



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – APROVECHAMIENTOS HIDRÁULICOS

MODELACIÓN NUMÉRICA DEL APORTE DE AGUA DEL MANTO FREÁTICO AL  
REQUERIMIENTO DE RIEGO DE LOS CULTIVOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ERICKDEL CASTILLO SOLIS

TUTOR PRINCIPAL  
DR. HEBER ELEAZAR SAUCEDO ROJAS, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. MAYO 2014

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Carlos Fuentes Ruíz  
Secretario: Dr. Víctor Hugo Alcocer Yamanaka  
Vocal: Dr. Heber Eleazar Saucedo Rojas  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Iván Rivas Acosta  
2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Pedro Antonio Guido Aldana

Jiutepec, Morelos.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Heber Eleazar Saucedo Rojas

-----

## **AGRADECIMIENTOS**

A la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido la realización del posgrado.

Al Dr. Heber Eleazar Saucedo Rojas por su apoyo incondicional y dedicación en la dirección de este trabajo.

A mis sinodales.

Dr. Carlos Fuentes Ruíz

Dr. Víctor Hugo Alcocer Yamanaka

Dr. Iván Rivas Acosta

Dr. Pedro Antonio Guido Aldana

Por sus sugerencias y comentarios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico dado para la realización de mis estudios.

Al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, por apoyarme en la realización de la investigación.

Al M.C. José Rodolfo Namuche Vargas por su apoyo durante los estudios de posgrado.

Por último, agradecer a las personas que han estado conmigo durante este proceso: a mi esposa, mi familia y amigos.

## RESUMEN

La cuantificación del aporte de agua proveniente de un acuífero resulta de interés en numerosos problemas agronómicos, hidrogeológicos y ambientales. Entre los más importantes se encuentran el cálculo de láminas de riego de los cultivos y el estudio de salinización de suelos en regiones semiáridas. En ingeniería de riego, es importante conocer si el aporte de agua del acuífero es suficiente para satisfacer el requerimiento de agua de los cultivos o en caso contrario, conocer cuánto y cuándo regar.

En este trabajo se desarrolla un modelo numérico del aporte de agua del manto freático al requerimiento de riego de los cultivos, mediante la solución de elemento finito de la ecuación unidimensional de Richards, aplicando una condición de frontera de radiación de Newton en la superficie del suelo para modelar en proceso de la evapotranspiración.

La solución de elemento finito de la ecuación de Richards permite concluir que existen diferencias entre las láminas de agua aportadas del manto freático al requerimiento de riego de los cultivos, al utilizar evaporación constante o variable durante el día, siendo la condición de evapotranspiración constante la que produce un mayor aporte de lámina de agua a los cultivos, debido a que sobreestima la tasa de evapotranspiración durante el día.

# Contenido

<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2. REVISIÓN DE LITERATURA .....</b>	<b>3</b>
2.1 MEDIO POROSO .....	3
2.1.1 Aproximación al continuo para el medio poroso .....	5
2.1.2 Volumen de control.....	7
2.2. ECUACIONES FUNDAMENTALES .....	8
2.2.1 Ecuación de continuidad .....	8
2.2.2 Ley de Darcy.....	10
2.2.3 Ecuación de Richards .....	14
2.2.3.1 Ecuación de Richards (forma de presión) .....	14
2.2.3.2 Ecuación de Richards (forma del contenido de agua).....	14
2.2.4 Condiciones límite.....	15
2.2.4.1 Condición inicial.....	16
2.2.4.2 Condición de frontera.....	16
2.3. CARACTERÍSTICAS HIDRODINÁMICAS.....	18
2.2.1 Van Genuchten-Brooks y Corey.....	19
2.2.1 Fujita - Parlange.....	20
<b>CAPÍTULO 3. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO (MEF).....</b>	<b>21</b>
3.1 EL MÉTODO DIRECTO.....	23
3.2 EL MÉTODO VARIACIONAL .....	23
3.3 EL MÉTODO DE LOS RESIDUOS PESADOS .....	24
<b>CAPÍTULO 4. MODELACIÓN NUMÉRICA .....</b>	<b>28</b>
<b>CAPÍTULO 5. RESULTADOS .....</b>	<b>34</b>
5.1 MODELO CONCEPTUAL .....	34
5.2 RESULTADOS .....	37
<b>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES .....</b>	<b>50</b>
<b>CAPÍTULO 7. REFERENCIAS.....</b>	<b>51</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Volumen elemental representativo para el balance de masa tridimensional .....	8
Figura 2. Dispositivo experimental de Darcy.....	10
Figura 3. Funciones de base lineales.....	29
Figura 4. Sistema de masa concentrado .....	30
Figura 5. Evapotranspiración variable y constante .....	33
Figura 6. Esquema del modelo conceptual .....	34
Figura 7. Características agronómicas del cultivo de maíz, presentadas por el programa CropWat	35
Figura 8. Curva característica del potencial de humedad, obtenida a partir de la ecuación de Van Genuchten.....	36
Figura 9. Curva característica de la conductividad hidráulica obtenida de la ecuación de Brooks y Corey .....	36
Figura 10. Profundidades del nivel freático con evapotranspiración variable y constante.....	38
Figura 11. Flujos calculados a la profundidad de la raíz, a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración variable .....	39
Figura 12. Flujos calculados a la profundidad de la raíz, a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración constante. ....	40
Figura 13. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración variable.....	41
Figura 14. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración variable.....	42
Figura 15. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración constante. ....	43
Figura 16. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 100 cm y evapotranspiración variable.....	45
Figura 17. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 100 cm y evapotranspiración constante .....	45
Figura 18. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 150 cm y evapotranspiración variable.....	46
Figura 19. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 150 cm y evapotranspiración constante .....	46
Figura 20. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 200 cm y evapotranspiración variable.....	47
Figura 21. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 200 cm y evapotranspiración constante .....	47
Figura 22. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 250 cm y evapotranspiración variable.....	48
Figura 23. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 250 cm y evapotranspiración constante .....	48
Figura 24. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 300 cm y evapotranspiración variable.....	49

Figura 25. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 300 cm y evapotranspiración constante ..... 49

## LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Características hidrodinámicas del suelo ..... 35

Cuadro 2. Descensos promedios (cm/día) del nivel freático, a diferentes profundidades iniciales a evapotranspiración variable y constante ..... 37

Cuadro 3. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático, con evapotranspiración variable..... 41

Cuadro 4. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático, con evapotranspiración constante. .... 43

## Capítulo 1. Introducción

La cuantificación del aporte de agua proveniente de un acuífero resulta de interés en numerosos problemas agronómicos, hidrogeológicos y ambientales. Entre los más importantes se encuentran el cálculo de láminas de riego de los cultivos y el estudio de salinización de suelos en regiones semiáridas. En ingeniería de riego, es importante conocer si el aporte de agua del acuífero es suficiente para satisfacer el requerimiento de agua de los cultivos o en caso contrario, conocer cuánto y cuándo regar. En el área del drenaje agrícola, se pueden analizar diversas alternativas para establecer la profundidad adecuada de drenes subterráneos, que permita el flujo de agua desde el manto freático hasta la zona de raíces de los cultivos.

En este trabajo se desarrolla un modelo numérico para calcular el aporte de agua del manto freático al requerimiento de riego de los cultivos mediante la solución de la ecuación de Richards en forma unidimensional, con el método del elemento finito (MEF).

El método de los elementos finitos como formulación matemática es relativamente nuevo, aunque su estructura básica es conocida desde hace tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos. Han sido precisamente estos avances informáticos los que han puesto a disposición de los usuarios una gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos. Pero el manejo correcto de este tipo de programas exige un conocimiento no solo del material con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en este caso se tiene condiciones para garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad.

Este trabajo se divide en siete capítulos. En el primer capítulo se hace una introducción al tema, en el segundo capítulo se presenta la revisión de literatura. En el tercer capítulo se trata la teoría del Método del Elemento Finito (MEF), en el



cuarto se presenta un modelo numérico para la solución de la ecuación de Richards unidimensional. En el quinto se muestran los resultados del modelo numérico. En los dos últimos capítulos se enlistan las principales conclusiones del trabajo y las referencias bibliográficas consultadas.

El objetivo general de este trabajo es modelar numéricamente el aporte de agua del manto freático al requerimiento de riego de los cultivos, mediante la solución de la ecuación de Richards en una dimensión, con el método del elemento finito.

## Capítulo 2. Revisión de literatura

### 2.1 Medio poroso

Como una primera aproximación (Bear, 1978), se puede describir un medio poroso como un “sólido con huecos”. Obviamente, un cilindro metálico con huecos, no puede ser clasificado como un medio poroso. Tampoco lo es un bloque sólido con huecos o poros aislados, puesto que se busca definir un medio poroso en contacto con el flujo que atraviesa dicho medio. Se puede mejorar esta definición diciendo que los poros están interconectados con varias trayectorias continuas, de extremo a extremo del medio, y con una adecuada distribución de los espacios y trayectorias, sobre todo el dominio del medio poroso. Aunque se tiene descrito un modelo aceptable del medio poroso, el medio descrito carece de la posibilidad de intercambio de fluido entre trayectorias adyacentes.

Resumiendo estos comentarios preliminares, Bear (1978) define un medio poroso como:

- (a) Una porción de un espacio ocupado por un material heterogéneo o multifase. En la que al menos una de las fases comprendidas, no es sólida (esta puede ser una fase gaseosa y/o líquida). La fase sólida es llamada matriz sólida. Este espacio dentro del dominio del medio poroso que no es parte de la matriz sólida, es referido como espacio vacío (o espacio poroso).
- (b) La fase sólida debe estar distribuida por todo el medio poroso (en el dominio ocupado por el medio poroso), debe estar presente dentro de cada volumen elemental representativo. Una característica esencial de un medio poroso, es que la superficie específica de la matriz sólida es relativamente alta. En muchos casos, estas características dictan el comportamiento del fluido en el medio poroso. Otra característica básica

de un medio poroso, es que varios orificios comprendidos en el espacio vacío están relativamente estrechos.

- (c) La mayoría de los poros que comprenden el espacio poroso, deben estar interconectados. El espacio poroso interconectado es llamado espacio poroso efectivo. Desde el punto de vista del flujo de fluidos a través de medios porosos, únicamente es de interés el espacio poroso interconectado o efectivo. Los poros no conectados pueden ser considerados parte de la matriz sólida. Ciertas partes del espacio poroso interconectado pueden también ser inefectivos. Por ejemplo, los poros pueden ser poros de puntos muertos, como los poros o canales con una sola conexión angosta en el espacio poroso interconectado, provocando que el flujo casi no ocurra a través de estos. Otra característica del medio poroso es que dos puntos cualesquiera, dentro del espacio poroso efectivo deben de estar conectados por una curva que se encuentre completamente dentro de este. Además, excepto para casos especiales, alguno de los dos puntos, deben estar conectados por varias curvas con una distancia máxima arbitraria entre cualquiera de ellos. Para un dominio del medio poroso, esa máxima distancia es dictada por las dimensiones del dominio.

Para algunas de las características descritas, se les puede asignar valores numéricos, para otras, principalmente las relacionadas con la geometría de las superficies sólidas, tales valores no pueden asignarse, de hecho, en esto consiste la dificultad en definir la geometría de las superficies sólidas, las cuales actúan como fronteras para el flujo en el espacio vacío, esto obliga a introducir la aproximación al continuo como una herramienta para estudiar los fenómenos en el medio poroso.

### 2.1.1 Aproximación al continuo para el medio poroso

Estudiando el fluido o fluidos contenidos en el espacio poroso, y tratando de describir el fenómeno asociado con ellos; como su movimiento, el transporte de masa, etc., existen las siguientes dificultades (Bear, 1978).

Primero, el concepto de fluido en sí mismo requiere más elaboración. Actualmente los fluidos están constituidos por un gran número de moléculas (pasando por alto la existencia de una estructura submolecular) que al moverse, colisionan unas con otras y con las paredes sólidas del contenedor en el que se encuentran. Empleando las teorías de la mecánica clásica, se puede describir totalmente un determinado sistema de moléculas: por ejemplo, determinando su posición inicial en el espacio y su momento, se puede predecir sus futuras posiciones. Sin embargo, a pesar de la aparente simplicidad de esta aproximación, es extremadamente difícil resolver el problema del movimiento, por ejemplo, de tres moléculas (asumiendo que se conoce todas las fuerzas, lo cual es también dudoso). Con la llegada de las computadoras, muchos de los problemas pueden ser resueltos, en principio, numéricamente. Pero esto es imposible a pesar de todo, por ejemplo, para determinar el movimiento de  $10^{23}$  moléculas en un gramo de mol de gas. Debido a que el número de moléculas es tan grande, su posición y momento inicial no pueden determinarse.

Esto generaría un gran número de ecuaciones, que al final arrojarían un resultado, al menos bajo ciertas condiciones. En lugar de estudiar el problema del movimiento del fluido, en el nivel molecular descrito arriba, se puede adoptar una aproximación diferente (con la estadística), para deducir información relativa al movimiento de un sistema compuesto por muchas moléculas. Por aproximación estadística se entiende aquello en el cual los resultados del análisis o un experimento son presentados únicamente en forma estadística. Esto significa que se puede determinar el valor promedio de sucesivas medidas, pero no se puede predecir la certeza del resultado de una única medida en el futuro.

La mecánica estadística es una ciencia analítica, para la cual las propiedades estadísticas del movimiento de un gran número de moléculas (o de partículas en general) pueden ser inferidas de leyes que gobiernan el movimiento individual de las moléculas. Cuando el propósito de abandonar el planteamiento a nivel molecular es la descripción del fenómeno como un fluido continuo, la aproximación estadística es referida como la aproximación macroscópica.

Muchos fenómenos físicos en fluidos, observados a través de sus manifestaciones macroscópicas, son el resultado del movimiento molecular perpetuo. Entre estos se tiene el transporte de masa por difusión molecular, transferencia de calor y transferencia de momento, los cuales se manifiestan en sí mismo en la forma de fricción interna o viscosidad. En cada uno de estos casos, no se tiene la capacidad para tratar el fenómeno de transferencia en un nivel molecular, se puede promediar la transferencia producida por moléculas individuales y pasar a un nivel más alto como un fluido continuo (un nivel macroscópico). Para describir los fenómenos de transferencia en un nivel más alto, se necesitan los coeficientes de transferencia. Ellos son la difusividad molecular, difusividad termal, viscosidad cinemática, etc. Ahora se tiene un fluido continuo encerrado por superficies sólidas, las superficies sólidas de un medio poroso. En cada punto de este fluido continuo, se puede definir la física específica, las propiedades dinámicas y cinéticas de la partícula del fluido. ¿Se puede, sin embargo, resolver un problema de flujo en un medio poroso en este nivel? En principio se tiene a disposición la teoría de la mecánica de fluidos, así que se puede derivar los detalles del comportamiento de un fluido dentro del espacio poroso, satisfaciendo las condiciones de fronteras específicas, por ejemplo, de la velocidad tendiente a cero, en todas las interfaces fluido-sólido. Sin embargo, como se ha mostrado, esto es prácticamente imposible, excepto en casos simples, tales como un medio compuesto de tubos capilares en línea recta. Además, es difícil a menudo definir las condiciones de frontera de ellos. En vista de la discusión presentada arriba, la forma obvia de evitar estas dificultades es pasar a un nivel más grueso de

promedios, al nivel macroscópico. Esto es una vez más una aproximación al continuo, pero en un nivel más alto.

### **2.1.2 Volumen de control**

En la aproximación Lagrangiana, el análisis es llevado a cabo, con respecto a una masa específica del fluido. Esta masa (la partícula) permanece constante, aunque cambie su forma, posición u otras propiedades como el movimiento.

Una segunda posibilidad, es empleando la aproximación de Euler, esta se enfoca en un volumen definitivo, fijo en el espacio, llamado el volumen de control (o caja de control). La forma del volumen de control es arbitraria. Sus fronteras son llamadas áreas de control; estas siempre forman un área cerrada en el espacio. La cantidad e identidad de la materia en el volumen de control puede cambiar con el tiempo, pero la forma y posición de este volumen permanecen fijos. Este volumen puede ser pequeño, esto es, un Volumen Elemental Representativo (VER), o mucho más grande, pero aún finito, dependiendo del problema investigado. Para facilitar la discusión, se da al volumen de control una forma definitiva, conforme al sistema particular de coordenadas empleado (por ejemplo, un paralelepípedo en coordenadas cartesianas). Esta forma no afecta la ecuación resultante.

## 2.2. Ecuaciones fundamentales

### 2.2.1 Ecuación de continuidad

Si se considera un volumen de control unitario de suelo como el mostrado en la figura 1 (Zavala, 1998), el principio de conservación de masa señala que:

**La acumulación de masa en el volumen = masa que entra - masa que sale - masa extraída por la raíces de las plantas** (2.1)

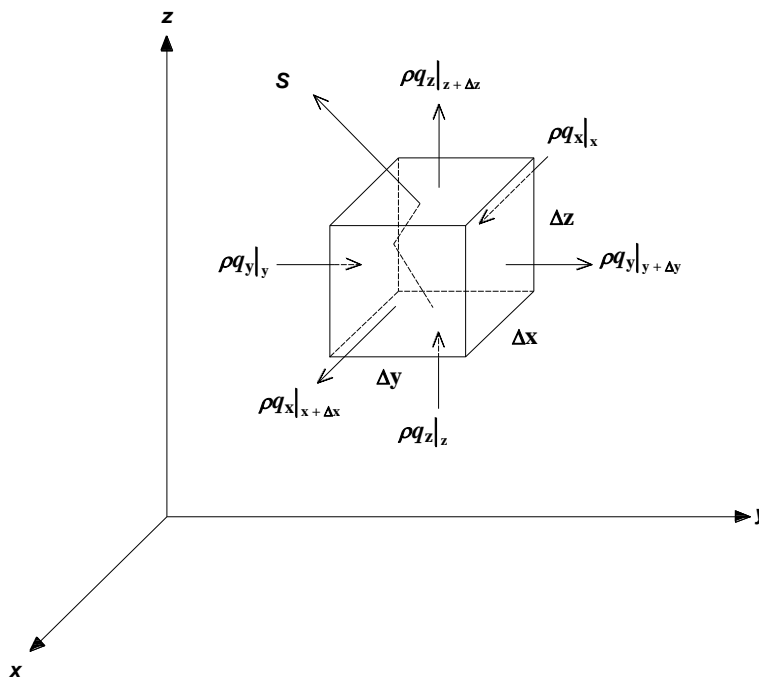


Figura 1. Volumen elemental representativo para el balance de masa tridimensional

El término de acumulación se obtiene considerando la masa de fluido en el volumen de control en los tiempos  $t$  y  $t+\Delta t$ .

$$\text{Masa acumulada} = \frac{\rho\theta\Delta x\Delta y\Delta z|_{t+\Delta t} - \rho\theta\Delta x\Delta y\Delta z|_t}{\Delta t} \quad (2.2)$$

donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  son las dimensiones del volumen de control [L],  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua [ $L^3 L^{-3}$ ] y  $\rho$  es la densidad del fluido [ $M L^{-3}$ ].

La masa que entra al volumen de control, considerando el promedio en el intervalo  $\Delta t$ , está dado por:

$$\text{Masa que entra} = (\rho q_x)\Delta y\Delta z|_x + (\rho q_y)\Delta x\Delta z|_y + (\rho q_z)\Delta x\Delta y|_z \quad (2.3)$$

donde  $\rho q_x$  es el flujo promedio sobre la primera cara del volumen de control en la dirección x, y de manera similar se tiene para las direcciones y y z.

Análogamente, el flujo de masa que sale del volumen de control es:

$$\text{Masa que sale} = (\rho q_x)\Delta y\Delta z|_{x+\Delta x} + (\rho q_y)\Delta x\Delta z|_{y+\Delta y} + (\rho q_z)\Delta x\Delta y|_{z+\Delta z} \quad (2.4)$$

La extracción de masa por las raíces de las plantas se denota como:

$$\text{Masa extraída por las raíces de las plantas} = S \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.2) - (2.5) en (2.1) y dividiendo la expresión por  $\Delta x\Delta y\Delta z$  se obtiene:

$$\frac{\rho\theta|_{t+\Delta t} - \rho\theta|_t}{\Delta t} = -\frac{(\rho q_x)|_{x+\Delta x} - (\rho q_x)|_x}{\Delta x} - \frac{(\rho q_y)|_{y+\Delta y} - (\rho q_y)|_y}{\Delta y} - \frac{(\rho q_z)|_{z+\Delta z} - (\rho q_z)|_z}{\Delta z} - S \quad (2.6)$$

Si se tiene un volumen infinitesimal donde  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  la ecuación (2.6) se transforma en:

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} + S = 0 \quad (2.7)$$

Donde  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  es el operador gradiente [ $L^{-1}$ ].

Si se asume que la compresibilidad del agua es despreciable, se obtiene la ecuación de continuidad:



$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} + S = 0 \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Ley de Darcy

Para complementar la ecuación que gobierna el flujo de agua, es necesario relacionar  $q$  con la pérdida de energía en la dirección del movimiento.

En 1856, el ingeniero hidráulico francés Henry Darcy publicó un artículo en el cual describía un experimento en laboratorio, en donde analizaba el flujo del agua a través de arenas. Los resultados de este experimento están generalizados en la ley empírica que ahora lleva su nombre.

Considerando un aparato experimental como el que se muestra en la figura 2, un cilindro circular de sección transversal  $A$  es llenado con arena y tapado en cada extremo, equipado con un tubo de entrada y otro de salida, así como por un par de manómetros. El agua es introducida en el cilindro hasta que se llenen todos los poros y el gasto de entrada  $Q$  sea igual al gasto de salida.

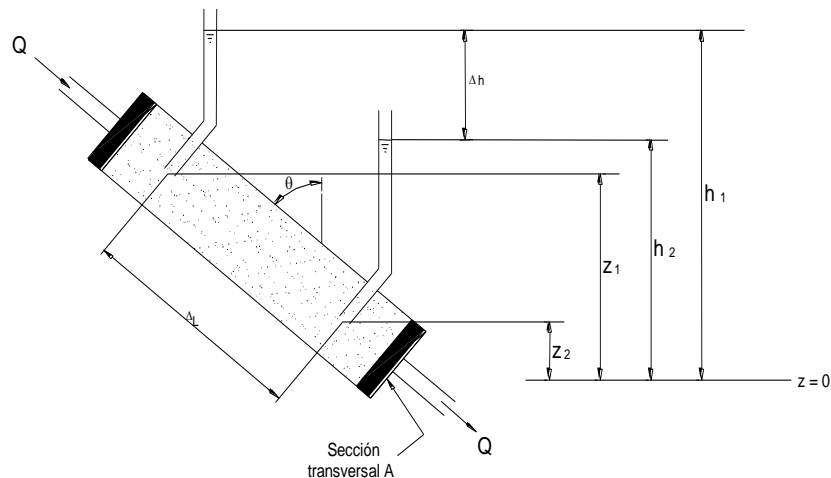


Figura 2. Dispositivo experimental de Darcy.

Si se toma arbitrariamente una elevación del nivel de referencia de  $z = 0$ , las elevaciones de los manómetros son  $h_1$  y  $h_2$ . La distancia entre los manómetros es  $\Delta L$ .

Si se define a  $q$  como la descarga (o caudal) específica a través del cilindro, como

$$q = \frac{Q}{A} \quad (2.9)$$

Si las dimensiones de  $Q$  son  $[L^3T^{-1}]$  y la de  $A$  es  $[L^2]$ ,  $q$  tiene las dimensiones de velocidad  $[LT^{-1}]$ .

Los experimentos realizados por Darcy mostraron que  $q$  es directamente proporcional a  $h_1 - h_2$ , cuando  $\Delta L$  es constante, e inversamente proporcional a  $\Delta L$  cuando  $h_1 - h_2$  se mantiene constante. La ley de Darcy puede ser escrita como:

$$q = K \frac{\Delta h}{\Delta L} \quad (2.10)$$

o, en forma diferencial,

$$q = K \frac{dh}{dL} \quad (2.11)$$

En la ecuación anterior la  $h$ , se le nombra carga hidráulica y  $dh/dL$  es el gradiente hidráulico,  $K$  es una constante de proporcionalidad y se le conoce como conductividad hidráulica. Tiene valores altos para arenas y gravas y bajos para arcillas y demás rocas.

Para el flujo en tres dimensiones, en un medio que puede ser anisotrópico, es necesario generalizar la forma unidimensional de la ley de Darcy presentada

anteriormente. En tres dimensiones la velocidad  $q$  es un vector con componentes  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ . La forma generalizada más simple, puede ser:

$$q_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$q_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.13)$$

$$q_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.14)$$

donde  $K_x$ ,  $K_y$ , y  $K_z$  son los valores de la conductividad hidráulica en la dirección  $x$ ,  $y$ , y  $z$ . Como  $h$  es ahora una función de  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , las derivadas deben de ser parciales.

Buckingham en 1907, modificó la ley de Darcy para su aplicación a medios no saturados, la cual se puede expresar como:

$$q = -K(\psi)\nabla(\psi - z) \quad (2.15)$$

Donde  $\vec{q}$  es el vector de velocidad Darciana,  $K(\psi)$  es la conductividad hidráulica, la cual es una función del potencial de presión en los suelos no saturados [ $LT^{-1}$ ],  $\psi$  es el potencial de presión [L] y  $z$  es el potencial gravitacional [L] que es igual a la elevación. La ecuación (2.15) asume dos hipótesis principales:

- I. La conductividad hidráulica  $K$  de un suelo no saturado es función del contenido de agua o del potencial de presión.
- II. La fuerza que provoca el flujo de agua en un suelo rígido y no saturado donde el potencial de presión de aire es cero, es la suma de los potenciales de presión y de gravedad.

## Rango de validez de la ecuación de Darcy

A medida que aumenta el caudal específico  $q$ , la relación entre éste y el gradiente  $i$  varía gradualmente hasta desviarse de la relación lineal expresada por la Ley de Darcy.

En flujo a través de conductos, el número de Reynolds,  $Re$ , es un valor adimensional que expresa la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas en el fluido y se utiliza como un criterio para distinguir entre flujos laminares que ocurren a bajas velocidades y flujos turbulentos a velocidades más elevadas. El valor crítico de  $Re$  utilizado en tuberías es de 2100. Por analogía, se define un número de Reynolds para el flujo a través de medios porosos como:

$$Re = \frac{qd}{\nu} \quad (2.16)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $d$  es alguna longitud representativa de la matriz porosa (se suele adoptar el valor medio del diámetro de los granos  $d_{50}$ , aunque también se considera como un valor representativo del tamaño de los granos  $d_{10}$ , es decir, aquel diámetro en el que el 10 % en peso son inferiores a él). Algunos experimentos han demostrado que la ley de Darcy es válida mientras el número de Reynolds no exceda valores comprendidos entre 1 y 10.

### 2.2.3 Ecuación de Richards

Sustituyendo la ley ecuación de Darcy (2.15) en la ecuación de masa (2.8) se obtiene la ecuación de Richards (1931):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi)\nabla(\psi + z)] - S \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) es conocida como la función mixta de la ecuación de Richards y tiene dos variantes dependientes  $\theta$  y  $\psi$ .

Se han obtenido otras dos formas de la ecuación de Richards para eliminar una de las dos variantes dependientes, las cuales se muestran a continuación.

#### 2.2.3.1 Ecuación de Richards (forma de presión)

Introduciendo la definición de capacidad específica  $C(\psi)$  como:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (2.18)$$

Y sustituyendo (2.18) en (2.17) se obtiene la ecuación de Richards basada en el potencial de presión:

$$C(\psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi)\nabla(\psi + z)] - S \quad (2.19)$$

#### 2.2.3.2 Ecuación de Richards (forma del contenido de agua)

Considerando nulo el término de extracción de agua por las plantas ( $S$ ), la forma de la ecuación de Richards basada en el contenido de agua, que es una ecuación tipo Fokker Planck, ésta dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta)\nabla\theta] + \frac{dK(\theta)\partial\theta}{d\theta \partial z} \quad (2.20)$$

Donde  $D(\theta)$  es la difusividad del agua en el suelo [ $L^2T^{-1}$ ] y se define como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (2.21)$$

Se debe tener presente que esta formulación no es aplicable en suelos con contenido de humedad cercanos al de saturación, ya que para esta condición la difusividad no está definida.

#### 2.2.4 Condiciones límite

Bear (1978), menciona que una ecuación diferencial parcial, tiene un número infinito de posibles soluciones, cada una corresponde a un particular caso del fenómeno. Para obtener de estas posibles soluciones una solución particular correspondiente a un cierto problema específico de interés, es necesario proveer información suplementaria, que no contiene la ecuación diferencial parcial. Esta información suplementaria que, conjuntamente con la ecuación diferencial, define un problema individual debe incluir especificaciones de: a) la geometría del dominio en el cual el fenómeno existente toma lugar, b) todos los coeficientes físicos y parámetros que afectan el fenómeno considerado (por ejemplo, parámetros del medio y del fluido), c) condiciones iniciales que describen el estado inicial del sistema considerado, y d) consideraciones de la interacción del sistema con sistemas circunvecinos, esto es, condiciones en las fronteras del dominio en cuestión.

#### 2.2.4.1 Condición inicial

La condición inicial incluye la especificación de la incógnita “h” (elevación de los niveles estáticos iniciales), que se desea calcular en todos los puntos dentro del dominio en algún tiempo inicial, usualmente denotado como  $t=0$ .

#### 2.2.4.2 Condición de frontera

Existen tres tipos de condiciones de frontera, las cuales se describen a continuación.

##### **A. Tipo Dirichlet**

Una condición de frontera tipo Dirichlet es también llamada condición de frontera de carga piezométrica prescrita o de primer tipo. En esta condición el potencial  $\psi$  es conocido en todos los puntos del contorno.

$$\psi = f(z,t) \tag{2.22}$$

donde  $f$  es una función conocida. Este tipo de condición de frontera puede también ser usada para describir condiciones en una frontera de campo lejano, por ejemplo, en un segmento de frontera donde se esperan cambios despreciables en la carga piezométrica.

##### **B. Tipo Neumann**

Una condición de frontera de Neumann es también llamada condición de frontera de flujo prescrito o de segundo tipo. Se presenta cuando el valor del gradiente de la variable dependiente es conocido. En este caso,  $q$  es una función del tiempo y espacio a lo largo de un segmento de la frontera

$$K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial n} = q(z, t) \quad (2.23)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  es la derivada en la dirección normal al dominio de solución.

Una forma especial de esta condición de frontera ocurre frecuentemente en estudios de flujos de agua subterránea. Para fronteras impermeables o para fronteras donde una división de agua es especificada, y el flujo a través de la frontera necesita ser definida como cero.

### **C. Tipo radiación de Newton**

Una condición de frontera tipo radiación de Newton es también llamada condición de frontera de flujo inducido, de tercer tipo o de Robbins. Se presenta cuando la derivada normal de la variable dependiente en la frontera, es una función lineal de la misma variable. Es común en problemas de conducción de calor, donde el flujo de calor (radiación) a través de la frontera de un cuerpo sólido está relacionado con la temperatura del cuerpo en la frontera. Para problemas de flujo de agua se puede expresar como:

$$K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha \psi = f(z, t) \quad (2.24)$$



### 2.3. Características hidrodinámicas

El grado de saturación del suelo con un fluido, tiene un profundo impacto en el transporte de sustancias a través del medio poroso. Una gran parte de este proceso se debe a la propiedad del medio poroso de retener y conducir el agua. Esta habilidad está caracterizada por la relación entre el contenido de humedad ( $\theta$ ), la carga de presión ( $\psi$ ) y la conductividad hidráulica ( $K$ ). El movimiento de agua en la zona vadosa y el intercambio de calor y masa a través de la frontera suelo-atmósfera son influenciadas por las características hidrodinámicas.

Para dar solución a la ecuación de flujo de agua de forma analítica o numérica es necesario contar con las relaciones funcionales que representen las propiedades hidrodinámicas del suelo, las cuales deben relacionar el potencial de presión ( $\psi$ ) y la conductividad hidráulica ( $K$ ) con el contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ).

Fuentes *et al.* (1992), citados por Saucedo (1997), recomiendan utilizar dos pares de características hidrodinámicas: (1) la combinación de la difusividad  $D(\theta)$  de Fujita (1952) y la relación entre la conductividad  $K(\theta)$  y la difusividad  $D(\theta)$  de Parlange *et al* (1982), y (2) la combinación de la conductividad  $K(\theta)$  de Brooks y Corey (1964) y de la presión  $\theta(\psi)$  de van Genuchten (1980) con la restricción del modelo de Burdine (1953). La combinación (1) es más conveniente en estudios teóricos mientras que la combinación (2) es utilizada principalmente por la facilidad que presentan para identificar sus parámetros.

### 2.2.1 Van Genuchten-Brooks y Corey

La característica de humedad de van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\Theta(\psi) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d}\right)^n\right]^m} \quad (2.25)$$

donde  $\Theta$  representa el grado de saturación:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.26)$$

sujeta a la restricción de Burdine ( $m=1-2/n$ ).

La conductividad de Brooks y Corey (1964) se expresa como:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \Theta^\eta \quad (2.27)$$

En las ecuaciones anteriores  $\theta$  es el contenido volumétrico de humedad,  $\theta_s$  es el valor de este contenido a saturación,  $\theta_r$  es el contenido de humedad residual,  $\psi$  es el potencial de presión y  $\psi_d$ ,  $m$  y  $n$  son parámetros empíricos.

En la ecuación de Brooks y Corey el parámetro  $\eta$  se puede estimar con la relación propuesta por Fuentes (1992):

$$\eta = 2d \left( \frac{2}{mn} + 1 \right) \quad (2.28)$$

donde  $d$  es la relación de la dimensión fractal del suelo a la dimensión del espacio de Euclides, que se denomina dimensión-cociente y se define implícitamente en función de la porosidad del suelo ( $\phi$ ):

$$(1-\varphi)^d + \varphi^{2d} = 1 \quad (2.29)$$

Teniendo en cuenta que  $0 < \varphi < 1$  y  $\frac{1}{2} < d < 1$ .

### 2.2.1 Fujita - Parlange

La difusividad de Fujita (1952) se expresa como:

$$D(\Theta) = \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha \Theta)^2} \quad (2.30)$$

Donde  $\alpha$  es un parámetro de forma ( $0 < \alpha < 1$ ),  $\lambda_c$  es la escala de Bouwer (1964), y la conductividad de Parlange *et al.* (1982), se escribe como:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \Theta \left[ 1 - \beta \frac{\int_{\Theta}^1 D(\bar{\theta}) d\bar{\theta}}{\int_0^1 D(\theta) d\theta} \right] \quad (2.31)$$

La sustitución de (2.31) en (2.30) permite obtener una expresión para  $K(\Theta)$ :

$$K(\Theta) = K_s \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta} \quad (2.32)$$

Donde  $\beta$  es un parámetro adimensional ( $0 < \beta < 1$ ).

La ecuación que define el potencial de presión en función del contenido volumétrico de humedad, que se deduce a partir de la expresión para la difusividad hidráulica, se escribe:

$$\Psi(\Theta) = \lambda_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] \right\} \quad (2.33)$$

## Capítulo 3. Método del elemento finito (MEF)

Muchos han sido los investigadores, tanto en el área de la ingeniería, como en el área de la mecánica aplicada que han participado en el desarrollo del MEF (da Fonseca, 2011). En 1909, Ritz desarrolló un método con el cual se puede obtener soluciones aproximadas, de problemas asociados al campo de la mecánica del continuo. En este método, se asume la “forma” de las incógnitas involucradas en el problema, en términos de unas funciones de aproximación conocidas y unos parámetros a determinar. La introducción de estas funciones en el funcional que describe el problema en estudio, y su posterior diferenciación con respecto a los referidos parámetros, produce una ecuación la cual es igualada a cero. Si existe  $n$  parámetros desconocidos, se formará un sistema de  $n$  ecuaciones simultáneas. La solución de dicho sistema permite determinar dichos parámetros y, por lo tanto, obtener la solución aproximada del problema. Este método es similar a la estimación de los parámetros de ajuste en los problemas de mínimos cuadrados. La limitación más severa del método de Ritz, está en el hecho que las funciones de aproximación, deben verificar las condiciones de contorno especificadas en el problema en estudio, lo cual restringe la aplicación del método a aquellos problemas con dominios de forma geométrica relativamente simples.

En 1943, Courant hizo una muy significativa extensión del método de Ritz introduciendo funciones seccionalmente continuas, definidas sobre áreas triangulares, lo cual, conjuntamente con el principio de mínima energía potencial, le permitió estudiar problemas de torsión. En estos problemas, las incógnitas se seleccionaron de tal modo que fueran iguales a los valores de las funciones, en los puntos de interconexión de las áreas triangulares. Por otro lado, la limitación del método de Ritz fue eliminada ya que las condiciones de contorno se satisfacen, ahora, en un número finito de puntos sobre el contorno. El método de Ritz, tal como fue usado por Courant, es idéntico al MEF el cual fue presentado algunos años después por Clough, a partir de ideas diferentes. En 1960, Clough introdujo, por primera vez, el término elemento finito, en su trabajo “The Finite Element

Method in Plane Stress Analysis". En este trabajo se presentó el MEF como una extensión de las técnicas de análisis estructural, en la solución de problemas de la mecánica del continuo.

Debido a la naturaleza determinística del MEF, los procedimientos de solución de dichos sistemas se pueden clasificar en dos grupos: (a) los métodos directos, tales como los métodos de Gauss y de factorización de Cholesky, los cuales son los más utilizados para sistemas de ecuaciones pequeños o moderados y (b) los métodos iterativos, tales como los métodos de Gauss-Seidel y el de Jacobi, los cuales a su vez, son más apropiados para sistemas de grandes órdenes. En estos métodos, el tiempo de solución es considerablemente menor que en los métodos directos. Sin embargo, no son adecuados en problemas con múltiples sistemas de cargas, como los que frecuentemente se encuentran en la mecánica de los sólidos. Cuando el sistema de ecuaciones es no-lineal, los procedimientos de solución más utilizados son el método de Picard, el método de Newton-Raphson y variaciones del método de Newton (Broyden, quasi-Newton, etc.)

Como ya se ha mencionado, el MEF consiste en el reemplazo de un conjunto de ecuaciones diferenciales, por un conjunto equivalente, pero aproximado, de ecuaciones algebraicas, donde cada una de las variables es evaluada en los puntos nodales. En la evaluación de estas ecuaciones algebraicas pueden usarse diferentes tipos de aproximaciones, y los *métodos de elementos finitos* se clasifican, usualmente, de acuerdo al método usado. Desafortunadamente, no existe un método en particular que sea apropiado para todos los tipos de problemas encontrados en la práctica, de tal modo que deben examinarse diferentes métodos para poder seleccionar el más conveniente para un problema dado.

### **3.1 El método directo**

El MEF se desarrolló, al inicio de la década de los años cincuenta, a partir del llamado método directo asociado al cálculo estructural, el cual fue ampliamente usado en la solución de diversos problemas estructurales relacionados con la industria aeronáutica. Mediante este método se analizaron elementos estructurales reticulares. Las relaciones entre los desplazamientos y las fuerzas que los originan, se expresaron mediante un conjunto de ecuaciones, dando origen a lo que se dio en llamar matriz de rigidez de cada elemento estructural, y se desarrollaron técnicas para realizar el ensamblaje de estas matrices en una matriz global, que expresara el comportamiento de toda la estructura en estudio. Prácticamente, todos los parámetros empleados en esta aproximación pueden interpretarse mediante principios físicos. Desafortunadamente, este método es difícil de aplicar en problemas bidimensionales y tridimensionales, los cuales son, precisamente, los casos donde el MEF es más útil. Esta limitación es por lo tanto muy severa y reduce, drásticamente, su rango de aplicación.

### **3.2 El método variacional**

El método variacional está relacionado con un ente matemático llamado funcional. El funcional asociado a un problema dado, puede obtenerse bien sea a partir de alguna expresión de energía (usualmente este es el caso en los problemas de la mecánica de los sólidos), o desde un problema de valor de contorno. Una vez obtenido el funcional asociado a un problema dado, el método variacional consiste en minimizar el valor del funcional con respecto a cada uno de los valores nodales de la(s) variable(s) del problema. Entre las ventajas de este método se incluye la familiaridad de las técnicas de energía (en problemas de la mecánica de los sólidos), y su fácil extensión a problemas bidimensionales y tridimensionales. Entre las desventajas, se incluye la inexistencia del funcional para cierta clase de problemas (p.e., los relacionados con el flujo de fluidos viscoelásticos), y la dificultad de determinarlo, aun cuando exista, para otros problemas. La

inexistencia del funcional para algunos problemas, obliga a que se deba recurrir a otros métodos.

### **3.3 El método de los residuos pesados**

El método de los residuos pesados es el más general de las tres técnicas. Este método está asociado al problema de valor de contorno de un problema dado, y consiste en re-escribir la ecuación diferencial que gobierna el problema, de tal modo que el lado derecho del signo de igualdad sea igual a cero. De este modo, cuando se sustituye la solución exacta en esta ecuación, el resultado será, lógicamente, igual a cero. Pero debido a que en general la solución exacta no se conoce, se debe emplear alguna solución aproximada. La sustitución de esta solución aproximada en la ecuación diferencial, conduce a un error residual  $r$ , distinto de cero. Este error  $r$  es entonces multiplicado por una función de peso  $W$  y el producto es integrado sobre toda la región del dominio. El resultado es el error residual  $R$ , el cual debe hacerse igual a cero. Luego, para cada valor nodal, existe una función peso  $W$  y un residuo  $R$ , ambos desconocidos, lo cual permite formular un conjunto de ecuaciones algebraicas globales. La selección de las funciones peso  $W$  da origen a diferentes criterios de residuos pesados (Galerkin, mínimos cuadrados, colocación, subdominio). El más ampliamente usado es el método de Galerkin.

En la mayoría de los problemas relacionados con la mecánica de los fluidos, es muy difícil o imposible formular la solución de los mismos a través de algún principio variacional, ya que como se dijo anteriormente, las ecuaciones de Navier-Stokes y algunas relaciones constitutivas, no admiten funcionales. Así que, en esta área, el método de los residuos pesados es el más ampliamente usados. En particular, en la solución de los problemas de fluidos viscosos y viscoelásticos.

Saucedo (1997), describe el método de los residuos ponderados o pesados de la siguiente forma:

Considérese un problema definido en un dominio de un medio continuo, gobernado por la ecuación diferencial:

$$L(u) - f = 0 \quad (3.1)$$

sobre un dominio  $R$  encerrado por la frontera  $F$ . Para obtener una solución aproximada el método se aplica en tres fases. La primera es aproximar la función desconocida ( $u$ ) por una función de prueba, definida como una combinación lineal:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \quad (3.2)$$

donde  $a_j$  son coeficientes a ser determinados y  $\varphi_j$  son funciones de base linealmente independientes.

Como la función de prueba es sólo una aproximación, es de esperarse que no satisfaga exactamente la ecuación diferencial (3.1) por lo tanto, su sustitución origina un error o residual que se evalúa como:

$$\varepsilon = L(\hat{u}) - f \quad (3.3)$$

El método de los residuos pesados tiene como objetivo determinar los coeficientes  $a_j$  de tal forma que el error se minimice. Esto se logra formando una integral ponderada de  $\varepsilon$  sobre el dominio de solución y requiriendo que dicha integral, denominada un residual pesado, sea cero.

La segunda fase consiste en seleccionar  $n$  funciones de peso  $W_j$ , linealmente independientes, de tal forma que:

$$\int_R W_j \varepsilon dR = \int_R W_j [L(\hat{u}) - f] dR = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$



Una vez que se ha especificado la forma de las funciones de peso se sustituye la función de prueba en el residual pesado y se obtiene un sistema de  $j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) ecuaciones que determinarán los coeficientes  $a_j$ , obteniéndose así una solución aproximada.

Existen varios métodos de residuales ponderados que se definen en base a la elección de las funciones de peso. Los más comúnmente utilizados son los que se describen a continuación.

El **Método de colocación Puntual** consiste en especificar un conjunto de puntos  $x_j$  sobre el dominio, denominado puntos de colocación, y seleccionar las funciones de peso como funciones delta de Dirac, definidas por:

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Dada la propiedad de las funciones delta de Dirac:

$$\int_R \varepsilon \delta(x - x_j) dR = \varepsilon(x_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

entonces, el procedimiento consiste en evaluar los residuos en los puntos de colocación para obtener el esquema numérico.

El Método de colocación de subdominios divide el dominio de la solución en varios subdominios, y las funciones de peso se escogen de tal forma que:

$$W_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in R_j \\ 0 & \text{si } x \notin R_j \end{cases} \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.7)$$

donde  $R_j$  son los subdominios especificados.

El **Método de Galerkin** consiste en tomar las funciones de peso iguales a las funciones de base:

$$W_j = \varphi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_j \\ 0 & \text{si } x \neq x_j \end{cases} \quad j=1,2,\dots,n \quad (3.8)$$

## Capítulo 4. Modelación numérica

El método del elemento finito se aplica para resolver la ecuación de Richards en forma de presión, en una dimensión:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (4.1)$$

donde:  $\psi$  es el potencial de presión,  $C(\psi)$  es la capacidad específica, definida como  $C(\psi)=d\theta/d\psi$  y  $K(\psi)$  es la conductividad hidráulica.

Multiplicando la ecuación (4.1) por la función de peso  $\varphi$  e integrando:

$$\int_0^P \hat{C}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \varphi dz = \int_0^P \varphi \frac{\partial}{\partial z} \left[ \hat{K}(\psi) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \right] dz \quad (4.2)$$

donde  $P$  es la profundidad de la columna de suelo y el símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  denota aproximación.

Al integrar la ecuación (4.2), utilizando el método de integración por partes, se obtiene:

$$\int_0^P \hat{C}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \varphi dz = \varphi \left[ \hat{K}(\psi) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \right]_0^P - \int_0^P \left[ \hat{K}(\psi) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \right] \frac{d\varphi}{dz} dz \quad (4.3)$$

Desarrollando la ecuación (4.3):

$$\int_0^P \hat{C}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \varphi dz = \varphi \left[ \hat{K}(\psi) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \right]_0^P - \int_0^P \hat{K}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \frac{d\varphi}{dz} dz + \int_0^P \hat{K}(\psi) \frac{d\varphi}{dz} dz \quad (4.4)$$

Acomodando términos:

$$\int_0^P \hat{C}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \varphi dz + \int_0^P \hat{K}(\psi) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \frac{d\varphi}{dz} dz = \int_0^P \hat{K}(\psi) \frac{d\varphi}{dz} dz + \varphi \left[ \hat{K}(\psi) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \right]_0^P \quad (4.5)$$

Asumiendo la variación lineal ( $\varphi$ ) de la capacidad específica y la conductividad hidráulica en un elemento, es decir:

$$\hat{C} = \varphi_g C_g = \varphi_g(z) C_g \quad (4.6)$$

$$\hat{K} = \varphi_g K_g = \varphi_g(z) K_g \quad (4.7)$$

Sustituyendo la solución del elemento finito:

$$\psi(z, t) \cong \hat{\psi} = \sum_{j=1}^n \varphi_j(z) a_j(t) \quad (4.8)$$

donde:  $\varphi_j(z)$  es una función de base, definida en relación con la función delta de Kronecker (figura 3) y  $a_j(t)$  son coeficientes que dependen del tiempo y representan la solución aproximada.

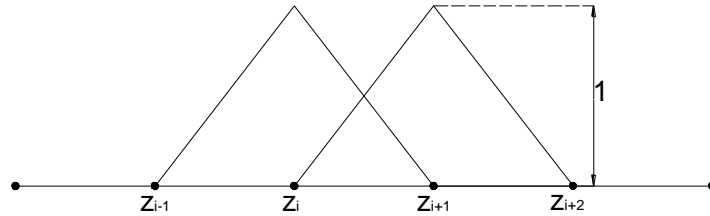


Figura 3. Funciones de base lineales

Sustituyendo (4.6), (4.7) y (4.8) en (4.5):

$$\int_0^P \varphi_g C_g \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{j=1}^n \varphi_j a_j \right] \varphi_i dz + \int_0^P \left\{ \varphi_g K_g \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sum_{j=1}^n \varphi_j a_j \right] \frac{d\varphi_i}{dz} \right\} dz = \int_0^P \varphi_g K_g \frac{d\varphi_i}{dz} dz + G_i \quad (4.9)$$

donde  $G_i$  es un vector de flujos

Desarrollando (4.9), se obtiene:

$$\sum_{j=1}^n \frac{da_j}{dt} \int_0^P \varphi_g C_g \varphi_i \varphi_j dz + \left[ \sum_{j=1}^n \int_0^P \varphi_g K_g \frac{d\varphi_j}{dz} \frac{d\varphi_i}{dz} dz \right] a_j = \int_0^P \varphi_g K_g \frac{d\varphi_i}{dz} dz + G_i \quad (4.10)$$

Utilizando un sistema de masa concentrado (Neuman 1973):

$$\left[ \sum_{j=1}^n \int_0^P C_g \bar{\varphi}_g \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j dz \right] \frac{da_j}{dt} + \left[ \sum_{j=1}^n \int_0^P K_g \varphi_g \frac{d\varphi_j}{dz} \frac{d\varphi_i}{dz} dz \right] a_j = \int_0^P K_g \varphi_g \frac{d\varphi_i}{dz} dz + G_i \quad (4.11)$$

donde:  $\bar{\varphi}$  son funciones de base del sistema de masa concentrado (figura 4).

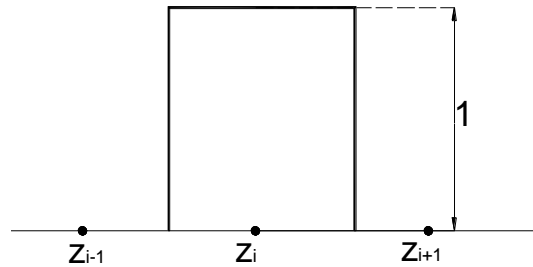


Figura 4. Sistema de masa concentrado

Utilizando funciones de interpolación lineales, se obtiene:

$$A_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_0^P C_g \bar{\varphi}_g \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_j dz = \delta_{ij} \sum_e C_j \frac{\Delta z}{2} \quad (4.12)$$

$$B_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_0^P K_g \varphi_g \frac{d\varphi_j}{dz} \frac{d\varphi_i}{dz} dz = \sum_e (-1)^{i+j} \frac{\bar{K}}{\Delta z} \quad (4.13)$$

$$F_i = \int_0^P K_g \varphi_g \frac{d\varphi_i}{dz} dz = \sum_e \frac{K_{j-1} + 2K_j + K_{j+1}}{2} \quad (4.14)$$

$$G_i = K(\hat{\psi}) \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \varphi_i |_0^p \quad (4.15)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker

Con los coeficientes anteriores, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$[A] \frac{d\{a\}}{dt} + [B]\{a\} = \{F\} + \{G\} \quad (4.16)$$

donde A es conocida como la matriz de masa, B, la matriz de rigidez, F es un vector de flujos.

Para la aproximación de la derivada temporal en la ecuación (4.16), se utiliza el siguiente esquema:

$$\left(\frac{d\{a\}}{dt}\right)^{t+\omega\Delta t} = \frac{\{a\}^{t+\Delta t} - \{a\}^t}{\Delta t} \quad (4.17)$$

$$\{a\}^{t+\omega\Delta t} = \omega\{a\}^{t+\Delta t} + (1 - \omega)\{a\}^t \quad (4.18)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo y  $\omega$  es un coeficiente de ponderación en el tiempo ( $0 \leq \omega \leq 1$ ), si se toma como  $\omega = 1/2$ , se obtiene un esquema de Crank-Nicholson.

Sustituyendo las ecuaciones (4.17) y (4.18) en la ecuación (4.16), y aplicando el método de linealización de Picard se obtiene:

$$\left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^m}{\Delta t} + \omega B_{t+\omega\Delta t}^m\right] \{a\}_{t+\omega\Delta t}^{m+1} = \left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^m}{\Delta t} - (1 - \omega)B_{t+\omega\Delta t}^m\right] \{a\}_t + \{F\}_{t+\omega\Delta t}^m + \{G\}_{t+\omega\Delta t}^m \quad (4.19)$$

donde m indica el número de iteración en el intervalo de tiempo. El sistema de ecuaciones algebraicas (4.19) es resuelto utilizando un método iterativo de gradiente conjugado preconditionado, que permite eliminar los errores de redondeo asociados con el procedimiento de sustitución regresiva requerido en métodos directos.

Para modelar la evapotranspiración, se impuso en la superficie del suelo, en una primera etapa, una condición de Neumann con flujo constante:

$$\left\{-K(\psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1\right]\right\}_{z=0} = cte \quad (4.20)$$

Una forma físico-matemáticamente más fundamentada, fue utilizada en una segunda etapa, para modelar la evapotranspiración, imponiendo en la superficie del suelo una condición de radiación de Newton, de la forma:

$$\psi + R(\psi) \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1\right)\right] = 0 \quad (4.21)$$

Se propuso una resistencia al flujo  $R(\psi)$  de forma potencial cuadrática, similar a las empleadas en la literatura para modelar evapotranspiración empleando modelos hidrológicos:

$$R(\psi) = \alpha \psi^2 \quad (4.22)$$

La tasa de evapotranspiración se propuso variable durante el día siguiendo una variación senoidal (ecuación 4.23 y figura 5).

$$Et = Q(\psi) \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{180}\right)}{480} \right| \quad (4.23)$$

donde  $Q(\psi)$  es el flujo estimado de acuerdo con la ecuación (4.21).

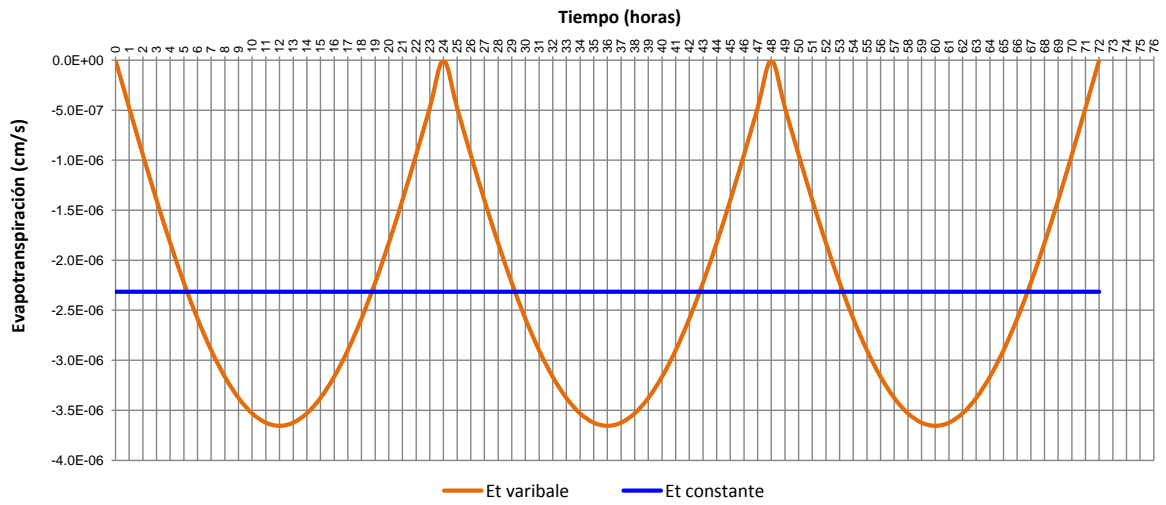


Figura 5. Evapotranspiración variable y constante



## Capítulo 5. Resultados

### 5.1 Modelo conceptual

El modelo se fundamenta en el cálculo de la transferencia de agua entre el manto freático, el perfil del suelo y los cultivos (figura 6). Se eligió al cultivo de maíz porque es uno de los de mayor superficie cultivada en las regiones del país, en donde se presenta el aporte de agua del manto freático. Se determinó modelar en los primeros 40 días de crecimiento del cultivo, que es el periodo que se estima que existe humedad residual, después del periodo de lluvias.

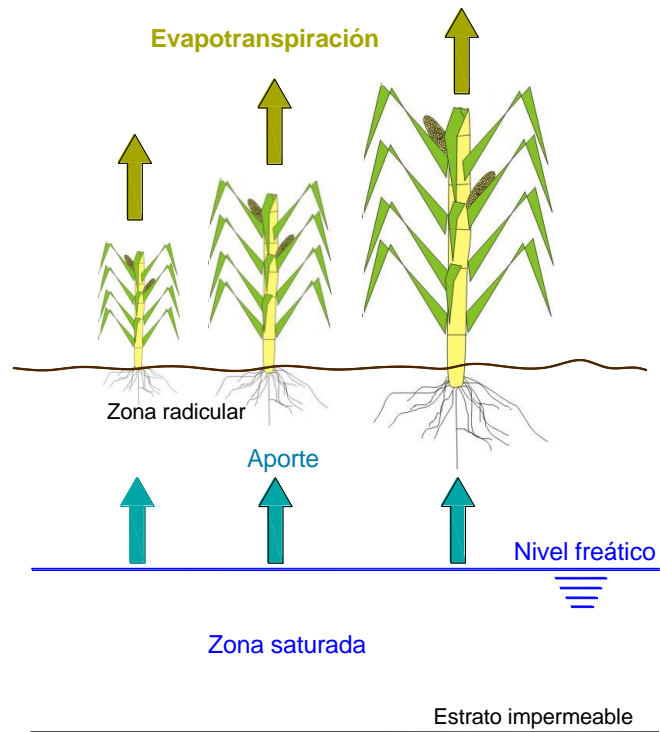


Figura 6. Esquema del modelo conceptual

El programa calcula el flujo de agua en función de la profundidad de la raíz. Esta profundidad se determinó con base en el crecimiento de la raíz del maíz, obtenido del programa CropWat (figura 7), el cual maneja un crecimiento lineal de la raíz, iniciando en 20 cm y llegando a una profundidad final de 110 cm, en 60 días.

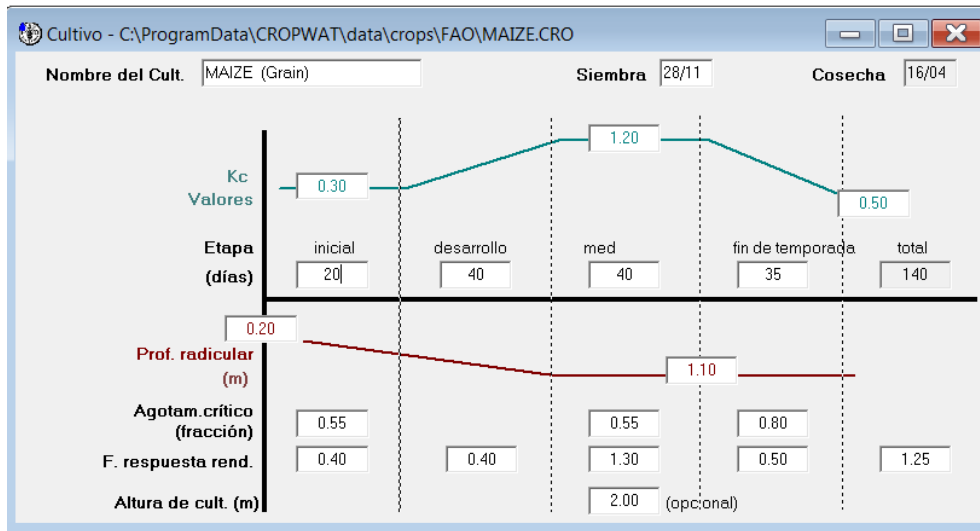


Figura 7. Características agronómicas del cultivo de maíz, presentadas por el programa CropWat

Las características hidrodinámicas del suelo considerado, se muestran en el siguiente cuadro y figuras:

Cuadro 1. Características hidrodinámicas del suelo

Textura	Franco arcilloso
$\theta_s$ (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	0.5
$\theta_r$ (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	0.0
$K_s$ (cm/h)	3.0
$\eta$	11.0
$m$	0.1258
$n$	2.2878
$\psi_d$ (cm)	-100.0

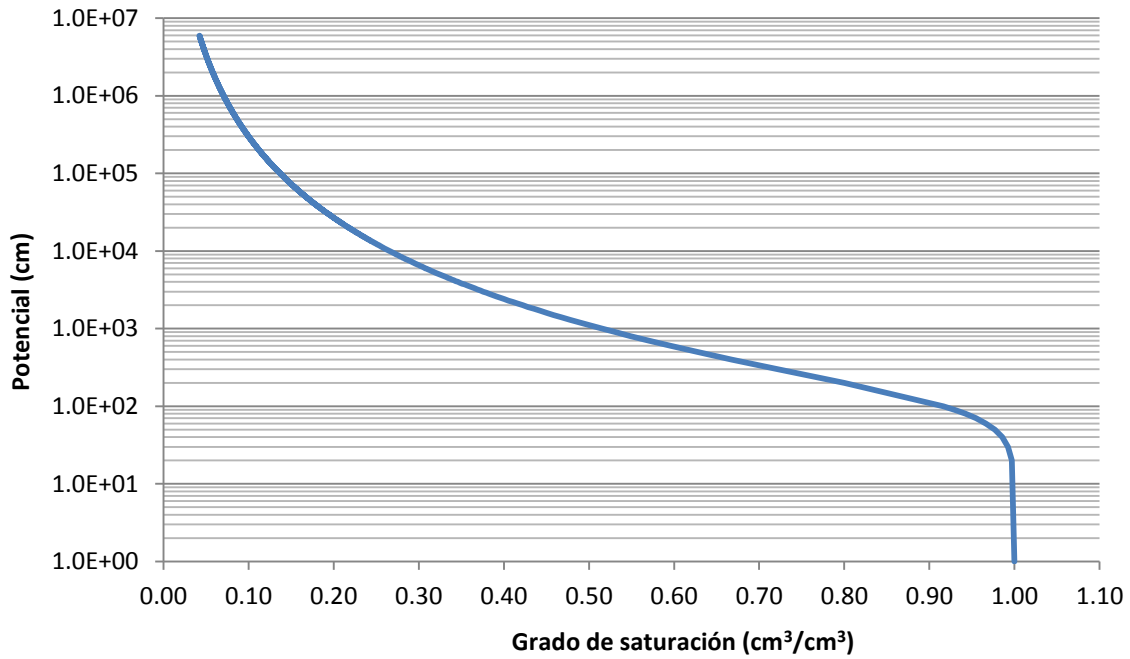


Figura 8. Curva característica del potencial de humedad, obtenida a partir de la ecuación de Van Genuchten

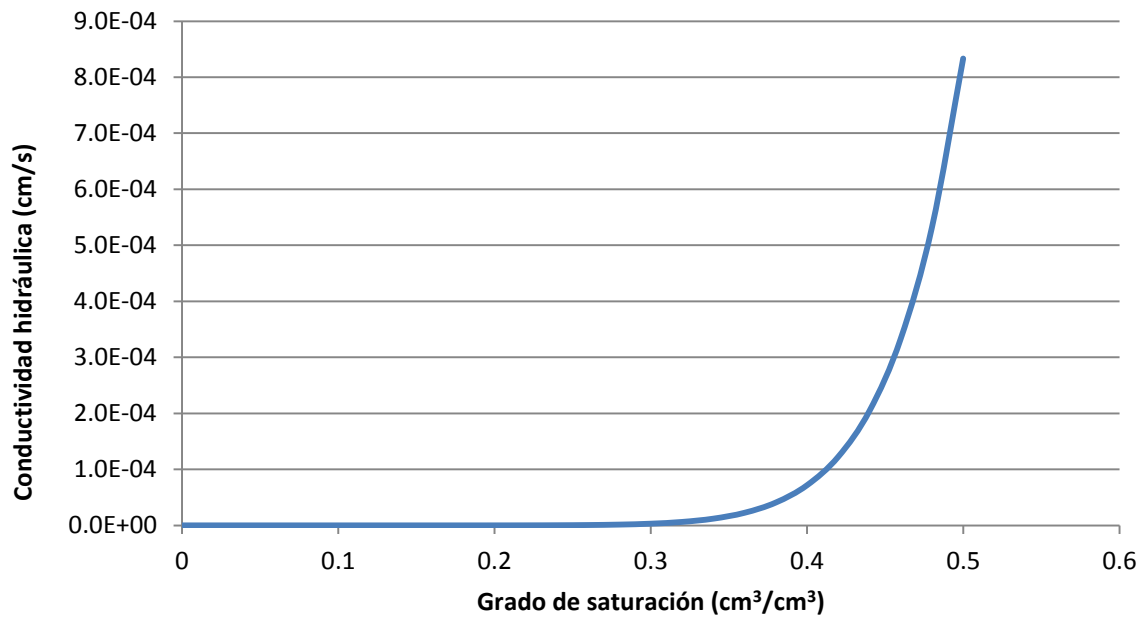


Figura 9. Curva característica de la conductividad hidráulica obtenida de la ecuación de Brooks y Corey

## 5.2 Resultados

El esquema numérico se codificó en lenguaje de programación C++ y se ejecutó para simular el aporte de agua del manto freático, variando la profundidad inicial de éste (PNFi) a profundidades de 100, 150, 200, 250 y 300 cm.

### 5.2.1 Comportamiento del nivel freático a evapotranspiración constante y variable.

En la figura 10 se observa que para una misma profundidad inicial, existen diferencias entre las gráficas en donde la evapotranspiración es variable y cuando es constante, siendo estas últimas las que presentan mayor descenso del nivel freático. En los primeros 5 días el descenso es muy marcado, después se estabiliza y se tienen los descensos promedios que se muestran en el cuadro 2.

Cuadro 2. Descensos promedios (cm/día) del nivel freático, a diferentes profundidades iniciales a evapotranspiración variable y constante

<b>PNFi (cm)</b>	<b>Et variable</b>	<b>Et constante</b>
<b>100</b>	3.0	3.8
<b>150</b>	2.8	3.5
<b>200</b>	2.3	3.0
<b>250</b>	1.8	2.5
<b>300</b>	1.5	2.2

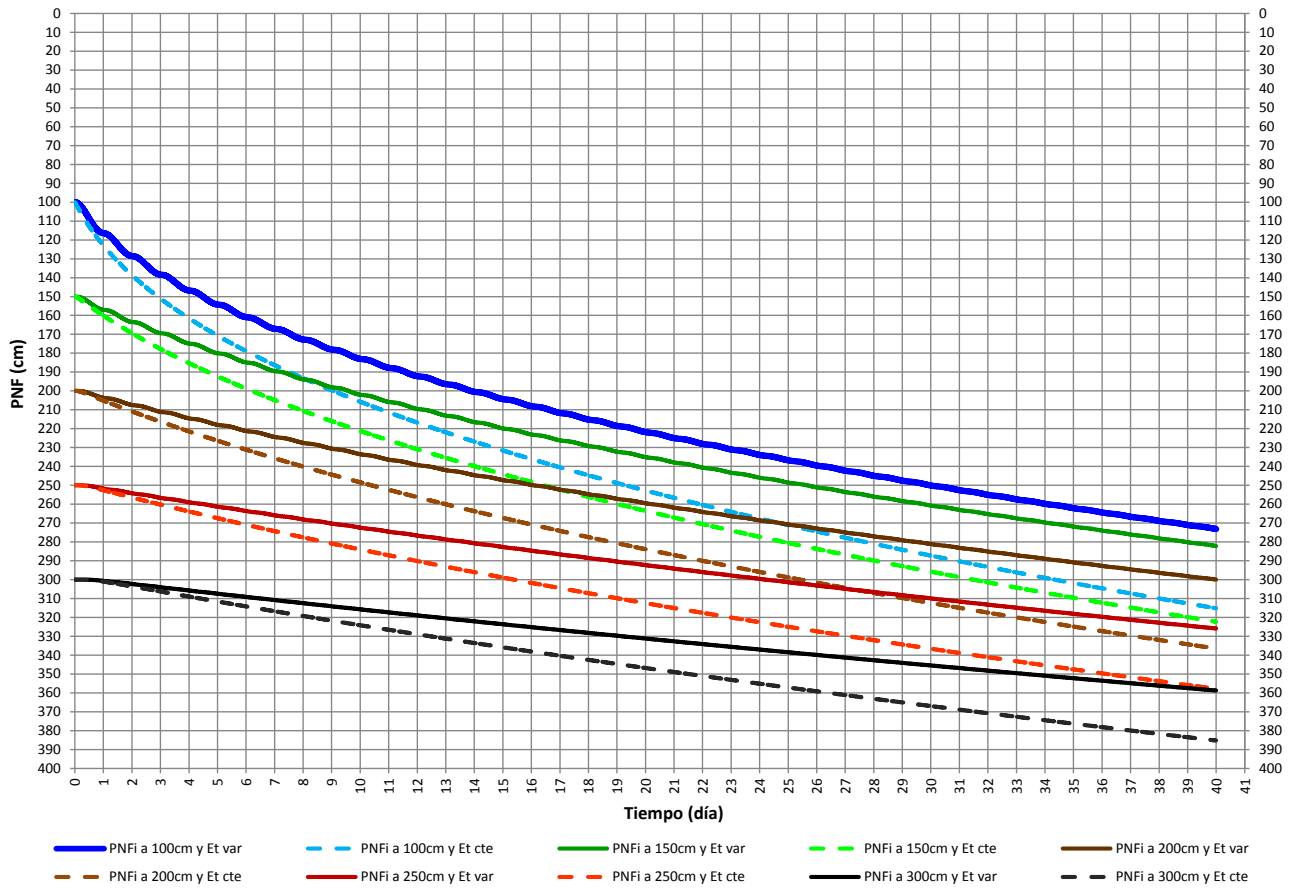


Figura 10. Profundidades del nivel freático con evapotranspiración variable y constante

### 5.2.2 Comportamiento de los flujos calculados a la profundidad de la raíz, variando la profundidad inicial del nivel freático.

Se calculó el flujo a una profundidad variable igual a la profundidad de la raíz del cultivo, estimada esta última, según el modelo usado por el programa CropWat, este flujo es el que la planta puede usar para satisfacer la evapotranspiración. En la figura 11, se presenta el comportamiento del flujo, a diferentes profundidades iniciales y con evapotranspiración variable durante el día. Se observa que cuando la profundidad inicial del nivel freático se acerca al nivel del suelo, el flujo es mayor y que cuando el nivel freático desciende en el tiempo, el flujo disminuye, así como su oscilación. Esto es debido a la restricción de humedad del suelo, incluido en condición de radiación de Newton empleada.

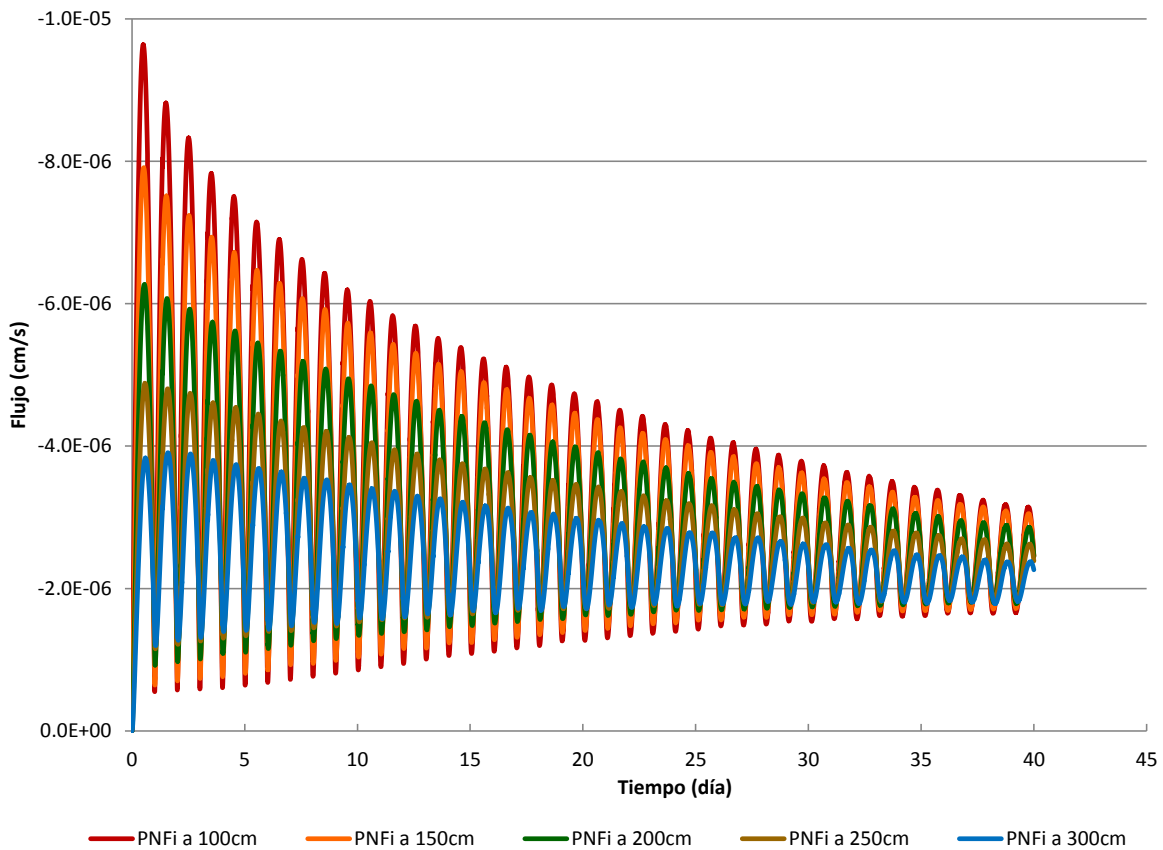


Figura 11. Flujos calculados a la profundidad de la raíz, a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración variable

Cuando la evapotranspiración es constante, los flujos son mayores que cuando es variable (figura 12). Esto provoca que los perfiles de los niveles freáticos mostrados en la figura 10, sean más profundos. Y que como se verá más adelante, la lámina sea mayor que cuando se utiliza una evapotranspiración variable.

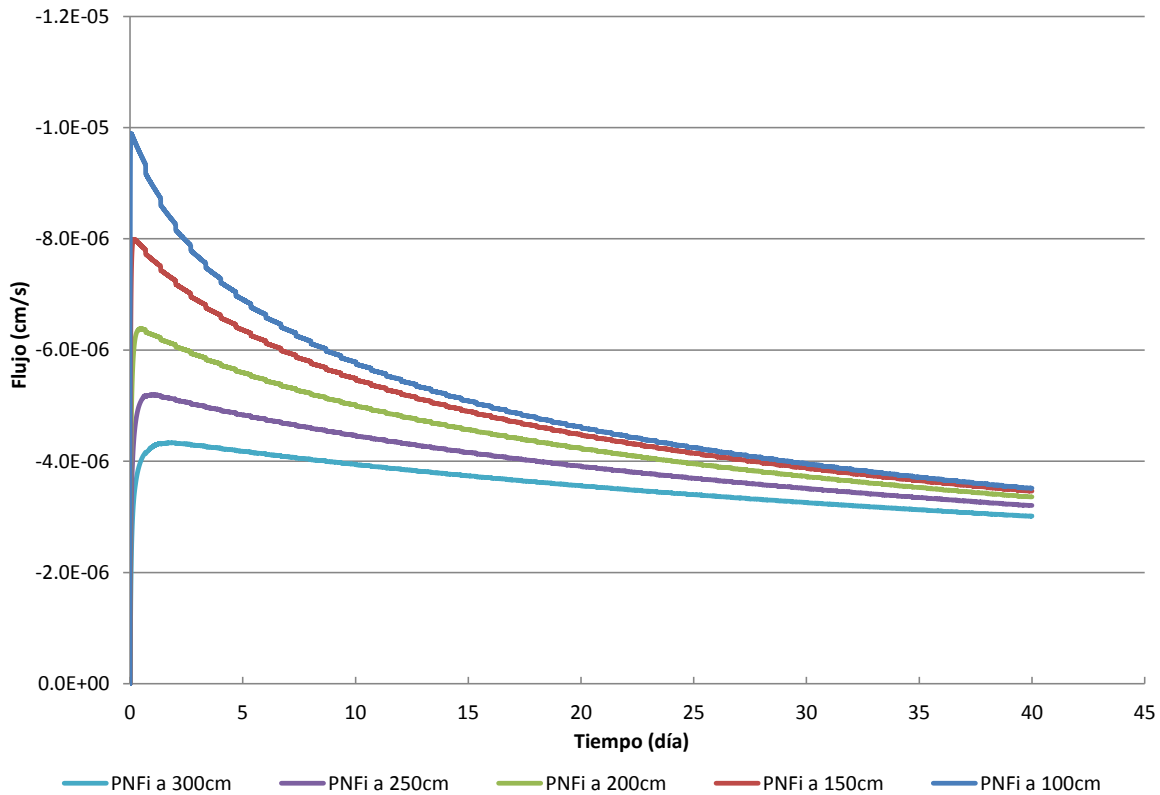


Figura 12. Flujos calculados a la profundidad de la raíz, a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración constante.

### 5.2.3 Láminas de agua aportadas

Al integrar los flujos calculados a la profundidad de la raíz (método del trapecio), se obtuvieron las láminas de agua que el manto freático aporta al cultivo

En el cuadro 3 y figura 13 se muestra para una evapotranspiración variable, que a menor profundidad inicial del nivel freático, la lámina aportada es mayor que las láminas a profundidades iniciales mayores.

Cuadro 3. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático, con evapotranspiración variable.

PNFi (cm)	Lámina aportada (cm)
100	12.20
150	11.40
200	10.40
250	9.39
300	8.39

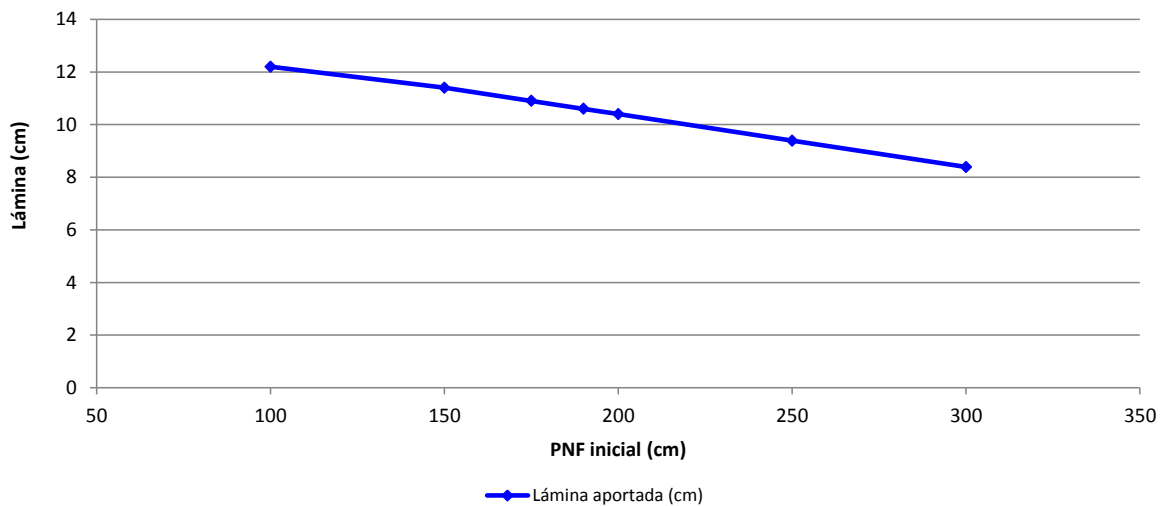


Figura 13. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración variable.

En el año 2012, el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, comenzó el “Estudio de Factibilidad Técnica y Económica del Canal Nayarit”, en este dicho estudio se presentó el problema de calcular el aporte de agua del manto freático al



requerimiento de riego de los cultivos. Este aporte se estimó mediante las ecuaciones de Aguirre y Norero propuestas en su “Estudio agrofísico de las relaciones entre la napa freática y la productividad de los cultivos, en el año de 1982. El aporte calculado para una profundidad inicial del manto freático de 100 cm fue de 13.3 cm, para los primeros 40 días del crecimiento del maíz. Este resultado es similar al obtenido en este trabajo (Cuadro 3).

A manera de ejemplo, se presenta la siguiente figura, en donde se observa que en los primeros 40 días no se necesita riego, para un cultivo de maíz establecido en la región de la costa norte de Nayarit, para suelos con características iguales que las utilizadas en este trabajo, ya que el aporte de agua del manto freático sería suficiente para satisfacer la demanda evapotranspirativa. Es importante señalar que con este aporte de agua del manto, se ahorraría el agua aplicada de uno o dos riegos.



Figura 14. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración variable.

Cuando la evapotranspiración es constante, las láminas aportadas son mayores con respecto a las láminas calculadas cuando la evapotranspiración es variable (Cuadro 4 y figura 15).

Cuadro 4. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático, con evapotranspiración constante.

PNFi (cm)	Lámina aportada (cm)
100	17.52
150	16.60
200	15.30
250	13.80
300	12.40

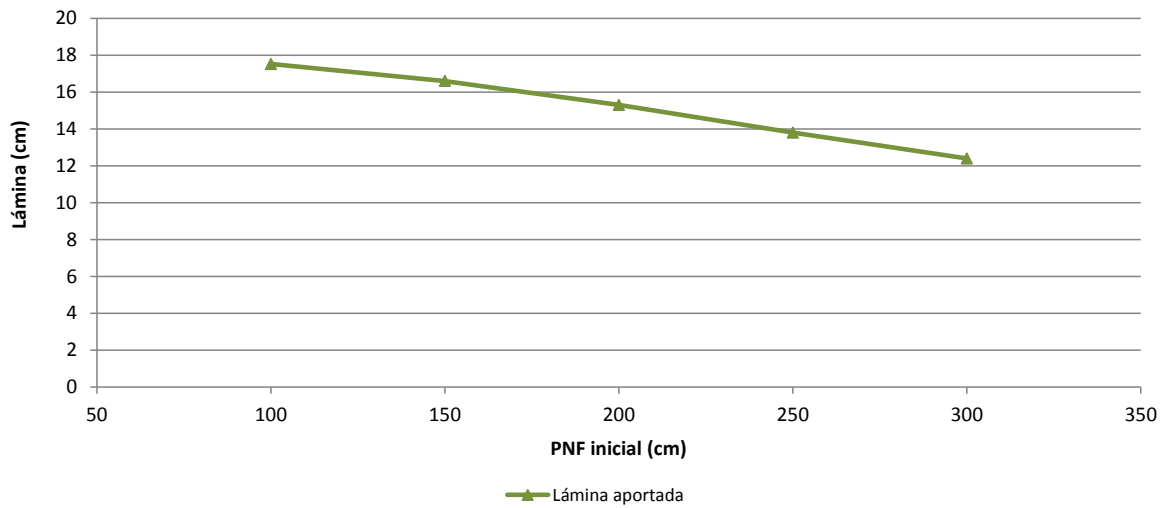


Figura 15. Láminas aportadas a diferentes profundidades iniciales del nivel freático y con evapotranspiración constante.

#### **5.2.4 Perfiles de los flujos en diferentes días.**

Se calcularon los flujos a diferentes profundidades (entre 1 y 300 cm) para 10, 20, 30 y 40 días, con diferentes profundidades iniciales y se graficaron los resultados para evapotranspiración variable y constante. En general, las gráficas son muy similares (figura 16 a la 25).

Los mayores flujos se presentan en profundidades cercanas al nivel del suelo para evapotranspiración variable y constante. Con respecto al tiempo, en los últimos días de la simulación se presentan los mayores flujos cerca de la superficie del suelo. Como se ha estado viendo, los flujos son más importantes cuando la evapotranspiración es constante que cuando es variables

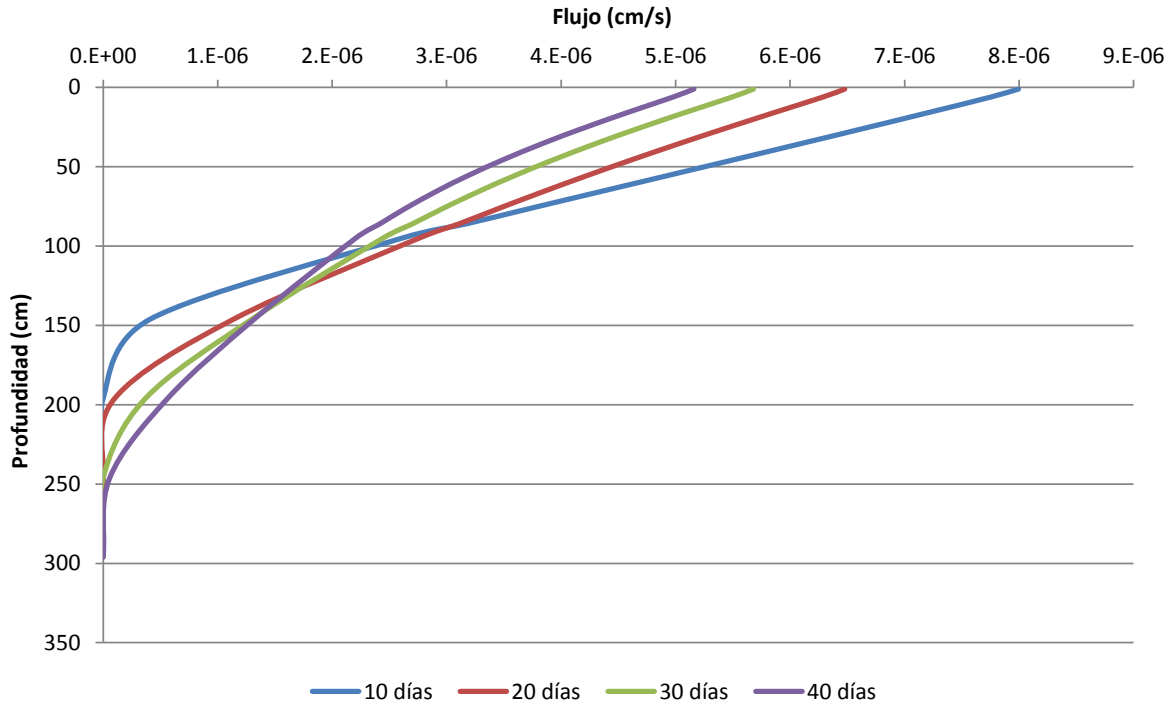


Figura 16. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 100 cm y evapotranspiración variable

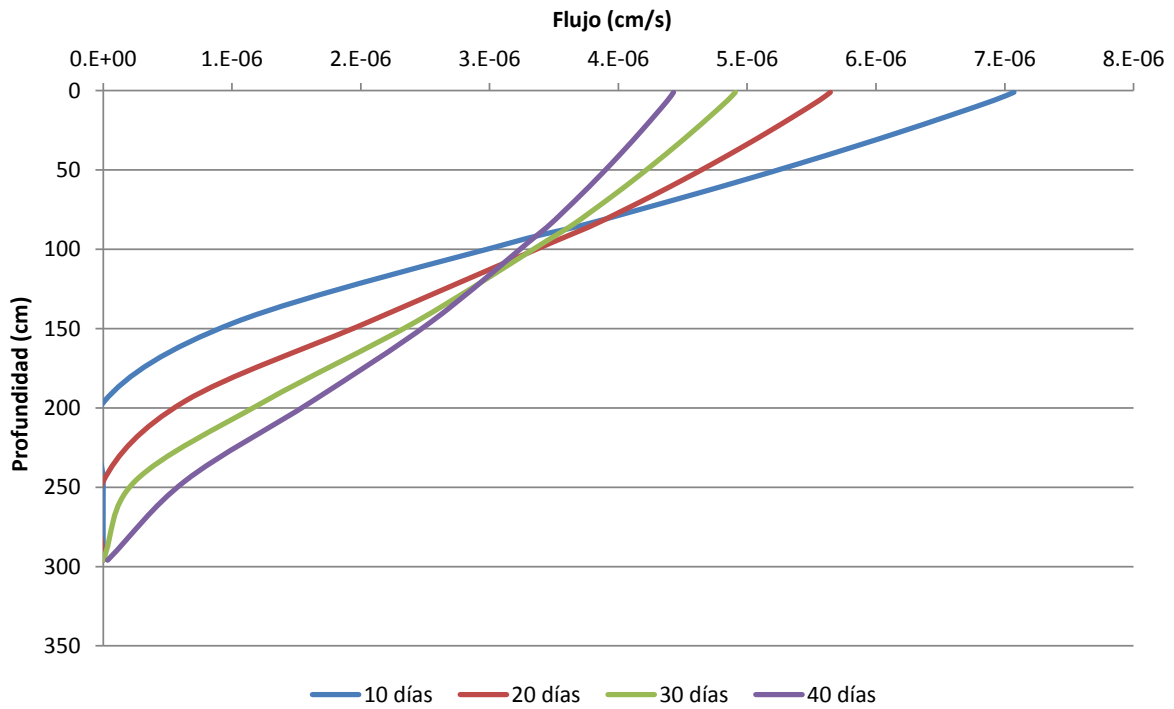


Figura 17. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 100 cm y evapotranspiración constante

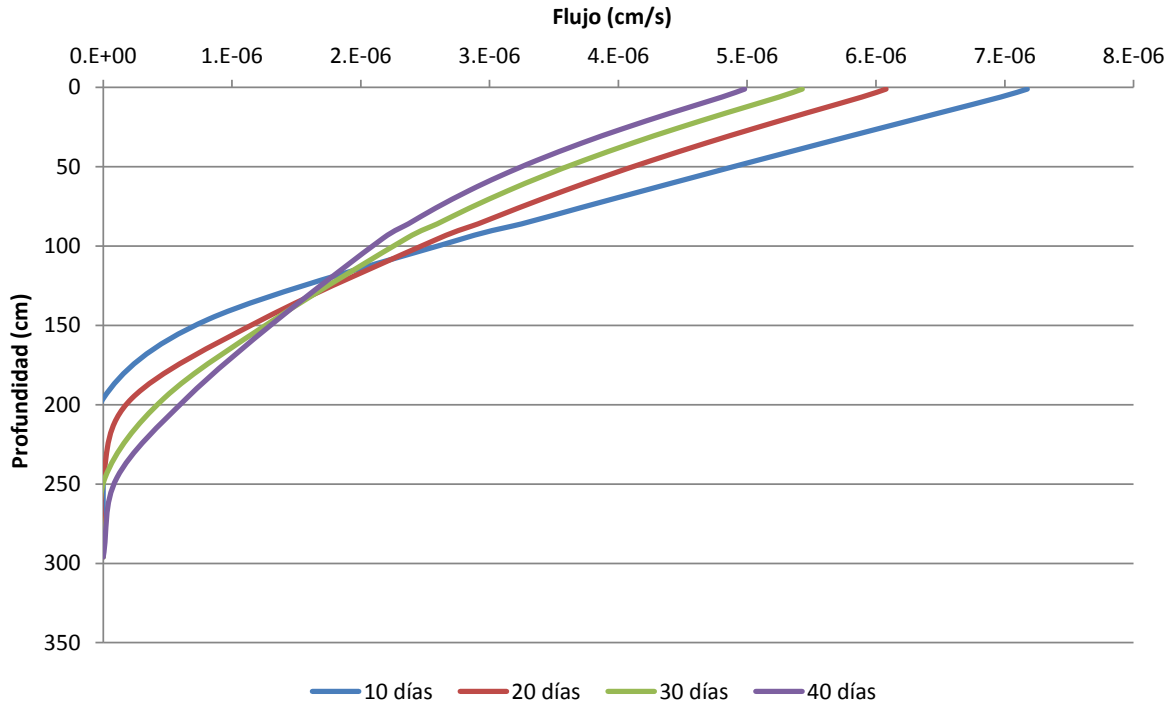


Figura 18. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 150 cm y evapotranspiración variable

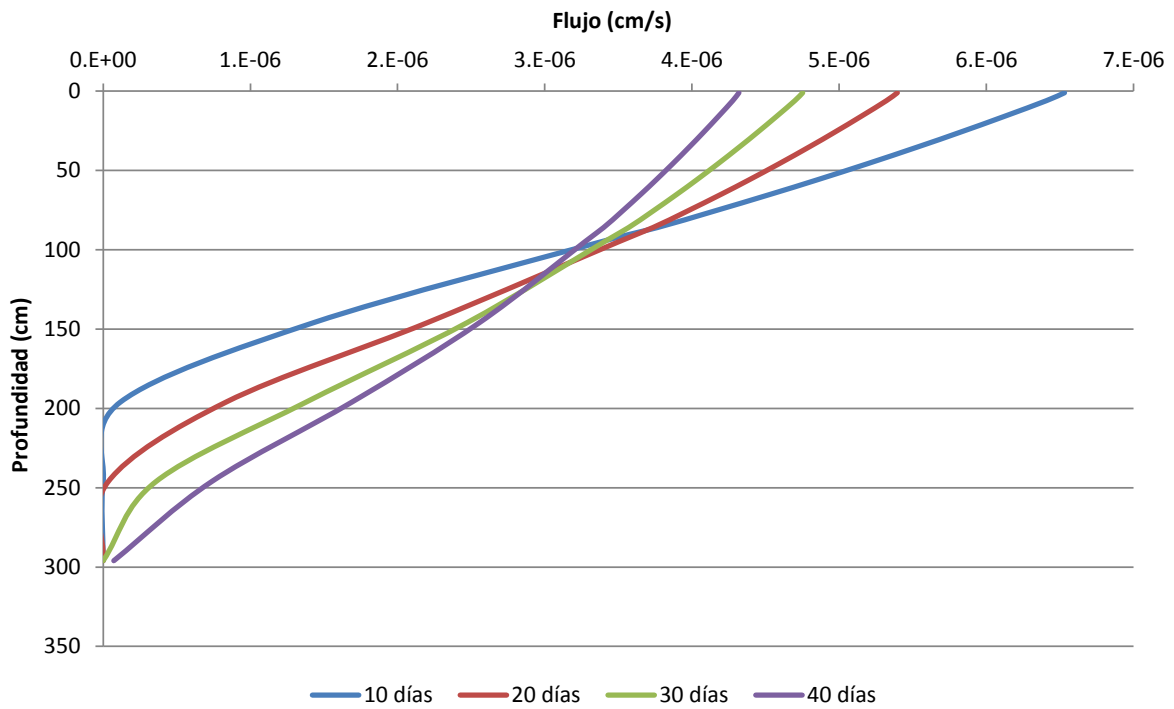


Figura 19. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 150 cm y evapotranspiración constante

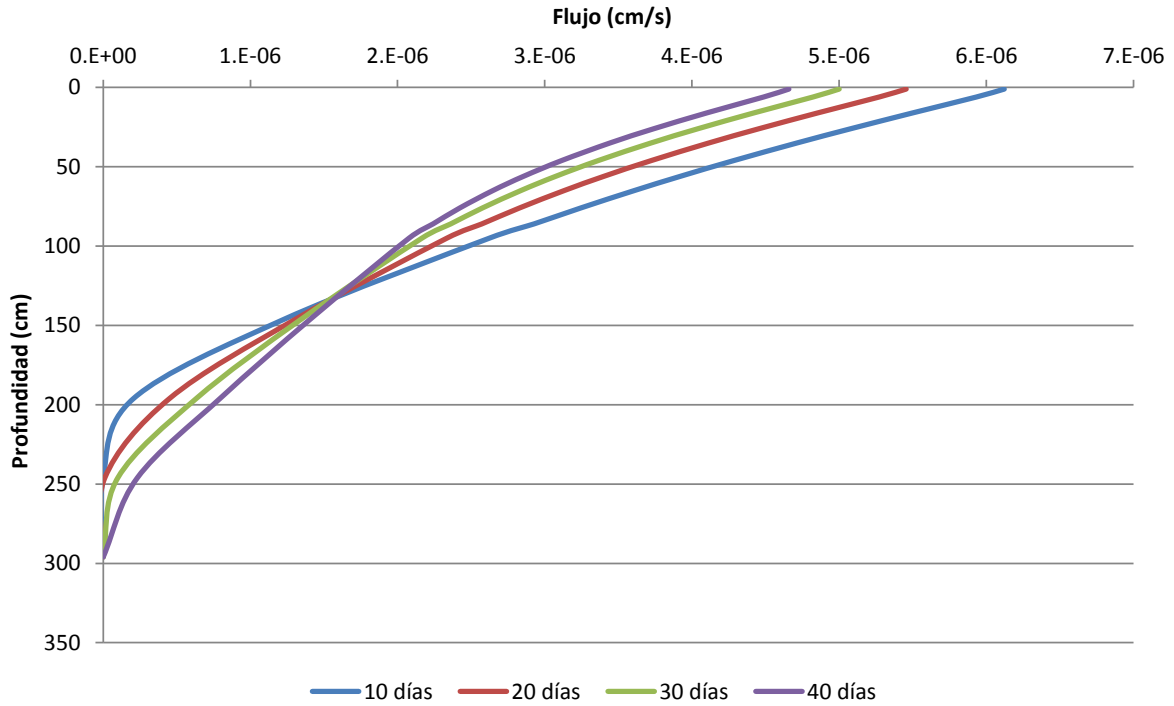


Figura 20. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 200 cm y evapotranspiración variable

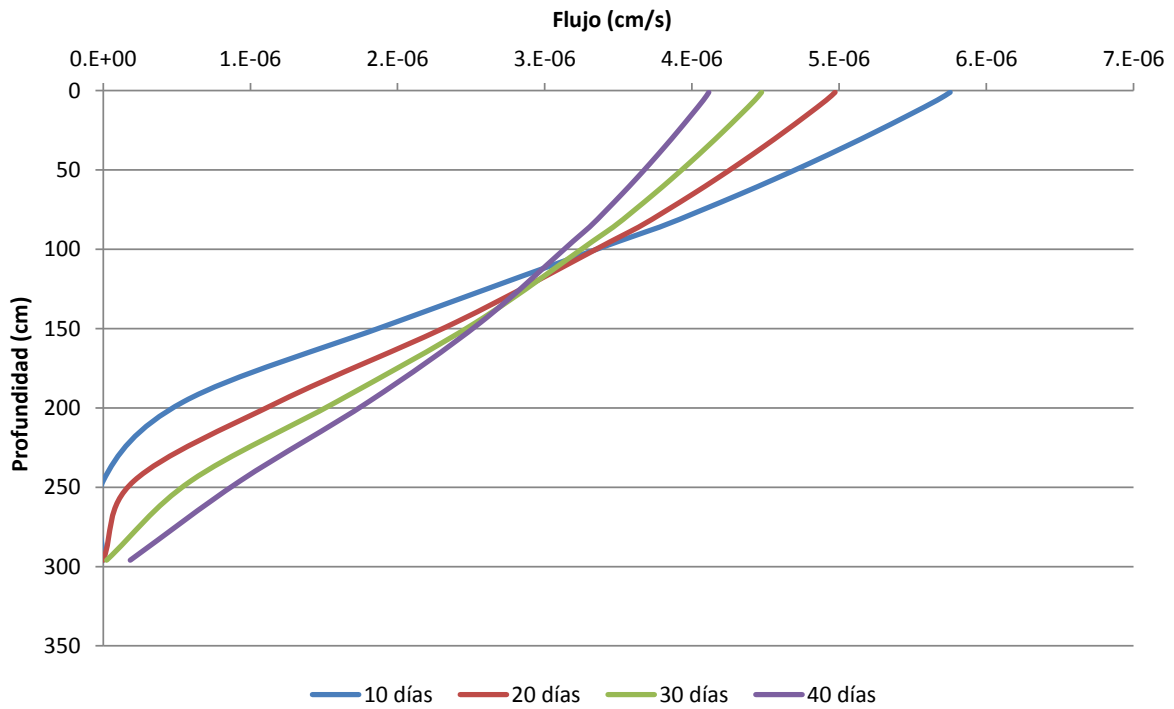


Figura 21. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 200 cm y evapotranspiración constante

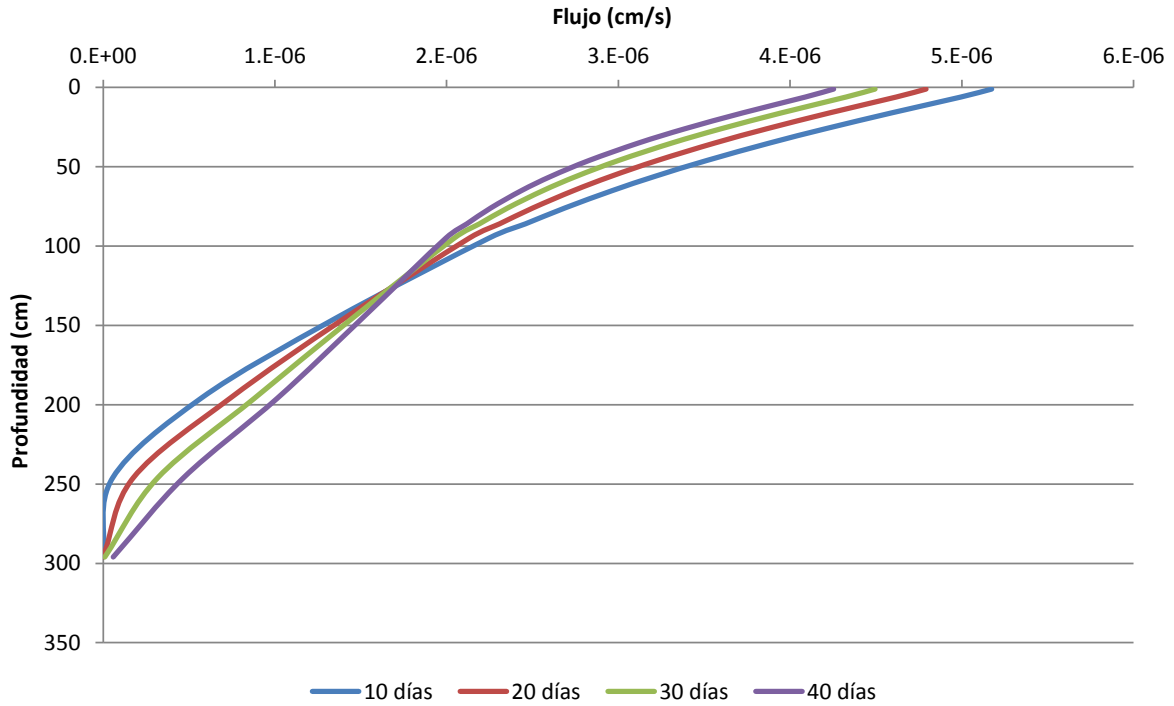


Figura 22. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 250 cm y evapotranspiración variable

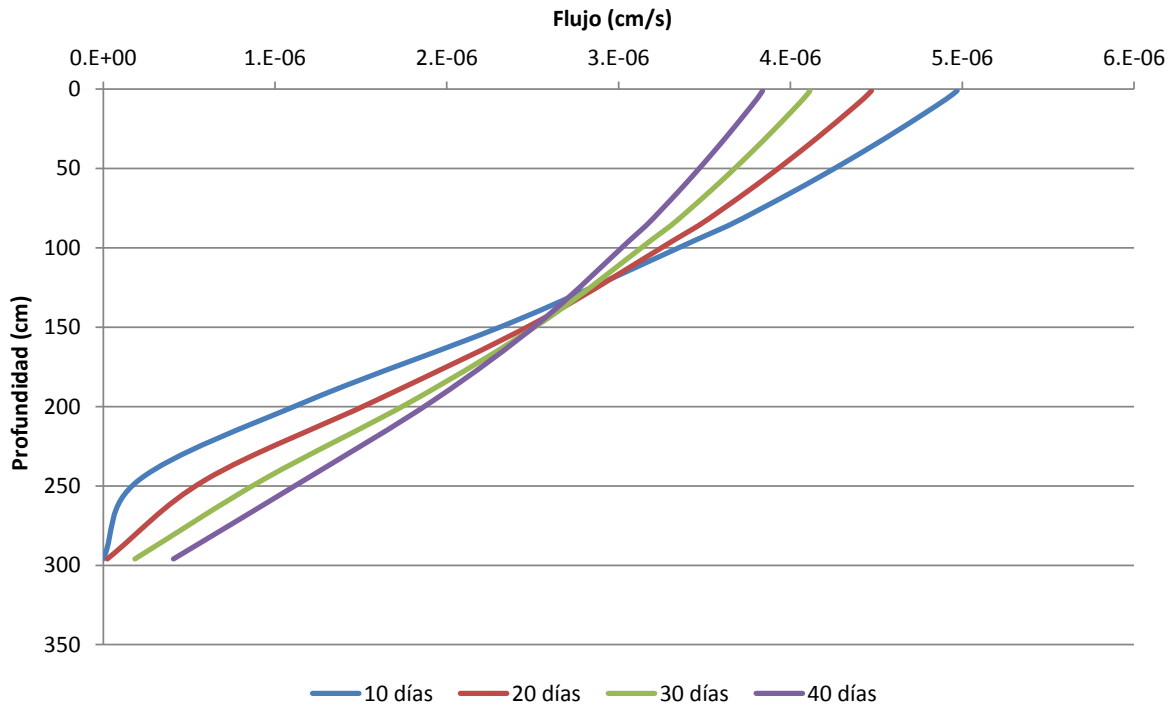


Figura 23. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 250 cm y evapotranspiración constante

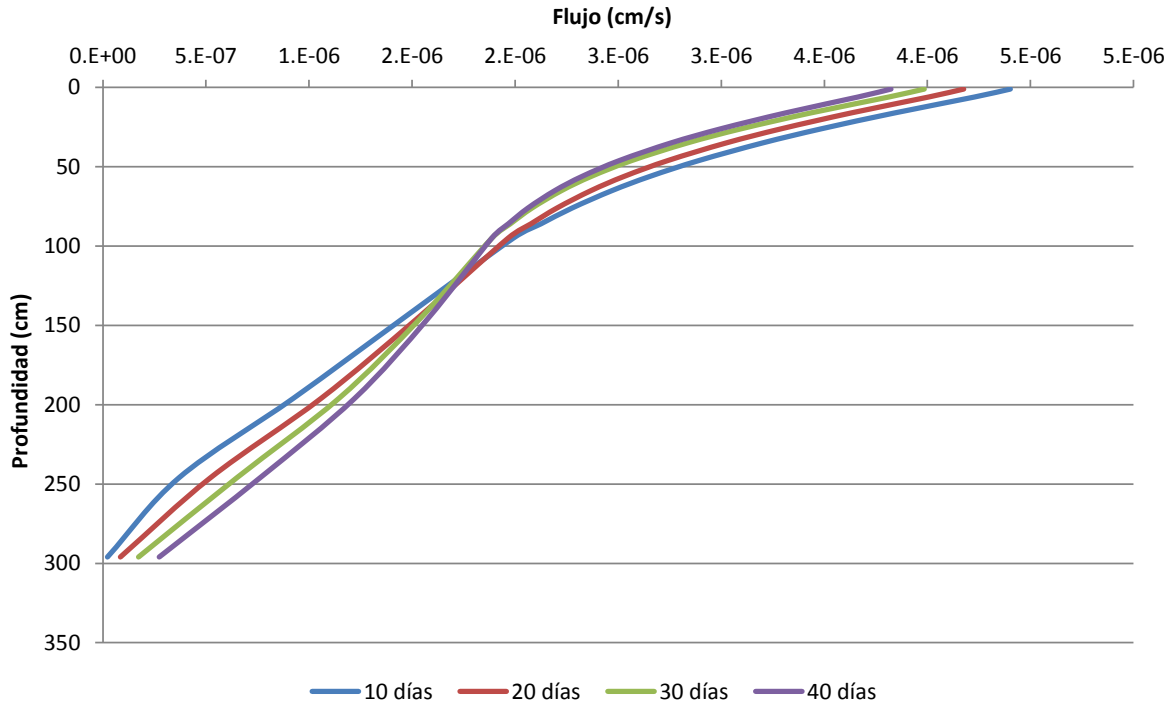


Figura 24. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 300 cm y evapotranspiración variable

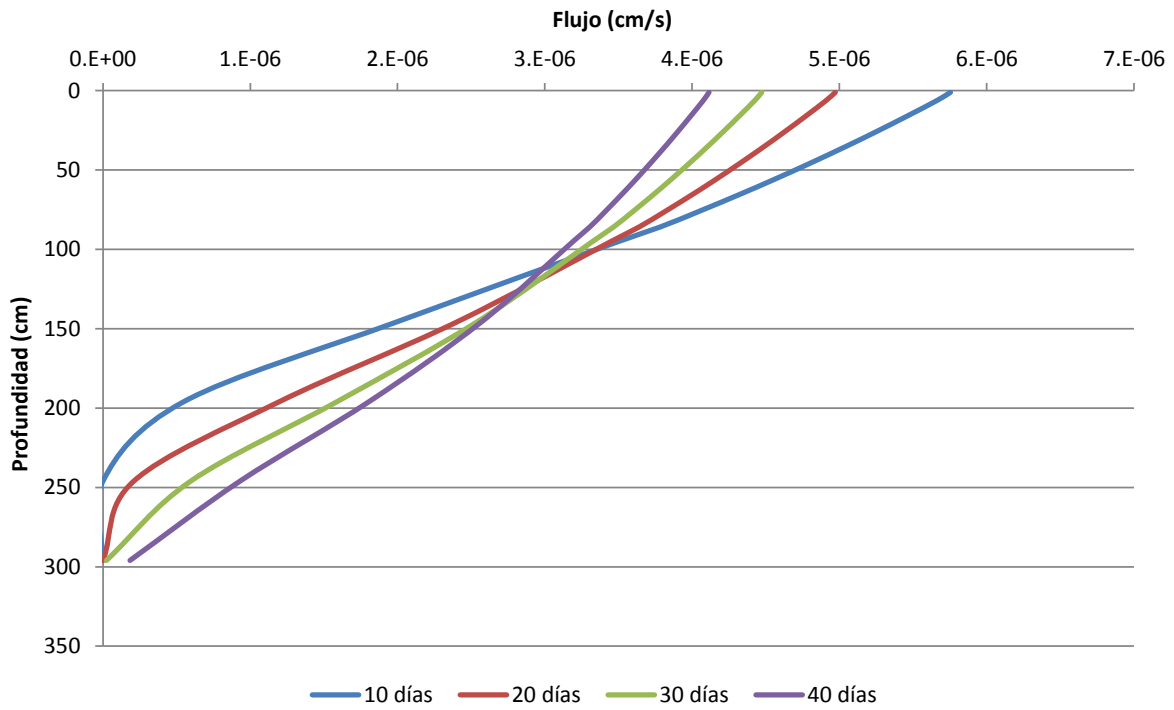


Figura 25. Perfiles de flujos, con una profundidad inicial del nivel freático de 300 cm y evapotranspiración constante



## Capítulo 6. Conclusiones

En este trabajo se modeló numéricamente el aporte de agua del manto freático al requerimiento de riego de los cultivos, mediante la solución de la ecuación de Richards en una dimensión, utilizando el método del elemento finito. De los resultados obtenidos se puede concluir:

1. El modelo numérico desarrollado, es una herramienta útil para analizar el movimiento de agua en el suelo, originado por el aporte de agua del manto freático y la evapotranspiración de los cultivos, presentando la ventaja en la flexibilidad del manejo de las condiciones iniciales y de frontera.
2. Se puede estimar hasta que fecha el agua aportada por el manto freático es suficiente para satisfacer el requerimiento de riego de los cultivos y por consiguiente conocer cuando se aplica el riego.
3. Existen diferencias entre las láminas de agua aportadas del manto freático al requerimiento de riego de los cultivos, al utilizar la evaporación en forma constante y variable durante el día. Siendo la condición de evapotranspiración constante la que aporta la mayor lámina de agua a los cultivos. Debido a que no describe correctamente la tasa evapotranspirativa en el transcurso del día, como lo hace la evapotranspiración en forma variable.

Finalmente, se recomienda realizar un proceso de validación del esquema numérico con experimentos de laboratorio y de campo.

## Capítulo 7. Referencias

Aguirre y Norero. 1982. Estudio agrofísico de las relaciones entre la napa freática y la productividad de los cultivos. CIDIAT. Mérida, Venezuela.

Bear, Jacob. 1972. Dynamics of fluids in porous media. Dover Publications. New York.

Bower, H. 1964. Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters if flow system analysis. Water Resources Research. 36:411-424.

Brooks R.H. y Corey A.T. 1964. Hydraulic properties of porous media. Hydrol. Pap. 3. Colorado State University. Fort Collins.

da Fonseca, L. 2011. El método de los elementos finitos: una introducción. Fondo editorial biblioteca. Universidad Rafael Urdaneta.

FAO. 1990. Evapotranspiración del cultivo. Guías para la determinación de los requerimientos de agua de los cultivos.

Fuentes, C. (1992). Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés. Tesis de Doctorado de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia.

Fujita, H. 1952. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II. Textile Research Journal. 22:823-827.

León, T. 2004. Modelación bidimensional del drenaje agrícola con la ecuación de Boussinesq. Tesis de maestría por la Universidad Nacional Autónoma de México.

Mori, M. 1983. The finite element method and its applications. Ed. Macmillan. New York.

Parlange, J.Y., R.D. Braddock, I. Lisle y R.E. Smith. 1982. Tree parameter infiltration equation. Soil Sci. 11:170-174.

Preciado, J. 2002. Drenaje de una columna de suelo sujeta a una condición de radiación lineal. Tesis de maestría por la Universidad Nacional Autónoma de México.

Richards, L. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics 1: pp 3018-333.

Saucedo, R. 1997. Flujo de agua hacia drenes subterráneos. Tesis de maestría por la Universidad Nacional Autónoma de México.

Sepúlveda, J. 2003. Una metodología para la caracterización hidrodinámica de suelos parcialmente saturados. Tesis de licenciatura por la Universidad Autónoma Chapingo.

Van Genuchten M. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Amer. J. 44:892-898.

Zavala, M. 1998. Simulación numérica de flujo de agua bajo condiciones de riego por goteo. Tesis de maestría por la Universidad Nacional Autónoma de México.