Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

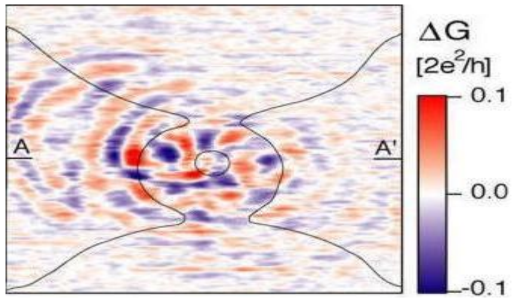
1.1.1. Oscilaciones

Una oscilación es una *fluctuación* de un sistema respecto a una variable de interés, generalmente siendo ésta el tiempo. Este comportamiento se puede apreciar desde el nivel cuántico hasta el nivel macroscópico, e.g. las variaciones en la conductividad de un superconductor y la rotación de los planetas alrededor del sol que se muestran en la Figura 1.1. En este último ejemplo las trayectorias de los planetas se repiten después de un cierto periodo, aproximadamente 365 días en el caso de la tierra, y por lo tanto se denominan como *oscilaciones periódicas*.

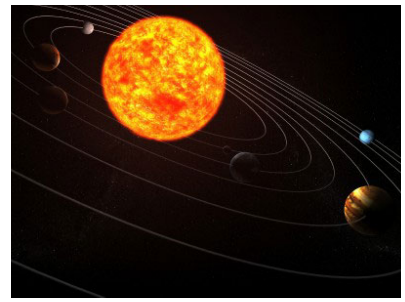
La dinámica oscilatoria también es responsable directa de distintos fenómenos físicos; cuando una oscilación se manifiesta en un medio material se genera el fenómeno del sonido, una oscilación en una corriente eléctrica genera un campo electromagnético, etc. Por otro lado, en muchas aplicaciones de ingeniería esta dinámica suele inducir perturbaciones no contempladas, vibraciones indeseadas, ruido y desgaste excesivo de los componentes físicos, entre otros factores adversos. En estas situaciones las oscilaciones en el sistema pueden comprometer su funcionamiento por lo que se busca evitarlas o contrarrestarlas. Algunos ejemplos de esto incluyen

- las oscilaciones en las grúas
- las vibraciones en las alas de un avión
- el rechinado en el frenado de un coche
- los efectos de los temblores en los edificios

No obstante, diversas aplicaciones cotidianas también dependen de la generación de estas oscilaciones, dentro de las cuales se puede mencionar



(a) Fluctuación de la conductividad de un superconductor ante un campo magnético



(b) Órbitas planetarias del sistema solar

Figura 1.1: Fenómenos oscilatorios

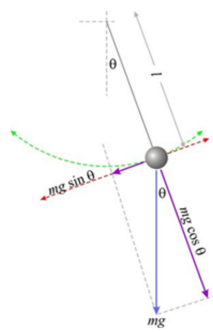


Figura 1.2: El péndulo simple

- la tomografía por resonancia magnética
- los hornos de microondas
- lograr que un robot bípedo camine
- la técnica *dither* para atenuar fricción

Se puede afirma entonces que el fenómeno oscilatorio tiene una naturaleza ambigua; en ciertos escenarios se desea excluirlo de un sistema y en otros se busca introducirlo. Cualquiera que sea el caso, la importancia de estudiar este comportamiento es clara puesto que se presenta continuamente en diversos sistemas que abarcan todos los niveles de la materia y como tal es un concepto fundamental para lograr una mejor comprehensión de la dinámica del universo.

1.1.2. El Paradigma del Péndulo

El péndulo es uno de los ejemplos más importantes en el campo de Control y ha sido estudiado extensivamente desde Galileo Galilei. Este sistema está constituido por un hilo, idealmente considerado inextensible y de masa despreciable, sostenido por su extremo superior de un punto fijo, con una masa puntual m en su extremo inferior que oscila libremente. Como se aprecia en la Figura 1.2 la fuerza de gravedad que actúa sobre la masa se descompone en una fuerza perpendicular y una fuerza paralela al movimiento circular del péndulo. Esto permite derivar la ecuación de movimiento para este sistema al asociar la aceleración lineal, a, de la masa con la fuerza paralela:

$$F_{\parallel} = -mg\mathrm{sen}\,(\theta) = ma \tag{1.1}$$

A partir de la longitud de arco

$$s = l\theta$$

la aceleración lineal se puede expresar como

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\ddot{\theta}$$

con lo que, de la ecuación (1.1), se obtiene la identidad

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\mathrm{sen}\,(\theta) = 0 \tag{1.2}$$

La ecuación diferencial ordinaria (1.2) es no-lineal debido al término $\mathrm{sen}\,(\theta)$. Sin embargo, para valores pequeños de θ se cumple que

$$\mathrm{sen}\,(\theta) \approx \theta$$

Por lo tanto (1.2) se puede aproximar por la ecuación diferencial *lineal*

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

donde $\omega_n \triangleq 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}}$ es la frecuencia angular de oscilación. Es decir, el péndulo simple es un sistema que, restringido a desviaciones de pequeña amplitud, exhibe oscilaciones periódicas sin necesidad de otra excitación más que el efecto de la gravedad. El periodo de estas oscilaciones libres puede ser aproximado por

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

La importancia del péndulo se deriva en que diversos sistemas ingenieriles y esquemas de control se pueden modelar aproximadamente por la ecuación (1.2). Entre estos se puede mencionar cohetes espaciales, las articulaciones de un robot bípedo además de estabilización de barcos, gruas y líquidos [1]. Todas estos ejemplos, junto con la amplia presencia del fenómeno oscilatorio, motivan a estudiar el péndulo y sistemas afines. Actualmente se cuenta con una gran variedad de péndulos para fines tanto académicos como industriales, como por ejemplo el péndulo de Furuta, el péndulo carro y el Pendubot entre otros. *La Rueda de Inercia* es el dispositivo más nuevo y sencillo, debido a la simetría de sus componentes, de la familia de péndulos. Este sistema de dos grados de libertad, cuyas aportaciones al desarrollo tecnológico incluyen el control de altitud de un satélite, será el objeto de estudio del presente trabajo.

1.1.3. Ciclos Límites

El diseño de un sistema de control generalmente tiene como propósito llevar a cabo una de dos tareas: la regulación de variables o el seguimiento de trayectorias. La primera de éstas consiste en estabilizar un conjunto de variables alrededor de un punto de operación y representa una de las aplicaciones de la teoría de control más implementadas en la industria moderna, e.g. el control de temperatura del procesador en una computadora o la regulación de la velocidad angular de un generador eléctrico. Por otro lado, el problema de seguimiento busca establecer una evolución deseada y prediseñada de un sistema dado. Este tipo de control se presenta en la automatización de la ruta del vuelo de un avión o en la programación de un brazo robótico para trazar un círculo. Sin embargo, existen otros problemas de control que no se pueden clasificar dentro de ninguna de estas dos categorías como es el caso de la generación de *movimiento funcional*. Este movimiento es una dinámica que se puede provocar en ciertos tipos de sistemas sin la necesidad de diseñar un esquema de seguimiento ni de especificar alguna otra propiedad del mismo [2].

El fenómeno oscilatorio periódico es una instancia particular del concepto de movimiento funcional y exhibe propiedades interesantes, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Este comportamiento se presenta en una clase de sistemas *no-lineales* que pueden generar oscilaciones de amplitud y periodo constante, sin la necesidad de una excitación externa, y en este caso se conoce como ciclo límite. Cabe mencionar que este comportamiento no es exclusivo de los sistemas no-lineales ya que un sistema lineal también puede oscilar en dos instancias particulares:

- cuando se presenta una excitación senoidal en la entrada.
- bajo la condición de estabilidad marginal que se cumple cuando el punto de equilibrio (único) es un centro, i.e. cuando el sistema tiene polos estrictamente imaginarios, como se ilustra en la Figura 1.3, y en el caso de que algunos de estos polos tengan parte real, ésta es negativa.

No obstante, se debe señalar que existen diferencias significantes entre el fenómeno oscilatorio lineal y el no-lineal. Primero, la amplitud de las oscilaciones en un sistema lineal marginalmente estable depende directamente de las condiciones iniciales. En contraste, las condiciones iniciales no determinan la amplitud de un ciclo límite, siendo su estabilidad la única propiedad que se puede alterar ante una variación en dichas condiciones iniciales. Segundo, las oscilaciones de un sistema lineal carecen de la importante propiedad de robustez; cualquier perturbación infinitesimal o incertidumbre paramétrica puede trasladar a los valores propios imaginarios del sistema hacia el semiplano derecho, llevándolo así a la inestabilidad. En cambio ciertos ciclos límites, como los que se muestran en la Figura 1.4(a) y 1.4(b), tienen una estructura estable que permite preservar el comportamiento oscilatorio del sistema ante perturbaciones, siempre y cuando éstas no excedan un cierto umbral de magnitud.

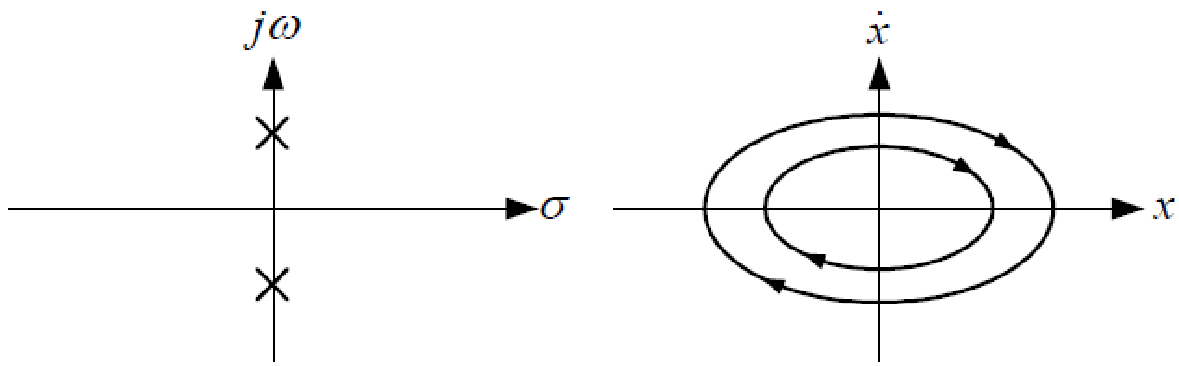
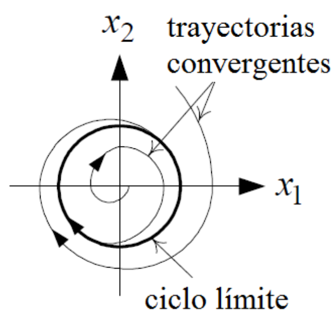


Figura 1.3: Comportamiento oscilatorio de un centro

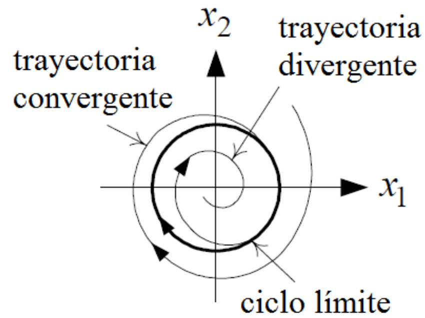
Como se puede apreciar, si se desea hacer oscilar de manera controlada a un sistema *físicamente realizable* entonces se deben diseñar ciclos límites, no oscilaciones lineales. Esto se debe a que cualquier implementación práctica requiere tanto robustez como libertad de diseño ya que el oscilador estará sujeto a perturbaciones y por lo tanto no se puede descartar este factor asumiendo un caso ideal sin incertidumbres. También resulta difícil producir y reproducir condiciones iniciales distintas de cero lo que reduce significativamente el tipo de oscilaciones que se pueden lograr bajo un esquema lineal. Lo anterior manifiesta la necesidad de utilizar herramientas no-lineales mas no implica que se deba descartar todo análisis lineal. Al contrario, la incorporación de ambos enfoques matemáticos resulta en una mayor flexibilidad que permite abordar un espectro más amplio de problemas.

1.2. Problema a Resolver

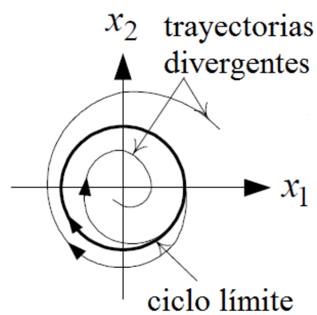
El enfoque principal del presente trabajo es *generar oscilaciones periódicas en un sistema mecánico subactuado, la Rueda de Inercia*. Específicamente, se busca que estas oscilaciones se manifiesten en el grado de libertad sin actuación, el del péndulo. La dificultad principal en esta empresa reside en que, por falta de una acción de control inmediata, el movimiento del péndulo se debe manipular por medio de la única entrada de control del sistema, la cual se ubica en el rotor. Bajo esta restricción el objetivo de rechazo a perturbaciones se complica si éstas se presentan en el péndulo ya que no es posible compensarlas directamente. Consecuentemente, el concepto de robustez cobra una mayor relevancia; se deben diseñar ciclos límites estables, Figura 1.4(a), para la variable que representa el ángulo del péndulo.



(a) Ciclo límite estable



(b) Ciclo límite Semi-estable



(c) Ciclo límite Inestable

Figura 1.4: Las condiciones iniciales no afectan la amplitud de un ciclo límite, si acaso su estabilidad

1.3. Contribuciones

Diversas metodologías se han diseñado para generar oscilaciones periódicas en la Rueda de Inercia. Por ejemplo, una estrategia reciente [3] basada en linealización por retroalimentación y técnicas de "averaging" se puede aplicar a la Rueda de Inercia para este propósito, así como también controladores basados en pasividad, redes neuronales recurrentes, restricciones holonómicas virtuales [4] o la modificación del controlador *Twisting* de modos deslizantes [2]. Las aportaciones principales de este trabajo son dos: la primera es hacer una comparación, de índole teórica, de los dos controladores propuestos por estas últimas dos técnicas, el controlador por restricciones holonómicas y el controlador de dos relevadores; la segunda es hacer una comparación *experimental* entre dos distintos tipos de linealización, uno utilizando el Jacobiano y el otro por retroalimentación de estados. Adicionalmente se implementaron diversos métodos para estimar las velocidades en la Rueda de Inercia, entre ellos el diferenciador de Levant [5] y un observador de alta ganancia [6].