UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA-CONTROL

EVALUACIÓN EXPERIMENTAL DE ALGORITMOS DE CONTROL DE TRACCIÓN Y FRENADO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:

JOSÉ MANUEL BENITEZ QUINTERO

TUTOR:

DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA

MÉXICO, D.F. 2014

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Marco A. Arteaga Pérez
Secretario:	Tang Xu Yu
Vocal:	Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria
1^{er}. Suplente:	Dr. Jesús Manuel Dorador González
2^{do}. Suplente:	Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

La tesis se realizó en:

Instituto de Ingeniería-UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

A mis padres:

José Manuel Benitez y Rosa Quintero

por ser mi inspiración y modelo a seguir en la vida

A mis hermanos:

Daniel y Fabiola

Por tantos momentos en familia

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

A CONACYT por el apoyo económico brindado estos dos años.

A los profesores del Colegio de Control Automático de la UNAM.

A mi asesor de tesis que me apoyó no solo en los aspectos académicos si no también en el ámbito personal.

A mis padres y hermanos.

A mis amigos y familiares.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Resumen

El modelado de la fricción llanta-pavimento se ha realizado tradicionalmente con modelos estáticos. La problemática con estos modelos es que son incapaces de describir algunos fenómenos que se presentan en la interacción de la fricción llanta-pavimento, como son fenómenos histeréticos o pequeños deslizamientos, cuando se les aplica cierta fuerza. Debido a esto, surgió la necesidad de plantear el uso de modelos dinámicos de fricción con la finalidad de mejorar el comportamiento y eliminar las dificultades de utilizar modelos estáticos tradicionales.
Un modelo dinámico de fricción utilizado ampliamente es el modelo de LuGre, que es capaz de capturar la transición observada de la fuerza de fricción ya sea en aceleración o frenado. El modelo supone que el contacto es hecho por cerdas elásticas que al aplicar una fuerza tangencial se deforman como resortes, hasta que produce deslizamiento. El modelo también reproduce el fenómeno de "Stribeck". En este trabajo se aplica el modelo de LuGre al contacto llanta-pavimento y se investiga su comportamtiento en un banco de pruebas. Se realiza trabajo experimental en el banco de pruebas con algunas variantes en la adquisición de parámetros fuera de línea y en los parámetros del modelo de LuGre obtenidos línea, en relación al trabajo previo. Se implementan algoritmos de mínimos cuadrados para una obtención más confiable de los parámetros y de la misma manera se implementa un algoritmo de mínimos cuadrados recursivos para los parámetros que se estiman en línea, logrando una convergencia satisfactoria. Se implementa un controlador de tracción para el banco de pruebas con los nuevos parámetros y se presenta el seguimiento de una senoidal de velocidad.

Abstract

Modeling of road-tire friction has been typically described by static models. These models do not explain many important phenomena present in this interaction, such as hysteretic, variations on the breakaway force and small displacement. For this reason, there is an

increasing interest in friction dynamic models to get a better represntation of the phenomena.
A widely used dynamic friction model is the LuGre model, that is based on the contact of elastic bristles. When a tangential force is applied, the bristles deflect like springs, unitl slip occurs. This model also reproduces the “Stribeck” effect.

In this work the LuGre friction model is applied to tire-road friction and and this behavior is investigated in a specialized test bed. Experiments in the the test bench are performed, with some variations in the acquisition of parameters with respect to the previous work. Least squares algorithms for a more reliable identification are also implemented. In the same way an online recursive least squares algorithm is used that achieves satisfactory convergence for some critical parameters. A traction controller with the new parameters is implemented and tracking results of a sinusoidal velocity signal are presented.

Capítulo 1

Introducción

En la estabilidad vehicular, dos de los principales problemás son el control de tracción y frenado. Estos procesos se llevan a cabo mediante la interacción de la fricción entre la llanta y la superficie de contacto, el pavimento regularmente. No tener un modelo confiable, ni sensores que puedan medir las variables que actúan sobre estos fenómenos, pueden producir un desempeño deficiente, en lo particular en frenado.

Las consecuencias de un frenado deficiente en una situación de riesgo se pueden traducir en innumerables pérdidas tanto humanas como económicas. Las posibilidades aumentan debido al incremento notable en el número de automóviles circulando en avenidas, autopistas carreteras, etc.

Desde que se comenzaron a considerar los problemás de tracción y frenado como importantes en el desempeño de un automóvil, los investigadores comenzaron a atacar el problema con modelos matemáticos de fricción pseudo-estáticos. El inconveniente de este tipo de modelos, sin embargo, es que no consideran fenómenos importantes como pequeños deslizamientos entre la llanta y pavimento, resistencia a la rodadura e histéresis.

En la actualidad existen modelos de fricción dinámicos (Alvarez-Icaza y Olmos 2005) que describen estos fenómenos. El de un modelo dinámico de fricción en el contacto llanta-pavimento, ofrece la ventaja de mayor precisión y promete obtener mejores resultados.

En este trabajo se propone hacer control de tracción y frenado a través de modelos dinámicos de fricción. Además se retoma la idea de la estimación paramétrica tanto del banco de pruebas como del modelo dinámico de fricción de LuGre, con la intención de implementar el algoritmo de mínimos cuadrados y mínimos cuadrados recursivos, respectivamente, que garantizan una mejor estimación que métodos utilizados anteriormente en trabajos previos.

Se ha escogido un algoritmo existente en la literatura para el control de tracción para llevarlo a pruebas experimentales. Los experimentos se realizaron en un banco de pruebas, que consta de un rodillo que reemplaza el pavimento, y una llanta que es impulsada por un motor eléctrico y que reemplaza al motor de combustión interna convencional.

1.1. Antecedentes

Se presenta una breve revisión de los trabajos más relevantes en el control de tracción o frenado que emplean el modelo de LuGre.

En (Alvarez-Icaza 2000) se introduce el modelo de fricción llanta-pavimento usado aquí para el diseño del controlador del frenado de emergencia. La suposición clásica en trabajos anteriores es que la velocidad longitudinal del vehículo es conocida. Esta suposición es reemplazada con la suposición de que la aceleración longitudinal es conocida, la cual más fácil de medir en la práctica.

(Yi y Canudas 2000) expone un modelo dinámico de fricción llanta-pavimento, el cual se utiliza para diseñar un control estabilizante para frenado de emergencia, asumiendo que todas las variables son medibles.

En (Claeys y Canudas 2001) se define un juego de coordenadas para los deslizamientos longitudinales y transversales. Se presenta un modelo de fricción basado en el modelo de LuGre y la dinámica de la llanta y se analizan las propiedades estacionarias del modelo. Se presenta también un modelo compacto de LuGre que es equivalente al modelo distribuido pero donde es más fácil estimar los parámetros. Los parámetros de calibración son comparados con la “fórmula mágica”

(Mohammad 2012).

En (Alvarez-Icaza y Olmos 2001) se presenta el diseño de un controlador para frenado de emergencia que estima en línea la velocidad longitudinal del vehículo y las características de la fricción llanta-pavimento. Conocer las características de fricción llanta-pavimento permite al vehículo estimar distancias de frenado seguras y transmitir la información del estado del camino. El controlador puede modificarse dependiendo de las condiciones del camino según como sea necesario.

En (Olmos y Alvarez-Icaza 2003) se expone un modelo simplificado de la dinámica del vehículo y describe un modelo dinámico de fricción de primer orden para el frenado de emergencia. Detalla la interfaz llanta-pavimento, el análisis del control óptimo y, por último, presenta una alternativa de diseño del controlador utilizando técnicas de Lyapunov.

En (Alvarez-Icaza y Olmos 2005) se propone extender el trabajo de (Canudas y Horowitz 1999), donde los autores asumen que solamente un parámetro en el modelo dinámico de LuGre es desconocido, para diseñar un controlador-observador para el control del frenado de emergencia. El esquema propuesto en (Canudas y Horowitz 1999) muestra una lenta convergencia de la estimación de la velocidad del vehículo y la velocidad relativa, debida a la estructura del sistema vehículo-llanta. Se asume que los parámetros del modelo llanta-pavimento son desconocidos. Para superar el problema de la convergencia lenta se diseña una ley de adaptación que usa mediciones de la velocidad y aceleración angular del vehículo. Además, el esquema de adaptación propuesto logra la estimación del coeficiente máximo de fricción, bajo la correcta elección de los parámetros de adaptación, ganancias y condiciones iniciales de los parámetros estimados. Se presenta además un control para maniobras de frenado de emergencia que combina un algoritmo adaptable con un observador de la velocidad.

En (Aguilar 2008b) se expone el análisis, diseño y construcción de un banco de pruebas basado en un cuarto de vehículo a escala. Posteriormente se presenta un modelo para el diseño del sistema de un cuarto de vehículo y el modelo de fricción de LuGre, respectivamente. También se muestra una metodología para determinar la distribución de fuerzas en el área de contacto llanta-pavimento usando galgas extensométricas y el procedimiento para la adquisición de datos.

En (Aguilar 2011) se presenta el modelo dinámico de fricción utilizado, en conjunto con el modelo matemático de un cuarto de vehículo y modelo dinámico del actuador que se utilizará para controlar el banco experimental. Finalmente se presenta el diseño de una ley de control para tracción y frenado.

1.2. Objetivo

Evaluar experimentalmente en un banco de pruebas construido específicamente para este fin algoritmos de control y estimación para tracción y frenado basados en modelos dinámicos de fricción llanta-pavimento.

1.3. Alcances

Las pruebas se realizarán en el banco de pruebas del Instituto de Ingeniería de la UNAM, que consiste en una llanta acoplada a un motor eléctrico y un rodillo hecho de polietileno de alta densidad.

1.4. Organización del trabajo

En este primer capítulo se presenta una introducción sobre el tema, se hace una revisión de los trabajos realizados con anterioridad y se definen los objetivos. En el segundo capítulo se muestra una revisión a el modelo dinámico de LuGre y se hace una comparación con los modelos pseudo-estáticos y la "fórmula mágica", y en el tercer capítulo se detallan más a fondo los artículos elegidos de la literatura.

En el cuarto capítulo se explica la construcción del banco de pruebas, así como la conexión, configuración e instalación de los requerimientos de MATLAB para poder utilizar la tarjeta de adquisición de datos Humosoft. En el quinto capítulo se discuten los resultados de las pruebas experimentales. En el sexto capítulo se presentan las conclusiones generales del trabajo.

Capítulo 2

Modelo Dinámico de Fricción de LuGre

En este capítulo se presenta la descripción del modelo dinámico de fricción de LuGre empleado para describir la fricción llanta-pavimento, y las condiciones bajo las cuales el modelo es válido. Este modelo, además, se caracteriza por su simplicidad y facilidad para el análisis matemático (Alvarez-Icaza y Olmos 2005).

2.1. Introducción

Desde hace varios años, el problema del modelado y predicción de la fricción de la llanta ha sido un área de intensa investigación entre la comunidad automotriz. Conociendo las características de la fricción se pueden desarrollar sistemás de control tales como el ABS (Anti-Lock Braking System), TCP (Traction Control Program), ESP (Electronic Estability Program), etc., los cuales han mejorado la maniobrabilidad y seguridad de los vehículos modernos de pasajeros.

Recientemente, una nueva clase de modelos de fricción de la llanta han sido desarrollados, para capturar los comportamientos dinámicos de las fuerzas de fricción que son los "modelos de fricción dinámica."

En (Bliman y Sorine 1993) se introducen los modelos dinámicos que son usados para manejar de manera explícita el fenómeno de histéresis observado en la práctica.

Estos resultados fueron extendidos más tarde para combinar el movimiento longitudinal lateral en (Claeys y Canudas 2001) y (Deur y Hrovat 2001). En (Velenis y Canudas 2002) el modelo de fricción dinámica de LuGre que combina el movimiento longitudinal/lateral es redefinido para darle un enfoque más cercano, que toma en cuenta algunos aspectos ignorados en (Claeys y Canudas 2001) y (Deur y Hrovat 2001), como son fuerzas acopladas en direcciones longitudinales y laterales, anisotropía de la llanta y el deslizamiento del rin. Se agrega una justificación matemática sólida para la introducción de los modelos dinámicos de fricción basada en propiedades físicas fundamentales de fuerzas de fricción tales como la disipatividad y el rango máximo de disipación como se vió en (Sorine 1998).

La mayor ventaja del modelo dinámico de fricción de la llanta de LuGre, que se muestra al comparar uno a uno con los modelos pseudo-estáticos en (Sorine y Szymanski 2000) y (Szymanski 1999), ocurre en su forma agrupada. El término *forma agrupada* se refiere a la descripción del modelo por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ambos modelos, en (Sorine y Szymanski 2000) y (Szymanski 1999), así como en el modelo de fricción de la llanta de LuGre, fueron inicialmente derivados como modelos descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. El modelo agrupado en (Sorine y Szymanski 2000) y (Szymanski 1999) fue derivado haciendo una aproximación de un elemento finito, que resulta en un sistema con gran número de estados.

En (Claeys y Canudas 2001), (Deur y Hrovat 2001) y (Velenis y Canudas 2002) se derivó el modelo agrupado de LuGre, introduciendo los principales estados a lo largo de la longitud del parche del contacto. Este comportamiento puede ser descrito por un sistema de 3 ecuaciones ordinarias diferenciales. Estas ecuaciones dan las fuerzas y el momento alíneante en el parche de contacto de la llanta. La forma agrupada hace que el modelo sea más adecuado para el desarrollo y la implementación, estimación en línea y algoritmos de control (Canudas y Shiriaev 2003) y (Yamazaki S. y T. 1999). Un objetivo principal del modelo agrupado en (Claeys y Canudas 2001), (Deur y Hrovat 2001) y (Velenis y Canudas 2002) fue también capturar el comportamiento en estado estable del modelo distribuido exacto. Sin embargo, el modelo de LuGre no ofrece ninguna precisión en las dinámicas transitorias.

2.2. Modelo de LuGre Para la Fricción Llanta-Pavimento

El modelo longitudinal de LuGre, inicialmente fue introducido en (Szymanski 1999) y después fue corregido y puesto a prueba en (Deur 2001) y (Canudas y Gissinger 2003). Está basado en un modelo de fricción dinámico viscoelastoplástico, de un punto de contacto introducido en (Deur 2001).

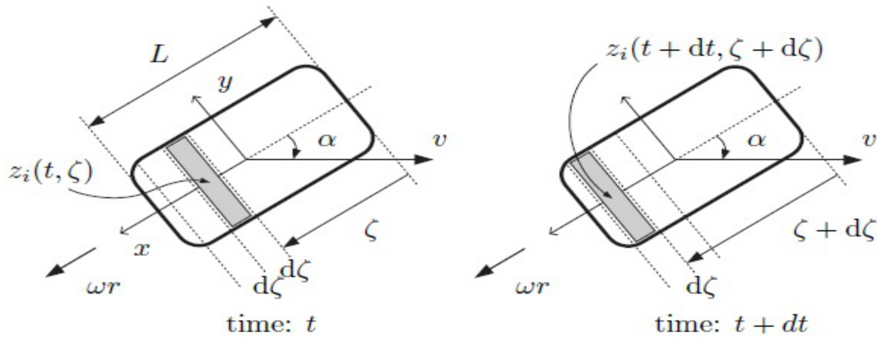

Figura 2.1: Esquema que muestra las velocidades en el parche de contacto, derivando en el modelo distribuido de la llanta.

El modelo dinámico de fricción de LuGre para movimientos laterales-longitudinales fue derivado en (Velenis y Canudas 2002) a partir de un punto de contacto en el modelo de fricción de LuGre para la traslación bi-dimensional de un cuerpo sobre una superficie en el parche de contacto de la superficie de una llanta. Tomando en cuenta suposiciones internas de la llanta, como elementos indeformables entre el parche de contacto y la rotación de la llanta, el parche de contacto es dividido en tiras infinitesimales $d\zeta$ a lo largo de la longitud del parche de contacto (ver figura 2.1). El punto de contacto de la llanta fue modelado con el estudio de cada elemento de las tiras infinitesimales, lo que resultó en un modelo descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, con el tiempo t y la posición longitudinal en el parche ζ como independiente de las variables.
El modelo distribuido queda de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_i(t,\zeta)}{dt} &= \frac{\partial z_i(t,\zeta)}{\partial t} + |w_r|\frac{\partial z_i(t,\zeta)}{\partial d\zeta} \\
&= v_{ri}(t) - C_{01}(v_r)z_i(t,\zeta), \qquad\qquad i=(x,y) && (2.1)\\
\mu_i(t,\zeta) &= -\sigma_{0i}z_i(t,\zeta) - \sigma_{i1}\frac{\partial z_i(t,\zeta)}{\partial t} - \sigma_2 v_{ri}(t), \qquad i=x,y && (2.2)\\
F_i(t) &= \int_0^L \mu_i(t,\zeta)f_n\zeta d\zeta \qquad\qquad i=x,y && (2.3)\\
M_z(t) &= -\int_0^L \mu_y(t,\zeta)fn(\zeta)\left(\frac{L}{2}-\zeta\right)d\zeta && (2.4)
\end{aligned}
$$

con $z_i(t,\zeta)$, $i=x,y$, donde se describe la fricción con auxilio de estados internos $z_i(t,\zeta)$ (Velenis y Canudas 2002) los cuales corresponden a las deformaciones elásticas del elemento de la llanta en un tiempo t y posición ζ en el parche de contacto, longitudinalmente en x y lateralmente en y. Las salidas del modelo son la fuerza de fricción longitudinal $F_x(t)$, la fuerza de fricción lateral $F_y(t)$ en el centro del parche y el momento alíneante $M_z(t)$. Las condiciones de frontera para las ecuaciones (2.1) son $z_i(t,0)=0$. Esta impone como condición en la frontera del parche de contacto que las fibras de la llanta se encuentren sin deformaciones. Las constantes σ_{01}, $i=x,y$ corresponden a la rigidez de la llanta de los elementos en las direcciones de x y, mientras σ_{1i} y σ_{2i} son constantes de amortiguamiento para el coeficiente de fricción $\mu_i(t,\zeta)$. La funciones $C_{oi}(v_r)$ caracterizan el estado-estable según las características del modelo. Para una llanta con las mismás características de fricción, a lo largo de la dirección longitudinal y la lateral como se considera en (Deur y Hrovat 2001), $C_{01}(V_r)$ están dadas por

$$C_{0i}(v_r) = \frac{|v_r|\sigma_{0i}}{g(v_r)}, i=x,y \tag{2.5}$$

Donde,

$$g(v_r) = \mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-(\frac{v_r}{v_s})^\gamma} \tag{2.6}$$

En (Canudas y Tsiotras 1999) μ_k y μ_s denotan los coeficientes de fricción cinéticos y estáticos, respectivamente, v_s denota las características de la velocidad de Stribeck (Canudas de Wit C. y P 1995). El parámetro γ es usado para lograr un comportamiento deseable del estado-estacionario de la fricción de la llanta (Canudas y Gissinger 2003). La función $f_n(\zeta)$ en (2.3) denota la distribución de la carga normal a lo largo del parche de contacto. Los componentes de la velocidad relativa del parche de contacto con respecto a las direcciones v_{ri}, $i = x, y$, aparecen como entradas en el sistema de ecuaciones (2.1) y (2.4) y están dados por

$$V_{rx} = \omega_r - vcos(\alpha) \tag{2.7}$$

$$V_{ry} = -vsin(\alpha) \tag{2.8}$$

Donde ω es la velocidad angular de la llanta y r es el radio. Por v se denota la magnitud de la velocidad traslacional de la rueda y por α el ángulo de deslizamiento (véase 2.1). El vector de la velocidad relativa entre la llanta y la superficie es $v_r = [v_{rx}, v_{ry}]^T$ y $|v_r| = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}$.

En el modelo de de parámetros concentrados, la deformación promedio de las cerdas se representa con la siguiente ecuación

$$\dot{z} = v_r - \frac{\sigma_0 |v_r|}{h(v_r)} z = v_r - \sigma_0 f(v_r) z \tag{2.9}$$

$$F = \sigma_o z + \sigma_1 \dot{z} + f(v) \tag{2.10}$$

Donde v es la velocidad entre las dos superficies en contacto, z es el estado interno de la fricción, y F es la fuerza de fricción prevista. Comparado con el modelo de Dahl (Astrom y Canudas 2008), el modelo de LuGre tiene una función $g(v)$ que es dependiente de la velocidad en lugar de una constante, un amortiguamiento adicional σ_1 asociado con los desplazamientos microscópicos, y una forma general $f(v)$. El estado z, el cual es análogo al modelo de Dahl, puede ser interpretado como una deflexión promedio. El modelo de LuGre reproduce un comportamiento similar a un resorte de pequeños desplazamientos, donde el parámetro σ_0 representa la rigidez del material, σ_1 representa amortiguamientos muy pequeños, y $f(v)$ representa la fricción viscosa típica $f(v) = \sigma_2 v$. Para una velocidad constante, la fricción de estado estacionario fricción F_{ss} está dada por

$$F_{ss} = (v) g(v) sgn(v) + f(v) \tag{2.11}$$

Donde $g(v)$ captura la fricción de Coulomb y el efecto de Stribeck. Una elección razonable de $g(v)$ que da una buena aproximación del efecto de Stribeck es

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c)e^{-|\frac{v}{v_s}|^\alpha} \tag{2.12}$$

Donde f_s corresponde a la fuerza de fricción estática, f_c corresponde a la fuerza de fricción cinética, v_s es la velocidad de Stribeck, que determina que tan rápido se aproxima a $g(v)$ y σ_2 es el coeficiente viscoso relativo del amortiguamiento entre la superficie y la fuerza normal.

Capítulo 3

Algoritmos de Control Para Tracción y Frenado

3.1. Modelo dinámico de fricción para frenado de emergencia. Estimación y control

En (Alvarez-Icaza y Olmos 2005) se utiliza un esquema de control adaptable para el frenado de emergencia de vehículos que se diseña con base en el modelo dinámico de LuGre para la fricción llanta-pavimento. La velocidad angular de la llanta y la aceleración longitudinal del vehículo son usadas para obtener la rápida convergencia del observador para estimar la velocidad del vehículo y el estado interno de fricción del modelo. Los parámetros desconocidos del modelo dinámico de fricción son estimados a través de una ley de adaptación de parámetros. Un estimador de estado basado en Lyapunov y un controlador estabilizante de frenado son diseñados para lograr la máxima capacidad de frenado del vehículo.

3.1.1. Dinámica del sistema

En este apartado solo se considera la dinámica longitudinal del vehículo. Se asume que a las cuatro ruedas se les aplica la misma fuerza de frenado. Por simplicidad se asume que el vehículo no rueda sobre una pendiente, y el peso está distribuido uniformemente entre las cuatro ruedas.

Se modela un cuarto de vehículo con el modelo agrupado de LuGre (Yi y Claeys 2003)

$$\dot{z} = v_r - \frac{\sigma_0|v_r|}{h(v_r)}z = v_r - \sigma_0 f(v_r)z \tag{3.1}$$

$$J\dot{\omega} = rF_x - u_\tau \tag{3.2}$$

$$m\dot{v} = -4F_x - F_a \tag{3.3}$$

Donde z un estado interno de la fricción $v_r = v - r\omega$ es la velocidad relativa, r es el radio de la llanta, $h(v_r) = (\mu_s - \mu_c)e^{|-\frac{v_r}{v_s}|^{1/2}}$, $f(v_r) = |v_r|/h(v_r)$, μ_s es el coeficiente normalizado de fricción estática, μ_c es el coeficiente normalizado de la fricción de Coulomb, v_s es la velocidad de Stribeck, u_τ es el par de frenado/tracción, F_x es la fuerza de tracción/frenado dada por el contacto llanta-pavimento, F_a fuerza aerodinámica, m la mása del vehículo, J la inercia rotacional de la llanta, y el parámetro σ_0 es la rigidez longitudinal del neumático. Por simplicidad, se consideró que la fuerza de fricción está uniformemente distribuida en el parche de contacto.

La fuerza de frenado está dada por

$$F_x = F_n(\sigma_0 + \sigma_1\dot{z} + \sigma_2 v_r) \tag{3.4}$$

Donde σ_1 es el amortiguamiento longitudinal del neumático, σ_2 es el amortiguamiento viscoso relativo, F_n es la fuerza normal $F_n = mg/4$. De acuerdo con (Wong 1993) la fuerza aerodinámica puede ser modelada como

$$F_a = C_{av}v^2 \tag{3.5}$$

Donde C_{av} es el coeficiente de fricción aerodinámica.
Sustituyendo las ecuaciones (3.5) y (3.4) en de la ecuación (3.3) y reescribiendo esta misma se tiene

$$\dot{v} = -c\mu - dv^2 \tag{3.6}$$

Considerando que la velocidad relativa se describe como $v_r = v - r\omega$. Posteriormente derivando la ecuación respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{v}_r = \dot{v} - r\dot{\omega} \tag{3.7}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.2 y 3.3 en 3.7. Se considera a v_r como nueva variable se reescribe como

$$\dot{v}_r = -(a+c)\mu - dv^2 + eK_bP_b \tag{3.8}$$

Donde $a = r^2mg/4J$, $c = g$, $d = C_{av}/m$ y $e = r/J$, son constantes conocidas. La entrada es aproximada por $u_b = K_bP_b$, donde K_b es una ganancia total del sistema de frenado y P_b la presión controlada del cilindro maestro.

3.1.2. Diseño del observador

Se supone que la velocidad angular de la rueda y la aceleración longitudinal del vehículo son conocidas. El valor instantáneo de μ puede ser obtenido de la ecuación (3.2) ya que $\mu = F_x/F_n$. Se propone el siguiente observador para la velocidad del vehículo

$$\dot{\hat{v}} = -c\mu - d\hat{v}^2 + L\tilde{y}_2 \tag{3.9}$$

Donde $\tilde{y}_2 = \dot{v} - \dot{\hat{v}}$ con $\dot{\hat{v}} = -c\mu - d\hat{v}^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2 &= -c\mu - dv^2 - (-c\mu - d\hat{v}^2) \\ &= d(\hat{v}^2 - v^2) \\ &= -d\tilde{v}(v + \hat{v}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Donde $\tilde{v} = v - \hat{v}$ y $\dot{\hat{v}} \neq \hat{v}$.

La dinámica del error de estimación de la velocidad es

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{v}} &= \dot{v} - \dot{\hat{v}} &(3.11)\\
&= -c\mu - dv^2 - (-c\mu - dv^2 + L\tilde{y}_2)\\
&= -d\tilde{v}(v+\hat{v}) - L[-d\tilde{v}(v+\hat{v})]\\
&= -d\tilde{v}(v+\hat{v})(1-L)
\end{aligned}$$

Utilizando diferentes herramientas matemáticas se determina que el observador tiene estabilidad asintótica en $\tilde{v} = 0$. La ganancia $|L|$ determina de la rapidez con la que converge el observador al verdadero valor de v.

Se define que la función candidata de Lyapunov

$$W_1 = \frac{1}{2}\hat{v}^2 \tag{3.12}$$

Derivando con respecto al tiempo tenemos que

$$\dot{W}_1 = \tilde{v}\dot{\tilde{v}} = -d\tilde{v}^2(v+\hat{v})(1-L) \leq 0 \tag{3.13}$$

Lema: Se asume que $L < 0$, entonces $\tilde{v}(0) < 0 \rightarrow \tilde{v}(t) < 0, \forall \geq 0$ $\tilde{v}(0) > 0 \rightarrow \tilde{v}(t) > 0, \forall \geq$ Lo que implica que si $L < 0$, entonces $\tilde{v} = 0$ es asintóticamente estable (Yi y Canudas 2000).

Si la ganancia del observador $|L|$ es elegida lo suficientemente grande, la estimación de la velocidad $\tilde{v}$ converge rápidamente al verdadero valor de v. Este observador requiere mediciones de aceleración longitudinal y velocidad angular.

3.1.3. Observador de estado interno y estimador de parámetros adaptables

Sustituyendo la ecuación (3.1) en (3.4), se obtiene

$$\mu = \sigma_0 z + \sigma_1[v_r - \sigma_0 f(v_r)z] - \sigma_2 v_r = \sigma_0 z - \sigma_3 f(v_r)z + \sigma_4 v_r \tag{3.14}$$

Donde $\mu = F_x/F_n$, $\sigma_3 = \sigma_0\sigma_1$, $\sigma_4 = \sigma_1 - \sigma_2$ y $f(v_r) = |v_r|/h(v_r)$. Esta expresión es lineal en los parámetros σ_0, σ_3 y σ_4

$$\begin{bmatrix} z & -f(v_r)z & v_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = U\Theta \tag{3.15}$$

Se propone el siguiente observador para el estado interno z

$$\dot{\hat{z}} = \hat{v_r} - \hat{\sigma}_0 f(\hat{v_r})\hat{z} \tag{3.16}$$

y una ley de adaptación paramétrica tipo gradiente

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\Gamma \hat{U}^T \tilde{\mu} \tag{3.17}$$

La matriz $\Gamma = diag(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4) > 0$, es una matriz diagonal de ganancias positivas, y $\hat{U}$ es el regresor en la ecuación (3.15) que evaluado en las cantidades estimadas es

$$\hat{U} = [\hat{z} - f(\hat{v}_r)\hat{z}\hat{v}_r] \tag{3.18}$$

y $\tilde{\mu}$ se define como el error de estimación en el coeficiente de fricción

$$\tilde{\mu} = U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta} = \hat{U}\tilde{\Theta} + \tilde{U}\Theta \tag{3.19}$$

$\tilde{U} = U - \hat{U}$; $\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu}$ se define como el error de estimación del coeficiente de fricción. La dinámica de la fricción es calculada de (3.2) como

$$\mu = -\frac{J\dot{\omega} + eK_bP_b}{p} \tag{3.20}$$

con $p = mgr/4$ donde se supone que, además de la aceleración angular, la presión de frenado es medible.

Rearreglando la ecuación (3.19) se obtiene

$$\tilde{\mu} = [\sigma_0 - \sigma_3 f(\hat{v}_r)]\tilde{z} + \hat{z}\tilde{\sigma}_0 - f(\hat{v}_r)\hat{z}\tilde{\sigma}_3 + \hat{v}_r\tilde{\sigma}_4 + \sigma_4\tilde{v}_r - \sigma_3\hat{z}[f(v_r) - f(\hat{v}_r)] \tag{3.21}$$

El término $f(v_r) - f(\hat{v}_r)$ puede expresarse en una serie de Taylor truncada sobre v_r como

$$f(v_r) - f(\hat{v}_r) = \frac{df(v_r)}{dv_r}\tilde{v}_r = \frac{df(v_r)}{dv_r}\tilde{v} \tag{3.22}$$

Donde la expresión fue derivada usando el hecho de que $v_r = v - r\omega$ y $\hat{v}_r = \hat{v} - r\omega$, por consiguiente $\tilde{v}_r = v_r - \hat{v}_r = \tilde{v}$. Sustituyendo (3.22) en (3.21) se tiene

$$\dot{\tilde{z}} = [1 - \sigma_0 f'(v_r)\hat{z}]\tilde{v} - \sigma_0 f(v_r)\tilde{z} - f(\hat{v_r})\hat{z}\tilde{\sigma}_0 \tag{3.23}$$

3.1.4. Diseño del controlador

El modelo dinámico de fricción de LuGre llanta-pavimento se utiliza para estimar el máximo deslizamiento λ_m requerido en una maniobra de frenado de emergencia. Para calcular este λ_m es necesario el obtener una solución pseudo-estática equivalente para el modelo de fricción dinámico. Se asume que la velocidad v es constante y la fuerza normal está distribuida en un área rectangular del contacto de la llanta/pavimento. Se obtiene la relación entre μ y $\lambda = v_r/v$ que se observa en la figura 3.1

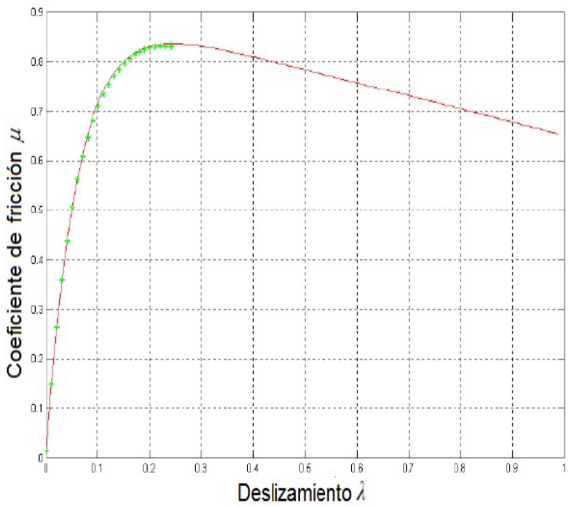

Figura 3.1: Curva que describe la relación del coeficiente de fricción y el deslizamiento

$$\mu(\lambda, v_r, \Theta) = h(v_r)\left[1 + 2\gamma\frac{h(v_r)}{\sigma_0 l|\eta|}(e^{-\frac{\sigma_0 l|\eta|}{2h(v_r)}} - 1)\right] + \sigma_2 v_r \tag{3.24}$$

$$\eta = \frac{v_r}{r\omega} + \frac{\lambda}{1-\lambda}, \gamma = 1 - \frac{\sigma_1|\eta|}{r\omega h(v_r)}$$

Donde l es la longitud del contacto del parche de la llanta/pavimento. Detalles de la solución de la ecuación se pueden encontrar en (Yi y Claeys 2003) y en (Yi y Canudas 2000).

El valor de λ_m se obtiene de

$$\lambda_m = \arg\max_{\lambda} \mu(\lambda, \mathrm{v_r}, \Theta) \tag{3.25}$$

Para continuar con el desarrollo del controlador, es necesario fijar el valor de presión del cilindro maestro P_b, por lo que para este propósito se define

$$\tilde{s} = \hat{v}_r - \hat{\lambda}_m \hat{v} = \hat{v}(1 - \hat{\lambda}_m) - r\omega \tag{3.26}$$

como la velocidad relativa deseada para maniobras de frenado de emergencia. En esta expresión, $\hat{v}_r = \hat{v}_r - r\omega$ y $\hat{\lambda}_m$ es la estimación del valor de λ_m basado en la estimación de $\hat{v}$, $\hat{\lambda}_m = arg\, max \mu(\hat{\lambda}, v_r, \hat{\Theta})$. Si se toma la derivada de la ecuación (3.26) se tiene

$$\dot{\tilde{s}} = \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) - r\dot{\omega} - \hat{v}\dot{\hat{\lambda}}_m = \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) - \frac{rf}{j}\mu + \frac{reK_bP_b}{J} - \hat{v}\frac{\partial d\hat{\lambda}_m}{\partial d\hat{v}}\dot{\hat{v}} - \hat{v}\frac{\partial d\hat{\lambda}_m}{\partial d\omega}\dot{\omega} \tag{3.27}$$

Donde la derivada parcial de λ_m puede ser calculada numéricamente. Si se elige

$$Pb = \frac{J}{reK_b}\left[- \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) + \frac{rf}{J}\mu + \hat{v}\frac{\partial d\lambda_m}{\partial d\hat{v}}\dot{\hat{v}} + \hat{v}\frac{\partial d\hat{\lambda}_m}{\partial d\omega}\dot{\omega} - \zeta\bar{s}\right] \tag{3.28}$$

Con $\zeta > 0$, una ganancia y se sustituye en la ecuación (3.28) en (3.27) se obtiene

$$\dot{\tilde{s}} = -\zeta\tilde{s} \tag{3.29}$$

Se define la función candidata de Lyapunov

$$W_4 = \frac{1}{2}\tilde{s}^2 \tag{3.30}$$

se toma la derivada de la ecuación (3.30) y se usa la ecuación (3.29)

$$\dot{W}_4 = -\zeta\tilde{s}^2 \tag{3.31}$$

Por lo que se obtiene estabilidad asintótica de $\tilde{s} = 0$

3.1.5. Análisis conjunto de estabilidad

Se propone agregar en la ecuación (3.12), el siguiente conjunto de funciones candidatas de Lyapunov.

$$W_2 = \frac{1}{2}\tilde{z}^2 \tag{3.32}$$
$$W_3 = \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\Theta} \tag{3.33}$$

Se define la función candidata compuesta de Lyapunov

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \sum_{i=1}^{3} W_i \tag{3.34}$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (3.34) se puede escribir como

$$\dot{W} = \tilde{v}\dot{\tilde{v}} + \tilde{z}\dot{\tilde{z}} + \tilde{\Theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\tilde{\Theta}} \tag{3.35}$$

Al usar el error dinámico de observación y la ley de adaptación de parámetros en las ecuaciones (3.12), (3.23) y (3.17) en la ecuación (3.35), se tiene

$$\dot{W} = d(v+\hat{v})(1-L)\tilde{v}^2 + \tilde{z}[\dot{\tilde{z}} = [1-\sigma_0 f'(v_r)\hat{z}]\tilde{v} - \sigma_0 f(v_r)\tilde{z} - f(\hat{v}_r)\hat{z}\tilde{\sigma}_0] - (\tilde{\Theta}^T\hat{U}^T\hat{U}\tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T\hat{U}^T\hat{U}\Theta) \tag{3.36}$$

El término $\tilde{U}$ puede expresarse como

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & -f'(v_r)\hat{z} & 1 \end{bmatrix} \tilde{v} + \begin{bmatrix} 1 & -f(v_r) & 0 \end{bmatrix} \tilde{z} = U_1 \tilde{v} + U_2 \tilde{z} \tag{3.37}$$

Donde $U_1 = \begin{bmatrix} 0 & -f'(v_r)\hat{z} & 1 \end{bmatrix}$ y $U_2 = \begin{bmatrix} 1 & -f(v_r) & 0 \end{bmatrix}$. Al utilizar la ecuación (3.37), y la ecuación (3.36) y la ecuación (3.36) puede ser escrita en la forma cuadrática

$$\dot{W} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta} & \tilde{z} & \tilde{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}^T \hat{U} & \hat{U}^T \hat{U}_2 \Theta & \hat{U}^T \hat{U}_1 \Theta \\ U_3 & \sigma_0 f(v_r) & -(1 - \sigma_0 f'(v_r)\hat{z}) \\ 0 & 0 & d(1-L)(v+\hat{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Theta} \\ \tilde{z} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = -\Phi^T M \Phi \tag{3.38}$$

Donde $\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta} & \tilde{z} & \tilde{v} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_0 & \tilde{\sigma}_4 & \tilde{\sigma}_4 & \tilde{z} & \tilde{v} \end{bmatrix}^T$, $U_3 = \begin{bmatrix} f(\hat{v}_r)\hat{z} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y

$$M = \begin{bmatrix} \hat{z}^2 & -\hat{z}^2 f(\hat{v}_r) & \hat{z}\hat{v}_r & \hat{\omega}_1 \hat{z} & \hat{\omega}_2 \hat{z} \\ -\hat{z}^2 f(\hat{v}_r) & \hat{z}^2 f^2(\hat{v}_r) & -\hat{z} f(\hat{v}_r)\hat{v}_r & -\omega_1 \hat{z} f(\hat{v}_r) & -\omega_2 \hat{z} f(\hat{v}_r) \\ \hat{z}\hat{v}_r & -\hat{z} f(\hat{v}_r)\hat{v}_r & \hat{v}_r^2 & \omega_1 \hat{v}_r & \omega_2 \hat{v}_r \\ \hat{z} f(\hat{v}_r) & 0 & 0 & \sigma_0 f(v_r) & -\omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 \end{bmatrix}$$

Con $\omega_1 = \sigma_0 - \sigma_3 f(v_r), \omega_2 = \sigma_4 - \sigma_3 f'(v_r)\hat{z}, \omega_3 = 1 - \sigma_0 f'(v_r)\hat{z}$ y $\omega_4 = d(1-L)(v+\hat{v})$ Note que

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2} = M_1 + M_2$$

Donde $M_1 = M_1^T - \frac{M+M^T}{2}$ es una matriz simétrica y $M_2 = -M_2^T = \frac{M-M^T}{2}$ es una matriz anti-simétrica. Por lo tanto la ecuación (3.38) se convierte en

$$\dot{W} = -\Phi^T M_1 \Phi - \Phi^T M_2 \Phi = \Phi^T M_1 \Phi$$

Con

$$M_1 = \begin{bmatrix} \hat{z}^2 & -\hat{z}^2 f(\hat{v}_r) & \hat{z}\hat{v}_r & \frac{1}{2}\hat{z}(\omega_1 + f(\hat{v}_r)) & \frac{1}{2}\hat{z}\omega_2 \\ -\hat{z}^2 f(\hat{v}_r) & \hat{z}^2 f^2(\hat{v}_r) & -\hat{z} f(\hat{v}_r)\hat{v}_r & -\frac{1}{2}\omega_1 f(\hat{v}_r) & -\frac{1}{2}\omega_2 f(\hat{v}_r) \\ \hat{z}\hat{v}_r & -\hat{z} f(\hat{v}_r)\hat{v}_r & \hat{v}_r^2 & \frac{1}{2}\omega_1\hat{v}_r & \frac{1}{2}\omega_2\hat{v}_r \\ \frac{1}{2}(\omega_1 + f(\hat{v}_r)) & -\frac{1}{2}\hat{z}\omega_1 f(\hat{v}_r) & \frac{1}{2}\omega_1\hat{v}_r & \sigma_0 f(v_r) & -\frac{1}{2}\omega_3 \\ \frac{1}{2}\hat{z}\omega_2 & -\frac{1}{2}\omega_2\hat{z} f(\hat{v}_r) & \frac{1}{2}\omega_2\hat{v}_r & -\frac{1}{2}\omega_3 & \omega_4 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.39)$$

Aquí se tiene que

$det M_1(1,1) = \hat{z}^2 > 0$, $det M_{1(i,j)} = 0$ para $i, j = 2, 3, 4, 5$. De la ecuación (3.39) se tiene que

$$\dot{W} = -\Phi^T M_1 \Phi \leq 0$$

Esto indica que la ecuación (3.38) es negativa semi-definida, lo que implica que la estabilidad de $\tilde{v} = 0$, $\tilde{z} = 0$ y $\tilde{\Theta} = 0$. Se utiliza el lema de Barbalat para demostrar que es posible $\lim_{t\to\infty} \tilde{v}(t) = 0$. La convergencia $\tilde{z} = 0$ y $\tilde{\Theta} = 0$, no puede ser garantizada si no hay excitación persistente. Si se utiliza $\tilde{v} = 0$ en este caso el equilibrio se satisface con

$$\tilde{\sigma}_0\tilde{z}\left(1 - \frac{\omega_1}{\sigma_0}\right) - \hat{z} f(v_r)\tilde{\sigma}_3 + \hat{v}_r\sigma_4 = 0 \quad (3.40)$$

$$\tilde{z} + \frac{\tilde{z}}{\sigma_0}\tilde{\sigma}_0 = 0 \quad (3.41)$$

3.2. Observador basado en control de frenado de emergencia en autopistas automatizadas

En (Alvarez-Icaza y Olmos 2001) las maniobras de control de frenado de emergencia en sistemás son dirigidas a autopistas automatizados (AHS) por sus siglas en inglés. Con base en la estimación en línea de la velocidad longitudinal del vehículo y las características de la fricción llanta-pavimento, la presión en el cilindro maestro del sistema de frenado que logra la máxima desaceleración durante el frenado. El sistema diseñado provee información para un espacio seguro del vehículo en el control del flujo vehicular.

3.2.1. Características de la fricción llanta-pavimento

Los modelos pseudo-estáticos de fricción llanta-pavimento, describen el coeficiente de fricción μ como una función de deslizamiento de la llanta λ y de parámetros adicionales como la velocidad y la carga normal del motor (Bakker 1987) y (M. Burckhardt 1993). El modelo propuesto en (Bakker 1987) para el coeficiente de fricción es

$$\mu = \Big(C_1(1 - e^{-C_2\lambda_u}) - C_3\lambda_u\Big)e^{-C_{4v}} \tag{3.42}$$

Donde $\lambda_u = |\lambda|, C_1..C_4$ son constantes. La carga normal en la llanta se mantiene constante. Se modela μ aproximadamente por

$$\mu = P_1 e^{-p_2\lambda_u}\lambda_u^{(P_3\lambda_u+P_4)}e{-}P_5 v \tag{3.43}$$

Donde P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 son parámetros a determinar. Se rearreglan ambos lados en forma vectorial, la ecuación (3.43) se convierte en

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_u & \lambda_u ln\lambda_u & ln\lambda_u & -v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1' \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = U\Theta \tag{3.44}$$

Donde $P_1' = lnP_1$

$$\mu_m = p_1 e^{-p_2\lambda_m}\lambda_m^{(p_3\lambda_M+p_4)}e^{-p_5 v_0} \tag{3.45}$$

Con $v = v_0$, donde λ_m está dado por el pico de deslizamiento que cumple cn

$$p_3\lambda_m(ln\lambda_m + 1) = p_2\lambda_m - p_4 \tag{3.46}$$

3.2.2. Diseño del controlador observador

Para el diseño del controlador para frenado de emergencia, es necesario primero diseñar un observador de la velocidad longitudinal. Para realizarlo, se asume que la velocidad angular y la aceleración longitudinal son medibles, la aceleración angular puede ser derivada de la velocidad angular, y que la ganancia del sistema de frenado es conocida. Para la estimación de la velocidad longitudinal se propone la siguiente estructura

$$\dot{\hat{v}} = -c\mu - d\hat{v}^2 + L\tilde{y}_2 \tag{3.47}$$

Donde $\hat{v}$ es el valor estimado de v, el coeficiente de fricción μ se obtiene de (3.20), donde L es una ganancia que debe ser determinada. La dinámica del error de estimación queda de la siguiente manera

$$\dot{\tilde{v}} = dv^2 + d\hat{v}^2 - L\tilde{y}_2 = -d\tilde{v}(v + \hat{v})(1 - L) \tag{3.48}$$

Una propiedad importante de la ecuación (3.48) que si $\tilde{v}(0) < 0$ y $L < 0$ entonces $\tilde{v}(t) < 0$ $\forall t \geq 0$.

Definimos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$W_a = \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \tag{3.49}$$

Tomamos la derivada respecto al tiempo de (3.49) y usando la ecuación (3.48)

$$\dot{W}_a \leq -\alpha_a \phi_a(\tilde{v}) \leq 0 \tag{3.50}$$

Con $\alpha_a = 2d(1 - L)v_{min} > 0$ y $\phi_a(\tilde{v}) = \tilde{v}$, v_{min} es una cota de la velocidad longitudinal del vehículo tal que la maniobra de frenado de emergencia puede ser considerada completa cuando $v \to v_{min}$. Se demuestra que tiene estabilidad exponencial en $\tilde{v} = 0$. Continuando con el diseño del controlador, es necesario fijar el valor de presión del cilindro maestro P_b, que se define como sigue.

Sea

$$\bar{v}_r = \hat{v}_r - \hat{\lambda}_b \hat{v} = \hat{v}(1 - \hat{\lambda}_m) - R\omega \tag{3.51}$$

la velocidad relativa deseada para el frenado de emergencia. En la expresión $\hat{v}_r = \hat{v} - R\omega$, es el estimado del valor de λ_m basado en la estimación de $\tilde{\Theta}$.

Tomando la derivada de la ecuación (3.51) se tiene

$$\dot{\bar{s}} = \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) - R\dot{\omega} - \hat{v}\dot{\hat{\lambda}}_m = \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) - \frac{Rf}{j}\mu + \frac{R_e K_b P_b}{J} - \hat{v}\frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \hat{v}}\dot{\hat{v}} - \hat{v}\frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \omega}\dot{\omega} \tag{3.52}$$

Donde las derivadas parciales de λ_m pueden ser calculadas de la ecuación (3.46). Si se elige

$$P_b = \frac{J}{R_e K_b}\Big(- \dot{\hat{v}}(1 - \hat{\lambda}_m) + \frac{R_f}{J}\mu + \hat{v}\frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \hat{v}}\dot{\hat{v}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{\lambda}_m}{\partial \omega}\dot{\omega} - \zeta \bar{s}\Big) \tag{3.53}$$

y se sustituye en la ecuación (3.52) se tiene

$$\dot{\bar{s}} = -\zeta \bar{s} \tag{3.54}$$

Al definir la función candidata de Lyapunov

$$W_b = \frac{1}{2}\bar{s}^2 \tag{3.55}$$

y tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.55) se obtiene

$$\dot{W}_b \leq -\alpha_b \phi^2 b(\bar{s}) \leq 0 \tag{3.56}$$

Con $\alpha_b = \zeta > 0$ y $\phi(\bar{s}) = s \leq 0$, lo que implica estabilidad exponencial de $\bar{s} = 0$.
El siguiente paso es el diseño del observador-controlador para estimar el comportamiento de la interfaz llanta-pavimento y la velocidad del vehículo. Se define una nueva función candidata de Lyapunov

$$W_c = \frac{1}{2}v^2 \tag{3.57}$$

Al tomar la derivada de la ecuación con respecto al tiempo (3.57) y usar la ecuación (3.8) se llega a

$$\dot{W}_c = -v(-c\mu - dv^2) \leq -\alpha_c \phi_c^2(v) \leq 0 \tag{3.58}$$

Con $\alpha_c = d > 0$ y $\phi_c(v) - v^{3/2} \leq 0$. Se tiene estabilidad exponencial de $v = 0$, considere la siguiente ley de adaptación de tipo gradiente para el modelo llanta-pavimento.

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\Gamma \hat{U}^T \tilde{y} \tag{3.59}$$

donde $\tilde{y} = ln\mu - ln\hat{\mu} = U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta}$.

Definimos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$W_d = \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} \frac{1}{2}\hat{v}^2 \tag{3.60}$$

Tomando la derivada del tiempo de la ecuación (3.60) y usando las ecuaciones (3.12) y (3.47)

$$\begin{aligned} \dot{W}_d &= \hat{v}(-c\mu - dv^2 + Ldv^2 - Ld\hat{v}^2) - \tilde{\Theta}^T(U\Theta - \hat{U}\hat{\Theta} + \hat{U}\Theta - \hat{U}\Theta) \\ &\leq -\alpha_d \phi_d^2(\hat{v}) - \alpha_e \phi_e^2(\tilde{\Theta}) + Ldv^2\hat{v} + \tilde{\Theta}^T \hat{U}^T \tilde{U}\Theta \end{aligned} \tag{3.61}$$

Donde $\tilde{U} = U - \hat{U}$, $\alpha_d = d(1-L) > 0$, $\alpha_e = K_e$, $\phi_d(\hat{v}) = \hat{v}$ y $\phi_e(\tilde{\Theta}) = \sqrt{\Theta^{\tilde{T}}\tilde{\Theta}}$.

El valor de K_e satisface $K_e \leq ||ln\lambda_{min}||$, con λ_{min} prescribe una cota mínima del valor de λ durante el proceso de frenado.

Los últimos 2 términos en la ecuación (3.61) puede que no garanticen la propiedad de $\dot{\omega}_d$ de ser negativa definida. Por ello será utilizado el resultado obtenido en (3.46). Primero será mostrado en el apéndice para todo $V \geq v_{min}$

$$\tilde{U}\Theta \leq K_1|\tilde{v}| \tag{3.62}$$

Con v_{min} es introducida una pequeña velocidad para evitar singularidades cuando el proceso de frenado $v \rightarrow 0$ por lo que

$$Ldv^2 \leq \gamma_{cd}\phi_c(v) \tag{3.63}$$

Con $\gamma_{cd} = Ldv_{max}^{\frac{1}{2}}$. Usando las ecuaciones (3.62) y (3.63) en la ecuación (3.61) se tiene que

$$\dot{W}_d \leq -\alpha_d \phi_d^2(\hat{v}) - \alpha_e \phi_e^2(\tilde{\Theta}) + \gamma_{cd}\phi_c(v)\phi_d(\hat{v}) + \gamma_{ae}\phi_a(\tilde{v})\phi_e(\tilde{\Theta}) \tag{3.64}$$

Con $\gamma_{ae} = K_1$.

Se define la función candidata compuesta de Lyapunov

$$W = \sum_{i \in [a,b,c,d]} d_i W_i \tag{3.65}$$

donde $d_i > 0$ son factores de escala a determinar. La derivada respecto al tiempo de la ecuación (3.65) satisface además las ecuaciones (3.50), (3.56), (3.58) y (3.64) en

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq \; & -d_a\alpha_a\phi_a^2(\tilde{v}) - d_b\alpha_b\phi_b^2(\bar{s}) - d_c\alpha_c\phi_c^2(v) + d_d(\alpha_d\phi_d^2(\hat{v}) + \\ & \gamma_{cd}\phi_c(v)\phi_d(\hat{v})) + d_e(-\alpha_e\phi_e^2(\tilde{\Theta}) + \gamma_{ae}\phi_a(\tilde{v})\phi_e(\tilde{\Theta})) \end{aligned} \tag{3.66}$$

La ecuación (3.66) es una forma cuadrática que puede ser escrita como

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2}\Phi^T(DS + S^T D)\Phi \tag{3.67}$$

Donde $\Phi = [\phi_a, ..., \phi_e]^T$, $D = diag(d_a, ..., d_e)$ y la matriz S está definida como

$$S_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & i = j \\ -\gamma & i \neq j \end{cases} \tag{3.68}$$

Donde $\gamma_{ij} = 0$, $\forall ij \neq cd, ae$

La forma cuadrática de la ecuación (3.67) es negativa definida si y solo si la matriz $DS + S^T D$ es positiva definida. El siguiente Lema garantiza la existencia de la matriz D si algunas condiciones en S son satisfechas (Khalil 1996).

Lema. Existe una matriz diagonal positiva D tal que $DS = S^T D$ es positiva definida si y solo si S es una **M-matriz**; lo que significa que los menores principales de las matriz S son positivos. Esta propiedad fuerte se prueba cuando la matriz S tiene menores principales positivos. Esto muestra la estabilidad asintótica de $\tilde{v} = v = \hat{v} = \bar{s} = 0$. Estos resultados para los parámetros adaptables muestran solamente que $\tilde{y} = 0$, por lo que no se puede implicar que $\tilde{\Theta} = 0$ si no hay excitación persistente.

3.3. Control óptimo de frenado de emergencia basado en modelo dinámico de fricción

En (Olmos y Alvarez-Icaza 2003) se utiliza un modelo dinámico de fricción para la interface llanta-pavimento en el diseño de un esquema de control óptimo para el frenado de emergencia de vehículos. El controlador establece una curva de referencia para la velocidad relativa que el vehículo debe seguir para poder alcanzar el frenado en tiempo mínimo. Se muestra que esta curva corresponde con la solución de un problema de control óptimo. El objetivo final de este esquema de control es aumentar los niveles de seguridad en autopistas.

3.3.1. Diseño de la ley de control de tiempo mínimo de frenado

En teoría de control óptimo el objetivo principal es minimizar el índice de desempeño del sistema. Este índice es usualmente expresado de la siguiente forma

$$J = \int_{o}^{t_f} L\,dt \tag{3.69}$$

El propósito principal es minimizar el tiempo de frenado de emergencia, $L = 1$ y $J = t_f$ y las condiciones de frontera son $v_0 = v_0$, $v_f = 0$, $v_{r0} = 0$ y $v_{rf} = 0$.
Si se toma en cuenta el modelo del vehículo en las ecuaciones (3.6) y (3.8), el Hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = \lambda_v(-c\mu - dv^2) + \lambda_s(-(a+c)\mu - b - dv^2 + eK_bP_b) + 1 \tag{3.70}$$

Y el sistema adjunto es

$$\dot{\lambda}_v = \lambda_v\left(\frac{\partial\mu}{\partial v} + 2dv\right) + \lambda_s((a+c)\frac{\partial\mu}{\partial v} + 2dv) \tag{3.71}$$

$$\dot{\lambda}_s = \lambda_v c\frac{\partial\mu}{\partial s} + \lambda_s(a+c)\frac{\partial\mu}{\partial s} \tag{3.72}$$

Debido a que el tiempo final no está especificado, la condición de transversalidad se puede ser fijar como $H(t_f) = 0$. Además en este caso, el Hamiltoniano no es una función explícita del tiempo, por lo que

$$H(t) = 0, \forall t \in [0, t_f] \tag{3.73}$$

A lo largo de la trayectoria óptima, el control óptimo está dado por

$$Pb_{opt} = arg\, min\, H(x, \lambda, P_b) \tag{3.74}$$

De la ecuación (3.70), la función de conmutación es

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial P_b} = \lambda_s e K_b \tag{3.75}$$

La ecuación (3.75) y su derivada respecto al tiempo deben desvancerse cuando las trayectorias están en una singularidad de la ecuación (3.75). Al tomar la derivada del tiempo de la ecuación (3.75) y sustituir $\dot{\lambda}_s$ se tiene

$$\dot{H}_1 = eK_b\dot{\lambda}_s \tag{3.76}$$

$$\dot{H}_1 = eK_b\Big[\lambda_v c\frac{\partial \mu}{\partial s} + \lambda_s(a+c)\frac{\partial \mu}{\partial s}\Big] \tag{3.77}$$

El caso de singularidad de interés corresponde al arco donde $H_1 \equiv 0$, lo cual implica $\lambda_s \equiv 0$; sustituyendo esta condición permite conducir a

$$\dot{H}_1 = eK_b\Big[\lambda_v c\frac{\partial \mu}{\partial v_r}\Big] = 0 \tag{3.78}$$

La ecuación (3.78) es de suma importancia ya que muestra que en la trayectoria óptima $\frac{\partial \mu}{\partial v_r} = 0$, ó $\lambda_v = 0$. Si la segunda condición se cumple, al vector adjunto sería cero en la singularidad del sub-arco lo que es una contradicción, porque el vector adjunto no se desvanece en ninguna circunstancia [15], Entonces $\frac{\partial \mu}{\partial v_r} = 0$ a lo largo de la singularidad del arco, sin que influya v que es el otro estado del sistema. Es posible encontrar un control óptimo, demandando consistencia en $H_1 \equiv 0$ y $\dot{H}_1 \equiv 0$. La señal de control está acotada físicamente, $0 \leq P_b \leq P_{bmax}$. Por lo tanto analizando las ecuaciones (3.74), (3.77) y (3.78) y las cotas en la señal de control, P_{bopt}, está dado por la siguiente fórmula

$$P_{bopt} = \begin{cases} P_{bmax} & \text{si } \dot{H}_1 > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{H}_1 < 0 \\ P_{bsing} & \text{si } \dot{H}_1 \equiv 0 \end{cases} \tag{3.79}$$

Para garantizar que $\dot{H}_1 = 0$ y para encontrar P_{bsing}, es necesario conocer la segunda derivada de H_1, con respecto al tiempo

$$\ddot{H}_1 = ecK_b\Bigg(\Bigg[\lambda_v\Big(c\frac{\partial d\mu}{\partial v} + 2dv\Big) + \lambda_s\Big((a+c)\frac{\partial \mu}{\partial v} + 2dv\Big)\Bigg]\frac{\partial \mu}{\partial v_r} + \lambda_v\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mu}{\partial s}\Big)\Bigg) \tag{3.80}$$

Con base en la ecuación (3.78), el análisis se reduce finalmente a

$$\dot{H}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v_r}\right) = 0 \tag{3.81}$$

Para mantener la ecuación 3.81

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mu}{\partial v_r}\Big) &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial v_r^2}v_r + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v \partial v_r} = 0 \\ &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial v_r^2}\Big(-(a+c)\mu - b - dv^2 + eK_bP_b\Big) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v \partial s}(-c\mu - dv^2) = 0 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Después de alguna manipulaciones de la ecuación (3.82) el control singular de P_{bsing} es

$$P_{bsing} = \frac{1}{eK_b}\left[\frac{\partial \mu}{\partial v \partial v_r}(c\mu + dv^2)\Big(\frac{\partial^2 \mu}{\partial v_r^2}\Big)^{-1} + (a+c)\mu + dv^2\right] \tag{3.83}$$

3.3.2. Ley de control de máxima fricción basada en Lyapunov

Aquí se presentan los resultados de la sección previa para obtener el control óptimo, para hacerlo de fácil implementación. El objetivo de este control es forzar al estado del sistema a seguir una trayectoria deseada, representada por una velocidad relativa v_{rd} que produce la fuerza máxima de fricción, la velocidad actual del vehículo y que llegará a velocidad cero cuando finalice el proceso de frenado de emergencia.

Utilizando la ecuación (3.78), los estados $\frac{\partial \mu}{\partial v_r} = 0$ y la ecuación (2.6) tenemos

$$\frac{\partial \mu}{\partial v_r} = g'(v_r)e^{\frac{\sigma_0 f(s) L}{v}} \left[(\sigma_1 - g'(v_r)) - \frac{\sigma_0 f'(v_r) L}{v} (\sigma_1(s)_g(v_r)) \right] = 0 \tag{3.84}$$

Donde

$g'(v_r) = \frac{\partial g(v_r)}{\partial v_r}$ $f'(v_r) = \frac{\partial f(v_r)}{\partial v_r}$

Para un valor dado de v, la ecuación (3.84) permite obtener un valor deseado para la velocidad relativa v_{rd}, tal que la ecuación (3.78) se satisface (Olmos 2001). El siguiente paso en el diseño del controlador es tratar de tomar el estado del sistema para esta curva. Para este propósito se define el error de la señal del seguimiento

$$\bar{v}_r = v_r - v_{rd} \tag{3.85}$$

La derivada con respecto del tiempo de (3.85) es

$$\dot{\bar{v}}_r = \dot{v}_r - \dot{v}_{rd} \tag{3.86}$$

Se define la función candidata de Lyapunov

$$W = \frac{1}{2}\bar{v_r}^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{K}{2}\Big(\int \bar{v}_r dt \Big)^2 \tag{3.87}$$

con $K > 0$, y se toma la derivada de la ecuación (3.87) y sustituyen las ecuaciones (3.6), (3.8) y (3.86) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \bar{v}_r \dot{\bar{v}}_r + K \bar{v}_r \int \bar{v}_r dt \\ &= \bar{v}_r \Big[-(a+c)\mu - b = dv^2 + eK_b P_b - v_{rd} \Big] + \Big[-c\mu - dv^2 \Big] + k\bar{s} \int \bar{v}_r dt \end{aligned} \tag{3.88}$$

Si la señal de control es P_b se toma como

$$P_b = \frac{1}{eK_b} \Big[(a+c)\mu + d\mu^2 + H\bar{v}_r + K_1 \int \bar{v}_r dt \Big] \tag{3.89}$$

y se sustituyen en la ecuación (3.88), entonces tenemos

$$\dot{W} = -c\mu v - dv^3 + H\bar{v}_r^2 + (K_1 + K)\bar{v}_r \int \bar{v}_r dt \tag{3.90}$$

Analizando las ecuaciones anteriores y considerando que v y μ son positivas en todo tiempo, que c y d son constantes positivas y si $K\, y\, K_1$ es elegida de tal modo que el último término sea negativo y $H < 0$, entonces la ecuación (3.90) se convierte en negativa definida.
Debido al hecho que $\int \bar{v}_r dt$ es solamente cero cuando $\bar{s} \equiv 0$. y al utilizar el Lema de Barbalat se pude concluir que el punto $\bar{s} = 0$ y $v = 0$ es asintóticamente estable.

3.4. Modelo dinámico de fricción en 3D para el control de un vehículo

(Claeys y Canudas 2001) Se presenta una dinámica 3D con un modelo de fricción dinámico llanta-pavimento. Este modelo está basado en el modelo de fricción seca de LuGre y las dinámicas de la llanta. Las fuerzas laterales y longitudinales, y el par auto-alíneante de la llanta son determinantes para muchas dinámicas de primer orden del sistema. La principal ventaja de este modelo es que puede ser fácilmente utilizado para identificación, simulación y control del vehículo.

3.4.1. Definiciones de Deslizamiento

Los deslizamientos son comunes en el modelado de la interacción llanta-pavimento. Se usa $V = [V_x, V_y]$ para denotar la velocidad traslacional y longitudinal, respectivamente, y el centro el parche de contacto se denota por O (véase 3.2).

Se define la velocidad de deslizamiento del punto O como $[V_{sx}, V_{sy}]$ en el plano de la llanta XOY. El ángulo de deslizamiento se denota por α. La relación del deslizamiento se utiliza para parametrizar el modelo de fricción definido como λ_s y λ_α para direcciones longitudinales y laterales, respectivamente. Se utilizan dos convenciones de deslizamiento para el frenado y la tracción por separado (3.2), ya que como es usual las curvas pseudo-estáticas de frenado son desarrolladas para una velocidad no nula, mientras que las curvas de tracción pseudo-estáticas para una velocidad angular distinta de cero. Estas convenciones evitan que el deslizamiento se vuelva indefinido, lo que ocurre cuando cualquiera de las dos, la velocidad de las ruedas o la velocidad longitudinal llegan a cero.

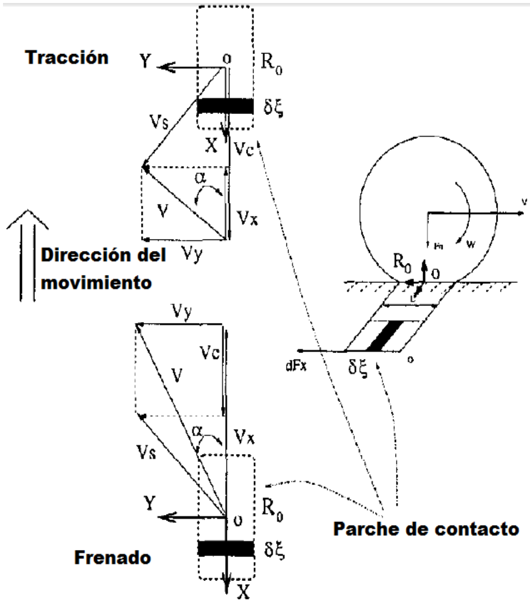

Figura 3.2: Definición de variables para el contacto distribuido en el modelo 3D

- En el caso de frenado, el deslizamiento longitudinal S_s y el deslizamiento lateral S_α está dado por

$$Vc = \rho\omega$$

$$\lambda_s = \frac{V_x - V_c}{V_x} = \frac{V_{sx}}{V_x}$$
$$\lambda_\alpha = \frac{V_{sy}}{V_x} = |tan\alpha|$$

En frenado $V_x - V_c > 0$, $V_x \neq 0$, por lo tanto $1 \geq S_s > 0$

- En el caso de tracción. El deslizamiento longitudinal S_s y el deslizamiento lateral S_α están dados por

$$S_s = \frac{V_c - V_x}{V_c} = \frac{V_{sx}}{V_c}$$
$$S_\alpha - \frac{V_{sy}}{V_c} = (1 - S_s)|tan\alpha|$$

En tracción si $V_x - v_c < 0$, $\omega \neq 0$, entonces $1 \geq S_s > 0$

3.4.2. Modelo en direcciones x y y

Sea $\delta\xi$ un pequeño deslizamiento que representa la deformación del rectángulo del parche de contacto en la posición ξ en coordenadas R_0 (véase figura 3.2). El elemento $\delta\xi$ se está moviendo con velocidad $V_{\delta\xi} = [V_x, V_y + \xi\dot{\phi}]$ con $\dot{\phi}$ la velocidad angular de deslizamiento (Olmos 2001). Se puede modelar la fricción seca presente en cada deslizamiento utilizando el modelo dinámico de fricción de LuGre. El contacto entre las dos superficies puede ser representado por "deflexiones microscópicas" de cerdas de un cepillo con coordenadas $\delta z(\xi, t) = [\delta z_x(\xi, t), \delta z_y(\xi, t)]$ y la velocidad relativa de cada deslizamiento en ξ con respecto a O está dada como $V_\tau(\xi, t) = [V_{rx}(\xi, t), V_{ry}(\xi, t)] = [-V_{sx}(t), -V_{sy}(t) - \xi\dot{\phi}]$. La dirección de la fuerza total es opuesta al deslizamiento del motor.

$$\delta\dot{z}_x(\xi, t) = V_{rx} - \frac{\sigma_{0x}}{g_x(V_{rx})}\delta z_x(\xi, t)|V_{rx}|$$
$$\delta\dot{z}_y(\xi, t) = V_{ry} - \frac{\sigma_{0y}}{g_y(V_{ry})}\delta z_y(\xi, t)|V_{ry}|$$

Para las fuerzas de fricción tenemos

$$\delta F_x = [\sigma_{0x}\delta z_x(\xi, t) + \sigma_{1x}\delta\dot{z}_x(\xi, t) + \sigma_{2x}V_{rx}]\delta F_n$$
$$\delta F_y = [\sigma_{0y}\delta z_y(\xi, t) + \sigma_{1y}\delta\dot{z}_y(\xi, t) + \sigma_{2y}V_{ry}]\delta F_n$$

Donde las σ_{ji} $i = x, y$; $j = 1, 2, 3$ son los coeficientes dinámicos del modelo de fricción de LuGre para direcciones longitudinal y lateral. La carga normal δF_n se considera uniformemente distribuida sobre la superficie de contacto a lo largo de ξ

$\delta F_n = F_n/L$. Además

$$
\begin{aligned}
g_x(V)_{rx} &= \mu_{cx} + (\mu_{sx} - \mu_{cx})e^{-|\frac{V_{rx}}{V_{sx}}|^{1/2}} \\
g_y(V)_{ry} &= \mu_{cy} + (\mu_{sy} - \mu_{cy})e^{-|\frac{V_{ry}}{V_{sy}}|^{1/2}}
\end{aligned}
$$

Los dos modelos de LuGre para movimientos laterales y longitudinales utilizan diferentes parámetros, ya que la fricción entre la llanta-pavimento es diferente en estas dos direcciones. El sistema dado en las ecuaciones anteriores depende de dos parámetros, tiempo y espacio y por consecuencia la derivada de $\delta \dot{z}_i(\xi, t)$, $i = x, y$ para direcciones longitudinales y laterales, la derivada completa está dada por

$$\delta \dot{z}_i(\xi, t) = \frac{\partial \delta z_i(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \delta z_i(\xi, t)}{\partial t} \tag{3.91}$$

Es difícil encontrar una solución analítica al sistema por la complejidad del mismo. Sin embargo, el caso estacionario (el caso seudo-estatico, V_x y ω son constantes) puede ser estudiado.

3.4.3. Par auto-alíneante

Esta es una parte importante para el modelo de la llanta porque la fuerza aplicada al vehículo (fuerza retroalimentada del volante), es fuertemente dependiente de ella. Este efecto consiste de dos elementos, el deslizamiento de la llanta que crea un par de fricción, y el momento de las fuerzas de fricción en el centro de la llanta. Ambos efectos generan el par en el centro de la llanta conocido como par auto-alíneante. Se desprecia el deslizamiento de la llanta respecto al rin ya que es un movimiento muy pequeño.

Denotando a ϕ como el ángulo de deslizamiento, este par puede ser fácilmente calculado con un modelo similar al de LuGre. La deformación de las cerdas del deslizamiento está dado por

$$\delta \dot{z}_z(\xi, t) = \dot{\phi} - \frac{\sigma_{0z}}{g_z(\phi)} \delta z_z(\xi, t) |\dot{\phi}| \tag{3.92}$$

El par de fricción puede representarse como

$$\delta M_{z1} = [\sigma_{0z}\delta z_z(\xi,t) + \sigma_{1z}\delta\dot{z}_z(\xi,t) + \sigma_{2z}\dot{\psi}]\delta Fn \tag{3.93}$$

Las fuerzas llanta-pavimento y el par son siempre calculados en el centro de la llanta O. Consecuentemente el par auto-alíneante es una consecuencia de la no simetría de la deformación de la superficie de contacto $\delta z(\xi,t)$, o de las fuerzas $\delta F_y(\xi,t)$ sobre la longitud de contacto L. El equivalente de fuerzas y par producido por un deslizamiento $\delta\xi$ en la posición ξ, con respecto al centro del parche O, está dado por $[\delta F_x, \delta F_y, \delta M_z]$ y el total de la interacción de la llanta-pavimento en el centro del parche, se expresa de la siguiente forma F_x y F_y y el par auto-alíneante M_z

$$F_x = \int_{-L/2}^{L/2} \delta F_x(\xi,t)d\xi \tag{3.94}$$

$$F_y = \int_{-L/2}^{L/2} \delta F_y(\xi,t)d\xi \tag{3.95}$$

$$M_z = \int_{-L/2}^{L/2} [\underbrace{\delta M_{z1}(\xi,t)}_{se\ desprecia} + \delta M_{z_2}(\xi,t)]d\xi \tag{3.96}$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} \xi\delta F_y(\xi,t)d\xi \tag{3.97}$$

3.4.4. Propiedades estacionarias

Las características estacionarias de la llanta son muchas. Obtener estas condiciones en un vehículo real es difícil, ya que requiere maniobras que son muy severas para los pasajeros. Cada punto en la curva estacionaria está dado por una constante de deslizamiento y una constante de velocidad angular, por lo tanto V_c y V permanecen constantes y el ángulo de deslizamiento α es obtenido. Por lo tanto ξ y t ya no son independientes a una velocidad constante por lo que se tiene $\delta z_i(\xi,t) = \delta z_i(t)$, si se desea una solución variante en el tiempo, o $\delta z_i(\xi)$, en caso contrario. Por lo tanto si $\dot{\xi} = V_c$ es constante durante condiciones estacionarias, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\delta_{zi}(\xi,t) = \frac{d\delta z_i(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\delta z_i(\xi)}{d\xi}V_c \tag{3.98}$$

Como una consecuencia, el modelo estacionario de cerdas en coordenadas espaciales se convierte en

$$\frac{d\delta z_i(\xi)}{d\xi}V_c = -V_{si} - \frac{\sigma_{0i}}{g_i V_{si}}\delta z_i(\xi)|V_{si}| \tag{3.99}$$

Con $dz_i(-\frac{L}{2}) = 0$ como la condición de frontera. La solución espacial está dada por

$$\delta z_i(\xi) = sign(-V_{si})\frac{g_i(V_{si})}{\sigma 0i}\Big[1 - e^{-\frac{\sigma_{0i}|V_{si}|/V_c}{g_i V_{si}}(\xi+\frac{L}{2})}\Big] \tag{3.100}$$

Integrando las fuerzas y el par a lo largo del parche de contacto al usar las ecuaciones (3.94), (3.95) y (3.97) y se obtienen tres componentes estacionarios del modelo de la llanta F_x, F_y y M_z para el caso de tracción.

$$\frac{F_x}{F_n} = -\gamma_x(V_{sx})sign(V_{sx})g_x(V_{sx})\Big[1 + \frac{g_x V_{sx}}{L\sigma_0 S_s}\Big(e^{-\frac{\sigma_{0x}LS_s}{g_x(V_{sx})}} - 1)\Big] - (\sigma_{x1} + \sigma_{x2})V_{sx} \tag{3.101}$$

$$\frac{F_y}{F_n} = -\gamma_y(V_{sy})sign(V_{sy})g_y(V_{sy})\Big[1 + \frac{g_y V_{sy}}{L\sigma_0 S_\alpha}\Big(e^{-\frac{\sigma_{0y}LS_\alpha}{g_y(V_{sy})}} - 1\Big)\Big] - (\sigma_{1y} + \sigma_{2y})V_{sy} \tag{3.102}$$

$$\frac{M_z}{F_n} = -\frac{\gamma_y(V_{sy})g_y^2(V_{sy})}{2\sigma_{0y}^2 S_\alpha}\left[(e^{-\frac{\sigma_{0y}LS_{alpha}}{S_y(V_{sy})}} - 1) + \left(\frac{2_{gy}V_{sy}}{L\sigma_{0y}S_\alpha}\right)\left(e^{-\frac{\sigma_{0y}LS_\alpha}{g_y V_{sy}}} - 1\right)\right] \tag{3.103}$$

Con la función γ_1 definida como $\gamma_1(V_{si}) = 1 - \frac{\sigma_1 i|V_{si}|}{g_i(V_{si})}$, para $i = x, y$. Para el caso de frenado, se pueden encontrar fórmulas similares para F_x, F_y y M_z

3.4.5. Modelo dinámico agrupado de fricción llanta-pavimento

Los modelos distribuidos son difíciles de usar para propósitos como estimación y control. Por ello se desarrolla un modelo agrupado simplificado. Una aproximación del modelo ha sido presentada en (M. Burckhardt 1993). Para derivar un modelo agrupado, se asume que no hay condiciones de acotamiento de los estados internos, y que la deflexión no es simétrica con respecto al centro del parche O. Esta es una propiedad esencial para garantizar el par auto-alíneante. Se obtiene el modelo agrupado para variables definidas agrupadas Z_i las cuales son

$$\bar{z}_i(t) = \frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} \delta_{zi}(\xi, t)d\xi \qquad i = x, y \tag{3.104}$$

Donde L_1 está definida como una longitud de superficie elemental que puede ser el elemento del bloque de la banda de rodadura o el contacto total del parche entre la llanta y el pavimento. Despreciando el movimiento de deslizamiento entre la llanta y el rin, $\dot{\phi} = 0$, el modelo distribuido de fricción se convierte en

$$\dot{\bar{z}}_i = \int_{-\frac{L_1}{2}}^{\frac{L_1}{2}} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \delta z_i(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = -V_{si} - \frac{\sigma_{0i}}{g_i(V_{si})} \bar{z}_i |V_{si}| \tag{3.105}$$

Donde $\frac{\partial \xi}{\partial t} = V_c$ se asume uniforme a lo largo del parche y $i = x, y$. Si se retoma $\partial_z(-\frac{L}{2}, t) = 0$, el sistema se convierte en dos ecuaciones diferenciales de primer orden similar a (Khalil 1996) $(\partial_z(\frac{L}{2}, t) \neq 0)$, porque la solución no es simétrica. Finalmente el modelo agrupado puede ser definido como

Estados Internos

$$\partial \dot{z}_i \left(\frac{L}{2}, t \right) = -V_{si} - \frac{\sigma_{0i}}{g_i(V_{si})} \delta z_i \left(\frac{L}{2}, t \right) |V_{si}| \tag{3.106}$$

$$\dot{\bar{z}}_i + \rho \omega \delta z \left(\frac{L}{2}, t \right) = -V_{si} - \frac{\sigma_{0i}}{g_i(V_{si})} \bar{z}_i |V_{si}| \tag{3.107}$$

Con $\bar{z}_i(0) = 0$ y $\delta z(\frac{L}{2}, 0) = 0$, por que el parche está libre cuanto $t = 0$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta F_i}{\partial t} &= \frac{F_n}{L} \left[\sigma_{i0} \gamma_i(V_{si}) \frac{\partial \delta z_i(\xi, t)}{\partial t} + \sigma_{i0} \dot{\gamma}_i(V_{si}) \delta z_i(\xi, t) + (\sigma_{i1} + \sigma_{i2}) \dot{V}_{ri} \right] \qquad (3.108) \\ &= \frac{F_n}{L} \left[\sigma_{i0} \gamma_i(V_{si}) \left(V_{si} - \frac{\sigma_{0i} |V_{si}|}{g_i(V_{si})} \delta z_i(\xi, t) V_c \frac{\partial \delta z_i(\xi, t)}{\partial \xi} \right) + \sigma_{i0} \dot{\gamma}_i(V_{si}) \delta_{zi}(\xi, t) + (\sigma_{i1} + \sigma_{i2}) \dot{V}_{ri} \right] \end{aligned}$$

donde $i = x, y$.

También se tiene

$$\begin{aligned}\dot{M}_z &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\dot{\xi}\delta F_y(\xi,t) + \xi\frac{\partial\delta F_y(\xi,t)}{\partial t}\right] d\xi \\ &= \frac{F_n}{L}\left[\sigma_{y0}\gamma_y(V_{sy})\left(V_{sy} - \frac{\sigma_{0y}|V_{sy}|}{g_y(V_{sy})}\delta z_y(\xi,t)V_c\frac{\partial\delta z_y(\xi,t)}{\partial\xi}\right) + \sigma_{y0}\dot{\gamma}_y(V_{sy})\delta_{zy}(\xi,t) + (\sigma_{y1}+\sigma_{y2})\dot{V}_{ry}\right]\end{aligned} \quad (3.109)$$

Capítulo 4

Banco de Pruebas

El banco de pruebas que se utiliza fue construido para este propósito (Aguilar 2012) está inspirado en algunos otros trabajos donde también se utilizaron modelos de un cuarto de vehículo como en (Kiencke y Daiss 1993), (Kiencke y Daiss 1994) y (Liu y Sun 1995).

4.1. Descripción del banco pruebas

El banco de pruebas está conformado por un rodillo, una llanta y un servomotor. El rodillo tiene dos propósitos, el primero es el pavimento y el segundo representar el peso del vehículo veáse (véase figura 4.1). La llanta representa un cuarto de vehículo convencional. I_2 es la inercia del rodillo, I_1 es la inercia de la llanta, R_2 es el radio del rodillo, R_1 es el radio de la llanta y F_n es la fuerza normal. En el rodillo la parte que representa al pavimento está hecho con polietileno de alta densidad. (HDPE *High Density Polythylene*), algunas ventajas que tiene este polímero son

- Estructura líneal sin ramificaciones
- Buena resistencia térmica y quimica
- Buena rigidez

El radio del rodillo se eligió para alcanzar la máxima superficie de contacto con la llanta; se consideraron también aspectos como dureza y fácil adquisición. El neumático elegido tiene un perfil de 4.5/10.0-5 DR10. Este neumático tiene la característica de ser liso lo cual hace que tenga

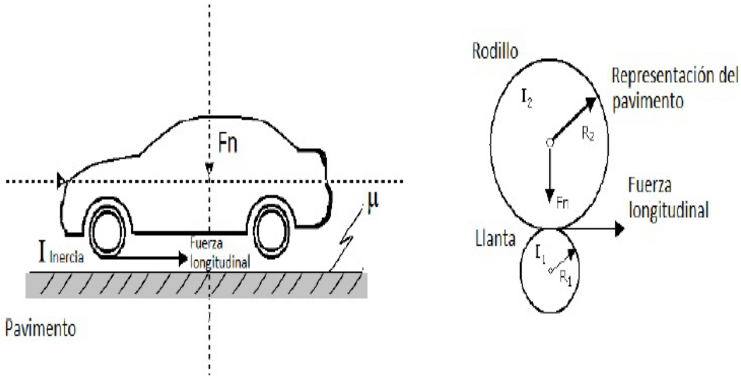

Figura 4.1: Representación de un cuarto de vehículo.

un mayor nivel de adherencia que los neumáticos con dibujo si lo hace sobre superficies secas y duras. Conociendo las dimensiones de los elementos (llanta-rodillo), es necesario hacer un análisis dimensional de los elementos que conforman el banco de pruebas, para elegir convenientemente el servomotor. Vease figura 4.2

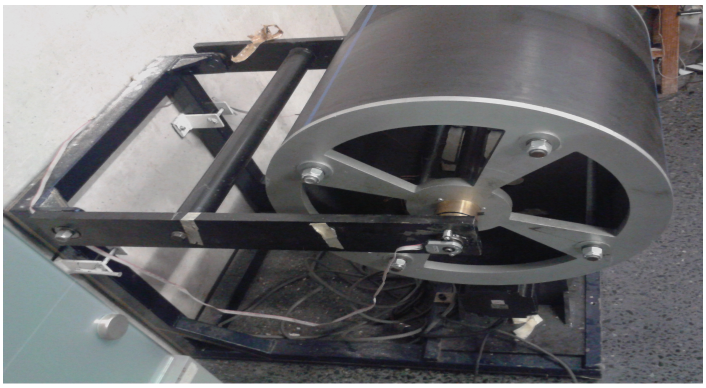

Figura 4.2: Banco de pruebas.

4.2. Análisis dimensional del banco de pruebas

Para realizar la adquisición del servomotor que se adquirió para realizar la construcción del banco, fue necesario conocer el torque requerido, por lo que se hizo una relación de radios R_1 y R_2, de velocidades angulares ω_1 y ω_2 asi como los torques τ_1 y τ_2 (Aguilar 2008a) Para poder adquirir el servomotor que moverá el sistema necesariamente necesitamos el par requerido del sistema. Para ello utiizamos la relación de radios R_1 y R_2, de velocidades angulares ω_1 y ω_2, así como los pares τ_1 y τ_2 (Aguilar 2011) Se sabe que

$$R = \frac{R_2}{R_1} > 1 \tag{4.1}$$

se toma en cuenta la relación

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \tag{4.2}$$

donde $v = \omega_1 R_1$, haciendo los despejes necesarios se tiene

$$\omega_1 = r\omega_2 \tag{4.3}$$

Con la segunda derivada de la ecuación (4.3) se tiene

$$\alpha_1 = r\alpha_2 \tag{4.4}$$

donde α_1 y α_2 son las aceleraciones angulares. Con respecto a los pares se pueden relacionar a través de las siguientes ecuaciones

$$F = \tau_1 R_1 \tag{4.5}$$

$$F = \tau_2 R_2 \tag{4.6}$$

despejando τ_2 y sustituyendo la relación de los radios

$$\tau_2 = \frac{R_2}{R_1}\tau_1 = r\tau_1 \tag{4.7}$$

se pueden relacionar los pares τ_1 y τ_2 a través de las inercias I_1 y I_2, y de las aceleraciones angulares α_1 y α_2 de la siguiente manera

$$\tau_1 = I_1\alpha_1 \tag{4.8}$$

$$\tau_2 = I_2\alpha_2 \tag{4.9}$$

Finalmente considerando la relación de inercias que existe entre el rodillo y la llanta en el banco de pruebas, se deduce la fórmula que relaciona a las inercias y aceleraciones

$$\tau_1 = \left[I_1 + \frac{I_2}{r^2} \right] \alpha_1 \tag{4.10}$$

El radio de la llanta es de $R_1 = 0.12[m]$ y el radio del rodillo es $R_2 = 0.36[m]$. La máxima velocidad de la llanta se fijó en $v = 13[m/s]$ (Aguilar 2008a), por lo que la llanta girará a una velocidad máxima de 1031 RPM. Para la aceleración se especifica que tenga un valor máximo de $4.3[m/s^2]$, entonces el valor máximo para α_1 es de $35.83[rad/seg^2]$.

Con estos valores se adquirió el servomotor Yaskawa SGMPH. El cuadro muestra los datos mecánicos del servomotor. Las dimensiones del servomotor se muestran en el cuadro (4.2) de acuerdo a la figura 4.3

Las dimensiones del motor y valores nominales son las siguientes

Parámetro	Valor	Unidad
Voltaje	200	V
Amperaje	15	A
Par	4.77	Nm
Potencia Nom	1500(2.01)	W (hp)

Cuadro 4.1: Valores nominales del servomotor

Parámetro	Valor	Unidad
a	200	[mm]
b	80	[mm]
c	14	[mm]
d	45	[mm]

Cuadro 4.2: Dimensiones del servomotor

La estructura experimental está dividida en dos secciones. La parte que se conforma con el servomotor y la llanta, y la parte conformada por el rodillo.

En la primera sección la llanta está acoplada directamente al eje del servomotor por medio de una extensión realizada al eje, En uno de los extremos del eje se incorporó un rodamiento de rodillos

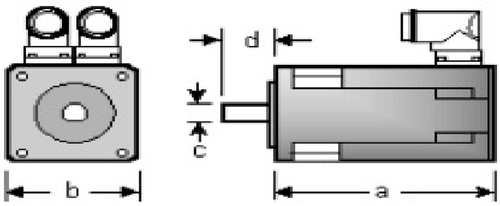

Figura 4.3: Dimensiones del Servomotor.

acilíndricos. El servomotor está sujeto a un soporte de acero; la llanta está colocada dentro de los soportes de acero.
Asimismo se diseñaron los dispositivos mecánicos (opresores) que impiden el movimiento lateral de la llanta (ver la figura 4.4) Los materiales que se eligieron para la fabricación del banco con-

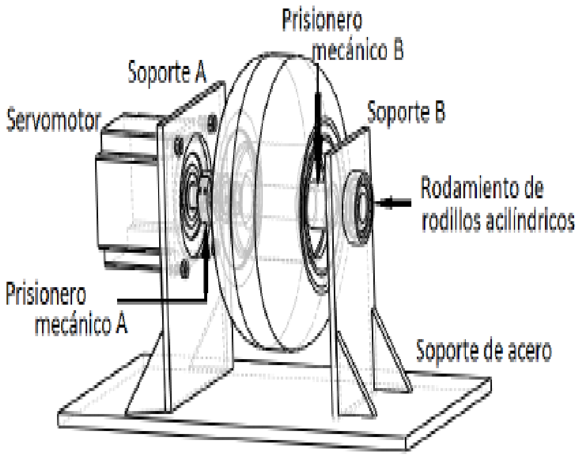

Figura 4.4: Esquema del acoplamiento llanta-servomotor.

sideran varios aspectos mecánicos, entre ellos la resistencia mecánica, maleabilidad, resistencia a esfuerzos dinámicos y facilidad de maquinado. Se usaron acero y aluminio. El diseño final del banco se muestra en la figura 4.6. El rodillo cuenta con un encoder que está acoplado a la flecha con el cual se pueden hacer mediciones posición ya que está conectado a la tarjeta de adquisición de datos (Humosoft). El encoder del servomotor está conectado a la tarjeta de adquisición (Humosoft) con el cual de la misma manera del encoder del rodillo se puede conocer posición.

El eje del rodillo y los brazos tienen movimiento libre para asegurar el contacto entre la llanta y el rodillo (véase figura 4.5)

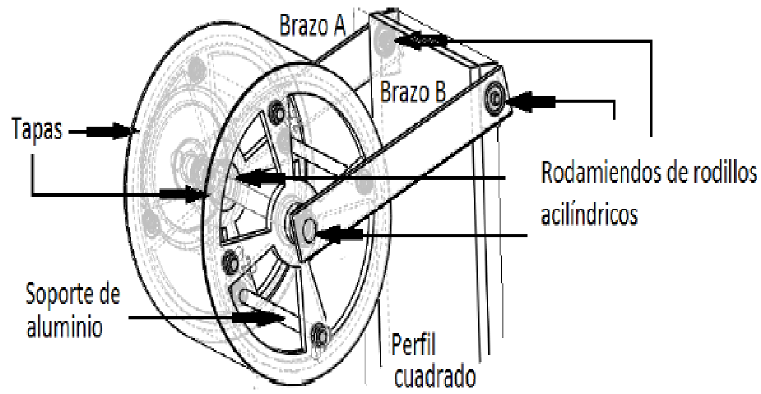

Figura 4.5: Rodillo (Representación de un cuarto de vehículo en el banco de pruebas).

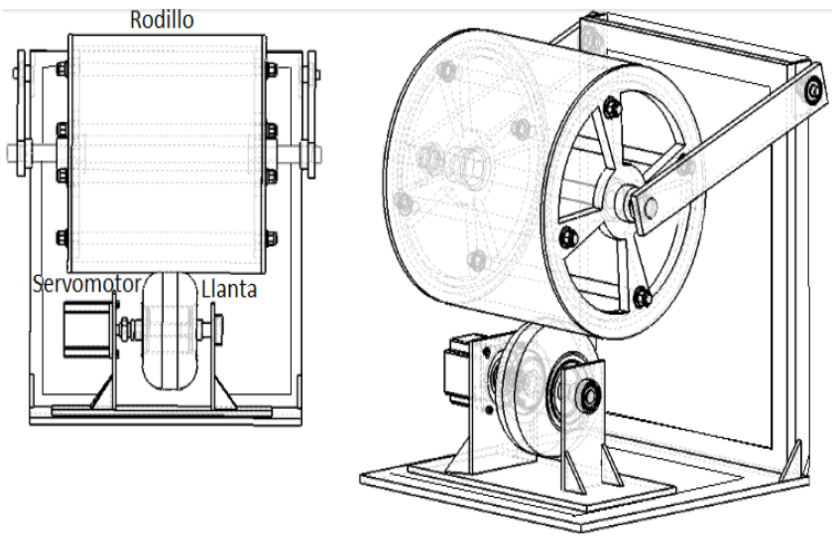

Figura 4.6: Banco de pruebas final.

4.3. Modelo matemático del banco de pruebas

El funcionamiento del banco de pruebas comienza cuando la llanta que está acoplada al motor, hace girar al rodillo con un par de Tm que se encuentra sobre esta. Matemáticamente la dinámica rotacional se describe con la siguiente ecuación

$$I_1\dot{\omega}_1 = T_m - T_{c1} - R_{1F} - B_1\omega_1 \tag{4.11}$$

Donde I_1 es la inercia de la llanta, R_1 el radio de la llanta, T_m el torque proporcionado por el motor eléctrico, T_{c1} es el par perdido por fricción seca en los rodamientos, $B_1\omega_1$ es la fricción viscosa y F la fricción que se genera al contacto con la llanta y el rodillo. Haciendo el mismo análisis para el rodillo, la ecuación que describe su dinámica es la siguiente

$$I_2\dot{\omega}_2 = R_2F - T_{c2} - B_2\omega_2 \tag{4.12}$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) describen las dinámicas rotacionales de la llanta y el rodillo. La interacción se hace a través de la fuerza de fricción F.

La velocidad relativa se describe con la ecuación

$$V_r = R_2\omega_2 - R_1\omega_1 \tag{4.13}$$

Donde R_1 y R_2 son los radios de la llanta y rodillo respectivamente, ω_1 y ω_2 son las velocidades angulares de llanta y rodillo.

Donde I_2 es la inercia del rodillo, R_2 es el radio del rodillo, T_{c2} es el par perdido por fricción seca de los rodamientos, $B_2\omega_2$ es la fricción viscosa y F la fricción entre el rodillo y la llanta, la cual en caso del rodillo es la que produce el movimiento, caso contrario en la llanta que significa pérdida de par.

4.4. Conexión de dispositivos del banco de pruebas

El servomotor Yaskawa SGMPH cuenta un manejador, denominado como modulo SGDH. El diagrama de conexiones entre manejador y servomotor se muestra se muestra en la figura 4.7. El manejador cuenta con entradas analógicas para velocidad, par y control de posición. Estas entradas serán proporcionadas por el controlador programado proveniente de MATLAB con lenguaje de programación C, utilizando una tarjeta de adquisición de datos, Humosoft MF624. El manejador recibe señales que van de valores como de ± 2 a ± 10 volts y en par de ± 1 a ± 10 volts, estos valores son directamente proporcionales a la velocidad y par toque máximo del servomotor.

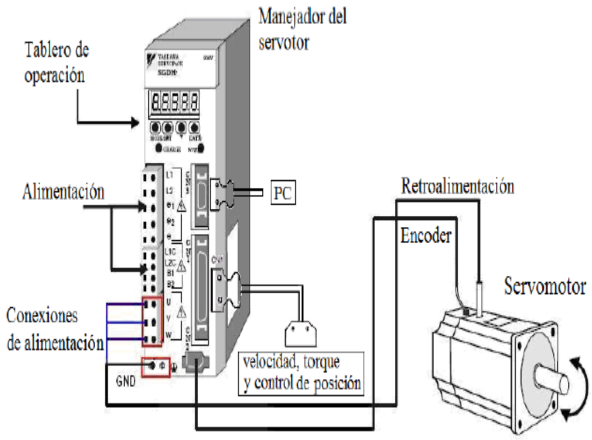

Figura 4.7: Diagrama de conexión manejador motor.

4.5. Instalación y configuración de la tarjeta de Humosoft

Para realizar la implementación de los controladores se utilizó la aplicación del paquete de MATLAB xPC Target es un *toolbox* de la compañía *The Math Works* para el desarrollo de sistemás en tiempo real. En particular es adecuado para el control en tiempo real de procesos ya que permite a la PC comunicarse con el exterior usando la tarjeta de adquisición de datos, en este caso la tarjeta multifuncional Humosoft MF624. El xPC Target requiere algunos programás extra de *The Math Works* como son:

- MATLAB - Control de la interacción con el software xPC Target
- Simulink - Modelo de sistemás dinámicos, físicos y controladores utilizando diagramás a bloque
- Real-Time Workshop - Convierte bloques de Simulink y gráficos en código de C.
- Compilador C - Utiliza un compilador C y el Real-Time Workshop para construir una aplicación.
- xPC Target - Implementa aplicaciones independientes de destino y aplicaciones personales de interfaz gráfica de usuario que se comunica con la aplicación destino

La aplicación se desarrolló en una PC de escritorio que se denomina *host*, es donde se tiene instalado MATLAB, Simulink, Real-Time Workshop, así como un compilador C que exige MATLAB. Toda la programación hecha por usuario se hace en Simulink para posteriormente crear un código ejecutable generado por el Real-Time Workhshop. El xPC Target utiliza este código ejecutable para generar una imagen ejecutable. Real Time-Workshop soporta los compiladores C y C++. Versiones 5.0, 6.0 y 7.0. Para el banco de pruebas se utilizó el compilador Microsoft Visual C/C++ versión 6.0.

En la segunda PC denominada *host* es donde está alojada la tarjeta de adquisición de datos Humosoft. Aquí es donde se carga el código ejecutable que genera Real Time-Workshop, para que se ejecute la aplicación en tiempo real en la segunda PC. El PC target funciona con un núcleo en tiempo real que genera el toolbox del xPC target. Una vez cargado el sistema operativo, desde el PC host se descarga el código generado a partir del diagrama de *Simulink*. La comunicación entre el host y target se realiza vía red. LAN (red de área local) bajo el protocolo **TCP/IP** para comunicación, los datos son transferidos a 100 mbps. Nota: La mayor parte de material de este capítulo se obtuvo de (Aguilar 2012)

Figura 4.8: Diagrama de Conexión entre Host y PC Target

Capítulo 5

Resultados experimentales en el banco de pruebas

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el banco experimental que son los parámetros de la instalación, parámetros del modelo de fricción de LuGre y uno de los controladores expuestos en la literatura mencionada en el capítulo 2. La obtención parámetrica básicamente se divide en 2 partes, obtención de parámetros fuera de línea, y obtención de parámetros en línea. Los parámetros a estimar de la instalación son I_1, R_1 y B_1 que corresponde a la llanta. I_2, R_2 y B_2 que pertenecen al rodillo. Los parámetros del modelo de fricción de LuGre son σ_0, σ_1, σ_2, F_c, F_s, v_s. Los parámetros σ_0 y σ_1 están relacionados con la parte dinámica del estado z, mientras que los parámetros F_s, F_c y v_s están relacionados al fenómeno estático de la fricción. σ_2 es el parámetro de fricción viscosa. A continuación se presenta de una manera más detallada la obtención paramétrica y posteriormente lo resultados experimentales de los controladores.

Las lecturas de velocidades y aceleraciones que se requieren para realizar la estimación paramétrica de la llanta y el rodillo se realizan mediante encoders que están acoplados en las flechas de cada uno de estos respectivamente. Como se sabe los encoders dan posición mediante pulsaciones eléctricas, para obtener velocidades y aceleraciones es necesario derivar estas señales, el inconveniente con derivar una señal es el ruido que se genera, por lo que con ayuda de MATLAB se diseño un filtro de grado 2 con frecuencia de corte $\omega_n = 2\ rad/s$.

5.1. Obtención del radio del rodillo

Primero se comenzó con la obtención del radio del rodillo, ya que es el parámetro con menor o nula variación del banco, se procedió a medirlo con un flexómetro, y nos dio como resultado

$$R_2 = 0.2535m \tag{5.1}$$

El resultado es el mismo al que se generó en el diseño escrito en (Aguilar 2012) Para encontrar el radio de la llanta se infló a una presión de 30 psi, midiendo la distancia que existe entre el rodillo y el centro de la placa donde está montada la flecha de la llanta. Se dividió la circunferencia del rodillo en 36 partes iguales y se tomó la medición con un calibrador. Finalmente se obtuvó el promedio de las mediciones el cual es

$$R_1 = 0.1338m \tag{5.2}$$

5.2. Obtención parámetros de la llanta

Para la obtención de los parámetros de la llanta $I1$ y $B1$ se desmontó el rodillo del banco de pruebas dejando libre de girar a la llanta. Lo que modifica la ecuación (4.11) se obtiene

$$I_1\dot{\omega}_1 = T_m - B_1\omega_1 - T_{c1} \tag{5.3}$$

Los experimentos se realizarón sabiendo que se conoce a T_m estableciéndolo en un rango de pares que entrega el motor desde el 20 % al 100 %.

$$T_m = I_1\dot{\omega}_1 + B_1\omega_1 + T_{c1} \tag{5.4}$$

Se parametriza el modelo de la forma $y = \phi^T\theta$ y se obtiene

$$T_m = \begin{bmatrix} 1 & \omega_1 & \dot{\omega}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c1} \\ B_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Para realizar la identificación de parámetros se eligió utilizar el método de mínimos cuadrados por lote o fuera de línea por su simplicidad y confiabilidad (Astrom 1996).
Se obtuvieron 560 datos en cada prueba de los diferentes pares del motor T_m. Despues de de aplicar el algoritmo de minimos cuadrados, los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes

- $T_{C1} = 0.1421$
- $B_1 = 0.1053$
- $I_1 = 0.0053$

Para verificar la funcionalidad del método de mínimos cuadrados se grafica la salida contra los valores estimados (factor de correlación). También se grafica el error. Las gráficas se pueden apreciar en las figuras 5.1 y 5.2.

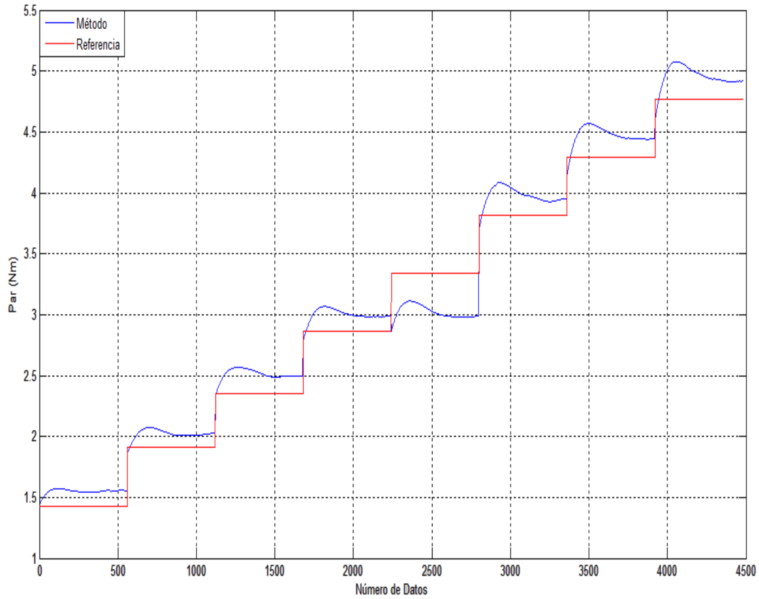

Figura 5.1: Ajuste de parámetros de la llanta.

Observando la gráfica del error se aprecia que el resultado final de la obteción de los parámetros del rodillo es bastante aceptable, ya que el error oscila entre valores de $[-0.1, 0.48]$.

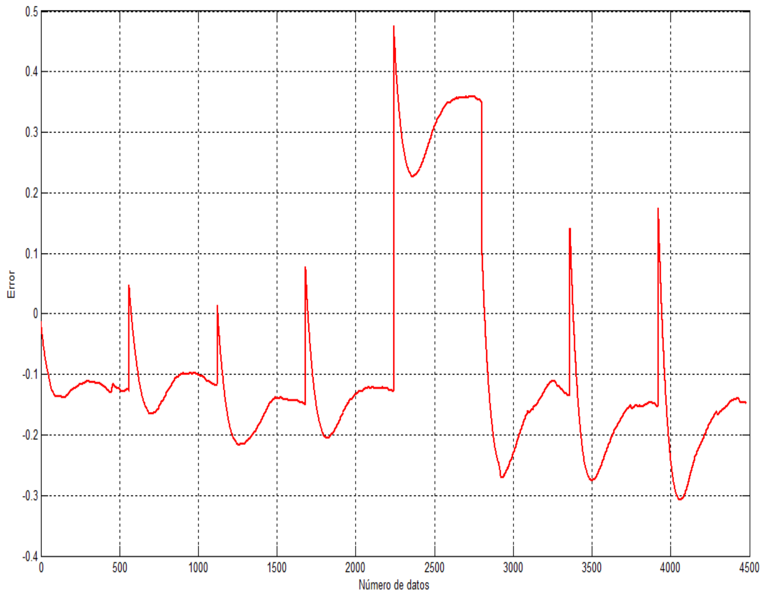

Figura 5.2: Error en el ajuste de parámetros de la llanta.

5.3. Parámetros del rodillo

Continuando con los experimentos se trata de caracterizar al rodillo, que se muestra en la figura 4.6. El modelo matemático que se utilizó para los experimentos es

$$I_2\dot{\omega}_2 = R_2F - B_2\omega_2 - T_{c2} \tag{5.6}$$

Donde I_2 es la inercia del rodillo T_{c2} es el par perdido por fricción seca de los rodamientos, $B_2\omega_2$ fricción viscosa y F es la fuerza de fricción generada entre la llanta y el rodillo.

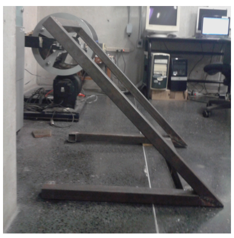

Figura 5.3: Palanca utilizada para levantar al rodillo.

El proceso que se utilizó para la adquisición paramétrica en el rodillo fue llevarlo a una velocidad constante mediante la fuerza de fricción F que se genera con el contacto de la llanta. En el momento que el rodillo alcanzó una velocidad constante, se levantaba lo más rapido posible con la estructura diseñada hasta que la velocidad llegara a cero.

Se diseñó una estructura metálica para poder levantar el rodillo de la llanta de una manera uniforme y con menor esfuerzo (5.2), de tal manera que una sola persona pudiera hacerlo de manera uniforme y se evitara desbalanceo.

Este procedimiento se repitió 6 veces utilizando un rango de pares que entrega el motor eléctrico que fueron del 50 % al 100 %.

Como el rodillo no es impulsado directamente por el motor como sucede con la llanta, fue necesario utilizar la ecuación (4.11) que describe la dinámica total del banco de pruebas, teniendo como conocimiento previo de los parámetros de la llanta se despejó F para poder sustituirla en (4.12) se obtuvo

$$F = \frac{T_m - B_1\omega_1 - T_{c1} - I_1\dot{\omega}_1}{R_1} \tag{5.7}$$

Ya que se tiene conocimiento de F se considera que el rodillo no tiene aceleración $I_2\omega_2 = 0$ ya que llega a una velocidad constante, la ecuación (4.12) se transforma en

$$R_2F = B_2\omega_2 + T_{c2} \tag{5.8}$$

Con la ecuación (5.8) se pueden obtener B_2 y T_{c2}, aplicando el algoritmo de mínimos cuadrados. En promedio se obtuvieron $60,000$ datos por experimento, ya que dependiendo del par con el que se moviera el rodillo aumentaba su velocidad y por consiguiente el tiempo en el que llegaba a detenerse totalmente.

El modelo parametrizado de (5.8) es

$$R_2F = \begin{bmatrix} 1 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c2} \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Se generó una tabla que relaciona velocidades angulares con porcentajes y fuerzas multiplicadas por R_2, para poder utilizar el método de mínimos cuadrados.

Utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados los resultados son

% par	Prom. Vel. llanta (ω)	R_2F (Nm)
50	6.8	2.82
60	10.195	3.11
70	14.02	3.26
80	17.977	3.374
90	21.962	3.482
100	26.285	3.254

Cuadro 5.1: Valores experimentales para obtención de parámetros de rodillo

- $T_{c2} = 2.705$

- $B_2 = 0.0676$

Verificando la fiabilidad del método se obtienen la aproximación que se observa en la figura 5.4, así como el error que se observa en la figura 5.5. Se concluye que el resultado de esta aproximación

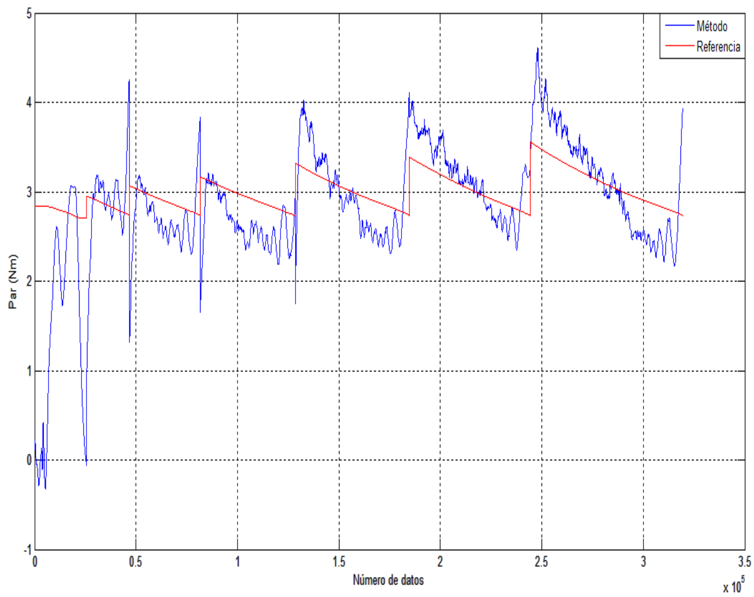

Figura 5.4: Ajuste de parámetros llanta-rodillo.

es buena ya que el error oscila entre valores de $[-0.1, 0.1]$

Como el procedimiento para obtener los parámetros del rodillo no es directo como el de la llanta, se hace una nueva tanda de experimentos con la diferencia que ahora la llanta y el rodillo

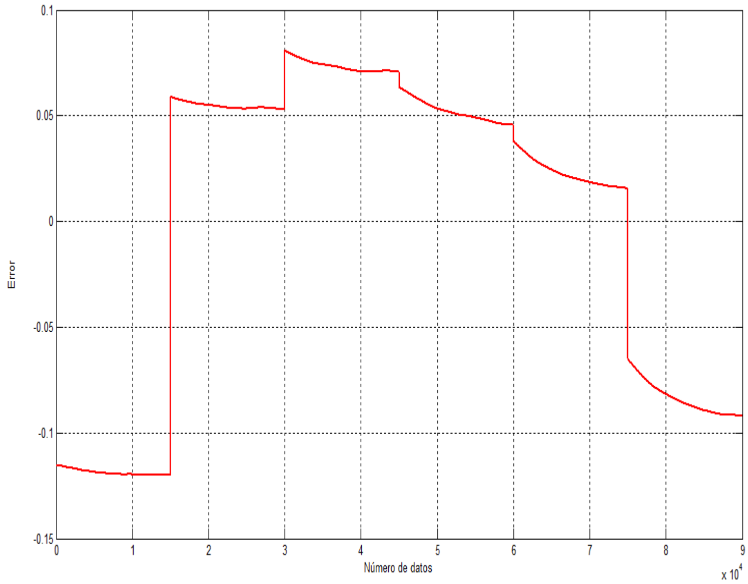

Figura 5.5: Error de ajuste de parámetros llanta-rodillo.

acoplados sin levantar a este último con la estructura.

Se utilizan los dos parámetros ya obtenidos en los experimentos anteriores y ahora se mide la aceleración del rodillo hasta que llegue a una velocidad constante. Se utiliza ahora como y a la suma de $B_2 + I_2\dot{\omega}_2$. Utilizando el metodo de minimos cuadrados para la obtención de I_2

- $I_2 = 19.451$

La aproximación y el error se observan en las figuras 5.6 y 5.7 respectivamente El resultado final de la obtención paramétrica de I_2 es aceptable ya que aquí la oscilación del error es mayor y se encuentra entre valores $[-1, 3]$

5.4. Efecto Stribeck

Este efecto relaciona la magnitud de la fuerza de fricción con velocidad relativa v_r. La fuerza de fricción es descrita por

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v_r \tag{5.10}$$

$$\dot{z} = v_r - \sigma_0 f(v_r) z \tag{5.11}$$

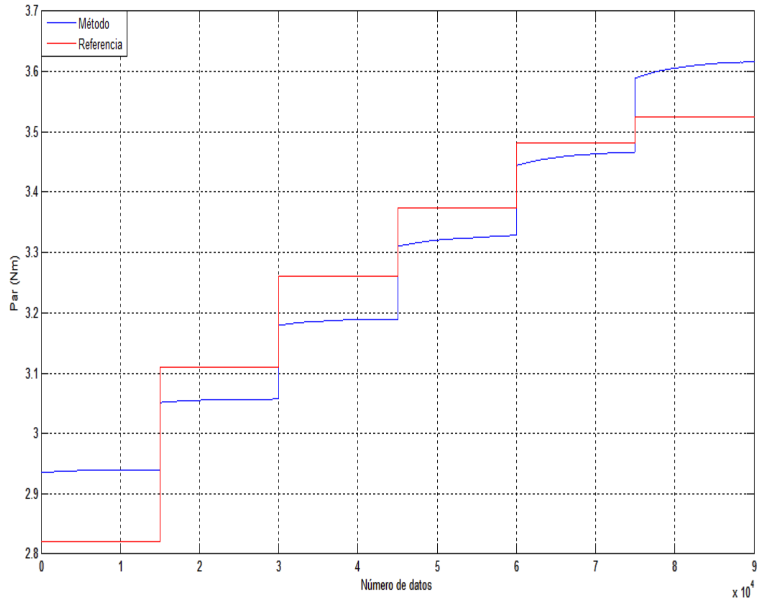

Figura 5.6: Ajuste de parámetros en rodillo.

La fuerza en estado estacionario se obtiene de igualar a cero la ecuación 5.11 y sustituirla en 5.10

$$F = f(v_r) + \sigma_2 v_r \tag{5.12}$$

o también se puede escribir de la siguiente manera

$$F = F_c + (F_s - F_c)e^{-|(\frac{v_r}{v_s})|^{1/2}} \tag{5.13}$$

A altas velocidades se considera que el comportamiento de la fricción es líneal por lo que se considera que la ecuación (5.13) se reescriba de la siguiente forma

$$F = F_c + \sigma_2 v_r \tag{5.14}$$

Por lo que utilizando la ecuación (5.7) para conocer la fuerza, y midiendo la velocidad relativa, se continuó con la utilización del algoritmo de mínimos cuadrados, se obtuvieron como resultados

- $F_c = 9.902$

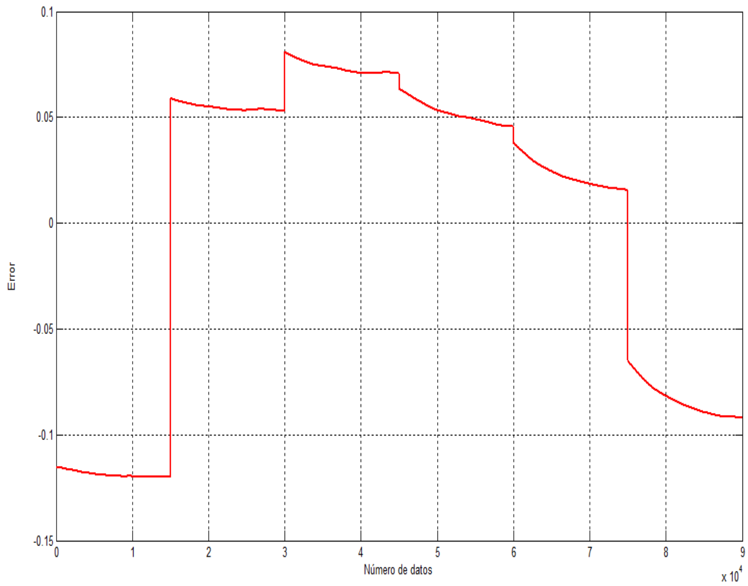

Figura 5.7: Error de ajuste de parámetros en rodillo.

- $\sigma_2 = 31.302$

Para la obtención de F_s se tomó la fuerza de fricción más pequeña con la que comenzó a haber movimiento en el banco de pruebas, la cual es

- $F_s = 10.65$

La gráfica de la aproximación para F_c y σ_2 se muestra en la figura 5.8. El erro de la aproximación de F_c y σ_2 se observa en la figura 5.9 Se concluye que el resultado del método es bueno ya que el erro se encuentra entre valores de $[-0.4, 0.6]$

5.5. Obtención de velocidad de Stribeck v_s

La obtención de este parámetro fue el más complicado de toda la instalación, ya que debido a ser de una magnitud pequeña y sobre todo por estar asociado a un fenómeno altamente no líneal. Para encontrar este parámetro se inició desde un torque de valor $\tau = 0$, se fue incrementando hasta que el banco se ponía en movimiento.

Como ya se conocen todos los demás parámetros de la instalación, se multiplicó ecuación (5.13)

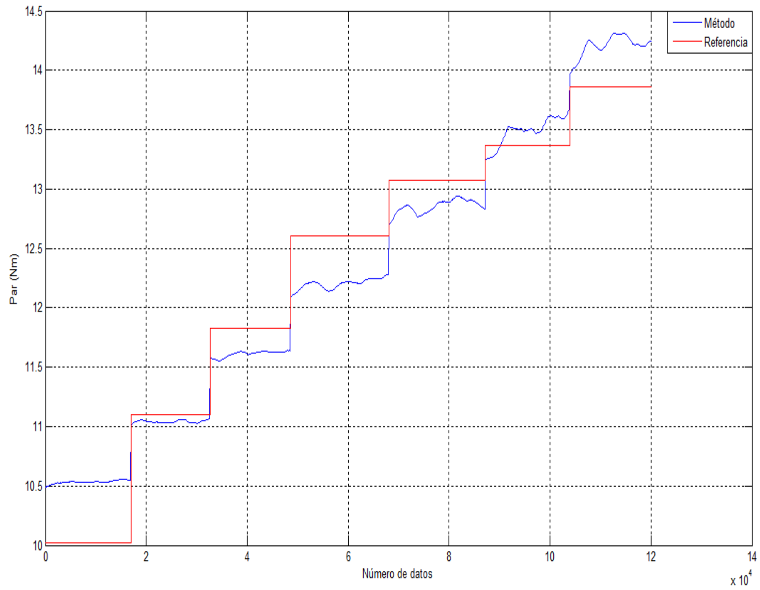

Figura 5.8: Ajuste de parámetros F_c y σ_2.

por su logaritmo natural, quedando de la siguiente forma

$$\Big[ln(F - F_c - \sigma_2 v_r) - ln(F_s - F_c)\Big]^2 = [v_r]\left[\frac{1}{v_s}\right] \tag{5.15}$$

Se realizaron 20 diferentes pruebas, de las cuales se eligió un experimento el cual se asemejara más al efecto de velocidad de Stribeck.
Para finalizar se aplicó el algoritmo de mínimos cuadrados lo cual dio como resultado

- $v_s = 0.0078$

La gráfica de la aproximación para v_s se muestra en la figura 5.10. El error se observa en la figura 5.11

Se concluye que este resultado es bastante malo ya que el error va creciendo. Finalmente se utiliza este resultado de v_s al no contar con algún dispositivo que pueda medir el par de entrada. Se deja como trabajo a futuro.

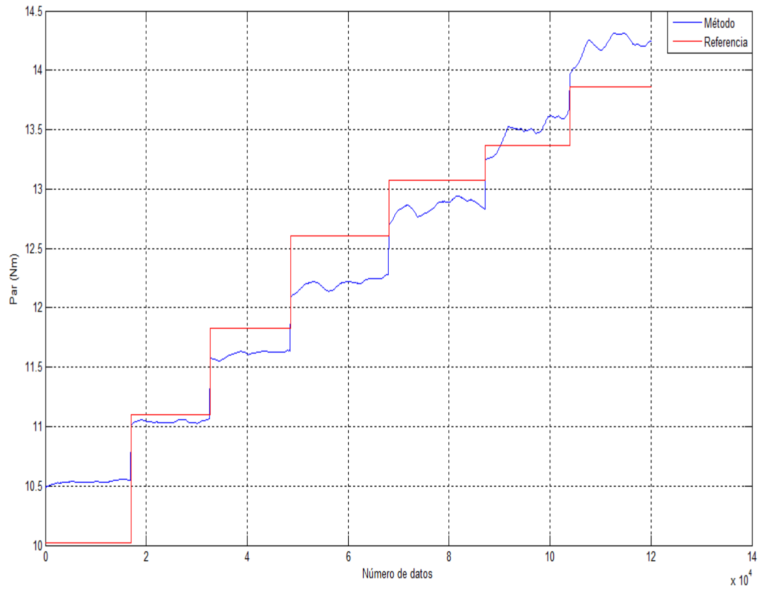

Figura 5.9: Error de ajuste de parámetros F_c y σ_2.

5.6. Obtención de σ_0 y σ_1

La obtención de estos parámetros no es tan directa cómo todos los demás, ya que se necesita conocer el estado z para obtener el valor de σ_0. Por lo que se utiliza el observador que se encuentra en (Canudas y Horowitz 1999)

$$\dot{\hat{z}} = v_r - \frac{\hat{\sigma}_0 |vr|}{h(vr)} \hat{z} \tag{5.16}$$

Donde $h(vr) = F_c + (F_s - F_c)e^{(-\frac{vr}{vs})^{1/2}}$

$$Y = U\Theta \tag{5.17}$$

Introduciendo la ecuación (5.11) en la ecuación (5.10) se obtiene

$$F = \sigma_0 z - \sigma_0 \sigma_1 \frac{|v_r|}{f(vr)} z + (\sigma_1 + \sigma_2) v_r \tag{5.18}$$

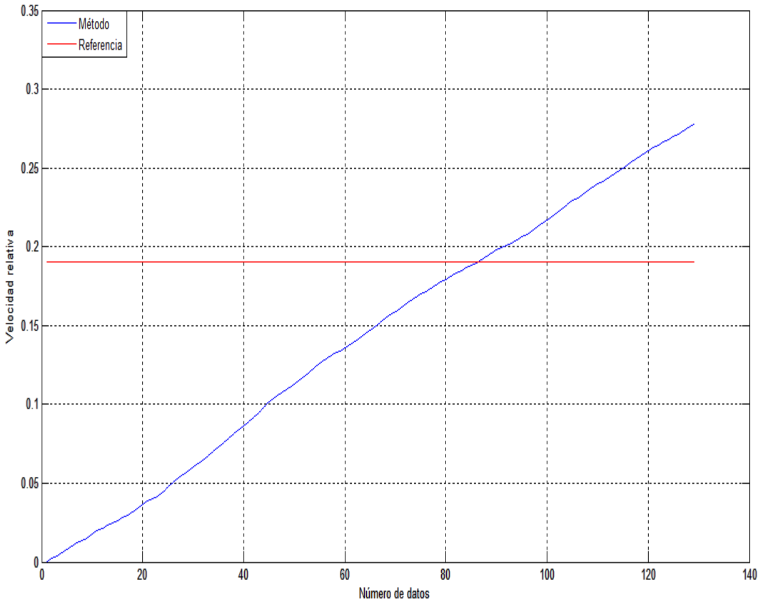

Figura 5.10: Ajuste velocidad de Stribeck.

Escribiéndolo en forma paramétrica se tiene

$$F = \begin{bmatrix} z & -\frac{|v_r|}{f(v_r)}z & vr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Donde $\sigma_3 = \sigma_0\sigma_1$ y $\sigma_4 = \sigma_1 + \sigma_2$.

Se utiliza el algoritmo de minimos cuadrados recursivos con factor de olvido, ofrece robustez en comparación con otros algoritmos de estimación.

$$\dot{P} = \beta P - P\frac{\phi\phi^T}{m_s^2}P \tag{5.20}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = P\epsilon\phi \tag{5.21}$$

Donde $P^{(nxn)}$ es la matriz de ganancias, $\beta^{(1x1)}$ es la constante del factor de olvido $\in [0,1]$, $\phi^{(nx1)}$ es el vector de estados, $m_s^2 = 1 + n_s^2$, $n_s^2 = 0$, $\epsilon^{(1x1)}$ es el error de estimación.

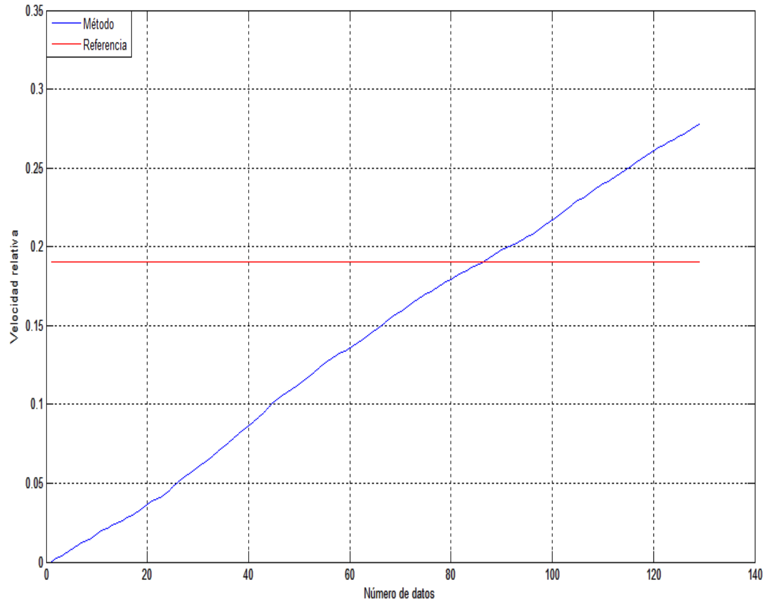

Figura 5.11: Error de ajuste velocidad de Stribeck.

Después de evaluar P, ya es posible encontrar los parámetros se tiene

$$\dot{\theta} = P\epsilon \begin{bmatrix} z \\ -\frac{|v_r|}{f(v_r)} \\ vr \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Al tratarse de un sistema mecánico y por limitanes de la tarjeta de adquisición de datos no fue posible hacer que el sistema siguiera una trayectoria con la frecuencia suficiente para que los parámetros convergieran, por lo que se utilizó un potenciometro para variar el torque. De esta manera se mejoró mucho la convergencia de los parámetros cómo puede observarse para σ_0 en la figura 5.12, para σ_1 en la figura 5.13, para σ_2 en la figura 5.14 y el error de convergencia que se encuentra en un ancho de banda se observa en la figura 5.15.

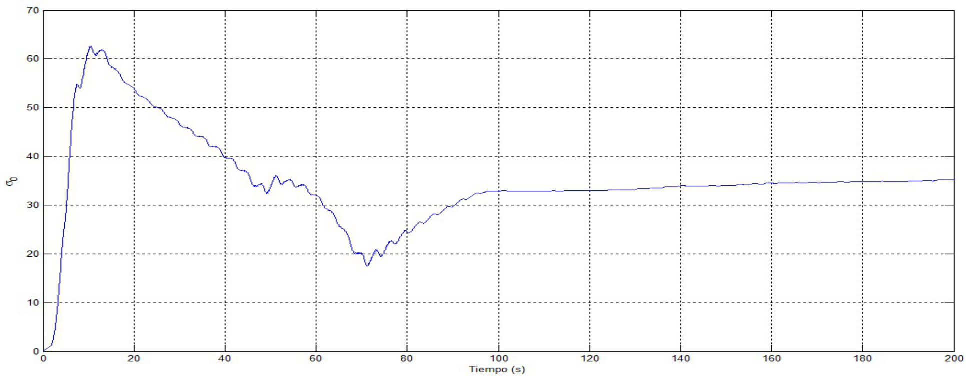

Figura 5.12: σ_0.

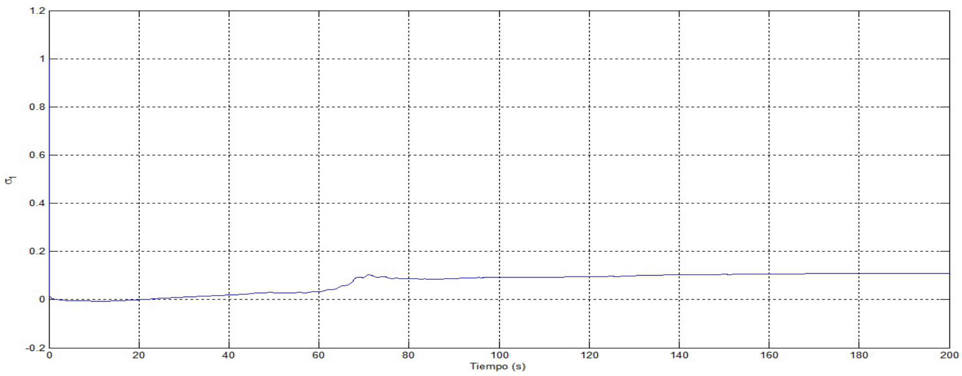

Figura 5.13: σ_1.

5.7. Resultados experimentales de la implementación del algoritmo de control

5.7.1. Ley de control para el banco de pruebas

Básicamente, lo que prueba el controlador es que se cuenta con una estabilidad de seguimiento de trayectorias. El controlador que se utiliza está explicado en la tesis (Aguilar 2012). Teniendo conocimiento previo de las ecuaciones (4.11) y (4.12) que se utilizan para describir la dinámica del sistema. Derivando respecto al tiempo la ecuación (4.13) y sustituyendo (4.11) y (4.12) se tiene

$$\dot{v}_r = R_2\left(\frac{R_2F - T_{c2} - B_2\omega_2}{I_2}\right) - R_1\left(\frac{\tau_m - Tc_1 - R1F - B_1\omega_1}{I_2}\right) \tag{5.23}$$

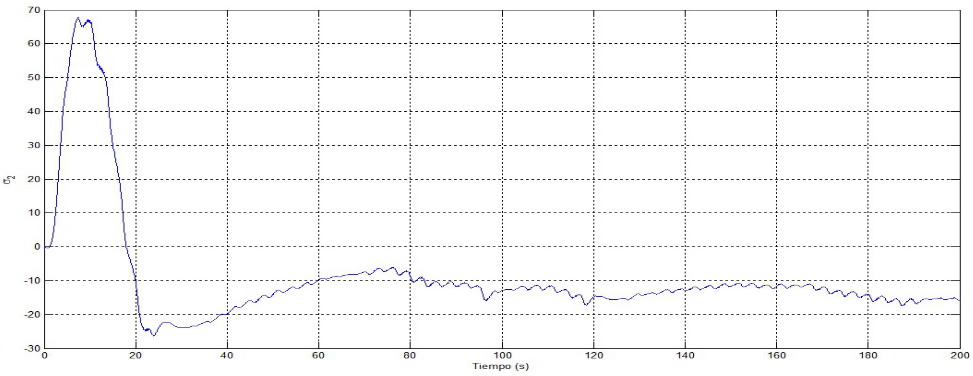

Figura 5.14: σ_2.

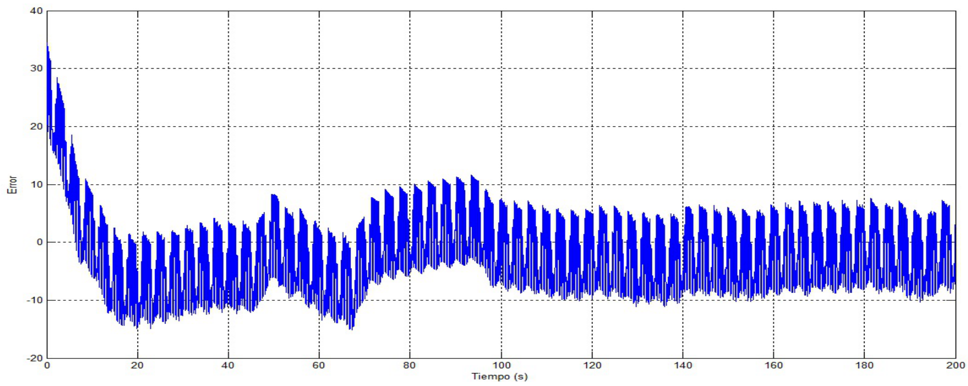

Figura 5.15: Error.

De la ecuación 4.11 se despejó ω_1 y se sustituye en (5.26). Acomodando términos se obtiene

$$\dot{v}_r = F\left[\frac{R_2^2}{I_2}+\frac{R_1^2}{I_1}\right] = \omega_2\left[-\frac{B_2R_2}{I_2}-\frac{B_1R_2}{I_1}\right]+v_r\left[\frac{B_1}{I_1}\right]-\tau_m\left[\frac{R_1}{I_1}\right]+\tau_{c1}\left[\frac{R_1}{I_1}\right]-\tau_{c2}\left[\frac{R_2}{I_2}\right] \quad (5.24)$$

Reacomodando las ecuaciones (5.24) y (4.12) para poder simplificar la ley de control se obtiene

$$\dot{\omega}_2 = C_1F - C_2\omega_2 - C_3 \quad (5.25)$$

$$\dot{v}_r = C_4F - C_5\omega_2 + C_6v_r - C_7\tau_m + C_8 \quad (5.26)$$

Donde $C_1 = \frac{R_2}{I_2}$; $C_2 = \frac{B_2}{I_2}$; $C_3 = \frac{T_{c2}}{I_2}$; $C_4 = \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}$; $C_5 = \frac{B_2R_2}{I_2} + \frac{B_1R_2}{I_1}$; $C_6 = \frac{B_1}{I_1}$; $C_7 = \frac{R_1}{I_1}$; $C_8 = \frac{\tau_{c1}R_1}{I_1} - \frac{\tau_{c2}R_2}{I_2}$

Los errores de de seguimiento tanto para ω_2 y v_r estan definidos respectivamente cómo

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{2d} \tag{5.27}$$

$$\tilde{v}_r = v_r - v_{rd} \tag{5.28}$$

Donde ω_{2d} y v_{rd} son los valores deseados para ω_2 y v_r. Derivando respecto al tiempo las ecuaciones (5.27) y (5.28) y sustituyendo en esta las ecuaciones (5.25) y (5.26) se obtienen las ecuaciones dinámicas de seguimiento que son

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = C_1 F - C_2\omega_2 - C_3 - \dot{\omega}_{2d} \tag{5.29}$$

$$\dot{\tilde{v}}_r = C_4 F - C_5\omega_2 + C_6 v_r - C_7\tau_m + C_8 - v_{rd} \tag{5.30}$$

Se propone una función candidata de Lyapunov donde se utiliza la dinámica del error de seguimiento

$$L_y = \frac{1}{2}\gamma\tilde{v}_r^2 \tag{5.31}$$

Derivando la ecuación (5.31) respecto al tiempo se tiene

$$\dot{L}_y = \gamma\tilde{v}_r\dot{\tilde{v}}_r \tag{5.32}$$

Sustityendo la ecuacion (5.30) en (5.32) se tiene

$$\dot{L}_y = \gamma\tilde{v}_r\Big[C_4 F - C_5\omega_2 + C_6 v_r - C_7\tau_m + C_8 - \dot{v}_{rd}\Big] \tag{5.33}$$

Por lo que la que la ley de control se obtiene utilizando la tecnica de backstepping y despejando τ_m de la ecuación (5.33), (Aguilar 2008a) que incluye el término de corrección $f\tilde{v_r}$ obteniendo finalmente

$$\tau_m = \frac{-C_4 f + C_5\omega_2 - C_6 v_r - C_8 + \dot{v}_{rd} - f\tilde{v}_r}{C_7} \tag{5.34}$$

Se contruye una velocidad angular deseada w_{2d} que será la trayectoria a seguir del banco de pruebas. La señal contruida tiene una frecuencia de $0.08\,rad/s$ con una amplitud de 9, se introducen dos funciones saturación que son los máximos y los mínimos de la funciona senoidal que se encuentran en el intervalo de $[5, 8]$. Se elige esta función senoidal con las características anteriormente mencionadas por que los coeficientes estático y dinámico, son de valores pequeños, por tal motivo el banco de pruebas no puede realizar pruebas con frecuencias medias y altas.

Conociendo ω_{2d} se obtiene la fuerza deseada (F_d) que a su vez se obtiene la velocidad relativa deseada (v_{rd}) con lo que se tienen todos los elementos para implementar el controlador en el banco de pruebas se obtuvieron las siguientes gráficas.

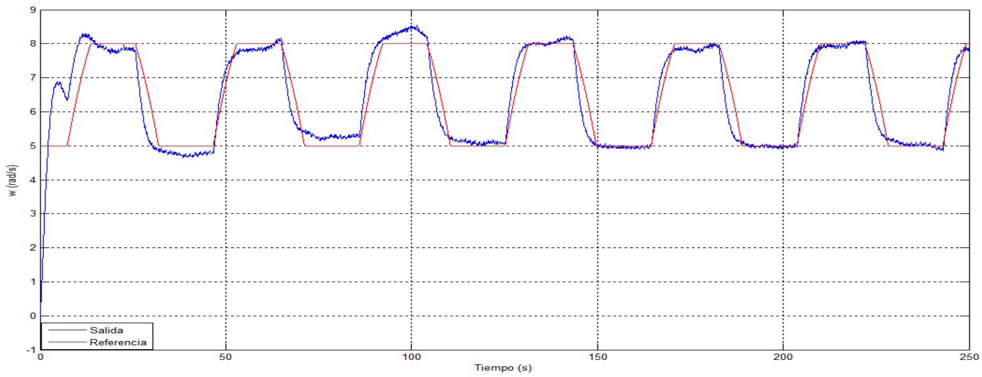

Figura 5.16: Velocidad angular deseada y velocidad angular real

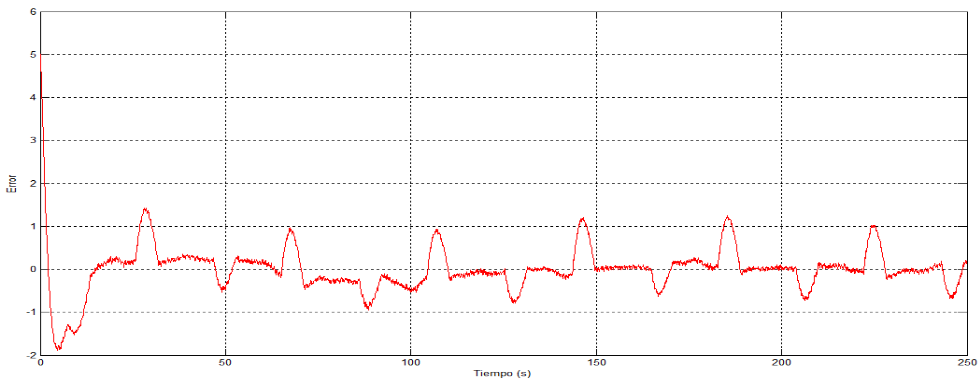

Figura 5.17: Error de velocidad angular

Se observa en la figura 5.16 la respuesta final de la implementación del controlador en el banco de pruebas. El error se observa en la figua 5.17. Se concluye que el resultado de velocidad es satisfactorio, ya que el error se encuentra en un intervalo de $[0\,\%, 12.5\,\%]$ por lo que en general no son representativos para el buen desempeño del experimento.

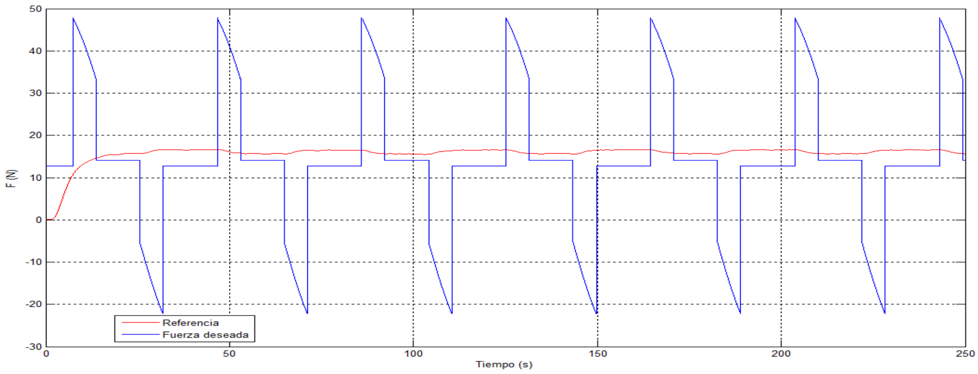

Figura 5.18: Fuerza deseada y fuerza real

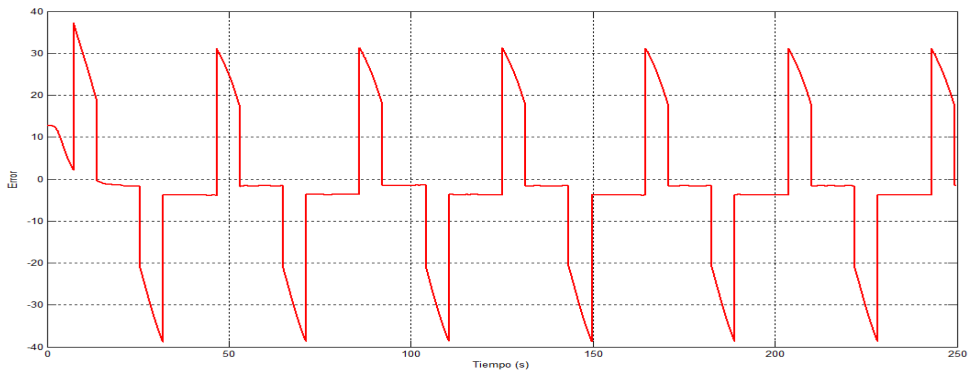

Figura 5.19: Error de fuerza

El resultado final que se obtuvo en la fuerza se observa en la figura 5.19, así como el error se encuentra en la figura 5.19. Es nulamente satisfactorio el resultado, ya que el error se encuentra en un intervalo de $[150\,\%, 300\,\%]$. Se intentó modificar este valor, pero al hacerlo ω_2 no convergia al valor deseado.

La gráfica 5.20 muestra el resultado obtenido en la velocidad relativa deseada y la velocidad relativa real. El error se puede observar en la 5.21. Como conclusión final el resultado obtenido aquí es nulamente satisfactorio ya que el error se encuentra en un intervalo de $[300\,\%, 350\,\%]$.

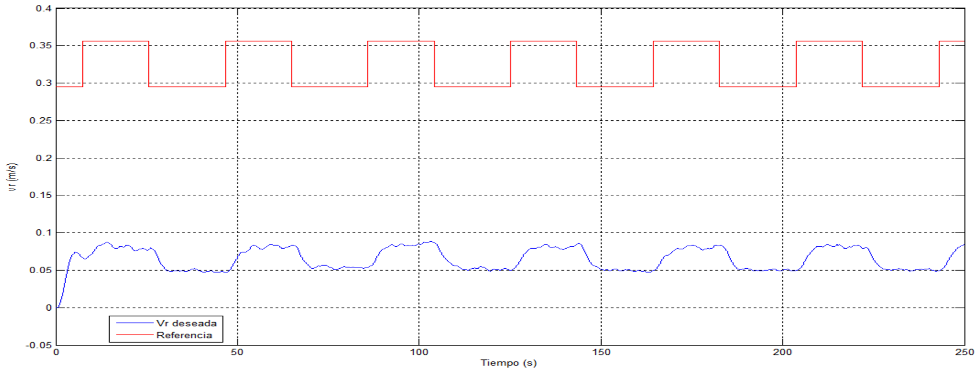

Figura 5.20: Velocidad relativa deseada y velocidad relativa real

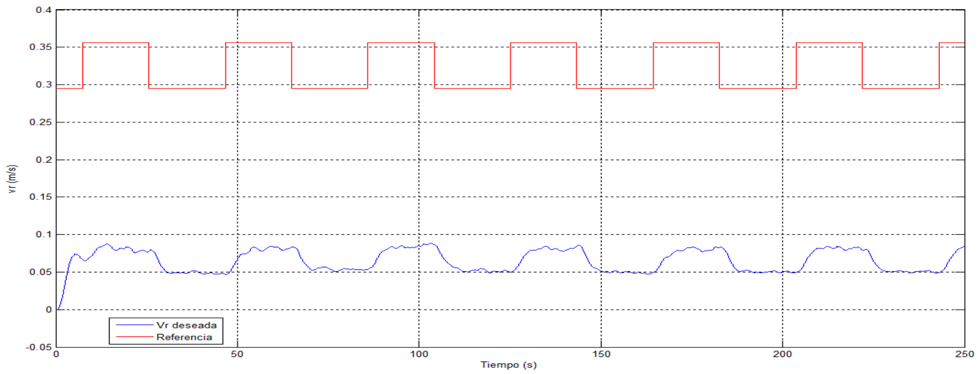

Figura 5.21: Error de velocidad relativa

Capítulo 6

Conclusiones

Se realizó en el presente trabajo para validar experimentalmente la aplicación del modelo dinámico de fricción de LuGre. Se presentó una nueva forma de adquisición de parámetros utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados que es más fiable que los metodos utilizados en los trabajos anteriores. De la misma manera se utilizó el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos para la adquisición de los parámetros en línea σ_0, σ_1 y σ_2, con lo que la convergencia de estos tres parámetros mejoró de manera satisfactoria, frente al anterior método utilizado de gradiente.

6.1. Resultados

Los resultados obtenidos son

- Se logró una mejor adquisición de parámetros fuera de línea con el método de mínimos cuadrados colectando un número de pruebas mucho mayor que en trabajos posteriores. El proceso de adquisición de datos fue de la misma manera para el caso de la llanta. En el caso del rodillo se realizaron dos pruebas, una con el rodillo y llanta acoplados y otro con la llanta elevada, que para tal motivo se construyó una palanca para levantar el rodillo lo más uniformemente posible, de esta manera la adquisición paramétrica del rodillo mejoró.
- La adquisición paramétrica para el modelo de LuGre mejoró ya que por primera vez se pudieron obtener datos que convergieran a valores con los cuales se pudo construir la gráfica deslizamiento-velocidad relativa. La convergencia de los parámetros es lenta, debido a que

el sistema no puede seguir una excitación de mayor frecuencia al tratatarse de un sistema mecánico, con respuesta limitada.

- Finalmente la parte de implementación del controlador para que siga el banco una entrada senoidal truncada con un máximo y un mínimo, que fue diseñada tomando en cuenta que los coeficientes de fricción estática y cinética son de baja magnitud, por lo que no se puede pedirle al banco que haga maniobras bruscas. El resultado se considera aceptable aunque la adquisición parámetrica del modelo de LuGre se puede mejorar.

6.2. Trabajo a futuro

- Balancear el rodillo.
- Implementar un sensor de par a la instalación para mejorar la adquisición parámetrica en general.
- Encontrar el problema de la diferencia entre las velocidades relativas deseadas y reales, así cómo también la fuerza deseada y real.
- Diseñar nuevos algoritmos de control que mejoren el seguimiento de trayectorias

Referencias

Aguilar, J. (2008a). *Diseño de una instalación experimental para estudiar la caracterización llanta-pavimento.* Tesis de Maestría. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad Universitaria, México, D.F.

Aguilar, J. (2012). *Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento*. Tesis de Doctorado Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad Universitaria, México, D.F.

Aguilar, J. y Alvarez-Icaza, L. (2008b). Análisis del área de contacto llanta-pavimento. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2011*, 177–182.

Aguilar, J. y Alvarez-Icaza, L. (2011). Caracterización teórica y experimental de la fricción llanta-pavimento. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2011*.

Alvarez-Icaza, L. Yi, J. (2000). Adaptive emergency brake control in AHS with underestimation of friction coefficient. *Proceedings of American Control Conference,(Chicago, IL)*, 574–579.

Alvarez-Icaza, L. Yi, J. H. R. y L. Olmos (2001). Observer based emergency braking control. *Proceedings of the 2001 American Control Conference, 2001 1, 19–24.*

Alvarez-Icaza, L. Yi, J. H. R. y L. Olmos (2005). Dynamic friction model-based, tire-road friction estimation and emergency braking control. Journal of dynamics systems measurement and control 127, 22–32.

Astrom, J. Witennmark, B. (1996). *Adaptive Control.* USA, Prentice-Hall, second ed.

Astrom, K. y C. Canudas (2008). Revisiting the LuGre Model, stick-slip motion and rate dependence. *IEEE Control Systems Magazine 6, 101–114.*

Bakker, E. Nyborg L. y Pacejka, H. (1987). Tyre modelling for use in vehicle dynamic studies. Society of Automotive Engineers*, Paper No. 870421.*

Bliman, P. y M. Sorine (1993). A system-theoretic approach of systems with hysteresis application to friction modelling and compensation. in Proceedings of 2nd European Control Conference, (Groningen, The Netherlands)*, 452–461.*

Canudas, C. y R. Horowitz (1999). Observers for tire/road contact friction using only wheel angular velocity. in Proceedings of the the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 3932–3937.*

Canudas, C. y P. Tsiotras (1999). Dynamic tire friction models for vehicle traction control. in Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA*, 3746–3751.*

Canudas, C. Petersen, M. y A. Shiriaev (2003). A new nonlinear observer for tire/road distributed contact friction. in Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control, December, Maui, Hawaii.*, 9–12.*

Canudas, C. Tsiotras, P. V. E. B. M. y G. Gissinger (2003). Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction. Vehicle System Dynamics 39, 189–226.

Canudas de Wit C., Olsson H., A. K. J. y L. P (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control 40, 419–425.*

Claeys, X. Yi, J. A.-I. L. H. R. y C. Canudas (2001). A new 3D dynamic tire-road friction model for vehicle control and simulation. 2001 Proceedings of the International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New York*, 483–488.*

Deur, J. (2001). Technical report, Ford Motor Company, Scientific Research Laboratory MD 1170, Dearborn, MI 48121-2053, USA. Proceedings of the 2001 American Control Conference. Chicago, IL*, 574–579.*

Deur, J. Asgari, J. y D. Hrovat (2001). A dynamic tire friction model for combined longitudinal and lateral motion. in Proceedings of the ASME-IMECE World Conference,New York, USA, November*, 289–292.*

Khalil, H. K. (1996). Nonlinear Systems*. USA, Prentice-Hall, second ed.*

Kiencke, U. y A. Daiss (1993). Realtime estimation of adhesion characteristic between tires and road. in Proceedings of the IFAC World Congress Volume 1, 2337–2351.

Kiencke, U. y A. Daiss (1994). Estimation of tyre friction for enhaced ABS-systems. *in Proceedings of the AVEG Congress. Tokyo*, 497–502.

Liu, Y. y J. Sun (1995). Target slip tracking using gain-scheduling for antilock braking systems. *in Proccedings 1995 of the American Control Conference, Seattle Washington*, 1178–1182.

M. Burckhardt, F. (1993). Radschlup fregelsysteme. *Vogel-Verlag*.

Mohammad, S. P. S. H. J. R. R. y Syabillah, S. (2012). Modeling and validation of magic formula tire model. *Proceeding of the International Conference on Automotive, Mechanical and Materials Enginnering ICAMME. Penang Malasya 19-20 May*, 113–117.

Olmos, L. (2001). Control de frenado de emergencia con base en modelos de fricción llanta pavimento. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.

Olmos, L. y L. Alvarez-Icaza (2003). Optimal emergency vehicule braking control based on dynamic friction model. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control 127, 1–22.*

Sorine, M. (1998). Applications of hysteresis models: Contact friction in tires, muscle contraction. in IEEE Conference on Decision and Control Workshop no.2, (Tampa, Florida)*, 1998.*

Sorine, M. y J. Szymanski (2000). A new dynamic multi DOF tire model. in Transportation Systems 2000, (Braunschweig, Germany)*, 1998.*

Szymanski, J. (1999). Modeles reduits du contact pneu-sol et applications a l' automobile. Technical Report, Renault, Technocentre Renault, Guyancourt, France*, 574–579.*

Velenis, E. Tsiotras, P. y C. Canudas (2002). Extension of the LuGre dynamic tire friction model to 2d motion. in Proceedings of the 10th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation - MED2002r Lisbon, Portugal 9-12.

Wong, J. (1993). Brake system requirements for platooning on an automated highway. *Theory of Ground Vehicles, 2nd Edition, Wiley, New York*.

Yamazaki S., F. O. y S. T. (1999). Study on real time estimation of tire to road friction. *Vehicle System Dynamics 27, 225–233.*

Yi, J. Alvarez, L. H. R. y X. Claeys (2003). Emergency braking control with an observed-based dynamic tire/road friction model and wheel angular velocity measurement. Vehicle System Dynamics 39, 81–97.

Yi, J. Alvarez-Icaza, L. H. R. y C. Canudas (2000). Adaptive emergency braking control using a dynamic road/tire friction model. *Proceedings of the 39th IEEE. Conference on Decision and Control, Sydney, Australia December 1, 456–461.*