

Capítulo 2

Rueda de Inercia

2.1. Modelo Matemático

El primer paso en el diseño de cualquier esquema de control es, inexorablemente, obtener un modelo matemático del sistema que se desea controlar; el objetivo de esta sección será entonces encontrar un conjunto de ecuaciones que representen la dinámica de la Rueda de Inercia adecuadamente. Como el concepto de la derivada permite relacionar distintas variables a través de los cambios que inducen entre sí, se utilizarán conjuntos de ecuaciones diferenciales para representar de manera cuantitativa el comportamiento complejo que exhibe este sistema mecánico. Se partirá del hecho de que todo modelo matemático se obtiene basándose en diversas suposiciones y simplificaciones, las cuales se deben llevar a cabo tomando en consideración un criterio básico de simplicidad contra precisión. Un modelo demasiado elaborado, aunque sea muy preciso, no necesariamente es el adecuado debido a la mayor demanda en capacidad y tiempo de procesamiento computacional que se requerirá para resolver la mayor cantidad de ecuaciones involucradas. Por otro lado, una representación más reducida tiende a ignorar ciertas dinámicas y propiedades físicas inherentes al sistema; estas simplificaciones generan incertidumbres que pueden comprometer el desempeño del control propuesto. Por lo tanto, antes de ignorar o incorporar dinámicas al modelo matemático, es preciso analizar el sistema a controlar.

El sistema físico que se pretende controlar, y por ende modelar, es conocido como Péndulo de Rueda Inercial. El prototipo experimental¹ mostrado en la Figura 2.1(a) es un péndulo simple con un rotor acoplado en el extremo. Adicionalmente, este rotor es activado a través de un motor de corriente directa por lo que este sistema puede ser catalogado como electro-mecánico. Sin embargo, para reducir el grado de complejidad que involucran estos sistemas híbridos se harán las siguientes consideraciones:

¹Parte de un equipo mecatrónico llamado *Mechatronics Control Kit*, o *MKT* por su abreviación en inglés



Figura 2.1: El MKT de Quanser[®] y sus codificadores incrementales ópticos

Suposición 2.1:

Las dinámicas eléctricas del motor son despreciables.

- Si bien la dinámica del motor requiere un análisis en sí misma, se debe descartar del modelo en aras de la simplicidad. No obstante, se deben tomar en cuenta factores físicos, como valores máximos de corriente y par entre otros, a la hora de realizar cualquier prueba experimental.

Suposición 2.2:

Las masas del péndulo y el rotor tienen distribuciones homogéneas (parámetros lineales) y se pueden considerar como puntuales.

- El equipo fue elaborado meticulosamente por el fabricante con el propósito de que se puede hacer una suposición como esta.

Suposición 2.3:

Las distancias óptimas a los ejes de rotación correspondientes son constantes.

- Esta suposición es necesaria para calcular los momentos de inercia requeridos de manera más fácil. Dadas las características de los materiales de fabricación, cualquier discrepancia que exista en una prueba experimental con esta suposición es despreciable.

Suposición 2.4:

Las fuerzas de fricción presentes en el sistema son despreciables.

- La fuerza de fricción es un factor muy importante que se presenta constantemente en aplicaciones reales. Este fenómeno exhibe comportamientos muy complejos difíciles de predecir, modelar y compensar que pueden modificar radicalmente la dinámica de un sistema. Específicamente, se sabe que la fricción es una fuerza que disipa energía por lo que la energía total del sistema se ve afectada directamente por la presencia de la fricción. No obstante, la interacción de esta fuerza es más relevante a muy bajas y a muy altas velocidades, Figura 2.2, por lo que esta suposición se sostiene.

Suposición 2.5:

Los componentes de la Rueda de Inercia son rígidos y por lo tanto la única fuente de energía potencial es la gravedad.

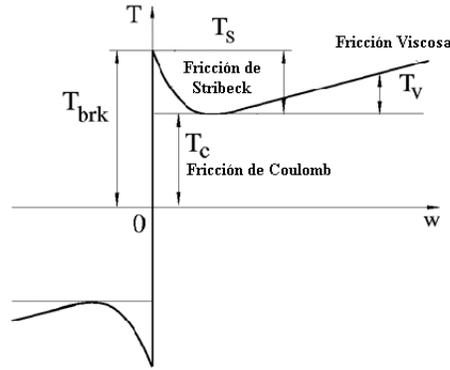


Figura 2.2: Los distintos comportamientos de la fricción en función de la velocidad

- La rotación del péndulo y el rotor presentan excentricidad. Éste es un efecto que se incrementará con el desgaste del equipo y que eventualmente puede influir de manera importante en los procesos energéticos del sistema. Nuevamente, por simplicidad se desprecia su efecto para propósitos del modelado.

Bajo estas suposiciones, específicamente Suposición 2.1, ahora es posible interpretar a este sistema híbrido como uno exclusivamente mecánico y como tal su modelo matemático se obtendrá a partir de la formulación de Euler-Lagrange. Esta metodología de modelado se basa en el concepto de *coordenadas generalizadas*², las cuales están asociadas directamente con los grados de libertad del sistema. Otra virtud del modelado Lagrangiano es que se involucran funciones *escalares* de energía, en contraste con las fuerzas y aceleraciones *vectoriales* que se presentan comúnmente en otros métodos de modelado, e.g. el Newtoniano [1]. La gran ventaja que se adquiere al utilizar funciones escalares es que hacen posible el uso del principio de superposición al momento de determinar las ecuaciones de energía requeridas para la estructuración del modelo matemático.

El paso inicial para obtener un modelo matemático a través de las ecuaciones de Lagrange, con base en los marcos de referencia de la Figura 2.3, es definir el conjunto de coordenadas generalizadas

$$q = \{q_1 \dots q_n\} \quad (2.1)$$

que representen a la Rueda de Inercia de n grados de libertad. En sistemas mecánicos, estas variables siempre se refieren a parámetros de posición y pueden representar distancias, en el caso de dinámicas rectilíneas, o ángulos, en el caso rotacional. Debido a

²Variables que conforman un conjunto completo e independiente. Un conjunto de variables de sistema es completo si, por medio de interconexiones, permite determinar los estados de todo el sistema. Es independiente si se puede variar a un elemento sin afectar a los otros elementos

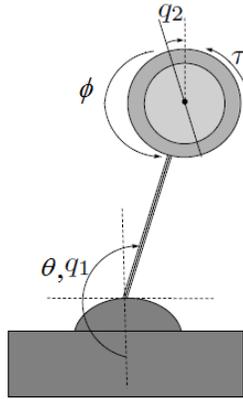


Figura 2.3: Diagrama de referencia para el modelado

que la rueda de inercia es un sistema exclusivamente rotacional se escogerán como coordenadas generalizadas a todos los ángulos absolutos existentes. Los ángulos absolutos son aquellos que se miden con respecto a una referencia fija, a diferencia de los ángulos relativos que toman como referencia a una posición variable. La razón por la que se prefieren ángulos absolutos es que permiten un cierto desacoplamiento del sistema; el valor de cada ángulo se puede obtener independientemente del valor de los otros ángulos involucrados. De esta manera se pueden diseñar los controladores pertinentes de una manera más sencilla y eficaz. Un análisis de la Figura 2.3 arroja dos ángulos absolutos que se pueden utilizar como coordenadas generalizadas, q_1 y q_2 . Como se puede observar, tanto q_1 como q_2 se miden con respecto a la vertical, tomando la dirección directa y opuesta de la atracción gravitacional (posición vertical inferior y vertical superior respectivamente) como referencia. Por lo tanto se requiere analizar si es factible adquirir estos ángulos a través del equipo experimental.

Para poder medir ambos ángulos, θ y ϕ , el equipo *MKT* cuenta con los dos decodificadores incrementales ópticos de posición que se muestran en la Figura 2.1. Un decodificador, Figura 2.1(b), se coloca en el eje fijo de rotación del péndulo y determina la variable θ , un parámetro absoluto que define el ángulo de posición del péndulo medido fijamente con respecto a una vertical inferior ubicada sobre el centro de la base. Dado que el ángulo θ es el mismo que la coordenada generalizada q_1 deseada, se concluye que esta coordenada se puede obtener directamente de las mediciones del primer decodificador. El segundo decodificador, Figura 2.1(c), se ubica sobre el motor que está fijo al otro extremo del péndulo. Su eje de rotación está conectado a la rueda giratoria y por lo tanto mide el ángulo relativo, ϕ , entre el péndulo y la rueda. La medición de este decodificador es relativa puesto que depende directamente de otra variable, específicamente hablando, de la posición angular del péndulo θ . Tomando en cuenta una vez más que se requieren variables absolutas, es necesario convertir esta medición relativa del segundo decodificador para establecer una variable fija y absoluta. Se puede observar

en la Figura 2.3 que lógicamente hay una relación directa entre la coordenada generalizada buscada q_2 y la medición del segundo decodificador, ϕ , pero también se involucra el ángulo θ . Esto no es de sorprender ya que la posición medida del rotor cambia al momento en que se registra un cambio en la posición del péndulo porque este último es su referencia. Consecuentemente, un análisis geométrico de los ángulos dados y los ángulos requeridos lleva a:

$$\begin{aligned} q_1 &= \theta \\ q_2 &= \theta + \phi \end{aligned} \tag{2.2}$$

La Rueda de Inercia es un sistema con únicamente dos grados de libertad, uno en el péndulo y otro en el rotor. Por lo tanto, el conjunto de variables completo e independiente (2.2) representa el conjunto buscado de coordenadas generalizadas del sistema. Con este resultado, se prosigue a determinar la energía cinética y potencial del sistema en función de sus posiciones y velocidades angulares, q_1, q_2, \dot{q}_1 y \dot{q}_2 . Generalmente la energía cinética es una función positiva definida que utiliza como parámetros a las coordenadas generalizadas y sus respectivas derivadas mientras que la energía potencial sólo involucra a las coordenadas generalizadas, excluyendo en la mayoría de los casos a sus derivadas [1]. Cada una de estas energías se puede calcular individualmente en un sistema multi-elemento haciendo uso del principio de superposición, por lo que no importa cuál se determine primero. Entonces, empezando por la energía cinética E_k de un sistema puramente rotacional, ésta se define como

$$E_k \triangleq T = \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{2.3}$$

donde J representa el momento de inercia de un cuerpo rotacional y su respectiva velocidad angular. Ahora, la definición del momento de inercia *escalar*, donde el eje de rotación es fijo como es el caso del péndulo y del rotor de la rueda de inercia, indica que

$$J_s = \int l^2 dm \tag{2.4}$$

siendo m la magnitud de una masa puntual y l la distancia perpendicular entre ésta y el eje de rotación. La integral de (2.4) está en función del diferencial dm , lo cual implica que el momento de inercia de un cuerpo está determinado por la distribución de su masa a lo largo del volumen que ocupa en el espacio. Por ejemplo, un cilindro hueco y un disco con la misma altura, la misma masa y el mismo radio no tendrán el mismo momento de inercia debido a la distinta concentración de masa en cada uno de ellos. Existen varios ejemplos de esto, pero lo importante es señalar que la definición (2.4) conlleva desafíos al tratar de aplicarla a cuerpos con geometrías complejas o con densidades de masa variables. Afortunadamente se pueden sortear estas dificultades

Descripción	Notación	Unidades
longitud del péndulo	ℓ_r	m
distancia al centro de masa del péndulo	ℓ_p	m
distancia al centro de masa del sistema	ℓ	m
masa del péndulo	m_p	kg
masa del rotor	m_r	kg
masa combinada del péndulo y el rotor	m	kg
momento de inercia del péndulo	J_p	kg·m ²
momento de inercia del rotor	J_r	kg·m ²

Tabla 2.1: Nomenclatura para los parámetros de la Rueda de Inercia

si se considera un cuerpo con densidad de masa homogénea o simplemente una masa puntual; en esta caso se simplifica (2.4) y se define el momento de inercia escalar como

$$J_s = ml^2 \quad (2.5)$$

A partir de Suposición 2.2 y Suposición 2.3 es posible aplicar (2.5) para determinar el momento inercial de la Rueda de Inercia. Para ello se introduce la nomenclatura de la Tabla 2.1 y se aclara que los parámetros J_p y J_r , junto con todos los demás definidos, son valores *constant*es que ya han sido determinados previamente de manera experimental [1]. No obstante, para facilitar la comprensión y la fluidez del desarrollo posterior, estos parámetros se seguirán representando de acuerdo a la Tabla 2.1 y sus valores numéricos se sustituirán en el momento adecuado.

Retomando el concepto de planteado en (2.3), se prosigue a definir la energía cinética del péndulo y del rotor como

$$\begin{aligned} T_{péndulo} &= \frac{1}{2} J_p \dot{q}_1^2 \\ T_{rotor} &= \frac{1}{2} J_r \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Estas dos ecuaciones describen las energías cinéticas del péndulo y del rotor de manera aislada y como tal no proporcionan información de cómo interactúan el péndulo y el rotor entre sí. Para definir la energía total de la rueda de inercia se necesita relacionar al péndulo y al rotor a través de una expresión que *acople* energéticamente al sistema. Esta relación se puede encontrar al considerar el par del sistema *interconectado* de la Rueda de Inercia. Debido a que el momento de inercia es aditivo,

$$J_+ = \sum_{i=1}^N m_i l_i^2$$

se puede calcular J_+ para la Rueda de Inercia tomando al eje de rotación del péndulo como pivote si se considera al sistema, bajo Suposición 2.2, como una composición de $N = 2$ masa puntuales. Entonces,

$$J_{+p} = m_p \ell_p^2 + m_r \ell_r^2 \quad (2.7)$$

Adicionalmente, se debe aplicar el teorema de ejes paralelos ya que el rotor también tiene una dinámica rotacional sobre un plano paralelo al péndulo. Se traslada el pivote hacia el eje de rotación del rotor y se elabora sobre (2.7) para finalmente obtener

$$\begin{aligned} J_1 &\triangleq m_p \ell_p^2 + m_r \ell_r^2 + J_p \\ J_2 &\triangleq J_r \end{aligned} \quad (2.8)$$

El péndulo no afecta la dinámica del rotor puesto que el eje de rotación de este último es perpendicular al plano de movimiento del péndulo y el punto de interacción entre los dos está ubicado precisamente sobre el eje de rotación del rotor. Por la tanto, reescribiendo (2.6) a partir de (2.8),

$$\begin{aligned} T_{péndulo} &= \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 \\ T_{rotor} &= \frac{1}{2} J_r \dot{q}_2^2 \\ T_{total} = T_{péndulo} + T_{rotor} &= \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como se puede apreciar, (2.9) expresa la energía cinética del sistema *completo* en función de únicamente las derivadas de las coordenadas generalizadas (2.2). Esto señala claramente que la energía cinética en un sistema no depende de la posición de los elementos sino de la velocidad de ellos, lo cual elimina la necesidad de establecer puntos de referencia de posición absolutos. Si sólo se contara con sensores de velocidad se podría determinar aún la energía cinética sin necesidad de otras mediciones. A través de (2.9) también se puede apreciar que la información contenida en la energía cinética no tiene memoria y sólo define a un único instante en el tiempo. Este punto es claro ya que la velocidad es la diferencia en distancias entre un evento y otro, por lo tanto es independiente de todo otro suceso en el espacio-tiempo. Si se analiza el péndulo en dos distintas posiciones cualesquiera, se puede tener el caso de que la energía cinética sea igual en ambos casos siempre y cuando las velocidades correspondientes del péndulo y del rotor sean las mismas los dos instantes. Una analogía sencilla sería el caso de un automóvil moviéndose sobre una pista recta; se puede determinar su velocidad instantánea, y por lo tanto su energía cinética, en cualquier momento sin necesidad de saber de dónde partió. Por igual, el automóvil puede alcanzar esa misma velocidad en otro punto en la pista independientemente de las velocidades a las que se haya movido previamente.

Aunque los dos casos analizados tengan dinámicas distintas (rotacional y rectilínea) su comparación es válida porque están relacionados por una ley universal, la energía cinética.

Se requiere ahora definir a la energía potencial, V , del sistema. Partiendo de la Suposición 2.5, tanto el péndulo como el rotor aportan energía potencial al sistema de manera *individual* debido a sus masas pero nuevamente surge la necesidad de definir V para el sistema interconectado. Tomando en cuenta nuevamente el acoplamiento mecánico entre el péndulo y el rotor junto con la geometría particular de la Rueda de Inercia, las dos masas m_p y m_r se pueden representar como un solo elemento con un centro de masa único y estático porque los centros de masa desacoplados también son estáticos. Es decir, se puede pintar un punto en cada uno de los tres centros de masa y éstos se mantendrán fijos debido a la geometría y simetría del sistema acoplado (el eje de rotación del rotor no se mueve respecto al péndulo, el péndulo y la rueda son componentes perfectamente simétricos). Aludiendo a la nomenclatura de la Tabla 2.1, este nuevo centro de gravedad está definido por una masa m ubicada a una distancia ℓ del pivote en la base.

El planteamiento anterior da la pauta a que la energía potencial de la rueda de inercia se defina a través de

$$V = mgh \tag{2.10}$$

para una masa ideal m atraída hacia un punto de referencia fijo, ubicado a una altura h , con una fuerza gravitacional g . Dado que m y g son constantes para el sistema rotacional en consideración, la única variable para esta energía es h , la cual oscilará dentro de un rango de $[0, 2\ell]$ debido a las dimensiones físicas del sistema. La variación en la altura h , que es un parámetro de posición, dependerá de una sola variable, en este caso la posición del péndulo. Ante una variación en su posición angular el péndulo se mueve con el nuevo centro de masa y por lo tanto se modifica la energía potencial. La posición de la rueda en este proceso es un factor totalmente despreciable porque, debido al acoplamiento y a que su eje de rotación es paralelo al plano de movimiento del péndulo, su centro de masa es siempre fijo en relación al péndulo. De esta manera se puede afirmar que un cambio en la posición angular del rotor no afecta la posición del centro de masa del acoplamiento péndulo-masa y por lo tanto tampoco afecta la energía potencial. Tomando en cuenta que el desplazamiento angular del péndulo se mide desde la posición vertical inferior como lo indica la Figura 2.3, se tiene que establecer una energía potencial mínima y nula en este punto porque representa una referencia de posición absoluta y además es un punto crítico con respecto a la dirección de la fuerza gravitacional. Así también, la vertical superior representa otro punto crítico de energía potencial ubicado a una distancia 2ℓ de su contraparte inferior.

Una vez establecidos estos dos puntos críticos sólo resta describir cómo cambia la distancia entre ellos en función de la posición angular del péndulo q_1 . Esta variación se debe medir en el sentido vertical de la fuerza gravitacional porque ésta es la que produce

la energía potencial en el sistema. Típicamente se utilizan funciones senoidales para describir desplazamientos verticales cuando el punto de referencia de posición está ubicado sobre la horizontal del sistema. Sin embargo, en este caso la referencia está desplazada 90° , una ortogonalidad, por lo que se requiere utilizar las funciones cosenoidales, la manifestación ortogonal del seno, para describir el desplazamiento vertical requerido. La función coseno tiene un rango de $[-1,1]$ para valores de 180° y 0° respectivamente. Si se busca definir un valor mínimo para esta función en 0° y un valor máximo en 180° entonces se requiere hacer la siguiente transformación

$$\cos(q_1) \rightarrow (1 - \cos(q_1))$$

con la cual se describe el desplazamiento vertical *normalizado* del péndulo,

$$h_{normalizada} = (1 - \cos(q_1)) \quad (2.11)$$

Si la magnitud de la distancia que existe entre la base y el centro de masa péndulo-rotor, ℓ , fuese unitaria, bastaría con reemplazar la h de (2.10) con la $h_{normalizada}$ de (2.11), pero éste no es el caso; la variación en la altura, y por lo tanto en energía potencial para este sistema, no sólo va a depender de (2.10) sino también de la magnitud de ℓ :

$$h = \ell(1 - \cos(q_1)) \quad (2.12)$$

Tomando esto en cuenta, el último paso requerido es asociar (2.10) y (2.12) para finalmente obtener

$$V = mg\ell(1 - \cos(q_1)) \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) cumple con lo establecido anteriormente al determinar la energía potencial en función de las coordenadas generalizadas y/o sus derivadas. Como se había previsto, la energía cinética (2.9) depende de las variables de velocidad (\dot{q}_1, \dot{q}_2) mientras que la energía potencial (2.13) depende de los parámetros de posición (q_1). Al analizar las dos funciones de energía resalta el hecho de que no se involucra a la coordenada generalizada q_2 en lo absoluto. Esto indica que la posición del rotor (q_2) es irrelevante, por lo menos energéticamente hablando, en el funcionamiento del sistema. Debido a la geometría de la rueda de inercia, el centro de gravedad del rotor es fijo en relación al péndulo. Esto implica que la posición del rotor, q_2 , no afecta la ubicación del centro gravitacional del acoplamiento péndulo-rotor y por lo tanto tampoco aporta a la energía potencial. No obstante, a pesar de que la posición del rotor es trivial, su velocidad tiene una fuerte aportación a la energía cinética y consecuente también a la dinámica del sistema completo. La posibilidad de poder apreciar este tipo de peculiaridades a través de un análisis del funcionamiento energético del sistema acoplado es una gran ventaja que se adquiere a través del modelado por ecuaciones de Lagrange.

Una vez obtenidas (2.9) y (2.13), el siguiente paso es definir al Lagrangiano del sistema como la diferencia entre estas dos energías.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{q}_2^2 + mg\ell(\cos(q_1) - 1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Evidentemente, el Lagrangiano también es una función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas. Esto no debe extrañar ya que finalmente *el Lagrangiano es una función de energía*. Sin embargo, el Lagrangiano por sí solo no responde a la necesidad de encontrar un modelo matemático adecuado para el sistema en cuestión. Para lograr esta meta es necesario establecer unas ecuaciones de movimiento que relacionen la energía definida con las fuerzas que interactúan con el péndulo y el rotor. Estas ecuaciones de movimiento se expresan en términos del Lagrangiano de la siguiente manera,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Las ecuaciones definidas por (2.15) reciben el nombre de ecuaciones de Lagrange y son equivalentes a las ecuaciones que se derivarían utilizando la Segunda Ley de Newton. La formulación de (2.15) establece un sistema de n ecuaciones diferenciales que relacionan al Lagrangiano con las fuerzas τ_k , denominadas *pares generalizados*. La variable τ_k representa el par generalizado en la dirección q_k . Considerando las dos coordenadas generalizadas (2.2), para $k = 1, 2$ se tendrán dos pares generalizados, τ_1 y τ_2 , en la dirección de q_1 y q_2 respectivamente. El par τ_2 corresponde a aquél generado por el sistema electromecánico (motor de corriente directa) que actúa sobre el rotor, haciéndolo girar, y el par generalizado τ_1 es el par que actúa sobre el péndulo. Dado que en el sistema de la rueda de inercia sólo existen dos fuentes de energía, el motor de directa y la fuerza gravitacional, esto implica que el par τ_1 es producto de una de estas dos fuentes. El motor representa una fuerza rotacional, y por lo tanto es la única fuente de energía que puede generar el par τ_1 . Debido al acoplamiento mecánico que existe entre el péndulo y el rotor, la magnitud de τ_1 será idéntica a la de τ_2 , pero está se manifestará en un sentido opuesto. Es decir, el par del péndulo se relaciona con el par de entrada del rotor por medio de la identidad

$$\tau_1 = -\tau_2 \quad (2.16)$$

Por lo tanto, a partir de (2.15) y (2.16), las ecuaciones de Lagrange para la rueda de inercia quedan expresadas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -\tau_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \tau_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como se puede observar en (2.17), antes de poder desarrollar un modelo matemático se requiere determinar las derivadas parciales del Lagrangiano (2.14):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = J_1 \dot{q}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -mg\ell \text{sen}(q_1) \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = J_2 \dot{q}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \qquad (2.19)$$

Cabe señalar que la obtención de estas derivadas parciales permite apreciar de una manera más aislada y clara la aportación que tienen las coordenadas generalizadas y sus derivadas a la energía del sistema. Por ejemplo, el hecho de que $\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$ muestra que la energía del sistema no depende del ángulo del rotor, q_2 , tal y como se había analizado previamente. Entonces, al sustituir (2.18)-(2.19) en (2.17) finalmente se obtiene el modelo de la Rueda de Inercia *sin fricción*,

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{q}_1 + mg\ell \text{sen}(q_1) &= -\tau_2 \\ J_2 \ddot{q}_2 &= \tau_2 \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Sin embargo, los modelos usados frecuentemente en la literatura, e.g. [4], [2], contemplan adicionalmente la fuerza de fricción en el rotor. Estos modelos más elaborados se expresan en [2] por medio de la forma matricial

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \text{sen}(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau \qquad (2.21)$$

la cual es equivalente a

$$J_1 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 + h \text{sen}(q_1) = 0 \qquad (2.22)$$

$$J_2 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 = \tau \qquad (2.23)$$

y representa el modelo de la Rueda de Inercia *con fricción en el rotor*. Resulta importante contar con ambos modelos ya que (2.21) es una representación más precisa y conviene usarla en el diseño de un controlador para un mejor desempeño mientras que la simplicidad de (2.20) facilita las tareas de ciertos análisis.

Por último, si se define el vector de estados

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^T$$

entonces tanto (2.20) como (2.21) se pueden representar a través de la forma no-lineal general

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \tau$$

respectivamente como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -J_1^{-1}h\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -J_1^{-1} \\ 0 \\ J_2^{-1} \end{bmatrix} \tau \quad (2.24)$$

$$\dot{x}_\mu = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(J_1 - J_2)^{-1}h\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ (J_2 - J_2^2 J_1^{-1})^{-1} J_2 J_1^{-1} h\text{sen}(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(J_1 - J_2)^{-1} \\ 0 \\ (J_2 - J_2^2 J_1^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \tau \quad (2.25)$$

Se debe mencionar que tanto (2.24) como (2.25) describen la dinámica de una rueda de inercia *general*. Los parámetros J_1 , J_2 y h pueden variar de prototipo a prototipo dependiendo de diversas propiedades físicas, como el peso y el diámetro del rotor, la longitud del péndulo, etc. Para el caso específico de la Rueda de Inercia de Quanser[®] que se muestra en la Figura 2.1(a) el proveedor proporciona los siguientes valores, obtenidos experimentalmente [1], para estos parámetros:

$$\begin{aligned} J_1 &= 4.5721\text{e} - 3 \\ J_2 &= 2.495\text{e} - 5 \\ h &= 0.35481 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos parámetros en (2.24) y (2.25) se obtienen la dos representaciones matemáticas del equipo que se controlará, considerando la fricción de la rueda en la primera y despreciando ésta en la segunda,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -77.6033\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -218.7179 \\ 0 \\ 40078.554 \end{bmatrix} \tau \quad (2.26)$$

$$\dot{x}_\mu = \begin{bmatrix} x_2 \\ -78.0291\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 78.0291\text{sen}(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -219.9180 \\ 0 \\ 40298.4720 \end{bmatrix} \tau \quad (2.27)$$

2.2. Puntos de Equilibrio

Comúnmente se pueden encontrar los términos “punto de equilibrio estable” y “punto de equilibrio inestable” en la literatura asociada a la Rueda de Inercia [2], [4]. Resulta

importante abordar este concepto ya que se buscará generar las oscilaciones periódicas alrededor de estos dos puntos. Primero, se parte de la definición de punto de equilibrio [6] la cual dicta que un punto $x = x^*$ en el espacio de estados es un punto de equilibrio si siempre que un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(t, x)$$

empieza en x^* éste se mantendrá sobre x^* para todo tiempo futuro. La interpretación inmediata de esto es que el sistema no se mueve si está sobre un punto de equilibrio, es decir, $\dot{x}(t, x) \equiv 0$ para todo tiempo futuro dada la condición inicial del sistema, $x_o = x^*$. Por lo tanto, se pueden encontrar *todos* los puntos de equilibrio, Θ , de un sistema a partir de la solución de la ecuación

$$f(x) = 0$$

Aplicando esta identidad en el modelo simplificado (2.26), ya que sólo se busca definir una cualidad y no se requiere tanta precisión, da como resultado

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -77.6033\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Al resolver el sistema de cuatro ecuaciones (2.28) se obtiene que cualquier punto de equilibrio Θ debe satisfacer las relaciones

$$\begin{aligned} \text{sen}(x_1) &= 0 \\ x_2, x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

y por lo tanto existe un número infinito de puntos de equilibrio para este sistema,

$$\Theta_\infty \triangleq \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi i \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde $i \in \mathbb{Z}$. Para reducir el conjunto de puntos de equilibrio y facilitar el análisis posterior se considera lo siguiente,

Suposición 2.6:

La dinámica del péndulo se puede restringir dentro de un rango $q_1 \in [0, 2\pi]$, o bien la dinámica de la Rueda de Inercia es invariante ante cualquier periodicidad de q_1 .

La multiplicidad de (2.30) tiene una representación física clara en la Rueda de Inercia y ésta es el número de vueltas completas que da el péndulo en una dirección. Bajo Suposición 2.6, se asume que esto no modifica el comportamiento del sistema y por lo tanto se pueden definir *dos distintos puntos de equilibrio* para este sistema,

$$\Theta_1 \triangleq \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Theta_2 \triangleq \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

uno para cada solución $x_1 \in [0, 2\pi]$ de (2.29), que corresponden respectivamente a la posición vertical inferior y vertical superior de péndulo. Se puede observar nuevamente que la posición del rotor es una variable irrelevante en la dinámica de la Rueda de Inercia, en este caso porque ninguno de los dos puntos de equilibrio dependen de ella; no importa el desplazamiento angular del rotor $x_3 = q_2$, siempre y cuando su velocidad angular, $x_4 = \dot{q}_2$, sea cero.

Una vez que se encuentran los puntos de equilibrio del sistema (2.26), el siguiente paso es determinar la estabilidad, o bien inestabilidad, de cada uno. Conceptualmente, la estabilidad de un punto de equilibrio no se asocia con el punto en sí, si no con una cierta vecindad alrededor de él. Un punto de equilibrio será estable si cualquier trayectoria que inicié arbitrariamente cerca de él se mantendrá también relativamente cerca de él, de lo contrario el punto de equilibrio es inestable. Sin embargo, más allá del detalle conceptual, se requieren herramientas analíticas para poder determinar de manera concreta la naturaleza de cualquier punto de equilibrio. Para este propósito se puede invocar el teorema del Método Indirecto de Lyapunov, el cual establece que, dado el conjunto de valores propios

$$\lambda_i \triangleq \det [sI - A_\Theta] = 0 \tag{2.31}$$

un punto de equilibrio *de un sistema no-lineal*:

- es localmente estable si $\text{Re} \{ \lambda_i \} < 0 \forall i$.
- es localmente inestable si $\text{Re} \{ \lambda_i \} > 0$ para alguna i .
- puede ser localmente estable o localmente inestable si $\text{Re} \{ \lambda_i \} \leq 0 \forall i$ y además $\text{Re} \{ \lambda_i \} = 0$ para alguna i . En esta situación el método no puede concluir estabilidad o inestabilidad; se requiere un análisis adicional.

En el caso lineal, el origen de la matriz A_Θ es bien conocido; ésta es simplemente la matriz *lineal* de estados. Sin embargo, dada la estructura no-lineal de (2.26) no se puede hacer uso del Método Indirecto de Lyapunov inmediatamente. No obstante, existen

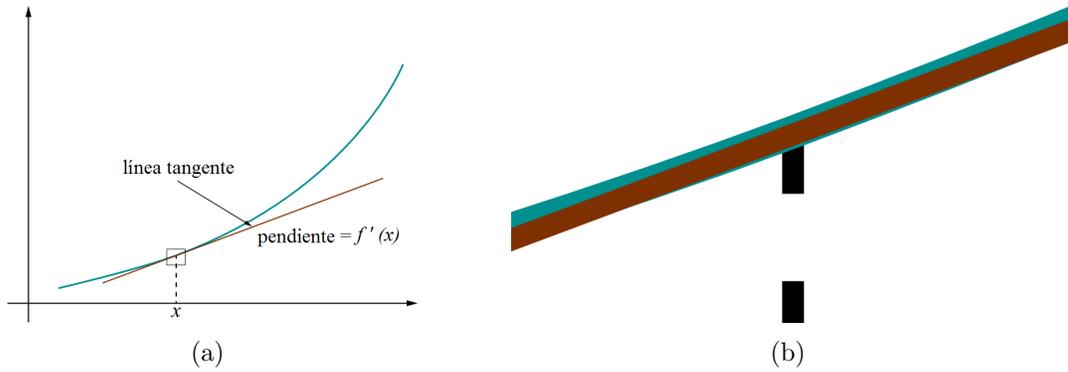


Figura 2.4: Naturaleza localmente lineal de una función no-lineal

diversas técnicas que permiten *aproximar* un cierto sistema no-lineal a través de una representación lineal. Una vez que se obtiene alguna de estas descripciones alternativas es posible entonces determinar un conjunto de valores propios por medio de (2.31).

Una técnica de linealización muy recurrida se basa en el análisis de una no-linealidad dentro de una región reducida, Figura 2.4(a), y se conoce como *linealización local*. Resulta ser que alrededor de un cierto punto, en este caso los puntos de equilibrio, cualquier sistema no-lineal tiene un comportamiento *localmente lineal* como se muestra en la Figura 2.4. Es obvio que este comportamiento se sostiene lejos del punto analizado, pero la propuesta de la linealización local es recorrer el punto de análisis a lo largo de la función para linealizarla completamente. Consecuentemente, se tendrá una linealización particular para cada punto en el dominio de la función no-lineal, las cuales se pueden determinar a partir del Jacobiano

$$\mathbf{A}_\Theta = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \quad (2.32)$$

Debido a que para la rueda de inercia sólo se requiere conocer las propiedades de estabilidad de sus dos punto de equilibrio, se debe evaluar (2.32) para cada uno de ellos. Calculando el Jacobiano,

$$\mathbf{A}_\Theta = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -77.6033 \cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se genera una matriz de linealización general en función del estado x_1 , la posición. Analizando primero el punto de equilibrio Θ_1 se cumple que

$$\cos(x_1) = \cos(0) = 1$$

y por lo tanto el Jacobiano correspondiente es

$$A|_{\Theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Se requiere ahora encontrar los valores propios (2.31) para (2.33), los cuales son la solución del polinomio característico

$$s^4 + 77.6033s^2 = 0$$

La solución de esta ecuación de cuarto orden arroja que

$$\lambda(\Theta_1) = \{0, 0, 8.8093i, -8.8093i\}$$

Como se puede observar, ningún valor de $\lambda(\Theta_1)$ tiene parte real; todos los polos del sistema linealizado alrededor de Θ_1 se ubican sobre el eje imaginario. Estos resultados indican que el punto de equilibrio Θ_1 es un centro y por lo tanto no es posible concluir sobre su estabilidad utilizando el criterio del Método Indirecto de Lyapunov. Tampoco se puede aplicar el Método Directo de Lyapunov, el cual dicta que una matriz es Hurwitz si y sólo si existe una solución única $P > 0$ que satisfaga la ecuación de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

para una matriz $Q > 0$. Basta con proponer una matriz Q identidad para obtener la ecuación de Lyapunov correspondiente

$$P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -77.6033 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual no tienen solución; es decir, no se puede concluir la estabilidad del sistema *linealizado* alrededor del punto de equilibrio inferior. Sin embargo, se sabe intuitivamente que si se suelta el péndulo libremente desde cualquier punto que no esté ubicado sobre la vertical, eventualmente se detendrá justamente sobre la vertical inferior. Es decir, se sabe *a priori* que el punto de equilibrio Θ_1 es estable a pesar de que tanto el Método Indirecto y el Método Directo de Lyapunov no puedan concluir nada al respecto. Que la linealización local dictará que Θ_1 es un centro cuando en realidad es un foco estable es consecuencia de la Suposición 2.4, ya que al desprestigiar cualquier fuerza de fricción en la dinámica del sistema se excluyó la única fuente disipativa de energía. Al considerar el efecto de fricción en el péndulo se obtendría una linealización *estable* alrededor de Θ_1 ,

pero esto a cambio de una mayor complejidad en el modelo y, por ende, en el análisis posterior. Sí es posible trabajar con esta simplificación del modelo matemático, siempre y cuando se ejerza precaución previa a juicio sobre resultados, como en el caso de este punto de equilibrio.

Una vez analizado Θ_1 , se lleva a cabo el mismo análisis para Θ_2 a partir de

$$A|_{\Theta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

En este caso el polinomio característico es

$$s^4 - 77.6050s^2 = 0$$

y los valores propios para el sistema linealizado alrededor de Θ_2 son entonces

$$\lambda(\Theta_2) = \{0, 0, 8.8093, -8.8093\}$$

A diferencia de Θ_1 , la conclusión sobre la estabilidad de Θ_2 es inmediata; debido a que

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$$

para el valor propio $\lambda_3 = 8.8093$, el punto de equilibrio Θ_2 es *inestable* de acuerdo al Método Indirecto de Lyapunov. Nuevamente se le puede dar una interpretación física a este resultado y en este caso sí hay congruencia con lo que se sabe intuitivamente; el péndulo no se puede sostener libremente en el punto de equilibrio vertical superior. Aún suponiendo condiciones ideales, es decir el caso donde se tenga el modelo *exacto* y no se presenten perturbaciones en el sistema, es intuitivamente claro que si la rueda de inercia no inicia sobre la vertical superior entonces nunca regresará a este punto libremente y consecuentemente éste es inestable. Por lo tanto, de aquí en adelante se referirá a los puntos vertical inferior y vertical superior como puntos de equilibrio estable e inestable respectivamente.