



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

OBSERVADOR PARA SISTEMAS LTV CON ENTRADAS DESCONOCIDAS BASADO  
EN MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA  
RAFAEL LUGO SEGURA

TUTOR PRINCIPAL  
LEONID FRIDMAN, F.I.

MÉXICO D.F. FEBRERO 2014

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. María Cristina Verde Rodarte

Secretario: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Primer vocal: Dr. Leonid Fridman

Segundo vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Tercer vocal: Dr. Jorge Ángel Dávila Montoya

Facultad de ingeniería, México D.F.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Leonid Fridman

*Misura quello che è misurabile e rendi misurabile ciò che non lo è.*

**Galileo Galilei**

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería, institución a la cual no podría estar más orgulloso de pertenecer.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Al colegio de Control, por la formación que me dieron en esta etapa de mi vida profesional.

Al doctor Leonid Fridman, por sus pacientes revisiones y guía en la realización de esta tesis.

# Dedicatorias

A mi esposa Silvia, por tu apoyo incondicional y amoroso durante la elaboración de este trabajo. Por creer en mí muchas veces más de lo que yo mismo creía. Por ayudarme a superar todas las dificultades que la tesis representó. Por tu paciencia en días y fines de semana invertidos en la elaboración de la tesis. Por ser mi cómplice en cada proyecto de vida.

A mis padres Tomás y María Luisa, quienes hicieron de mí el hombre que soy y de lo cual estaré eternamente agradecido.

A mi hermano Alejandro, porque siempre has estado pendiente de mí, por tus palabras de ánimo durante toda mi formación profesional, porque hemos compartido juntos toda una vida y aún nos falta mucho más.

A mis compañeros Manuel, Daniel, Karla, Úrsula, Miguel, Uriel, Jared y César, que crearon un ambiente agradable de compañerismo durante nuestros estudios de maestría. En este grupo encontré no sólo compañeros, sino verdaderos amigos.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Estado del Arte .....	5
1.2. Objetivo .....	6
1.3. Planteamiento del problema .....	7
1.4. Contribución .....	7
1.5. Estructura .....	8
<b>2. Sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV)</b>	<b>9</b>
2.1. Linealización .....	9
2.2. Estabilidad .....	10
2.2.1. Sistemas no lineales .....	10
2.2.2. Sistemas lineales .....	12
2.3. Formas canónicas .....	14
2.3.1. Equivalencia de sistemas .....	14
2.3.2. Forma canónica de observador .....	15
2.3.3. Forma canónica de observabilidad .....	18
<b>3. Observabilidad</b>	<b>20</b>
3.1. Observabilidad Clásica .....	20
3.2. Observabilidad Diferencial .....	22
3.3. Observabilidad Fuerte .....	23
<b>4. Diseño del observador</b>	<b>25</b>
4.1. Estabilizador .....	26
4.2. Estimación del error .....	28
4.3. Diferenciador por modos deslizantes .....	30

4.3.1. Diferenciador de primer orden .....	31
4.3.2. Diferenciador de orden superior .....	32
<b>5. Ejemplos y simulaciones</b>	<b>34</b>
5.1. Sistema de segundo orden .....	34
5.2. Sistema de tercer orden .....	39
<b>6. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Estado del Arte

La observación de los estados de un sistema en presencia de entradas desconocidas es uno de los problemas más importantes en la teoría de control moderna. Se dice que un sistema es completamente observable si, a partir de las funciones de entrada y salida en un intervalo de tiempo finito, se puede deducir la trayectoria de los estados en el mismo intervalo de tiempo. En la práctica, se presentan muchos casos en los que algunas de las funciones de entrada no están disponibles, como por ejemplo, perturbaciones no medibles o dinámicas del sistema no modeladas, por lo que podemos distinguir entre entradas de control conocidas y entradas desconocidas. Cuando las ecuaciones del sistema son conocidas, es posible, incluso en presencia de perturbaciones, deducir la trayectoria de los estados a partir del conocimiento de las entradas de control y las salidas del sistema en un intervalo de tiempo finito; el orden del error de observación depende del tiempo de muestreo y de los ruidos en la medición.

En los primeros estudios sobre observabilidad para sistemas lineales invariantes en el tiempo [Basile y Marro, 1969], se encuentra una expresión conveniente del subespacio de observabilidad, la cual incluye las ecuaciones del observador, para el caso cuando las entradas son completamente conocidas. Posteriormente [Molinari, 1976] encuentra una transformación de familias de subespacios fuertemente observables, que pueden ser obtenidas modificando la definición estándar; en la que dichos subespacios son subconjuntos de los subespacios observables tradicionales, con restricciones adicionales, lo que justifica su descripción como "fuertes", la principal ventaja de dicho estudio, es que brinda una unificación de los diferentes enfoques hasta entonces existentes, como el espacio de vectores abstractos

desarrollado por [Wonham, 1974], la matriz explícita de [Silverman, 1969] y el trabajo de [Aoki y Li, 1973], el cual es una aproximación intermedia a los dos anteriores.

La definición formal de observabilidad fuerte [Hautus, 1983] permite el conocimiento de los estados de un sistema de dimensión  $n$  a partir del vector de salidas y sus primeras  $n-1$  derivadas para sistemas lineales invariantes en el tiempo. La caracterización de observabilidad fuerte a partir de condiciones de rango de las matrices del sistema (ver [Kratz, 1995] para más detalles), permite expresar al estado en términos de la salida, para sistemas invariantes en el tiempo. [Kratz y Liebscher, 1998] generalizan los resultados para sistemas lineales variantes en el tiempo, a partir de la construcción de ciertas matrices utilizando las primeras  $n-2$  derivadas de  $A(t)$  y  $B(t)$ , así como las primeras  $n-1$  derivadas de  $C(t)$ , con lo que construyen un observador y una regla de producto generalizada para la diferenciación del producto de matrices, asumiendo que uno de los factores y el producto son diferenciables.

Por otro lado [Levant, 2003], propone algoritmos de orden  $l$  que permiten diferenciación en tiempo real, robusta y exacta, suponiendo que la siguiente  $l+1$  derivada está acotada. El artículo incluye la prueba de que este diferenciador es asintóticamente óptimo ante pequeños ruidos Lebesgue-medibles, los cuales pueden ser aplicados satisfactoriamente para diferenciación numérica.

En [Cruz-Zavala et al., 2011] se introduce la noción de convergencia uniforme exacta en el diferenciador y se propone un diferenciador uniforme exacto con respecto a las condiciones iniciales, basado en una modificación del diferenciador presentado por Levant, agregando términos de corrección de alto orden, para tener la propiedad de convergencia uniforme, fija y acotada por una constante en el diferenciador, independiente del error inicial, utilizando dos funciones parecidas a funciones de Lyapunov para garantizar la convergencia exacta uniforme del diferenciador. En [Angulo et al., 2013], se presenta un diferenciador exacto, de orden arbitrario con convergencia uniforme con respecto a la condición inicial, utilizando propiedades de homogeneidad en el diseño del diferenciador.

## 1.2. Objetivo

A partir del trabajo de [Fridman et al., 2007] donde se estudia la observación de sistemas lineales invariantes en el tiempo con entrada desconocida, se extienden los resultados para sistemas lineales variantes en el tiempo con entrada desconocida, estabilizando el error de estimación en sistemas inestables, utilizando diferenciadores por modos deslizantes

de alto orden. Este observador tiene las ventajas de ser exacto en ausencia de ruidos y/o discretización, convergencia en tiempo finito y máxima precisión asintótica en el sentido de Kolmogorov [Kolmogorov, 1962] en términos de ruido y discretización.

### 1.3. Planteamiento del problema

Se tiene un sistema lineal variante en el tiempo, descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)\zeta(t) + D(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

donde  $x(t) \in R^n$  es el vector de estados,  $\zeta(t) \in R^m$  es el vector de entradas desconocidas,  $u(t) \in R^q$  es el vector de entradas de control,  $y(t) \in R^p$  es el vector de salidas y  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  son matrices variantes en el tiempo de dimensiones adecuadas.

Las soluciones de las ecuaciones se entienden en el sentido de [Filippov, 1988], lo cual da la posibilidad de utilizar señales discontinuas en los observadores. Nótese que las soluciones de Filippov coinciden con las soluciones usuales, cuando el lado derecho de las ecuaciones son continuas. Se asume también que todas las entradas consideradas permiten la existencia y extensión de soluciones para todo el semi-eje  $t \geq 0$ .

En la literatura, se conoce que, en el caso particular en que  $B(t) = 0$  y  $D(t) \neq 0$ , es posible reconocer los estados del sistema a partir de las propiedades clásicas del subespacio de observabilidad. En el caso general cuando sólo una parte de la entrada es conocida, el problema puede reducirse al caso en que no se conoce ninguna entrada, por lo cual, es suficiente considerar únicamente este último.

El objetivo es construir un observador de sistemas lineales variantes en el tiempo, que permita la estimación asintótica (preferentemente con convergencia exacta y uniforme) de los estados, presentando la observación de sistemas inestables a partir de la estabilización entrada acotada - estado acotado del error.

### 1.4. Contribución

El presente trabajo resulta una continuación a los trabajos presentados previamente en [Davila et al., 2006], [Fridman et al., 2007] y [Fridman et al., 2011]; donde se analizan exclusivamente sistemas LTI, mientras que en este trabajo se lleva a cabo una extensión

a los sistemas LTV. Se utiliza el filtro de Kalman-Bucy como un estabilizador del error de estimación de la salida, manteniéndola acotada y permitiendo su diferenciación, ya que para sistemas LTV no es posible realizar una estabilización por los métodos convencionales para sistemas LTI. Por último, se utilizan diferenciadores uniformes, robustos y exactos para sistemas de primero y segundo orden, los cuales brindan sus propiedades al observador presentado en este trabajo.

## 1.5. Estructura

El capítulo 2 expone la definición de los sistemas lineales variantes en el tiempo, sus tipos de estabilidad y las transformaciones en formas canónicas, necesarias para el diseño del observador.

El capítulo 3 proporciona los diferentes tipos de observabilidad, haciendo énfasis sobre la diferencia entre observabilidad clásica e infinitesimal para sistemas lineales variantes en el tiempo, así como las condiciones de observabilidad fuerte utilizadas en el siguiente capítulo.

El capítulo 4 muestra el diseño del observador, el cual se realiza en tres etapas, comenzando con la estabilización del error dentro de una región acotada, para después estimar dicho error mediante la obtención de una ganancia y finalmente el uso de diferenciadores por modos deslizantes de orden superior para completar la estimación exacta del estado del sistema.

El capítulo 5 presenta ejemplos de simulaciones numéricas para diferentes sistemas.

## Capítulo 2

# Sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV)

### 2.1. Linealización

[Kwakernaak y Sivan, 1972]

La mayoría de los sistemas físicos pueden ser modelados por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) \equiv f(x(t), u(t), t) \quad (2.1)$$

En general, se puede lograr un estudio aceptable del comportamiento dinámico del sistema a partir de aproximaciones lineales; en particular, esto es cierto si se considera que el punto de operación está alrededor de los valores nominales  $x_0(t)$  y  $u_0(t)$ , dado que  $f$  es diferenciable en sus dos primeros argumentos. Llamando a las desviaciones de  $x_0(t)$  como  $\tilde{x}(t)$  y las desviaciones de  $u_0(t)$  como  $\tilde{u}(t)$ , tales que

$$x(t) = x_0(t) + \tilde{x}(t)$$

$$u(t) = u_0(t) + \tilde{u}(t)$$

sustituyendo  $x(t)$  y  $u(t)$  en la ecuación (2.1) y realizando la expansión de Taylor

$$\dot{x}_0(t) + \dot{\tilde{x}}(t) = f(x_0(t), u_0(t), t) + J_x(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{x}(t) + J_u(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{u}(t) + h(t)$$

donde  $J_x$  y  $J_u$  son las matrices Jacobianas de  $f$  con respecto a  $x(t)$  y  $u(t)$  respectivamente,

es decir, el  $(i, j)$ -ésimo término de la matriz  $J_x$  es

$$(J_x)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}$$

$f_i$  es el  $i$ -ésimo componente de  $f$  y  $\xi_j$  es el  $j$ -ésimo componente de  $x$ .  $J_u$  se define de manera similar. El término  $h(t)$  es una expresión que se supone pequeña con respecto a  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{u}(t)$  correspondiente a las derivadas de orden superior. Despreciando  $h(t)$ ;  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{u}(t)$  satisfacen la ecuación lineal

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t) \quad (2.2)$$

donde  $A(t) = J_x(x_0(t), u_0(t), t)$  y  $B(t) = J_u(x_0(t), u_0(t), t)$ .

El sistema lineal tiene una solución de forma cerrada

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0)\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(s, t_0)B(s)\tilde{u}(s)ds$$

donde  $\Phi(t, t_0) \in R^{n \times n}$  es la matriz de transición de estados, la cual es solución de la ecuación diferencial matricial

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_n$$

A partir de las soluciones de forma cerrada, se pueden obtener conclusiones acerca del comportamiento del sistema sin resolver explícitamente las ecuaciones.

En sistemas físicos, frecuentemente no se puede medir todo el vector de estados  $x(t)$ . En lugar de eso, se utilizan las salidas del sistema  $y(t) \in R^p$ . La salida depende de los estados y de la entrada a través de un mapeo  $g$ .

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Esta relación también puede ser linearizada para mapeos diferenciables  $g$

$$\tilde{y}(t) = J_x(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{x}(t) + J_u(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{u}(t)$$

o de manera reducida

$$\tilde{y}(t) = C(t)\tilde{x}(t) + D(t)\tilde{u}(t)$$

## 2.2. Estabilidad

### 2.2.1. Sistemas no lineales

Considerando el sistema no lineal de la ecuación (2.1)

Una propiedad importante del sistema que deseamos conocer es si las soluciones de las ecuaciones diferenciales de estado tienden a crecer indefinidamente cuando  $t \rightarrow \infty$  o si éstas permanecen acotadas. Para simplificar este análisis, se asume que puede tratarse de un sistema autónomo, esto es, sin entrada  $u(t)$  o un sistema donde  $u(t)$  es una función constante en el tiempo. De esta forma se reduce el análisis al sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

Se denomina a  $x_0(t)$  como la *solución nominal* del sistema, la cual satisface la ecuación diferencial de estado:

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t), t)$$

Una situación especial ocurre cuando  $x_0(t)$  es un vector constante  $x_e$ ; en este caso, se dice que  $x_e$  es un *punto de equilibrio* del sistema. De esta forma es posible definir la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de estado.

**Definición 2.2.1.** [Kwakernaak y Sivan, 1972] *Considere la ecuación diferencial de estado*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

*Con la solución nominal  $x_0(t)$ . Entonces la solución nominal es estable en el sentido de Lyapunov, si para cualquier  $t_0$  y cualquier  $\epsilon > 0$ , existe una  $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ , tal que*

$$\|x(t_0) - x_0(t_0)\| \leq \delta$$

*implica  $\|x(t) - x_0(t)\| \leq \epsilon \forall t \geq t_0$ .*

Donde  $\|x\|$  denota la norma del vector  $x$ .

La estabilidad en el sentido de Lyapunov garantiza que el estado no estará demasiado lejos de la solución nominal al elegir el estado inicial suficientemente cerca de la solución nominal. Esta definición resulta un tanto débil, por lo tanto, es necesario extender el concepto de estabilidad.

**Definición 2.2.2.** [Kwakernaak y Sivan, 1972] *La solución nominal  $x_0(t)$  de la ecuación diferencial de estado.*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

*Es asintóticamente estable si*

a) Es estable en el sentido de Lyapunov.

b) Para toda  $t_0$ , existe una  $\rho(t_0) > 0$ , tal que  $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \rho$ , esto implica

$$\|x(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Nótese que este tipo de estabilidad incluye, adicionalmente a la estabilidad en el sentido de Lyapunov, que las soluciones siempre se aproximen a la solución nominal, toda vez que la desviación inicial se encuentre dentro de la región definida por

$$\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \rho$$

Dado que en el caso de sistemas variantes en el tiempo, la respuesta depende del tiempo inicial  $t_0$ , interesa caracterizar la estabilidad del sistema como una propiedad independiente de éste, así surge la noción de *estabilidad uniforme*.

**Definición 2.2.3.** [Khalil, 2002]

- El punto de equilibrio de (2.3) es uniformemente estable si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe una  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

- Uniforme asintóticamente estable si es uniformemente estable y existe una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0$ , tal que para toda  $\|x(t_0)\| < c$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $t_0$ ; esto es, para cada  $\eta > 0$ , existe una  $T = T(\eta) > 0$  tal que

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

### 2.2.2. Sistemas lineales

Hasta ahora se ha discutido sólo la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que representan los sistemas. Esto es necesario para sistemas no lineales debido a la complejidad de fenómenos que pueden ocurrir. Sin embargo, en el caso de sistemas lineales, la situación es más simple, por lo que resulta adecuado hablar de la *estabilidad de sistemas* en vez de soluciones.

Para aclarar esto, sea  $x_0(t)$  una solución nominal del sistema diferencial lineal.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

se denota por  $x(t)$  a cualquier otra solución del sistema. Ya que tanto  $x_0(t)$  y  $x(t)$  son soluciones de la ecuación diferencial lineal de estados, también  $x(t) - x_0(t)$  lo es

$$\frac{d}{dt}(x(t) - x_0(t)) = A(t)(x(t) - x_0(t))$$

Esto muestra que para estudiar la estabilidad de la solución nominal  $x_0(t)$ , se puede estudiar también, la estabilidad de la solución cero, esto es, la solución  $x(t) \equiv 0$ . Si la solución cero es estable en sentido de Lyapunov o asintóticamente, cualquier otra solución será estable en ese sentido. A continuación, se introduce la siguiente terminología.

**Definición 2.2.4.** [Kwakernaak y Sivan, 1972] *El sistema diferencial lineal variante en el tiempo*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

*es estable en cierto sentido (de Lyapunov o asintóticamente), si la solución  $x_0(t) \equiv 0$  es estable en ese sentido.*

La estabilidad uniforme es un concepto que garantiza que el punto de equilibrio no pierde su estabilidad, siendo independiente de  $t_0$ .

**Definición 2.2.5.** [Khalil, 2002] *El punto de equilibrio  $x=0$  es (global) uniforme y asintóticamente estable si y sólo si la matriz de transición de estados satisface la desigualdad*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \geq 0$$

*para constantes positivas  $k$  y  $\lambda$ .*

**Definición 2.2.6.** [Kwakernaak y Sivan, 1972] *El sistema diferencial lineal variante en el tiempo*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

*es **exponencialmente estable** si existen constantes positivas  $\alpha, \beta$ , tales que*

$$\|x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0$$

*Para cualquier condición inicial  $x(t_0)$ .*

La estabilidad exponencial es una forma más fuerte de estabilidad que aquellas de las definiciones 2.2.5 y 2.2.6; en particular, implica estabilidad uniforme y asintótica.

Por último, se define una clase de estabilidad en cuanto a la relación entrada – salida del sistema.

**Definición 2.2.7.** *El sistema diferencial lineal variante en el tiempo*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

es *entrada acotada – salida acotada (BIBO)* si

a) *es uniforme y asintóticamente estable*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

b)  *$u(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  son acotadas*

$$\|u(t)\| \leq k_0, \quad \|B(t)\| \leq k_1, \quad \|C(t)\| \leq k_2, \quad \forall t$$

con  $k_0, k_1, k_2 > 0$

## 2.3. Formas canónicas

### 2.3.1. Equivalencia de sistemas

[Huang, 2007, pp. 50-51]

Suponiendo el sistema lineal variante en el tiempo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

se puede transformar al sistema

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \bar{A}(t)z(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ \bar{y}(t) &= \bar{C}(t)z(t)\end{aligned}$$

a través de la transformación de coordenadas  $z(t) = P(t)x(t)$ , donde  $P(t)$  es no singular y continuamente diferenciable.

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) \\ &= \dot{P}(t)[P^{-1}(t)z(t)] + P(t)[A(t)P^{-1}(t)z(t) + B(t)u(t)] \\ &= [[\dot{P}(t) + P(t)A(t)]P^{-1}(t)]z(t) + P(t)B(t)u(t) \\ \bar{y}(t) &= C(t)P^{-1}(t)z(t)\end{aligned}$$

De donde se obtienen los valores de las matrices transformadas.

$$\bar{A} = [\dot{P}(t) + P(t)A(t)]P^{-1}(t)$$

$$\bar{B} = P(t)B(t)$$

$$\bar{C} = C(t)P^{-1}$$

La representación  $[\bar{A}(t), \bar{B}(t), \bar{C}(t)]$ , se dice que es *algebraicamente equivalente* a  $[A(t), B(t), C(t)]$  si  $P(t)$  es no singular y continuamente diferenciable. Se dice que es *topológicamente equivalente* si  $P(t)$  es una transformación de Lyapunov, i.e.  $P(t)$ ,  $P^{-1}(t)$  y  $\dot{P}(t)$  son continuas y acotadas.

Antes de explicar las diferentes formas canónicas, es necesario dar una definición para expresar una condición suficiente para la existencia de una transformación de Lyapunov que lleva al sistema a su forma canónica de observador/observabilidad.

**Definición 2.3.1.** [Huang, 2007] Una representación en espacio de estados  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  se llama de **índice invariante** si los renglones linealmente independientes de la matriz de observabilidad  $Q(t)$  para algún  $t_1 > 0$ , son los renglones linealmente independientes para todo  $t \geq 0$

**Lema 2.3.1.** [Huang, 2007] Considere un sistema de índice invariante  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$ , cuyos elementos de las matrices que lo conforman son funciones del tiempo acotadas y  $n$  veces diferenciables con derivadas acotadas; si  $|Q^T(t)Q(t)| \geq 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $c > 0$ , entonces existe una transformación en el espacio de estados a una forma canónica de observador/observabilidad.

### 2.3.2. Forma canónica de observador

#### Sistemas SISO

[Huang, 2007, pp. 55-56]

Un sistema SISO LTV se dice que está en forma canónica de observador si sus

matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  están dadas por

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -a(t) \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2(t) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_n(t) \\ b_{n-1}(t) \\ \vdots \\ b_1(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema puede ser transformado a la forma Canónica de Observador a través de la transformación de coordenadas variante en el tiempo  $z(t) = P_{or}(t)x(t)$ , la cual está dada en términos de  $P_{or}^{-1}(t)$  por

$$P_{or}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} q(t) & \tilde{L}q(t) & \dots & \tilde{L}^{n-1}q(t) \end{bmatrix}$$

$$q(t) = Q_0^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}(t) = -\dot{q}(t) + A(t)q(t)$$

Donde  $Q_0(t)$  es la matriz de observabilidad diferencial variante en el tiempo.

### Sistemas MIMO

[Huang, 2007, pp. 64-65]

Se dice que un sistema MIMO LTV está en Forma Canónica de Observador si  $A(t)$ ,  $C(t)$  están dadas por

$$A_{or_M} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1m}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & A_{m2}(t) & \dots & A_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C_{or_M} = T_o(t)diag(C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 A_{ii} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{d_{p_i-1}+1, d_{p_i}}(t) \\ 1 & \dots & 0 & a_{d_{p_i-1}+2, d_{p_i}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{d_{p_i}, d_{p_i}}(t) \end{bmatrix}_{p_i \times p_i}, \quad i = 1, \dots, m \\
 A_{ki} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{d_{p_k-1}+1, d_{p_i}}(t) \\ 1 & \dots & 0 & a_{d_{p_k-1}+2, d_{p_i}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{d_{p_k}, d_{p_i}}(t) \end{bmatrix}_{p_k \times p_i} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, m \\ , i = 1, \dots, m \\ k \neq i \end{array} \\
 C_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times p_i}, \quad i = 1, \dots, m \\
 T_o(t) &= \mathbb{I}
 \end{aligned}$$

Para construir la transformación, es necesario primero definir los siguientes operadores y variables intermedias.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}(q(t)) &= \begin{bmatrix} q(t) & \tilde{L}q(t) & \dots & \tilde{L}^{i-1}q(t) \end{bmatrix} \\
 LC(t) &= \dot{C}(t) + C(t)A(t) \\
 \Gamma_i(c(t)) &= \begin{bmatrix} c(t) \\ Lc(t) \\ \vdots \\ L^{i-1}c(t) \end{bmatrix} \\
 Q_{oM}(t) &= \begin{bmatrix} \Gamma_{p_1}(c_1(t)) \\ \Gamma_{p_2}(c_2(t)) \\ \vdots \\ \Gamma_{p_m}(c_m(t)) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Donde  $c_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$  son los  $m$  vectores renglón de  $C(t)$ . La transformación de coordenadas variante en el tiempo  $z(t) = T_{or\_M}(t)x(t)$  que transforma el sistema MIMO a la forma canónica de observador está dado en términos de  $T_{or\_M}^{-1}(t)$  por

$$T_{or\_M}^{-1}(t) = \left[ \tilde{\Gamma}_{p_1}(q_1) \mid \tilde{\Gamma}_{p_2}(q_2) \mid \dots \mid \tilde{\Gamma}_{p_m}(q_m) \right]$$

Donde  $q_i(t) = Q_{0M}^{-1}(t)e_{d_{p_i}}$ ,  $i = 1, \dots, m$  es el  $d_{p_i}$ -ésimo vector columna de  $Q_{0M}^{-1}(t)$  y  $e_k$  es el  $k$ -ésimo vector de base estándar para  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3.3. Forma canónica de observabilidad

#### Sistemas SISO

[Huang, 2007, pp. 56-57]

Un sistema SISO LTV se dice que está en forma canónica de observabilidad si sus matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  están dadas por

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_n(t) \\ b_{n-1}(t) \\ \vdots \\ b_1(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Todo sistema SISO expresado en Forma Canónica de Observabilidad tiene matriz de observabilidad  $Q$  igual a la matriz identidad  $\mathbb{I}_{n \times n}$

$$Q = \mathbb{I}_{n \times n}$$

Así mismo, el sistema puede ser transformado a la forma Canónica de Observabilidad a través de la transformación de coordenadas variante en el tiempo  $z(t) = P_{oy}(t)x(t)$  con

$$P_{oy}(t) = Q_0(t)$$

Donde  $Q_0(t)$  es la matriz de observabilidad diferencial del sistema original, antes de ser transformado a su forma canónica.

#### Sistemas MIMO

[Huang, 2007, p. 65]

Se dice que un sistema MIMO LTV está en Forma Canónica de Observabilidad si  $A(t)$ ,  $C(t)$  están dadas por.

$$A_{oyM} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1m}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & A_{m2}(t) & \dots & A_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$C_{orM} = T_o(t) \text{diag}([C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m])$$

Donde

$$A_{ii}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{d_{p_i}, d_{p_i-1}+1}(t) & a_{d_{p_i}, d_{p_i-1}+2}(t) & \dots & a_{d_{p_i}, d_{p_i}}(t) \end{bmatrix}_{p_i \times p_i}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$A_{ik}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{d_{p_i}, d_{p_k-1}+1}(t) & a_{d_{p_i}, d_{p_k}-1}(t) & \dots & a_{d_{p_i}, d_{p_k}}(t) \end{bmatrix}_{p_i \times p_i}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, m \\ k \neq i \end{array}$$

$$C_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times p_i}, \quad i = 1, \dots, m$$

La forma canónica de observabilidad puede ser obtenida a partir de la matriz reducida de observabilidad, esto es, eligiendo  $n$  renglones de la matriz de observabilidad  $Q(t)$  y realizando la transformación de manera similar al caso SISO.

## Capítulo 3

# Observabilidad

La mayoría de los problemas de seguimiento y regulación comparten la siguiente suposición: el vector de estados puede ser completamente medido de manera precisa. Esta suposición generalmente se aleja de la realidad. La situación más frecuente es que para un sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\zeta(t) \quad (3.1)$$

Sólo ciertas combinaciones lineales del estado, denotado por  $y(t)$ , pueden ser medidas

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (3.2)$$

Se asume que  $y(t)$  es un vector de dimensión  $p$ , con  $p$  usualmente menor que la dimensión del sistema  $n$ ; el propósito es entonces reconstruir completamente el estado a partir de la variable observada.

### 3.1. Observabilidad Clásica

**Definición 3.1.1.** [Huang, 2007] Se dice que el sistema dinámico (3.1), (3.2) es observable en el intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$  si y sólo si para todas las entradas  $\zeta_{[t_0, t_1]}$  y todas las salidas correspondientes  $y_{[t_0, t_1]}$ , el estado  $x_0$  en el tiempo  $t_0$  está unívocamente determinado.

La solución del sistema está dado por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

multiplicando la solución general por  $C(t)$  en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$C(t)\Phi(t, t_0)x_0 = y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

definiendo  $\tilde{y}(t) \triangleq C(t)\Phi(t, t_0)x_0$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Premultiplicando la definición de  $\tilde{y}(t)$  por  $(C(t)\Phi(t, t_0))^T$  e integrando.

$$\int_{t_0}^t \Phi^T(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt x_0 = \int_{t_0}^t \Phi^T(t, t_0)C^T(t)\tilde{y}(t)dt$$

con

$$M(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t \Phi^T(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt$$

Donde  $M(t_0, t)$  se conoce como el **Gramiano de Observabilidad**; se dice que el sistema es observable si

$$\det M(t_0, t) \neq 0$$

**Definición 3.1.2.** *El sistema (3.1), (3.2)*

- *Es completamente observable en  $t_0$  si para cualquier estado inicial  $x(t_0) = x_0$ , existe un tiempo finito  $t_f > t_0$ , tal que el estado inicial  $x(t_0)$  puede ser determinado a partir de la salida del sistema  $y(t)$  en  $[t_0, t_f]$ .*
- *Es uniforme y completamente observable si para cualquier tiempo inicial  $t_0$  el sistema es completamente observable; esto es, si existe  $\delta > 0$ , tal que para toda  $t$*

$$M(t, t + \delta) \geq \alpha(\delta)I > 0$$

*donde  $M$  es el gramiano de observabilidad y  $\alpha$  es una constante determinada únicamente por  $\delta$*

Verificar la observabilidad de sistemas variantes en el tiempo por medio del Gramiano de Observabilidad requiere del conocimiento de la matriz de transición de estados  $\Phi(t, t_0)$ , la cual es posible calcular mediante distintos procedimientos, como el método de

series de Peano-Beaker para los casos más sencillos; también se utiliza el teorema de Floquet para encontrar la matriz fundamental de sistemas lineales homogéneos con coeficientes periódicos.

Sin embargo, si se asumen ciertas propiedades de suavidad, las cuales en general son más fuertes que aquellas de continuidad o continuidad a trozos para las matrices del sistema, la condición del Gramiano lleva a una condición suficiente la cual es más fácil de verificar.

### 3.2. Observabilidad Diferencial

**Definición 3.2.1.** [Kratz y Liebscher, 1998] Considerando el sistema LTV (sin entradas).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

El sistema es diferencialmente observable si

$$\text{rank } Q(t) = n \quad \forall t$$

Donde  $Q(t)$  es la matriz de observabilidad diferencial, la cual se construye de la forma

$$Q(t) = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_{n-1} \end{bmatrix}^T\tag{3.4}$$

Con  $Q_k(t) = \dot{Q}_{k-1}(t) + Q_{k-1}(t)A(t)$ .

Se asume que la salida  $y(t)$  es  $n - 1$  veces diferenciable (donde  $n$  es el orden del sistema) y se define  $C(t) = Q_1(t)$ , con lo que la primera derivada de la salida resulta.

$$\begin{aligned}y(t) &= Q_1(t)x(t) \\ \dot{y}(t) &= \dot{Q}_1(t)x(t) + Q_1(t)\dot{x}(t) \\ &= (\dot{Q}_1(t) + Q_1(t)A(t))x(t)\end{aligned}$$

y recursivamente la  $k$ -ésima derivada de la salida, tiene la forma

$$\begin{aligned}y^k(t) &= (\dot{Q}_k(t) + Q_k(t)A(t))x(t) \\ &\vdots \\ y^{n-1}(t) &= (\dot{Q}_{n-1}(t) + Q_{n-1}(t)A(t))x(t)\end{aligned}$$

Se define el vector de las  $n - 1$  derivadas de la salida

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) & \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) & \dots & y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}^T$$

Si la matriz  $Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es de rango completo y las matrices  $A(t)$  y  $C(t)$  son  $n - 2$  y  $n - 1$  veces derivables respectivamente, el estado del sistema queda definido por

$$\begin{aligned} Q(t)x(t) &= \hat{y}(t) \\ Q^T(t)Q(t)x(t) &= Q^T(t)\hat{y}(t) \\ x(t) &= [Q^T(t)Q(t)]^{-1}Q^T(t)\hat{y}(t) \end{aligned}$$

Esta ecuación permite determinar completamente el estado a partir del conocimiento de la salida y sus  $n - 1$  derivadas sucesivas cuando la pareja  $(A, C)$  es diferencialmente observable.

### 3.3. Observabilidad Fuerte

**Definición 3.3.1.** [Kratz y Liebscher, 1998] Sea el sistema LTV

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)\zeta(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}$$

El sistema es fuertemente observable si la matriz  $H(t) = Q^T(t)K^T(t)K(t)Q(t)$  es invertible con

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= Q(t)x(t) + T(t)\hat{\zeta}(t) \\ \hat{\zeta}(t) &= \begin{bmatrix} \zeta(t) & \dot{\zeta}(t) & \ddot{\zeta}(t) & \dots & \zeta^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}^T \\ T(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{1,0} & 0 & \dots & 0 \\ T_{2,0} & T_{2,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-1,0} & T_{n-1,1} & \dots & T_{n-1,n-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu+1,\mu} &:= C(t)B(t) && \text{para } 0 \leq \mu \leq n - 1, \\ T_{\mu+1,0} &:= Q_{\mu+1}B(t) + \dot{T}_{\mu,0} && \text{para } 1 \leq \mu \leq n - 1, \\ T_{\mu+1,\nu} &:= T_{\mu,\nu-1} + \dot{T}_{\mu,\nu} && \text{para } 1 \leq \nu < \mu \leq n + 1 \end{aligned}$$

Si se define  $K(t) \in \mathbb{R}^{r \times np}$  como

$$K(t) \in \ker T(t) \quad (3.6)$$

tal que  $K(t)T(t) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} Q(t)x(t) + T(t)\hat{u}(t) &= \hat{y}(t) \\ K(t)Q(t)x(t) &= K(t)\hat{y}(t) \\ Q^T(t)K^T(t)K(t)Q(t)x(t) &= Q^T(t)K^T(t)K(t)\hat{y}(t) \\ H(t)x(t) &= Q^T(t)K^T(t)K(t)\hat{y}(t) \end{aligned}$$

Si la matriz  $H(t)$  es invertible y  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  son  $n-2$ ,  $n-2$  y  $n-1$  derivables respectivamente, se puede conocer todo el estado a partir de la salida y sus  $n-1$  derivadas.

$$\begin{aligned} x(t) &= [Q^T(t)K^T(t)K(t)Q(t)]^{-1}Q^T(t)K^T(t)K(t)\hat{y}(t) \\ x(t) &= H(t)^{-1}Q^T(t)K^T(t)K(t)\hat{y}(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si la matriz  $H(t)$  es invertible y  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  son  $n-2$ ,  $n-2$  y  $n-1$  derivables respectivamente, se puede conocer todo el estado a partir de la salida y sus  $n-1$  derivadas sucesivas.

## Capítulo 4

# Diseño del observador

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\zeta(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (4.2)$$

Con las siguientes suposiciones.

**Suposición 4.0.1.** *Las matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$  del sistema (4.1) y (4.2) están acotadas, esto es.*

$$|A(t)| \leq k_1$$

$$|B(t)| \leq k_2$$

$$|C(t)| \leq k_3$$

donde  $|\cdot|$  es cualquier norma matricial; adicionalmente, son  $n - 2$ ,  $n - 2$  y  $n - 1$  veces diferenciables respectivamente

**Suposición 4.0.2.** *La entrada desconocida  $\zeta(t)$  del sistema (4.1) y (4.2) es una función acotada,  $|\zeta(t)| \leq \zeta^+$ . La  $k$ -ésima derivada es una función Lipschitz cuya constante de Lipschitz no excede  $\zeta_1^+$ . Por lo tanto, la derivada  $\zeta^{(k+1)}(t)$  existe casi en todas partes y es una función Lebesgue medible,  $|\zeta^{(k+1)}| \leq \zeta_1^+$ .*

El observador se construye de la forma [Fridman et al., 2007].

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + L(t)(y(t) - C(t)z(t)) \quad (4.3)$$

$$\dot{v}(t) = W(y(t) - C(t)z(t), v(t)) \quad (4.4)$$

$$\hat{x} = z(t) + F(t)v(t) \quad (4.5)$$

Donde  $z(t), \hat{x}(t) \in R^n$ ,  $\hat{x}(t)$  es la estimación de  $x(t)$ , la matriz  $L(t)$  es un factor de corrección tal que la matriz  $A(t) - L(t)C(t)$  es estable para toda  $t$ ;  $W$  es la función del diferenciador por modos deslizantes de orden superior y  $F(t)$  es la ganancia del diferenciador mediante la cual

El observador propuesto se compone por lo tanto de tres partes [Fridman et al., 2007]:

- La ecuación (4.3) funciona como un estabilizador del error de estimación.
- La ecuación (4.4) es un diferenciador por modos deslizantes de orden superior que asegura la convergencia en tiempo finito del error de estimación.
- La ecuación (4.5) estima el estado a partir del estabilizador y la salida del diferenciador multiplicado por la ganancia  $F(t)$ .

## 4.1. Estabilizador

El problema de estabilización de sistemas lineales variantes en el tiempo ha sido ampliamente estudiado a través de los años en diversos artículos. En [Kalman y Bucy, 1961], se deriva una ecuación diferencial de tipo Riccati para la matriz de covarianza del error de filtrado óptimo, la cual siendo excitada por las señales medidas, genera el mejor estimador lineal de los estados.

En [Tang y Ortega, 1987], se propone un estabilizador que asegura la existencia de cotas para todas las señales si la razón de variación de los parámetros de la planta en lazo cerrado con un estabilizador es pequeña, la ganancia del observador en lazo cerrado es pequeña y la adaptación es lenta, lo cual limita este enfoque a plantas LTV lentas, las cuales pueden ser interpretadas como plantas LTI con perturbaciones pequeñas.

Por su parte, [Khargonekar et al., 1988], muestran que toda planta LTV que es internamente estabilizable por retroalimentación de la salida, puede ser estabilizada por un controlador LTV estable, con lo que obtienen una parametrización de todos los controladores no lineales variantes en el tiempo que pueden estabilizar una planta LTV. Posteriormente, consideran el problema de estabilización simultánea y confiable de sistemas LTV, mostrando que dada una planta lineal variante en el tiempo  $P(t)$  y un controlador estabilizante  $C(t)$ , se puede siempre dividir a  $C(t)$  de la forma  $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$ , donde  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  son controladores lineales variantes en el tiempo que estabilizan independientemente a  $P(t)$ .

[Amato et al., 2011] atacan el problema de estabilización entrada-salida en tiempo finito de sistemas lineales variantes en el tiempo a través de la retroalimentación dinámica de la salida. Proveen de condiciones suficientes para la estabilización en tiempo finito en términos de la factibilidad de las soluciones de desigualdades diferenciales lineales matriciales (DLMI), las cuales aunque ofrecen un resultado más fuerte de estabilidad, complicarían el planteamiento del observador desarrollado en este trabajo, por lo que no se considera pertinente su utilización.

Por último, en [Luo et al., 2011], se estudia la asignación de valores propios para sistemas lineales variantes en el tiempo con perturbaciones. El método está basado en la transformación del sistema LTV en su forma canónica para construir la matriz de ganancia de retroalimentación. En este caso es necesario que el sistema LTV sea lento, ya que de lo contrario, es necesario agregar un método adaptable adicional de estimación para evitar el deterioro del desempeño del estabilizador.

Cuando el sistema es estable, la salida y sus  $n$  derivadas permanecen acotadas de acuerdo a la **Definición 2.2.5**, siempre que se cumpla también la **Suposición 4.0.1**, por lo que es posible aplicar directamente la ecuación (3.7) para estimar todos los estados del sistema. Sin embargo, cuando la salida no está acotada, esto no es posible ya que no se tiene una cota para el diferenciador, por lo que no es posible obtener las derivadas sucesivas de la salida.

De esta motivación surge la necesidad de diseñar un sistema equivalente a partir de la información disponible del sistema, el cual garantice que su propia salida sea estable y permanezca acotada.

**Teorema 4.1.1.** [Kalman y Bucy, 1961] Sea el sistema (4.1), (4.2), la solución del problema de observación óptimo

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}(t)z(t) + L(t)y(t)$$

con  $\tilde{A}(t) = A(t) - L(t)C(t)$ , se obtiene seleccionando la matriz de ganancia.

$$L(t) = P(t)C^T(t)V_2^{-1} \quad (4.6)$$

Donde  $P(t)$  es la solución de la ecuación diferencial matricial de Riccati

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + V_1 - P(t)C^T(t)V_2^{-1}C(t)P(t) \quad (4.7)$$

Con las matrices diagonales  $V_1$  y  $V_2$  que representan la intensidad del ruido de excitación en los estados y el ruido de medición respectivamente.

## 4.2. Estimación del error

El error de estimación

$$e(t) = x(t) - z(t) \quad (4.8)$$

satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{z}(t) \\ &= (A(t) - L(t)C(t))e(t) + B(t)\zeta(t) \end{aligned}$$

Debido a las suposiciones 4.0.1 y 4.0.2, así como al diseño del estabilizador de la sección anterior, el error de estimación  $e(t)$  converge a una vecindad acotada del origen  $e(t) = 0$  y una vez que el error  $e(t)$  converge a dicha vecindad,  $\dot{e}(t)$  también permanece uniformemente acotado.

Multiplicando ambos lados de la ecuación (4.8) por  $C(t)$

$$C(t)e(t) = C(t)x(t) - C(t)z(t)$$

Definiendo el error de salida como

$$e_y(t) \triangleq C(t)e(t)$$

Se puede obtener el vector de las primeras  $n - 1$  derivadas del error de la salida de acuerdo a la ecuación (3.3.1) como

$$\hat{e}_y(t) = Q_e(t)e(t) + T_e(t)\hat{\zeta}(t) \quad (4.9)$$

con  $Q_e$  y  $T_e$  definidas en las ecuaciones (3.4) y (3.5) respectivamente. Utilizando la ecuación (3.7)

$$e = (Q_e^T K_e^T K_e Q_e)^{-1} Q_e^T K_e^T K_e \hat{e}_y$$

con  $F(t) \triangleq (Q_e^T K_e^T K_e Q_e)^{-1} Q_e^T K_e^T K_e$

$$e = F(t)\hat{e}_y$$

Es posible obtener de manera exacta el error de estimación de los estados, a partir de las primeras  $n - 1$  derivadas del error de la salida y el cálculo de la ganancia  $F(t)$ .

Las derivadas sucesivas del error de la salida, tienen la forma.

$$\begin{aligned}
e_y &= Ce \\
e_y^{(1)} &= C^{(1)}e + Ce^{(1)} \\
e_y^{(2)} &= C^{(2)}e + 2C^{(1)}e^{(1)} + Ce^{(2)} \\
e_y^{(3)} &= C^{(3)}e + 3C^{(2)}e^{(1)} + 3C^{(1)}e^{(2)} + Ce^{(3)} \\
&\vdots \\
e_y^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} C^{(n-k)} e^{(k)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Donde los exponentes representan el orden de la derivada de la base. Las derivadas sucesivas de  $C(t)$  se pueden conocer de manera explícita, mientras que para las derivadas de  $e$ , se tiene de manera similar.

$$\begin{aligned}
e^{(1)} &= \tilde{A}e + B\zeta \\
e^{(2)} &= \tilde{A}^{(1)}e + \tilde{A}e^{(1)} + B^{(1)}\zeta + B\zeta^{(1)} \\
&\vdots \\
e^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1)!} \tilde{A}^{(n-k-1)} e^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1)!} B^{(n-k-1)} \zeta^{(k)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Con lo que, sustituyendo las expresiones sucesivas (4.10) y (4.11), en la ecuación (4.9) y de acuerdo a las propiedades de observabilidad fuerte, se sabe que no es necesario conocer la entrada desconocida  $\zeta$ , ni sus derivadas sucesivas. Por otro lado, las derivadas sucesivas de  $B$  se pueden conocer de forma explícita, con lo que solo resta obtener las derivadas sucesivas de  $\tilde{A}$  para construir el observador. Éstas tienen la forma.

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= A - LC \\
\tilde{A}^{(1)} &= A^{(1)} - (L^{(1)}C + LC^{(1)}) \\
\tilde{A}^{(2)} &= A^{(2)} - (L^{(2)}C - 2L^{(1)}C^{(1)} - LC^{(2)}) \\
&\vdots \\
\tilde{A}^{(n)} &= A^{(n)} - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} L^{(n-k)} C^{(k)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Por su parte, las derivadas sucesivas de  $L$ , resultan de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
L &= PC^T V_2^{-1} \\
L^{(1)} &= \left( P^{(1)} C^T + P(C^T)^{(1)} \right) V_2^{-1} \\
L^{(2)} &= \left( P^{(2)} C^T + 2P^{(1)}(C^T)^{(1)} + P(C^T)^{(2)} \right) V_2^{-1} \\
&\vdots \\
L^n &= \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} P^{(n-k)} (C^T)^{(k)} \right) V_2^{-1}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por último, las derivadas sucesivas de  $P$  resultan.

$$\begin{aligned}
P^{(1)} &= AP + PA^T + V_1 - PC^T V_2^{-1} CP \\
P^{(2)} &= A^{(1)}P + AP^{(1)} + P^{(1)}A^T + P(A^T)^{(1)} - \left( (PC^T)^{(1)} V_2^{-1} (CP) + PC^T V_2^{-1} (CP)^{(1)} \right) \\
&\vdots \\
P^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} A^{(n-k-1)} P^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} P^{(n-k-1)} (A^T)^{(k)} + \dots \\
&\dots + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left( (PC^T)^{(n-k-1)} V_2^{-1} (CP)^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Con

$$\begin{aligned}
(PC^T)^{(n-k-1)} &= \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{j!(n-k-1-j)!} P^{(n-k-j-1)} (C^T)^{(j)} \\
(CP)^{(k)} &= \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} C^{(k-j)} P^{(j)}
\end{aligned}$$

De esta forma se puede conocer la ganancia  $F(t)$  de la ecuación (4.2), por lo que sólo falta conocer las derivadas del error del estabilizador para completar la estimación del estado en la ecuación (4.5)

### 4.3. Diferenciador por modos deslizantes

La diferenciación en tiempo real es un problema antiguo e importante que ha sido estudiado desde diferentes perspectivas, ya sea en la instrumentación de control por retroalimentación de salida o desde el diseño de observadores.

El problema principal en el diseño de un diferenciador en tiempo real es la compensación entre exactitud y robustez con respecto al ruido y al muestreo en la señal de entrada. Se han utilizado sistemas lineales que aproximan la función de transferencia del diferenciador en una banda de frecuencias, así como observadores de alta ganancia aplicados en problemas de control por retroalimentación de salida, sin embargo, la sensibilidad al ruido se amplifica considerablemente con el uso de altas ganancias y la presencia del efecto de *peaking*, con el cual el error de estimación en estado transitorio puede ser demasiado grande, lo que puede ser inseguro o poco práctico de utilizar, deteriorando así el desempeño del diferenciador. Por otro lado, los diferenciadores discontinuos pueden ser teóricamente exactos para muchos tipos de señales.

### 4.3.1. Diferenciador de primer orden

En particular, se ha probado que el algoritmo super-twisting (STA) es conveniente para el diseño de diferenciadores de primer orden, ya que brinda la mejor precisión asintótica posible en presencia de ruidos determinísticos acotados medibles en el sentido de Lebesgue, así como de muestreo discreto de la señal de entrada, cuando su segunda derivada está acotada [Levant, 2003].

Sea  $f(t)$  la señal de entrada al diferenciador una función Lebesgue-medible, definida en el intervalo de tiempo  $[0, \infty]$  que puede ser descompuesta como  $f(t) = f_0(t) + v(t)$ , donde el primer término es una señal desconocida dos veces diferenciable, con una constante de Lipschitz conocida  $L > 0$  y el segundo término  $v(t)$  corresponde a una señal de ruido uniformemente acotada, la cual puede ser interpretada como el efecto del muestreo discreto de  $f_0(t)$ .

Si  $\zeta_0 = f_0(t)$  y  $\zeta_1 = \dot{f}_0(t)$ , una representación de estados de la señal base está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 &= \ddot{f}_0(t)\end{aligned}$$

Basado en el algoritmo super-twisting generalizado, [Cruz-Zavala et al., 2011] se propone un diferenciador uniforme, robusto y exacto (URED) con respecto a las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= -k_1\phi_1(\sigma_0) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= -k_2\phi_2(\sigma_0)\end{aligned}\tag{4.15}$$

donde  $\sigma_0 = z_0 - \zeta_0$  y  $k_1, k_2$  son ganancias positivas que pueden ser diseñadas, tales que

$$\mathcal{K} = \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < k_1 \leq 2\sqrt{L}, k_2 > \frac{k_1^2}{4} + \frac{4L^2}{k_1^2} \right\} \cup \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid k_1 > 2\sqrt{L}, k_2 > 2L \right\}$$

Mientras que las funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se definen como

$$\begin{aligned} \phi_1(\sigma_0) &= |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) + \mu |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\sigma_0) \\ \phi_2(\sigma_0) &= \frac{1}{2} \text{sign}(\sigma_0) + 2\mu\sigma_0 + \frac{3}{2} \mu^2 |\sigma_0|^2 \text{sign}(\sigma_0) \end{aligned}$$

y  $\mu \geq 0$  es un escalar,  $z_0$  y  $z_1$  son las estimaciones de  $f_0(t)$  y  $\dot{f}_0(t)$  respectivamente.

### 4.3.2. Diferenciador de orden superior

Sea una señal  $f(t) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas sucesivas  $f^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . La única suposición en la señal a diferenciar es que  $|f^{(n)}(t)| \leq L$  para cualquier  $t$ , donde  $L$  es una constante finita y conocida.

[Levant, 2003] propone un esquema recursivo con la propiedad de ser exacto en tiempo finito (su error de observación converge en tiempo finito a pesar de las perturbaciones).

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= w_1 = -\alpha_n M^{1/n} |v_1 - e|^{(n-1)/n} \text{sign}(v_1 - e) + v_2 \\ \dot{v}_2 &= w_2 = -\alpha_{n-1} M^{1/(n-1)} |v_2 - w_1|^{(n-2)/(n-1)} \text{sign}(v_2 - w_1) + v_3 \\ &\vdots \\ \dot{v}_{n-1} &= w_{n-1} = -\alpha_2 M^{1/2} |v_{n-1} - w_{n-2}|^{1/2} \text{sign}(v_{n-1} - w_{n-2}) + v_n \\ \dot{v}_n &= -\alpha_1 M \text{sign}(v_n - w_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Elijiendo el parámetro  $M$  suficientemente grande, mientras que la mejor forma de seleccionar las constantes  $\alpha_i$  es mediante simulaciones recursivas de acuerdo a [Levant, 2003], las  $i$ -ésimas derivadas de  $e$  se obtienen de los valores de  $w_i$ .

Por otro lado, en [Angulo et al., 2013] se presenta un diferenciador, el cual tiene convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales, esto es, que a pesar del error inicial de observación, el tiempo de convergencia del diferenciador estará siempre acotado

por una constante, con lo que el diferenciador toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= -\mathcal{K}_1 \theta \langle v_1 - e \rangle^{\frac{n-i}{n}} - k_i (1 - \theta) \langle v_1 - e \rangle^{\frac{n+\alpha i}{n}} + v_{i+1} \\ i &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{v}_n &= -\mathcal{K}_n \text{sign}(v_1 - e) - k_n (1 - \theta) \langle v_1 - e \rangle^{1+\alpha} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Con  $\langle x \rangle^p = |x|^p \text{sign}(x)$ . El conjunto de ganancias  $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^n$  pueden ser seleccionadas basadas en el diferenciador por modos deslizantes de (4.16). Por su parte,  $\alpha > 0$  se elige suficientemente pequeño tal que el sistema del error de diferenciación

$$\begin{aligned} \dot{\check{v}}_1 &= -k_1 \langle \check{v}_1 \rangle^{\frac{n+\alpha}{n}} + \check{v}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\check{v}}_{n-1} &= -k_{n-1} \langle \check{v}_1 \rangle^{\frac{n+(n-1)\alpha}{n}} + \check{v}_n \\ \dot{\check{v}}_n &= -k_n \langle \check{v}_1 \rangle^{1+\alpha} \end{aligned}$$

sea estable. Mientras que  $\{k_{-i}\}_{i=1}^n$  se eligen tal que la matriz

$$\begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

sea Hurwitz.

La función  $\theta : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1\}$  se selecciona como

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq T_u \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $T_u > 0$  se selecciona de manera arbitraria.

## Capítulo 5

# Ejemplos y simulaciones

### 5.1. Sistema de segundo orden

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2\sin(5t) - 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(t) - 2 \end{bmatrix} \zeta(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -3\sin(2t) + 4 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

El vector de salida y su derivada resulta

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sin(2t) + 4 & 0 \\ -6\cos(2t) - (2\sin(5t) - 1)(3\sin(2t) - 4) & -9\sin(2t) + 12 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta(t)$$

donde  $\text{rank}(Q(t)) = 2$  y  $K(t) = I$ , el sistema es fuertemente observable.

Con la señal de entrada desconocida  $\zeta(t) = 5\cos(t) + 1$  y condiciones iniciales  $x_1(0) = 3$ ,  $x_2(0) = -4$ , los estados del sistema se muestran en la Figura 5.1, donde se observa que el sistema es inestable.

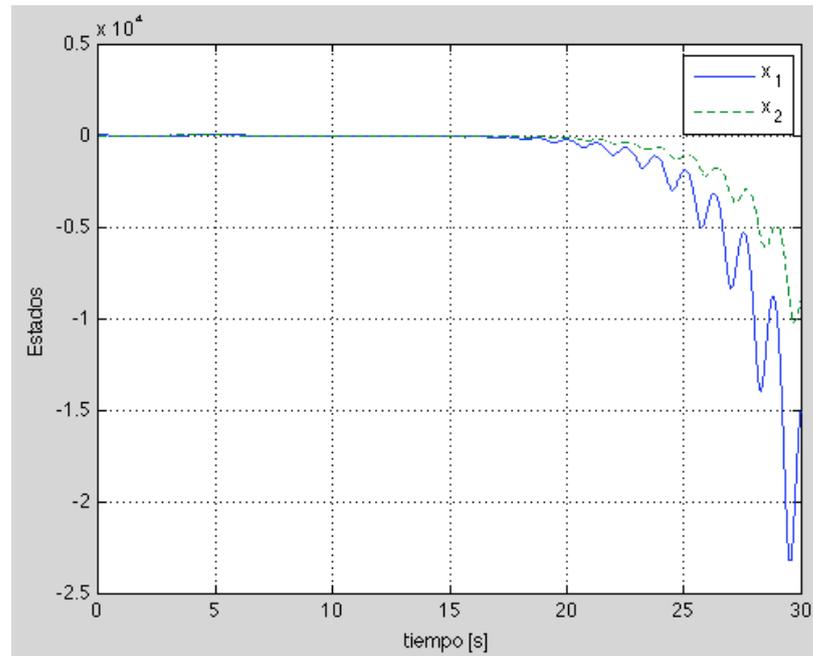


Figura 5.1: Estados del sistema de segundo orden

Utilizando el estabilizador de las ecuaciones (4.6) y (4.7) con  $V_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $V_2 = 1$ , el error de estimación de estados  $e(t) = x(t) - z(t)$  se muestra en la Figura 5.2.

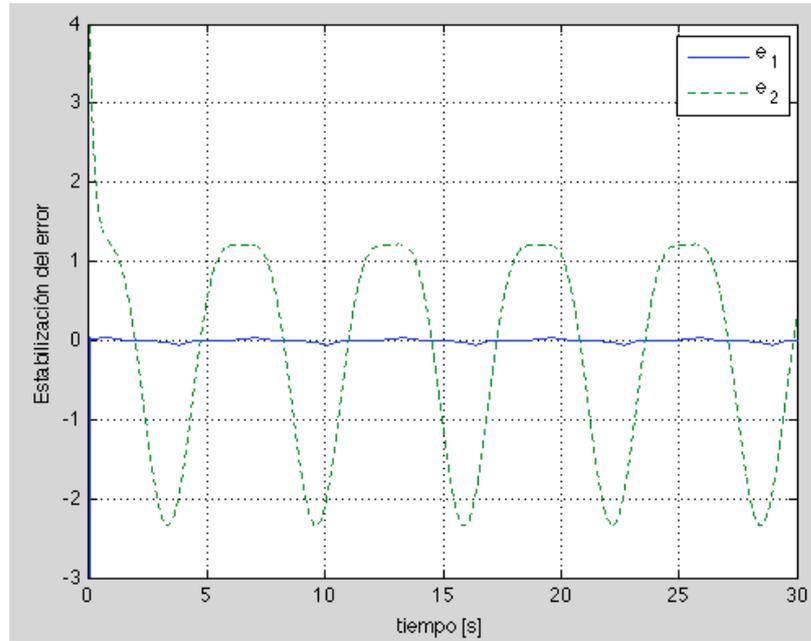


Figura 5.2: Estabilización BIBS del error para el sistema de segundo orden

Para la obtención de la derivada del error de salida del estabilizador, se utilizaron los diferenciadores propuestos en [Cruz-Zavala et al., 2011] y [Levant, 2003]; seleccionando las ganancias para ambos.

$$k_1 = 2\sqrt{3}$$

$$k_2 = 6$$

con  $\mu = 1$  para el primero y  $\mu = 0$  para el segundo. Calculando para los dos diferenciadores la ganancia  $F(t)$

$$F(t) = \begin{bmatrix} C(t) \\ \dot{C}(t) + C(t)A(t) - C(t)L(t)C(t) \end{bmatrix}^{-1}$$

el error de estimación de estados con condiciones iniciales  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -4$  se presenta en la figura 5.3 para el diferenciador de [Cruz-Zavala et al., 2011]; y en las figura 5.4 para el diferenciador de [Levant, 2003].

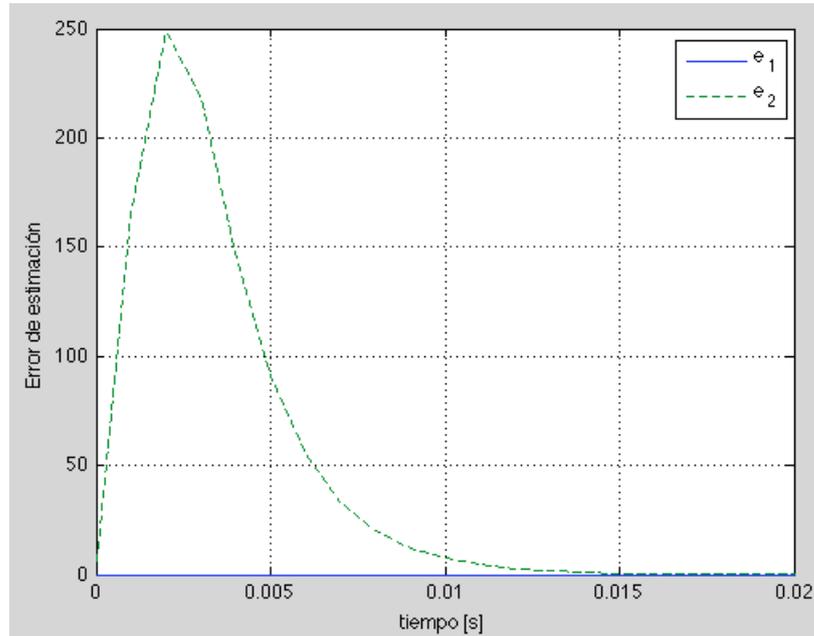


Figura 5.3: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Cruz-Zavala et al., 2011] para el sistema de segundo orden con condiciones iniciales  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -4$

Por otro lado, el error de estimación con condiciones iniciales  $x_1 = 30$  y  $x_2 = -40$  para el diferenciador de [Cruz-Zavala et al., 2011] se presenta en la figura 5.5, mientras que el error para el diferenciador de [Levant, 2003] se muestran en las figuras 5.6.

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + F(t)v(t)$$

Por medio de estas simulaciones se observa que ambos diferenciadores tienen convergencia exacta; sin embargo, la convergencia del diferenciador de Levant crece de manera no acotada con respecto a las condiciones iniciales, mientras que el tiempo de convergencia del diferenciador uniforme, robusto y exacto de Cruz-Zavala es asintóticamente acotado con respecto a las condiciones iniciales. El uso de este diferenciador por lo tanto, agrega propiedades de convergencia uniforme, robusta y exacta al observador de entradas desconocidas para sistemas lineales variantes en el tiempo presentado en este trabajo.

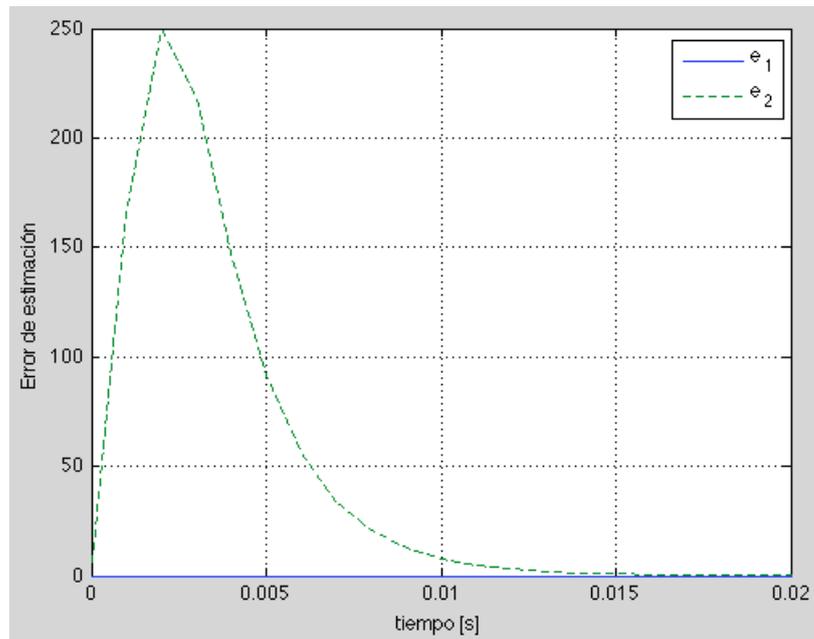


Figura 5.4: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Levant, 2003] para el sistema de segundo orden con condiciones iniciales  $x_1 = 3$  y  $x_2 = -4$

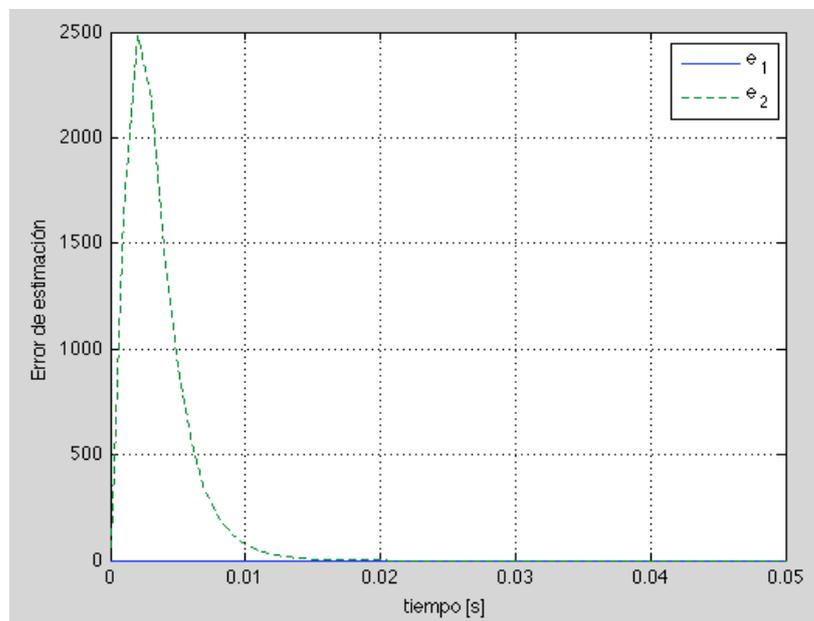


Figura 5.5: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Cruz-Zavala et al., 2011] para el sistema de segundo orden con condiciones iniciales  $x_1 = 30$  y  $x_2 = -40$

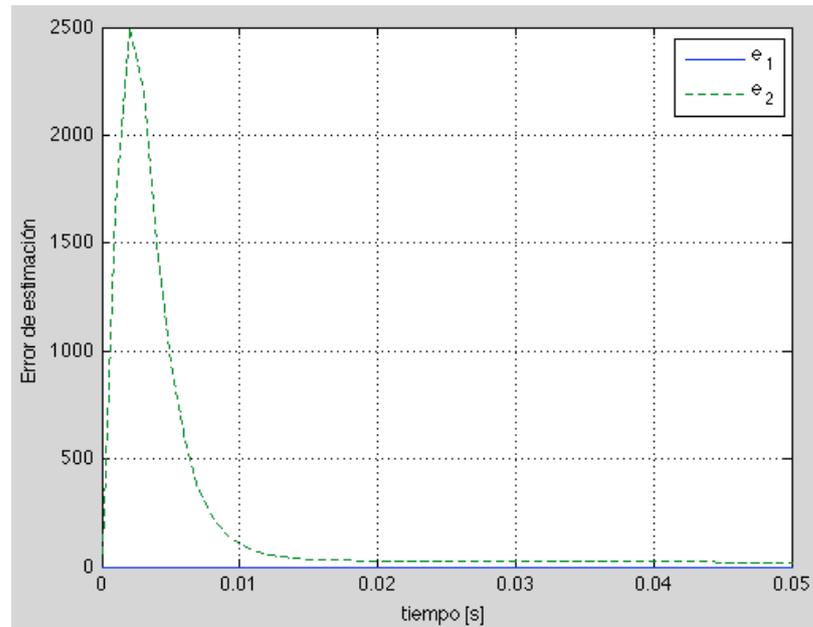


Figura 5.6: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Levant, 2003] para el sistema de segundo orden con condiciones iniciales  $x_1 = 30$  y  $x_2 = -40$

## 5.2. Sistema de tercer orden

Considerando el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \sin(3t) - 3 & -3 & 2 \\ \cos(t) - 9 & -4 & 0 \\ -3 & 4 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) + 4 \end{bmatrix} \zeta(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(2t) - 3 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

El vector de la salida y sus primeras 2 derivadas resulta

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta(t)$$

$$q_{11} = 0$$

$$q_{12} = \cos(2t) - 3$$

$$q_{13} = 0$$

$$q_{21} = (\cos(2t) - 5)(\cos(t) - 9)$$

$$q_{22} = 8\sin^2(t) - 2\sin(2t) + 16$$

$$q_{23} = 0$$

$$q_{31} = (\cos(t) - 9)(\cos(2t) - 5)(\sin(3t) - 3) - \sin(t)(\cos(2t) - 5) - \dots$$

$$\dots - 2\sin(2t)(\cos(t) - 9) - (\cos(t) - 9)(4\cos(2t) + 2\sin(2t) - 20)$$

$$q_{32} = 18\cos(t) + 32\cos(t)\sin(t) + 78\cos^2(t) - 6\cos^3(t) - 254$$

$$q_{33} = 2(\cos(t) - 9)(\cos(2t) - 5)$$

Con  $\text{rank}(Q(t)) = 3$  y  $K(t) = I$ , el sistema es fuertemente observable. Se tiene la entrada desconocida  $\zeta(t) = 10\sin(t) + 3$  y condiciones iniciales  $x(0) = [-1 \ 1 \ 2]^T$ , la Figura 5.7 muestra los estados del sistema. Con  $V_1 = I$ ,  $V_2 = 1$ , el error de estimación del estabilizador se muestra en la Figura 5.8.

Por último, agregando el diferenciador del sistema (4.17), con  $k_1 = 7$ ,  $k_2 = \frac{15}{7}$  y  $k_3 = 1$ , tales que

$$\det \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ k_2 & 0 & 1 \\ k_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ \frac{15}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

con  $L = 45$

$$\mathcal{K}_1 = 2L^{1/3}$$

$$\mathcal{K}_2 = 1.5\sqrt{2}L^{2/3}$$

$$\mathcal{K}_3 = 1.1L$$

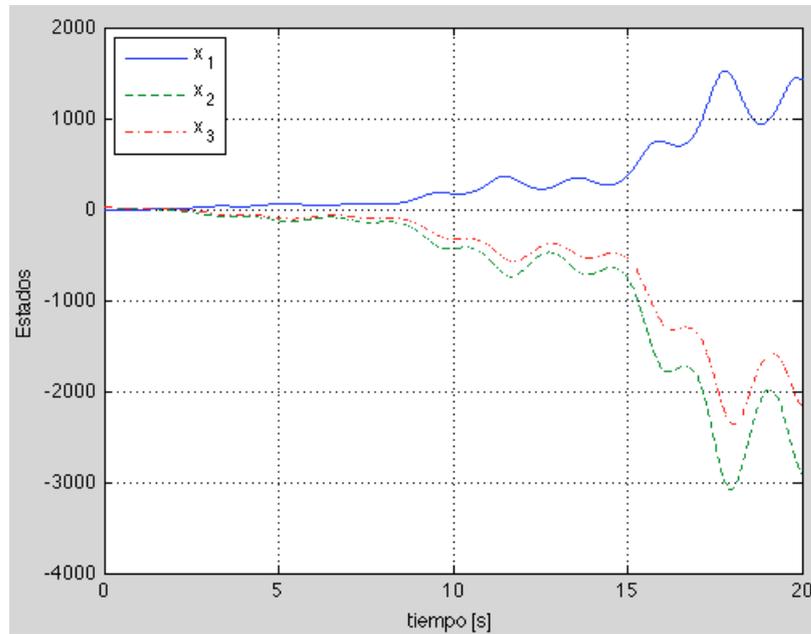


Figura 5.7: Estados del sistema SISO de tercer orden

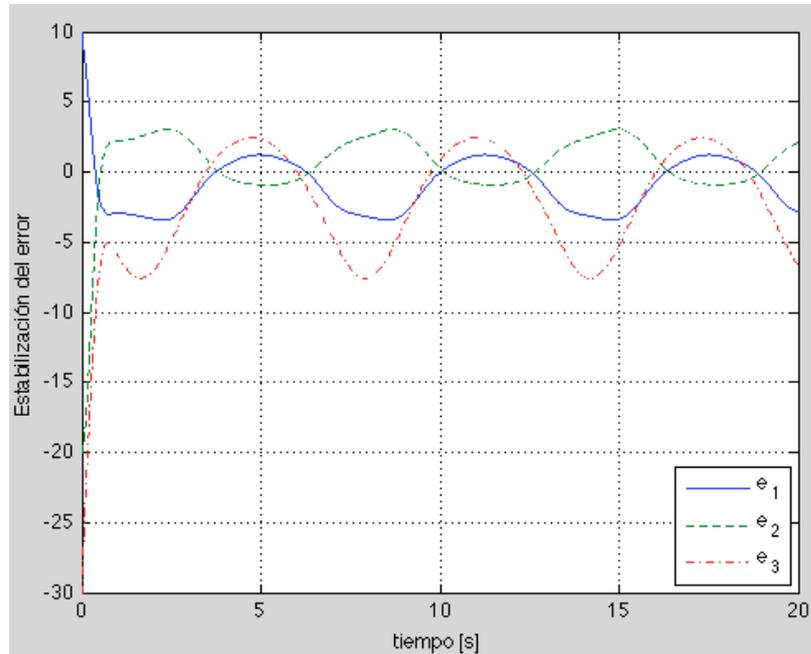


Figura 5.8: Estabilización BIBS del error para el sistema de tercer orden

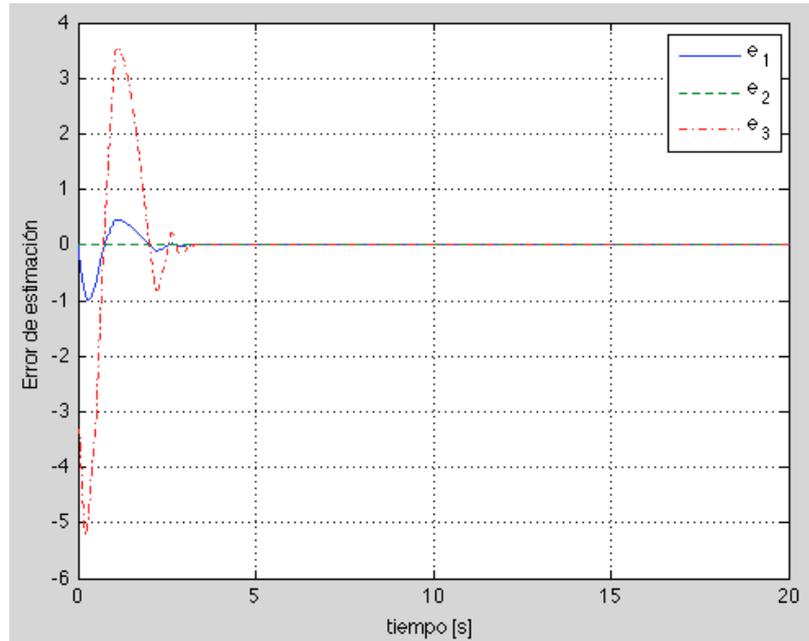


Figura 5.9: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Angulo et al., 2013] para el sistema de tercer orden con condiciones iniciales  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$  y  $x_3 = 3$

De acuerdo con [Angulo et al., 2013] el diferenciador de [Levant, 2003] se recupera definiendo  $\alpha = -1$ , mientras que el diferenciador uniforme y exacto en tiempo finito con las constantes  $\mathcal{K}$  definidas anteriormente, la dinámica del sistema del error de diferenciación es estable cuando  $\alpha = 0.06$ .

Con la ganancia  $F(t)$  para ambos diferenciadores

$$F(t) = \begin{bmatrix} C(t) \\ \dot{C}(t) + C(t)A(t) - C(t)L(t)C(t) \\ \ddot{C}(t) + \dot{C}(t)A(t) + C(t)\dot{A}(t) - \dot{C}(t)L(t)C(t) - C(t)\dot{L}(t)C(t) + (\dot{C}(t) + \dots \\ \dots + C(t)A(t) - C(t)L(t)C(t))(A(t) - L(t)C(t)) \end{bmatrix}^{-1}$$

Con condiciones iniciales  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$  y  $x_3 = 3$ , el error de estimación para el diferenciador de [Angulo et al., 2013] y [Levant, 2003], se muestran en la Figura 5.9 y 5.10 respectivamente. Mientras que con condiciones iniciales  $x_1 = -10$ ,  $x_2 = 20$  y  $x_3 = 30$ , el error de estimación para el diferenciador de [Angulo et al., 2013] y [Levant, 2003], se muestran en la Figura 5.11 y 5.12 respectivamente.

Al igual que en el ejemplo anterior, se observa como el tiempo de convergencia del diferenciador de Angulo está asintóticamente acotado con respecto a las condiciones iniciales,

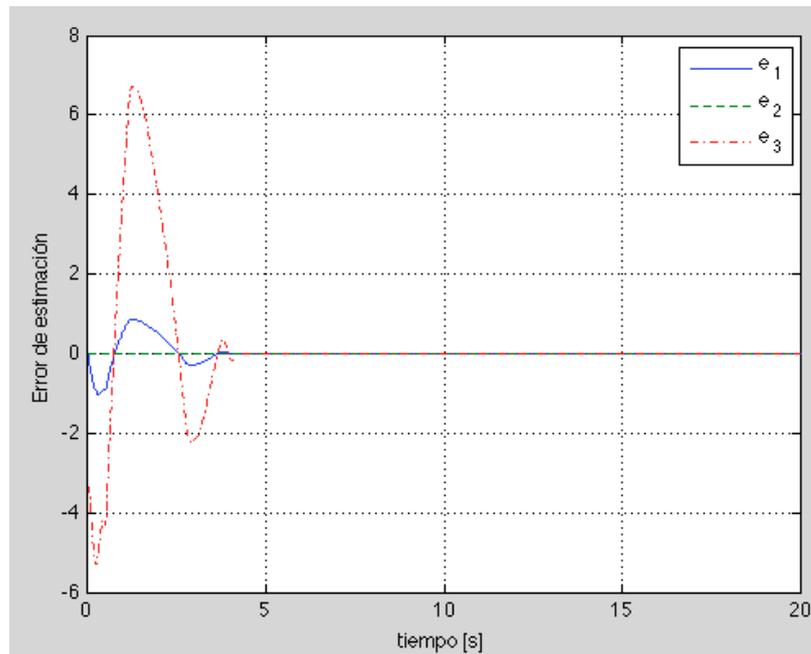


Figura 5.10: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Levant, 2003] para el sistema de tercer orden con condiciones iniciales  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$  y  $x_3 = 3$

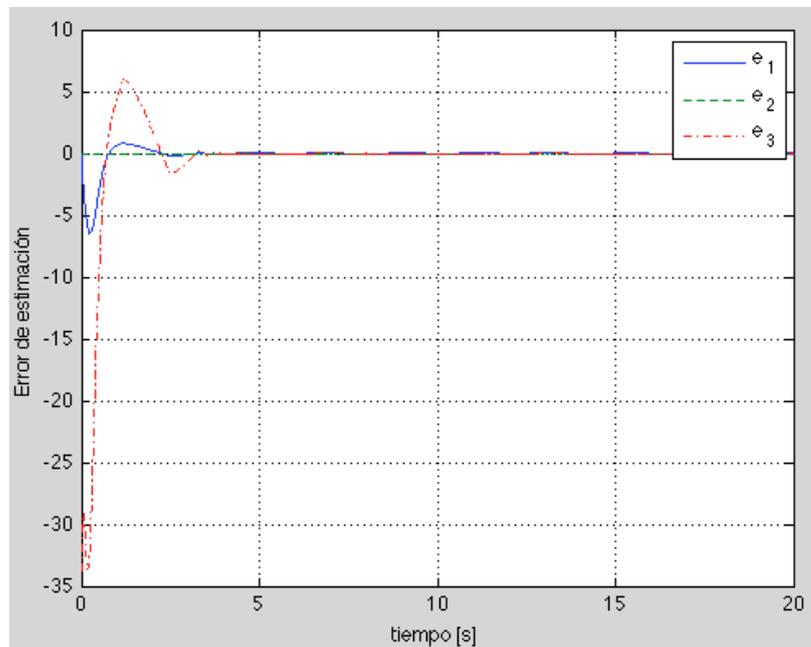


Figura 5.11: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Angulo et al., 2013] para el sistema de tercer orden con condiciones iniciales  $x_1 = -10$ ,  $x_2 = 20$  y  $x_3 = 30$

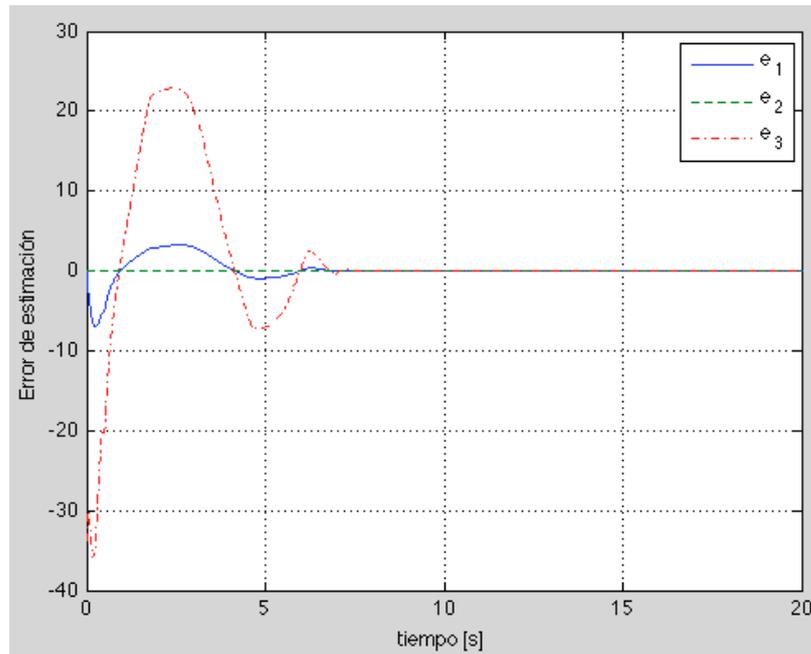


Figura 5.12: Error de estimación de estados con el diferenciador de [Levant, 2003] para el sistema de tercer orden con condiciones iniciales  $x_1 = -10$ ,  $x_2 = 20$  y  $x_3 = 30$

mientras que el tiempo de convergencia del diferenciador de Levant crece de manera no acotada, por lo que el uso del diferenciador de Angulo, brinda propiedades de convergencia uniforme, robusta y exacta al observador de entradas desconocidas para sistemas lineales variantes en el tiempo de alto orden, mientras que el diferenciador de Cruz-Zavala sólo está definido para sistemas de segundo orden.

## Capítulo 6

# Conclusiones

En el presente trabajo se presenta un observador para sistemas lineales variantes en el tiempo con entradas desconocidas. Se evalúa el uso de múltiples diferenciadores por modos deslizantes para la implementación del observador tanto en sistemas SISO como MIMO con entradas desconocidas. La observación convergente y exacta en tiempo finito se logra bajo condiciones necesarias y suficientes de observabilidad fuerte y acotación de las entradas.

El diferenciador robusto y exacto basado en modos deslizantes [Levant, 2003], se aplica para brindar convergencia en tiempo finito en presencia de entradas desconocidas para sistemas LTV fuertemente observables.

Se realizó una comparación entre el algoritmo de [Levant, 2003]; el cual presenta propiedades de exactitud y robustez, posibilitando la convergencia en tiempo finito; mientras que los diferenciadores propuestos por [Cruz-Zavala et al., 2011] y [Angulo et al., 2013] para diferenciadores de primero y segundo orden respectivamente, donde se muestra la uniformidad del tiempo de convergencia, independiente de las condiciones iniciales, a través de simulaciones numéricas. Estos dos últimos diferenciadores tienen la ventaja de no necesitar que los valores iniciales del diferenciador se encuentren cercanos a la señal a ser diferenciada, ya que su tiempo de convergencia no depende del error inicial del diferenciador, por lo que así mismo, brinda robustez al observador con respecto a las condiciones iniciales.

Por último, la ganancia del observador puede ser obtenida desde dos enfoques: agregando diferenciadores por modos deslizantes de orden superior para cada uno de los elementos de la matriz  $A(t) - L(t)C(t)$  o, a través del desarrollo algebraico de las matrices del sistema y la forma de la ecuación de Riccati del estabilizador; siendo este último enfoque el que se desarrolla en este trabajo. Se muestra de manera explícita y se proponen formas

generalizadas para la ganancia del observador, las cuales no requieren ninguna diferenciación adicional.

# Bibliografía

- [Amato et al., 2011] Amato, F., Carannante, G., De Tommasi, G., y Pironti, A. (2011). Input–output finite–time stabilization of ltv systems via dynamic output feedback. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*.
- [Angulo et al., 2013] Angulo, M., Moreno, J., y Fridman, L. (2013). Robust exact uniformly convergent arbitrary order differentiator. *Automatica*, 49:2489–2495.
- [Aoki y Li, 1973] Aoki, M. y Li, M. (1973). Partial reconstruction of state vectors in decentralized dynamic systems. *IEEE Transactions on automatic control*, AC-18:289–292.
- [Basile y Marro, 1969] Basile, G. y Marro, G. (1969). On the observability of linear, time-invariant systems with unknown inputs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3:410–415.
- [Cruz-Zavala et al., 2011] Cruz-Zavala, E., Moreno, J., y Fridman, L. (2011). Uniform robust exact differentiator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56:2727–2733.
- [Davila et al., 2006] Davila, J., Fridman, L., y Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International journal of control*, 79:1251–1262.
- [Filippov, 1988] Filippov, A. (1988). Differential equations with discontinuous right-hand sides. *Mat. Sb. (N.S.)*, 51:99–128.
- [Fridman et al., 2011] Fridman, L., Davila, J., y Levant, A. (2011). High-order sliding-mode observation for linear systems with unknown inputs. *Nonlinear analysis: Hybrid systems*, 5:189–205.

- [Fridman et al., 2007] Fridman, L., Levant, A., y Davila, J. (2007). Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38:773–791.
- [Hautus, 1983] Hautus, M. (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50:353–468.
- [Huang, 2007] Huang, R. (2007). *Output feedback tracking control of nonlinear time-varying systems by trajectory linearization*. PhD thesis, Ohio University.
- [Kalman y Bucy, 1961] Kalman, R. y Bucy, R. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83:95–108.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, tercera edición.
- [Khargonekar et al., 1988] Khargonekar, P., Pascoal, A., y Ravi, R. (1988). Stabilization of linear time-varying systems. strong, simultaneous and reliable stabilization. *IEEE Transactions on automatic control*, 33:1158–1161.
- [Kolmogorov, 1962] Kolmogorov, A. (1962). On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 4:232–242.
- [Kratz, 1995] Kratz, W. (1995). Characterization of strong observability and construction of an observer. *Linear Algebra and its Applications*, 221:31–40.
- [Kratz y Liebscher, 1998] Kratz, W. y Liebscher, D. (1998). A local characterization of observability. *Linear Algebra and its Applications*, 269:115–137.
- [Kwakernaak y Sivan, 1972] Kwakernaak, H. y Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience.
- [Levant, 2003] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *Int. J. Control*, 76:924–941.
- [Luo et al., 2011] Luo, J., Zou, X., y Cao, C. (2011). Eigenvalue assignment for linear time-varying systems with disturbances. *IET Control Theory and Applications*, 6:365–374.
- [Molinari, 1976] Molinari, B. (1976). A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21:761–764.

- [Silverman, 1969] Silverman, L. (1969). Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, AC-14:270–276.
- [Tang y Ortega, 1987] Tang, Y. y Ortega, R. (1987). On the adaptive stabilization of linear time-varying systems. *Proceedings of the 26th Conference on decision and control*, 26:1245–1246.
- [Wonham, 1974] Wonham, W. (1974). *Linear multivariable control, a geometric approach*. Springer-Verlag, segunda edición.