

Capítulo 4

Controlador por Restricciones Holonómicas

4.1. Preliminares: Restricciones Holonómicas

Una restricción holonómica, \mathcal{H} , para un conjunto (2.1) de coordenadas generalizadas es aquella que se puede expresar como [8]

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n) = \text{const} \quad (4.1)$$

dado que de esta forma las variaciones infinitesimales del sistema satisfacen

$$\Delta q_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} + \Delta q_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} + \dots + \Delta q_n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} = 0 \quad (4.2)$$

Cuando la ecuación (4.2) se cumple ésta es una ecuación diferencial integrable (holonómica) y como tal representa el diferencial completo de (4.1). De lo contrario, la restricción se dice que es no-holonómica.

La presencia de una restricción holonómica en un sistema físico *acopla* a dos o más de sus variables. Esto permite describir la dinámica general de todas las variables del sistema a partir de las variaciones infinitesimales en dichas variables, lo cual simplifica considerablemente el análisis matemático tal y como se puede apreciar en el ejemplo de una restricción no-holonómica en un trineo, Figura 4.1. La acción de la fricción sobre el trineo prácticamente imposibilita un movimiento lateral para desplazamientos infinitesimales por lo que se genera una restricción sobre el desplazamiento vertical, d_y , y el desplazamiento horizontal, d_x , definida por

$$\Delta d_y = \Delta d_x \tan \theta \quad (4.3)$$

En este caso el desplazamiento del sistema tiene dos grados de libertad. Sin embargo, para movimientos a gran escala se deben considerar tres grados de libertad ya que se

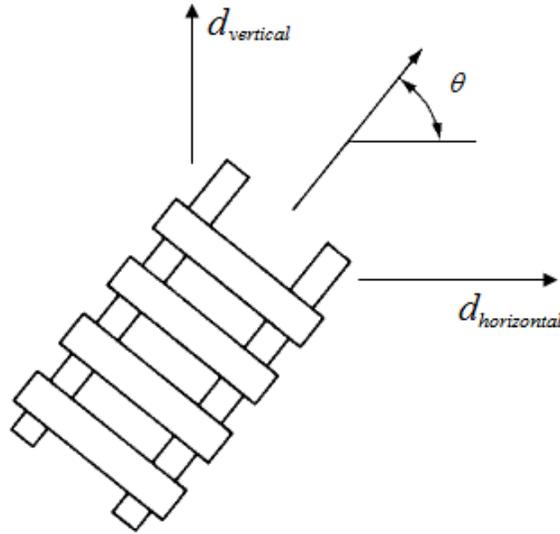


Figura 4.1: Las variables del sistema de un trineo exhiben una restricción no-holonómica

requiere tanto a θ como a d_x y d_y para determinar exactamente la posición y orientación del trineo. Es claro entonces que la restricción (4.3) no se sostiene para todas las dinámicas del trineo y por lo tanto se considera como una restricción no-holonómica. Si se lograra hacer la restricción (4.3) invariante, i.e. holonómica, la dinámica del trineo, y consecuentemente su control, se simplificaría, por lo menos matemáticamente. A pesar de que la restricción holonómica de desplazamiento no surge de manera natural, es posible provocarla por medio de la acción del control y en este caso se denominaría como una *restricción holonómica virtual*.

Resulta ser que se pueden resolver diversos problemas de control a través de esta idea de imponer restricciones holonómicas virtuales en las variables del sistema; la generación de oscilaciones periódicas es un ejemplo particular. Recientemente se ha logrado provocar oscilaciones periódicas en sistemas mecánicos subactuados bajo esta metodología, específicamente el péndulo de Furuta [9] y la Rueda de Inercia [4]. A continuación se presentan los pasos diseñados en [4] que permiten lograr el objetivo de generar oscilaciones de una amplitud pre-especificada y un periodo arbitrariamente independiente en la Rueda de Inercia.

4.2. Planeación de Trayectorias

La meta principal del controlador por restricciones holonómicas [4] es diseñar una ley de control que cumple con el mismo objetivo planteado: lograr que el péndulo oscile con una amplitud \mathcal{A} y una frecuencia $\Omega = T^{-1}$ independientemente determinadas. Para este controlador, la amplitud de oscilación se definirá como la desviación máxima, en

una dirección especificada, desde un punto de equilibrio. Las oscilaciones *deseadas* del péndulo deben satisfacer las especificaciones:

$$\begin{aligned} q_{1*}(t+T) &= q_{1*}(t) \quad \forall t \\ \inf_{t \in [0, T]} \{q_{1*}(t) - \bar{q}_1\} &< 0 \\ \sup_{t \in [0, T]} \{q_{1*}(t) - \bar{q}_1\} &= \mathcal{A} \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\bar{q}_1 \in [0, \pi]$ es uno de los dos puntos de equilibrio del sistema no forzado.

Por otro lado, el reto de generar este comportamiento periódico se puede transformar en un problema de planeación y seguimiento de trayectoria; es decir, a diferencia del controlador de dos relevadores, en este caso se buscará que el péndulo siga una trayectoria oscilatoria *prescrita* orbitalmente estable. Adicionalmente, es posible encontrar un cambio de coordenadas bajo el cual una evolución cíclica de la posición del péndulo, en las coordenadas originales, corresponda a la *regulación* hacia cero de algunas de las coordenadas transformadas. Dicho cambio de coordenadas se definirá bajo el concepto de restricciones holonómicas para introducir e imponer una relación directa entre las dos coordenadas generalizadas, la posición del péndulo (q_1) y la posición del rotor (q_2). De esta forma se puede restringir la dinámica del péndulo en función del ángulo de la rueda, o también al contrario, se puede restringir el ángulo de la rueda en función del ángulo del péndulo. Ya que la variable de interés es el ángulo del péndulo, tiene sentido expresar la posición del rotor en función de la posición del péndulo a través de

$$q_2 = \mathcal{H}(q_1) \tag{4.5}$$

donde la restricción holonómica $\mathcal{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable por lo menos dos veces. A partir de esta restricción holonómica es posible describir la dinámica completa del sistema en términos de la posición del péndulo únicamente. Si se asume que existe una ley de control que hace la restricción (4.5) invariante, entonces la dinámica de la Rueda de Inercia, proyectada bajo (4.5), se puede representar como

$$\alpha(q_{1*}) \ddot{q}_{1*} + \beta(q_{1*}) \dot{q}_{1*}^2 + \gamma(q_{1*}) = 0 \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(q_1) &= J_1 + J_2 \mathcal{H}'(q_1) \\ \beta(q_1) &= 2J_2 \mathcal{H}''(q_1) \\ \gamma(q_1) &= h \text{sen}(q_1) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como se puede apreciar, (4.6) es integrable siempre y cuando $\alpha(q_{1*}) \neq 0$. Es importante notar que esta nueva dinámica es de *segundo orden*, en contraste con la dinámica original (2.21) de *cuarto orden*. La reducción de orden para la dinámica proyectada (4.6) se

debe a que la restricción (4.12) elimina un grado de libertad del sistema, al imponer una dependencia directa de q_2 sobre q_1 , y por lo tanto dos variables de estado (q_2, \dot{q}_2) se eliminan en la nueva dinámica. Después de transformar el sistema (2.21) a la forma holonómicamente restringida (4.6)-(4.7), el enfoque gira ahora hacia la manera de forzar a que esta última dinámica reducida contenga una trayectoria periódica estable que satisfaga las especificaciones (4.4).

Ya que no es posible generar oscilaciones alrededor de cualquier punto arbitrario, el primer paso en el diseño de una trayectoria periódica para (4.6) es investigar dónde es posible encontrar un ciclo límite. Se sabe que cualquier órbita periódica de un sistema debe encerrar a por lo menos uno de sus puntos de equilibrio [6]. En el caso particular de (4.6), el conjunto de sus puntos de equilibrio se determina, independientemente de la restricción holonómica (4.12), a través de la solución de la ecuación

$$\gamma(q_1) = h \operatorname{sen}(q_1) = 0$$

Resolviendo, se obtiene un conjunto infinito de puntos de equilibrio

$$q_{1eq} = q_{1i} = \pi i, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (4.8)$$

Cabe señalar que, aunque los puntos de equilibrio (4.8) del sistema reducido (4.6) son los mismos que los puntos de equilibrio (2.30) del sistema linealizado, en [10] se muestra que cualquier elemento de (4.8) es un centro del sistema no-lineal proyectado (4.6), y por lo tanto existen trayectorias periódicas a su alrededor, si

$$\frac{\gamma'(q_{1i})}{\alpha(q_{1i})} = \frac{(-1)^i h}{J_1 + J_2 \mathcal{H}'(\pi i)} > 0 \quad (4.9)$$

Esta relación impone un criterio que la restricción holonómica (4.12) debe cumplir, aún cuando ésta no se haya definido. Específicamente, (4.9) relaciona la derivada \mathcal{H}' , evaluada en un punto de equilibrio, con los parámetros físicos de la Rueda de Inercia y la ubicación de los centros (4.8).

Una vez que se determinan los centros de los ciclos límites del sistema (4.6)-(4.7), verificando qué puntos de (4.8) cumplen con (4.9), se prosigue a buscar una expresión que permita relacionar la amplitud \mathcal{A} y la frecuencia Ω de las trayectorias de dicho ciclo límite. Para esto se parte de la ecuación del momento conservado de inercia en cada trayectoria completa del modelo proyectado (4.6)-(4.7), la cual se define [4] como

$$I(q_{1*}, \dot{q}_{1*}, x_0, y_0) = \frac{\dot{q}_{1*}^2}{2} - \frac{(\dot{q}_{1*}(0))^2}{2} e^{-\int_{x_0}^{q_{1*}} \frac{2\beta(\delta)}{\alpha(\delta)} d\delta} + \int_{x_0}^{q_{1*}} e^{-\int_s^{q_{1*}} \frac{2\beta(\delta)}{\alpha(\delta)} d\delta} \frac{\gamma(s)}{\alpha(s)} ds = 0 \quad (4.10)$$

donde $\chi_0 = q_{1*}(0)$ es constante. Este momento conservado permite relacionar la frecuencia Ω y la amplitud \mathcal{A} a través de [4]

$$\Omega^{-1} = \sqrt{2} \int_{\chi}^{\bar{q}_1 + \mathcal{A}} \frac{d\delta}{\sqrt{I(\chi, 0, \delta, 0)}} \quad (4.11)$$

donde el límite de integración χ satisface

$$I(\chi, 0, \bar{q}_1 + \mathcal{A}, 0) = \int_{\bar{q}_1 + \mathcal{A}}^{\chi} \exp\left(-\int_s^{\chi} \frac{2\beta(\delta)}{\alpha(\delta)} d\delta\right) \frac{\gamma(s)}{\alpha(s)} ds = 0$$

El problema que se presenta ahora es que resolver el integral elíptico (4.11) resulta complicado, no sólo por su naturaleza no-lineal, sino porque también depende de la restricción holonómica \mathcal{H} la cual en principio puede ser cualquier función dos veces diferenciable. Como la forma de los ciclos límite generados es irrelevante esto no impone restricciones adicionales sobre $\mathcal{H}(q_1)$; por lo tanto, se puede simplificar el cálculo de (4.11) al proponer la siguiente restricción holonómica *lineal*

$$q_2 = \mathcal{H}(q_1) \triangleq kq_1 + \mathcal{H}_0 \quad (4.12)$$

donde $\mathcal{H}_0 = -k\bar{q}_1$ y $\bar{q}_1 \in \{0, \pi\}$. Para esta ley de relación particular se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= k \\ \mathcal{H}'' &= 0 \end{aligned}$$

por lo que la dinámica proyectada (4.6)-(4.7) se convierte en la ecuación de la Rueda de Inercia libre (sin actuación)

$$(J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) = 0 \quad (4.13)$$

y la expresión del momento de inercia (4.10) se simplifica a

$$I(q_{1*}, \dot{q}_{1*}, \chi_0, \dot{q}_{1*}(0)) = \frac{E(q_{1*}, \dot{q}_{1*}) - E(\chi_0, \dot{q}_{1*}(0))}{(J_1 + kJ_2)}$$

donde

$$E(q_1, \dot{q}_1) = \frac{(J_1 + kJ_2)}{2} \dot{q}_1^2 + h(1 - \cos(q_1)) \quad (4.14)$$

es la energía total de (4.13). Evaluando,

$$\begin{aligned} I(\chi, 0, \delta, 0) &= \frac{(E(\chi, 0) - E(\delta, 0))}{(J_1 + kJ_2)} \\ &= \frac{h(1 - \cos(\chi)) - h(1 - \cos(\delta))}{J_1 + kJ_2} \\ &= \frac{h}{J_1 + kJ_2} (\cos(\delta) - \cos(\chi)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Al sustituir (4.15) en (4.18), considerando el intervalo $0 < \mathcal{A} < \pi$ y el límite de integración $\chi = \bar{q}_1 - \mathcal{A}$, se llega a la relación

$$\Omega^{-1} = C(\bar{q}_1, \mathcal{A}) \sqrt{\frac{2|J_1 + kJ_2|}{h}} \quad (4.16)$$

donde

$$C(\bar{q}_1, \mathcal{A}) \triangleq \int_{\bar{q}_1 - \mathcal{A}}^{\bar{q}_1 + \mathcal{A}} \frac{d\delta}{\sqrt{|\cos(\delta) - \cos(\bar{q}_1 - \mathcal{A})|}}$$

Además de relacionar \mathcal{A} con Ω , (4.16) involucra al factor k de la restricción holonómica (4.12), el cual es el término que permite determinar tanto a \mathcal{A} como a Ω independientemente el uno del otro. Es decir, *la libertad de escoger a \mathcal{A} y a Ω de manera arbitraria se deriva de la estructura de la restricción holonómica* (4.12). Es claro entonces que para cualquier par de amplitud y frecuencia admisibles basta con ajustar \mathcal{H} para lograr las oscilaciones deseadas alrededor de los centros (4.8). Sin embargo, para el punto de equilibrio $\bar{q}_1 = 0$ la condición de existencia de ciclos límites (4.9) bajo la restricción holonómica (4.12) es

$$\frac{h}{J_1 + J_2 k} > 0$$

y para el punto de equilibrio $\bar{q}_1 = \pi$ es

$$\frac{-h}{J_1 + J_2 k} > 0$$

Consecuentemente, si se busca generar oscilaciones alrededor del punto de equilibrio $\bar{q}_1 = 0$ entonces se debe escoger

$$k > -\frac{J_1}{J_2} = -184.2465$$

y para oscilaciones alrededor del punto de equilibrio $\bar{q}_1 = \pi$ se debe escoger

$$k < -\frac{J_1}{J_2} = -184.2465$$

El resultado final de la planeación de trayectorias es que para generar oscilaciones de amplitud \mathcal{A} y frecuencia Ω alrededor de $\bar{q}_1 = 0$ la restricción holonómica \mathcal{H} definida por (4.12) debe satisfacer

$$k = \left(\frac{\Omega^{-2} h}{2C^2(0, \mathcal{A})} - J_1 \right) J_2^{-1}$$

y para oscilaciones alrededor de $\bar{q}_1 = \pi$

$$k = \left(-\frac{\Omega^{-2} h}{2C^2(0, \mathcal{A})} - J_1 \right) J_2^{-1} \quad (4.17)$$

4.3. Diseño del Controlador

Las trayectorias periódicas calculadas para la dinámica reducida (4.13) son marginalmente estables o inestables. Consecuentemente, la presencia del momento de inercia (4.10) representa una cantidad de energía que puede llevar la estabilidad marginal de las trayectorias planeadas hacia la inestabilidad. Si bien el momento de inercia conservado es igual a cero después de una trayectoria completa, durante la evolución de esta trayectoria la magnitud del momento es no nula. Por lo tanto es necesario que el controlador diseñado no sólo lleve a las trayectorias del sistema hacia los ciclos límites sino que también induzca estabilidad orbital de las mismas. Esto implica que el controlador debe garantizar que la cantidad conservada (4.10) desvanezca cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, se debe cumplir que

$$I(q_1(t), \dot{q}_1(t), \mathcal{A} + \bar{q}_1, 0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (4.18)$$

Para el caso particular de la dinámica libre (4.13), consecuencia de una proyección bajo la restricción holonómica (4.12), la condición (4.18) es equivalente a

$$E(q_1(t), \dot{q}_1(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E_0$$

donde $E_0 \triangleq E(\mathcal{A} + \bar{q}_1, 0) = h(1 - \cos(\mathcal{A} + \bar{q}_1))$. Esta condición es una tarea de regulación ya que el controlador a diseñar debe garantizar la convergencia del error

$$E - E_0 \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

Para imponer la restricción holonómica (4.12) en la dinámica del sistema y al mismo tiempo cumplir con la condición (4.19) primero se establece un cambio de variables

$$(\mathcal{H}, \dot{\mathcal{H}}, q_1, \dot{q}_1) \mapsto (\mathcal{G}, \dot{\mathcal{G}}, q_1, \dot{q}_1)$$

donde la nueva restricción

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (q_2(t) - \mathcal{H}_0) - k(q_1(t) - \pi) \\ \dot{\mathcal{G}} &= \dot{q}_2(t) - k\dot{q}_1(t) \\ \ddot{\mathcal{G}} &= \ddot{q}_2(t) - k\ddot{q}_1(t) \end{aligned}$$

representa la desviación de las trayectorias del sistema de la restricción holonómica (4.12). Bajo este cambio de variables el objetivo de control de imponer la restricción holonómica \mathcal{H} se convierte en un problema de regulación ya que se buscará que el controlador garantice la convergencia de la dinámica

$$\mathcal{G} \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

Posteriormente se utiliza el mismo concepto previamente abordado de linealización parcial por retroalimentación para establecer la entrada linealizante

$$\tau = -\frac{J_2}{J_1 + kJ_2} \left((h + kh) \operatorname{sen}(q_1) + (J_2 - J_1)v \right) \quad (4.21)$$

que lleva a

$$\begin{aligned} (J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) &= -J_2 v \\ \ddot{\mathcal{G}} &= v \end{aligned}$$

el cual es un sistema equivalente a (2.21), como se puede comprobar sustituyendo $\ddot{\mathcal{G}}$:

$$\begin{aligned} (J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) &= -J_2 (\ddot{q}_2 - k\ddot{q}_1) \\ J_1 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 + h \operatorname{sen}(q_1) &= 0 \end{aligned}$$

lo cual concuerda con (2.22).

La estructura de esta linealización particular hace posible derivar las trayectorias de (4.14) para obtener la relación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(q_1, \dot{q}_1) &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{J_1 + kJ_2}{2} \dot{q}_1^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} (h(1 - \cos(q_1))) \\ &= (J_1 + kJ_2) \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) \dot{q}_1 \\ &= \left[(J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) \right] \dot{q}_1 \\ &= -J_2 v \dot{q}_1 \end{aligned}$$

Ahora, para el caso cuando el sistema está cerca de la trayectoria objetivo definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= 0, & \dot{\mathcal{G}}(t) &= 0 \\ q_1(t) &= q_{1*}(t), & \dot{q}_1(t) &= \dot{q}_{1*}(t) \end{aligned}$$

se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -J_2 \dot{q}_1 v + J_2 \dot{q}_{1*} v - J_2 \dot{q}_{1*} v \\ &= -J_2 \dot{q}_{1*}(t) v + \underbrace{(\dot{q}_{1*}(t) - \dot{q}_1(t))}_{\text{término pequeño}} J_2 v \end{aligned}$$

por lo que si se desprecian los efectos del término pequeño se obtiene el sistema de *tercer orden* dado por

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -J_2 \dot{q}_{1*}(t) v \\ \ddot{\mathcal{G}} &= v \end{aligned} \quad (4.22)$$

El sistema (4.22) es una *linealización transversal* para el sistema original en lazo abierto alrededor de la trayectoria objetivo. La idea posterior es diseñar un regulador LQR, a través del control auxiliar v , para esta linealización transversal lo cual cumpliría con los dos objetivos, (4.20) y (4.19), del controlador para la dinámica proyectada (4.13). Finalmente, el control lineal v se reincorpora en (4.21) para establecer así la señal de control τ del sistema no-lineal original (2.21). Entonces, para determinar la ley de control v estabilizante del sistema lineal (4.22) la dinámica de éste se reescribe en variables de estado como

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}(t)\delta v \quad (4.23)$$

donde $\delta \in \mathbb{R} \geq 0$ representa términos lineales de las desviaciones de 0 y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} -J_2\dot{q}_{1*}(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \delta \begin{bmatrix} E - E_0 \\ \mathcal{G} \\ \dot{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Es claro que cualquier estrategia de control requiere primero asegurar que el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) sea controlable, de lo contrario cualquier esfuerzo posterior será fútil. Debido a la naturaleza variante en el tiempo de $\mathbf{B}(t)$ no se puede determinar la controlabilidad de (4.23) sencillamente a través de la matriz de controlabilidad, se requieren herramientas matemáticas adicionales. Sin embargo, se puede probar que de hecho *el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable* a lo largo del periodo de una trayectoria cíclica [4]. Este resultado implica que la dinámica proyectada no-lineal (4.13) también es controlable sobre el mismo periodo. A partir de los resultados de [11] se puede afirmar que existe una solución periódica $\mathbf{R}(t)$ de la ecuación matricial de Riccati

$$\dot{\mathbf{R}} + 2\delta\mathbf{R} + \mathbf{A}^T\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{R} \quad (4.25)$$

para cualquier $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T \geq 0$.

Como conclusión, con el operador de proyección de tiempo

$$\psi = \Psi(q_1, \dot{q}_1)$$

tal que

$$\Psi(q_{1*}(t), \dot{q}_{1*}(t)) = t$$

la retroalimentación de la ley de control

$$v = - \begin{bmatrix} -J_2\dot{q}_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}(\psi) \begin{bmatrix} E - E_0 \\ \mathcal{G} \\ \dot{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

asegura que la trayectoria deseada, $q_{1*}(t)$, es una solución orbitalmente estable del sistema en lazo cerrado (2.21), (4.14), (4.21), (4.26).