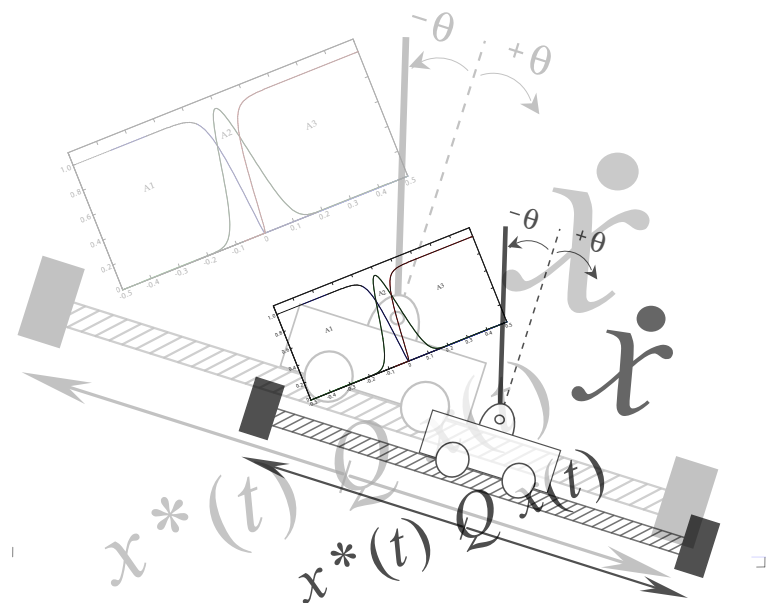


CAPÍTULO 4

DISEÑO DE LOS CONTROLADORES



DISEÑO DE LOS CONTROLADORES

En el presente capítulo se abordan las consideraciones de diseño para los controladores, además, así como el análisis y simulación de los esquemas de control detallados en el segundo capítulo. En particular, se propondrán dos esquemas de control: el primero es un regulador lineal (LQR) y el segundo un control difuso tipo *singleton*.

4.1 CONSIDERACIONES DE DISEÑO (LQR)

Para la implementación de un control LQR se deben tomar en cuenta tres consideraciones:

- El modelo matemático del sistema.
- La medición de los estados del sistema.
- La matriz de ganancias de retroalimentación óptima relacionada con la función de costo.

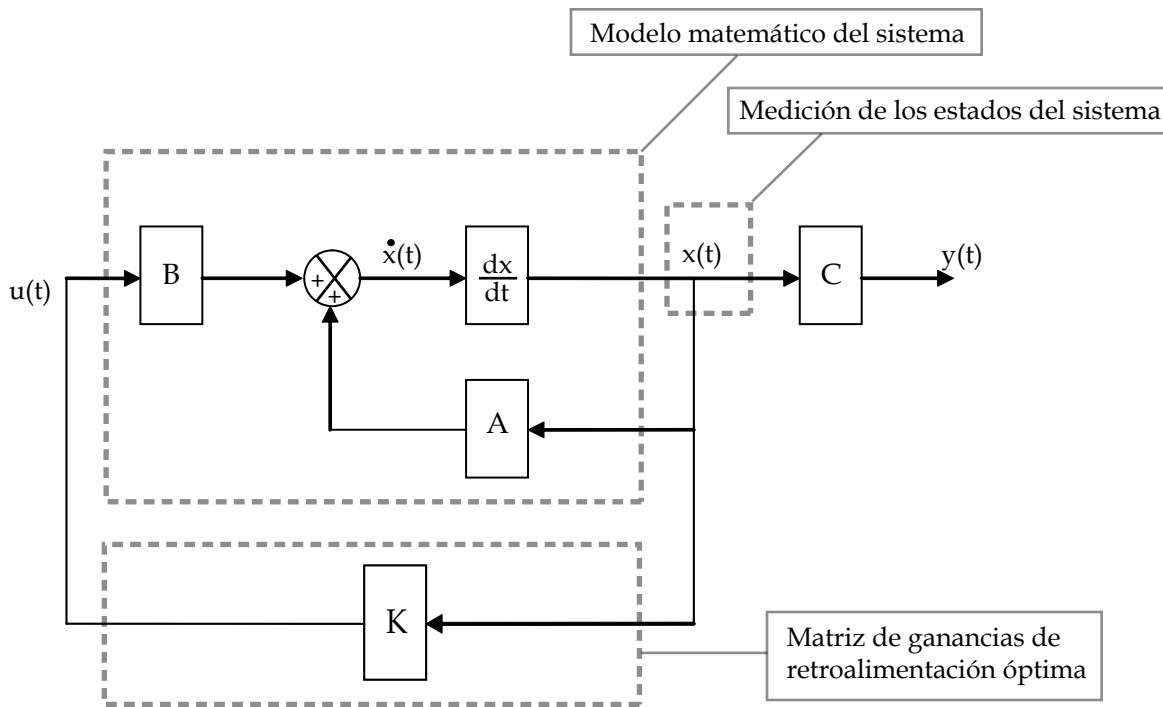


Figura 4.1

4.1.1 El modelo matemático y su análisis

El modelo matemático en variables de estado del péndulo invertido con carro:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) \\ \dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3495 & 2.6789 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.8737 & 31.1473 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7475 \\ 0 \\ 4.3687 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.1)$$

es la primera consideración de diseño, y con el cual analizaremos la estabilidad y la controlabilidad del sistema.

La estabilidad del sistema se determina mediante las raíces del polinomio característico de A:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 + 0.3495 \lambda^3 - 31.1473 \lambda^2 - 8.5454 \lambda = 0 \quad (4.2)$$

las cuales son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 5.5453 \\ \lambda_3 &= -5.6206 \\ \lambda_4 &= -0.2742 \end{aligned}$$

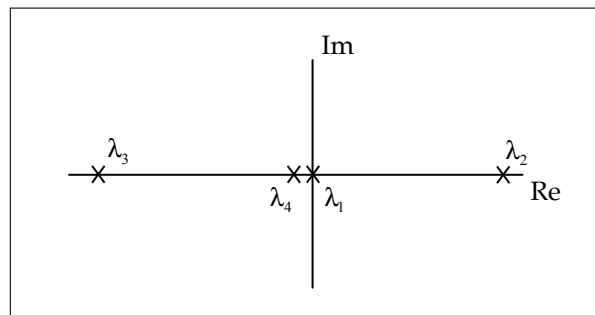


figura 4.2 Raíces del polinomio

Una de las raíces del sistema se encuentra en el semiplano positivo (λ_2), por lo cual, el sistema linealizado en torno al punto de equilibrio superior es inestable. El primer paso para estabilizar al sistema en lazo cerrado en torno a este punto es determinar la controlabilidad del sistema, lo cual se logra mediante el análisis de la matriz de controlabilidad:

$$C_{ctr} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1.7475 & -0.6108 & 11.9168 \\ 1.7475 & -0.6108 & 11.9168 & -8.255 \\ 0 & 4.3687 & -1.5268 & 136.6068 \\ 4.3687 & -1.5268 & 136.6068 & -57.9671 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

La matriz es de rango completo ($\rho(C_{ctr}) = 4$), y por lo tanto el sistema es controlable y estabilizable en torno al punto de equilibrio inestable.

4.1.2 Medición de los estados del sistema

La medición de las variables del sistema (posición del carro y posición angular), se realiza mediante el módulo de adquisición de datos analizado en la sección 3.2. Las velocidades, tanto de la posición del carro como del péndulo, se obtienen con filtros derivativos. Todos los estados son medibles.

4.1.3 Matriz de ganancias de retroalimentación óptima

Las siguientes simulaciones fueron pruebas realizadas previamente en simulink para probar los valores de la matriz de retroalimentación, cuyo esquema, mostrado en la Fig. 4.3, muestra al sistema sin una ley de control de realimentación de estados.

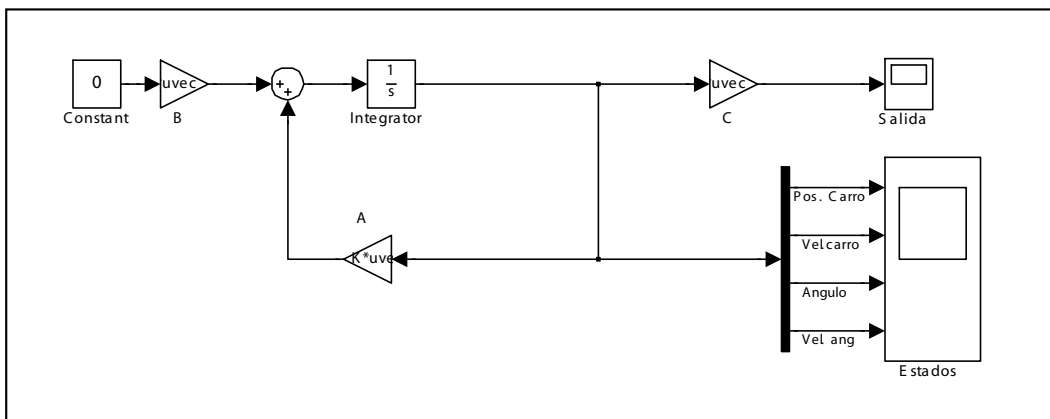


figura 4.3 Simulación del sistema sin esquema de control

Con un análisis previo se encontraron las raíces del sistema y se comprueba que es inestable, las gráficas obtenidas de la simulación (figura 4.4) muestran que todos los estados divergen del origen lo que indica que el sistema se desestabiliza rápida y fácilmente sin la ayuda de alguna ley de control.

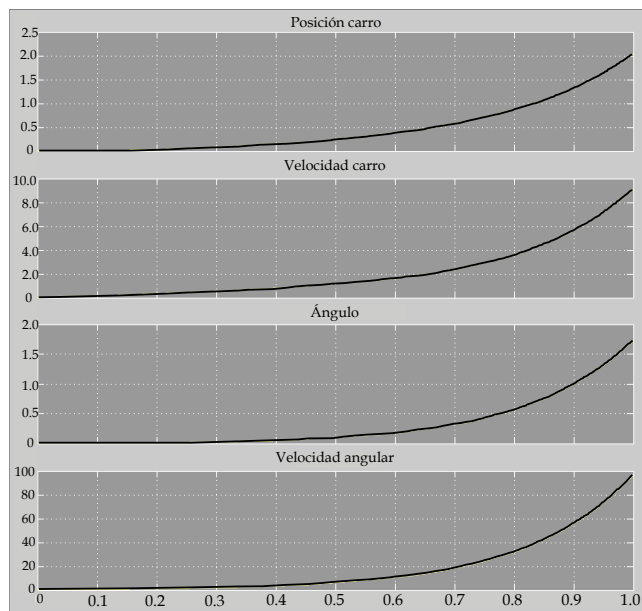


figura 4.4 Graficas de la simulación obtenida en MatLab

El siguiente esquema es un controlador por realimentación de estados LQR implementado al sistema.

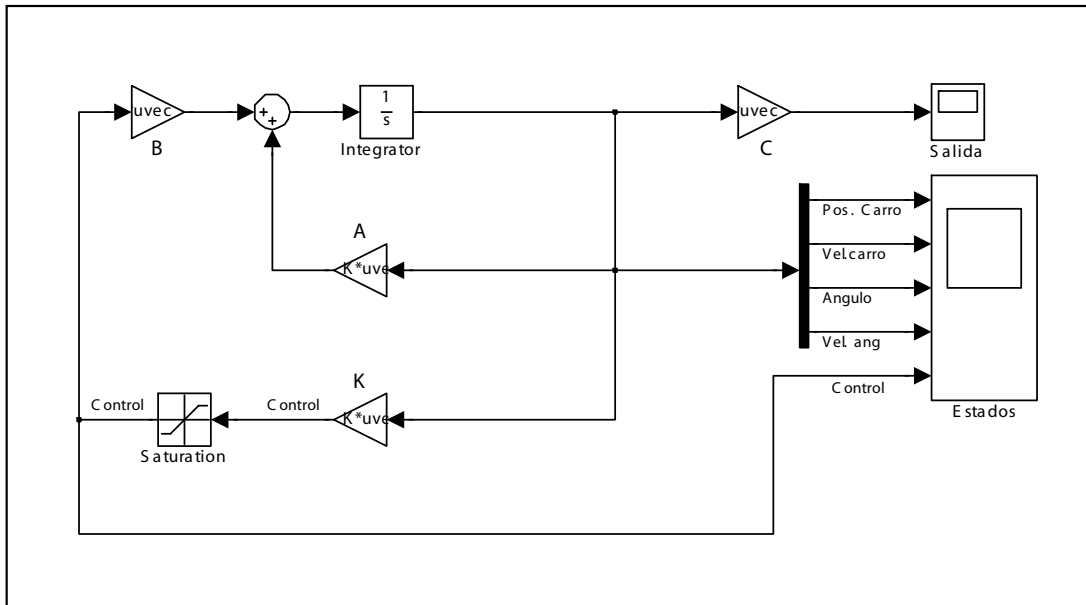


figura 4.5 Simulación del sistema con un control LQR

La ecuación de optimización, que minimiza el error es:

$$J = \int_0^{\infty} [x^*(t) Q x(t) + u^*(t) R u(t)] dt \quad (4.4)$$

Al cerrar el lazo de control $u = -k x$, el sistema que se obtiene es:

$$\dot{x} = (A - B k)x + B. \quad (4.5)$$

Las matrices Q y R propuestas son:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6) \quad \text{y} \quad R = [1] \quad (4.7)$$

Como se comento en el capítulo 2, la elección de las matrices Q y R son arbitrarias, depende de las necesidades de control. Se debe considerar que se busca minimizar el error sin exceder los límites de energía.

Estas matrices fueron elegidas para observar como punto de partida la dinámica del sistema, dependiendo de la respuesta del sistema, se modifican las matrices en diversos experimentos y diseños.

Analizaremos si estas matrices logran estabilizar al sistema. Los valores de la matriz k en MatLab

$$k = [-1 \quad -2.1678 \quad 20.9793 \quad 4.041]$$

Sustituyendo la matriz k en la ecuación (4.5) el sistema realimentado que se obtiene es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.7475 & 3.4387 & -33.9821 & -7.0616 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4.3687 & 8.5968 & -60.5052 & -17.6539 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7475 \\ 0 \\ 4.3687 \end{bmatrix} u(t)' \quad (4.8)$$

el polinomio característico del sistema realimentado es

$$\det(\lambda I - (A - B k)) = \lambda^4 + 14.2152\lambda^3 + 58.7577\lambda^2 + 84.0764\lambda + 42.7261 = 0, \quad (4.9)$$

y las raíces del polinomio (4.9) son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -8.2555 \\ \lambda_2 &= -3.8057 \\ \lambda_3 &= -1.077 + 0.4472 i \\ \lambda_4 &= -1.077 - 0.4472 i \end{aligned}$$

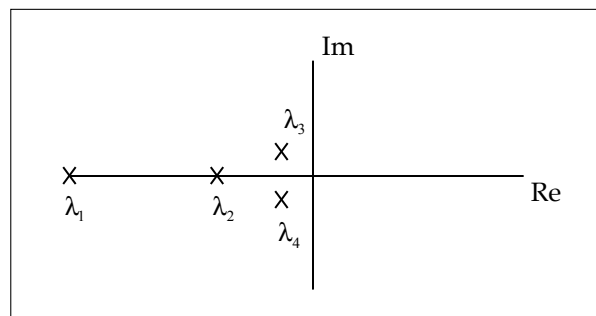


figura 4.6 Raíces del polinomio característico del sistema realimentado

Con lo que se comprueba que el diseño de control óptimo resulta en un control estabilizante. En la figura 4.7 se muestra el resultado de la simulación obtenida, considerando que las condiciones iniciales son las mismas que la simulación anterior. Se observa que todos los estados convergen como resultado de la ley de control aplicada. En el siguiente capítulo se mostraran los resultados de la implementación del control LQR en el sistema físico.

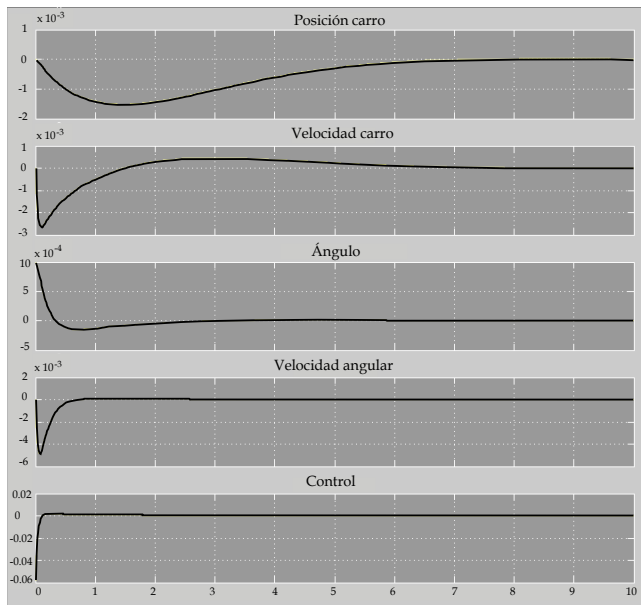


figura 4.7 Gráfica de la simulación

En la simulación, se puede observar que tarda aproximadamente 8 segundos en estabilizar todos los estados, y la fuerza que debe producir el motor para estabilizarlos no es muy grande. En los experimentos observaremos si estos valores de k estabilizan al sistema.

4.2 CONSIDERACIONES DE DISEÑO DEL CONTROL DIFUSO

Como se mencionó en el Capítulo 1, el control difuso puede ser diseñado sin necesidad del modelo matemático, sino únicamente de la experiencia del usuario con el sistema. Su principal característica es la de emular el conocimiento de un experto, con base en reglas que definen las leyes de control.

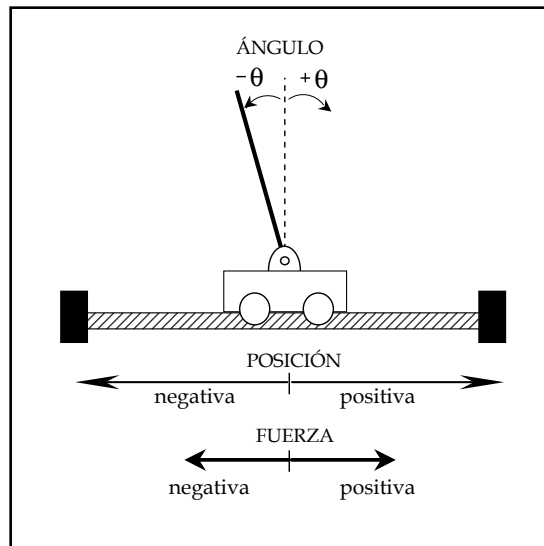


Figura 4.8 Sistema péndulo invertido

Las principales consideraciones de diseño son:

- La *fuzzificación* de las variables (Conjuntos difusos de entrada).
- Las reglas de conocimiento.
- La desdifusión o *defuzzificación* de salida (Conjuntos difusos de salida).

4.2.1 Conjuntos difusos para la *fuzzificación*

Las funciones de membresía son las encargadas de la conversión de las variables del sistema en valores difusos que entran en el intervalo $[0, 1]$ y evalúan la pertenencia de un elemento de un universo a un determinado conjunto difuso. Cada variable puede tener diferentes funciones de membresía. Sin embargo, se debe tener en cuenta que entre mayor sea el número de funciones, aumenta el número de reglas, lo cual a su vez crea un control más fino pero más pesado computacionalmente.

Las variables de entrada al control difuso se eligen como la velocidad del carro, la posición y velocidad angular. El objetivo de diseño es estabilizar al sistema en torno al punto de equilibrio inestable, ignorando por el momento a la posición del carro.

Un aspecto importante es elegir el tipo de funciones de membresía para realizar la conversión, ya que puede ser una función triangular, trapezoidal, gaussiana, etc. En este caso se elegirán funciones gaussianas, lo que nos provee de curvas mas suaves, lo que repercute en una salida de control sin discontinuidades o cambios bruscos

Los conjuntos difusos elegidos para el presente diseño se muestran en las figuras 4.9, 4.10 y 4.11.

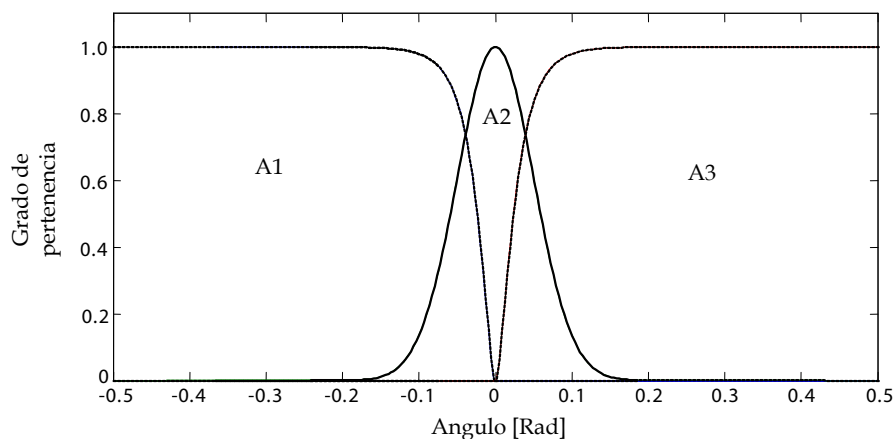


figura 4.9 Conjuntos difusos para la desviación del ángulo

- A1: ángulos de desviación negativos del péndulo invertido. —————
- A2: ángulos de desviación cercanos al ángulo cero. —————
- A3: ángulos de desviación positivos del péndulo invertido. —————

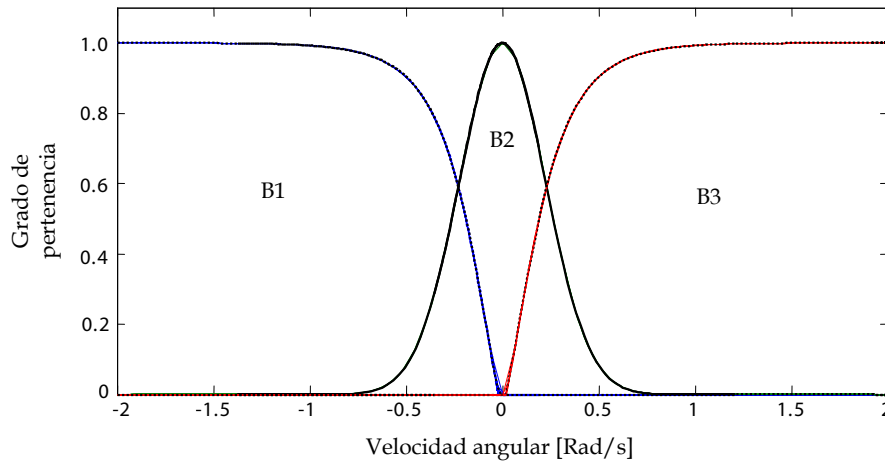


figura 4.10 Conjuntos difusos para la velocidad angular

- B1: velocidad angular negativa. —————
- B2: velocidad angular cercana a cero. —————
- B3: velocidad angular positiva. —————

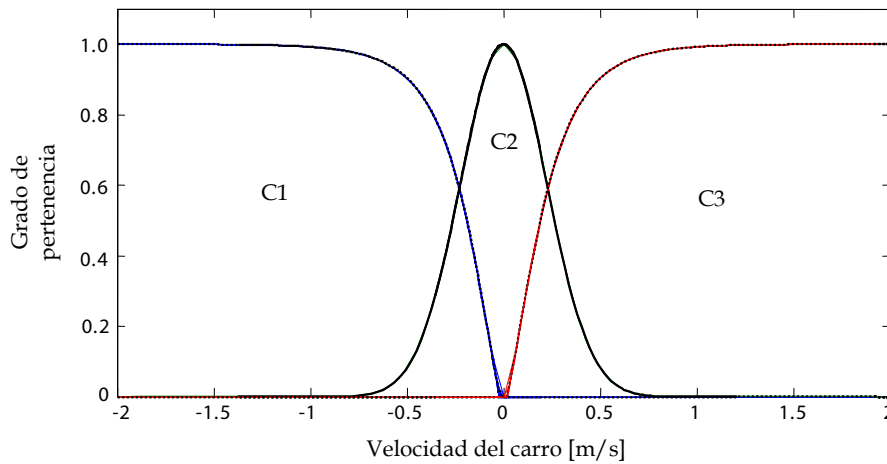


figura 4.11 Conjuntos difusos para la velocidad del carro

- C1: velocidad negativa del carro. —————
- C2: velocidad del carro cercana a cero. —————
- C3: velocidad positiva del carro. —————

Esta es la primera etapa del control, la difusión de las variables del sistema, posteriormente cada uno de estos valores (A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2 y C3) pasara a la etapa de la base del conocimiento: las reglas.

Las funciones matemáticas que definen a los conjuntos difusos son:

$$A_1(x) = \left[1 - \left(\frac{e^{40x} - e^{-40x} + 2.2}{e^{40x} + e^{-40x}} \right) \right] * 0.5 \quad (4.10)$$

$$A_2(x) = e^{-\frac{x^2}{0.041}} \quad (4.11)$$

$$A_3(x) = \left[1 + \left(\frac{e^{40x} - e^{-40x} - 2.2}{e^{40x} + e^{-40x}} \right) \right] * 0.5 \quad (4.12)$$

Donde "x" es el ángulo de desviación del péndulo respecto al punto de equilibrio inestable

$$B_1(y) = \left[1 - \left(\frac{e^{5y} - e^{-5y} + 2.1}{e^{5y} + e^{-5y}} \right) \right] * 0.5 \quad (4.13)$$

$$B_2(y) = e^{-\frac{y^2}{0.1}} \quad (4.14)$$

$$B_3(y) = \left[1 + \left(\frac{e^{5y} - e^{-5y} - 2.1}{e^{5y} + e^{-5y}} \right) \right] * 0.5 \quad (4.15)$$

Donde "y" es la velocidad angular del péndulo invertido.

$$C_1(z) = \left[1 - \left(\frac{e^{5z} - e^{-5z} + 2.1}{e^{5z} + e^{-5z}} \right) \right] * 0.5 \quad (4.16)$$

$$C_2(z) = e^{-\frac{z^2}{0.1}} \quad (4.17)$$

$$C_3(z) = \left[1 + \left(\frac{e^{5z} - e^{-5z} - 2.1}{e^{5z} + e^{-5z}} \right) \right] * 0.5 \quad (4.18)$$

Donde "z" es la velocidad del carro.

Para cada variable, fueron diseñados tres conjuntos difusos. Los conjuntos laterales son funciones sigmoideas y los conjuntos centrales, son gaussianas.

Los conjuntos difusos del ángulo de desviación, la velocidad angular y la velocidad del carro, están diseñados tomando en cuenta las magnitudes máximas medidas en experimentos previos. El conjunto central A₂ es activado en el intervalo de -5° a 5° aproximadamente, por lo tanto, si la desviación angular supera estos límites, alguno de los conjuntos A₁ o A₃ será activado, lo que provoca que el motor produzca un mayor torque para estabilizar al péndulo, llegando hasta el torque máximo de ser necesario.

Cabe hacer notar, que los conjuntos A₁-A₃, B₁-B₃ y C₁-C₃ no se traslapan, lo cual evita que algunas reglas se activen y modifiquen el voltaje de salida de una manera errónea.

4.2.2 Reglas de conocimiento

La base del conocimiento presenta todas las posibilidades que pueden surgir como resultado de las interacciones de las variables del sistema. Una forma de representar las reglas “Si... entonces...” se observa a continuación:

R1: Si el ángulo es A1 y la velocidad angular es B1 y la velocidad del carro es C1 entonces el voltaje es D11.

La siguiente tabla, muestra las 27 reglas de una forma compacta:

Regla	Si			Entonces
1	A1	B1	C1	D11
2	A1	B1	C2	D10
3	A1	B1	C3	D10
4	A1	B2	C1	D11
5	A1	B2	C2	D9
6	A1	B2	C3	D9
7	A1	B3	C1	D8
8	A1	B3	C2	D9
9	A1	B3	C3	D8
10	A2	B1	C1	D8
11	A2	B1	C2	D7
12	A2	B1	C3	D7
13	A2	B2	C1	D6
14	A2	B2	C2	D6
15	A2	B2	C3	D6
16	A2	B3	C1	D5
17	A2	B3	C2	D5
18	A2	B3	C3	D4
19	A3	B1	C1	D4
20	A3	B1	C2	D3
21	A3	B1	C3	D4
22	A3	B2	C1	D3
23	A3	B2	C2	D3
24	A3	B2	C3	D1
25	A3	B3	C1	D2
26	A3	B3	C2	D2
27	A3	B3	C3	D1

Previamente se conoce la relación entre el voltaje y la fuerza necesaria para mover al carro y estabilizar al péndulo, los conjuntos D_i son conjuntos tipo *singleton*, estos conjuntos se muestran en la figura 4.12.

Para encontrar la difusión de cada regla se utiliza la norma t producto algebraico, por ejemplo:

$$R_{22} = A3 * B2 * C1 \quad (4.19)$$

Esto se realiza para las 27 reglas, este proceso constituye el segundo paso de nuestro control, las siguientes etapas corresponden a la activación y la desdifusión.

4.2.3 Conjuntos difusos para la desdifusión (*defuzzificación*)

Los conjuntos difusos de salida son definidos como se indica en la figura 4.12. La ventaja de utilizar los *singletons* es la facilidad para encontrar la desdifusión, ya que con métodos computacionales la acumulación y la desdifusión de conjuntos se vuelve más compleja.

Singleton	voltaje
D1	-1.5
D2	-0.23
D3	-0.12
D4	0.1
D5	0.38
D6	2.5
D7	4.62
D8	4.9
D9	5.12
D10	5.23
D11	6.5

Valor de los conjuntos *singleton*

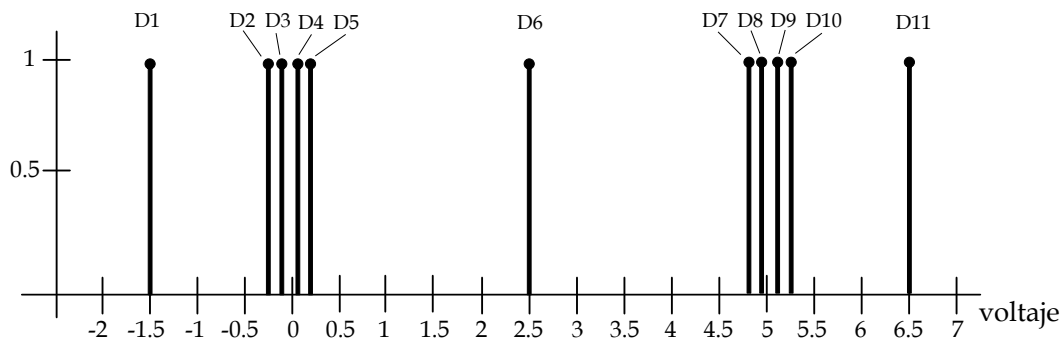


Figura 4.12 Conjuntos singleton

El diseño de los conjuntos singleton es simétrico respecto a D_6 , es decir, respecto al voltaje de salida con el cual no tiene movimiento el motor, con esta simetría, se tiene un control que respondera de forma equilibrada en los dos sentidos de movimiento del carro.

Se pueden utilizar 27 conjuntos singletons, en este diseño solo se eligen 11, lo cual facilita la sintonización del control, aunque existe pérdida de sensibilidad. Existen dos conjuntos singletons (D_1 y D_{11}) que se encuentran muy retirados del conjunto D_6 , los cuales tienen una mayor activación cuando los estados presentan una gran desviación al punto de equilibrio inestable.

Cada conjunto singleton será activado según el peso de cada regla con la norma t producto algebraico, por lo tanto el conjunto singleton será escalado según lo indiquen las reglas de conocimiento, un conjunto singleton puede ser utilizado por mas de una regla como es el caso de este control.

Para finalizar, la desdifusión se realizara encontrando el promedio ponderado de los 27 conjuntos con la siguiente ecuación:

$$y_f = \frac{\sum_{i=1}^{27} R_i(\theta, \dot{\theta}, v) * D_i}{\sum_{i=1}^{27} R_i(\theta, \dot{\theta}, v)} \quad (4.20)$$

Donde

y_f es el voltaje de control al motor.

$R_i(\theta, \dot{\theta}, v)$ es el peso de la regla que depende de el ángulo, la posición angular y la velocidad del carro.

D_i es el valor en el que se encuentra el conjunto singleton en el eje del voltaje de salida.

El resultado de la desdifusión y_f es obtenido directamente de la tarjeta de adquisición de datos como un voltaje entre 0 y 5 volts. La modificación de la posición de los conjuntos singleton en el eje del voltaje nos dan diferentes resultados en la salida de control. En el siguiente capítulo veremos los diferentes experimentos realizados y los resultados obtenidos para esta técnica y para el control LQR.

