}_j) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_i} &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j - \frac{\partial V}{\partial \theta_i} \end{aligned}$$

Reacomodamos los términos de las ecuaciones de Lagrange, de forma que quedan de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(\theta) \ddot{\theta}_j + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + \frac{\partial V}{\partial \theta_i}(\theta) = \Upsilon_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3-31)$$

Donde definimos a Γ_{ijk} como:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{ij}(\theta)}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}(\theta)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i} \right) \quad (3-32)$$

La ecuación 3-31 es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en función de los ángulos de las juntas del manipulador. Consiste de cuatro partes: las fuerzas inerciales, que dependen de la aceleración de las juntas; las fuerzas centrífugas y de Coriolis; energías potenciales de la forma $\frac{\partial V}{\partial \theta_i}$; las fuerzas externas Υ_i .

Las fuerzas externas pueden ser divididas en dos componentes. Sea τ_i el torque aplicado en la junta, entonces definimos a $-N(\theta, \dot{\theta})$ como todas las demás fuerzas que actúan en el i -ésimo eslabón, incluyendo fuerzas conservativas que provienen de la energía potencial, así como fuerzas disipativas como la fricción. Por ejemplo, si el manipulador sufre fricción viscosa en las juntas entonces N_i está definida como:

$$-N_i(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta_i} - \beta \dot{\theta}_i \quad (3-33)$$

Donde β es el factor de amortiguamiento. Otras fuerzas que actúen en el manipulador, como las fuerzas en el órgano terminal, pueden ser incluidas si se representa usando la transpuesta del Jacobiano, como se vió en las secciones anteriores.

Ahora se define la matriz de Coriolis $C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como:

$$C_{ij}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{ij}(\theta)}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}(\theta)}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k \quad (3-34)$$

La matriz de Coriolis del manipulador nos expresa las fuerzas centrífugas y de Coriolis en función de los ángulos de las juntas. Por lo que la ecuación 3-31 se puede reescribir como:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (3-35)$$

Donde τ es el vector de los torques de los actuadores y $N(\theta, \dot{\theta})$ incluye la gravedad y otras fuerzas que actúan en las juntas. Esta ecuación vectorial diferencial de segundo orden está en función de los torques de las juntas. Las matrices M y C , las cuales resumen las propiedades inerciales del manipulador, tienen propiedades muy importantes, las cuales son:

1. $M(\theta)$ es una matriz simétrica y positiva definida.
2. $(\dot{M} - 2C) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz antisimétrica.

3.4. Control de manipuladores robóticos

Ahora que ya podemos definir la cinemática y la dinámica de nuestro manipulador robótico en función de los ángulos, velocidades y torques de las juntas que conforman nuestro manipulador, ahora se encuentra con el problema del control de la posición para poder obtener las trayectorias deseadas. Se debe emplear un controlador robusto con respecto a los errores en las condiciones iniciales, al ruido en los sensores y a errores en el modelado.

Para poder definir la robustés de nuestro controlador se emplean las herramientas de la Teoría de Estabilidad de Lyapunov. Por lo que se da una breve introducción a estas herramientas. Esta tesis asume un conocimiento básico de la Teoría de Control.

3.4.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La estabilidad en el sentido de Lyapunov se entiende como un análisis de continuidad en torno de los puntos de equilibrio con respecto a su comportamiento dinámico. En este sentido, si se presenta un pequeño cambio en torno de una condición inicial cercana a un punto de equilibrio, ésta puede ser *estable* o bien, *inestable*. Cabe destacar que el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov sólo se puede realizar en puntos de equilibrios situados en el origen. Por lo que si se tiene un punto de equilibrio fuera del origen, se debe hacer un cambio de coordenadas para poder realizar este análisis.

Considere al sistema:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (3-36)$$

con puntos de equilibrio

$$f(x^*, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (3-37)$$

donde $x, x_0, x^* \in \mathbb{R}^n$.

Entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es estable al tiempo t_0 si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \forall t \geq t_0$, si ésto no se cumple, el punto de equilibrio no es estable [7].

Se dice que el punto de equilibrio es *asintóticamente estable* si:

1. Es estable.
2. $\exists \delta(t_0) > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta(t_0) \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Si δ está restringida entonces se le denomina *estabilidad local*, sino es así, entonces se le denomina *estabilidad global*

Se dice que $x = 0$ es un punto de equilibrio *exponencialmente estable* si:

$$\exists \alpha, \lambda > 0$$

tal que:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \quad (3-38)$$

Si δ no está en función del tiempo, entonces a todas las definiciones se les agrega la palabra uniforme.

Una función escalar $V(x, t)$ es positiva definida en una región Ω si:

$$v(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (3-39)$$

$$\forall t \geq t_0 \quad V(x, t) \geq V_0(x) \quad (3-40)$$

La función escalar $V(x, t)$ se dice que es decreciente si:

$$V(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (3-41)$$

$$\exists V_1(x) > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (3-42)$$

$$V(x, t) \leq V_1(x) \quad \forall t \quad (3-43)$$

Donde $V_1(x)$ es una función escalar invariante con el tiempo. Una función $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua se dice de *clase K* si:

$$\alpha(0) = 0 \quad (3-44)$$

$$\alpha(p) > 0 \quad \forall p > 0 \quad (3-45)$$

$$\alpha \text{ es decreciente.} \quad (3-46)$$

Una función $V(x, t)$ es localmente (globalmente) positiva definida en una vecindad B_{δ_0} si y sólo si existe una función α de clase *K* tal que:

$$V(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3-47)$$

$$V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) \quad \forall x \in B_{\delta_0} \quad (3-48)$$

Una función $V(x, t)$ es localmente (globalmente) decreciente si y sólo si existe $B \in K$ tal que:

$$V(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3-49)$$

$$V(x, t) \leq B(\|x\|) \quad \forall x \in B_{\delta_0} \quad (3-50)$$

Con base a las definiciones anteriores, se puede definir la estabilidad de un sistema.

Suponga una vecindad B_{δ_0} del punto de equilibrio $x = 0$, existe una función escalar $V(x, t)$ y una función $\alpha, \beta, \gamma \in K$ tal que para todo $x \neq 0$ y sean las siguientes condiciones:

$$V(x, t) \geq \alpha \|x\| > 0 \quad (3-51)$$

$$\dot{V}(x, t) \leq 0 \quad (3-52)$$

$$V(x, t) \leq \beta \|x\| \quad (3-53)$$

$$\dot{V}(x, t) \leq \gamma \|x\| \quad (3-54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha \|x\| = \infty \quad (3-55)$$

Se puede determinar el tipo de estabilidad siguiendo las siguientes reglas:

1. Si se cumplen las condiciones 3-51 y 3-52 se dice que el punto de equilibrio $x = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov.
2. Si cumplen las condiciones 3-51, 3-52, 3-53 entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es uniformemente

estable.

3. Si se cumplen las condiciones 3-51, 3-53, 3-54 se dice que el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable.
4. Si cumplen las condiciones 3-51, 3-53, 3-54 y 3-55; entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es global, uniforme y asintóticamente estable.

3.4.2. Control de posición y seguimiento de trayectoria

Ahora que se conoce la cinemática, la dinámica del manipulador robótico, y tenemos las herramientas para definir si nuestro controlador es robusto, se procede a plantear el problema de control de posición y seguimiento de trayectoria.

Partimos de la ecuación diferencial que describe al manipulador robótico:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (3-56)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^n$ representa el conjunto de configuraciones posibles de nuestro robot y $\tau \in \mathbb{R}^n$ denota los torques aplicados a las juntas. Entonces dada la trayectoria deseada θ_d y asumiendo que el modelo dinámico del manipulador robótico es perfecto, entonces es lógico asumir que $\theta(0) = \theta_d(0)$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_d(0)$, entonces se podría resolver el problema del seguimiento de trayectoria al resolver la siguiente ecuación:

$$\tau = M(\theta_d)\ddot{\theta}_d + C(\theta_d, \dot{\theta}_d)\dot{\theta}_d + N(\theta_d, \dot{\theta}_d) \quad (3-57)$$

Ya que θ y θ_d satisfacen a la misma ecuación diferencial y tienen las mismas condiciones iniciales, por lo que por el teorema de la unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales resulta que $\theta(t) = \theta_d(t)$ para todo $t \geq 0$. Este es un ejemplo claro de control de lazo abierto. Sin embargo, esta técnica no es robusta y no logra corregir los errores en las condiciones iniciales o los errores de modelado que pueden aparecer. Es decir, nunca se sabrá la posición exacta de nuestro manipulador. Por esta razón se debe dar una retroalimentación de estados para poder corregir los errores y situaciones mencionados. Sin embargo, la retroalimentación debe ser escogida de tal manera que la trayectoria real converga a la trayectoria deseada, es decir, si la trayectoria fuera sólo un punto, el sistema de lazo cerrado debe ser asintóticamente estable alrededor del punto deseado. Por ello se da la introducción a la estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Debe considerarse que el desempeño de las leyes de control dependen en el manipulador particular a estudiar. Por lo que se presentan dos leyes de control ampliamente usadas: *Torque calculado* y *Control PD*.

Torque Calculado

Considerando la ley de control de lazo abierto 3-57, dadas la posición y la velocidad del manipulador, cancelando todas las no linealidades y aplicando el torque exacto para vencer la inercia del actuador, se tiene:

$$M(\theta)\ddot{\theta} = M(\theta)\ddot{\theta}_d$$

Ya que $M(\theta)$ es positiva definida, tenemos:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_d \quad (3-58)$$

Y como en el caso del controlador de lazo abierto, las condiciones iniciales concuerdan con las de la trayectoria deseada, sin embargo, este controlador no corrige ningún error que se llegue a presentar, por lo que se le agrega un término de retroalimentación. Tomando en cuenta la linealidad de $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_d$ se propone la siguiente ley de control:

$$\tau = M(\theta)(\ddot{\theta}_d - K_v\dot{e} - K_p e) + C(\theta, \dot{\theta}) + N(\theta, \dot{\theta}) \quad (3-59)$$

donde $e = \theta - \theta_d$ y K_v y K_p son ganancias matriciales constantes. Con base en lo anterior, la dinámica del error puede ser representada como:

$$M(\theta)(\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e) = 0$$

Y como $M(\theta)$ es positiva definida:

$$\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e = 0 \quad (3-60)$$

Esta ecuación diferencial lineal describe la dinámica del error entre las trayectorias real y deseada. A esta ecuación se le conoce como la *ley de control del torque calculado*. Esta ley de control consiste de dos componentes:

$$\tau_{ff} = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta})$$

$$\tau_{fb} = M(\theta)(-K_v\dot{e} - K_p e)$$

donde:

$$\tau = \tau_{ff} + \tau_{fb}$$

El término τ_{ff} se le conoce como el componente *feedforward*, el cual provee el torque necesario para seguir la trayectoria nominal deseada. Y el término τ_{fb} se le conoce como el componente de *retroalimentación* y provee el torque de corrección para disminuir cualquier error en la trayectoria del manipulador.

■ **Estabilidad de la Ley de Control del Torque Calculado**

Si $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices positivas definidas, simétricas, entonces la ley de control aplicada al sistema resulta en un seguimiento exponencial de la trayectoria [10].

Controlador PD

Una ley de control PD, en su forma más simple tiene la forma:

$$\tau = -K_v \dot{e} - K_p e \tag{3-61}$$

donde K_v y K_p son matrices positivas definidas y $e = \theta - \theta_d$. Al no tener término integral, esta ley de control no resolverá el problema del error en estado permanente. Sin embargo, si se agrega el término integral, se introducen complicaciones ya que se necesita mantener la estabilidad y evitar el desbordamiento del integrador [8].

Sin embargo antes de agregar el término que se encargará de eliminar el error en estado permanente, se muestra que el controlador PD es estable.

- Si $\dot{\theta}_d = 0$ y $K_v, K_p > 0$, entonces el controlador PD aplicado al sistema hace que el punto de equilibrio $\theta = \theta_d$ sea globalmente estable [8].

Para eliminar el error en estado permanente se considera la versión modificada del controlador PD:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + N(\theta, \dot{\theta}) - K_v \dot{e} - K_p e \tag{3-62}$$

A este controlador se le conoce como el *controlador PD aumentado*.

■ **Estabilidad del controlador PD aumentado**

El controlador PD aumentado aplicado al sistema resulta en un seguimiento de la trayectoria exponencial si $K_v, K_p > 0$. Para mayor referencia consultar a [10].

Capítulo 4

Producto mecatrónico: manipulador robótico

4.1. Introducción

Un producto mecatrónico, a veces también denominado producto inteligente, es aquel cuya función recae y depende de la integración de los componentes mecánicos y electrónicos los cuales estarán coordinados por una arquitectura de control y que resolverá una necesidad en específico. Se espera que éste tenga la menor intervención posible del usuario para su funcionamiento. Por lo que el desarrollo de un producto mecatrónico depende de diversas áreas de la ingeniería para poder ser construido. Además se necesita plantear una metodología de diseño para poder llegar al producto que resuelva la necesidad de usuario. En la actualidad existen diferentes métodos de diseño que se pueden utilizar para atacar a una necesidad en concreto. Generalmente al atacar un problema que requiere una innovación o un rediseño de algún producto se busca hacerlo por módulos mutuamente excluyentes que al final se buscan integrar, lo cual lleva a un producto el cual tiene muchas complicaciones para ser realizado, debido a que la falta de interacción entre cada uno de ellos. Por lo que es necesaria una sinergia entre todos éstos para que de esa forma, con la retroalimentación de cada uno de ellos se llegue a un producto que logre resolver la necesidad inicial.

El problema de módulos trabajando de forma independiente se ha atacado en los métodos más recientes. Ahora se busca integrar los diferentes módulos que involucran el diseño en un equipo multidisciplinario en el cual se busca de forma activa la retroalimentación de cada una de las partes del equipo. Sin embargo, aún existen diferentes formas de atacar el problema de diseño basado en una metodología de integración, las cuales pueden estar enfocadas en diferentes metas, tales como el diseño para el costo de producción,

diseño para la calidad, diseño para Six Sigma, todos estos englobados en la metodología de *Design for X* [5]. Un enfoque multidisciplinario hoy en día es fundamental para el diseño de los productos que hoy en día se necesitan [17]. Sin embargo, a pesar de todas las metodologías que existen, muchas de éstas tienen aspectos en común que son importantes resaltar, los siguientes puntos son fundamentales para la innovación de un producto [12]:

1. Identificación de la Necesidad
2. Diseño Conceptual
3. Ingeniería de Detalle
4. Prototipos y Escalamiento
5. Producción
6. Comercialización

En esta tesis, se utiliza una metodología de diseño con módulos secuenciales, basada en los métodos propuestos por los profesores Dr. Ramírez [12] y Dr. Dorador [5] de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. En este método se busca la integración entre diferentes las diferentes áreas de la Ingeniería para llegar a un producto mecatrónico. Se ejemplifica esta metodología con el diseño del manipulador robótico.

Los módulos creados para el desarrollo del producto mecatrónico son los siguientes:

- Diseño Conceptual
 1. Definición el Objetivo.
 2. Necesidades del cliente.
 3. Lista de especificaciones.
 4. Pesos ponderados (Matrices de decisiones).
 5. Lluvia de ideas.
 6. Selección de la solución más adecuada.
- Diseño Mecánico
 1. Bosquejo a mano alzada.
 2. Dibujos en CAD.
 3. Simulación cinemática y dinámica.

4. Simulación de esfuerzos.
 5. Definición y obtención de las propiedades mecánicas del producto.
 6. Elaboración de planos para la manufactura del producto.
- Análisis del producto mecatrónico: Manipulador Robótico ¹
 1. Análisis Cinemático.
 2. Análisis Dinámico.
 - Diseño eléctrico
 1. Definición de las necesidades eléctricas del producto.
 2. Definición de los actuadores.
 3. Definición de la fuente de poder.
 4. Definición de la circuitería eléctrica.
 - Diseño del controlador
 1. Definición del Controlador.
 2. Respuesta del sistema al controlador propuesto.
 - Diseño electrónico
 1. Definición de las necesidades electrónicas del producto.
 2. Definición de los sensores.
 3. Definición del Microcontrolador.
 4. Programación de los algoritmos.
 - Presentación del Prototipo.

4.2. Diseño conceptual

4.2.1. Definición del objetivo

Lo primero que debe realizarse es la definición del producto que se realizará. En este caso, el producto a realizarse es un manipulador robótico serial para fines didácticos. La razón por la cual se decidió por este producto es porque en el plan de estudios de la carrera de Mecatrónica, en la asignatura de Robótica,

¹Este análisis se explorará en el capítulo 5.

se contempla un laboratorio para sesiones prácticas. Sin embargo, a pesar de contar con equipo, la mayoría no se encuentra en buen estado, por lo que no se cuenta con un laboratorio propio para la materia. Por lo que surge la necesidad de crear equipo a un precio accesible para poder equipar un laboratorio, que no sólo sirva para la materia de Robótica, sino que también pueda ser utilizado por otras materias, como sería la materia de Instrumentación, en donde se trabajarán las señales de los diferentes sensores del manipulador y así aplicar el conocimiento adquirido en clase. También se puede utilizar en las diferentes materias de control, ya que al ser el manipulador de arquitectura abierta, se podrá manipular con diferentes equipos y configuraciones que ayudarán a los estudiantes a ver de forma práctica la teoría adquirida en estas materias. Y esto es sólo por mencionar algunos ejemplos.

Ahora que se sabe que producto a realizar, se define el mercado. El mercado para este producto mecatrónico está representado por los profesores de la materia de Robótica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Ahora se debe consultar al cliente para poder conocer sus necesidades y así tener una referencia para poder diseñar el producto que más se adecúe a sus necesidades y las resuelva de forma más óptima. Por lo que se busca al jefe del Departamento de Ingeniería Mecatrónica, el Dr. Jesús Manuel Dorador, y se le presenta el proyecto. El Dr. Dorador acepta y aprueba el proyecto, asignando un presupuesto para su realización. Posteriormente, se concerta una cita con los profesores de la materia de Robótica: el Ing. Patricio Martínez Zamudio, el Ing. Erik Peña Medina, el Ing. Sergio Esteves Rebollo y al M.C. Ernesto Riestra para poder conocer sus necesidades.

4.2.2. Necesidades del cliente

En la cita con los profesores, se les presenta la idea de realizar un manipulador robótico para ayudar a la docencia de la materia de Robótica. Por lo que se les pregunta que requieren en un manipulador serial. Los profesores expresan lo que, a su parecer, es necesario para que el producto logre el objetivo de apoyo de la docencia. Después de recopilar las diferentes necesidades que expresadas, se extraen las más importantes, las cuales son:

- Cinco grados de libertad.

Un cuerpo aislado puede desplazarse libremente en un movimiento que se puede descomponer en 3 rotaciones y 3 traslaciones geométricas independientes. Para un cuerpo unido mecánicamente a otros cuerpos, algunos de estos movimientos elementales desaparecen. Se conocen como grados de libertad los movimientos independientes que permanecen [3].

- Robot Serial.

Un robot serial está diseñado como una serie de eslabones conectados por articulaciones acciona-

das por un motor que se extienden desde una base a un órgano terminal. A menudo tienen una estructura de brazo antropomórfico descrito como un "hombro", un "codo", y una "muñeca" [10].

- Tipo KUKA

Los robots KUKA están equipados con un panel de control con joystick de seis grados de libertad integrado y una pantalla. Este mueve al manipulador, guarda posiciones o módulos, funciones y listas de datos que pueden ser creadas y procesadas.



Figura 4-1: Robot tipo KUKA

- Modular

Modular se refiere a un diseño el cual sus piezas puedan ser intercambiables para poder de esa forma expandir las funciones del producto.

- De arquitectura abierta.

Arquitectura abierta se refiere a que el manipulador es capaz de ser controlado con las diferentes interfaces disponibles. Es decir, que se pueda programar con una computadora sin importar el sistema operativo o el lenguaje de programación que se decida utilizar.

- Espacio de trabajo de 80 [cm] máximo.

- Capacidad de carga de 400 [g] máxima.

- Bajo costo.

- Buena repetitividad.

- Alta resolución.

Estas necesidades se agrupan en tres bloques. En cada bloque se agrupan las necesidades del cliente, como se muestra en la tabla 4-1. Con base en la organización de las necesidades del cliente, se definirán las especificaciones de cada bloque.

Cuadro 4-1: Necesidades agrupadas en bloques

Bloque	Necesidad
Material	Durabilidad Resistencia Facilidad de Manufactura Ligereza Precio
Motores	Torque necesario Necesidad de encoder Precisión Baja corriente nominal Necesidad de transmisión Precio
Transmisión	Disponibilidad de piezas comerciales Simplicidad de uso y mantenimiento Precisión Precio

4.2.3. Lista de especificaciones

Ahora que ya se tienen las necesidades organizadas, podemos empezar a definir las especificaciones que debe tener cada bloque. Para ello se utilizan las tablas de:

- Materiales ^{2 3}
- Motores ⁴
- Transmisión ⁵⁶

Cuadro 4-2: Especificaciones de materiales

Material	Densidad [$\frac{kg}{m^3}$]	Módulo de Elasticidad [GPa]	Esfuerzo a la Fluencia [MPa]	Esfuerzo Último [MPa]	Precio USD
Acero 1018	7850	207	220	341	38.60
Acero inoxidable	7850	190	276	568	150.12
Aluminio 2024	2600	71.7	296	446	50.28
Latón	8400	106	106	200	622.08
Acrílico	960	2.1	-	28	20

²Las propiedades mecánicas fueron obtenidas de [16]

³Para el precio de los materiales se optó como referencia una lámina de 3/16" (25.58 [mm]) de espesor y de 12 x 12 [ft] y las páginas de referencia: www.metalsdepot.com y www.professionalplastics.com

⁴Las características y precios fueron obtenidos de: www.pololu.com y www.automationexpress.com

⁵Asumiendo la necesidad de transmisión

⁶El precio de las poleas fueron obtenidos de www.sdp-si.com

Los materiales que se consideran son escogidos debido a sus particulares propiedades físicas y mecánicas. Además de que un factor importante también es el precio. Debido a la dureza y resitencia se escoge al acero y al latón. El aluminio es considerado debido a su relativo bajo peso, su facilidad de ser maquinado y su buena dureza y resistencia. El acrílico es considerado debido a su bajo costo y fácil adquisición y maquinado.

Cuadro 4-3: Especificaciones de los motores

Motor	Torque Pico [oz-in]	Voltaje [V]	Precio USD
Ivenscience i00600	3200	12	289
GSW S777	583	6	59.95
Pittman c/encoder	2585	24	290
Pittman s/encoder	2585	24	166

Los motores mostrados son escogidos por los torques pico que desarrollan, los cuales después del análisis dinámico, resultan ser suficientes. El cálculo de estos torques será explorado en el siguiente capítulo de esta tesis. Además se considera la relación torque/precio y la facilidad de uso y necesidad de transmisión y sensores adicionales que implica el uso de un determinado motor.

Cuadro 4-4: Especificaciones de Poleas Dentadas

Polea	Paso	Número de dientes	Precio USD
P1	XL	23	24
P2	XL	12	10
P3	L	12	13.23
P4	L	48	35.65

Las medidas de las poleas y su número de dientes son tomados en referencia a la transmisión de potencia que tiene el manipulador robótico modelo Scorbot. Al igual que en el caso de las poleas, los

Cuadro 4-5: Especificaciones de Engranés

Engrane	Número de Dientes	Paso Diametral	Precio
E1	72	24	32.42
E2	18	24	14
E3	120	24	89
E4	24	24	15.95

diámetros de paso y número de dientes son elegidos tomando como referencia a la transimisión de potencia del modelo Scorbot.

Ahora que se tienen las especificaciones de las diferentes alternativas se procede a realizar las matrices de decisiones, las cuales ayudan a escoger la mejor opción para cada bloque.

4.2.4. Pesos ponderados

Para evaluar y seleccionar la alternativa final se desarrolla una comparación entre las diferentes especificaciones de cada módulo y se selecciona a la que presente mayor cumplimiento frente a las funciones requeridas. De acuerdo a cada criterio se analiza si cada una de las alternativas cumple con el objetivo propuesto en cada criterio, asignándole un valor ponderado el cual mide la importancia relativa de cada una de ellas. Este procedimiento es conocido como *Pesos Ponderados*. Este procedimiento es importante para la toma de decisiones, debido a que se escoge el sistema que más satisfaga las necesidades. A pesar de que estas matrices nos dan información muy relativa basada en datos obtenidos de las especificaciones, estas matrices dan una idea más clara hacia donde dirigir el producto. Por lo que usando estas matrices se puede hacer ahora hacer una lluvia de ideas, en la cual se busca el producto que más se acerca a cubrir óptimamente las necesidades del cliente.

Ahora, usando el método de Pesos Ponderados, se dispone a evaluar las opciones que tiene cada bloque, tomando en cuenta las especificaciones que se mostraron, y de esa manera poder ponderar entre cada una de éstas. La escala utilizada pondera del *uno* al *cinco*, donde el 1 representa el menor desempeño y el 5 el mayor.

Cuadro 4-6: Matriz de decisión para los materiales

Material	Durabilidad	Resistencia	Facilidad de Manufactura	Ligereza	Precio	Suma
Aluminio 2024	4	4	5	4	3	20
Aluminio 1018	5	5	3	3	4	20
Acero inoxidable	5	5	3	3	3	19
Latón	4	5	3	1	1	14
Acrílico	2	2	5	5	5	19

Se puede observar en el cuadro 4-6 como los mejores candidatos son los aluminios 2024 y 1018, sin embargo a pesar de que el acrílico y el acero inoxidable tienen un desempeño muy cercano a los aluminios, estos no se escogen debido a que el acrílico es muy endeble y el acero muy pesado.

Se puede observar en la tabla 4-7 como los mejores candidatos son los servomotores Ivenscience y GSW S777, debido a su alto torque, bajo costo.

Se puede observar en la tabla 4-8 como, si se considera una etapa de transmisión de potencia, lo más ideal será utilizar un juego de poleas dentadas para la transmisión de la potencia de los motores a los eslabones.

Cuadro 4-7: Matriz de decisión de los motores

Motor	Torque	Precisión	Facilidad de uso	Necesidad de Encoder	Potencia requerida	Precio	Suma
Ivenscience i00600	5	5	5	5	4	2	26
GSW S777	2	5	5	5	5	5	22
Pittman c/encoder	4	5	5	5	2	2	23
Pittman s/encoder	4	1	1	1	2	3	12

Cuadro 4-8: Transmisión

Tipo de Transmisión	Disponibilidad	Simplicidad	Precisión	Precio	Suma
Poleas	5	5	3	4	17
Engranajes y Poleas tipo Scorbot	3	3	5	1	12
Diseño total de la transmisión	5	2	5	2	14

4.2.5. Lluvia de ideas

Después de observar y tomar en cuenta los datos obtenidos de las matrices de decisión en la etapa de *Pesos Ponderados*, se realiza una lluvia de ideas, la cual arroja tres opciones para el producto mecatrónico a desarrollar:

Opción 1: El material a utilizar es aluminio. Los motores a utilizar son un motor Pittman sin enconder para proporcionar la rotación del manipulador, un servomotor Ivenscience i00600 para la junta del hombro y otro para el codo y un servomotor GSW S777 para la muñeca del manipulador, cada actuador colocado en el eje del eslabón correspondiente. Se utilizan los servomotores debido a su facilidad de uso y precisión, ya que pueden ser controlados con señales RC, además de que al tener un encoder integrado se ahorra la adquisición y uso de encoders adicionales. No se utiliza transmisión de potencia debido a que el par que desarrollan los motores es suficiente como para mover los eslabones. Todo esto en conjunto facilita el análisis cinemático y dinámico del manipulador, además de que provoca un controlador mucho más fácil de diseñar e implementar. Procurando una innovación sobre otros manipuladores ya disponibles, se coloca en cada eslabón en su centro de masa un acelerómetro para poder realizar mediciones de aceleración inercial, la cual ayudará a la docencia debido a que nos

permitirá conocer experimentalmente los perfiles de aceleración, velocidad y posición de cada junta y del órgano terminal.

Opción 2: El material a utilizar es igualmente el aluminio. Los motores a utilizar son los Pittman sin encoder para mover los eslabones y la rotación. Se utilizaría una transmisión de potencia basada en poleas dentadas con una relación 4:1 para aumentar el par proporcionado por los motores Pittman. Al no tener encoders integrados los motores, éstos necesitan la adquisición y uso de 4 encoders, uno para cada eslabón del manipulador. Al igual que la *Opción 1*, se propone el uso de acelerómetros para fines didácticos.

Estas dos opciones son las que resultaron de la lluvia de ideas realizada para este producto mecatrónico. Al tener estas dos opciones, éstas se presentaron a los profesores de Robótica y al Dr. Dorador para recibir retroalimentación.

4.2.6. Selección de la solución más adecuada

Después de la presentación de las dos opciones al cliente, y argumentando los *pros* y *contras* de cada una de ellas; se llega a la conclusión de que la *opción 1* es la más viable, por lo que se designa a esta opción como la más adecuada. Ahora, decidida la opción ganadora, se procede a llevar a cabo la realización del producto mecatrónico.

4.3. Diseño mecánico

4.3.1. Bosquejo a mano alzada

Después de elegir la opción más viable y discutir y retroalimentar la decisión con el cliente, se dispone al diseño mecánico del manipulador; tomando en cuenta las especificaciones del módulo anterior. La figura 4-2 muestra el primer planteamiento del manipulador. Los demás bosquejos de cada parte del manipulador se pueden observar en el Apéndice A.

Los bosquejos ayudan a tener una idea más clara de como quedará el producto. Además de que en esta etapa es cuando se tiene la mayor creatividad. Ya después de realizar los bosquejos y llegar al diseño que mejor resuelva la necesidad del cliente, ahora debe aplicarse formalidad en medidas y formas. Para ello nos apoyamos en las herramientas CAD disponibles

4.3.2. Dibujos en CAD

La figura 4-3 muestra el ensamble del manipulador robótico completo. Se observa como las medidas y restricciones de posición entre cada eslabón y componente del manipulador están bien definidas. Es en

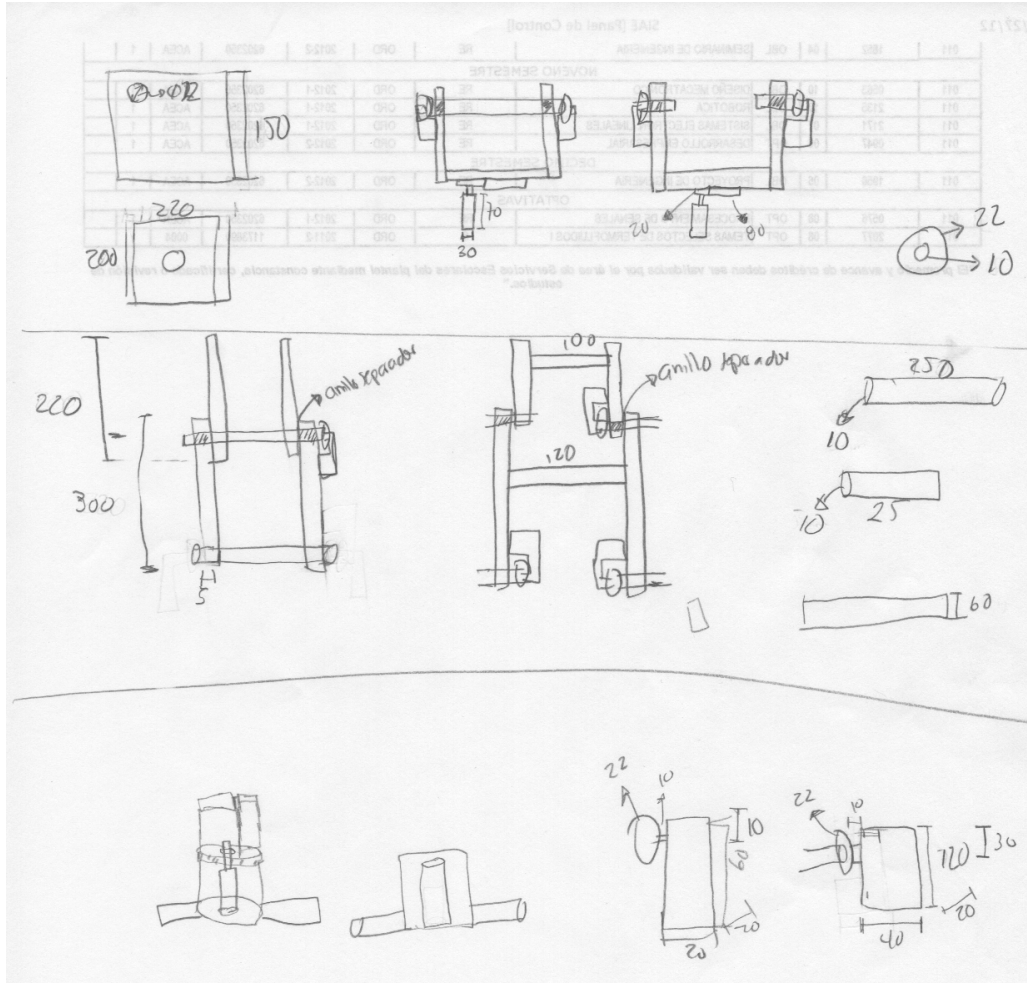


Figura 4-2: Bosquejo

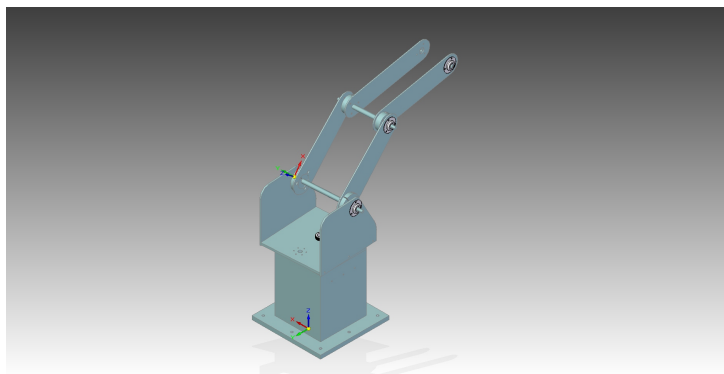


Figura 4-3: Ensamble del Manipulador Robótico

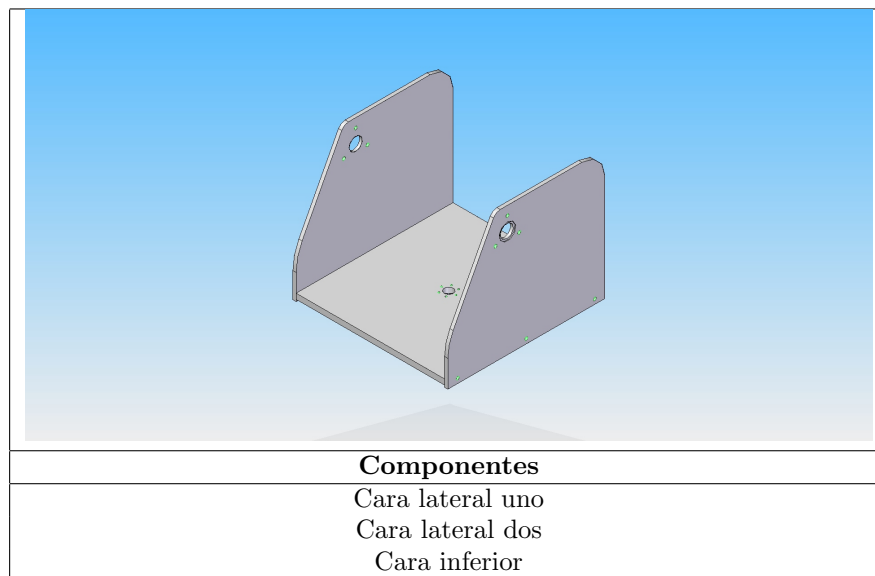
este proceso donde se da formalidad a los bosquejos, dotándolos de medidas definitivas y observando si los componentes diseñados y concebidos durante los bosquejos realmente se ajustan al modelo.

Para la realización de los dibujos en CAD del manipulador se utiliza el programa *Unigraphics NX*. Con este programa se dibujan los diferentes componentes del manipulador, además de que se revisa la coherencia de medidas y restricciones entre los componentes utilizando la herramienta de ensamble incluida en todos los programas de CAD.

Por lo que el primer paso que se realiza es llevar los bosquejos al ambiente CAD y determinar las medidas y restricciones. Por lo que cada componente debe ser dibujado.

Las tablas 4-9 y 4-10 muestran los subensambles utilizados para la realización del manipulador junto con los componentes de los que están compuestos. Los dibujos individuales de cada parte se pueden observar en el anexo.

Cuadro 4-9: Subensamble de la junta de revolución de la base (hombro)

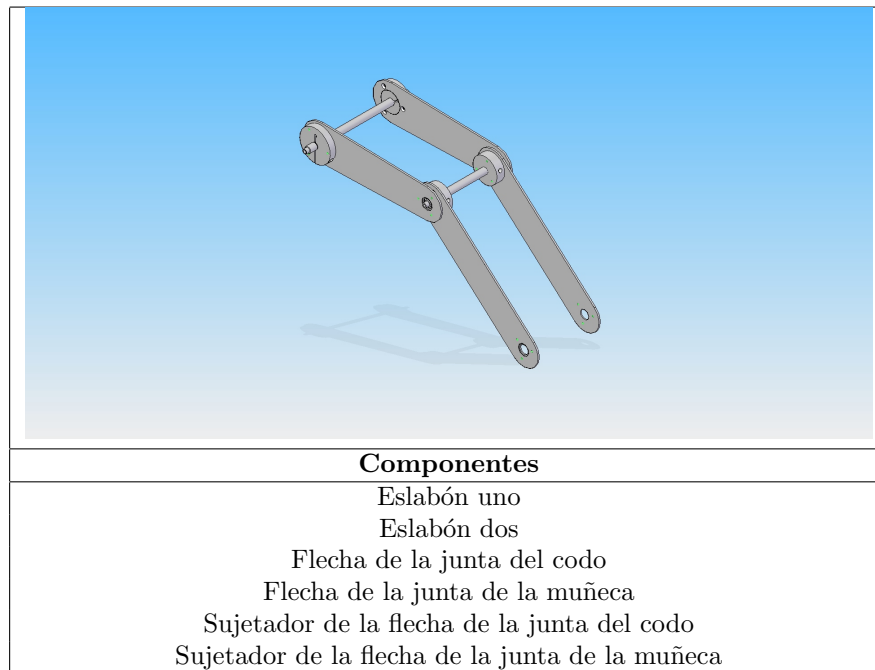


Los ensambles mostrados en las tablas 4-9 y 4-10 muestran los dos subensambles que se realizan para comprobar la coherencia de medidas y restricciones entre las piezas diseñadas. Ya con las piezas puestas en su posición y al ver que el ensamble completo, mostrado en la figura 4-3 no tiene problemas geométricos; se procede ahora a efectuar las simulaciones mecánicas con las herramientas CAE del programa *Unigraphics NX* para poder aproximar las propiedades mecánicas del producto mecatrónico.

4.3.3. Simulaciones CAE

La Ingeniería asistida por computadora o Computer Aided Engineering (CAE) es el conjunto de programas informáticos que permiten analizar y simular los diseños de ingeniería realizados en la compu-

Cuadro 4-10: Subensamble de las juntas del brazo (codo y muñeca)



tadora para valorar sus características, propiedades, viabilidad y rentabilidad. Su finalidad es optimizar su desarrollo y reducir al máximo las pruebas para la obtención del producto deseado.

Los principales módulos del CAE son:

- Análisis Cinemático.
- Análisis por elemento finito o finite element method(FEM).
- Maquinado por máquinas de control numérico o CNC.

Para obtener el desarrollo que mejor resuelva las necesidades del diseño mecánico se procede a emplear las herramientas CAE que se encuentran en el programa *Unigraphics NX*. En específico los módulos de análisis cinemático y análisis por elemento finito.

Para poder aplicar las simulaciones se necesita tener un ensamble del diseño a estudiar. Debido a la simetría del manipulador y la homogeneidad del material del que está hecho el producto, se toma simplemente la mitad del manipulador. Los resultados obtenidos mostrarán aproximadamente la mitad de los resultados obtenidos usando el modelo completo.

Utilizando el ensamble de la figura 4-4 para las simulaciones de CAE se procede a mostrar los resultados obtenidos de las simulaciones cinemáticas y de método finito.

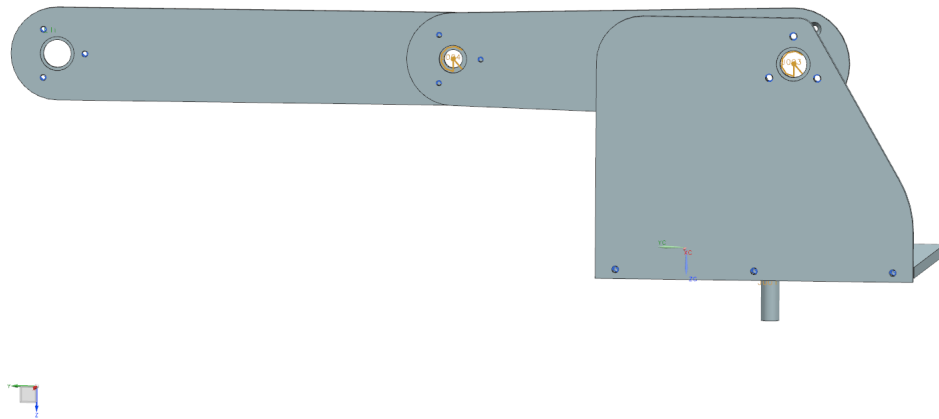


Figura 4-4: Ensamble utilizado para las simulaciones CAE

Resultados del análisis cinemático

Las dos juntas de interés del manipulador se pueden observar en la figura 4-4 como las juntas $J003$ y $J004$, las cuales corresponden la junta del hombro y del codo, respectivamente. Usando el módulo de análisis cinemático de *Unigraphics NX* se obtienen las gráficas de las fuerzas y los momentos de reacción que sufre cada junta. Para la simulación se toma en cuenta un movimiento de $[0, \frac{\pi}{2}]$ con velocidad angular unitaria para cada junta, tomando en cuenta las propiedades mecánicas obtenidas por los dibujos realizados en CAD. Se toma en cuenta la gravedad y una carga de 800 [g] en el extremo de la última junta.

■ Fuerzas de reacción de la junta del hombro.

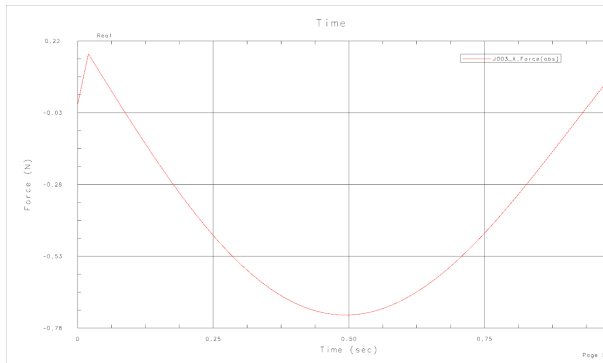


Figura 4-5: Fuerza \vec{R}_x

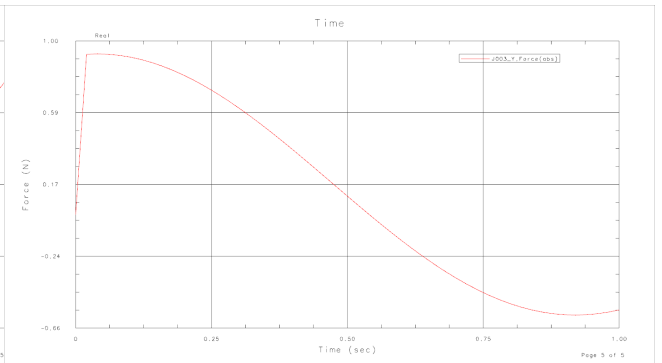


Figura 4-6: Fuerza \vec{R}_y

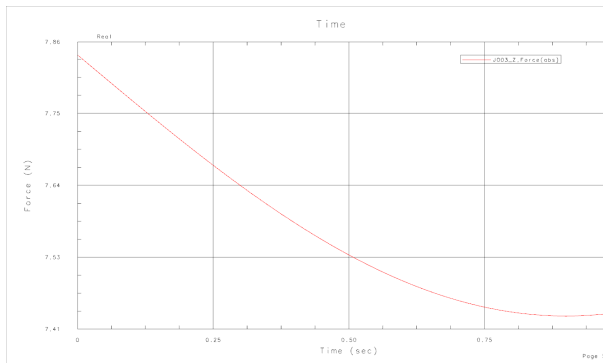


Figura 4-7: Fuerza \vec{R}_z

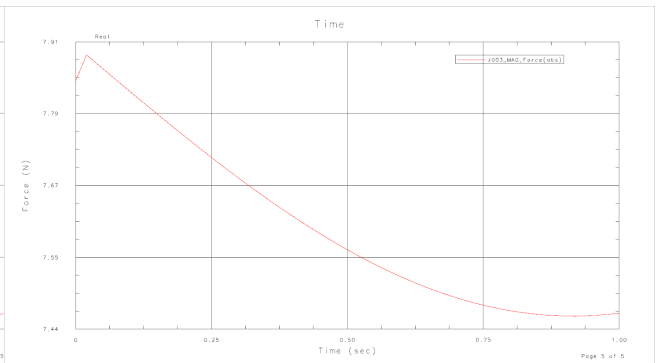


Figura 4-8: Magnitud de \vec{R}

Se puede observar como las fuerzas de reacción de la junta en la dirección x son prácticamente despreciables. Sin embargo, en la dirección z se encuentra la reacción de mayor importancia. Ésto es debido a la fuerza provocada por la aceleración gravitacional que sufre la junta. Ésta juega un papel muy importante, además del peso simulado al final de la junta. La reacción en la junta y se debe a la carga de 800 [g].

■ Momentos de reacción de la junta del hombro.

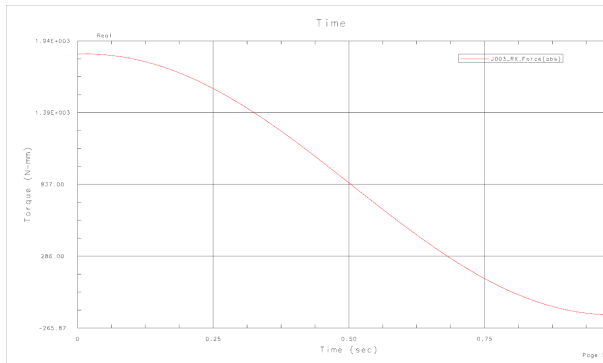


Figura 4-9: Momento \vec{R}_x

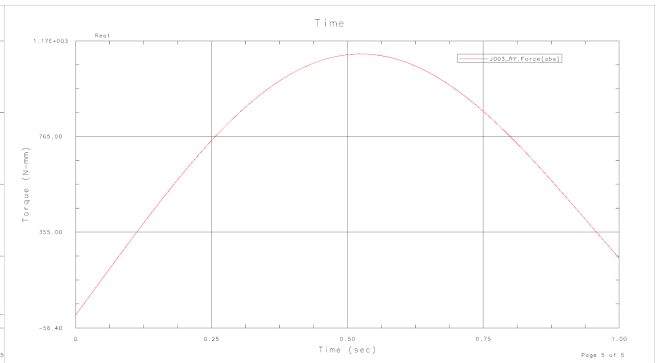


Figura 4-10: Momento \vec{R}_y

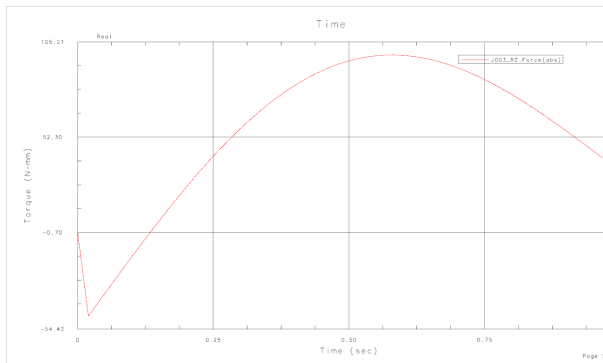


Figura 4-11: Momento \vec{R}_z

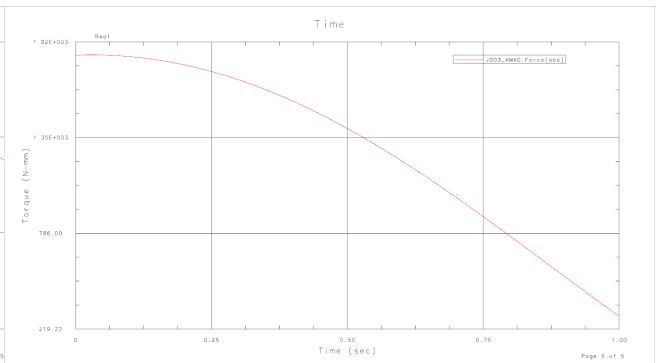


Figura 4-12: Magnitud de \vec{M}

Se observa como el mayor momento de reacción que sufre la junta se encuentra alrededor del eje x , ésto debido a que es alrededor de ese eje que rota la junta, de acuerdo con el sistema de coordenadas de la simulación. La reacción alrededor del eje y se debe al momento que debe ejercerse para evitar que el eslabón se pandee. Mientras que la reacción alrededor del eje z es despreciable debido a la geometría del eslabón, ya que el momento de inercia del eslabón alrededor de ese eje es despreciable.

■ Fuerzas de reacción de la junta del codo.

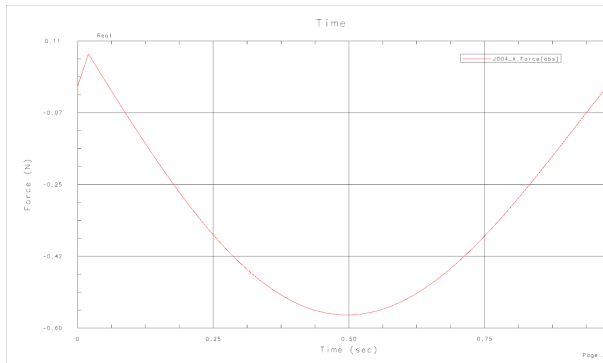


Figura 4-13: Fuerza \vec{R}_x

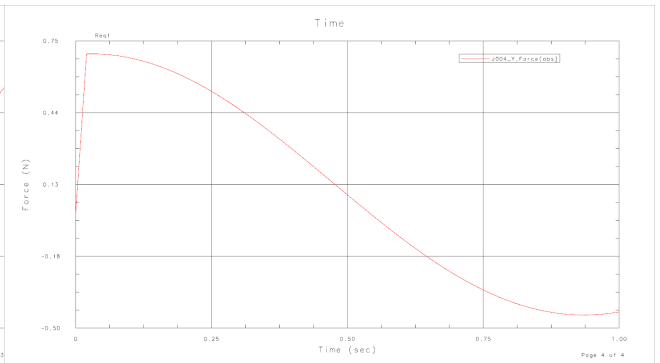


Figura 4-14: Fuerza \vec{R}_y

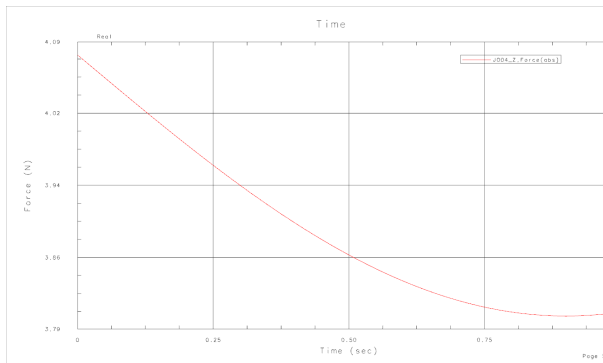


Figura 4-15: Fuerza \vec{R}_z

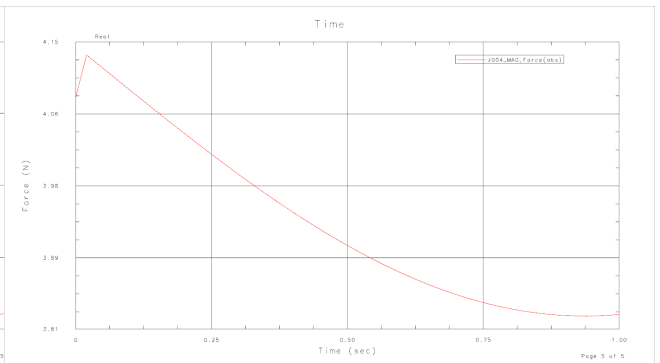


Figura 4-16: Magnitud de \vec{R}

Se observa, como en el caso anterior, que las reacciones en los ejes x y y son mínimas. La reacción con la mayor magnitud se encuentra en el eje z debido a la fuerza ejercida por la aceleración de la gravedad y la carga simulada. Se observa que la fuerza de reacción es de menor magnitud debido a que el eslabón es más pequeño y tiene menor masa.

- Momentos de reacción de la junta del codo.

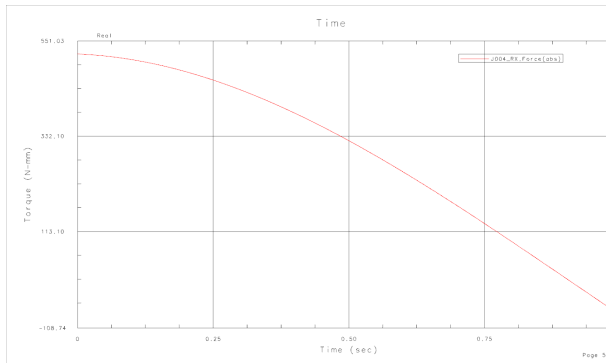


Figura 4-17: Momento \vec{R}_x

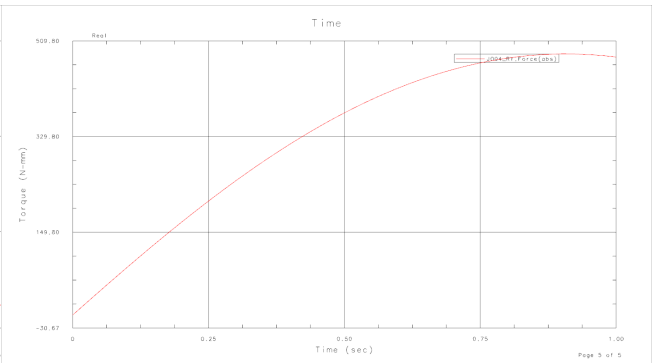


Figura 4-18: Momento \vec{R}_y

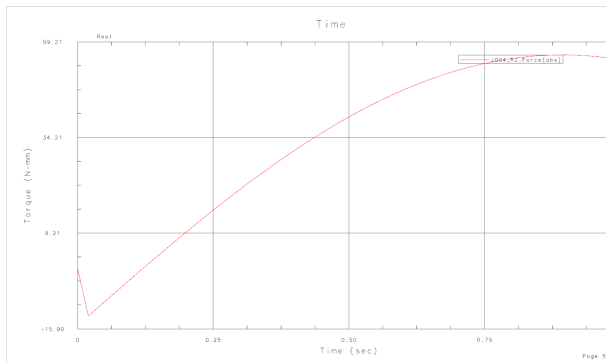


Figura 4-19: Momento \vec{R}_z

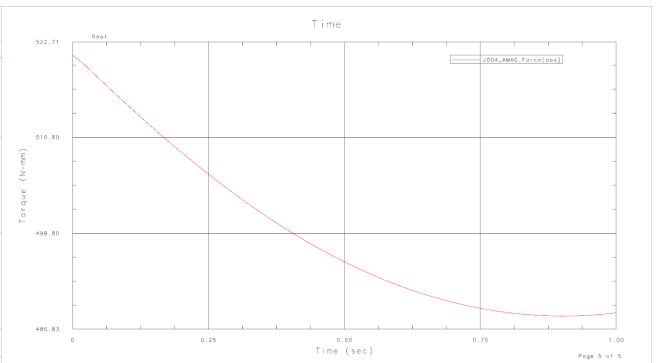


Figura 4-20: Magnitud de \vec{M}

Al igual que en caso anterior, la magnitud del momento de reacción mayor se encuentra en el eje de revolución de la junta, el eje x . Sin embargo, se puede observar que el momento necesario para evitar que el eslabón se pandee aumentó su magnitud de manera considerable, ésto es debido a que el brazo del momento, visto desde la base, aumenta casi el doble, por lo que resulta obvio que el momento también aumente.

Con base en los resultados obtenidos de las simulaciones, se toma ahora el intervalo de tiempo donde se observan las magnitudes mayores y se usan esos datos de momentos y fuerzas de reacción, además de las propiedades mecánicas obtenidas del diseño en CAD, para realizar la simulación por elemento finito para conocer los esfuerzos y deformaciones resultantes de las reacciones sobre los eslabones.

Resultados del análisis por elemento finito

Con base en los resultados obtenidos en las simulaciones cinemáticas mostradas en el capítulo anterior, se realizan las simulaciones CAE del modelo. En estas simulaciones, lo que se estudia es la deformación que sufre el modelo debido a las diferentes cargas y fuerzas de reacción que éste sufre. Además, se visualiza la magnitud y la ubicación de los esfuerzos mecánicos que sufre el modelo. Para obtener los resultados de deformación y de los esfuerzos mecánicos se observa con cautela los resultados obtenidos en las simulaciones cinemáticas y exportar los datos del tiempo en el que el momento y las fuerzas de reacción son las de mayor magnitud. Estos datos exportados son los que se utilizan para realizar la simulación por elemento finito. El tiempo que resulta con las mayores magnitudes es al inicio del movimiento, cuando el mecanismo rompe el reposo.

■ Deformación

Se observa en la figura 4-24 como la deformación se concentra en las zonas donde se actúan las

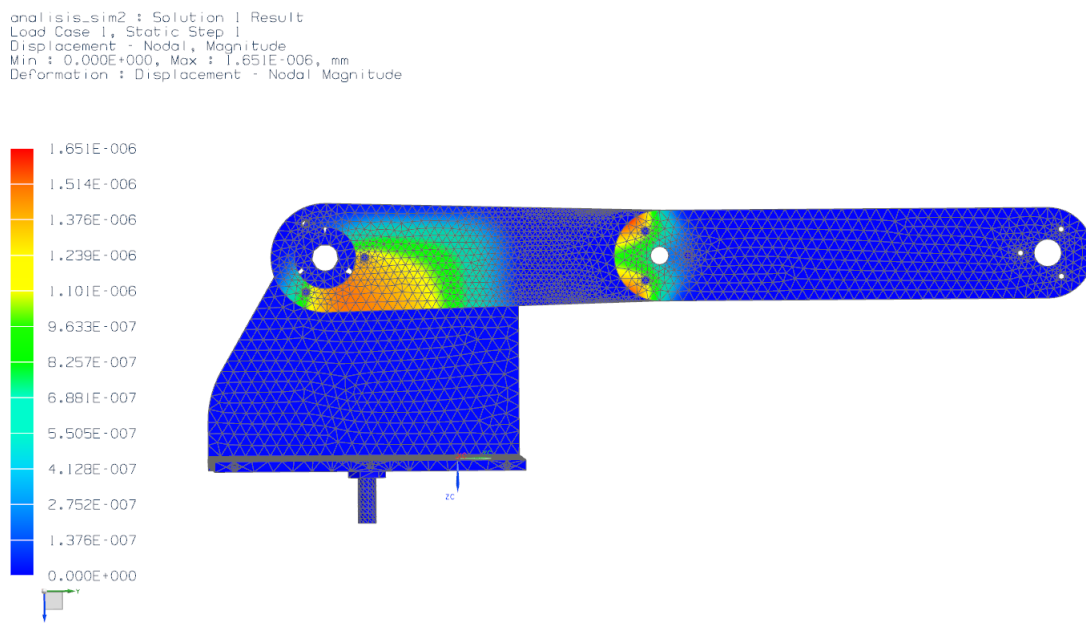


Figura 4-21: Deformación sufrida debido a las cargas y esfuerzos mecánicos

juntas, como es de esperarse. La deformación de mayor magnitud se da en la junta del hombro, donde recae el mayor momento de reacción debido al peso de la misma junta más la junta del hombro y la carga de 800 [g]. Sin embargo, la deformación es despreciable; ya que la mayor magnitud de deformación es de 0.000001651 [mm].

■ Esfuerzos

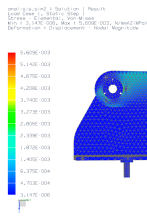


Figura 4-22: Esfuerzos (1)

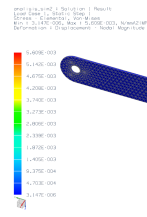


Figura 4-23: Esfuerzos (2)

Se observa en las figuras 4-22 y 4-23 como al igual que en el caso de la deformación, los esfuerzos se encuentran concentrados en las zonas donde se actúan las juntas. Sin embargo, se nota de igual forma, que el efecto de los esfuerzos son despreciables sobre el aluminio del cual está formado el modelo. Ya que la magnitud máxima es de 0.005609 [MPa], por lo que queda totalmente dentro de la zona elástica, por lo que las deformaciones causadas por estos esfuerzos volverán a su estado original después de que sean sometidas las cargas.

■ Fuerza de Reacción

analysis_sim2 : Solution 1 Result
 Load Case 1, Static Step 1
 Reaction Force - Nodal, Magnitude
 Min : 0.0000, Max : 0.0184, N
 Deformation : Displacement - Nodal Magnitude

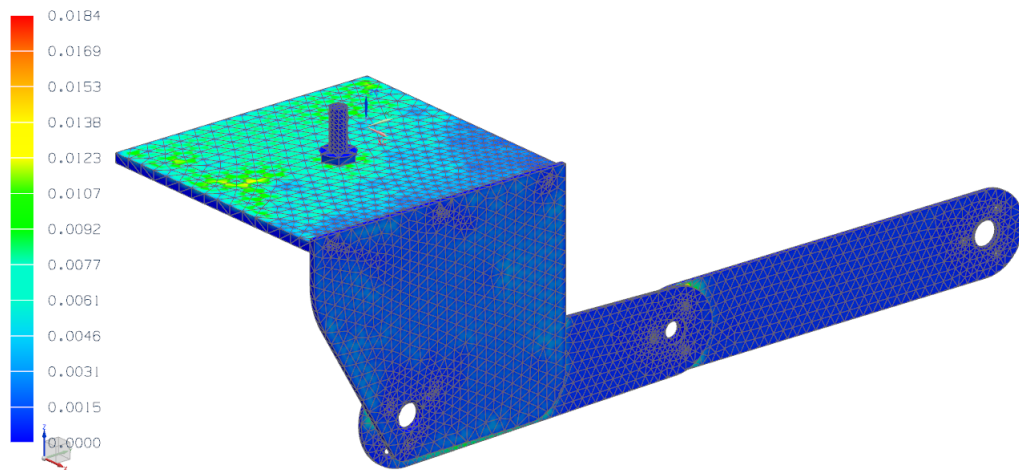


Figura 4-24: Fuerzas de reacción

Se observa en la figura 4-24 como las fuerzas de reacción están concentradas en la base del modelo

ya que esa pieza es la que recibe todo el momento necesario para poder hacer rotar el manipulador. Mientras que la cara lateral de la base recibe la carga de los eslabones. Mas el lugar donde las juntas son actuadas son las que más fuerza de reacción tienen. Pero al igual que en los casos anteriores, la magnitud máxima de la fuerza de reacción es de 0.0184 [N], muy inferior a lo que el aluminio puede tolerar

Con base a la información que el Análisis por Método Finito arroja, se puede concluir que el material Aluminio cumple mecánicamente todos los requerimientos que el producto mecatrónico y su uso, requiere. Por lo que se opta como material a usar el Aluminio.

4.3.4. Elaboración de los planos para la manufactura del producto

Después de haber realizado las pruebas en CAE y comprobar la coherencia de dimensiones y formas del producto mecatrónico, se procede a realizar los planos para la poder manufacturar las piezas que componen el modelo. El programa que se utiliza igualmente el Unigraphics NX. Los planos se muestran en el Apéndice C. La figura 4-25 muestra el explosivo del modelo.

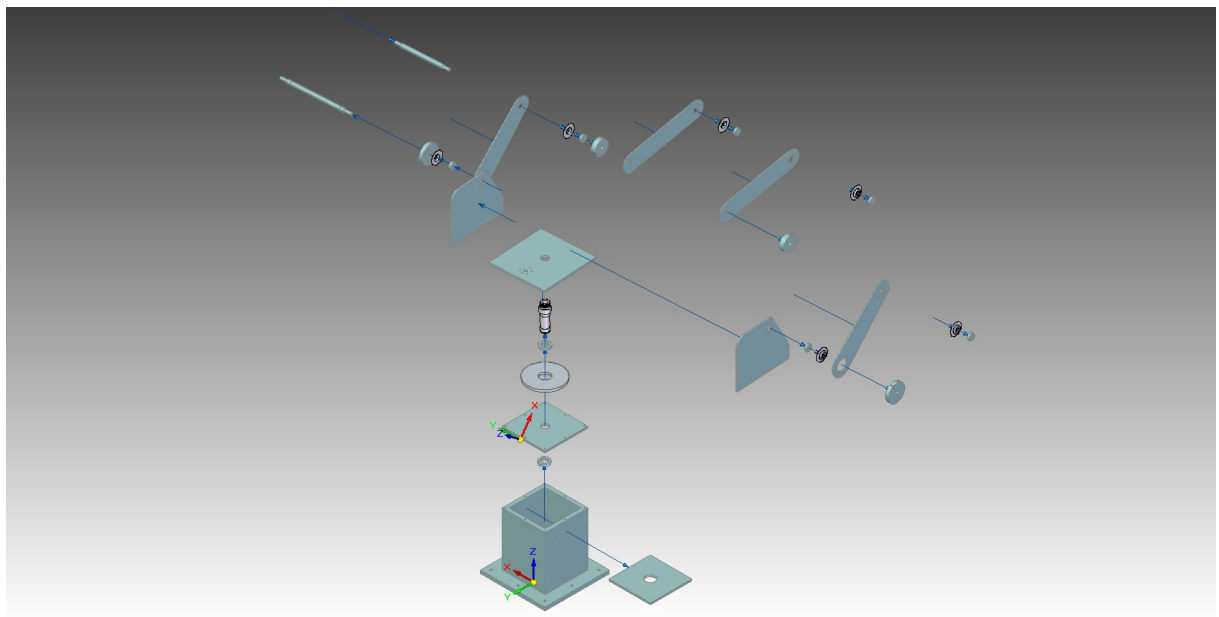


Figura 4-25: Explosivo del modelo

4.4. Diseño eléctrico

Ahora que se tiene el diseño mecánico y los requerimientos que de éste se desprenden, se procede a determinar si los actuadores seleccionados en la etapa de pesos ponderados son adecuados. Y con base a la elección definitiva de los transductores, se procederá a realizar los circuitos eléctricos necesarios para el correcto funcionamiento de los componentes.

4.4.1. Definición de los actuadores

Los actuadores utilizados en este producto mecatrónico son 2 diferentes motores de CD y un servomotor.

- Motor de corriente directa con reducción de 131:1

Cuadro 4-11: Propiedades del motor de CD

Característica	Valor
Relación de engranes	131:1
Voltaje de operación	12 [V]
Velocidad a rotor libre	80 [rpm]
Corriente a rotor libre	300 [mA]
Corriente a rotor bloqueado	5 [A]
Torque a rotor boloqueado	18 [kg-cm]

- Servomotor Invenscience i00600 Torxis Servo ⁷

Cuadro 4-12: Propiedades del Servomotor Invenscience i00600 Torxis Servo

Característica	Valor
Voltaje de operación	12 [V]
Velocidad de rotación	0.0167 [°/s]
Corriente a rotor bloqueado	3 [A]
Torque a rotor boloqueado	115 [kg-cm]

- Servomotor GSW 689

4.4.2. Definición de la fuente de poder

Con base a las características de los transductores a utilizar en el producto mecatrónico, se prosigue a determinar la capacidad de la fuente. Se toma en cuenta las corrientes y voltajes requeridos por los

⁷Este actuador a pesar de ser un motor, en el prototipo se usa como motor de CD

Cuadro 4-13: Propiedades del Servomotor GSW

Característica	Valor
Voltaje de operación	6 [V]
Velocidad de rotación	0.0021 [°/s]
Corriente a rotor bloqueado	3 [A]
Torque a rotor boloqueado	26 [kg-cm]

actuadores. Se observa como a plena carga, los motores requieren de 14 [A] mientras que los integrados usan un máximo de 0.01 [A]. Y el voltaje máximo requerido es de 12 [V]. Tomando un factor de seguridad de 2, para evitar el uso de las máximas capacidades de los motores que provocan una vida de uso reducida, se determina que la capacidad de la fuente de poder debe de ser de **12 [V]@7 [A]**.

4.4.3. Definición de los circuitos eléctricos

Debido a que los sensores se conectan directamente al microcontrolador, y los integrados ya contienen reguladores de voltaje y capacitores para evitar los picos de voltaje, los únicos circuitos necesarios para este producto son los que requieren los motores de CD. Para controlar la velocidad de los motores con el microcontrolador se hace uso de los puentes H *L298D*, debido a su capacidad de corriente de hasta 3 [A] por canal y su poco consumo parásito debido a los transistores y diodos que incluye el integrado. Estos datos, junto con la explicación del funcionamiento del puente H se puede encontrar en la *datasheet* incluida en el anexo D. La figura 4-26 muestra las conexiones necesarias para el correcto uso del L298D, la figura se obtuvo de la *datasheet*.

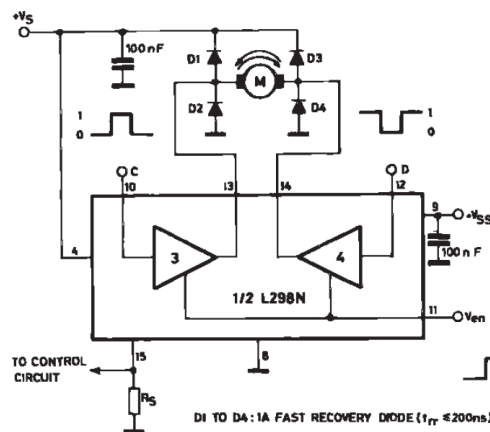
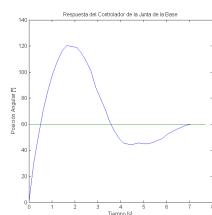


Figura 4-26: Circuito para el uso del Puente H

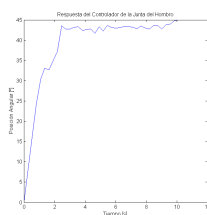
4.5. Diseño del controlador

El controlador utilizado en este producto mecatrónico, en cada una de las juntas es un controlador PID. La obtención del controlador se explora en el siguiente capítulo. En esta sección únicamente se muestra la expresión del controlador en el dominio del tiempo y de la frecuencia y la respuesta dinámica obtenida por la junta con el uso del controlador.

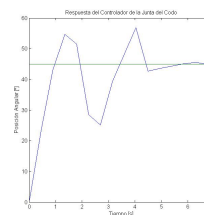
Respuestas dinámicas de las juntas



(a) Respuesta de la base



(b) Respuesta del hombro



(c) Respuesta del codo

Figura 4-27: Respuestas Dinámicas

4.5.1. Controlador de la base

La figura 4-27a muestra la respuesta dinámica de la base mientras que la ecuación 4-1 representa al controlador en el espacio del tiempo. La ecuación 4-2 representa al controlador en el dominio de la frecuencia.

$$C(t) = 2,5e(t) + 0,85 \int e(t)dt + 0,01 \frac{de(t)}{dt} \quad (4-1)$$

$$C(s) = 2,5E(s) + 0,85 \frac{1}{s} + 0,01s \quad (4-2)$$

4.5.2. Controlador del hombro

La figura 4-27b muestra la respuesta dinámica de la junta del hombro mientras que la ecuación 4-3 representa al controlador en el espacio del tiempo. La ecuación 4-4 representa al controlador en el dominio de la frecuencia.

$$C(t) = 8,3e(t) + 0,85 \int e(t)dt + 0,012 \frac{de(t)}{dt} \quad (4-3)$$

$$C(s) = 8,3E(s) + 0,85 \frac{1}{s} + 0,012s \quad (4-4)$$

4.5.3. Controlador del codo

La figura 4-27c muestra la respuesta dinámica de la junta del codo mientras que la ecuación 4-5 representa al controlador en el espacio del tiempo. La ecuación 4-6 representa al controlador en el dominio de la frecuencia.

$$C(t) = 8,3e(t) + 0,5 \int e(t)dt + 0,021 \frac{de(t)}{dt} \quad (4-5)$$

$$C(s) = 8,3E(s) + 0,5 \frac{1}{s} + 0,021s \quad (4-6)$$

4.6. Diseño electrónico

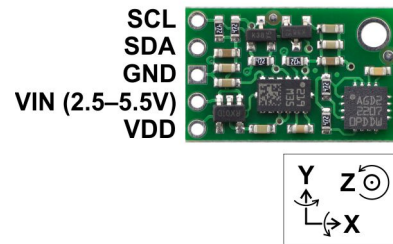
La electrónica utiliza una gran variedad de conocimientos, materiales y dispositivos, usualmente los semiconductores. El diseño y la gran construcción de circuitos electrónicos para resolver problemas prácticos forma parte de la electrónica. Por lo que los sensores y el microcontrolador recaen en esta categoría.

4.6.1. Definición de los sensores

Los sensores utilizados para este producto mecatrónico son 2 acelerómetros y una IMU. Los acelerómetros no sólo se usan para la determinación de la fuerza inercial, sino que también utilizan la gravedad, la cual es constante e inamovible, para calcular la posición angular de las juntas. Por lo que el uso de encoders ó cualquier otro tipo de sensor que proporcione posición angular es innecesario.



(a) Acelerómetro ADXL335



(b) MinIMU 9 V2

Figura 4-28: Sensores

- Acelerómetro Analógico ADXL335 de 3 ejes ⁸

El acelerómetro mostrado en la figura 4-28a consta de 3 ejes con salida analógica y consume una corriente de $3[\mu A]$. Debe ser energizado con un máximo de 3.6 [V] y un mínimo de 1.8 [V] de corriente directa. Y su rango es de $\pm 3g$.

- MinIMU 9 V2 de Pololu

Un IMU ó Unidad de medición inercial es un dispositivo electrónico que proporciona la velocidad, orientación y fuerzas gravitacionales de un dispositivo usando una combinación de acelerómetro, giroscopio y magnetómetro. El IMU mostrado en la figura 4-28b contiene el giroscopio de tres ejes L3GD20 y el acelerómetro con magnetómetro de 3 ejes integrados en el LSM303DLHC⁹. El cual se comunica con el microcontrolador por la interfaz I^2C . Una descripción y la forma de comunicarse con el I^2C se puede encontrar en las *datasheet* de ambos integrados del IMU. Se debe energizar con un voltaje de corriente directa de entre 2.5 y 5.5 [V], consume una corriente de 10 [mA] y cada integrado tiene una sensibilidad configurable.

4.6.2. Definición del microcontrolador

Un microcontrolador es un circuito integrado que contiene una serie de circuitos y funciones especializadas que son aplicables para un producto mecatrónico. Contiene un microprocesador, memoria, puertos de entrada/salida, entre otras funciones. Se puede decir que es básicamente una microcomputadora en un solo circuito integrado [1]. El microcontrolador utilizado para este producto mecatrónico es el Arduino Mega.

La figura 4-29 muestra al microcontrolador utilizado. El Arduino Mega es un microcontrolador basado en el ATmega2560. Contiene 54 pines de entrada/salida, de los cuales 14 pueden ser utilizados como salidas PWM, tiene 16 entradas analógicas, 4 UARTs y un cristal de 16 MHz. Opera con un voltaje de entre 7 a 12 [V] de corriente directa, contiene una memoria FLASH de 256 KB, una SRAM de 8 KB y una EEPROM de 4 KB. Se puede energizar de igual forma con el cable USB conectado a la computadora ¹⁰.

La razón por la cual se elige al Arduino como microcontrolador es debido a las importantes cualidades que posee. Al ser de fuente abierta, toda la documentación es accesible desde su portal de Internet. Además de que contiene un ambiente de programación propio, basado en C++, por lo que la progra-

⁸La *datasheet* del integrado se proporciona en el Anexo D

⁹Las *datasheet* se encuentran en el anexo D

¹⁰Se puede obtener más información del Arduino en su página de Internet www.arduino.cc

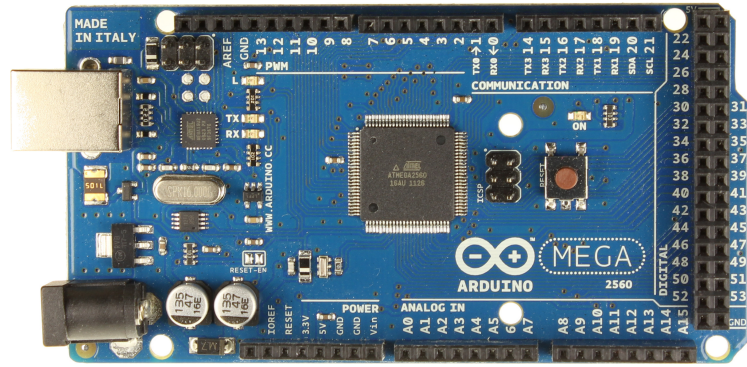


Figura 4-29: Arduino Mega

mación se vuelve más amigable, debido a que contiene librerías que proporcionan funciones muy útiles, además de tener la posibilidad de crear librerías y funciones propias. Debido a la complejidad que representa el programar en lenguaje ensamblador, esta alternativa resulta muy atractiva para utilizar este microcontrolador en el producto mecatrónico.

4.6.3. Definición del programa embebido

La programación embebida del producto mecatrónico debe ser lo más simple posible. Por lo que lo único que realiza el programa de manipulador robótico es mover las juntas a la posición angular que le fue indicado. Pero para lograr realizar esta simple tarea, múltiples funciones y algoritmos son necesarios. A continuación se presentan las funciones usadas en la programación del manipulador robótico y su explicación. El código fuente de las funciones se incluye en el anexo E.

Funciones *rangleo* y *angleo*

El propósito de estas funciones es el leer los valores que son enviados de los sensores al microcontrolador y calcular el ángulo entre las componentes de interés para obtener la posición angular. Posteriormente los valores de los ángulos obtenidos son sometidos a un filtro pasabajas para eliminar el ruido y los valores erróneos dados por la aceleración inercial. Ya que la aceleración gravitacional es la que nos dará las componentes que nos dan la posición angular. Sin embargo, al moverse el eslabón, este sufre una aceleración inercial innata de su movimiento, esta aceleración inercial modifica las componentes que son usadas para calcular la posición angular. Sin embargo, este cambio de ángulo causado por la aceleración inercial es rápido y repentino, por lo que se observa esa variación como ruido, que es eliminado con el filtro pasabajas. Por lo que el efecto de la aceleración inercial es manejado como ruido y eliminado con un filtro pasabajas.

Funciones *readhombro* y *readcodo*

Estas funciones leen los valores arrojados por el convertidor AD del microcontrolador. El sensor da voltaje analógico proporcional a la aceleración, por lo que los valores leídos por el convertidor A/D son leídos y transformados a valores en términos de la aceleración gravitacional **g**. La sensibilidad $[\frac{mV}{g}]$ se encuentra en la *datasheet*. Además de que se calcula el *offset* de cada eje, es decir, el valor del ADC a 0g para cada uno de los ejes. Ya con el *offset* y la sensibilidad se procede a calcular la aceleración en términos de **g** que sufre el acelerómetro de las juntas del hombro y del codo respectivamente. Para obtener tal valor, al valor leído del ADC se le resta el *offset* correspondiente y se le multiplica por la sensibilidad. Y el resultado es la aceleración que sufre el acelerómetro en cada eje. Ese valor es reportado en un arreglo Rh para las componentes de la aceleración del hombro y como Rc para las componentes de la aceleración del codo.

Funciones *GyroInit*, *AccelInit* y *CompassInit*

Estas funciones inicializan el giroscopio, acelerómetro y magnetómetro, respectivamente. Además de que escriben en los registros de cada sensor las sensibilidades y las resoluciones. Se escriben en los registros por medio del protocolo *I²C*, y la forma en la que se usa el protocolo se puede encontrar en las *datasheets* de los sensores, incluidas en el anexo D. Las propiedades requeridas para este producto mecatronico son las siguientes:

- Acelerómetro
 - Modo de energía normal, todos los ejes activados, actualización de mediciones de 50 Hz (Registro 1, valor:0x47).
 - Modo de alta resolución (Registro 4, valor:0x08).
 - Sensibilidad 8g (Registro 4, valor:0x20)
- Magnetómetro
 - Modo continuo a 15 Hz (Registro 1 valor:0x00).
- Giroscopio
 - Modo de energía normal, todos los ejes activados, actualización de mediciones de 100 Hz (Registro 1 valor:0x0F)
 - 2000 dps, alta resolución (Registro 4 valor:0x20)

Función *offset*

Esta función toma los valores de 0g para cada eje del acelerómetro del IMU y los valores de 0 dps para cada eje del giroscopio. Se toma una medición de 1024 muestras y se toma el promedio de estas. Este promedio será el *offset* de cada eje del acelerómetro y del giroscopio.

Función *readgyro*

En esta función se leen del registro los valores del giroscopio. Estos valores son filtrados con un pasabajas para eliminar ruido. Posteriormente los valores filtrados son convertidos a dps. La forma para convertirlos es a cada valor de cada eje se le resta su *offset* de 0 dps y a ese valor se le multiplica por la sensibilidad, que se encuentra en la *datasheet*. Así se obtienen los dps a los que está siendo sometido el giroscopio. Estos dps se convierten a $\frac{rad}{s}$ para poder ser manipulados.

Función *readacc*

Al igual que en la función *readgyro*, esta función lee los valores de los registros y posteriormente se les aplica un filtro pasabajas para eliminar el ruido. Posteriormente a cada valor de cada eje se le resta su *offset* correspondiente y se le multiplica por la sensibilidad, que se encuentra en la *datasheet*. El resultado nos da la aceleración inercial con la gravitacional en términos de g.

Función *readmag*

Esta función lee los registros del magnetómetro y posteriormente da el ángulo con respecto al norte magnético.

Funciones *deg2rad* y *rad2deg*

Estas funciones convierten los valores en ángulos a radianes y viceversa.

Función *control*

Esta función es la que aplica el controlador PID a cada una de las juntas. Los parámetros que esta función requiere son: la referencia, el valor actual, las constantes k_p , k_i , k_d y el valor anterior que arroja la función. La función inicia determinando que la diferencial dt será de 200 [ms] ó 0.2 [s]. Posteriormente calcula el error actual entre la referencia y el valor actual. Se calcula la integral como el valor anterior de la integral más el error multiplicado por la diferencial de tiempo. La diferencial es calculada como el error menos el error previo entre la diferencial de tiempo.

Sin embargo, el valor de la integral puede provocar tres problemas importantes. Si el error es muy grande,

el valor de la integral será muy grande, por lo que el eslabón oscilará. Si el error es muy pequeño, el valor de la integral irá cambiando constantemente, por lo que también oscilará alrededor del valor deseado. Y el último problema es que la integral puede aumentar de manera discriminada. Para evitar estos tres errores, tres algoritmos son utilizados. Si el error es muy grande, el valor arrojado por el controlador, el cual está saturado entre -255 a 255, en la iteración anterior será muy cercano a 255. Por lo que si el valor anterior es mayor a 200 o menor a -200, el valor de la integral será cero. Para el segundo problema, si el error es menor a 2.5° , la integral y la salida del controlador será cero, ya que al ser muy pequeño el error, la histéresis del motor y su caja de engranes corregirá ese pequeño error. Para el último problema, simplemente se satura la integral a un valor de ± 800 .

Resuelto los problemas causados por el valor de la integral, se dispone a calcular la salida del controlador como $kp * error + ki * integral + kd * diferencial$. Este valor debe ser saturado entre -255 y 255. Esto debido a que se está utilizando el PWM del microcontrolador, en el cual el valor de 0 es el *duty cycle* de cero y el valor de 255 es el *duty cycle* completo. El signo simplemente nos da la dirección en la que debe girar el motor, horaria o anti-horaria.

Función *direccion*

Esta función recibe la salida de la función control. Si la salida es positiva da a la variable booleana *dir* el valor de *true*, lo que significa que el motor debe girar en sentido horario. Por el otro lado si es negativa la salida del control, la variable tomará el valor *false*, lo que significa que el motor girará en sentido anti-horario.

Función *writemotor*

Al estar utilizando puentes H para el control de los motores de las juntas, la dirección se determina alternando el valor lógico de las terminales *ENABLE* de los puentes H. Por lo que esta función recibe el valor de la salida del controlador y la variable booleana de la función de dirección. Dependiendo del sentido se dará los valores lógicos a las terminales *ENABLE* y dada la dirección se aplica el PWM obtenido por la función control.

Funciones *movehombro*, *movecodo* y *movebase*

Estas funciones son la columna vertebral del programa embebido. Estas funciones reciben el valor de la posición angular deseada, el tiempo inicial y una variable booleana que determina si se enviará por el puerto serial los valores de las aceleraciones de cada acelerómetro del manipulador.

La función inicia leyendo los valores del acelerómetro de la junta a mover, posteriormente se aplica la función de control para determinar el valor del PWM, ese valor es enviado a las funciones *direccion* y

writemotor para mover al motor con la velocidad y dirección necesaria. Este proceso se repite hasta que la posición angular tiene un error absoluto de 1.5° . Al salir del loop de control se frena el motor en la posición deseada.

Función *prueba*

En esta función se aplica el filtro *gap-band* a los valores de los acelerómetros. Lo que nos da la certeza de que se elimina el ruido mecánico y eléctrico inherente de los sensores. Este filtro lo que hace es da el valor de cero si el valor del acelerómetro se encuentra dentro de un rango determinado.

Ya aplicado el filtro *gap-band* se procede a mandar por el puerto serial los valores de las aceleraciones.

Función *setup*

En esta función se inicializa la comunicación serial a 115200 bps, se inicializa la comunicación I^2C y por último se inicializan los sensores y los motores.

4.7. Presentación del prototipo

Posteriormente de haber realizado la manufactura y el ensamble del prototipo, se presenta la versión final de éste. El producto mecatrónico y la secuencia de su ensamble se muestran en las figuras 4-31, 4-30 y 4-32.

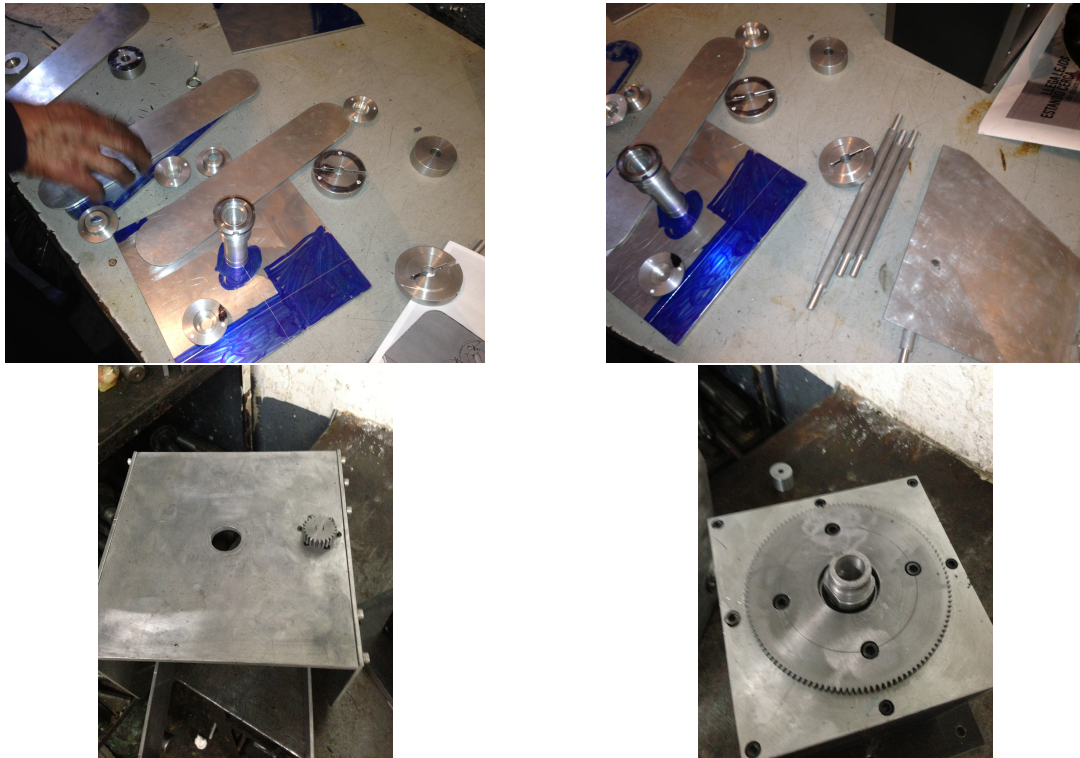


Figura 4-30: Piezas del manipulador



Figura 4-31: Ensamble preliminar

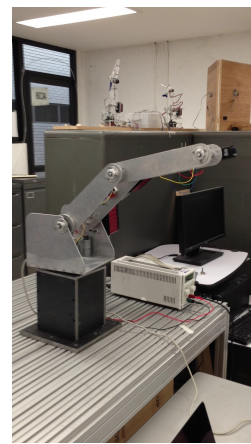
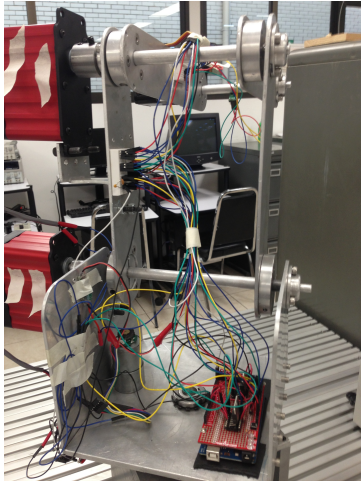
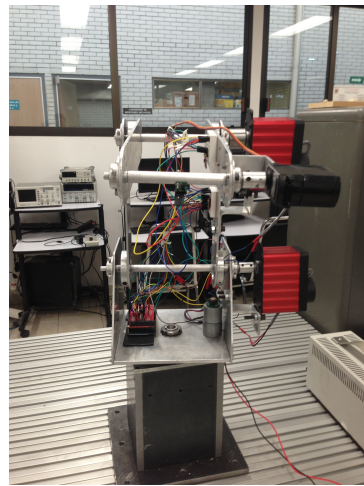
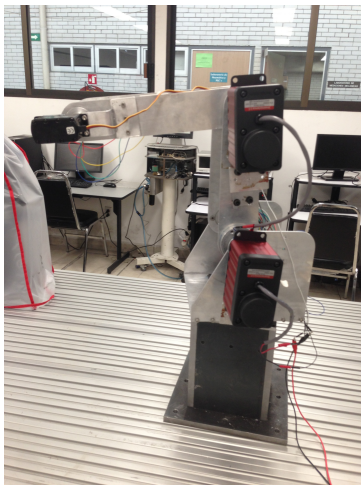


Figura 4-32: Ensamble Final

4.8. Pruebas al producto mecatrónico

Ya construido el producto mecatrónico, se procede a hacer las pruebas pertinentes para comprobar su buen funcionamiento. Para el manipulador robótico, las pruebas que se necesitan son pruebas de exactitud y repetitibilidad. Para poder medir cuantitativa y cualitativamente estas dos propiedades del manipulador se procede a programar una trayectoria definida y ver su comportamiento. Para esta prueba se programa una línea horizontal en el plano $x=0$. La obtención de la trayectoria y el procesamiento de los datos obtenidos de los acelerómetros se exploran en el capítulo 6. En esta sección sólo se muestran los resultados de las pruebas de las trayectorias.

4.8.1. Prueba 1

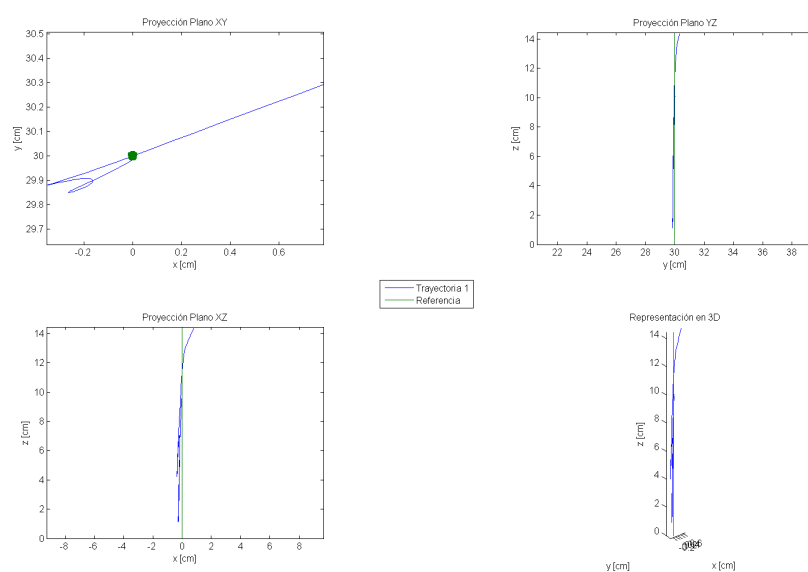


Figura 4-33: Trayectoria 1

La figura 4-33 muestra la trayectoria en el espacio que siguió el manipulador en esta prueba. Se observa como en los planos XZ y YZ el manipulador sigue fielmente la trayectoria. Sin embargo, en el plano XY, se observa como el manipulador no se mantiene en el punto que debería seguir, sino que se mueve alrededor de él. Ésto se debe a la vibración causada por el movimiento y el movimiento del huelgo de los engranes que provoca la vibración. Los errores y las desviaciones estándar de cada eje para esta prueba se muestran en la tabla 4-14:

Eje	Error [cm]	Desviación Estándar [cm]
x	0.0634	0.1170
y	0.0313	0.0521
z	0.1423	0.1541

Cuadro 4-14: Errores y Desviaciones Estándar por eje

4.8.2. Prueba 2

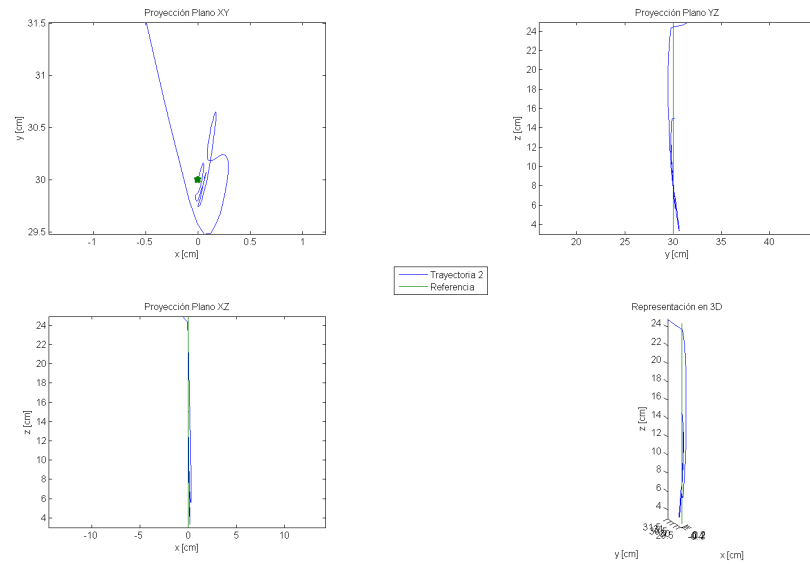


Figura 4-34: Trayectoria 2

La figura 4-34 muestra la trayectoria en el espacio que siguió el manipulador en esta prueba. Se observa como el manipulador siguió de manera muy cercana a la trayectoria programada. Sin embargo, hubo inexactitud en el plano XY debido a las vibraciones. Los errores y las desviaciones estándar de cada eje para esta prueba se muestran en la tabla 4-15:

Eje	Error [cm]	Desviación Estándar [cm]
x	0.0499	0.0772
y	0.1275	0.1859
z	0.2243	0.2133

Cuadro 4-15: Errores y Desviaciones Estándar por eje

4.8.3. Prueba 3

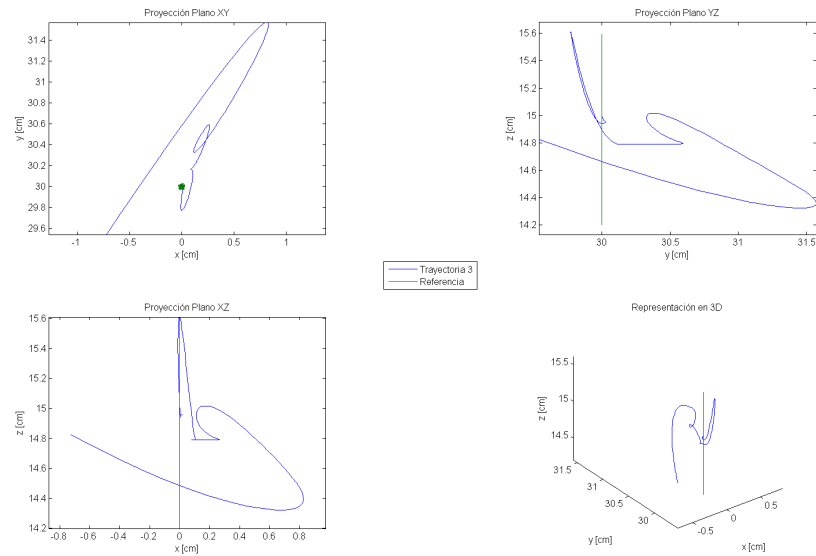


Figura 4-35: Trayectoria 3

La figura 4-35 muestra la trayectoria en el espacio que siguió el manipulador en esta prueba. Se observa como en este caso hubo un movimiento inesperado en todos los planos. En el plano XY el error mantiene la tendencia esperada, sin embargo, en los planos XZ y YZ hay una irregularidad en el movimiento. La trayectoria se sigue pero no con la exactitud esperada, ya que los errores máximos en Y son de 1 [cm], aunque es relativamente poco no sigue la tendencia vista hasta este momento. Los errores y las desviaciones estándar de cada eje para esta prueba se muestran en la tabla 4-16:

Eje	Error [cm]	Desviación Estándar [cm]
x	0.1302	0.2044
y	0.2667	0.3856
z	2.8324	1.7782

Cuadro 4-16: Errores y Desviaciones Estándar por eje

4.8.4. Prueba 4

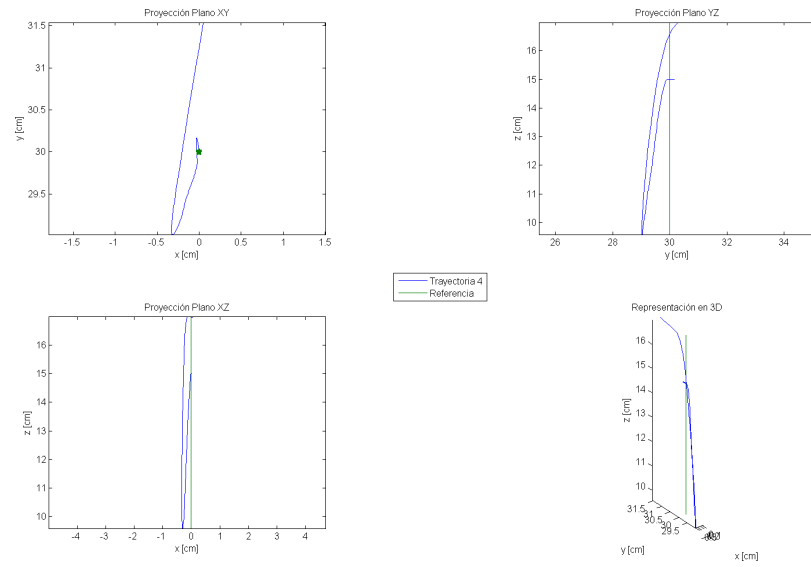


Figura 4-36: Trayectoria 4

La figura 4-36 muestra la trayectoria en el espacio que siguió el manipulador en esta prueba. Se observa como la tendencia vista se recupera, el error se mantiene en el plano XY, el plano XZ regresa a la tendencia vista. El plano YZ se observa como la línea es realizada, sin embargo tiene una cierta inclinación. Los errores y las desviaciones estándar de cada eje para esta prueba se muestran en la tabla 4-17:

Eje	Error [cm]	Desviación Estándar [cm]
x	0.0563	0.0922
y	0.2019	0.3112
z	0.1362	0.3144

Cuadro 4-17: Errores y Desviaciones Estándar por eje

4.8.5. Interpretación de las pruebas

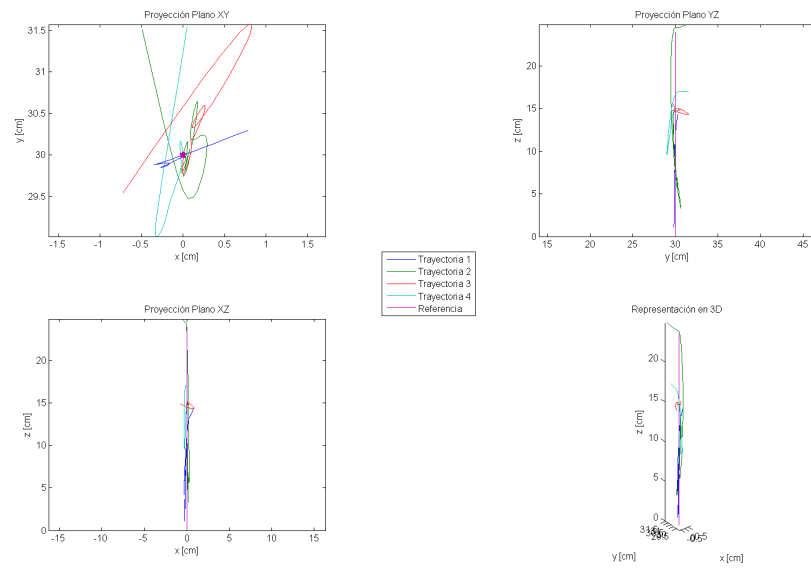


Figura 4-37: Trayectoria 5

La figura 4-36 muestra las trayectorias en el espacio que siguió el manipulador en las cuatro pruebas. Se puede observar como el manipulador siguió fielmente la trayectoria en los planos XZ y YZ, y el error en el plano XY se mantuvo constante e inalterable, por lo que se concluye que la repetitibilidad del manipulador es buena para los fines académicos. Los errores y las desviaciones estándar de cada eje para las pruebas se muestran en la tabla 4-18:

Eje	Error [cm]	Desviación Estándar [cm]
x	0.0758	0.1376
y	0.1534	0.2767
z	0.8338	0.5432

Cuadro 4-18: Errores y Desviaciones Estándar por eje

Capítulo 5

Análisis del producto mecatrónico: manipulador robótico

5.1. Introducción

Ahora que el producto mecatrónico ha sido realizado, se procede a realizar los análisis pertinentes. Se realiza el análisis cinemático, dinámico y del controlador del manipulador robótico usando la teoría vista en los capítulos uno y dos. El capítulo empieza con el análisis y desarrollo cinemático del manipulador usando la fórmula del producto de exponenciales. Posteriormente se obtiene el Jacobiano del manipulador para la obtención de la velocidad del órgano terminal. Posteriormente con la fórmula que relaciona el torque del último eslabón con el *wrench* aplicado al órgano terminal, usando el transpuesto del Jacobiano, se obtienen los torques de reacción de cada junta.

Ya obtenido el análisis cinemático se procede a calcular una trayectoria utilizando la cinemática inversa. Se programa la trayectoria en Matlab y se corre una simulación. Esta simulación se compara con la trayectoria obtenida por el manipulador para contrastar las diferencias y similitudes.

Ahora con el análisis cinemático y la trayectoria obtenida por cinemática inversa, se procede a hacer el análisis dinámico. Para este análisis se obtiene la ecuación diferencial no lineal de segundo orden que describe la dinámica del manipulador y se le aplica un controlador PID al cual se le hace un análisis de estabilidad y se simula en Matlab el controlador para conocer su respuesta dinámica.

5.2. Análisis cinemático

5.2.1. Cinemática directa

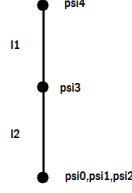


Figura 5-1: Diagrama simplificado del manipulador robótico

Una de las ventajas de la fórmula del producto de exponenciales es que se puede escoger la configuración inicial que más simplifique el análisis del manipulador sin que se afecte el resultado. Por lo que se recurre a colocar los sistemas de referencia de cada junta como se muestra en la figura 5-1. El sistema de referencia inercial, el de la primera y segunda junta se colocan en la misma posición, mientras que el sistema de referencia del codo y del órgano terminal se colocan al final del eslabón del hombro y del órgano terminal respectivamente. Con base en el diagrama la fórmula del producto de exponenciales resulta como en la ecuación 5-1.

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1\theta_1} e^{\hat{\xi}_2\theta_2} e^{\hat{\xi}_3\theta_3} e^{\hat{\xi}_4\theta_4} g_{st}(0) \quad (5-1)$$

Para obtener el producto de exponenciales, el primer paso es obtener los *twists* para cada sistema de referencia de cada junta. El *twist* se define como se muestra en la ecuación 5-2.

$$\xi_i = \begin{bmatrix} -\omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

Donde ω_i es el vector de rotación y q_i es un punto cualquiera sobre el eje de rotación. Por lo que se define entonces los vectores ω y los puntos q . El vector de rotación del sistema de referencia ψ_1 es el vector unitario coincidente al eje $z \hat{k}$, mientras que para los sistemas de referencia restantes el vector de rotación coincide con el vector unitario sobre el eje $x \hat{i}$. Para los puntos q se toma el vector de posición

del punto con referencia al sistema de referencia inercial. Por lo que el conjunto de vectores queda como:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + l_2 \end{bmatrix}$$

Por lo que para obtener los *twists* de cada junta se utiliza la ecuación 5-2. Por lo que los *twists* del manipulador resultan:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 + l_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para lograr hacer la transformación de los *twists* a el espacio euclideo $SE(3)$ se recurre al mapeo exponencial que nos dará las matrices $g(\theta)$ de transformaciones de cuerpo rígido. Se recurre a la ecuación de Rodrigues 5-3 para realizar la operación exponencial.

$$e^{\hat{\xi}\theta} = I + \hat{\xi}sen\theta + \hat{\xi}^2(1 - cos\theta) \quad (5-3)$$

donde $\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Por lo que la matrix exponencial resulta:

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & p(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \hat{\omega}sen\theta + \hat{\omega}^2(1 - cos\theta) & vsen\theta + \hat{\omega}v(1 - cos\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se utiliza la fórmula 5-3 para obtener $e^{\hat{\xi}_1\theta_1}$:

$$e^{\hat{\omega}_1\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{sen}(\theta_1) + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1 - \text{cos}(\theta)) = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sen}\theta_1 + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1 - \text{cos}\theta_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que la transformación del sistema de referencia $\psi_0 \rightarrow \psi_1$ resulta:

$$e^{\hat{\xi}_1\theta_1} = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \text{cos}\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El mismo tratamiento se le da a los demás *twists* lo que nos resulta en las siguientes transformaciones de cuerpo rígido:

$$e^{\hat{\xi}_1\theta_1} = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \text{cos}\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\hat{\xi}_2\theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & 0 \\ 0 & \text{sen}\theta_2 & \text{cos}\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\hat{\xi}_3\theta_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}\theta_3 & -\text{sen}\theta_3 & l_1 \text{sen}\theta_3 \\ 0 & \text{sen}\theta_3 & \text{cos}\theta_3 & l_1(1 - \text{cos}\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\hat{\xi}_4\theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}\theta_4 & -\text{sen}\theta_4 & (l_1 + l_2) \text{sen}\theta_4 \\ 0 & \text{sen}\theta_4 & \text{cos}\theta_4 & (l_1 + l_2)(1 - \text{cos}\theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora que se tiene todas las transformaciones de cuerpo rígido, se procede a definir la condición inicial $g_{st}(0)$.

$$g_{st}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

Ahora se procede a obtener la fórmula del producto de exponenciales que nos representa la cinemática directa del manipulador:

$$g_{st}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \text{sen}\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & \text{sen}\theta_1 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & \text{sen}\theta_1 [l_1 \text{sen}\theta_2 + l_2 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3)] \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & -\cos\theta_1 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & -\cos\theta_1 [l_1 \text{sen}\theta_2 + l_2 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3)] \\ 0 & \text{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & -(l_1 \cos\theta_2 + l_2 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde $\theta \in \mathbb{R}^4$

La transformación de cuerpo rígido $g_{st}(\theta)$ representa la transformación de cuerpo rígido desde la base del manipulador hasta el órgano terminal. Por lo que si se desea conocer la posición de un punto del órgano terminal con respecto al marco de referencia inercial conociendo la posición angular de cada junta, ésta se obtiene como:

$$p_{st} = g_{st}(\theta)p_0 \quad (5-5)$$

Ahora que se tiene la transformación del cuerpo rígido $g_{st}(\theta)$ se obtiene el espacio de trabajo del manipulador. Se procede a utilizar un método numérico para obtener todos los puntos que el órgano terminal puede alcanzar. El código de Matlab de este método se encuentra en el anexo F. La figura 5-2 muestra el espacio de trabajo del manipulador. Con lo que se concluye la derivación de la cinemática directa.

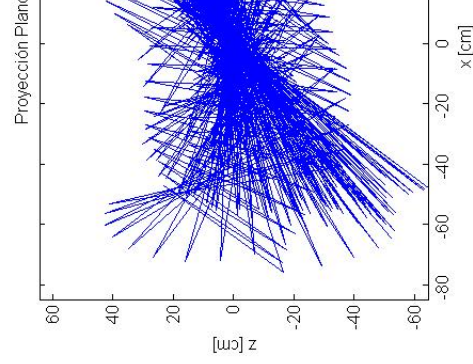
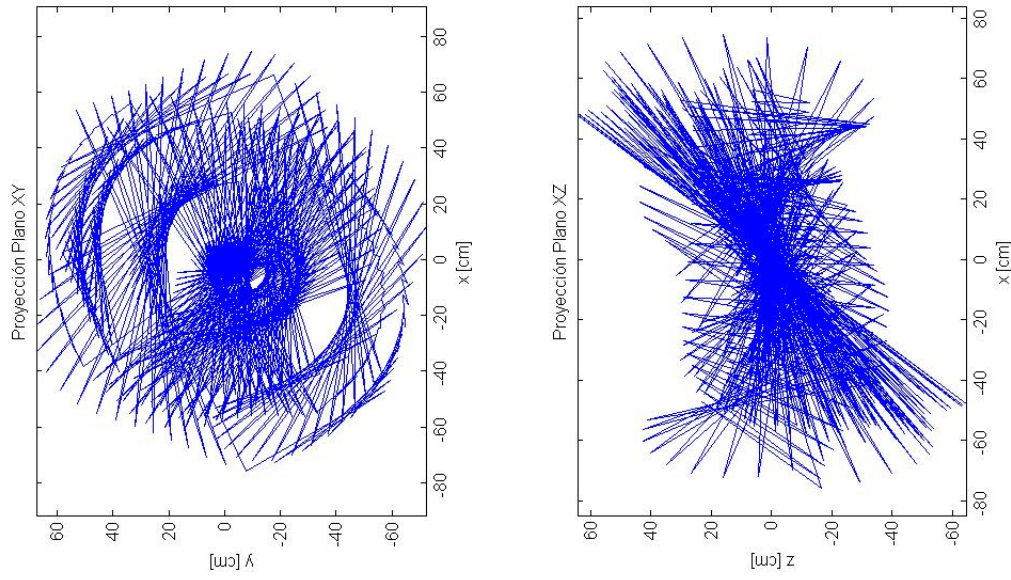
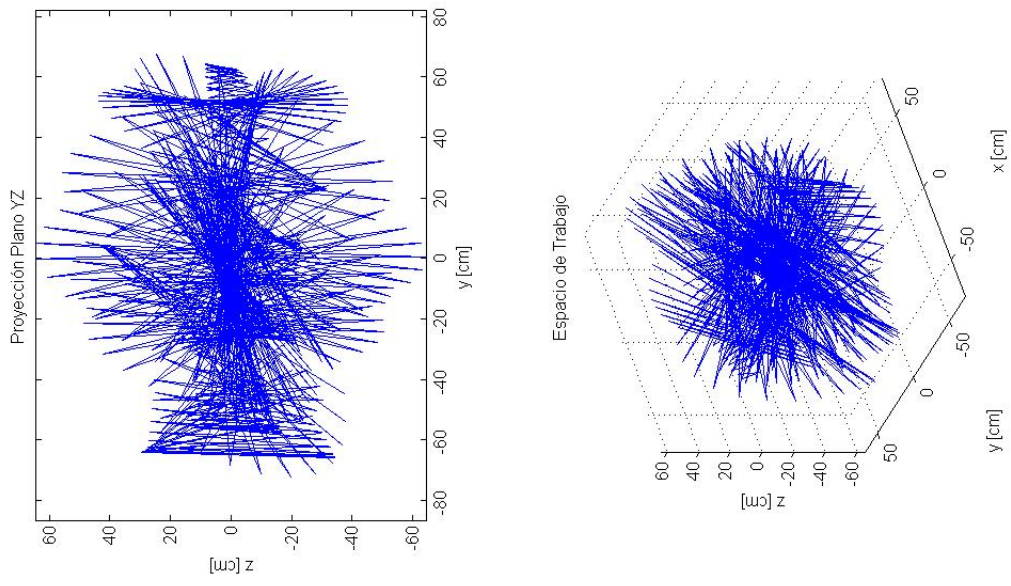


Figura 5-2: Espacio de trabajo del manipulador

5.2.2. Cinemática inversa

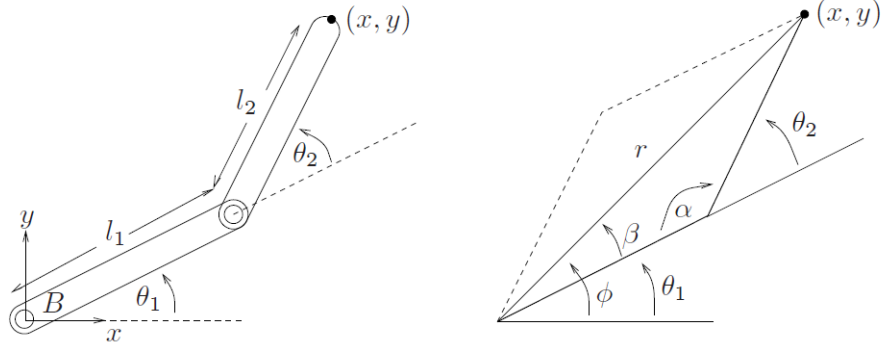


Figura 5-3: Cinemática Inversa del manipulador en un plano

Se procede ahora a calcular una trayectoria utilizando la cinemática inversa. Para simplificar los cálculos se procede a hacer una trayectoria en un plano, en este caso el plano $x = 0$. Por lo que ahora en lugar de calcular una trayectoria en \mathbb{R}^3 se calcula una trayectoria en \mathbb{R}^2 . En la figura 5-3 se muestra al manipulador en un plano. El propósito de la inversa cinemática es obtener las posiciones angulares θ_1 y θ_2 para el punto en el espacio $p = (x, y)$. Por lo que se obtiene la cinemática directa del manipulador de la figura 5-3, la cual resulta:

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Para resolver las ecuaciones de cinemática directa para θ_1 y θ_2 se recurre al uso de las coordenadas polares (r, ϕ) , tal como se muestra en la figura 5-3. Por lo que se define a r como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo que la solución de la cinemática inversa resulta:

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) \pm \text{acos}\left(\frac{r^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 r}\right)$$

$$\theta_2 = \pi \pm \text{acos}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r^2}{2l_1 l_2}\right)$$

Ahora que se tiene la cinemática inversa se procede a calcular la trayectoria deseada. En este caso la

trayectoria es una línea horizontal. Por lo que se procede a obtener la ecuación vectorial de la línea:

$$p(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = y_i \\ z = z_i - a * t \end{cases} \quad (5-6)$$

En donde el termino a es la velocidad lineal en $[\frac{cm}{s}]$ con la cual la trayectoria es realizada. En este caso se escoge una $a = 4[\frac{cm}{s}]$. Ahora que se tiene la trayectoria se obtiene las posiciones angulares usando las fórmulas de la solución de la cinemática inversa.

Para simular la trayectoria se utiliza Matlab. Para la simulación y también para la programación de la trayectoria en el manipulador se debe asignar una ganancia a la diferencial $\frac{d\theta}{dt}$. A esta ganancia se le denomina α . Además se le agrega una señal de ruido para hacer la trayectoria más real. El código de Matlab se puede consultar en el anexo F.

Se definen diferentes ganancias para la velocidad angular, las simulaciones se muestran en la figura 5-4. Después de correr la simulación en varias ocasiones, se opta por la ganancia $\alpha = 140$ debido a que realiza

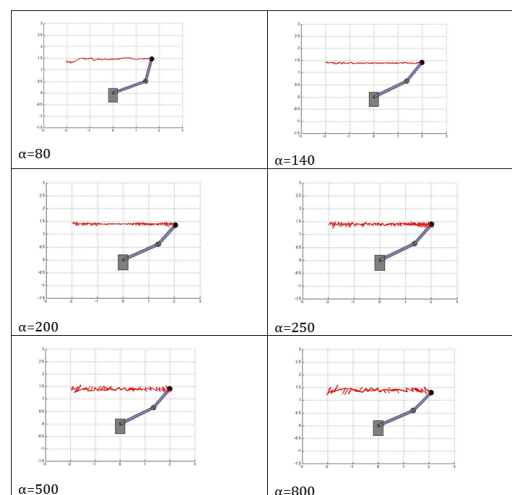
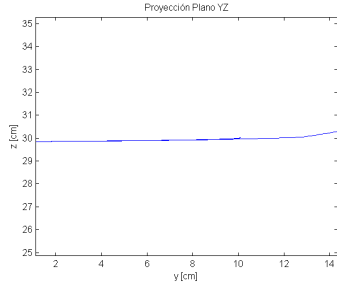


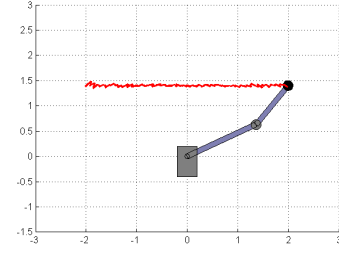
Figura 5-4: Simulaciones de la trayectoria con diferentes ganancias

la línea más suave. Se programa la trayectoria en el manipulador y se utiliza una ganancia de $\alpha = 125$ y una velocidad de $a = 3,4[\frac{cm}{s}]$. Se corrió la trayectoria en el manipulador con valores cercanos a 140, y la ganancia que resulta con la trayectoria más suave fue de 125.

En la figura 5-5 se muestran la simulación junto con la trayectoria obtenida con el manipulador. Se puede observar como el manipulador sigue la trayectoria deseada. Con lo que concluye la derivación de



(a) Trayectoria obtenida



(b) Trayectoria simulada

Figura 5-5: Trayectorias calculadas por cinemática inversa

la cinemática inversa.

5.2.3. Cinemática directa diferencial

En esta sección se obtiene el Jacobiano espacial del manipulador. El Jacobiano espacial está definido como:

$$J_{st}^s(\theta) = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

donde ξ_i' es el i -ésimo *twist*. Si se usan los *twists* obtenidos en la sección de cinemática directa, sólo se tendría el Jacobiano espacial de la posición inicial. Sin embargo, para obtener el Jacobiano espacial para todas las posibles posiciones del manipulador se recurre al uso de la *Adjunta*. La adjunta está definida como:

$$Ad_{g_{ab}(\theta)} = \begin{bmatrix} R_{ab} & \hat{p}_{ab}R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

Por lo que para obtener los *twists* generalizados se aplica la adjunta:

$$\xi_i' = Ad_{(e^{\xi_1\theta_1}\dots e^{\xi_{i-1}\theta_{i-1}})}\xi_i \quad (5-9)$$

Después de aplicar la adjunta a cada *twist*, los *twists* resultantes son:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\theta_1 \\ \sen\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi'_3 = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \\ l_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ l_1 \text{sen}\theta_2 \\ \cos\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi'_4 = \begin{bmatrix} 2l_1 \text{sen}\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \text{sen}\theta_1 (l_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) - l_1 \cos\theta_2) \\ \cos\theta_1 [l_1 \cos\theta_2 + l_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\ 2l_1 \text{sen}\theta_2 + (l_1 + l_2) \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) \\ \cos\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora que se tiene el Jacobiano espacial se puede estudiar la manipulabilidad del brazo robótico. El Jacobiano espacial es de rango completo, por lo que el $\text{kernel}(J_{st}^s(\theta)) = 0$. Lo que significa que el órgano terminal no tiene restricciones dentro del espacio de trabajo. La velocidad espacial del órgano terminal se puede obtener con el uso del Jacobiano espacial:

$$V_{st}^s = J_{st}^s(\theta)\dot{\theta} \quad (5-10)$$

Para analizar la dinámica del órgano terminal se recurre al transpuesto del Jacobiano espacial. Se estudia el rango, el cual también es completo, por lo que $\text{kernel}(J_{st}^s(\theta))^T = 0$. Lo que significa que si se aplica cualquier *wrench* al órgano terminal, todas las juntas ejercerán un par para contrarrestar el *wrench* aplicado.

Mientras que los torques ejercidos por las juntas debido a un *wrench* F_s externo se puede obtener con el uso del transpuesto del Jacobiano espacial como:

$$\tau = (J_{st}^s)^T F_s \quad (5-11)$$

Con lo que concluye el análisis de cinemática directa diferencial.

5.3. Análisis dinámico

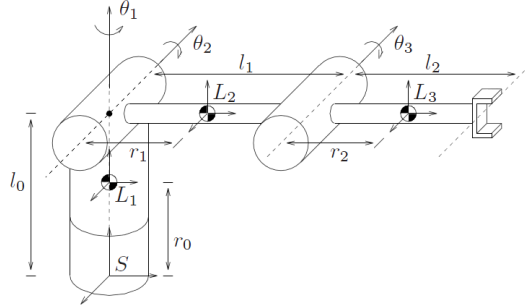


Figura 5-6: Diagrama del manipulador

El diagrama de la figura 5-6 representa al manipulador con sus características mecánicas principales. Los datos necesarios para la dinámica se muestran en la tabla 5-1 La dinámica del manipulador se expresa

Cuadro 5-1: Datos del manipulador

$r_0 = 0,22[m]$	$I_{x1} = 0,037560[kgm^2]$	$I_{z1} = 0,004637[kgm^2]$
$l_0 = 0,30[m]$	$I_{y1} = 0,039271[kgm^2]$	$m_1 = 0,3535[kg]$
$r_1 = 0,13[m]$	$I_{x2} = 0,031200[kgm^2]$	$I_{z2} = 0,003742[kgm^2]$
$l_1 = 0,30[m]$	$I_{y2} = 0,028440[kgm^2]$	$m_2 = 0,1240[kg]$
$r_2 = 0,20[m]$	$I_{x3} = 0,062467[kgm^2]$	$I_{z3} = 0,018790[kgm^2]$
$l_2 = 0,26[m]$	$I_{y3} = 0,043820[kgm^2]$	$m_3 = 0,1440[kg]$

como una ecuación diferencial vectorial de segundo orden que expresa el movimiento como función de los torques aplicados a cada junta, como se muestra en la ecuación 5-12 en donde $\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta, \tau \in \mathbb{R}^4$.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (5-12)$$

Con base en la posición inicial del manipulador mostrada en la figura 5-6 se obtienen los *twists* correspondientes a los sistemas de referencia que son colocados en los centros de masa de los eslabones, los

cuales son:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,30 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,30 \\ 0,30 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se obtienen las condiciones iniciales de la posición del manipulador:

$$g_{sl_1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{sl_2}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,13 \\ 0 & 0 & 1 & 0,30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g_{sl_3}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a obtener las matrices de inercias de cada eslabón:

$$\mathcal{M}_1 = \text{diag}(0,3535, 0,3535, 0,3535, 0,0375, 0,039271, 0,004637)$$

$$\mathcal{M}_2 = \text{diag}(0,1240, 0,1240, 0,1240, 0,0312, 0,02844, 0,003742)$$

$$\mathcal{M}_3 = \text{diag}(0,1440, 0,1440, 0,1440, 0,062467, 0,04382, 0,018790)$$

Para obtener la matriz de inercia del manipulador primero deben calcularse los Jacobianos corporales, los cuales resultan:

$$J_1 = J_{sl_1(0)}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_2 = J_{sl_2(0)}^b = \begin{bmatrix} -0,13\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,13 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_2 & 0 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = J_{st_3(0)}^b = \begin{bmatrix} -0,2\cos\theta_2 - 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0,3\text{sen}\theta_3 & 0 \\ 0 & -0,2 - 0,3\cos\theta_3 & -0,2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -\text{sen}(\theta_2 + \theta_3) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora que se tienen los Jacobianos corporales de cada junta, se procede a obtener la matriz de inercia del manipulador:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = J_1^T \mathcal{M}_1 J_1 + J_2^T \mathcal{M}_2 J_2 + J_3^T \mathcal{M}_3 J_3 \quad (5-13)$$

Lo que resulta:

$$\begin{aligned} M_{11} &= 0,02844\text{sen}^2\theta_2 + 0,04382\text{sen}^2(\theta_2 + \theta_3) + 0,004637 + 0,003742\cos^2\theta_2 \\ &\quad + 0,01879\cos^2(\theta_2 + \theta_3) + 0,002\cos^2\theta_2 + 0,1440(0,3\cos\theta_2 + 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3))^2 \\ M_{12} &= 0 \\ M_{13} &= 0 \\ M_{21} &= 0 \\ M_{22} &= 0,1144 + 0,01728\cos\theta_3 \\ M_{23} &= 0,068220,00864\cos\theta_3 \\ M_{31} &= 0 \\ M_{32} &= 0,068220,00864\cos\theta_3 \\ M_{33} &= 0,06822 \end{aligned}$$

Se debe notar que varios momentos de inercia son cero debido a que los eslabones no permiten rotaciones arbitrarias alrededor de cada eje. Ahora que se tiene la matriz de inercia del manipulador, se puede obtener las fuerzas de Coriolis y las fuerzas centrífugas de la siguiente forma:

$$C_{ij}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k \quad (5-14)$$

Con base a lo anterior se obtiene la matriz matriz de Coriolis

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} C_{11} &= [0,0226\cos\theta_2\sen\theta_2 + 0,025\cos(\theta_2 + \theta_3)\sen(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad - 0,1440(0,3\cos\theta_2 + 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3))(0,3\sen\theta_2 + 0,2\sen(\theta_2 + \theta_3))] \dot{\theta}_2 \\ &\quad + [0,025\cos(\theta_2 + \theta_3)\sen(\theta_2 + \theta_3) - 0,0288\sen(\theta_2 + \theta_3)(0,3\cos\theta_2) + 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_3 \\ C_{12} &= [0,0226\cos\theta_2\sen\theta_2 + 0,025\cos(\theta_2 + \theta_3)\sen(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad - 0,144(0,3\cos\theta_2 + 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3))(0,3\sen\theta_2 + 0,2\sen(\theta_2 + \theta_3))] \dot{\theta}_1 \\ C_{13} &= [0,025\cos(\theta_2 + \theta_3)\sen(\theta_2 + \theta_3) - 0,288\sen(\theta_2 + \theta_3)(0,3\cos\theta_2 + 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3))] \dot{\theta}_1 \\ C_{21} &= [-0,22\cos\theta_2\sen\theta_2 - 0,025\cos(\theta_2 + \theta_3)\sen(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad + 0,144(0,13\cos\theta_2 + 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3))(0,3\sen\theta_2 + 0,2\sen(\theta_2 + \theta_3))] \dot{\theta}_1 \\ C_{22} &= -0,0086\dot{\theta}_3\sen\theta_3 \\ C_{23} &= -0,0086(\dot{\theta}_2\sen\theta_3 + \dot{\theta}_3\sen\theta_3) \\ C_{31} &= [-0,25\cos(\theta_2 + \theta_3)\sen(\theta_2 + \theta_3) + 0,03\sen(\theta_2 + \theta_3)(0,3\cos\theta_2) + 0,2\cos(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1 \\ C_{32} &= 0,0086\sen\theta_3 \\ C_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se procede a incluir el efecto de las fuerzas gravitacionales y de la fricción viscosa. Se recuerda que:

$$N(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \beta \dot{\theta} \quad (5-15)$$

Por lo que se procede a calcular la energía potencial:

$$V(\theta) = m_1gh_1(\theta) + m_2gh_2(\theta) + m_3gh_3(\theta)$$

donde $g=9.81$

donde $h_i(\theta)$ se determina de la cinemática directa, por lo que:

$$h_1(\theta) = 0,22$$

$$h_2(\theta) = 0,3 - 0,13\text{sen}\theta_2$$

$$h_3(\theta) = 0,3(1 - \text{sen}\theta_2) - 0,2\text{sen}(\theta_2 + \theta_3)$$

Ahora se procede a calcular el efecto de la fricción viscosa:

$$\beta\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \beta\dot{\theta}_1 \\ \beta\dot{\theta}_2 \\ \beta\dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

donde $\beta = 0,16$

Por lo que ahora se procede a calcular el término $N(\theta, \dot{\theta})$:

$$N(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \beta\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0,16\dot{\theta}_1 \\ -0,1581\text{cos}\theta_2 - 0,3\text{cos}(\theta_2 + \theta_3) + 0,16\dot{\theta}_2 \\ -0,2825\text{cos}(\theta_2 + \theta_3) + 0,16\dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Con lo que se concluye la derivación de la dinámica del manipulador.

5.4. Control del manipulador robótico

Ya con la dinámica del manipulador, se procede a obtener la ley de control del manipulador. Utilizando la teoría vista en el capítulo 2, por lo que la ley de control es:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + N(\theta, \dot{\theta}) - (K_p e + K_d \dot{e}) \quad (5-16)$$

donde $e = \theta_d - \theta_a$, θ_a =posición angular actual y θ_d =posición angular deseada.

Por lo que ahora se comprueba la estabilidad del sistema usando el método de Lyapunov. Para ello se obtiene la dinámica del error en lazo cerrado, la cual resulta:

$$M(\theta)\ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{e} - K_p e - K_d \dot{e} = 0 \quad (5-17)$$

Y la función candidata de Lyapunov propuesta:

$$V(e, \dot{e}, t) = \frac{1}{2}\dot{e}^T M(\theta)\dot{e} + \frac{1}{2}e^T K_p e + \epsilon e^T M(\theta)\dot{e} \quad (5-18)$$

La cual es positiva definida para un ϵ suficientemente pequeña ya que $M(\theta) > 0$ y $K_p > 0$. Por lo que se obtiene ahora \dot{V} y se evalúa en las trayectorias, lo que resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T M\dot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^T \dot{M}\dot{e} + \dot{e}^T K_p e + \epsilon e^T (M\ddot{e} + \dot{M}\dot{e}) \\ &\quad - \dot{e}^T (K_d - \epsilon M)\dot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}^T (\dot{M} - 2C)\dot{e} + \epsilon e^T (-K_p e - K_d \dot{e} - C\dot{e} + \dot{M}\dot{e}) \\ &\quad - \dot{e}^T (K_d - \epsilon M)\dot{e} - \epsilon e^T K_p e + \epsilon e^T (-K_d + \frac{1}{2}\dot{M})\dot{e} \end{aligned}$$

Escogiendo una $\epsilon > 0$ lo suficientemente cercana a cero, ya que se quiere y espera un error mínimo, se asegura que la función \dot{V} es negativa definida y por lo tanto el sistema es exponencialmente estable.

Al haber comprobado la estabilidad de la ley de control general del manipulador, se procede ahora a mostrar un ejemplo de aplicación esta ley. Para ello, se toma la trayectoria en dos dimensiones obtenida en el apartado de cinemática inversa del capítulo anterior. Se define a la trayectoria s que seguirá el órgano terminal, la cual pasa por el punto $q = (l, 0)$ y al vector normal a esa línea como $n = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$, tal como se muestra en la figura 5-7. Cabe destacar que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ para el caso particular obtenido en el apartado de cinemática inversa, por lo que $n = (1, 0)$. Ahora, definida la trayectoria s y el vector normal

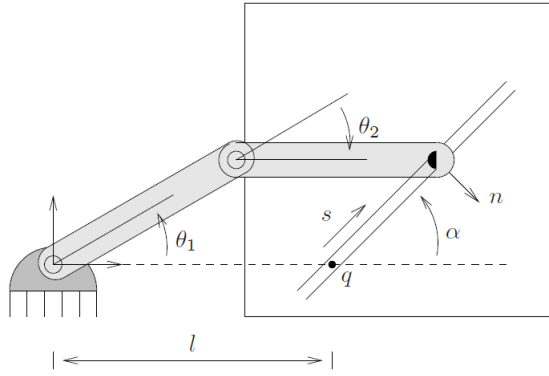


Figura 5-7: Movimiento de trayectoria plana

n , se define la propiedad de todos los puntos p que pertenecen a la trayectoria s como $(p - q) \cdot n = 0$. Por lo que la restricción sobre el manipulador es que el órgano terminal siga los puntos p que pertenecen a la trayectoria s . Por lo que si $p(\theta)$ es la posición del órgano terminal, la restricción es:

$$h(\theta) = (p(\theta) - \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5-19)$$

Substituyendo $p(\theta)$ obtenido por el producto de exponenciales que representa la cinemática directa del manipulador se obtiene que:

$$h(\theta) = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - l$$

Ahora se obtiene el gradiente de la restricción, la cual da la dirección de la fuerza normal:

$$\nabla h(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen} \theta_1 - l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Por lo que para parametrizar el movimiento deseado s , se tiene que cuando $s = 0$ el punto es $p = (l, 0)$. Por lo que se debe encontrar una función $f(s)$ tal que $h(f(s)) = 0$. Para encontrar la función f se recurre a la cinemática inversa obtenida con anterioridad. Por lo que resulta la coordenada x es constante y está definida por la distancia l , por lo que $x(s) = l$. Para la coordenada y , se tiene que ésta está parametrizada por s , por lo que resulta que $y(s) = s$. Ya definidas las coordenadas del punto $p(s) = (l, s)$, se procede a introducir estos valores en las ecuaciones de cinemática inversa obtenidas con

anterioridad, lo que resulta:

$$f(s) = \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{atan}\left(\frac{s}{l}\right) + \operatorname{acos}\left(\frac{s^2 + l^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{s^2 + l^2}}\right) \\ \pi + \operatorname{acos}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - s^2 - l^2}{2l_1l_2}\right) \end{bmatrix}$$

Posteriormente se obtiene el Jacobiano, el cual resulta:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-s(s^2 + l^2 - l_1^2 + l_2^2)}{2l_1(s^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{s^2 + l^2 + l_1^2 - l_2^2}{4l_1^2(s^2 + l^2)}}} + \frac{l}{s^2 + l^2} \\ \frac{2s}{\sqrt{4l_1^2l_2^2 - (s^2 + l^2 - l_1^2 - l_2^2)^2}} \end{bmatrix}$$

Ahora que se tiene el Jacobiano en términos de s se procede a obtener la ley de control específica al problema de la línea, basándose en la ley de control general obtenida anteriormente, por lo que la ley de control queda como:

$$\tau = M(\theta)J(\ddot{s} - K_v\dot{e}_s - K_p e_s) + (C(\theta, \dot{\theta})J + M(\theta)\dot{J})\dot{s} \quad (5-20)$$

donde $e_s = s - s_d$, K_v y K_p son las ganancias del control y M y C son las matrices de inercial y Coriolis obtenidas de la ley de control general. Por lo que al aplicar la ley de control al manipulador y con las ganancias:

$$K_p = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 8,3 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 0,85 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix}$$

La dinámica de error se vuelve exponencialmente estable, tal como se espera. La figura 5-8 muestra la dinámica del error obtenida al programar la trayectoria en el manipulador. Por lo que se concluye la derivación de la ley de control.

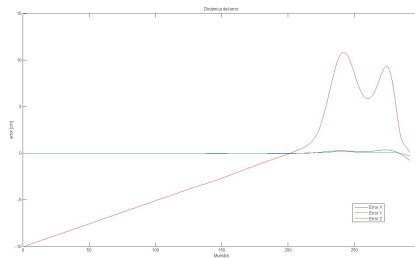


Figura 5-8: Dinámica del error del Manipulador Robótico

Capítulo 6

Ejemplo para la docencia: Obtención de una trayectoria usando acelerómetros y Matlab

6.1. Objetivo

El objetivo de esta práctica es obtener la representación de una trayectoria previamente programada en el manipulador utilizando Matlab.

6.2. Ejercicio 1

Programar una trayectoria ya definida en el manipulador robótico.

6.2.1. Resolución del ejercicio 1

Se procede a programar la trayectoria obtenida en el capítulo anterior usando la técnica de cinemática inversa. El plano en el cual se realizará la trayectoria es en el plano YZ. Se puede consultar este procedimiento en el capítulo anterior.

6.3. Ejercicio 2

Ya programada la trayectoria, se procede a correr el programa y permitir que el manipulador siga la trayectoria. Se obtienen las lecturas del acelerómetro del órgano terminal. Se recuerda que las mediciones del acelerómetro están en término de g (i.e. si una lectura del acelerómetro es de 2.5, significa que el acelerómetro esta registrando una aceleración de $2.5 * g \frac{m}{s^2}$).

Después de obtener las lecturas, se prosigue a pasar los datos por un filtro pasabajas para eliminar en la medida de lo posible el ruido. Se recomienda usar un filtro digital de fase cero, cuyo comando es *filt*. Más información acerca del filtro y del comando se puede obtener escribiendo *helpfilt* en la consola de Matlab.

Ya después de haber filtrado los datos se pide graficar los perfiles de la aceleración inercial.

6.3.1. Resolución del ejercicio 2

Las gráficas obtenidas de la lectura del acelerómetro se muestran en la figura 6-1.

Se puede observar como se tiene varios picos debido al ruido, esa es la razón por la cual se debe filtrar.

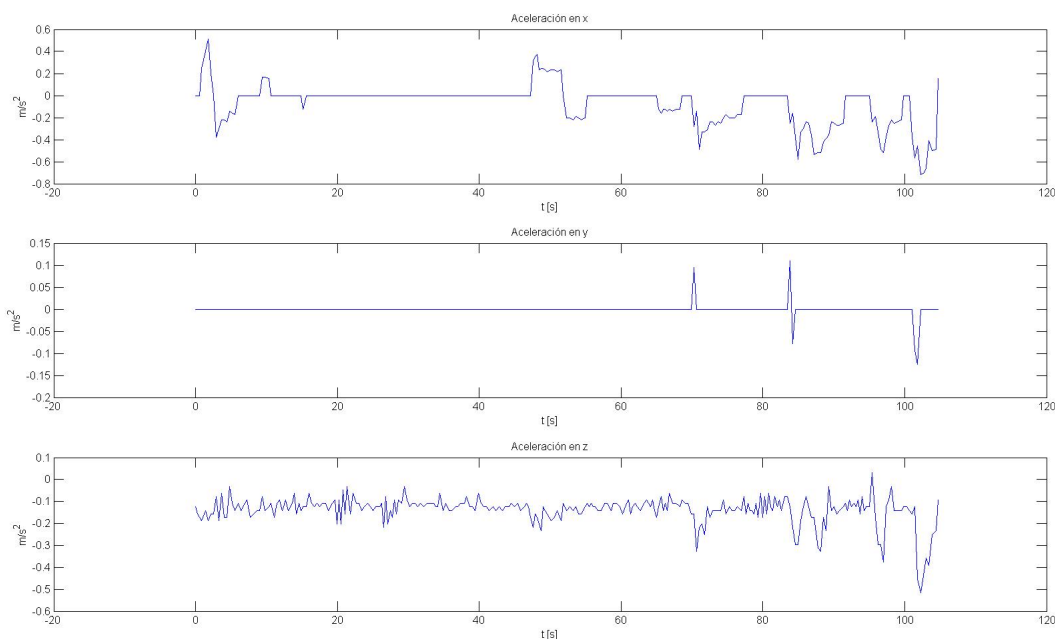


Figura 6-1: Aceleraciones sin filtrar

Por lo que después de aplicar un filtro digital de fase cero, los datos de aceleración se muestran en la figura 6-2

Se observa como las aceleraciones ahora tienen un comportamiento suave, en donde no hay picos ni

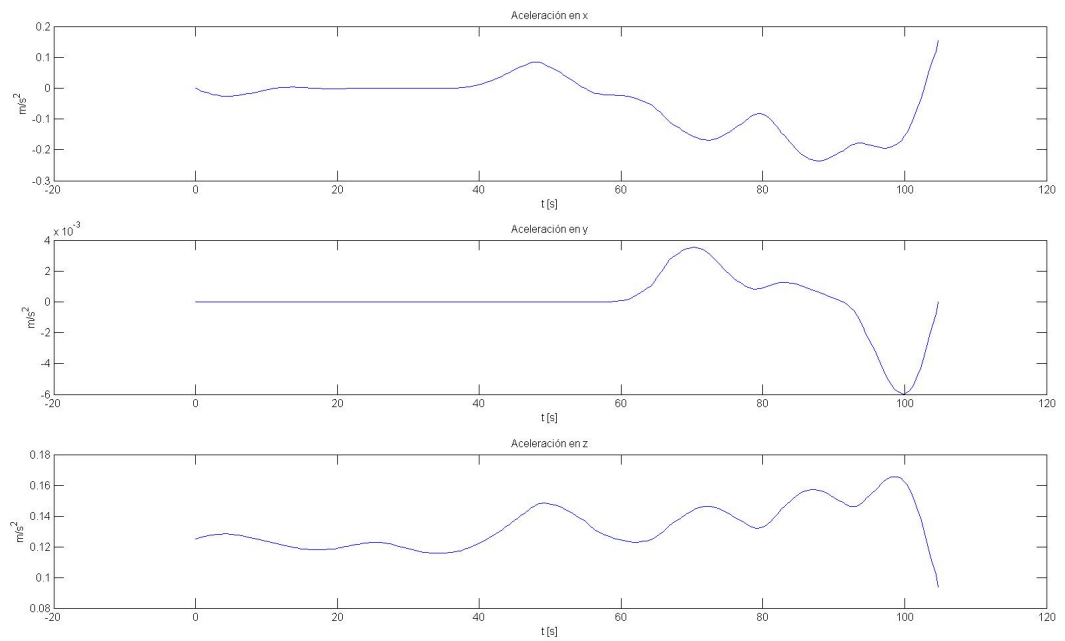


Figura 6-2: Aceleraciones después de ser filtrados

cambios drásticos, los cuales provocarían que las derivadas en los puntos donde hay un cambio abrupto fueran extremadamente grandes.

Sin embargo, estas aceleraciones están medidas con respecto al sistema de referencia del órgano terminal, el cual tiene una orientación diferente al marco de referencia inercial, además de que tienen incorporada la aceleración de la gravedad. Debido a la diferencia entre las referencias simplemente no es posible restar a la componente z la gravedad. Por lo que el primer paso es hacer una transformación de cuerpo rígido a cada vector de aceleración obtenido. Para ello se debe conocer los ángulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ que nos dan la rotación entre el sistema de referencia del órgano terminal y del inercial. Para obtener los ángulos se recurre vector coseno director de cada vector aceleración. Es decir:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$M = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

donde:

$$\begin{aligned} \cos\theta_x &= \frac{a_x}{M} \\ \cos\theta_y &= \frac{a_y}{M} \\ \cos\theta_z &= \frac{a_z}{M} \end{aligned}$$

por lo que los ángulos se obtienen como:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \text{acos}\left(\frac{a_x}{M}\right) \\ \theta_y &= \text{acos}\left(\frac{a_y}{M}\right) \\ \theta_z &= \text{acos}\left(\frac{a_z}{M}\right) \end{aligned}$$

Ya que se obtienen los ángulos, se procede a realizar la transformación de cuerpo rígido a los vectores. Se sabe que las matrices de rotación para los ejes x, y y z son las siguientes:

$$\begin{aligned} R_x(\theta_x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\text{sen}\theta_x \\ 0 & \text{sen}\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} & R_y(\theta_y) &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \text{sen}\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \\ R_z(\theta_z) &= \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\text{sen}\theta_z & 0 \\ \text{sen}\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como se aprendió en los capítulos anteriores, las transformaciones de cuerpo rígido se les puede aplicar la regla de composición, que se logra simplemente efectuando las multiplicaciones matriciales entre las matrices de rotación, lo que resulta:

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y \cos\theta_z & -\cos\theta_y \text{sen}\theta_z & \text{sen}\theta_y \\ -\text{sen}\theta_x \text{sen}\theta_y \cos\theta_z + \cos\theta_x + \text{sen}\theta_z & \text{sen}\theta_x \text{sen}\theta_y \text{sen}\theta_z + \cos\theta_x \cos\theta_z & -\text{sen}\theta_x \cos\theta_y \\ -\cos\theta_x \text{sen}\theta_y \cos\theta_z + \text{sen}\theta_x \text{sen}\theta_z & \cos\theta_x \text{sen}\theta_y \text{sen}\theta_z + \text{sen}\theta_x \cos\theta_z & \cos\theta_x \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

Por lo que a cada vector obtenido de las mediciones se le debe aplicar la transformación de cuerpo rígido $g(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ con sus ángulos correspondientes. Un algoritmo se puede consultar en el anexo F. Ya habiendo transformado todos los vectores, se procede a restar el vector de la aceleración de la gravedad a la componente z para obtener la aceleración inercial. La figura 6-3 muestra los perfiles la aceleración

inercial que sufrió el órgano terminal.

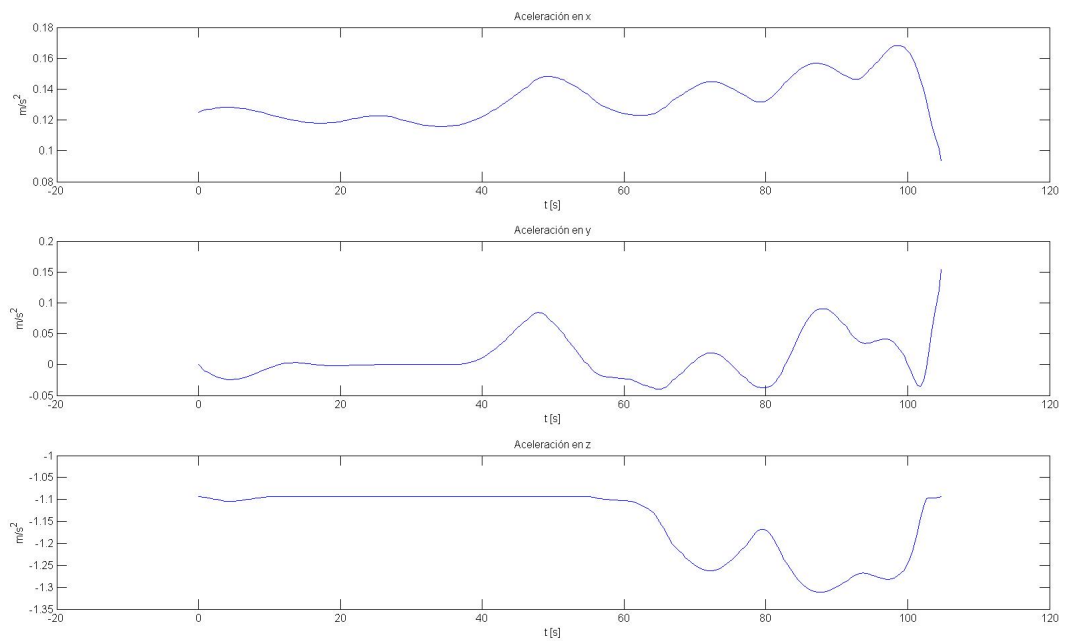


Figura 6-3: Aceleración inercial

6.4. Ejercicio 3

Ahora que se tiene la aceleración inercial, se procede a obtener los perfiles de velocidad y posición. Por lo que se pide graficar los perfiles de velocidad y posición. Se recomienda utilizar el comando *cumtrapz* para efectuar la integración numérica. No hay que olvidar al integrar las condiciones iniciales. Ya obtenidos los perfiles de posición, se pide graficar la trayectoria obtenida en 3D y sus respectivas proyecciones en los planos XY, XZ y YZ.

6.4.1. Resolución del ejercicio 3

Se procede a utilizar la la función *cumtrapz* para integrar numéricamente los valores de la aceleración inercial. Las condiciones iniciales para la velocidad son cero, debido a que el manipulador parte del reposo. Después de efectuar la integración para las 3 componentes de la aceleración, los perfiles de velocidad que se muestran en la figura 6-4. Ya teniendo los perfiles de velocidad, se procede a integrarlos para determinar los perfiles de posición. Las condiciones iniciales para la posición para este ejemplo son $z = 15$ y $y = 30$. Por lo que se muestran los perfiles de posición en la figura 6-5 Ahora que se tiene los perfiles de

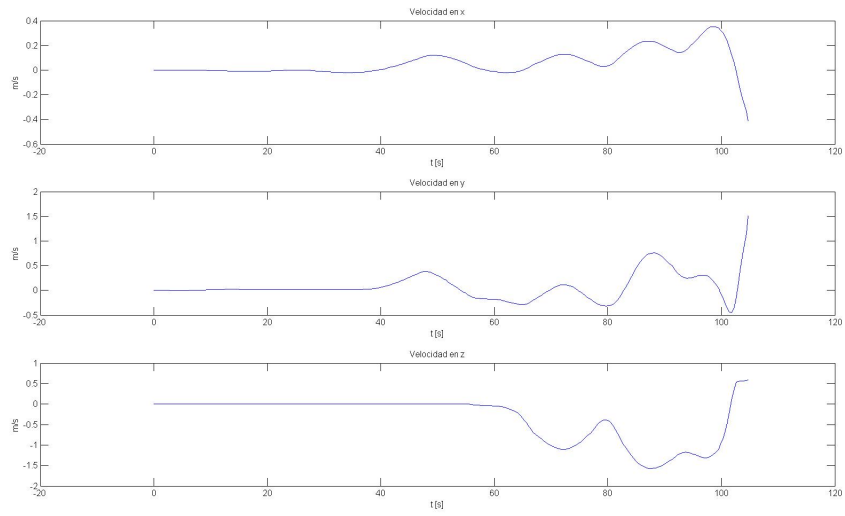


Figura 6-4: Perfil de velocidades

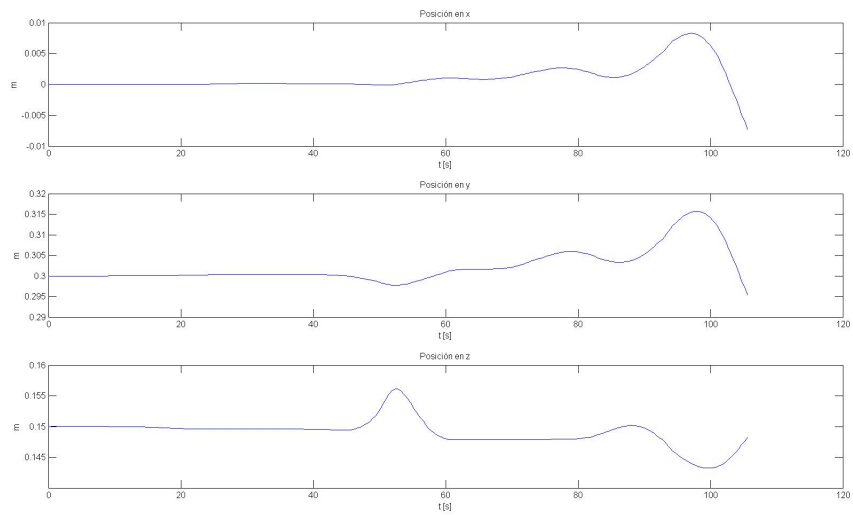


Figura 6-5: Perfil de posición

posición se procede a obtener la trayectoria en 3D y sus respectivas proyecciones. La figura 6-6 muestra los resultados. Ya obtenida la trayectoria y los perfiles se da como concluida la práctica.

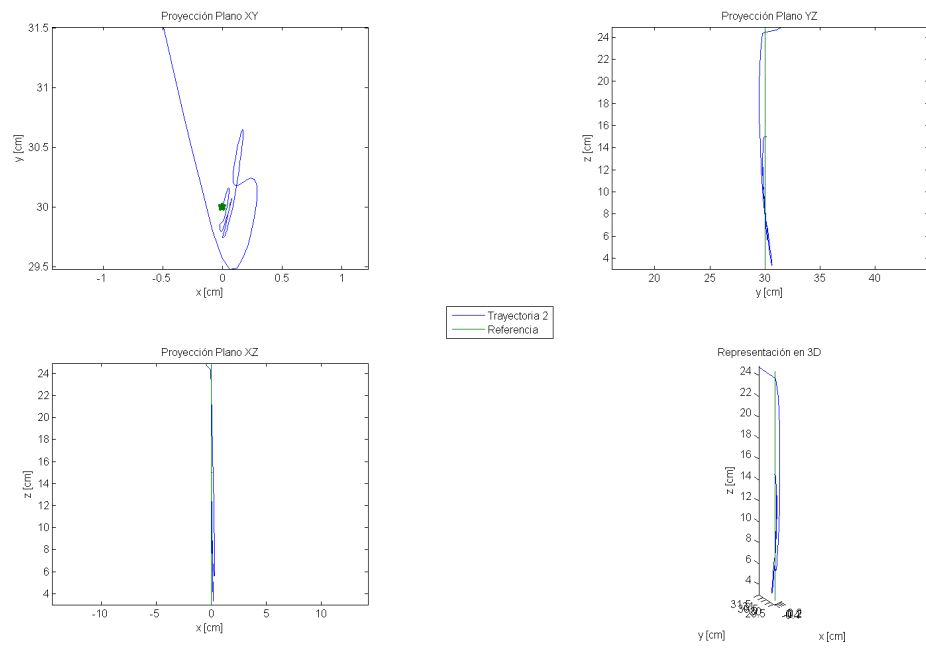


Figura 6-6: Trayectoria obtenida y sus proyecciones

Capítulo 7

Conclusiones

Esta tesis da a conocer un método de análisis acerca de los manipuladores robóticos el cual puede ser utilizado no sólo para los robots seriales, sino también para los paralelos. La simplicidad y generalidad de este método es evidente. Ya que con un par de ecuaciones se puede obtener el modelo de cualquier manipulador robótico. La obtención del espacio de trabajo del manipulador se vuelve extremadamente sencilla, ya que se tiene en una sola matriz toda la información de la cinemática del manipulador. La obtención del Jacobiano, que de manera tradicional es derivar parcialmente varias ecuaciones vectoriales, se vuelve tan sencilla como obtener los *twists* de cada junta y acomodarlos en una matriz. El Jacobiano obtenido de esta forma nos da información importante acerca del sistema, ya que se pueden obtener las singularidades con el simple hecho de obtener el kernel de la matriz, algo visto en Álgebra Lineal. Además, se substituye todo el análisis de equilibrio de fuerzas para cada junta necesario, para obtener los momentos y las fuerzas de reacción, a simplemente transponer el Jacobiano y multiplicarlo por el *wrench* correspondiente.

En la Facultad de Ingeniería, el método para describir la cinemática de un manipulador robótico está dado por los parámetros *Denavit-Hartenberg*, que son de hecho el estándar *de facto* en robótica. Estos parámetros son obtenidos al aplicar una serie de reglas que especifican la posición y orientación de los marcos de referencia L_i , adjuntados a cada eslabón del manipulador. Posteriormente se construyen las transformaciones homogéneas entre los marcos de referencia. Los parámetros son cuatro escalares α_i, a_i, d_i y ϕ_i para cada marco de referencia L_i . Éstos parámetros están disponibles para los manipuladores industriales estándar. Puede llegar pensarse que los parámetros *Denavit-Hartenberg* pueden resultar más sencillos de manipular, ya que sólo son cuatro, mientras que para los *twists*, se necesitan dos parámetros con 3 componentes por cada uno. Sin embargo, resulta más sencillo en todas las instancias, construir los *twists* de cada junta directamente, simplemente conociendo la orientación de eje de revolución y escogiendo el

punto más conveniente sobre dicho eje. El uso de la fórmula del producto de exponenciales resulta más atractiva debido a que sólo se necesitan dos marcos de referencia, el inercial y el del órgano terminal, por lo que esta propiedad, combinada con el significado geométrico de los *twists* hacen a este método mucho más atractivo que los parámetros *Denavit-Hartenberg*, instruidos en la Facultad.

El análisis dinámico del sistema, el cual es usualmente tratado como un problema de mecánica clásica, es reducido en complejidad. El hecho de obtener una simple ecuación ordinaria diferencial vectorial para poder describir el sistema es un paso muy grande, a tener que hacer el análisis de fuerzas, energía y momentos de cada junta y luego interconectarlas para obtener el análisis de manipulador. El hecho de que se tenga una sola ecuación para describir la dinámica del sistema ayuda a simplificar el trabajo de la obtención de una ley de control. Utilizando el método clásico, el control involucra analizar varias variables de estado, mínimo dos por cada junta, la velocidad y la posición, por lo que resulta laborioso estar relacionando la dinámica de cada junta para obtener el modelo general. Sin embargo, el método propuesto en esta tesis simplifica el trabajo, al parametrizar todo en término de los *twists* de cada junta, sólo se necesita obtener tres matrices, las cuales incluyen toda la dinámica del sistema. Por lo que ya no se necesitan tres o más variables de estado por junta, sino que se reduce al control de una variable de estado por junta, la cuál es el torque que se le debe aplicar a cada junta. Lo cuál es una simplificación en el área de la dinámica y del control bastante importante.

A pesar de que este método tiene muchas bondades y su simplicidad en la teoría es evidente, este método tiene una desventaja muy importante. Los cálculos necesarios se vuelen repetitivos, tediosos y bastante largos; ya que hacer sumatorias y multiplicaciones matriciales a mano se vuelve una ardua tarea. Por lo que la desventaja más importante del método propuesto en esta tesis es que es indispensable el uso de herramientas de cómputo, como Matlab, para su uso y aplicación efectiva. Sin embargo, al tener herramientas de cómputo accesibles y al alcance del alumnado de la Facultad, el método de análisis por el Álgebra de Lie, resulta muy atractivo para la enseñanza y aprendizaje de manipuladores robóticos.

Debido a las diferentes y variadas escuelas y métodos de diseño que existen en la actualidad, se vuelve una tarea complicada decidir cuál es el mejor y el más efectivo. Un pregunta bastante retórica, debido que la respuesta es muy relativa, ya que un método puede servir en una situación determinada mejor que otro. Es por eso que en esta tesis se propone un método para el diseño de un producto mecatrónico, en el cual se mezcla y busca hacer una simbiosis entre las prácticas de diseño a las que he estado expuesto, en la Facultad como en la Universidad de California campus Berkeley. El método se busca que sea lo más sencillo, vertical y efectivo posible. Ya que se divide en módulos bien definidos en los cuales se enfoca totalmente en la mejor resolución del módulo. La secuencia está definida como se presenta debido a que hay un orden bien definido. Se debe tener primero todos los elementos mecánicos para después poder encontrar los actuadores más pertinentes. Al tener el sistema eléctrico y mecánico bien definidos, se

plantea el uso de las herramientas de la electrónica que más se adecuen a las necesidades de los módulos anteriores. Por lo que al dividir en módulos secuenciales bien definidos el diseño, y al dividir los problemas que surgen de éstos se logra simplificar el problema. En un trabajo en equipo, cada subgrupo del equipo debe trabajar en su respectiva parte y recibir la retroalimentación de otros subgrupos para poder así llegar al producto más adecuado, tal como se enseña el diseño en esta Facultad.

Este producto mecatrónico, al nacer de la necesidad de un laboratorio para la enseñanza de la robótica, abre muchas posibilidades para la didáctica. Ya que este producto no sólo puede ser utilizado en la enseñanza de la robótica, sino, gracias al hecho de ser de arquitectura abierta, se puede utilizar en las materias de control, de instrumentación, de programación entre otras. En la materia de control se pueden obtener diferentes leyes de control para el sistema y aplicar esas leyes directamente en un sistema físico. Ya que las materias de control impartidas en esta Facultad se apoya demasiado en simulaciones y no se puede emplear los conocimientos adquiridos en un sistema físico, sino hasta el proyecto final. Sin embargo, las leyes de control vistas en clase se pueden aplicar a este producto mecatrónico para que los alumnos puedan ver de manera física, y no sólo en una gráfica de Simulink, el comportamiento del sistema resultante de la aplicación de las diferentes leyes de control aprendidas y aplicadas.

Al ser este un producto mecatrónico, necesita interactuar con el mundo que lo rodea; para ello se utilizan sensores que ayudan al producto a percibir el mundo. Además, necesita de actuadores que hagan que el producto manipule su espacio de trabajo. Los actuadores necesitan circuitos de potencia y control, así como los sensores necesitan circuitos de energización y control muy diferentes a lo que necesitan los actuadores. Estos circuitos y el diseño de los mismos se enseñan en la materia de Instrumentación. Por lo que este producto mecatrónico de arquitectura abierta puede ser una herramienta importante para la enseñanza de esta materia, ya que los alumnos podrán ver la forma en que los circuitos funcionan en un producto completamente integrado y no únicamente ver los circuitos trabajar de forma separada en una protoboard. Además de que abre la puerta a la impartición, de una forma más formal, al procesamiento de señales y adquisición y manipulación de datos. Ya que las señales de los sensores tendrán ruido, *offsets*, interferencias, entre muchos otros problemas, los cuales, de no ser tratados, provocarán comportamientos erráticos en el producto. Es por ello que el uso de los diferentes tipos de filtros, digitales y analógicos, y su teoría deben ser empleados al máximo. Y no sólo es el tratamiento de las señales de entrada, sino también las señales de salida y control, ya que si se manda una señal de control y ésta es sujeta al ruido inherente de los conductores o a la interferencia de diferentes componentes, el señal de control será errónea y provocará comportamientos no deseados en el producto. El estudio de las señales es un tema muy importante que puede ser practicado con las diferentes señales que el manipulador crea y recibe. También la adquisición y manipulación de datos es un tema de suma importancia. Un ejemplo de la práctica de este tema se da en esta tesis. El poder saber qué hacer con los datos obtenidos de

las señales, previamente procesadas, es un tema de suma importancia para el ingeniero mecatrónico. Ya que de nada sirve tener una señal de un sensor y datos procesados sino se sabe que hacer con ellos. En esta tesis se muestra desde como implementar el acelerómetro en la posición del órgano terminal hasta el procesamiento de la señal que éste envía, hasta la manipulación de los datos resultantes con los que se puede recrear la trayectoria del manipulador en la computadora. Y éste es sólo un ejemplo de como la manipulación correcta de los datos obtenidos por los sensores pueden hacer.

El producto al ser de arquitectura abierta, se le puede hacer interactuar con diversas herramientas como la computadora. Debido a que un microcontrolador no tiene la capacidad para realizar operaciones con fuerte peso computacional, se restringe mucho lo que se puede hacer con un programa embebido. Sin embargo, si se le desarrolla una interfaz con una computadora, la computadora puede hacer las operaciones más complejas, mientras que el programa embebido puede hacer las tareas menos exigentes. Por lo que se abren varias oportunidades para el producto. El desarrollo de estas interfaces involucra un conocimiento de técnicas de programación, la cual es una materia impartida en la Facultad. Por lo que el manipulador puede ser sometido a diferentes programas de computación en cualquier lenguaje y en cualquier sistema operativo, gracias a que sólo necesita una interfaz serial, para realizar tareas específicas. Por lo que los alumnos tendrán una herramienta para poder practicar, de forma tangible, sus programas. Además de aprender a crear una interfaz que se comunica con un sistema físico, y no sólo programará interfaces que verá trabajar únicamente en la pantalla, sino tendrá la oportunidad de crear interfaces que usará en la pantalla de la computadora, pero tendrá consecuencias en un sistema físico tangible.

Estas son sólo algunas de las muchas posibilidades que el producto mecatrónico tiene para la enseñanza. Sin embargo, el hecho de ser sólo un producto limita mucho lo que se puede hacer con él. Sin embargo, al ser este producto mecatrónico creado desde bosquejos, es fácilmente replicable. Ya que todos los datos, planos y consideraciones necesarias para la creación del producto están incluidas en esta tesis. Además de que su precio en número cerrados es de 27000 pesos mexicanos. Lo cual lo hace muy atractivo para efectos de enseñanza, ya que sus similares tienen precios hasta 10 veces mayores, además de que son de arquitectura cerrada, por lo que no tienen la posibilidad de ser alterados para efectos didácticos.

Por lo que esta tesis cumple los objetivos de la demostración y aplicación de una teoría alternativa de análisis de los manipuladores robóticos, además de que entrega un prototipo funcional de un producto mecatrónico con un potencial muy importante para la enseñanza de diversas áreas fundamentales de la Ingeniería Mecatrónica.

Appendices

Apéndice A

Bosquejos

A continuación se presentan los bosquejos realizados para la realización del manipulador robótico.

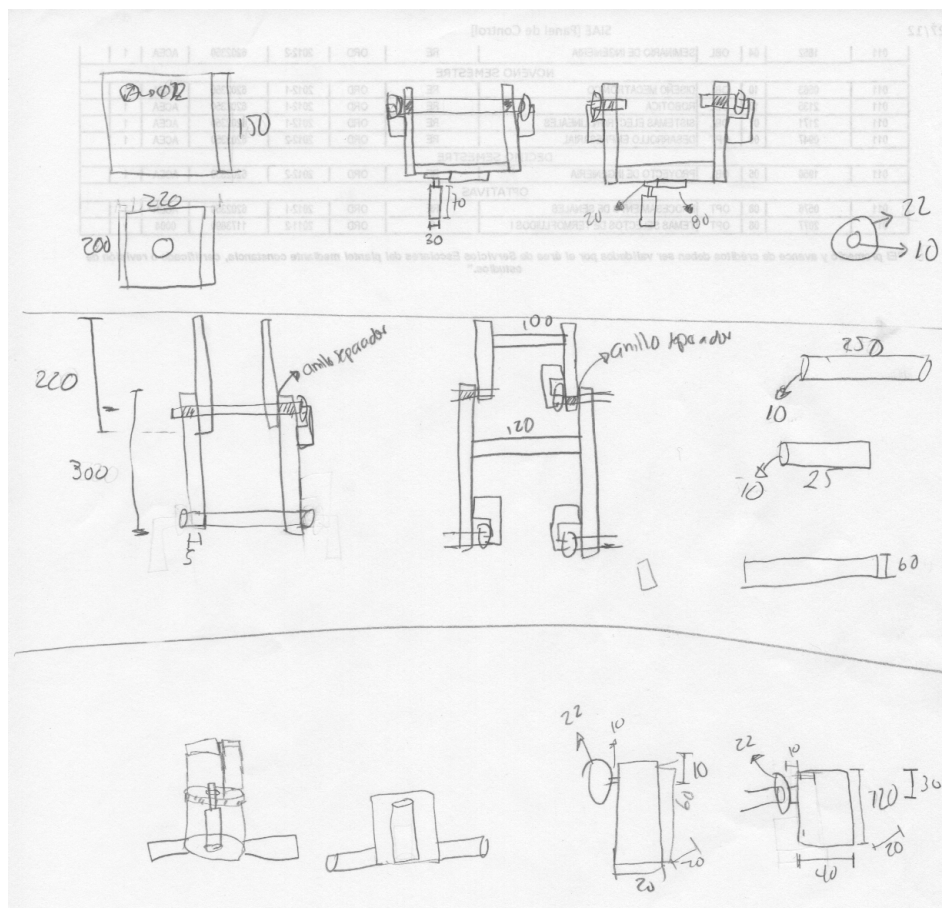
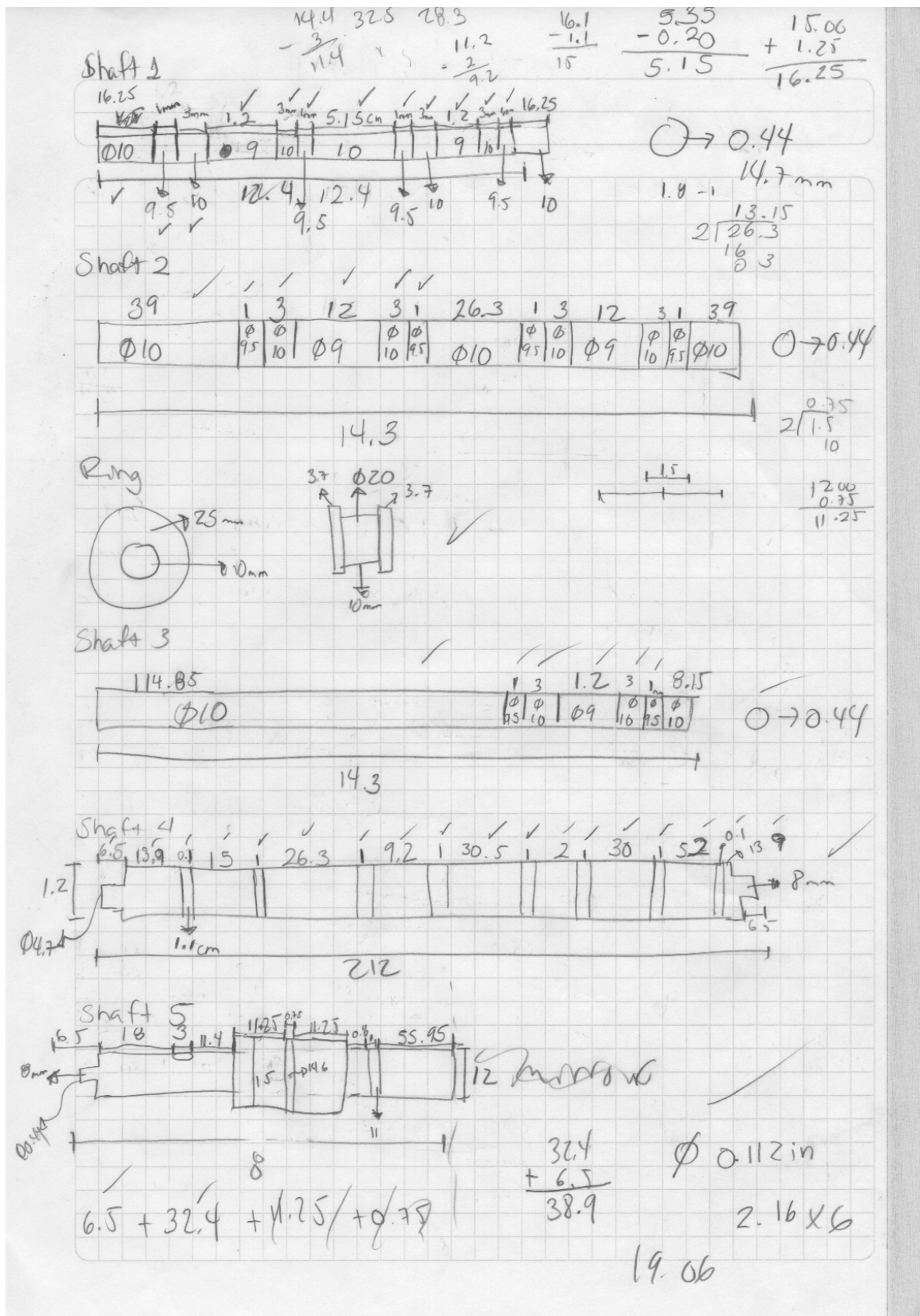
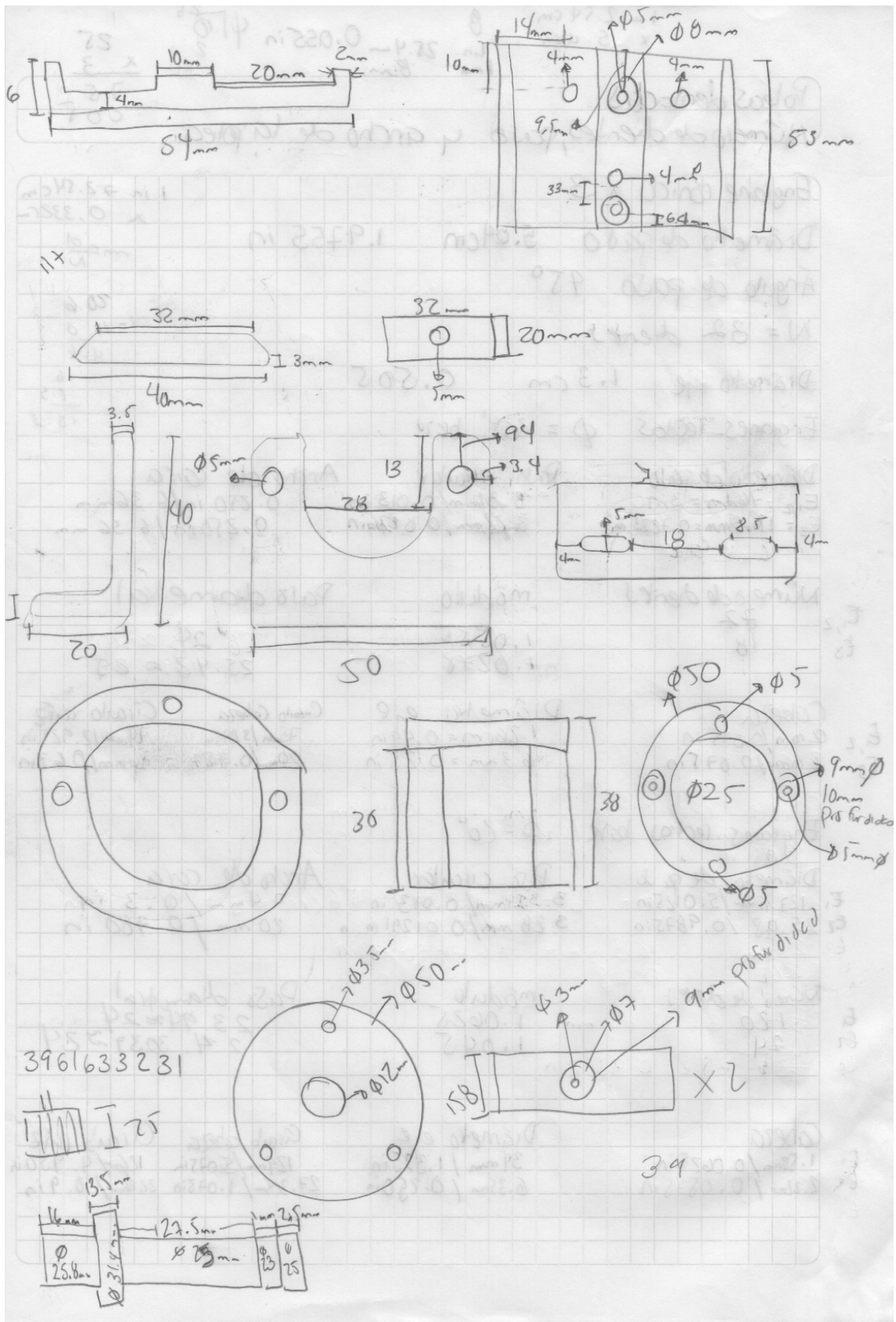


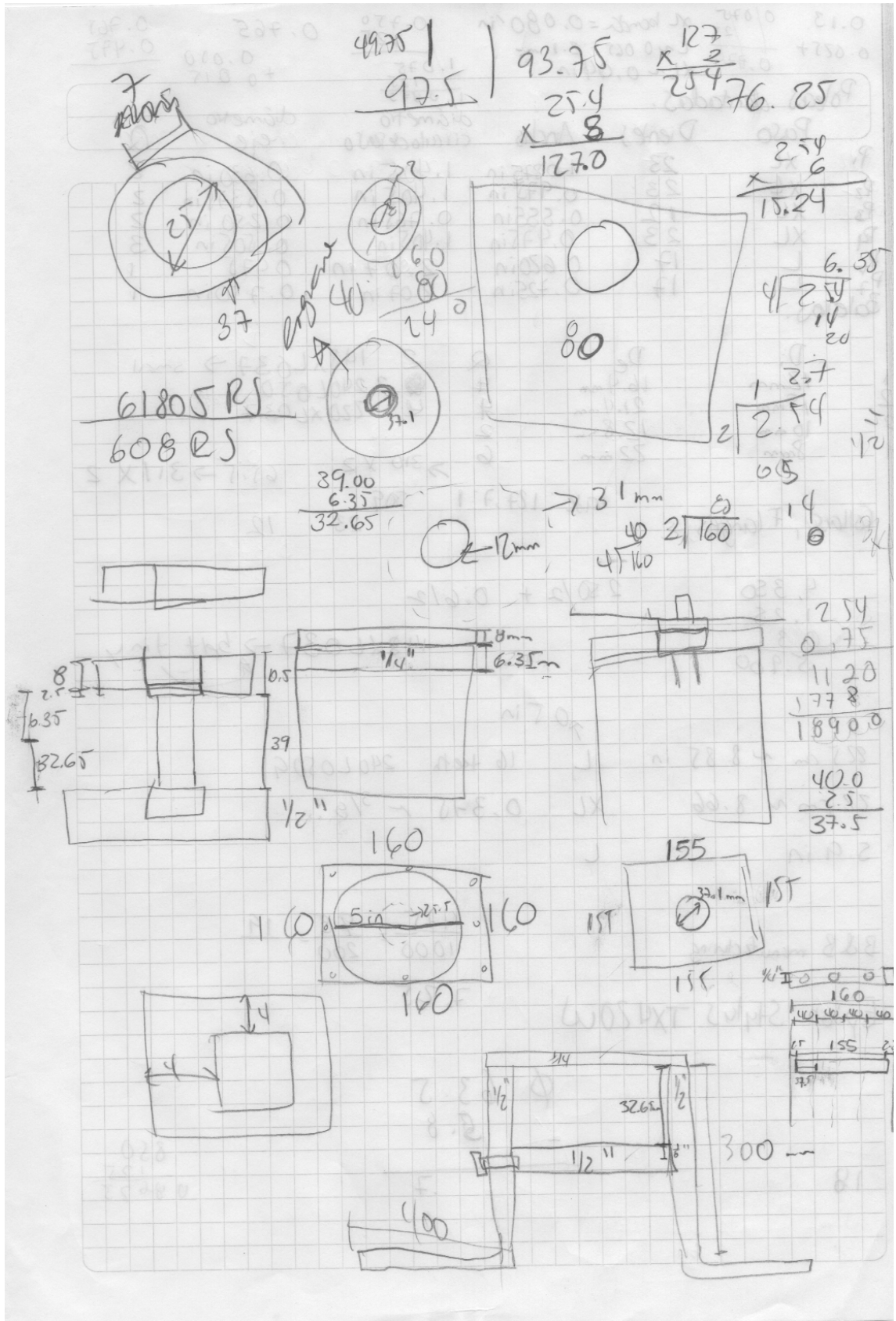
Figura A-1: Bosquejo uno



122
 Figura A-2: Bosquejo dos



125
 Figura A-5: Bosquejo cinco

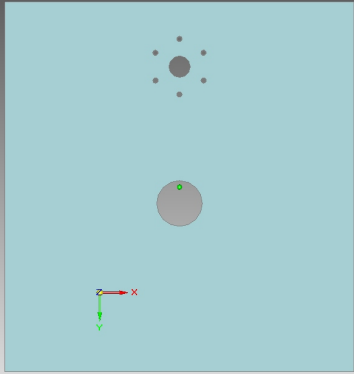


126
 Figura A-6: Bosquejo seis

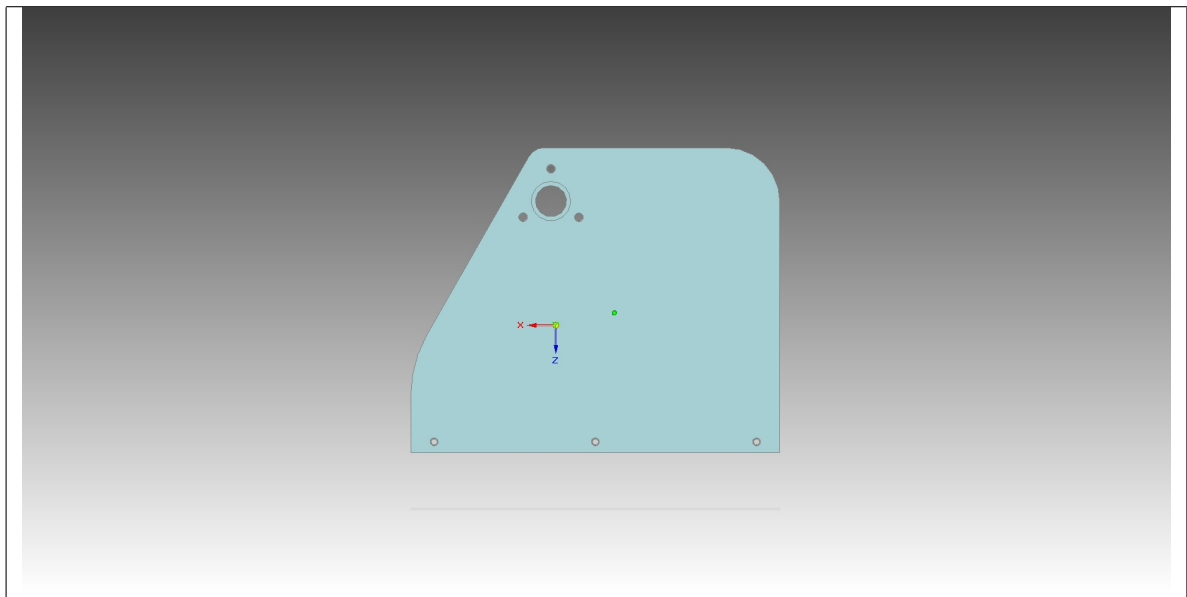
Apéndice B

Dibujos en CAD y Propiedades Mecánicas

Cuadro B-1: Cara inferior


Propiedades mecánicas
Material= Aluminio Masa= 0.747 [kg] Volumen= 275616.499 [mm ³] Área superficial= 86831.01 [mm ²] I_{xx} = 0.005 [kg · m ²] I_{yy} = 0.004 [kg · m ²] I_{zz} = 0.009 [kg · m ²]

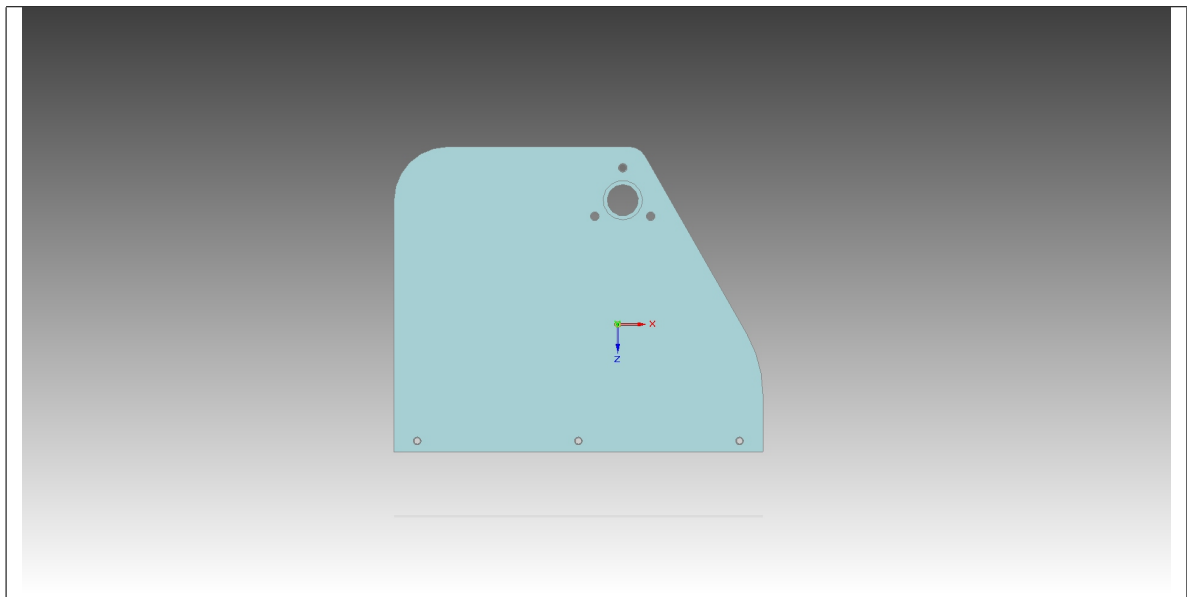
Cuadro B-2: Cara lateral uno



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio
Masa= 0.354 [kg]
Volumen= 130370.705 [mm³]
Área superficial= 64199.79 [mm²]
 I_{xx} = 0.03756 [kg · m²]
 I_{yy} = 0.039271 [kg · m²]
 I_{zz} = 0.004637 [kg · m²]

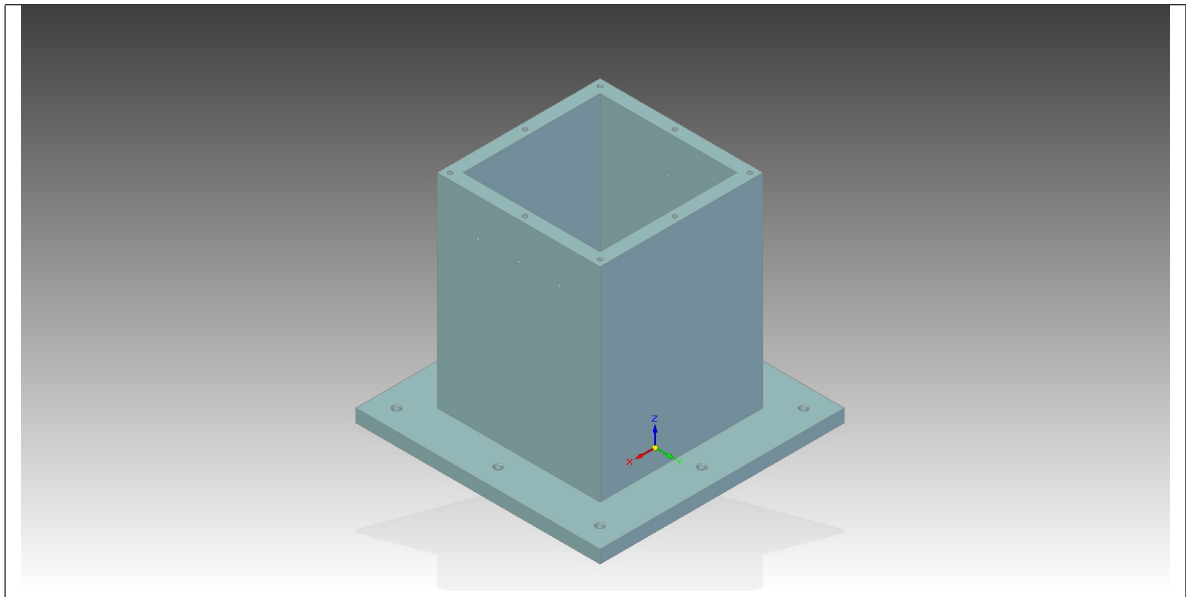
Cuadro B-3: Cara lateral dos



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio
Masa= 0.354 [kg]
Volumen= 130370.705 [mm³]
Área superficial= 64199.79 [mm²]
 I_{xx} = 0.03756 [kg · m²]
 I_{yy} = 0.039271 [kg · m²]
 I_{zz} = 0.004637 [kg · m²]


Cuadro B-4: Base



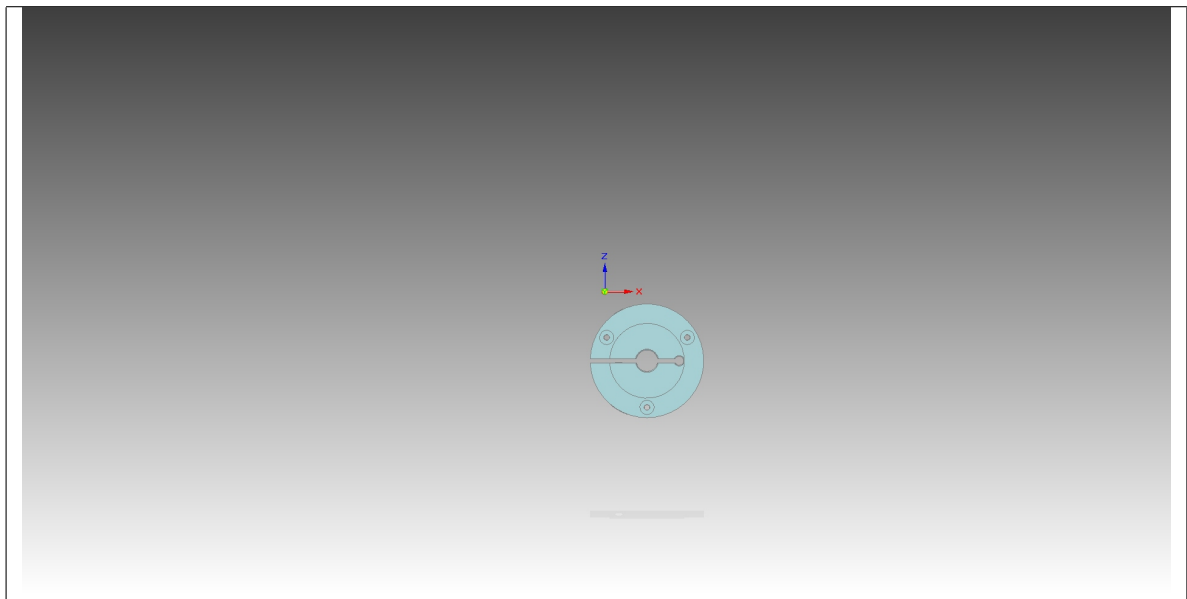
Propiedades mecánicas

Material= Acero
Masa= 6.028 [kg]
Volumen= 2222863.252 [mm³]
Área superficial= 366055.44 [mm²]
 I_{xx} = 0.103 [kg · m²]
 I_{yy} = 0.089 [kg · m²]
 I_{zz} = 0.063 [kg · m²]

Cuadro B-5: Sujetador codo


Propiedades mecánicas
Material= Aluminio Masa= 0.076 [kg] Volumen= 28118.066 [mm ³] Área superficial= 7649.54 [mm ²] $I_{xx} = 0.0001$ [kg · m ²] $I_{yy} = 0.0001$ [kg · m ²] $I_{zz} = 0.0001$ [kg · m ²]

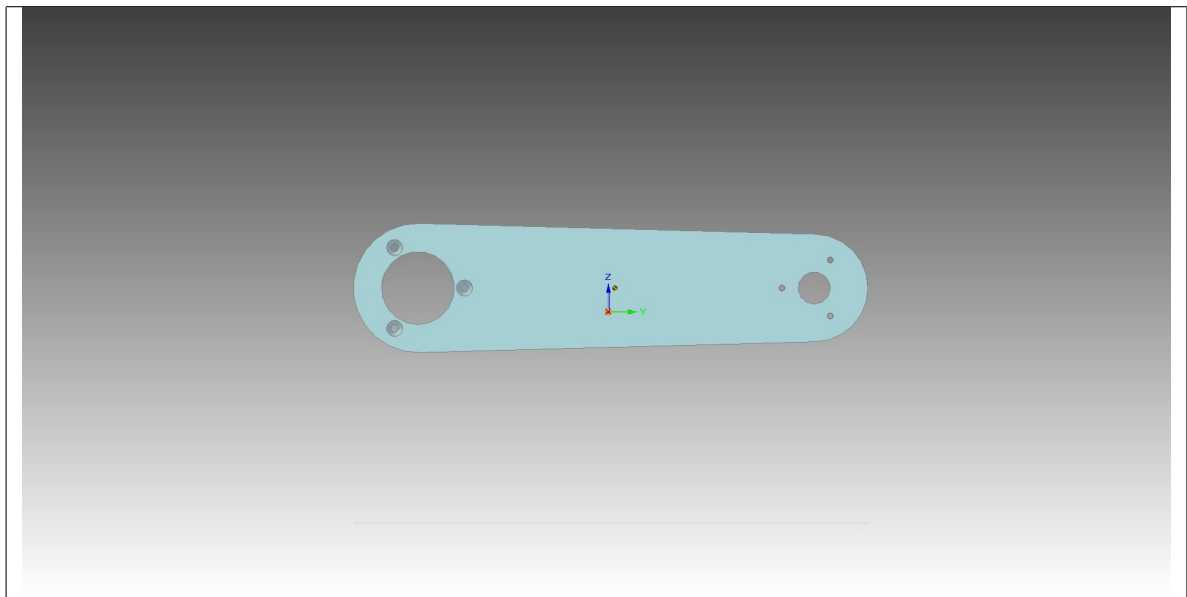
Cuadro B-6: Sujetador hombro



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio
Masa= 0.091 [kg]
Volumen= 33577.149 [mm³]
Área superficial= 11072.58 [mm²]
 I_{xx} = 0.0001 [kg · m²]
 I_{yy} = 0.0001 [kg · m²]
 I_{zz} = 0.0001 [kg · m²]

Cuadro B-7: Eslabón uno



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio

Masa= 0.133 [kg]

Volumen= 49011.349 [mm³]

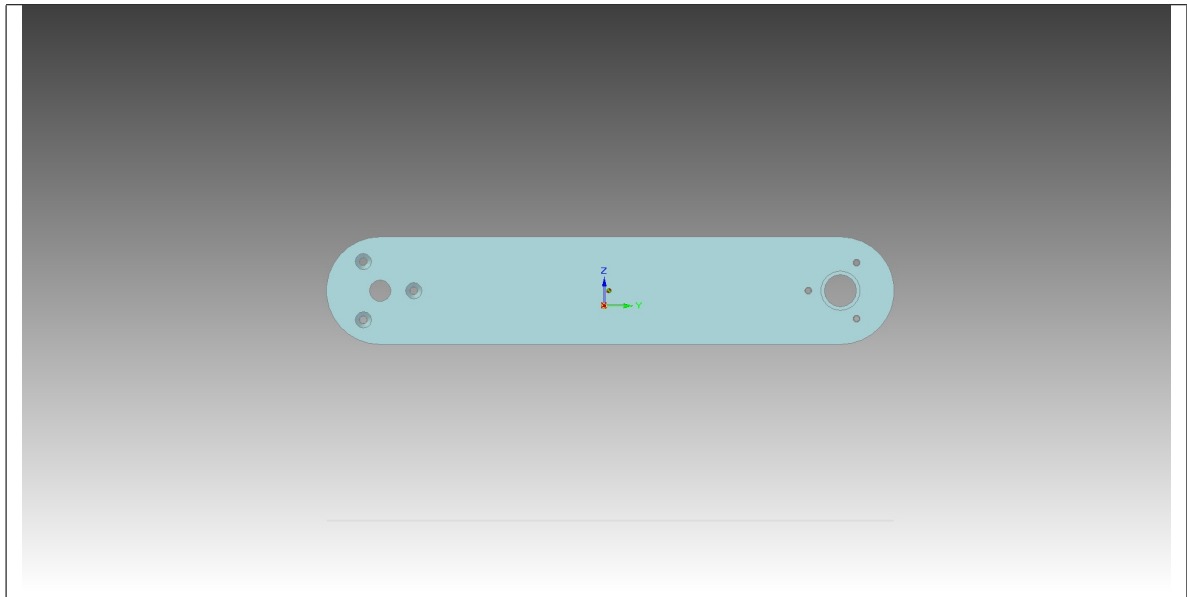
Área superficial= 35539.91 [mm²]

I_{xx} = 0.031200 [kg · m²]

I_{yy} = 0.028440 [kg · m²]

I_{zz} = 0.003742 [kg · m²]

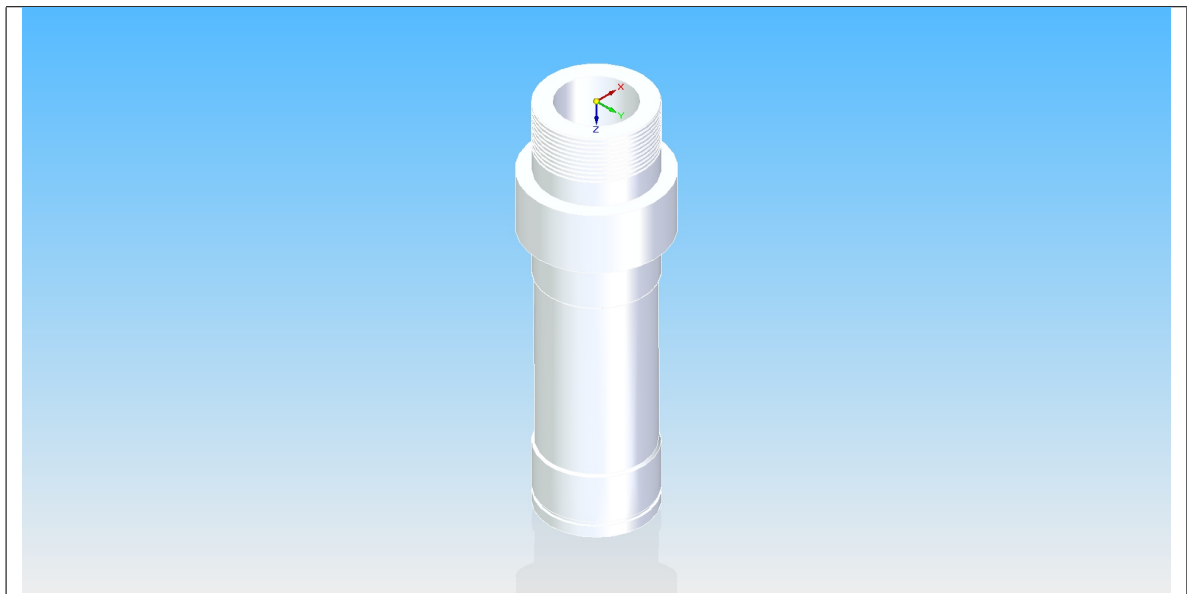
Cuadro B-8: Eslabón dos



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio
Masa= 0.144 [kg]
Volumen= 53129.783 [mm³]
Área superficial= 38178.46 [mm²]
 I_{xx} = 0.062467 [kg · m²]
 I_{yy} = 0.043820 [kg · m²]
 I_{zz} = 0.01879 [kg · m²]

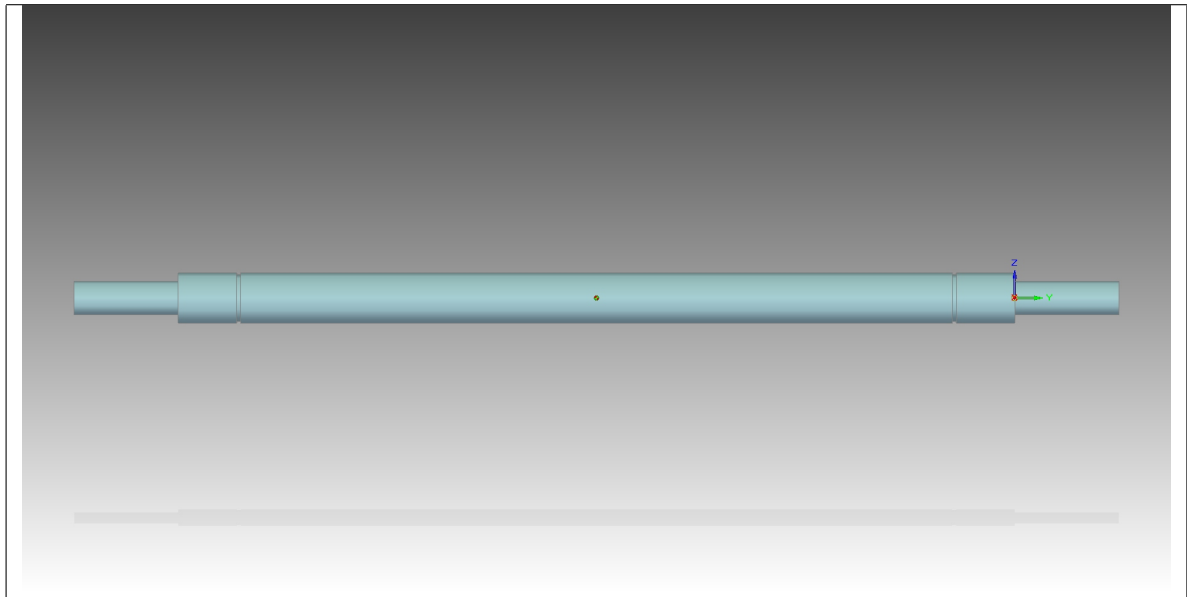
Cuadro B-9: Eje de la base



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio
Masa= 0.144 [kg]
Volumen= 53129.783 [mm³]
Área superficial= 38178.46 [mm²]
 $I_{xx} = 0.000192$ [kg · m²]
 $I_{yy} = 0.000192$ [kg · m²]
 $I_{zz} = 0.000009$ [kg · m²]

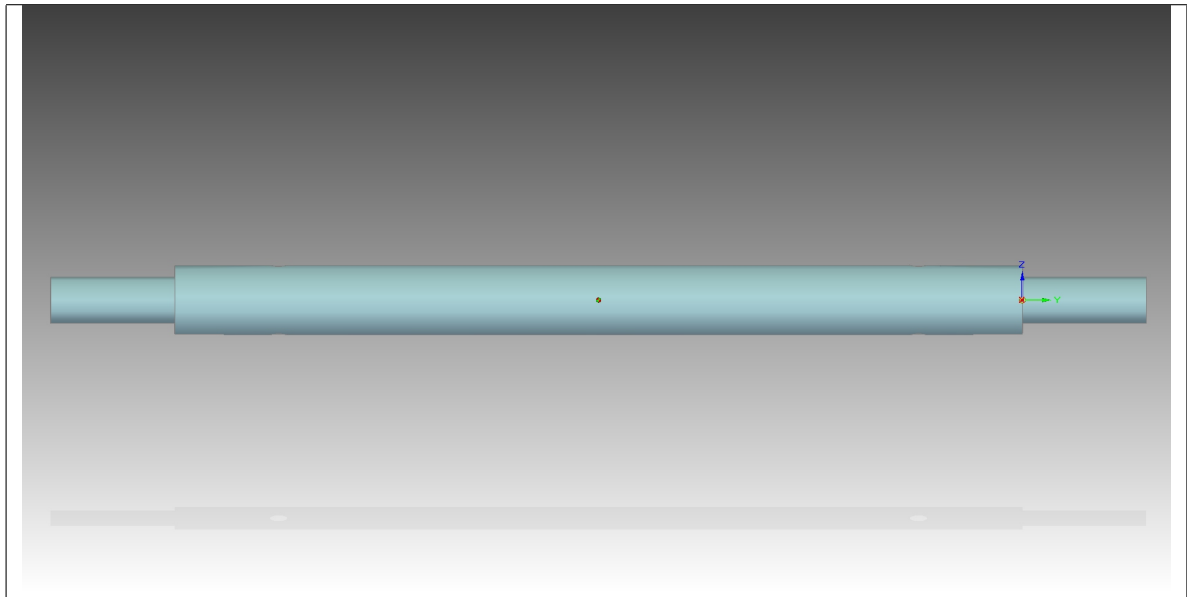
Cuadro B-10: Eje del hombro



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio
Masa= 0.068369 [kg]
Volumen= 25209.710249 [mm³]
Área superficial= 38178.46 [mm²]
 $I_{xx} = 0.000985$ [kg · m²]
 $I_{yy} = 0.000001$ [kg · m²]
 $I_{zz} = 0.000985$ [kg · m²]

Cuadro B-11: Eje del codo



Propiedades mecánicas

Material= Aluminio
Masa= 0.050493 [kg]
Volumen= 18618.467198 [mm³]
Área superficial= 7042.808203 [mm²]
 $I_{xx} = 0.000395$ [kg · m²]
 $I_{yy} = 0.000001$ [kg · m²]
 $I_{zz} = 0.000395$ [kg · m²]

Apéndice C

Planos

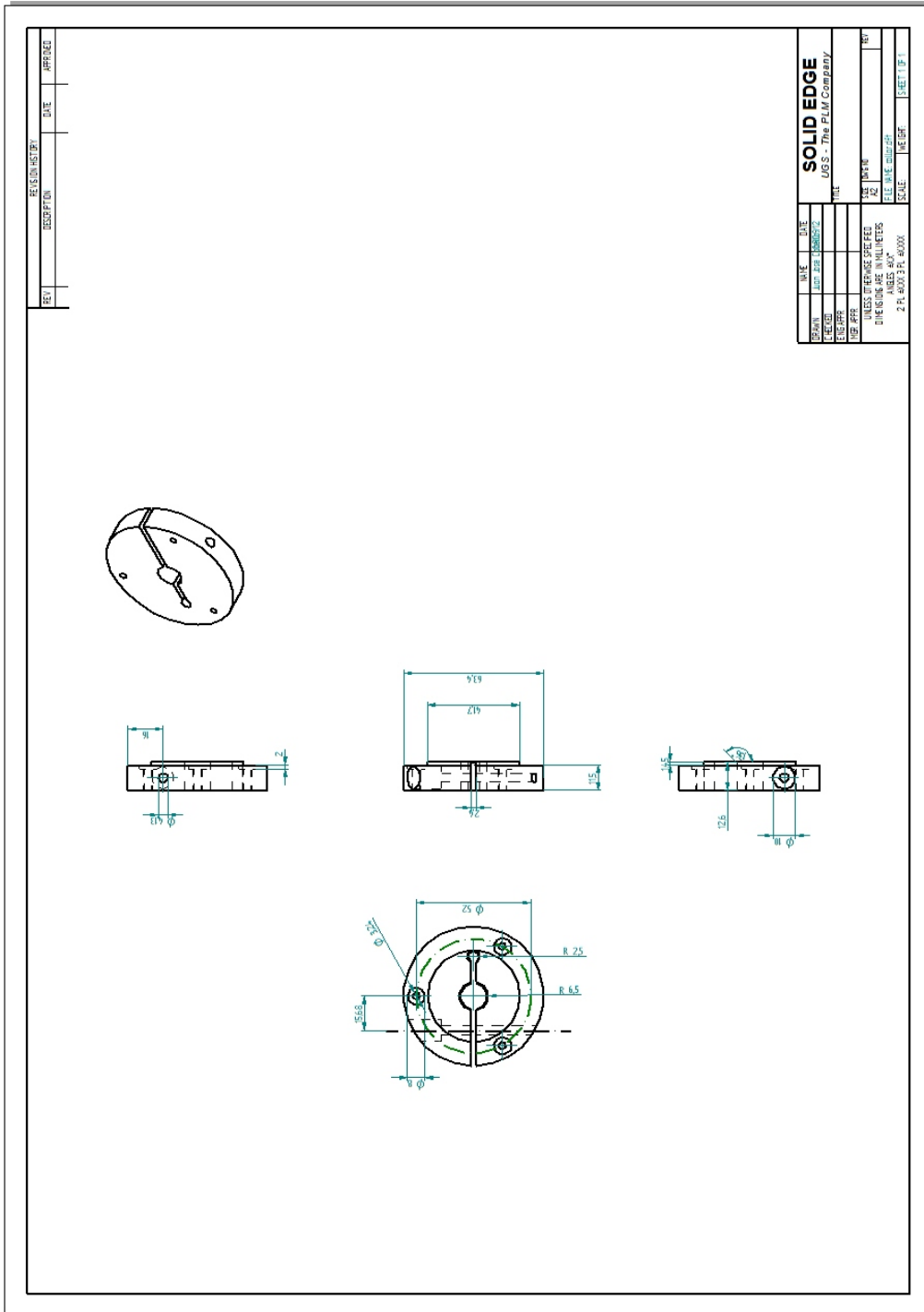


Figura C-1: Plano de la abrazadera del hombro

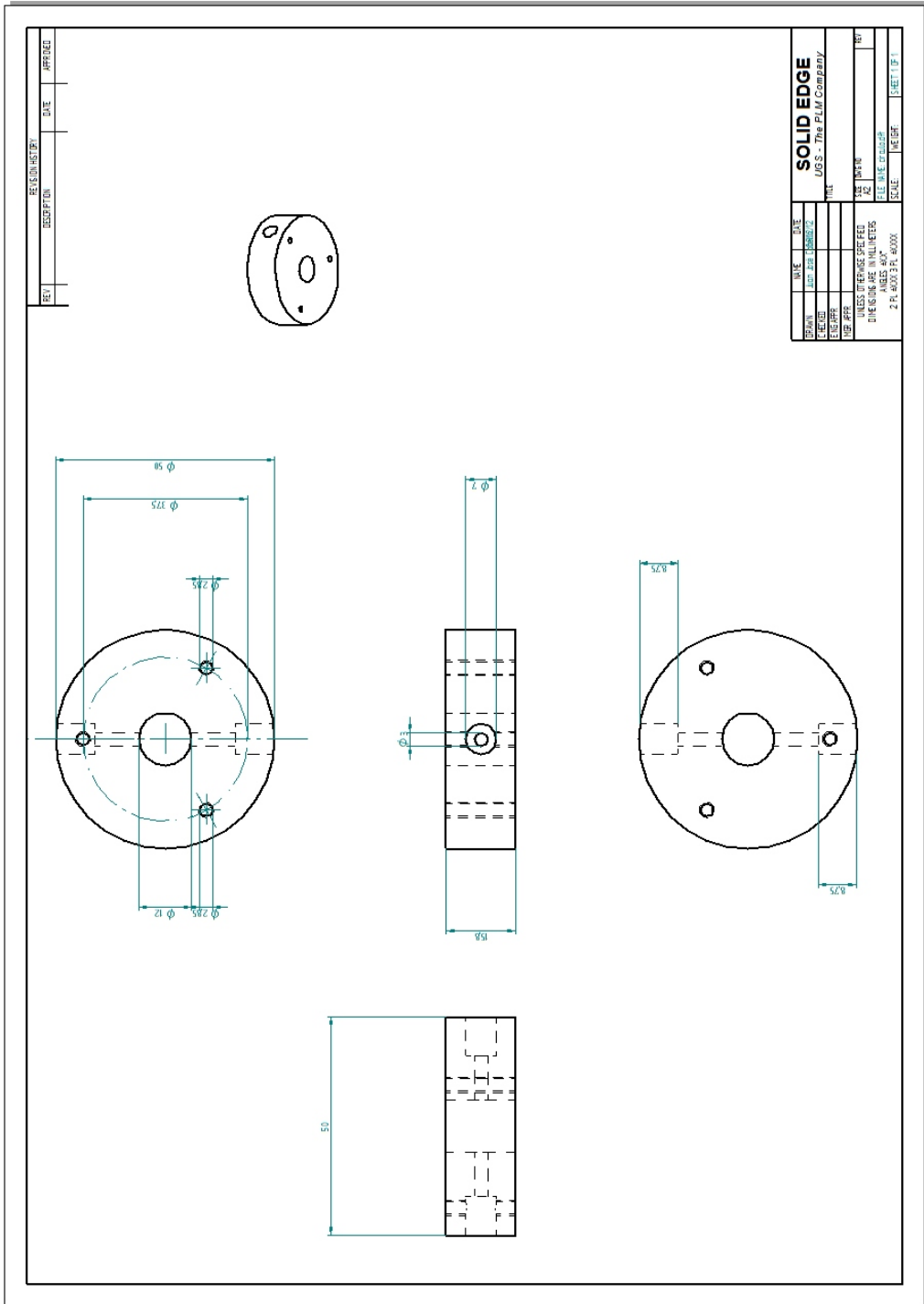


Figura C-2: Plano de la abrazadera del código

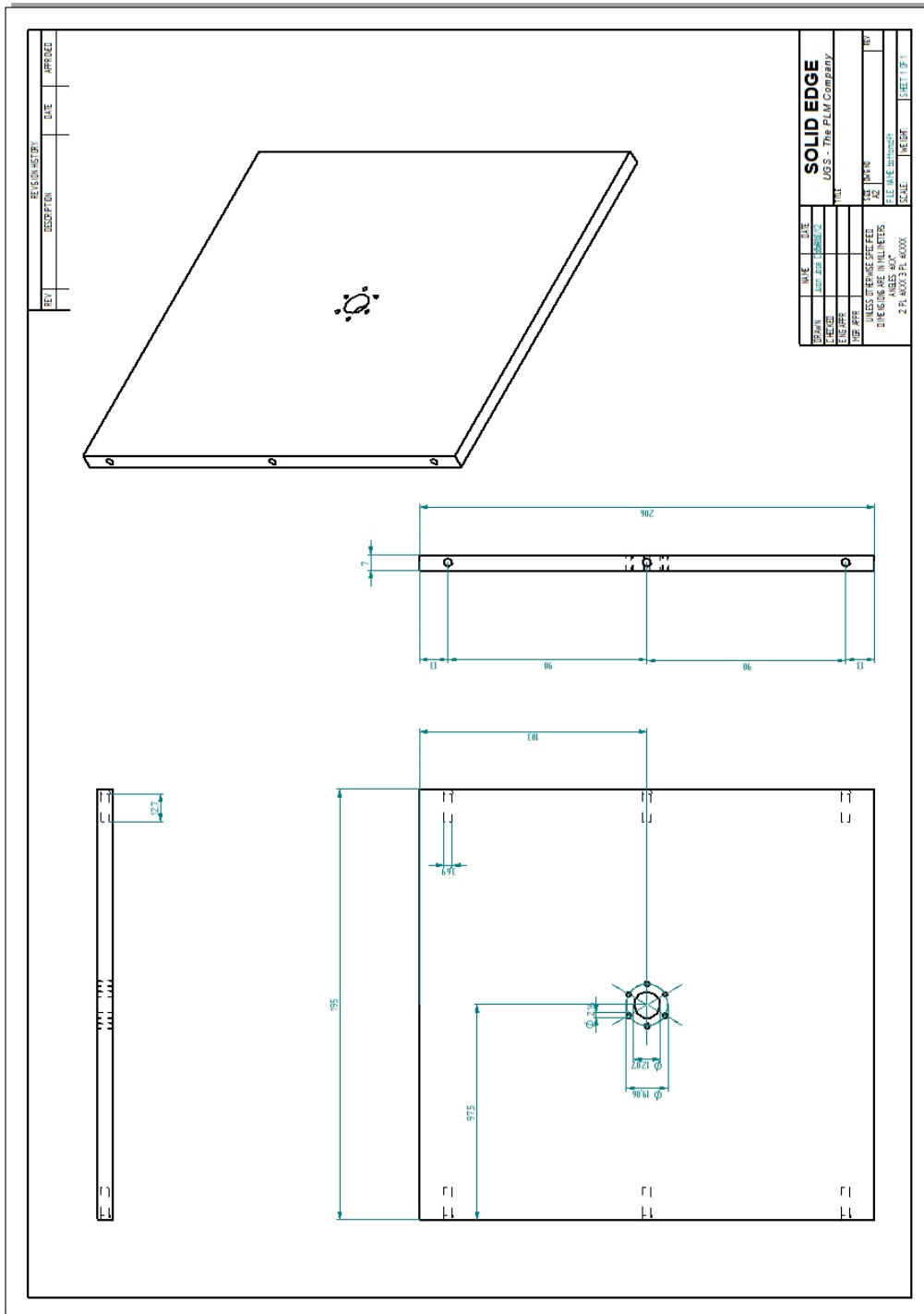


Figura C-3: Plano de la base

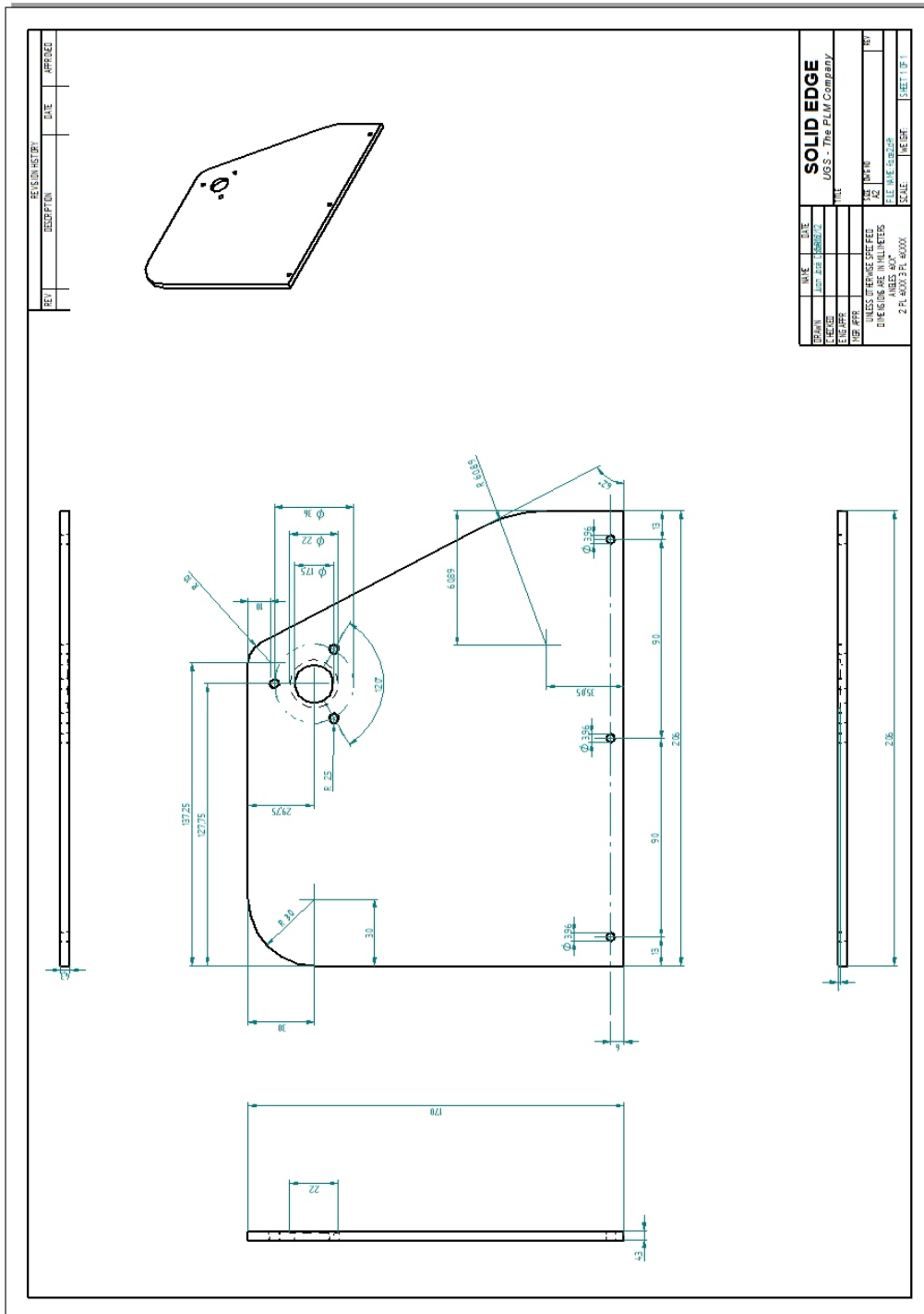


Figura C-4: Plano de la cara lateral derecha

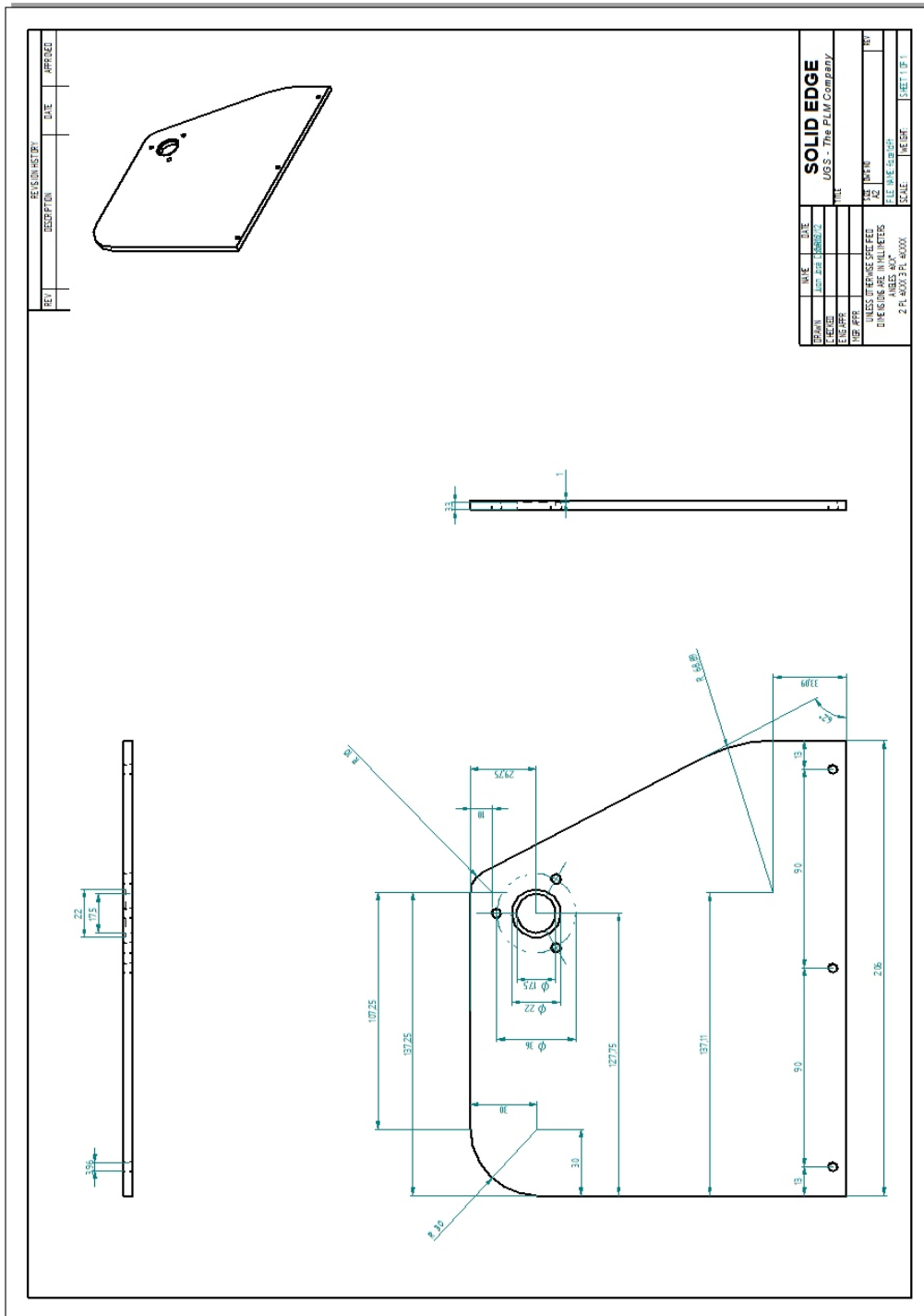


Figura C-5: Plano de la cara lateral izquierda

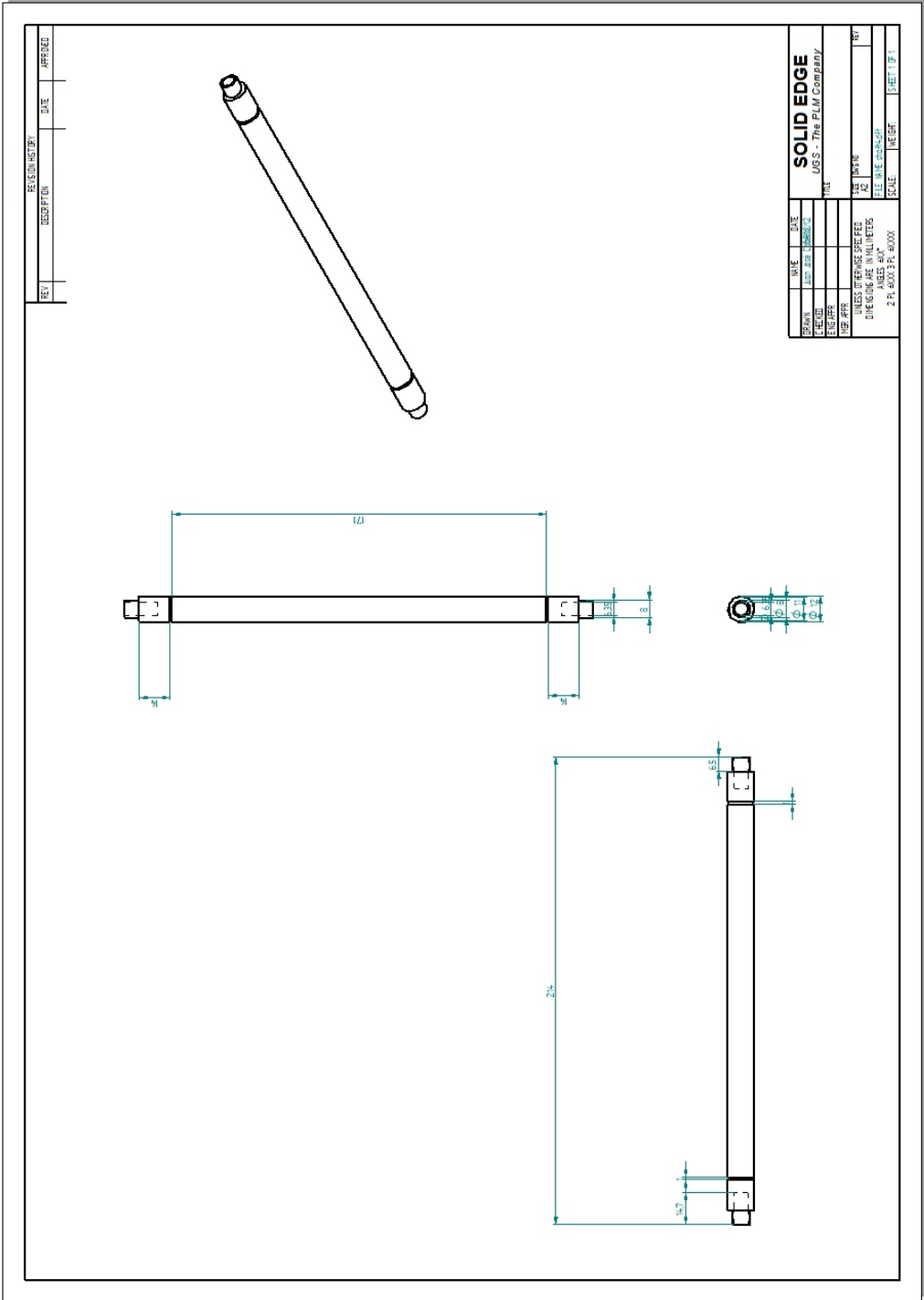


Figura C-6: Plano del eje de la junta del hombro

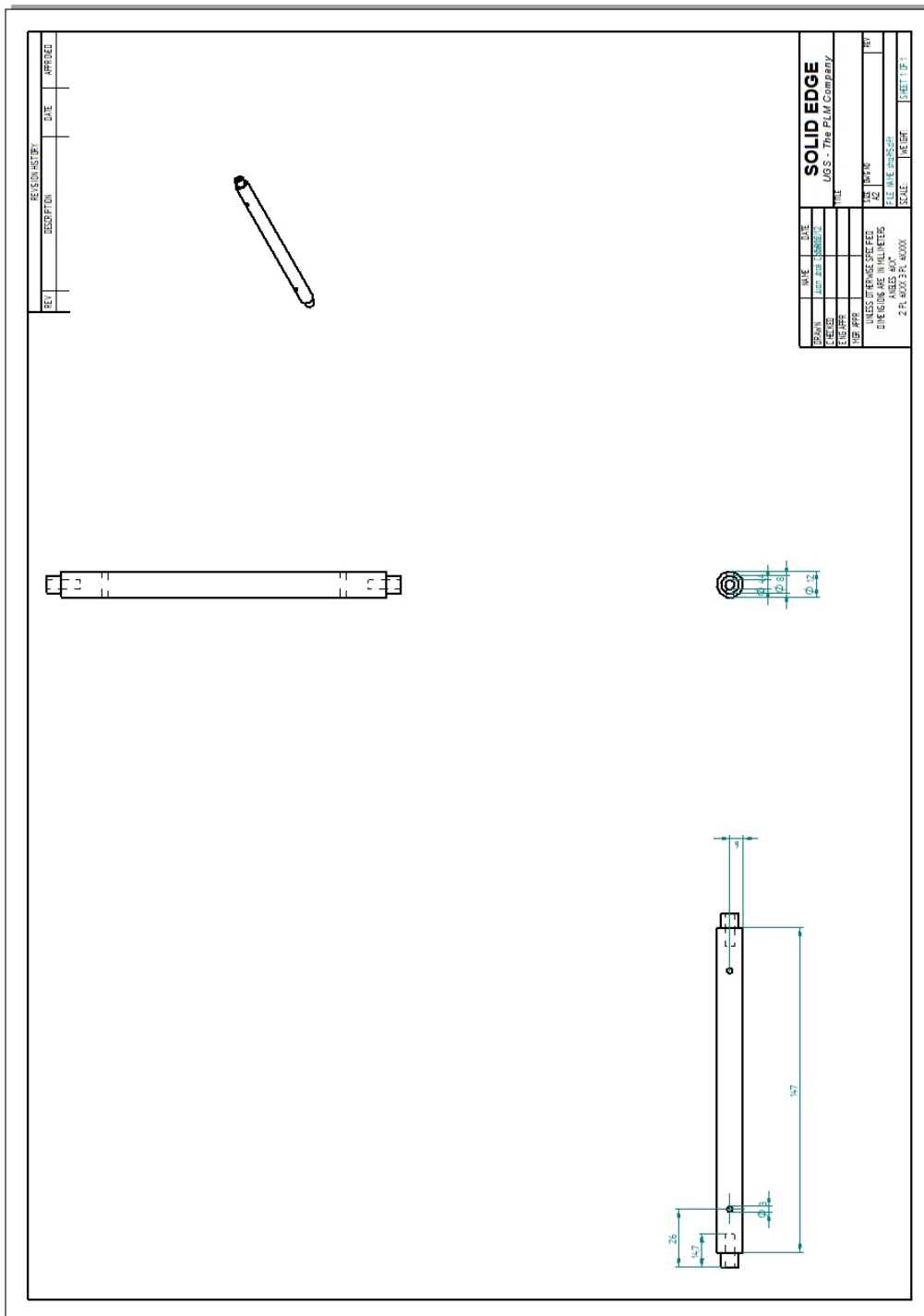


Figura C-7: Plano del eje de la junta del codo

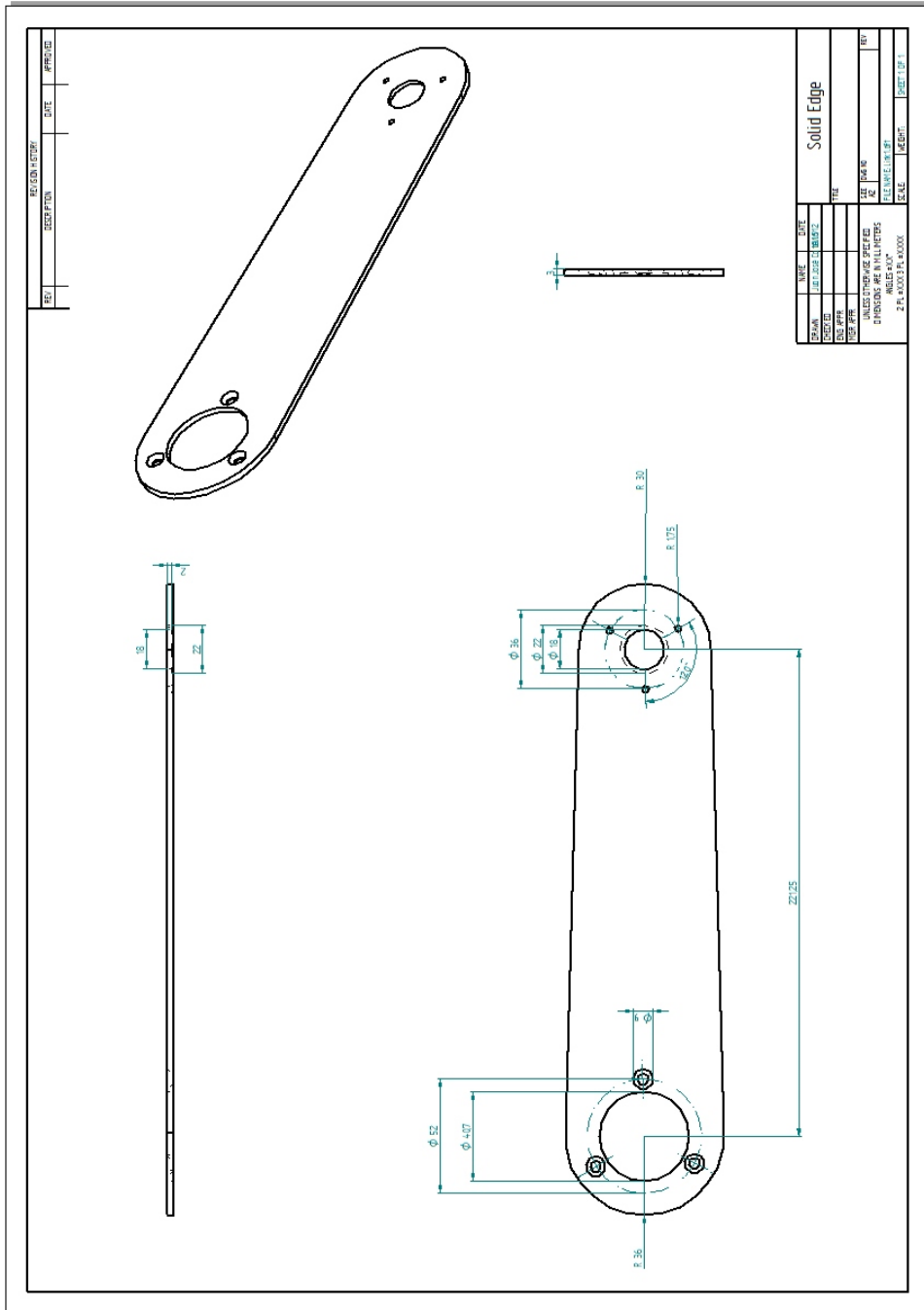


Figura C-8: Plano del eslabón del hombro

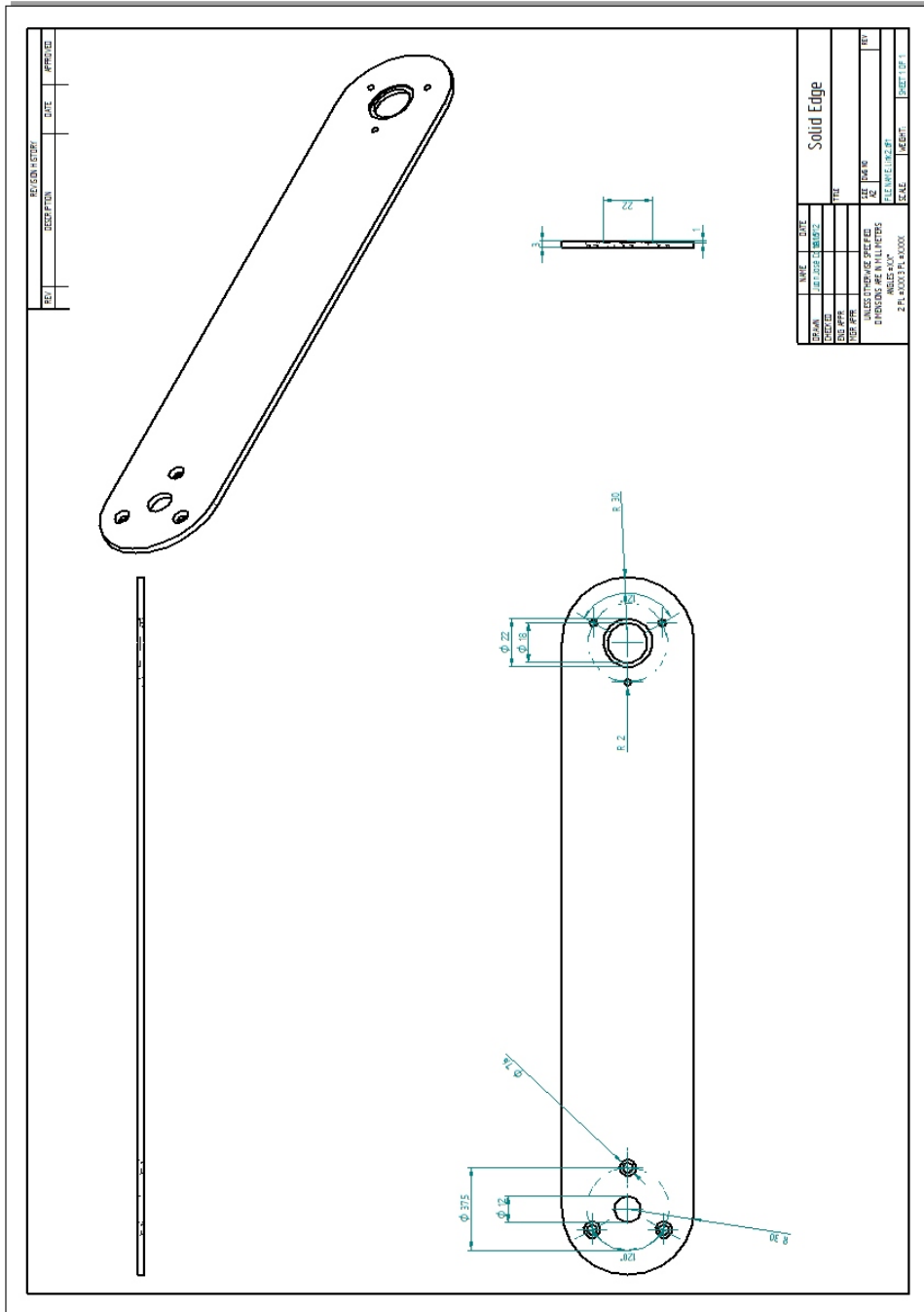


Figura C-9: Plano del eslabón del codo

Apéndice D

Datasheets

Las *datasheets* para cada componente se pueden encontrar en las siguientes direcciones web:

- **L298D**

<http://www.wvshare.com/datasheet/STPDF/L298.pdf>

- **ADXL335**

<https://www.sparkfun.com/datasheets/Components/SMD/adxl335.pdf>

- **LSM303DLHC**

<http://www.st.com/st-web-ui/static/active/en/resource/technical/document/datasheet/DM00027543.pdf>

- **L3GD20**

<http://www.st.com/st-web-ui/static/active/en/resource/technical/document/datasheet/DM00036465.pdf>

Apéndice E

Código Fuente

```

#include <LSM303.h>
#include <L3G.h>
#include <math.h>
#include <Wire.h>
#include<Servo.h>
Servo servo;
L3G gyro;
LSM303 compass;
const int codolPin=24;
const int codo2Pin=22;
const int codopwm=4;
const int hombro1Pin=26;
const int hombro2Pin=36;
const int hambropwm=6;
const int base1Pin=42;
const int base2Pin=44;
const int basepwm=3;
const int ohx=334,ohy=333,ocx=341,ocy=337;
int t1=0,t2=0,yi=30,xi=30;
const float pi=3.14159;
const float l1=22.5,l2=26;
static double
integralb=0,integralh=0,integralc=0,perrorb=0,perrorh=0,perrorc=0,integra
lo=0,perroro=0;
static int mskh,msh=1100;
int signo[6] = {-1,-1,-1,1,1,1};
float dirh[3]={0,0,0};
float dirc[3]={0,0,0};
float Rh[3]={0,0,0};
float Ic[3]={0,0,0};
float Ih[3]={0,0,0};
float Rc[3]={0,0,0};
float ah=0,ao=0,ab=0,g=9.71;
float off[6]={0,0,0,0,0,0};
float acc[3]={0,0,0};
float giro[3]={0,0,0};
float mag[3]={0,0,0};
float kpb=2.5,kib=0.85,kdb=0;
float kph=8.3,kih=0.85,kdh=0;
float kpc=8.3,kic=0.5,kdc=0;
float kpo=11.3,kio=0.5,kdo=0;
void setup()
{
  pinMode(codolPin,OUTPUT);
  pinMode(codo2Pin,OUTPUT);
  pinMode(codopwm,OUTPUT);
  pinMode(hombro1Pin,OUTPUT);
  pinMode(hombro2Pin,OUTPUT);
  pinMode(hambropwm,OUTPUT);
  pinMode(base1Pin,OUTPUT);
  pinMode(base2Pin,OUTPUT);
  pinMode(basepwm,OUTPUT);
  servo.attach(8);
  Wire.begin();
  Serial.begin(115200);
  Gyro_Init();
  Accel_Init();

```

```

Compass_Init();
delay(20);
compass.m_min.x = -505; compass.m_min.y = -601; compass.m_min.z = -387;
compass.m_max.x = +332; compass.m_max.y = +347; compass.m_max.z = +399;
write_motorb(true,0);
write_motorh(true,0);
write_motorc(true,0);
delay(1000);
int t1=millis();
move_codo(-90,millis(),false);
int t2=millis();
Serial.println((t2-t1)*0.001);
}
void loop()
{
// if(Serial.available()>0)
// {
//   pos_ini();
//   Serial.println("on");
//   delay(1000);
//   t1=thetal(yi,xi);
//   t2=theta2(yi,xi);
//   float timer=millis();
//   linea(t1,t2,xi,millis());
//   Serial.println("end");
//   delay(100);
//   pos_ini();
//   softReset();
// }

}
float rangleo()
{
  read_acc();
  float x=compass.a.x-off[0];
  float z=compass.a.z-off[2];
  return rad2deg(atan2(-z,x))-90;
}
float angleo()
{
  float s=0,d=0,f=0;
  int i=0;
  for(i=0;i<100;i++)
  {
    s=rangleo();
    d=d+s;
  }
  f=d/100;
  return f;
}
float rangle(int A, int B,int c, int f)
{
  float x=analogRead(A)-c;
  float y=analogRead(B)-f;
  double rad=atan2(-x,y);

```

```

    float d=(180/3.14159)*rad;
    return -d;
}
float angle(int A,int B,int c, int e)
{
    float s=0,d=0,f=0;
    int i=0;
    for(i=0;i<100;i++)
    {
        s=angle(A,B,c,e);
        d=d+s;
    }
    f=d/100;
    return f;
}
float anglec()
{
    return angle(3,4,341,337)-angle(0,1,334,333);
}
void read_hombro(int a,int b,int c)
{
    float Rx=0,Ry=0,Rz=0,M=0;
    float x=0,y=0,z=0,rangle=0;
    x=analogRead(a);
    y=analogRead(b);
    z=analogRead(c);
    Rx=((x*5)/1023)-1.63)/0.3397;
    Ry=((y*5)/1023)-1.61)/0.3499;
    Rz=((z*5)/1023)-1.66)/0.3390;
    Rh[0]=Rx;
    Rh[1]=Ry;
    Rh[2]=Rz;
    M=sqrt(Rh[0]*Rh[0]+Rh[1]*Rh[1]+Rh[2]*Rh[2]);
    dirh[0]=Rx/M;
    dirh[1]=Ry/M;
    dirh[2]=Rz/M;
}
void read_codo(int a,int b, int c)
{
    float Rx=0,Ry=0,Rz=0,M=0;
    float x=0,y=0,z=0,rangle=0;
    x=analogRead(a);
    y=analogRead(b);
    z=analogRead(c);
    Rx=((x*5)/1023)-1.65)/0.3344;
    Ry=((y*5)/1023)-1.64)/0.3492;
    Rz=((z*5)/1023)-1.66)/0.3292;
    Rc[0]=Rx;
    Rc[1]=Ry;
    Rc[2]=Rz;
    M=sqrt(Rc[0]*Rc[0]+Rc[1]*Rc[1]+Rc[2]*Rc[2]);
    dirc[0]=Rc[0]/M;
    dirc[1]=Rc[1]/M;
    dirc[2]=Rc[2]/M;
}
void Gyro_Init()
{

```

```

    gyro.init();
    gyro.writeReg(L3G_CTRL_REG1, 0x0F);
    gyro.writeReg(L3G_CTRL_REG4, 0x20);
}
void Accel_Init()
{
    compass.init();
    compass.writeAccReg(LSM303_CTRL_REG1_A, 0x47);
    compass.writeAccReg(LSM303_CTRL_REG4_A, 0x08);
    compass.writeAccReg(LSM303_CTRL_REG4_A, 0x20);
}
void Compass_Init()
{
    compass.writeMagReg(LSM303_MR_REG_M, 0x00);
}
void offset()
{
    float ax=0, ay=0, az=0, gx=0, gy=0, gz=0;
    for(int i=0; i<1024; i++)
    {
        compass.readAcc();
        gyro.read();
        ax=ax+(float)compass.a.x;
        ay=ay+(float)compass.a.y;
        az=az+(float)compass.a.z;
        gx=gx+(float)gyro.g.x;
        gy=gy+(float)gyro.g.y;
        gz=gz+(float)gyro.g.z;
        delay(10);
    }
    off[0]=ax/1024;
    off[1]=ay/1024;
    off[2]=az/1024;
    off[3]=gx/1024;
    off[4]=gy/1024;
    off[5]=gz/1024;
    off[2]=0;
}
void read_gyro()
{
    int x=0, y=0, z=0;
    float s=deg2rad(0.7);
    for(int i=0; i<20; i++)
    {
        gyro.read();
        x=x+gyro.g.x;
        y=y+gyro.g.y;
        z=z+gyro.g.z;
    }
    giro[0]=(signo[3]*((x/20)-off[3])*s)+0.11;
    giro[1]=(signo[4]*((y/20)-off[4])*s)+0.11;
    giro[2]=(signo[5]*((z/20)-off[5])*s)-0.10;
}
void read_acc()
{
    compass.readAcc();
    float x=0, y=0, z=0;
}

```

```

x=compass.a.x;
y=compass.a.y;
z=compass.a.z;
acc[0]=signo[0]*(x-off[0])/256;
acc[1]=signo[1]*(y-off[1])/256;
acc[2]=signo[2]*(z-off[2])/256;
ao=rad2deg(atan2(-acc[2],-acc[0]))+90;
}
void read_mag()
{
compass.readMag();
float x=0,y=0,z=0;
mag[0]=compass.m.x;
mag[1]=compass.m.y;
mag[2]=compass.m.z;
//am=compass.heading((LSM303::vector){0,0,1});
ab=rad2deg(atan2(mag[1],mag[0]));
}
float deg2rad(float deg)
{
float rad=(pi/180)*deg;
return rad;
}
float rad2deg(float rad)
{
float deg=(180/pi)*rad;
return deg;
}
float controlb(float setpoint,float theta,float kp,float ki,float
kd,float u)
{
int dt=200;
float error,output,differential;
error=setpoint-theta;
integralb=integralb+error*dt*0.001;
differential=(error-perrorb)/(dt*0.001);
if(abs(error)<2.5)
{
integralb=0;
perrorb=error;
delay(dt);
return output=0;
}
else
{
if(u>200)
integralb=0;
if(integralb>800)
integralb=800;
if(integralb<-800)
integralb=-800;
output=kp*error+ki*integralb+kd*differential;
perrorb=error;
delay(dt);
if(output>255)
output=255;
}
}

```



```

        if(output<-255)
            output=-255;
        return output;
    }
}
float controlh(float setpoint,float theta, float kp,float ki,float
kd,float u)
{
    int dt=200;
    float error,output,differential;
    error=setpoint-theta;
    integralh=integralh+error*dt*0.001;
    differential= (error-perrorh)/(dt*0.001);
    if(abs(error)<2.5)
    {
        integralh=0;
        perrorh=error;
        delay(dt);
        return output=0;
    }
    else
    {
        if(u>200)
            integralh=0;
        if(integralh>800)
            integralh=800;
        if(integralh<-800)
            integralh=-800;
        output=kp*error+ki*integralh+kd*differential;
        perrorh=error;
        delay(dt);
        if(output>255)
            output=255;
        if(output<-255)
            output=-255;
        return output;
    }
}
float controlc(float setpoint,float theta,float kp,float ki,float
kd,float u)
{
    int dt=200;
    float error,output,differential;
    error=setpoint-theta;
    integralc=integralc+error*dt*0.001;
    differential= (error-perrorc)/(dt*0.001);
    if(abs(error)<2.5)
    {
        integralc=0;
        perrorc=error;
        delay(dt);
        return output=0;
    }
    else
    {
        if(u>200)
            integralc=0;

```

```

        if(integralc>800)
            integralc=800;
        if(integralc<-800)
            integralc=800;
        output=kp*error+ki*integralc+kd*differential;
        perrorc=error;
        delay(dt);
        if(output>255)
            output=255;
        if(output<-255)
            output=-255;
        return output;
    }
}
float controlo(float setpoint,float theta,float kp,float ki,float
kd,float u)
{
    int dt=200;
    float error,output,differential;
    error=setpoint-theta;
    integralo=integralo+error*dt*0.001;
    differential= (error-perroro)/(dt*0.001);
    output=kp*error+ki*integralo+kd*differential;
    perroro=error;
    delay(dt);
    if(output>800)
        output=800;
    if(output<-800)
        output=-800;
    return output;
}
boolean direccion(int u)
{
    boolean flag=true;
    if(u<0)
        flag=true;
    else
        flag=false;
    return flag;
}
void write_motorb(boolean dir,int u){
    if(dir==true)
    {
        digitalWrite(base1Pin,LOW);
        digitalWrite(base2Pin,HIGH);
    }
    else
    {
        digitalWrite(base1Pin,HIGH);
        digitalWrite(base2Pin,LOW);
    }
    analogWrite(basepwm,abs(u));
}
void write_motorh(boolean dir,int u){
    if(dir==true)
    {
        digitalWrite(hombrolPin,LOW);

```

```

        digitalWrite(hombro2Pin, HIGH);
    }
    else
    {
        digitalWrite(hombro1Pin, HIGH);
        digitalWrite(hombro2Pin, LOW);
    }
    analogWrite(hombropwm, abs(u));
}
void write_motorc(boolean dir, int u) {
    if(dir==true)
    {
        digitalWrite(codo1Pin, LOW);
        digitalWrite(codo2Pin, HIGH);
    }
    else
    {
        digitalWrite(codo1Pin, HIGH);
        digitalWrite(codo2Pin, LOW);
    }
    analogWrite(codopwm, abs(u));
}
void move_hombro(float setpoint, int t1, boolean flag)
{
    float e=0;
    int u=0;
    boolean dir=false;
    do
    {
        read_hombro(0,1,2);
        u=controlh(setpoint, angle(0,1, ohx, ohy), kph, kih, kdh, u);
        dir=direccion(u);
        write_motorh(dir, u);
        e=setpoint-angle(0,1, ohx, ohy);
        if(flag==true)
            prueba(t1);
    }
    while(abs(e)>2.5);
    digitalWrite(hombro1Pin, HIGH);
    digitalWrite(hombro2Pin, HIGH);
}
void move_base(float setpoint, int t1, boolean flag)
{
    float e=0;
    int u=0;
    boolean dir=false;
    for(int i=0; i<2; i++)
    {
        do
        {
            read_mag();
            u=controlb(setpoint, ab, kpb, kib, kdb, u);
            dir=direccion(u);
            write_motorb(dir, u);
            e=setpoint-ab;
            if(flag==true)
                prueba(t1);
        }
    }
}

```

```

    }
    while(abs(e)>2.5);
    delay(100);
    }
    digitalWrite(base1Pin,HIGH);
    digitalWrite(base2Pin,HIGH);
}
void move_codo(float setpoint,int t1,boolean flag)
{
    float e=0;
    int u=0;
    boolean dir=false;
    for(int i=0;i<2;i++)
    {
        do
        {
            read_codo(3,4,5);
            u=controlc(setpoint,anglec(),kpc,kic,kdc,u);
            dir=direccion(u);
            write_motorc(dir,u);
            e=setpoint-anglec();
            if(flag==true)
                prueba(t1);
        }
        while(abs(e)>2.5);
        delay(100);
    }
    digitalWrite(codo1Pin,HIGH);
    digitalWrite(codo2Pin,HIGH);
}
void move_organo(float deg,int t1,boolean flag1)
{
    int cms=0,i=0;
    float e=0;
    boolean flag=false;
    do{
        read_acc();
        cms=controlo(deg,angleo(),kpo,kio,kdo,cms);
        mskh=(msh-cms);
        if(mskh<700)
            mskh=700;
        if(mskh>2000)
            mskh=2000;
        servo.writeMicroseconds(mskh);
        msh=mskh;
        if(flag1==true)
            prueba(t1);
        if(e<2.5)
            flag=true;
        else
            flag=false;
    }while(flag==false);
}
void prueba(float t1)
{
    read_hombro(0,1,2);
    read_codo(3,4,5);
}

```

```

    read_acc();
    if(acc[0]<0.140701&&acc[0]>-0.124924)
    acc[0]=0;
    if(acc[1]<0.074707&&acc[1]>-0.065918)
    acc[1]=0;
    Serial.print((millis()-t1)*0.001,3);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(Rh[0],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(Rh[1],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(Rh[2],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(Rc[0],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(Rc[1],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(Rc[2],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(acc[0],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(acc[1],6);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(acc[2],6);
    Serial.print("\t");
}

void pos_ini()
{
    move_hombro(45,0,false);
    delay(100);
    move_hombro(90,0,false);
    delay(100);
    move_codo(-90,0,false);
    delay(100);
    servo.writeMicroseconds(msh);
    delay(1500);
    offset();
    move_base(-30,0,false);
}

void softReset()
{
    asm volatile(" jmp 0");
}

}

```

Apéndice F

Códigos de Matlab

Funciones para la simulación de la cinemática inversa:

G01

```
function x0 = g01(x1,theta1,theta2)
%
% function x0 = g01(x1,theta1,theta2)
%
% Transforms a point from coordinate frame 1 to frame 0.
% INPUT:  x1 - Coordinates of point in frame 1
%          theta1 - Rotation for frame 1 in radians.
%          theta2 - Rotation for frame 2 in radians.
% OUTPUT:  x0 - Coordinates of point in frame 0

%%% Specifying required lengths
L1 = 1.5;
L2 = 1;

%%% Applying transformation
r=[cos(theta1) -sin(theta1); sin(theta1) cos(theta1)];

x0 = r*x1;
```

G02

```
function x0 = g02(x2,theta1,theta2)
%
% function x0 = g02(x1,theta1,theta2)
%
% Transforms a point from coordinate frame 2 to frame 0.
```

```
% INPUT:  x2 - Coordinates of point in frame 2.
%
%         theta1 - Rotation for frame 1 in radians.
%
%         theta2 - Rotation for frame 2 in radians.
% OUTPUT:  x0 - Coordinates of point in frame 0
```

```
%% Specifying required lengths
```

```
L1 = 1.5;
```

```
L2 = 1;
```

```
%% Applying transformation
```

```
r1=[cos(theta2) -sin(theta2);sin(theta2) cos(theta2)];
```

```
x1=r1*x2;
```

```
a=g01(x1+[L1;0],theta1,theta2);
```

```
x0 = a;
```

dTheta

```
function [dtheta1 dtheta2] = dTheta(t1, t2, dt1, dt2, t)
```

```
%
```

```
% [dtheta1 dtheta2] = dTheta(t1, t2, dt1, dt2, t)
```

```
%
```

```
% It computes the angular velocities given measured angles, corresponding
```

```
% velocities, and current time.
```

```
% INPUT:  t1 - Measured angle for first joint.
```

```
%         t2 - Measured angle for second joint.
```

```
%         dt1 - Measured angular velocity for first joint.
```

```
%         dt2 - Measured angular velocity for second joint.
```

```
%         t - Current time.
```



```

global L1;    % Length of first segment in arm
global L2;    % Length of second segment in arm

%%% Displaying values measured
dispText = sprintf('[%f: %f %f %f %f]',t,t1,t2,dt1,dt2);
disp(dispText);

%%% Specifying angular velocity
y=1.4;
x=-2+4*t;
r=sqrt(x^2+y^2);
theta1= atan2(y,x)-acos((r^2+L1^2-L2^2)/(2*L1*r));
theta2=pi-acos((L1^2+L2^2-r^2)/(2*L1*L2));

dtheta1 = 140*(theta1-t1);
dtheta2 = 140*(theta2-t2);

```

DrawArm

```

function [xp yp] = DrawArm(theta1,theta2)
%
% [xp yp] = DrawArm(theta1,theta2)
%
% It draws the configuration of a planar two-joint arm for the specific
% angles. It returns the position of the end point of the arm.
% INPUT:  theta1 - Angle in radians for the first joint.
%         theta2 - Angle in radians for the second joint.
% OUTPUT: xp - x-coordinate of the position of end point of the arm.
%         yp - y-coordinate of the position of end point of the arm.

```

```

%%% Defining length as global in case
global L1;
global L2;

%%% If they are not defined, we use the default value of 1.5 and 1.
if(isempty(L1) || isempty(L2))
    L1 = 1.5;
    L2 = 1;
end

%%% Specifying the width of the arm. This is for display purposes only.
width = 0.05;

%%% Coordinates of points in frames 1 and 2 respectively. The first row
%%% corresponds to the x-coordinates and the second row to the
%%% y-coordinates.
r1 = [0 L1 L1 0 0; -width -width width width -width];
s2 = [0 L2 L2 0 0; -width -width width width -width];

%%% Getting points in inertial reference frame
for i = 1:size(r1,2)
    r0(:,i) = g01(r1(:,i),theta1,theta2);
end

for i = 1:size(s2,2)
    s0(:,i) = g02(s2(:,i),theta1,theta2);
end

```

```

%%% Coordinat of the end point of the arm
xp = (s0(1,2)+s0(1,3))/2;
yp = (s0(2,2)+s0(2,3))/2;

%%% Ploting straight segments
h = patch(r0(1,:),r0(2,:), 'b'); set(h, 'FaceColor', [0.5 0.5 0.7]);
h = patch(s0(1,:),s0(2,:), 'b'); set(h, 'FaceColor', [0.5 0.5 0.7]);

%%% Ploting Circular joints
t = linspace(0,2*pi,20);
x = 2*width*cos(t);
y = 2*width*sin(t);
xy = zeros(2,length(t));
for i = 1:length(t)
    xy(:,i) = g01([x(i)+L1; y(i)],theta1,theta2);
end
h = patch(xy(1,:),xy(2,:), 'b');
set(h, 'FaceColor', [0.5 0.5 0.5]);
xy = zeros(2,length(t));
for i = 1:length(t)
    xy(:,i) = g02([x(i)+L2; y(i)],theta1,theta2);
end
h = patch(xy(1,:),xy(2,:), 'b');
set(h, 'FaceColor', [0 0 0]);

%%% Ploting Base
t = linspace(0,pi,20);
x = 4*width*[-1 -1 1 1];

```

```

y = 4*width*[-2 1 1 -2];
h = patch(x,y,'b');
set(h,'FaceColor',[0.5 0.5 0.5]);
hold on; plot(0,0,'ko'); hold off;

%% Setting the Axis of the window
axis equal; axis([-L1-L2-0.5 L1+L2+0.5 -L2-0.5 L1+L2+0.5]);

```

MotionSim

```

% Script for animating the motion of the robotic arm. It requires a
% specified angular velocity in the file 'dTheta.m'.

```

```

%% Initial values of theta1 and theta2 and their derivatives
theta1 = 0;
theta2 = 0;
%theta1 = 2.3542;
%theta2 = 0.4433;
dtheta1 = 0;
dtheta2 = 0;

ThetaBnd1 = [0 pi]; % Angular bounds for first joint.
ThetaBnd2 = [-3*pi/4 3*pi/4]; % Angular bounds for second joint.
global L1; L1 = 1.5; % Length of first segment in arm.
global L2; L2 = 1; % Length of second segment in arm.
global dt; dt = 0.01; % Time step.
rNoise = 2; % Magnitude of the noise added to angular velocity.

```

```

%%% Before starting the loop over time, we set the arrays below to be
%%% empty. These are the array that will contain the coordinates of the
end

%%% point of the arm, which will be used to keep track of the path
followed

%%% by this point.

x = [];
y = [];

%%% Now we perform computations for every time step.
for t = 0:dt:1

    %%% Computing Velocities and adding some noise to them.

    [dtheta1 dtheta2] = dTheta(theta1,theta2,dtheta1,dtheta2,t);

    dtheta1 = dtheta1 + rNoise*2*(rand(1)-0.5);
    dtheta2 = dtheta2 + rNoise*2*(rand(1)-0.5);

    %%% We make sure that the velocities has a maximum magnitude of 10.

    if(abs(dtheta1)>10), dtheta1 = 10*dtheta1/abs(dtheta1); end;
    if(abs(dtheta2)>10), dtheta2 = 10*dtheta2/abs(dtheta2); end;

    %%% Updating theta1. If theta1 is outside the defined bound, then we
    %%% replace its value by the bound.

    theta1 = theta1 + dt*dtheta1;

    if(theta1 < ThetaBnd1(1)), theta1 = ThetaBnd1(1); end;
    if(theta1 > ThetaBnd1(2)), theta1 = ThetaBnd1(2); end;

    %%% Updating theta2. If theta2 is outside the defined bound, then we
    %%% replace its value by the bound.

    theta2 = theta2 + dt*dtheta2;

```

```

if(theta2 < ThetaBnd2(1)), theta2 = ThetaBnd2(1); end;
if(theta2 > ThetaBnd2(2)), theta2 = ThetaBnd2(2); end;

%% Drawing Arm
clf; [xp yp] = DrawArm(theta1,theta2); grid on;
hold on; plot(x,y,'r-', 'linewidth',2); hold off;
axis equal; axis([-L1-L2-0.5 L1+L2+0.5 -L2-0.5 L1+L2+0.5]);

%% Storing coordinates of end point of arm
x = [x xp];
y = [y yp];

%% Just a little pause to visualize the results.
pause(0.05);
end

```

Código para la obtención del espacio de trabajo

```

t1=-pi:0.8:pi;t2=-pi:0.8:pi;t3=-pi:0.8:pi;t4=-pi:0.8:pi;
l1=0.3;l2=0.25;i=1;j=1;k=1;l=1;
p0=[0;0;l1+l2;1];
R=zeros(4,4,63,63,63);

for i=1:1:63
    for j=1:1:63
        for k=1:1:63
            R(:,:,i,j,k)=[cos(t1(i)) sin(t1(i))*cos(t2(j)+t3(k)+t4(l))
sin(t1(i))*sin(t2(j)+t3(k)+t4(l))
sin(t1(i))*(l1*sin(t2(j))+l2*sin(t2(j)+t3(k)));
sin(t1(i)) cos(t1(i))*cos(t2(j)+t3(k)+t4(l)) -
cos(t1(i))*sin(t2(j)+t3(k)+t4(l)) -
cos(t1(i))*(l1*sin(t2(j))+l2*sin(t2(j)+t3(k)));
0 sin(t2(j)+t3(k)+t4(l)) cos(t2(j)+t3(k)+t4(l)) -
(l1*cos(t2(j))+l2*sin(t2(j)+t3(k)));
0 0 0 1];
        end
    end
end
m=1;

```

```

for i=1:1:63
    for j=1:1:63
        for k=1:1:63
p(:,m)=R(:, :, i, j, k)*p0;
p0=p(:,m);
m=m+1;
        end
    end
end

plot3(p(1,1:7000),p(2,1:7000),p(3,1:7000))
title('Espacio de Trabajo');
xlabel('x [cm]')
ylabel('y [cm]')
zlabel('z [cm]')
grid on
axis equal

```

Código para la obtención de la trayectoria usando las lecturas de un acelerómetro

```

d=[];
g=9.71;
raw=[d(:,2) d(:,3)+.04 d(:,4)];
raw1=filter_data(raw');
acc=raw1';
t=d(:,1)-65.831;
axp=(acc(:,1))*g;
ayp=(acc(:,2))*g;
azp=(acc(:,3))*g;
ap=[axp ayp azp]';
for i=1:1:size(d(:,1))
    M(i)=sqrt(axp(i)^2+ayp(i)^2+azp(i)^2);
    anx(i)=acos(axp(i)/M(i));
    any(i)=acos(ayp(i)/M(i));
    anz(i)=acos(azp(i)/M(i));
    p2r(:,i)=[1 0 0;0 cos(anx(i)) -sin(anx(i));0 sin(anx(i))
cos(anx(i))]*[cos(any(i)) 0 sin(any(i));0 1 0;-sin(any(i)) 0
cos(any(i))]*[cos(anz(i)) -sin(anz(i)) 0;sin(anz(i)) cos(anz(i)) 0;0 0
1]*ap(:,i);
end
a=p2r';
ax=a(:,1);
ay=a(:,2);
az=a(:,3)-(1.093750-0.15+0.953);
vx=cumtrapz(ax,t);
vy=cumtrapz(ay,t);
vz=cumtrapz(az,t);
px=cumtrapz(vx,t).*10e-4;
py=cumtrapz(vy,t).*10e-5+30;
pz=cumtrapz(vz,t).*10e-3+10;
x1=px;
y1=py;
z1=pz;

```

```
p1=[x1 y1 z1];

subplot(2,2,1);plot(x1,y1);
title('Proyección Plano XY');
xlabel('x [cm]')
ylabel('y [cm]')
axis equal
subplot(2,2,2);plot(y1,z1);
title('Proyección Plano YZ');
xlabel('y [cm]')
ylabel('z [cm]')
axis equal
subplot(2,2,3);plot(x1,z1);
title('Proyección Plano XZ');
xlabel('x [cm]')
ylabel('z [cm]')
axis equal
subplot(2,2,4);plot3(x1,y1,z1);
title('Representación en 3D');
xlabel('x [cm]')
ylabel('y [cm]')
zlabel('z [cm]')
grid on
axis equal
```


Bibliografía

- [1] David G. Alciatore and Michael B. Hstand. *Introduction to Mechatronics and Measurement Systems*. McGraw-Hill, 2007.
- [2] Robert S. Ball. *A Treatise on the Theory of Screws*. University Press, 1900.
- [3] P. Ferdinand Beer, E. Russel Johnston, and William E. Clausen. *Mecánica Vectorial para Ingenieros Dinámica*. McGraw Hill, 2007.
- [4] R. W. Brockett, A. Stokes, and F. Park. A geometrical formulation of the dynamical equations describing kinematic chains. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1993.
- [5] J. M. Dorador. Diseño para x. Presentación de PowerPoint para el Centro de Diseño y Manufactura de la Facultad de Ingeniería, UNAM.
- [6] S.H Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 2003.
- [7] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [8] D. Koditschek. Natural motion for robot arms. *IEEE Control and Decision Conference*, 1984.
- [9] D. Manocha and J.F. Canny. Real-time inverse kinematics for general 6r manipulators. Technical report, University of California, Berkeley, 1992.
- [10] Richard M. Murray, Zexiang Li, and S. Shankar Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC press, 1994.
- [11] F. C. Park, J. E. Bobrow, and S. R. Ploen. A lie group formulation of robot dynamics. Technical report, University of California, Irvine, 1993.
- [12] A. C. Ramírez Reivich and V. Borja Ramírez. Innovación de producto. Technical report, Premio Nacional de Tecnología/Cuadernos de gestión tecnológica, 2006.

- [13] G. Rodriguez and A. Jain. Recursive flexible multibody system dynamics using spatial operators. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1992.
- [14] G. Rodriguez, A Jain, and K. Kreutz-Delgado. A spatial operator algebra for manipulator modeling and control. *International Journal of Robotics Research*, 1991.
- [15] J.M. Seli. Lie groups and lie algebra in robotics. Technical report, South Bank University, 2003.
- [16] Shigley. *Diseño en Ingeniería Mecánica*. McGraw Hill, 2003.
- [17] K. T. Ulrich and S. D. Eppinger. *Diseño y Desarrollo de Productos, Enfoque Multidisciplinario*. McGraw Hill, 2004.