

Capítulo 5

Estimación de la Velocidad

5.1. Diferenciadores

Antes de poder implementar el controlador de dos relevadores, (3.14), o el controlador por restricciones holonómicas, (4.26), es imprescindible obtener tanto a \dot{q}_1 como a \dot{q}_2 puesto que ambos controladores dependen de estas variables. La problemática que se presenta aquí es que la Rueda de Inercia del MKT no contiene sensores de velocidad y por lo tanto se debe encontrar una manera de obtener las velocidades requeridas con base en únicamente las mediciones que proveen los dos sensores de posición angular. Una manera de resolver esto es utilizar diferenciadores numéricos para estimar el cambio de posición respecto al tiempo del sistema, las lecturas de los sensores y el tiempo de muestreo respectivamente, e interpretar este resultado como la velocidad deseada. La ventaja de este método es que los diferenciadores no dependen de algún modelo matemático y son relativamente sencillos de programar. Estas bondades junto con la diversidad de diferenciadores disponibles hacen de la diferenciación numérica un recurso útil para obtener una estimación de la velocidad cuando sólo la posición es medible.

5.1.1. Diferenciador de Levant

Sea $f_s(t) : [0, \infty]$ una señal localmente acotada cuya derivada $\dot{f}_s(t)$ es una señal localmente Lipschitz. Entonces el diferenciador de Levant,

$$\begin{aligned}z'_o &= z_1 - \lambda_o |z_o - f_s(t)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z_o - f_s(t)) \\z'_1 &= -\lambda_1 \operatorname{sgn}(z_o - f_s(t))\end{aligned}$$

garantiza que $z_o - f_s(t) = 0$ para $\lambda_0, \lambda_1 > 0$. En este caso la señal z'_o es la salida del diferenciador de Levant. El esquema básico de este diferenciador se muestra en la Figura 5.1.

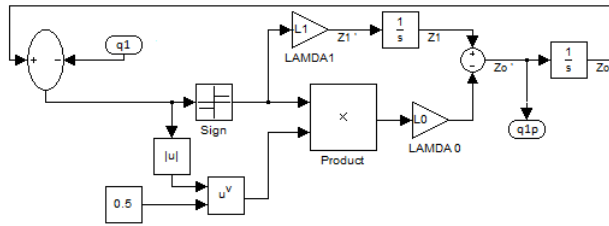


Figura 5.1: Diagrama de bloques del diferenciador de Levant

5.1.2. La Derivada Clásica por Diferenciales: Con y Sin Filtro

La manera más sencilla de diferenciar la señal $f_s(t)$ es a partir de una relación de diferencias,

$$\frac{\Delta f_s(t)}{\Delta t}$$

donde la diferencial del tiempo Δt corresponde al tiempo de muestro, ya sea éste el de un proceso físico de control o el empleado en una simulación. Sin embargo, la utilidad de este diferenciador es limitada cuando se presenta ruido de alta frecuencia, aún cuando éste no sea de gran amplitud, ya que los cambios bruscos en la señal alterarán el cálculo de la derivada de manera importante. Para reducir la sensibilidad al ruido de este diferenciador se puede introducir un filtro, como el que se muestra en la Figura 5.2(b), para generar un diferenciador del tipo

$$\frac{1}{s+a}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, con lo cual se obtiene una mejor diferencial aún bajo condiciones de ruido.

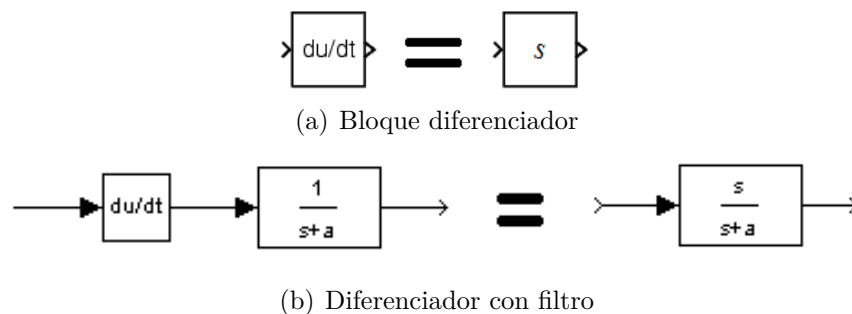


Figura 5.2: Diferenciadores clásicos, con y sin filtro

5.2. Observadores

Otra alternativa para reconstruir las velocidades del sistema es utilizar la información disponible del modelo matemático a través de un observador y así predecir de cierta manera el comportamiento de las velocidades requeridas. Todo observador se basa en todo el modelo de una planta, no sólo en las mediciones disponibles, y es por esta razón que son más precisos y menos sensibles al ruido que los diferenciadores. Obviamente el desempeño de un observador depende del modelo que se utilice para estimular su dinámica, pero aún así no se requiere un modelo tan preciso para generar una mejor estimación de ciertos estados no medibles.

5.2.1. Observador de Luenberger

El observador de Luenberger permite observar los estados no medibles de una planta *lineal* siempre y cuando se cumpla la condición de observabilidad, la cual establece que la matriz de observabilidad,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

debe tener un rango $\rho = n$. Para el caso de la Rueda de Inercia la matriz de observabilidad se puede formar a partir de (2.34) y la matriz de salida

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para obtener la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 77.6033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $\text{rank}(\mathcal{O}) = 4$ se puede deducir que la Rueda de Inercia es un sistema completamente observable a partir de sus únicos dos estados medibles, la posición del péndulo y la del rotor. Esto permite implementar el observador de Luenberger que se muestra en la Figura 5.3 para la Rueda de Inercia.

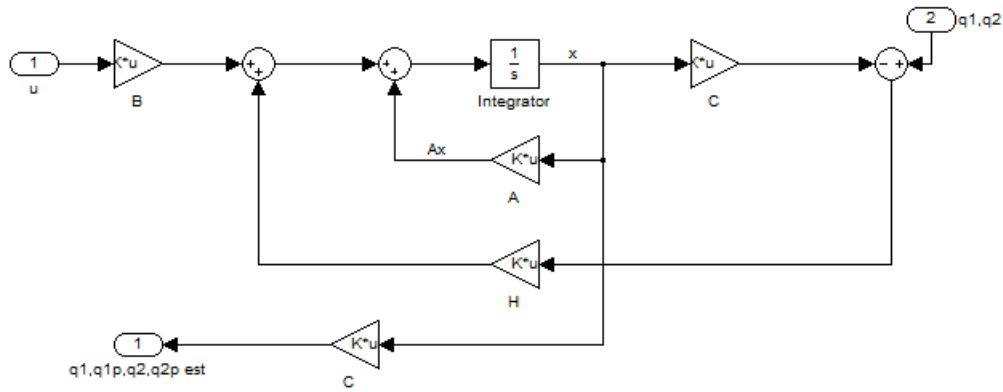


Figura 5.3: Observador de Luenberger para la Rueda de Inercia

5.2.2. Observador de Alta Ganancia

Una alternativa más precisa al observador lineal de Luenberger es el observador de alta ganancia, el cual se puede utilizar para observar tanto a sistemas lineales como no lineales. Este observador incorpora la dinámica no lineal de la planta para producir una estimación de los estados no medibles. La velocidad de convergencia del observador se puede manipular a partir de un sólo término de corrección, por lo cual la sintonización de este observador resulta accesible. El observador de alta ganancia diseñado para la Rueda de Inercia tiene la siguiente construcción matemática

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{2q_1 - 2\hat{x}_1}{\epsilon} \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{h\text{sen}(q_1) + \tau}{J_2 - J_1} + \frac{q_1 - \hat{x}_1}{\epsilon^2} \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 + \frac{2q_2 - 2\hat{x}_3}{\epsilon} \\ \dot{\hat{x}}_4 &= \frac{h\text{sen}(q_1)}{J_1 - J_2} + \frac{\tau}{J_2 - J_2^2 J_1^{-1}} + \frac{q_2 - \hat{x}_3}{\epsilon^2}\end{aligned}$$

para un término de corrección $\epsilon \in \mathbb{R} > 0$. Finalmente, en la Figura 5.4 se muestra el diagrama de bloques que se utilizó para implementar el observador.

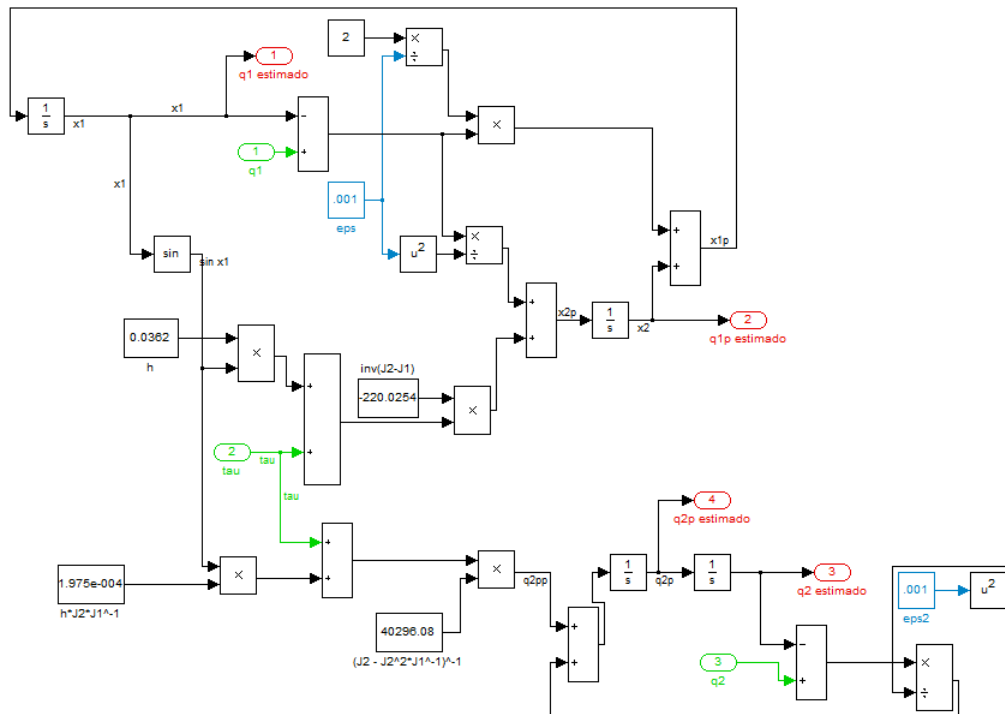


Figura 5.4: Observador de alta ganancia para la Rueda de Inercia