



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA-CONTROL

COMPARACIÓN DE ALGORITMOS DE CONTROL
EN MOTORES ELÉCTRICOS SIN ESCOBILLAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:

URIEL EMMANUEL PELÁEZ HERNÁNDEZ

TUTOR:

DR. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA

MÉXICO, D.F. 2014

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dra. María Cristina Verde Rodarte.
Secretario:	Dr. Marco A. Arteaga Pérez.
Vocal:	Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria.
1 ^{er} . Suplente:	Dr. Paul Rolando Maya Ortíz.
2 ^{do} . Suplente:	Dra. Lizeth Torres Ortíz.

La tesis se realizó en:
Instituto de Ingeniería-UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo de la tesis	2
1.2. Máquinas eléctricas	3
1.3. Motor de imán permanente sin escobillas	4
1.4. MIPSE de flujo axial	8
1.5. Resultados previos de esquemas de control	9
2. Modelo matemático del MIPSE	13
2.1. Ecuaciones de voltaje	13
2.2. Ecuación de movimiento	19
2.3. Modelo no lineal en el marco <i>abc</i>	22
3. Esquemas de control	25
3.1. Linealización por retroalimentación de estados	25
3.2. Control basado en pasividad	30
3.3. Control pasivo IDA	34
4. Resultados de simulación	39
4.1. Parámetros del MIPSE	39
4.2. Variación de ganancias	40
4.3. Respuesta de seguimiento y magnitud del error	41
4.4. Variaciones y perturbaciones	42
4.5. Discusión de resultados	46
5. Conclusiones	55
A. Transformada de Park	57
B. Algunas definiciones básicas	61

Índice de figuras

1.1.	Clasificación de motores.	4
1.2.	Partes que componen un motor eléctrico. Fuente: www.bosch.de . . .	5
1.3.	Desarrollo de magnetos permanentes. Fuente [23].	7
1.4.	Gráfica de par contra velocidad del rotor (ω_r). La Figura muestra las curvas características de un motor síncrono. Re-editado de la referencia [14].	8
1.5.	MIPSE de flujo radial (izquierda) versus flujo axial (derecha). Imagen re-editada de las referencias [20] y [13].	9
1.6.	Tipos de estructuras del MIPSE axial. (a) Estructura sencilla, (b)-(c) Estructuras multidisco con rotor interno y estator interno, respectivamente. Fuente [27].	10
2.1.	Diferencial de fuerza en el MIPSE de flujo axial [20].	20
4.1.	Variación de ganancias; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad.	40
4.2.	Variación de ganancias; control por linealización exacta. Respuesta del error.	41
4.3.	Variación de ganancias; control pasivo. Respuesta de velocidad. . . .	42
4.4.	Variación de ganancias; control pasivo. Respuesta del error.	43
4.5.	Ajuste de ganancias; control IDA. Respuesta de velocidad.	44
4.6.	Ajuste de ganancias; control IDA. Respuesta de error.	45
4.7.	Seguimiento de velocidad.	46
4.8.	Magnitud del error.	47
4.9.	Respuesta de los voltajes del eje d , de todos los esquemas de control. .	48
4.10.	Respuesta de los voltajes del eje q , de todos los esquemas de control. .	48
4.11.	Torque variable; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad del rotor.	49
4.12.	Torque variable; control pasivo. Respuesta de velocidad del rotor. . .	49

4.13. Torque variable; control IDA. Respuesta de velocidad del rotor. . . .	50
4.14. Perturbación del par; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad del rotor.	50
4.15. Perturbación del par; control pasivo. Respuesta de velocidad del rotor.	51
4.16. Perturbación del par; control IDA. Respuesta de velocidad del rotor. .	51
4.17. Perturbación del momento de inercia; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad del rotor.	52
4.18. Perturbación del momento de inercia; control pasivo. Respuesta de velocidad del rotor.	52
4.19. Perturbación del momento de inercia; control IDA. Respuesta de ve- locidad del rotor.	53

Capítulo 1

Introducción

Los motores de imán permanente sin escobillas presentan ventajas en ciertos escenarios de operación sobre los motores convencionales. Tienen una mayor razón de par por inercia lo que genera un mejor desempeño en cuanto a la aceleración y desaceleración del rotor, por lo que se prefieren en aplicaciones de robótica y en motores aeroespaciales. Sin embargo, al igual que cualquier otro motor eléctrico, presentan problemas en el tema del control. Esto se debe a que el sistema es no lineal, los parámetros varían considerablemente respecto a los valores nominales, y además las señales medidas están contaminadas con ruido. El objetivo ideal del control es generar un comportamiento idéntico con respecto a la consigna que se le entrega, también llamada referencia. Cualquier algoritmo de control para algún motor eléctrico tiene ventajas y desventajas dependiendo del tipo de régimen de operación que se imponga. Conocer cuales son las limitaciones entre un esquema y otro resulta conveniente al momento de implementarlo en alguna aplicación.

Se inicia este primer capítulo, con una sección en la que se encuentra el objetivo de la tesis, así como, el alcance y la estructura de la misma. Una breve introducción sobre el motor eléctrico y sus variantes se anexa posteriormente. Se analizan a grandes rasgos, los avances técnicos y algunas características del motor de imán permanente, y se discute el caso particular cuando este es de flujo axial. La última sección contiene un resumen sobre algunas de las publicaciones que han diseñado algún algoritmo de control para motores de imán permanente sin escobillas de corriente directa o síncrono.

1.1. Objetivo de la tesis

Comparar esquemas de control para motores de imán permanente sin escobillas a través de simulaciones numéricas que consideren el seguimiento a referencias de velocidad variantes con el tiempo y cambios en el par de carga y el momento de inercia de la misma.

1.1.1. Alcances de este trabajo

Los modelos matemáticos se desarrollarán para MIPSE's trifásicos de flujo axial, que después se representarán en un marco bifásico referido a la velocidad del rotor. Se asumirá que las fases son simétricas y con parámetros iguales en todas ellas. No se tomarán en cuenta efectos de saturación en el núcleo. Se asumirá que las corrientes y voltajes son medibles en todas las fases y no se incluyen los efectos de la implantación digital de las leyes de control.

En este trabajo no se diseñan leyes o algoritmos de control, sino que se recuperan algunos esquemas de control disponibles en la literatura y se compara el desempeño de un mismo motor controlado por estos esquemas cuando están sujetos a una misma señal de referencia o a una misma perturbación en los parámetros del modelo.

Los algoritmos de control a evaluar son: 1) Linealización por retroalimentación de estados, 2) Control basado en pasividad y 3) Control basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento (IDA).

La evaluación se realizará con base en los resultados de simulaciones numéricas y será de tipo cualitativo basándose en respuestas transitorias y permanentes. Todas las simulaciones se llevarán a cabo en MATLAB.

1.1.2. Estructura de la Tesis

La tesis se distribuye de la siguiente manera

- La introducción: contiene el objetivo, el alcance y la forma en la que está conformada la tesis. También incluye una breve introducción sobre motores eléctricos y algunos resultados previos de algoritmos de control; todo esto está enfocado a motores de imán permanente sin escobillas.
- Modelo matemático del motor de imán permanente sin escobillas: aquí se anexa el modelado matemático del motor, el cual se usa en motores eléctricos de flujo axial, y que termina expresado en el marco de referencia del rotor.

- Esquemas de control: sección en la que se pueden encontrar los diversos algoritmos de control, como son: linealización por retroalimentación de estados, control basado en pasividad y control pasivo por asignación de amortiguamiento.
- Simulación y resultados: capítulo donde se hallan los resultados obtenidos de los algoritmos de control, usando los parámetros de un motor de imán permanente de flujo magnético axial.
- Las últimas dos secciones de la tesis corresponden a las conclusiones y el apéndice, en este último se anexan de manera somera algunas definiciones y conceptos básicos que se utilizan en algunos capítulos previos.

1.2. Máquinas eléctricas

Se denomina máquina eléctrica al dispositivo que convierte energía mecánica en energía eléctrica o energía eléctrica en energía mecánica, ver referencia [3, pág. 1]. Se le llamará motor eléctrico a la máquina eléctrica que convierte energía eléctrica a mecánica, y se llamará generador a la máquina eléctrica que convierte energía mecánica en eléctrica. El motor eléctrico puede manejar tasas de energía desde los microwatts hasta los megawatts y se divide en dos clases: motores de corriente directa (MCD) o motores de corriente alterna (MCA), ver referencia [24]. Cada una de estas clases puede tener diversas ramificaciones, sin embargo, a lo largo de este trabajo sólo un tipo de motor eléctrico que pertenece a la clase de MCA con características muy particulares será analizado. El término de motor o motor eléctrico se ocupa sin distinción. El esquema de la Figura 1.1 muestra una breve clasificación de motores.

A grandes rasgos los elementos que componen a un MCA o a un MCD son similares, la Figura 1.2 muestra las partes más importantes de un motor. La parte del motor que es estacionaria se denomina estator y la parte que gira se denomina rotor. El eje del motor es una extensión del rotor en dirección del eje de giro. Una bobina es un selenoide de cobre el cual genera un dipolo magnético. Al conjunto de todo los selenoides de un motor se le nombrará devanado. Si el devanado tiene una estructura dentada que lo soporte y dicho grupo de selenoides quedan distribuidos a lo largo de los dientes, entonces a este tipo de estator se le conoce como estator de polos salientes. Cuando no hay dicho soporte dentado entonces se dirá que el estator es de polo no-saliente o sin núcleo, ver referencia [5, Pág. 153].

Los motores eléctricos están diseñados para que los campos magnéticos del estator y del rotor (ya sea campos inducidos o permanentes) generen un par electromecánico,

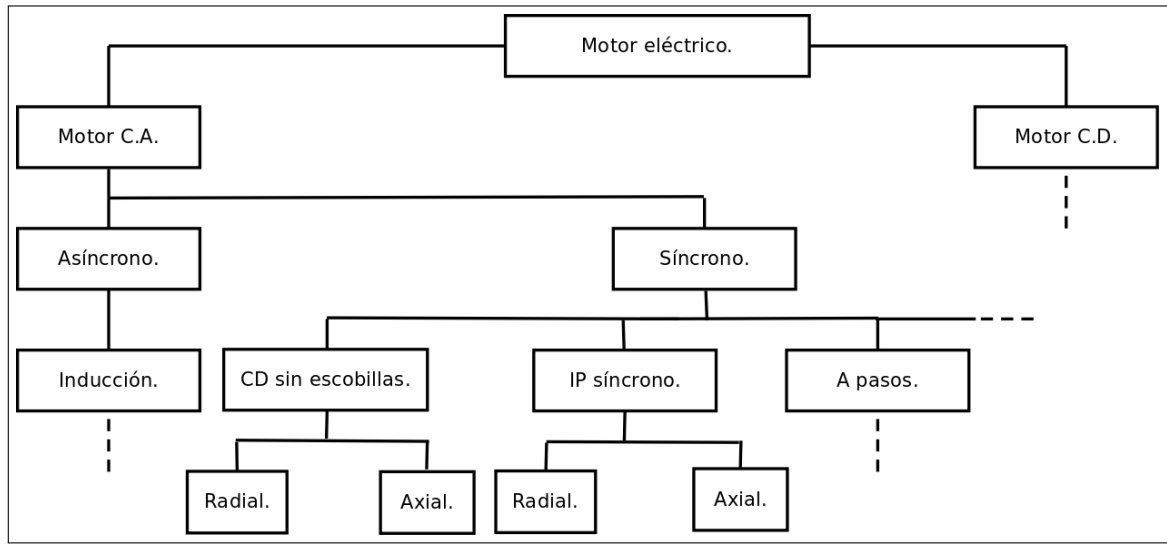


Figura 1.1: Clasificación de motores.

como resultado de esta interacción magnética el par mutuo genera movimiento de rotación en el eje, el cual se transfiere al instrumento o equipo unido a este. El campo magnético inducido por el estator se genera cuando el devanado se energiza, para esto se utiliza un equipo electrónico de potencia llamado inversor; el inversor puede utilizar un modulador de ancho de pulso (MAP), delta MAP, etc., y su tarea consiste en alimentar eléctricamente el devanado con señales, a las cuales se les puede variar en frecuencia y magnitud. El desempeño en la conmutación de la señal depende del tipo de transistores que contenga el inversor; estos pueden ser transistores bipolares de puerta aislada (o IGBT's), rectificadores controlados de silicio (o SCR's), transistores de efecto de campo metal-óxido-semiconductor (o MOSFET's), tiristores (o GTO's), etc. Las señales se modifican de acuerdo a la posición del rotor con respecto al estator, por lo que es común que el motor tenga sensores de posición; ya sean de efecto hall o codificadores, ver referencia [24].

El motor trifásico induce en su devanado tres dipolos, desfasados 120° uno del otro. Esta orientación, también, se relaciona con que las corrientes (o los voltajes) tengan un desfase de 120° entre cada bobina.

1.3. Motor de imán permanente sin escobillas

El motor de imán permanente (MIP) es resultado de los avances en tecnología de materiales, su diseño carece de escobillas y generalmente tiene un devanado trifásico.

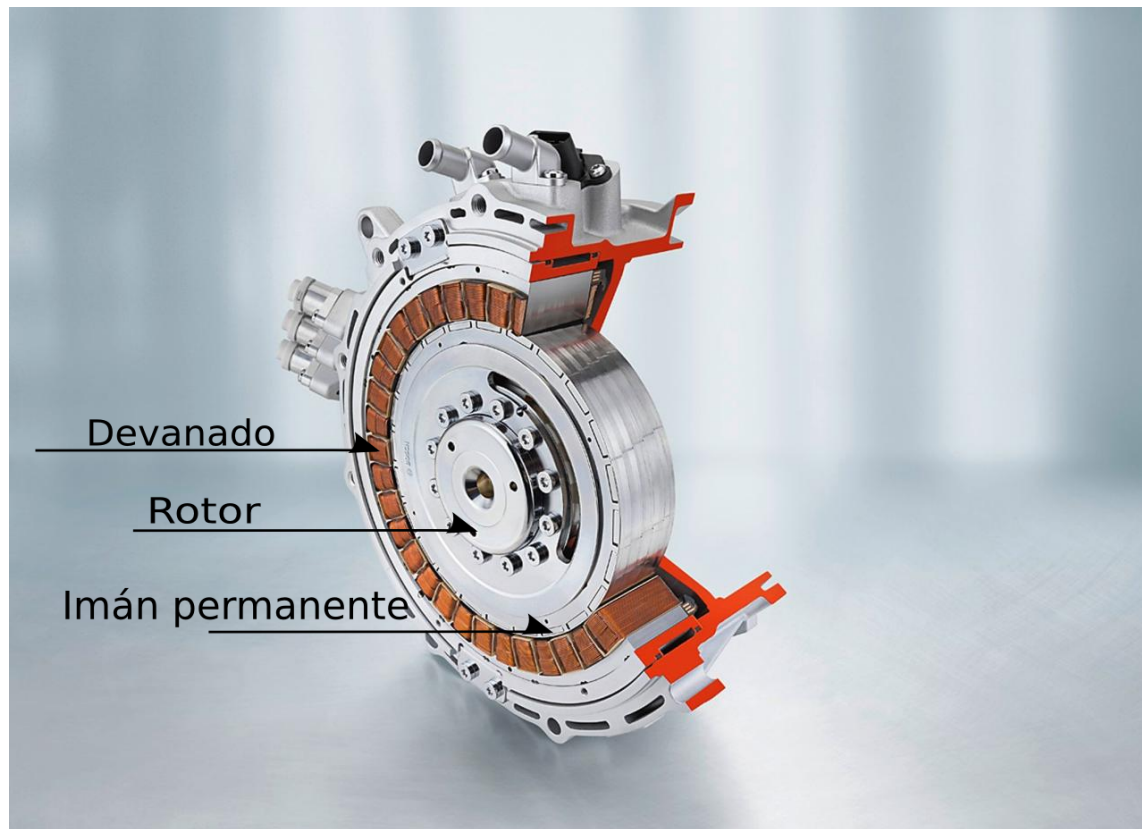


Figura 1.2: Partes que componen un motor eléctrico. Fuente: www.bosch.de

Se clasifica en dos tipos: el MCD sin escobillas y el MIP síncrono. Estas variantes tienen relación con el tipo de alimentación eléctrica que se observa en las bobinas del estator, y es debido al tipo de distribución que se da a las bobinas cuando se ensambla el devanado. El MCD sin escobillas siempre tiene una fuerza contra electromotriz (FEM) en forma trapezoidal y el MIP síncrono tiene una FEM sinusoidal, ver referencia [19, Pág. 1]. En ambos casos se utilizará el acrónimo de MIPSE (Motor de imán permanente sin escobillas.), ya que los dos motores tienen imanes en el rotor y no tienen escobillas.

El MIPSE está sustituyendo a los motores con rotor convencional¹ ya que satisfacen esencialmente las mismas necesidades, pero mejora tanto la eficiencia como el factor de potencia, ver referencia [24]. Por ejemplo, se obtiene mayor eficiencia en el motor cuando este trabaja en sincronía, i.e. no hay deslizamiento en el rotor. Además,

¹Motores que generan la excitación en el rotor, como los motores de inducción.

si el motor tiene un «alto» factor de potencia entonces se reducen las pérdidas de cobre en el devanado. Por otro lado, el rizo en la forma de onda del par² que presenta el MIPSE en bajas velocidades se debe a variaciones dependientes de la posición en el par mutuo, lo cual genera en repetidas veces una aceleración y desaceleración en la carga cuando el par aumenta o disminuye, respectivamente. Sin embargo, en el rotor del MIPSE siempre hay un número par de magnetos permanentes, los cuales afectan el tamaño de paso y el rizo del par. Tener más magnetos reduciría el tamaño de paso y la ondulación del par. En aplicaciones de alta velocidad, como bombeo, ventilación, etc., el rizo en la forma de onda del par no es importante, ver referencia [7, Pág. 62].

Debido a la investigación en materiales magnéticos, ahora es posible disponer de modernos magnetos permanentes que suministran grandes cantidades de flujo magnético, y como resultado es posible la construcción de motores con diseños más compactos. Desde los años 50's el material más destacado fueron las aleaciones de ferrita. A finales de los 50's siguieron las variantes de AlNiCo (aluminio, nickel y cobalto), en los años 60's aparecieron las aleaciones de tierras raras, y ya en los ochentas la aleación de neodimio, boro y hierro (NdBFe) logró tener la más alta energía de flujo magnético por volumen (BHmax), ver referencia [23], (ver Figura 1.3).

Comparando al MIPSE contra algún motor de otra categoría, con propiedades semejantes, este resulta más pequeño, con mayor par y requiere de menos servicio. Aunque, como ya se mencionó antes, presenta oscilaciones tanto en la parte eléctrica como en la mecánica.

Una opción para reducir el rizo en la forma de onda del par en el MIPSE es usar el devanado de amortiguamiento. Como el nombre lo indica, esta clase de bobina sirve para absorber las oscilaciones del rotor en los intervalos de arranque. Si el motor no tiene dicha amortiguación, entonces se deben controlar «apropiadamente» las corrientes del inversor. Es decir, el inversor debe de ser iniciado con una variable de retroalimentación al arranque del motor para contrarrestar las oscilaciones. Aquellos MIPSE's que tienen un devanado de amortiguamiento suelen ser más confiables pero tienen un desempeño poco preciso, ver referencia [12, Pág. 522]. También, para que el MIPSE tenga pequeñas ondulaciones en las corrientes se debe de optar por un motor con alta inductancia de sincronía en el núcleo, ya que los inversores de estado sólido presentan desventajas en la conmutación, ver referencia [5, Pág. 126].

El par eléctrico nominal (T_{en}) es el par bajo el cual el motor trabaja la mayor parte del tiempo. El par crítico (T_{ec}) es el límite máximo de par bajo el cual se puede entregar movimiento rotatorio por el rotor. Ambas momentos determinan una impor-

²Traducción del Inglés *ripple torque*.

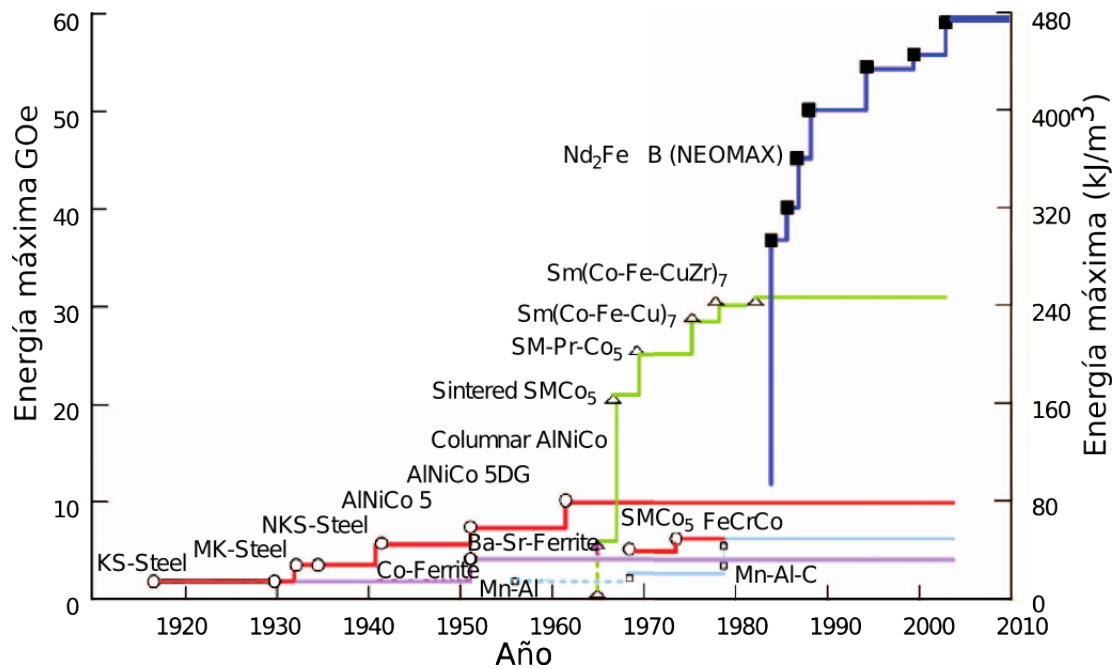


Figura 1.3: Desarrollo de imanes permanentes. Fuente [23].

tante región de operación del motor. La Figura 1.4 muestra las curvas características de un motor síncrono. Cuando el par de carga (T_L) es mayor a T_{ec} , el motor se detiene, ya que el campo magnético del rotor deja de estar «unido» al campo magnético del estator. A este fenómeno se lo conoce como pérdida de sincronía, y se debe a que el par electromagnético del motor se invierte. Aunque los modelos MIPSE's soportan grandes cargas, el inversor puede sobrecargar las corrientes, pero los voltajes picos no puede exceder los del bus, ver referencia [14, Pág. 312]. Para no detener el rotor repentinamente, es importante conocer las restricciones que tiene el motor.

Los MIPSE de CD son preferidos en aplicaciones donde el rizo en la forma de onda del par no es un inconveniente, además de que el control presenta una ventaja por su simplicidad. Los MIPSE síncronos se utilizan en aplicaciones donde es necesario un alto desempeño, ver referencia [25]. Pero, como ya se mencionó antes, este desempeño queda restringido en aplicaciones de baja velocidad o donde la magnitud del par no tenga un papel esencial.

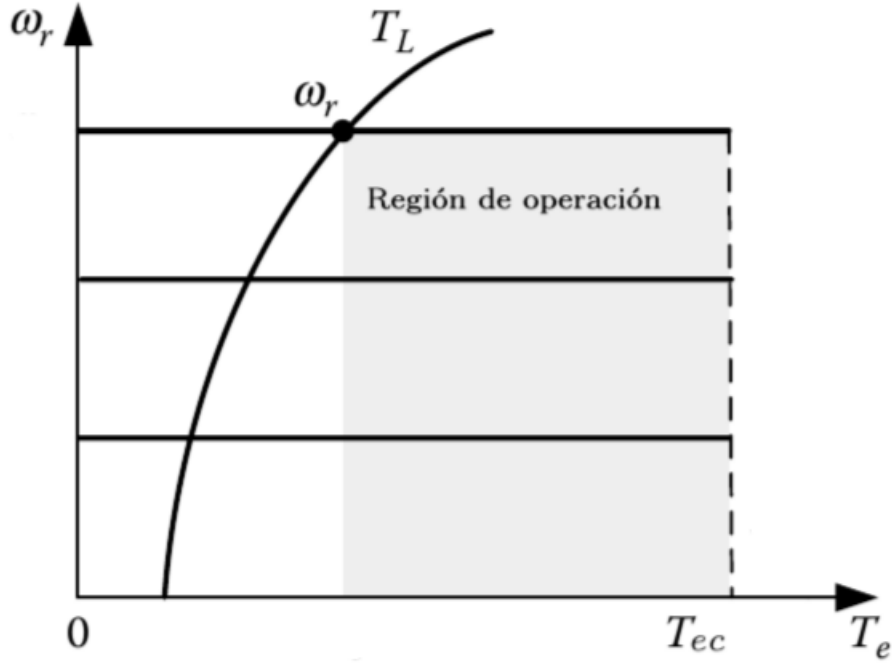


Figura 1.4: Gráfica de par contra velocidad del rotor (ω_r). La Figura muestra las curvas características de un motor síncrono. Re-editado de la referencia [14].

1.4. MIPSE de flujo axial

Desde hace varios años se han tenido dos vertientes en los MIPSE, aquellos que tiene flujo radial y aquellos que tienen flujo axial. La Figura 1.5 muestra dos variantes del MIPSE, el de flujo radial y el de flujo axial. En particular, los MIPSE de flujo axial han tenido una amplia gama de aplicaciones tales como: generadores de alta velocidad, vehículos eléctricos, bombas de velocidad ajustable o motores para propulsión de barcos, ver [26, Pág. 35].

Las forma que puede tener el estator va desde una estructura simple hasta una estructura multidisco, ambas se muestran en la Figura 1.6. Las estructuras multidisco pueden tener un rotor y dos estatores o un estator y doble rotor. Los motores de flujo axial multidisco se ocupan porque tienen menos pérdidas de cobre y acero, e incrementan la densidad de potencia, ver referencia [26, Pág. 39].

Los motores de flujo axial sin núcleo operan con alta eficiencia, pero debido a la ausencia del estator ferromagnético el rotor debe tener una mayor área de imanes permanentes, ver referencia [5, Pág. 153]. Otra característica de los motores con estator de polo no-saliente es que se elimina el rizo en la forma de onda del par, lo que

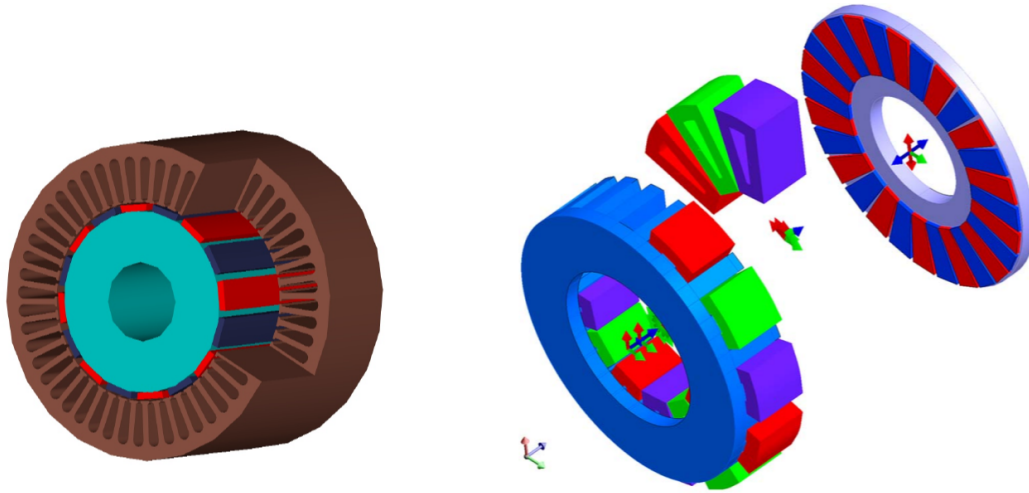


Figura 1.5: MIPSE de flujo radial (izquierda) versus flujo axial (derecha). Imagen re-editada de las referencias [20] y [13].

genera giros «suaves» del rotor a bajas velocidades. Estos motores se han montado en sillas de ruedas que utilizan alimentación solar, con bobinas que se fabrican a partir del apilamiento de capas de películas de cobre en el estator, ver referencia [5, Pág. 154]. Incluso esta misma tecnología se utiliza en los microgeneradores³.

Una desventaja del motor de flujo radial, con respecto al axial, es que el flujo magnético genera un cuello de botella en los dientes del rotor, y que, tienen problemas de enfriamiento. Estas limitaciones cambian solamente si se usa otro diseño de devanado versus rotor; es decir, se debe cambiar de motor, ver referencia [16, Pág. 300].

1.5. Resultados previos de esquemas de control

En la literatura de control, tanto en los artículos de investigación como en los libros de texto, se encuentran diversos tipos de controladores, los cuales pueden tener relaciones particulares. Esto se debe principalmente a la forma con la que se modela la dinámica de la máquina eléctrica, es decir, es claro que no todos los motores son físicamente idénticos. Sin embargo las suposiciones que se hacen sobre estos

³Motores de escala micrométrica con bobinas que pueden tener una longitud radial de $200\mu\text{m}$, ver referencia [5, Pág. 157].

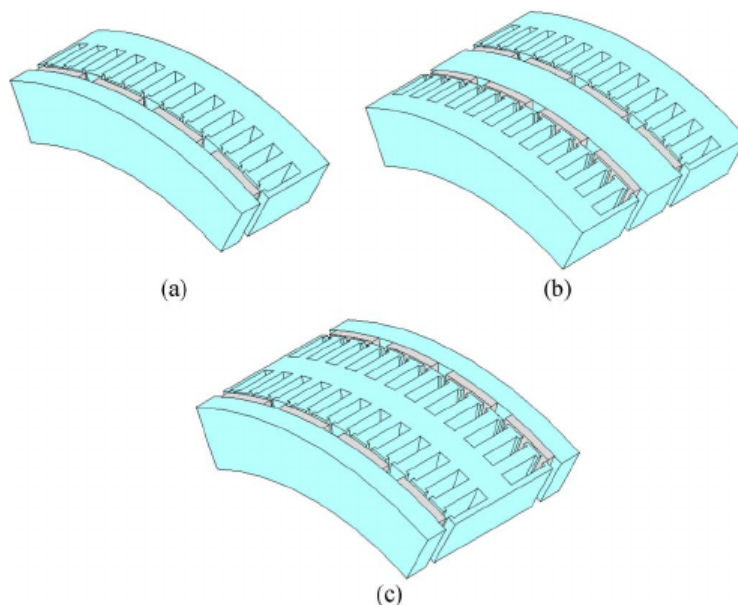


Figura 1.6: Tipos de estructuras del MIPSE axial. (a) Estructura sencilla, (b)-(c) Estructuras multidisco con rotor interno y estator interno, respectivamente. Fuente [27].

generan que los esquemas de control resulten similares; como ejemplo está el control para un MIPSE de CD y un MIPSE síncrono. Como se mencionó en las primeras secciones, los motores eléctricos abarcan una familia muy diversa, y la mayoría de las veces estos esquemas se diseñan «a la medida». Es decir, los controles son capaces de trabajar, en la medida de lo posible, sólo en ciertas condiciones de operación. Las condiciones impuestas al motor se clasifican respecto a las señales de entrada, el tipo de perturbación externa (par mecánico), restricciones de entradas y salidas del sistema, perturbaciones parámetros y estructurales (fricción de inercia), y las características de la fuente de poder (inversor).

Existen dos tipos de control muy conocidos, tanto en la academia como en la industria, el control de campo orientado (CCO) y el control directo de par (CDT). El CCO requiere que las ecuaciones que modelan al motor se transformen al sistema coordenado que gira en sincronía con el rotor, conocido como marco $d - q$. En el marco $d - q$ las variables de flujo están separadas de la dinámica mecánica por lo que se puede controlar por «separado» la parte eléctrica y el par del rotor; normalmente se usa un control integral-proporcional. El CDT es, a grandes rasgos, un algoritmo

sistemático que selecciona los voltajes representados como vectores que se aplican al estator del motor. En este esquema el tipo de alimentación se selecciona de acuerdo a la referencia de velocidad, a la región en la que se encuentra el vector del voltaje (definido en una tabla) y al error, tanto del par como de los flujos. La ventaja del CDT es que sólo es necesario conocer un parámetro del motor; las resistencias del devanado.

El método que utiliza parte de la extensa teoría de geometría diferencial es la linealización por retroalimentación no lineal del estado. Este acercamiento conduce a una linealización exacta del modelo en una vecindad abierta para alguna condición inicial del estado. Para el caso de un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas se obtiene un comportamiento entrada-salida desacoplado localmente. Las dos ventajas que aporta esta teoría son la similitud con conceptos de control lineal (como observabilidad, grado relativo, etc.) y la posibilidad de que al modelo linealizado se le puede aplicar alguna técnica de control conocida. Han pasado varios años desde que este tipo de control entró al campo de los servo controladores. Bojan Grčar menciona en la referencia [6] que el trabajo que marcó el inicio en estos esquemas de control pertenece a Taylor, D. G. *et al*, titulado *A feedback linearizing control for direct-drive robots with switched reluctance motors* (1986). Después, se encuentra el trabajo de Georgiou, G. y Le Pioufle B., con el título *Nonlinear speed control of synchronous servomotor with robustness* (1991), en el cual se introduce el problema desde la perspectiva de robustez. Posteriormente se publicó un esquema adaptivo gracias al trabajo de Riccardo Marino, en *Adaptive input-output linearizing control of induction motors* (1993). El trabajo de Bojan Grčar es una de las aportaciones más recientes en este rubro, porque publica un esquema de control completo para un MIPSE síncrono utilizando la linealización exacta por retroalimentación de estados.

El concepto de pasividad surge de los amplios trabajos en problemas de mecánica clásica. El punto clave de los esquemas de control pasivo es obtener una desigualdad en la que se asegura que el sistema no almacena más energía de la suministrada. El trabajo de Anhour, en la referencia [2], propone un control que sigue la referencia de velocidad para un MIPSE síncrono. Este esquema utiliza los flujos de encadenamiento como estados y no a las corrientes del marco $d-q$, directamente; es más, las corrientes se utilizan como una especie de entrada de control virtual. Zhai, por otro lado, utiliza el modelo del MIPSE en su forma de Euler-Lagrange, ver referencia [28]. Pero, este control basado en pasividad se implementa en un MIPSE de CD y los resultados se comparan contra un control proporcional-integral; este último esquema de control resulta tener una respuesta dinámica más pobre. Abdelyazid, en la referencia [1], se diseña un control con observador; la razón de usar un observador es para poder reconstruir los estados de velocidad y corrientes, ya que por hipótesis, sólo se supone

conocer la posición y los voltajes. La publicación más reciente pertenece a Ramírez-Leyva, ver referencia [25], en la que se presenta un esquema basado en pasividad que hace uso de una retroalimentación del error del estado para disipar la energía total del sistema.

La técnica de control de asignación de amortiguamiento por interconexión (IDA) se introduce por Romeo Ortega *et al.*, ver referencia [17]. Este método resulta ser una variante de los esquemas de control pasivos. Es decir, se mantiene como prioridad el espíritu de disipación de energía del sistema, pero, a partir de la estructura de interconexión. La asignación de interconexión surge de resolver la ecuación diferencial parcial que arroja el método, llamada ecuación de compatibilidad. Petrović, V. en la referencia [21] desarrolla un control basado en IDA para un MIPSE síncrono. Posteriormente Petrović, en la referencia [22], publica el mismo control pero agrega un análisis del cual desprende una similitud entre el ajuste de las ganancias del IDA el ajuste de ganancias de controles industriales, mencionados anteriormente.

En esta tesis se incluye un esquema de control por linealización de retroalimentación de estados, un esquema de control pasivo y un control pasivo por asignación de interconexión de amortiguamiento.

Capítulo 2

Modelo matemático del MIPSE

Las ecuaciones que describen las dinámicas eléctrica y mecánica del motor son primordiales para obtener un modelo de menor orden, el cual tiene un marco referenciado al rotor, el cual se nombra como marco $d - q$. Se inicia el capítulo con la deducción del sistema de ecuaciones eléctricas referenciados al estator y su expresión en el marco $d - q$. En seguida se deduce la expresión matemática de la dinámica mecánica y su equivalente al marco $d - q$. Se cierra el capítulo con algunas observaciones acerca de la notación. El siguiente material se consultó de las referencias [4], [7], [11] y [12].

2.1. Ecuaciones de voltaje

El modelo dinámico ideal del MIPSE se obtiene bajo las siguientes suposiciones:

- No hay pérdidas en el núcleo.
- No hay efectos de saturación, por lo que el flujo de encadenamiento del circuito es una función lineal de las corrientes de fase.
- No hay efectos debidos al ranurado en el rotor.
- El MIPSE tiene reluctancia constante, es decir, tiene un entrehierro uniforme.
- No hay magnetización cruzada o acoplamiento mutuo entre los circuitos $d - q$.

El ángulo del estator (en radianes) se denota como θ_s , el cual está en relacionado con el ángulo mecánico del rotor (θ_r) por la ecuación

$$\theta_s = P\theta_r, \tag{2.1}$$

donde P es el número de pares de polos magnéticos que se ubican de frente al flujo del devanado del rotor. La velocidad del rotor (ω_r) se obtiene derivando la posición

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r. \quad (2.2)$$

Entonces

$$\omega_s := P\omega_r. \quad (2.3)$$

Suponga que un motor de P polos tiene una densidad de vueltas del conductor en la i -ésima bobina del estator (con unidades $[\frac{\text{vuelta}}{\text{rad}}]$), de tipo senusoidal, dada por

$$N_{si} = \frac{N_s}{2} |\sin(P\theta_s)| \quad 0 \leq \theta_s \leq 2\pi, \quad (2.4)$$

donde N_s es el número máximo de vueltas, o la máxima densidad de conductores en cada fase. Integrando (2.4) sobre el intervalo de un polo¹ se obtiene el número total de conductores en el mismo (y es igual a N_{si}/P , es decir, en cada polo hay $2N_s$ conductores). La ventaja de integrar (2.4) para cada bobina del estator (N_{sa} , N_{sb} y N_{sc} en el caso de un motor trifásico) es que proporcionan el valor de la componente fundamental de la distribución real. Por lo anterior las densidades de vuelta en las fases a , b y c son

$$\left. \begin{aligned} N_{sa}(\theta_s) &= \frac{N_s}{2P} |\sin(P\theta_s)| \\ N_{sb}(\theta_s) &= \frac{N_s}{2P} |\sin(P\theta_s - 2\pi/3)| \\ N_{sc}(\theta_s) &= \frac{N_s}{2P} |\sin(P\theta_s - 4\pi/3)|, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

respectivamente.

La fuerza magnetomotriz (mmf)² del entrehierro, o densidad de flujo, tiene una distribución cosenoidal debida a la ley de Faraday. Se deduce que el campo magnético en el entrehierro es

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{sa}(i_{sa}, \theta_s) &= \frac{\mu_0 N_s}{2Pg} i_{sa} \cos(P\theta_s) \\ \mathbf{B}_{sb}(i_{sb}, \theta_s) &= \frac{\mu_0 N_s}{2Pg} i_{sb} \cos\left(P\theta_s - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \mathbf{B}_{sc}(i_{sc}, \theta_s) &= \frac{\mu_0 N_s}{2Pg} i_{sc} \cos\left(P\theta_s - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

¹Pole pitch.

²Del inglés Magneto Motive Force.

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío.

La densidad de flujo magnético total en el estator $\mathbf{B}_s(\cdot)$ producida por las corrientes es la suma de la densidad de flujo en cada fase, entonces usando (2.6) resulta que

$$\mathbf{B}_s(i_{sa}, i_{sb}, i_{sc}, \theta_s) := \frac{\mu_0 N_s}{2Pg} \left\{ i_{sa} \cos(P\theta_s) + i_{sb} \cos\left(P\theta_s - \frac{2\pi}{3}\right) + i_{sc} \cos\left(P\theta_s - \frac{4\pi}{3}\right) \right\}. \quad (2.7)$$

La densidad de flujo del rotor $\mathbf{B}_r(\cdot)$ para un motor con P -pares de polos se describe como

$$\mathbf{B}_r(\theta_r) := \frac{B_m}{P} \cos(P\theta_r), \quad (2.8)$$

donde B_m es una constante³, dada por la longitud del entrehierro, la permeabilidad del vacío, etc. Para determinar cada una de las auto-inductancias L_a , L_b y L_c primero es necesario calcular el flujo de encadenamiento de cada bobina, el cual se genera por la corriente que circula en esa fase. Para determinar las inductancias mutuas L_{ab} , L_{ac} y L_{bc} primero es necesario calcular el flujo de encadenamiento de una bobina inducido por el flujo de corriente que circula en alguna otra fase. En ambos casos el flujo de encadenamiento se obtiene por la siguiente ecuación

$$\lambda_{si}(t) := \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} N_{si}(\theta) \int_{\theta-\pi}^{\theta} \mathbf{B}_s(i_{sa}, i_{sb}, i_{sc}, \theta') d\theta' d\theta, \quad (2.9)$$

donde $i \in \{a, b, c\}$ y $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(0, \pi), (2\pi/3, 2\pi/3 + \pi), (4\pi/3, 4\pi/3 + \pi)\}$. La expresión final para el flujo de encadenamiento del devanado se deduce de (2.9) (utilizando (2.5) y (2.6)), y resulta ser

$$\begin{bmatrix} \lambda_{sa} \\ \lambda_{sb} \\ \lambda_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_b & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

La matriz en (2.10) se le llama matriz de inductancias mutuas, y se denotará como

$$L_s := \begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_b & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_c \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

³Ver referencia [4, Página 418].

Para calcular el flujo de encadenamiento que generan los imanes del rotor y el devanado se utiliza la siguiente fórmula

$$\lambda_{ri}(t) := \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} N_{si}(\theta) \int_{\theta-\pi}^{\theta} \mathbf{B}_r(\theta_s) d\theta' d\theta, \quad (2.12)$$

donde $i \in \{a, b, c\}$ y $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(0, \pi), (2\pi/3, 2\pi/3 + \pi), (4\pi/3, 4\pi/3 + \pi)\}$.

De (2.5), (2.8) y (2.12) se obtiene el flujo de encadenamiento del rotor

$$\mathbf{\Lambda}_m := \begin{bmatrix} \lambda_{ra} \\ \lambda_{rb} \\ \lambda_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_E}{P} \cos(P\theta_s) \\ \frac{k_E}{P} \cos(P\theta_s - 2\pi/3) \\ \frac{k_E}{P} \cos(P\theta_s - 4\pi/3) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde k_E es una constante positiva y representa el coeficiente de la fuerza contraelectromotriz.

Como se supone que el MIPSE es ideal, es decir que no tiene efectos de saturación, entonces es válido sumar los flujos de encadenamiento. Por lo que el flujo de encadenamiento total es

$$\mathbf{\Lambda}_{abc} := \begin{bmatrix} \lambda_{sa} \\ \lambda_{sb} \\ \lambda_{sc} \end{bmatrix} + \mathbf{\Lambda}_m. \quad (2.14)$$

Utilizando (2.11), la ecuación (2.14) se puede reescribir como

$$\mathbf{\Lambda}_{abc} := L_s \mathbf{I}_{abc} + \mathbf{\Lambda}_m \quad (2.15)$$

con $\mathbf{I}_{abc} := [i_{sa}, i_{sb}, i_{sc}]^T$.

La ecuación eléctrica o ecuación de voltaje queda expresada como

$$\mathbf{V}_{abc} = \mathbf{R} \mathbf{I}_{abc} + \frac{d}{dt} \mathbf{\Lambda}_{abc}, \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{V}_{abc} := [v_{sa}, v_{sb}, v_{sc}]^T$ y $\mathbf{R} := \text{diag}[r_a, r_b, r_c]$.

De suponer que el sistema magnético es lineal se tomara a L_s , en (2.11), constante⁴. Desarrollando $d\mathbf{\Lambda}_{abc}/dt$ resulta

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Lambda}_{abc} = \begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_b & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_c \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_E \omega_s \sin(P\theta_s) \\ k_E \omega_s \sin(P\theta_s - 2\pi/3) \\ k_E \omega_s \sin(P\theta_s - 4\pi/3) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

⁴Ver en referencia [11, Capítulo 3].

Si además, por simplicidad, se supone que $L_{ab} = L_{ba} = L_{ac} = L_{ca} = L_{bc} = L_{cb} = M$ y $L_a = L_b = L_c = L$, entonces la ecuación (2.17) se reescribe como

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Lambda}_{abc} = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_E \omega_s \sin(P\theta_s) \\ k_E \omega_s \sin(P\theta_s - 2\pi/3) \\ k_E \omega_s \sin(P\theta_s - 4\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Si las corrientes de cada fase están balanceadas, es decir

$$i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} = 0,$$

entonces se obtiene que

$$\begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L - M & 0 & 0 \\ 0 & L - M & 0 \\ 0 & 0 & L - M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Finalmente se utiliza que $r_a = r_b = r_c = R$, entonces de (2.16), (2.18) y (2.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L-M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R}{L-M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L-M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{k_E}{L-M} \omega_s \sin(P\theta_s) \\ \frac{k_E}{L-M} \omega_s \sin(P\theta_s - 2\pi/3) \\ \frac{k_E}{L-M} \omega_s \sin(P\theta_s - 4\pi/3) \end{bmatrix} + \frac{1}{L-M} \begin{bmatrix} v_{sa}(t) \\ v_{sb}(t) \\ v_{sc}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) es el modelo matemático aproximado de la parte eléctrica del MIPSE con referencia al marco abc , cuando el motor satisface ser un sistema magnético lineal. Sin duda es de mayor interés obtener un sistema de ecuaciones de la parte eléctrica del MIPSE cuando tiene una matriz variante en el tiempo, sin embargo para los objetivos de este trabajo no se implementa la ecuación anterior por lo que resulta innecesario.

2.1.1. Ecuaciones de voltaje en el marco del rotor

Se desarrolla un modelo dinámico de las ecuaciones de voltaje para el MIPSE en un marco referenciado al rotor, es decir, un sistema de ecuaciones equivalente

al de la ecuación (2.20) pero en el marco $d - q$; ya que de esta forma se obtiene independencia de la fuerza contra electromotriz respecto a voltajes y corrientes en el estator. La deducción que se presenta más adelante en esta subsección se reproduce de la referencia [12, Capítulo 9], este método se incluyó porque es intuitivo y más directo. Sin embargo, en el Apéndice (A) se anexa un método alternativo más «explícito» en el desarrollo, pero bastante elaborado en el cual se utiliza la transformada de Park.

Se parte de la idea de imaginar un devanado ficticio asociado al estator, el cual está girando a la misma velocidad que el rotor. Por lo cual se obtiene una velocidad cero entre el devanado ficticio del estator y el campo magnético del rotor, se dice que los circuitos eléctricos tienen un movimiento relativo nulo. Las ecuaciones del flujo de encadenamiento del estator con marco de referencia al rotor son

$$\left. \begin{aligned} u_{ds}^r &= R_s i_{ds}^r + \frac{d\lambda_{ds}^r}{dt} - P\omega_r \lambda_{ds}^r \\ u_{qs}^r &= R_s i_{qs}^r + \frac{d\lambda_{qs}^r}{dt} + P\omega_r \lambda_{qs}^r, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

donde las tripletas v_{ds}^r, i_{ds}^r, R_d y v_{qs}^r, i_{qs}^r, R_q son el voltaje en terminales, la corriente del devanado ficticio y la resistencia en el devanado, de los ejes d y q respectivamente. Observe que la ecuación (2.21) utiliza la velocidad angular del rotor⁵ ω_r . Los flujos de encadenamiento del estator referenciados al rotor se definen como

$$\begin{aligned} \lambda_{ds}^r &:= L_{s1} i_{ds}^r + L_m i_{qr}^r \\ \lambda_{qs}^r &:= L_{s2} i_{qs}^r + L_m i_{dr}^r, \end{aligned}$$

donde L_{s1}, L_{s2} son las auto-inductancias del estator en los ejes $d - q$ y L_m es la inductancia mutua entre el embobinado del estator y los magnetos del rotor.

Un análisis de la posición entre los ejes $d - q$ y el campo magnético del rotor nos lleva a una reducción del último par de ecuaciones. Como el plano $d - q$ está fijo al rotor, suponga que el eje d (el eje del devanado del estator) está alineado con el eje magnético del rotor, entonces se tiene un trayecto con reluctancia máxima y en consecuencia se tiene la mínima inductancia. Esta inductancia se denota como L_d y se le llama inductancia del eje en directa. En esta misma posición el eje q se encuentra entre los polos del rotor, donde la trayectoria del flujo no atraviesa a ningún magneto (tan sólo al entrehierro y parte del rotor) lo que resulta en una reluctancia más baja, y por tanto la inductancia es máxima. A esta inductancia se le llama inductancia del eje q y se le denota como L_q . Claramente para poder calcular

⁵La expresión $\omega_r = \frac{1}{P}\omega_s = \frac{2\pi}{P}f$ relaciona la frecuencia angular de la corriente de armadura con la velocidad en el estator (s) o del rotor (r).

los flujos de encadenamiento $d-q$ basta con conocer las corrientes i_{qs}^r , i_{ds}^r , i_{qr}^r e i_{dr}^r . La excitación de los magnetos permanentes del rotor se pueden modelar con una fuente de corriente⁶ i_m , donde el flujo de los magnetos sólo está en el eje d . De lo anterior $i_{dr}^r = i_m$, $i_{qr}^r = 0$ y el sistema de ecuaciones para los flujos de encadenamiento con las nuevas inductancias se reescribe como

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ds}^r &= L_d i_{ds}^r + L_m i_m \\ \lambda_{qs}^r &= L_q i_{qs}^r \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Después de sustituir (2.22) en (2.21) se obtiene

$$\begin{bmatrix} L_d \frac{di_{ds}^r}{dt} \\ L_d \frac{di_{qs}^r}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_s & -P\omega_r L_q \\ P\omega_r L_d & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds}^r \\ i_{qs}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P\omega_r \lambda_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ds}^r \\ u_{qs}^r \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

donde $\lambda_f := L_m i_m$.

2.2. Ecuación de movimiento

El movimiento del rotor para cualquier motor se describe por la ecuación

$$J\dot{\omega}_r + B\omega_r + T_L = T_e, \quad (2.24)$$

donde

J := momento de inercia del rotor, B := constante de fricción viscosa,

T_L := par de carga aplicado al rotor, T_e := torque electromagnético.

Para calcular el par electromagnético es necesario obtener, primero, la fuerza debida a la densidad de flujo. El diferencial de fuerza que se genera en el estator del motor de flujo axial se muestra en la Figura 2.1. Esta fuerza, se obtiene de la ecuación de Lorentz. En el caso de que una corriente i_{sj} circule por el j -ésimo embobinado el diferencial de fuerza $d\vec{F}_j(\mathbf{r})$ se puede calcular con

$$d\vec{F}_j(\mathbf{r}) = \left(\int_0^{\pi/P} i_{sj} N_{sj}(\theta) l d\theta \times B_r(\theta_s) \right) \mathbf{r} d\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición donde se aplica la fuerza $d\vec{F}_j$ y l es la longitud del conductor. Por otro lado el par electromagnético generado por $\vec{F}$ es

⁶A la corriente $i_f := i_{qr}^r$ se le llama corriente de campo.

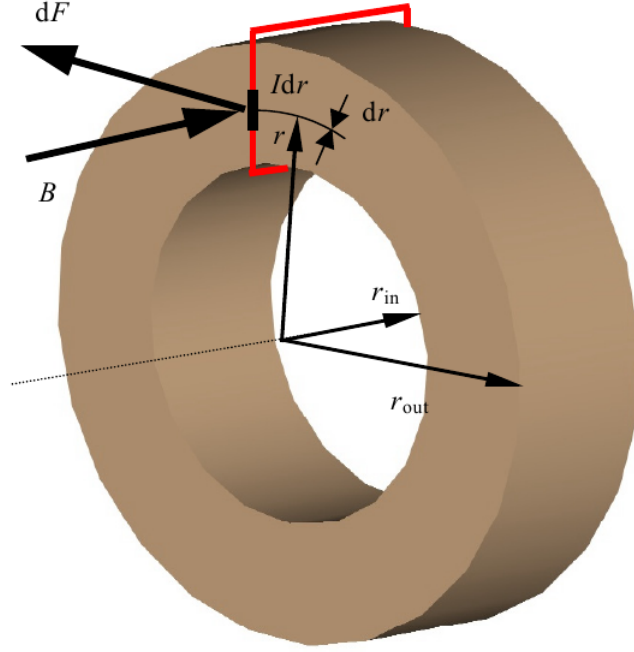


Figura 2.1: Diferencial de fuerza en el MIPSE de flujo axial [20].

$$\vec{T}_j(\mathbf{r}) = \vec{r} \times \vec{F}_j(\mathbf{r}).$$

Por lo anterior el par del MIPSE de flujo axial generado por la fase i en la región $[r_i, r_o]$ es

$$T_j(t) = \int_{r_i}^{r_o} \int_0^{\pi/P} \vec{r} \times (i_{sj} N_{sj}(\theta) l \times B_r(\theta_s)) d\theta dr, \quad (2.25)$$

donde $j \in \{a, b, c\}$, y $\{r_i, r_o\}$ son el radio interior y el exterior de la bobina, respectivamente.

Resolviendo (2.25) para cada corriente se obtiene

$$\left. \begin{aligned} T_a(t) &= k_E i_{sa}(t) \sin(P\theta_s) \\ T_b(t) &= k_E i_{sb}(t) \sin(P\theta_s - 2\pi/3) \\ T_c(t) &= k_E i_{sc}(t) \sin(P\theta_s - 4\pi/3) \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

El par total es

$$T_e := T_a + T_b + T_c.$$

Sustituyendo (2.26) en la igualdad anterior y factorizando queda

$$T_e(t) = k_E \{i_{sa}(t) \sin(P\theta_s) + i_{sb}(t) \sin(P\theta_s - 2\pi/3) + i_{sc}(t) \sin(P\theta_s - 4\pi/3)\}. \quad (2.27)$$

2.2.1. Torque electromagnético en el marco del rotor

En el marco $d - q$ el par electromagnético (2.27) está descrito por la ecuación⁷

$$T_e = \frac{P}{2} \left\{ \frac{1}{2} I_{abcs}^T \frac{\partial L_s}{\partial \theta_r} I_{abcs} - I_{abcs}^T \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta_r} I_{qdr} \right\}. \quad (2.28)$$

La ecuación anterior tiene variables referidas al marco abc del estator y al marco $d - q$ del rotor.

Para expresar a (2.28) en términos de flujos de encadenamiento y corrientes, con variables en el marco $d - q$ del rotor se utiliza la transformación (A.1) del Apéndice A. Se obtiene que

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{P}{2} \left\{ \frac{1}{2} (I_{abcs}^r)^T \frac{\partial L_s}{\partial \theta_r} I_{abcs}^r - (I_{abc}^r)^T \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta_r} I_{qdr} \right\} \\ &= \frac{3P}{2} \left\{ -L_{md} i_{ds}^r i_{qs}^r + L_{mq} i_{qs}^r i_{ds}^r \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Utilizando la ecuación (A.4), del Apéndice A, se tiene que

$$\Lambda_{qd0s}^r = \begin{bmatrix} -L_{ls} i_{qs}^r - L_{mq} i_{qs}^r \\ -L_{ls} i_{ds}^r - L_{md} i_{ds}^r \\ -L_{ls} i_{0s}^r \end{bmatrix}.$$

Para simplificar los cálculos se supone que las inductancias de pérdida satisfacen $L_{ls} = 0$, por lo que usando el vector columna anterior y la ecuación (2.29) se obtiene una expresión equivalente del par electromagnético (2.28) en términos del marco $d - q$ dada por

$$T_e = \frac{3P}{2} \left\{ \lambda_{ds}^r i_{qs}^r - \lambda_{qs}^r i_{ds}^r \right\}. \quad (2.30)$$

Usando (2.24) y (2.30) se obtiene

$$J \frac{d\omega_r}{dt} = -B\omega_r - T_L + \frac{3P}{2} \left\{ \lambda_{ds}^r i_{qs}^r - \lambda_{qs}^r i_{ds}^r \right\}. \quad (2.31)$$

Al sustituir (2.22) en (2.31) queda

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega_r}{dt} &= -B\omega_r - T_L + \frac{3P}{2} \left\{ (L_d i_{ds}^r + L_m i_m) i_{qs}^r - L_q i_{qs}^r i_{ds}^r \right\} \\ &= -B\omega_r - T_L + \frac{3P}{2} \left\{ (L_d - L_q) i_{ds}^r + L_m i_m \right\} i_{qs}^r. \end{aligned} \quad (2.32)$$

⁷La matriz L_{sr} tiene como elementos tanto de las inductancias mutuas entre el rotor y el estator como de las inductancias de amortiguamiento.

2.3. Modelo no lineal en el marco abc

En esta sección se presenta el modelo aproximado final del MIPSE, el cual consta de las ecuaciones eléctricas y de movimiento obtenidas previamente. La dinámica del motor está restringida a las suposiciones que se hicieron al inicio de este capítulo.

De (2.20), (2.24), (2.27) y (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \\ \omega_r \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R}{L-M} & 0 & 0 & \frac{-k_E}{L-M} f_a(\theta_s) \\ 0 & \frac{-R}{L-M} & 0 & \frac{-k_E}{L-M} f_b(\theta_s) \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L-M} & \frac{-k_E}{L-M} f_c(\theta_s) \\ \frac{k_E}{J} f_a(\theta_s) & \frac{k_E}{J} f_b(\theta_s) & \frac{k_E}{J} f_c(\theta_s) & \frac{-B}{J} \end{bmatrix}}_{:=A} \begin{bmatrix} i_{sa}(t) \\ i_{sb}(t) \\ i_{sc}(t) \\ \omega_r \end{bmatrix} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L-M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L-M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L-M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{J} \end{bmatrix}}_{:=B} \begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \\ T_L \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde

$$\begin{aligned} f_a(\theta) &:= \sin(P\theta_s) \\ f_b(\theta) &:= \sin(P\theta_s - 2\pi/3) \\ f_c(\theta) &:= \sin(P\theta_s - 4\pi/3). \end{aligned}$$

La ecuación (2.33) tiene como referencia el marco abc . Las fuerzas magnetomotrices tienen forma sinusoidal por lo que se infiere que el motor es un MIP síncrono. Para modelar y controlar algún MCD de imán permanente se suele utilizar la ecuación (2.33), en su forma «más general» de reluctancia variable, ver referencia [9]. Con la ecuación 2.33 es posible obtener un control mediante la técnica CDT para los MCD de imán permanente, tan sólo es necesario cambiar las funciones $f_i(\theta)$ sinusoidales por funciones trapezoidales⁸.

2.3.1. Modelo no lineal en el marco $d - q$

En esta subsección se anexa el modelo matemático final del MIPSE en términos de las variables $d - q$. Esta ecuación diferencial será la que se utilice a lo largo del siguiente capítulo.

⁸Ver en la referencia [12, Capítulo 9].

Utilizando (2.3), (2.23) y (2.32) el modelo no lineal del MIPSE queda expresado completamente como

$$\left. \begin{aligned} L_d \frac{di_{ds}^r}{dt} &= -R_s i_{ds}^r + P\omega_r L_q i_{qs}^r + u_{ds}^r \\ L_q \frac{di_{qs}^r}{dt} &= -R_s i_{qs}^r - P\omega_r L_d i_{ds}^r - P\omega_r \lambda_f + u_{qs}^r \\ J \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{3P}{2} \{(L_d - L_q) i_{ds}^r + L_m i_m\} i_{qs}^r - B\omega_r - T_L. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Si se toma $L_d = L_q$, entonces la ecuación (2.34) en términos del rotor se reduce a

$$\left. \begin{aligned} L_d \frac{di_{ds}^r}{dt} &= -R_s i_{ds}^r + P\omega_r L_q i_{qs}^r + u_{ds}^r \\ L_q \frac{di_{qs}^r}{dt} &= -R_s i_{qs}^r - P\omega_r L_d i_{ds}^r - P\omega_r \lambda_f + u_{qs}^r \\ \frac{2J}{3P} \frac{d\omega_r}{dt} &= \lambda_f i_{qs}^r - \frac{2B}{3P} \omega_r - \frac{2T_L}{3P}. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

donde $\lambda_f = L_m i_m$.

La ecuación (2.35) sirve como modelo dinámico del MIPSE de flujo axial en el marco $d-q$, ver referencia [5, Capítulo 7]. Se concluye este capítulo con las siguientes observaciones sobre la notación.

Observación 2.3.1. *La ecuación (2.34) tiene algunos superíndices y subíndices que en la literatura actual no se usan, ya que sólo «cargan la notación». Por lo que dicha expresión se reescribe como*

$$\left. \begin{aligned} L_d \frac{di_d}{dt} &= -R i_d + P\omega L_q i_q + u_d \\ L_q \frac{di_q}{dt} &= -R i_q - P\omega L_d i_d - P\omega \lambda_f + u_q \\ J \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3P}{2} \{(L_d - L_q) i_d + \lambda_f\} i_q - B\omega - T_L. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

donde $\lambda_f = L_{ad} i_m$ y ω la velocidad angular del rotor.

Observación 2.3.2. *La ecuación (2.35) en su forma matricial se reduce a*

$$M\dot{x} + Cx + Nx = u + \gamma \quad (2.37)$$

donde

$$M := \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2J}{3} \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 0 & -PL_q\omega & 0 \\ PL_d\omega & 0 & P\lambda_f \\ 0 & -P\lambda_f & 0 \end{bmatrix}, \quad N := \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2B}{3} \end{bmatrix},$$

$$u := \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \omega \end{bmatrix} \quad y \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-2T_L}{3} \end{bmatrix}$$

con $\lambda_f = L_{ad}i_m$, ω la velocidad del rotor y γ una perturbación.

Capítulo 3

Esquemas de control

En esta parte de la tesis se presenta el desarrollo de los esquemas de control que se utilizan en las simulaciones del siguiente capítulo. La primera sección contiene el control por linealización de retroalimentación de estado no lineal con acción integral. Este esquema de control se introduce en la referencia [6] y aquí se obtiene un esquema análogo para regulación de velocidad. En la segunda sección se anexa el control basado en pasividad, que se tomó de la referencia [25]. Finalmente, en la tercera sección se anexa un control basado en la metodología IDA, el cual se publicó originalmente en la referencia [22], pero el control que se presenta aquí se reproduce de la referencia [8].

3.1. Linealización por retroalimentación de estados

Sea $x \in D$ con $D \subset \mathbb{R}^n$ y las funciones $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, suficientemente suaves y continuas tales que $f(0) = 0$. Tome un sistema variante en el tiempo como

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.1)$$

donde la variable x representa a los estados del sistema, f es la dinámica del sistema no forzado, g es la función de la entrada de control y u es la entrada de control.

Se define al conjunto de corchetes de Lie¹ asociado a (3.1), que genera a $\mathcal{G}_l$, como

$$\mathcal{G}_l = \text{span}\{ad_f^j g_i \mid 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq l\}, \quad (3.2)$$

con $0 \leq l \leq n - 2$.

Para obtener un control integral por linealización para (3.1) se utiliza el siguiente teorema; el cual se anexa sin demostración de la referencia [15, Cap. 2].

¹Ver definición de derivadas de Lie en el Apéndice B.

Teorema 3.1.1. *El sistema no lineal (3.1) es localmente transformable en una vecindad del origen U_0 , con una transformación de retroalimentación de estados no singular (la cual consiste de un difeomorfismo $Z(x)$ y de una retroalimentación de estados u no singular), en un sistema lineal controlable en la forma del controlador de Brunovsky con índices de controlabilidad² $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_m$ i.e. existen m funciones suaves $\phi_1(x), \dots, \phi_m(x)$ tales que*

$$\langle d\phi_i, \mathcal{G}_{\kappa_j-2} \rangle = 0, \quad j \geq i \quad (3.3)$$

y la matriz

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \langle d\phi_m, ad_f^{\kappa_m-1} g_1 \rangle & \dots & \langle d\phi_m, ad_f^{\kappa_m-1} g_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle d\phi_1, ad_f^{\kappa_1-1} g_1 \rangle & \dots & \langle d\phi_1, ad_f^{\kappa_1-1} g_m \rangle \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

es invertible en U_0 . Donde

$$u = -\mathbb{B} \begin{bmatrix} L_f^{\kappa_m} \phi_m \\ \vdots \\ L_f^{\kappa_1} \phi_1 \end{bmatrix} + \mathbb{B}^{-1} v \quad (3.5)$$

con

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\kappa_m-1} \phi_m & \dots & L_{g_m} L_f^{\kappa_m-1} \phi_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\kappa_1-1} \phi_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{\kappa_1-1} \phi_1 \end{bmatrix}$$

y

$$Z = [z_1, \dots, z_n]^T = [\phi_m \dots L_f^{\kappa_m-1} \phi_m \dots \phi_1 \dots L_f^{\kappa_1-1} \phi_1]^T. \quad (3.6)$$

si y sólo si en la vecindad del origen se satisface que

- $\mathcal{G}_{\kappa_i-2}$, $1 \leq i \leq m$ es involutivo y de rango constante.
- $\text{rank } \mathcal{G}_{\kappa_1-1} = n$.

El modelo del MIPSE, de la observación 2.3.1, escrito como en (3.1) tendría a

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_d} i_d + P\omega \frac{L_q}{L_d} i_q \\ -\frac{R}{L_q} i_q - P\omega \frac{L_d}{L_q} i_d - \frac{1}{L_d} \lambda_f \\ \frac{3P}{2J} \{ (L_d - L_q) i_d + \lambda_f \} i_q - \frac{\dot{B}}{J} \omega - \frac{1}{J} T_L \end{bmatrix}, \\ g &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = [i_d, i_q, \omega]. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

²Ver definición de índices de controlabilidad en Apéndice B.

La dimensión del dominio es $n = 3$, por lo que utilizando (3.2) se puede calcular $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$. Estos quedan dados por

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathcal{G}_1 &= \text{span} \{ \mathcal{G}_0, \xi_1, \xi_2 \}, \\ \mathcal{G}_2 &= \text{span} \{ \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \text{ad}_f^2 g_1, \text{ad}_f^2 g_2 \}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

donde

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \frac{R}{L_d} \\ P\omega \frac{L_d}{L_q} \\ \frac{3P}{2J}(L_d - L_q)i_q \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -P\omega \frac{L_q}{L_d} \\ \frac{R}{L_q} \\ \frac{3P}{2J}\{(L_d - L_q)i_d + \lambda_f\} \end{bmatrix}$$

Es claro que en $\mathcal{G}_0 = \mathbb{R}^2$. De $\mathcal{G}_0$ y de ξ_2 resulta que $\mathcal{G}_1 = \mathbb{R}^3$. Por lo anterior se deduce que $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathcal{G}_3$. De lo anterior es posible calcular los índices de controlabilidad, utilizando la ecuación (B.4) del apéndice B, los cuales resultan $\kappa_1 = 2$ y $\kappa_2 = 1$. Utilizando estos índices se obtiene que $\text{rank } \mathcal{G}_{\kappa_1-1} = \text{rank } \mathcal{G}_1 = 3$. Por otro lado, como $\mathcal{G}_{\kappa_1-2} = \mathcal{G}_0$ y $\mathcal{G}_{\kappa_2-2} = \{\emptyset\}$, son involutivos³ y de rango constante, entonces del Teorema 3.1.1 existe una linealización por retroalimentación de estados u y un difeomorfismo Z , que se obtienen de las ecuaciones (3.3)-(3.6).

Ahora se calculará ϕ_1 y ϕ_2 , las funciones que corresponden a los índices de controlabilidad κ_1 y κ_2 , respectivamente. Por lo obtenido en el párrafo anterior la ecuación (3.3) es válida sólo para κ_1 , por lo que esta resulta ser

$$0 = \langle d\phi_1, \mathcal{G}_{\kappa_1-2} \rangle = \langle d\phi_1, \mathcal{G}_0 \rangle.$$

Es decir, se satisface que

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial i_d} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial i_q} = 0.$$

En el caso de la matriz (3.4) se llega a que

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} \langle d\phi_2, \text{ad}_f^0 g_1 \rangle & \langle d\phi_2, \text{ad}_f^0 g_2 \rangle \\ \langle d\phi_1, \text{ad}_f^1 g_1 \rangle & \langle d\phi_1, \text{ad}_f^1 g_2 \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_2}{\partial i_d} & \frac{\partial \phi_2}{\partial i_q} \\ \langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \xi_1^T \rangle & \langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \xi_2^T \rangle \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

³Ver apéndice B, definición B.0.5.

donde ξ_1 y ξ_2 están definidos en (3.8). Por lo anterior se llega a que

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_2}{\partial i_d} & \frac{\partial \phi_2}{\partial i_q} \\ \left\langle \left(0, 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial \omega}\right), \xi_1^T \right\rangle & \left\langle \left(0, 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial \omega}\right), \xi_2^T \right\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_2}{\partial i_d} & \frac{\partial \phi_2}{\partial i_q} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \omega} \frac{3P}{2J} i_q (L_d - L_q) & \frac{\partial \phi_1}{\partial \omega} \frac{3P}{2J} \{(L_d - L_q)i_d + \lambda_f\} i_q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\phi_1 = \phi_1(\omega)$, y si $\frac{\partial \phi_1}{\partial \omega} = 1$, entonces

$$\phi_1 = \omega. \quad (3.9)$$

El determinante de la matriz $\mathbb{A}$ resulta

$$\det(\mathbb{A}) = \frac{\partial \phi_2}{\partial i_d} \frac{3P}{2J} \{(L_d - L_q)i_d + \lambda_f\} - \frac{\partial \phi_2}{\partial i_q} \frac{3P}{2J} i_q (L_d - L_q).$$

Claramente el primer término del $\det(\mathbb{A})$ puede ser distinto de cero para todo $x \in U_0$. Por lo que una solución pertinente es

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial i_d} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial i_q} = 0.$$

Del par de igualdades anteriores se observa que $\phi_2 = \phi_2(i_d)$ satisface ambas ecuaciones, por lo que

$$\phi_2 = i_d \quad (3.10)$$

es una posible solución.

Para simplificar los siguientes cálculos, y además, para lograr obtener un sistema con entradas de control desacoplado se supone que $L = L_d = L_q$ y $B = 0$. Con ayuda de (3.9) y (3.10) es posible calcular explícitamente la retro de estados u , ecuación (3.5), dada por

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \frac{2JL}{3P\lambda_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R}{L} i_d - P\omega i_q \\ \frac{R}{L} i_q + P\omega i_d + \frac{P\lambda_f}{L} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \frac{2JL}{3P\lambda_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Por último se calcula el mapeo, de cambio de variable, $Z(x)$. Utilizando (3.9) y (3.10) en la ecuación (3.6) se obtiene

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \\ L_f^1 \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_d \\ \omega \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_d \\ \omega \\ \frac{3P}{2J} \lambda_f i_q - \frac{1}{J} T_L \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Con la retroalimentación de estados y la transformación, halladas en (3.11) y (3.12) respectivamente, es posible obtener la forma de controlador de Brunovsky para (3.7). Para esto, primero se deriva (3.12), lo que resulta en

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{\omega} \\ \frac{3P}{2J}\lambda_f \dot{i}_q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}i_d + P\omega i_q + \frac{1}{L}u_d \\ \frac{3P}{2J}\lambda_f i_q - \frac{1}{J}T_L \\ \frac{3P}{2J}\lambda_f \left(-\frac{R}{L}i_q - P\omega i_d - \frac{P\lambda_f}{L}\omega + \frac{1}{L}u_q \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.11) en la igualdad anterior se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_d \\ 0 \\ v_q \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Se desea que el control v , de (3.13), pueda regular la velocidad. Para ello es necesario obtener el control que lleve al error e a cero. El error se define como

$$e = [e_{id}, e_{\omega}, e_{\dot{\omega}}]^T = [i_d^* - z_1, \omega^* - z_2, \dot{\omega}^* - z_3]^T$$

donde $[i_d^*, \omega^*, \dot{\omega}^*]$ son los valores deseados de i_d , ω y $\dot{\omega}$. Por lo anterior el sistema extendido del error con integral del error respecto a ω ($\dot{\sigma}_{\omega} = e_{\omega}$) es

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{id} \\ \dot{e}_{\omega} \\ \dot{e}_{\dot{\omega}} \\ \dot{\sigma}_{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{id} \\ e_{\omega} \\ e_{\dot{\omega}} \\ \sigma_{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_d \\ 0 \\ v_q \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

El control final $v = [v_d, v_q]^T$ para (3.14) resulta

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_d e_{id} \\ k_{I\omega} \int_0^t e_{\omega} dt + k_1 e_{\omega} + k_2 e_{\dot{\omega}} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde k_d , $k_{I\omega}$, k_1 y k_2 son constantes positivas.

El control final por linealización por retroalimentación no lineal de estados para el MIPSE, ecuación (2.36), con $L = L_d = L_q$ y $B = 0$ se obtiene de (3.11) y (3.15). Es decir

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \left(\frac{R}{L} i_d - P \omega i_q \right) \\ \frac{2JL}{3P\lambda_f} \left(\frac{R}{L} i_q + P \omega i_d + \frac{P\lambda_f}{L} \omega \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \frac{2JL}{3P\lambda_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_d e_{id} \\ k_{I\omega} \int_0^t e_\omega dt + k_1 e_\omega + k_2 e_{\dot{\omega}} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.2. Control basado en pasividad

Antes de presentar el control basado en pasividad para el modelo dinámico (3.1) se introducen algunos conceptos básicos.

Definición 3.2.1. Se dice que el sistema (3.1) es pasivo, si existe una función $V(x)$ continua diferenciable (llamada función de almacenamiento o función de energía) semidefinida positiva, tal que,

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p.$$

Si además existe $\rho(\cdot)$ tal que

$$y^T \rho(y) > 0 \quad y \quad u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \quad (3.17)$$

para todo $y \neq 0$, entonces se dice que (3.1) es estrictamente pasivo a la salida.

Definición 3.2.2. Se dice que el sistema (3.1) es de estado-cero observable si no hay solución de $\dot{x} = f(x, 0)$ que este en $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$ distinta a la trivial, i.e. $x(t) \equiv 0$.

Teorema 3.2.1. El origen del sistema (3.1), en su forma $\dot{x} = f(x, 0)$, es asintóticamente estable si el sistema es estrictamente pasivo a la salida y de estado-cero observable.

En la siguiente demostración, para probar que el sistema es asintóticamente estable, se utiliza el Teorema de estabilidad de Lyapunov.⁴

Demostración. Por hipótesis (3.1) es estrictamente pasivo a la salida por lo que existen $\rho(y)$ y $V(x)$ (positiva semidefinida) tal que

$$y^T \rho(y) > 0 \quad y \quad u^T y \geq \dot{V} + y^T \rho(y) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \quad \forall y \neq 0.$$

⁴Ver referencia [10, Cap. 4].

De las desigualdades anteriores, haciendo $u = 0$ y tomando $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, resulta que

$$0 > -y^T \rho(y) \geq \dot{V} \quad \forall y \neq 0.$$

Integrando de ambos lados, con $\delta > 0$ y $\tau \in [0, \delta]$, resulta

$$0 < \int_0^\tau y^T \rho(y) dt \leq V(x(0)) - V(x(\tau)) \quad \forall y \neq 0. \quad (3.18)$$

De la desigualdad anterior se obtiene que $V(x(\tau)) < V(x(0))$ para $x \neq 0$. Usando esta desigualdad en (3.18) se obtiene que

$$\int_0^\tau y^T \rho(y) dt \leq V(x(0)). \quad (3.19)$$

Sea S como en (3.2.2). Suponga que existe $\hat{x}(0) \neq 0$ tal que $V(\hat{x}(0)) = 0$. De (3.19) se tiene que

$$\int_0^\tau y^T \rho(y) dt = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \hat{x} \in S.$$

Como el sistema (3.1) es de estado-cero observable, entonces $\hat{x} \equiv 0 \Rightarrow \Leftarrow$.

De lo anterior se tiene que $V(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $V(0) = 0$. Por el teorema de estabilidad de Lyapunov resulta que el sistema (3.1) es asintóticamente estable. $\square$

3.2.1. Control pasivo para el MIPSE

En esta subsección se anexa el control pasivo. Primero se utilizará el Teorema 3.2.1 para mostrar que el sistema asociado a la ecuación (2.37) es estable. Para esto se propone a

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T M x \quad (3.20)$$

como función de Lyapunov, donde M está definida en la ecuación (2.37).

De (2.37) se tiene que

$$\dot{x} = -M^{-1}Cx - M^{-1}Nx + M^{-1}u,$$

por ser M invertible. Derivando (3.20) con respecto al tiempo y usando la igualdad anterior resulta que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T M \dot{x} \\ &= -\underbrace{x^T C x}_{=0} - x^T N x + x^T u \\ &\leq x^T u - x^T N x. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Suponga que a la salida del sistema si miden todos los estados, i.e. $y = x$. Se define

$$\rho(y) = \rho(x) := Nx.$$

Como y y u son vectores se cumple que $y^T u = u^T y$. De lo anterior la desigualdad (3.21) se reescribe como

$$\dot{V}(x) \leq u^T y - y^T \rho(y). \quad (3.22)$$

Por un lado, N es positiva definida por lo que se cumple que $y^T \rho(y) > 0$ para toda $y \neq 0$. Por otro lado, de la desigualdad (3.22) se obtiene que el sistema asociado a la ecuación (2.37) es estrictamente pasiva a la salida y de estado-cero observable. Por lo anterior y por el Teorema 3.2.1 el sistema (2.37) resulta ser asintóticamente estable para $u = 0$.

Se desea obtener un control pasivo tal que lleve a la dinámica del sistema hacia un punto de operación deseado. Tal punto de equilibrio se le denotará como

$$x^* := [i_d^* \quad i_q^* \quad \omega^*]^T.$$

Se define el error de estado como

$$x_e = x - x^*.$$

Para obtener la forma explícita del control pasivo del sistema asociado a la ecuación (2.37), tal que $x_e \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$, primero es necesario expresar el modelo del motor del marco $d - q$ en términos del error. Por un lado, se observa que para obtener dicha igualdad no basta con sustituir el estado del error en el marco $d - q$, ya que la matriz C de (2.37) está en función del estado. Por otro lado, la matriz C se puede ver como función de la entrada de control, con la cual se puede construir una aproximación lineal en forma de la serie de Taylor. Es decir, dado un control u para el sistema (2.37) se tiene que

$$C(u) := C(u^*) + \left. \frac{\partial C(u)}{\partial u} \right|_{u^*} u_e, \quad (3.23)$$

donde u^* es el control que se debe inyectar al sistema para que $\dot{x}$ permanezca en el equilibrio x^* (i.e. $\dot{x} = 0$),

$$u_e = u - u^* \quad (3.24)$$

y $C(u) = C(x, u)$.

La ecuación (2.37), en términos del equilibrio x^* y del control u^* , resulta

$$M\dot{x}^* = -C(u^*)x^* - Nx^* + u^* + \gamma, \quad (3.25)$$

donde $C(u^*) = C(x^*, u^*)$.

Restando (3.25) a (2.37) y desarrollando se llega a que

$$M\dot{x}_e = [C(u) - C(u^*)]x - Nx_e + e_u - C(u^*)x_e. \quad (3.26)$$

De (3.23) se tiene que $C(u) - C(u^*) = 0$, por lo que la igualdad (3.26) queda como

$$M\dot{x}_e = -Nx_e + e_u - C(u^*)x_e. \quad (3.27)$$

Se define a la función de Lyapunov para (3.27) como

$$V_e = \frac{1}{2}x_e^T Mx_e.$$

Derivando la igualdad anterior, y utilizando $\dot{x}_e$ de (3.27), se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= x_e^T M\dot{x}_e \\ &= x_e^T (-Nx_e + e_u - C(u^*)x_e) \\ &= \underbrace{-x_e^T C(u^*)x_e}_{=0} - \underbrace{x_e^T Nx_e}_{>0} + x_e^T e_u. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si se toma a e_u en (3.28) como

$$e_u := -K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e \quad (3.29)$$

con $K \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3 \times 3}$ diagonal y positiva definida, entonces $\dot{V}_e < 0$.

Por lo anterior basta con encontrar u^* para obtener la forma del control pasivo de (2.37). Como el control deseado u^* satisface que $\dot{x} = 0$ cuando $x = x^*$, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d^* + P\omega^* L_q i_q^* \\ v_q^* + P\omega^* \lambda_f - R i_q^* \\ \lambda_f i_q^* - \frac{2}{3p}(T_L + B\omega^*) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Finalmente el control u se obtiene de (3.24), (3.29) y (3.30), dado por

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P\omega^* L_q i_q^* \\ -P\omega^* \lambda_f - R i_q^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d - i_d^* \\ i_q - i_q^* \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

3.3. Control pasivo IDA

El control pasivo por asignación de interconexión y amortiguamiento (IDA⁵) es una segunda clase de controles pasivos⁶, en el cual no se fija la función de almacenamiento sino se «moldea la estructura» en lazo cerrado para que algún punto de operación pueda ser punto de equilibrio.

Definición 3.3.1. *Se dice que un sistema tiene la forma de Hamilton de puerto controlado (HPC) si la ecuación diferencial del sistema se puede escribir como*

$$\dot{x} = [J(x) - N(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \underbrace{g(x)u + \gamma}_{\star} \quad (3.32)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $J(x), R(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tales que

$$J(x) = -J^T(x) \quad N(x) = N^T(x) \geq 0 \text{ para toda } x \in \mathbb{R}^n,$$

$H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ suave, $g(x) \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $u \in \mathbb{R}^m$ y γ una perturbación externa.

Si en (3.32) no se tiene el término $\star$, entonces se dice que el sistema tiene la forma HPC con disipación.

A las matrices $J(x)$ y $N(x)$ en (3.32) se les conoce como matriz de interconexión y matriz de amortiguamiento, respectivamente. El resultado siguiente se publicó en la referencia [18], y se anexa sin demostración.

Proposición 3.3.1. *Sean las matrices $H(x), J(x), N(x), g$ como en (3.32) y $x^* \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio deseado. Suponga que se puede encontrar $\beta(x), J_a(x), N_a(x)$ y $K(x)$ tales que satisfacen*

$$[J_d(x) - N_d(x)]K(x) = -[J_a(x) - N_a(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)\beta(x), \quad (3.33)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} J_d(x) &:= J(x) + J_a(x) = -J_d^T(x) \\ N_d(x) &:= N(x) + N_a(x) = N_d^T(x) \geq 0 \\ K(x) &\text{ satisface } \frac{\partial K(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial K(x)}{\partial x} \right]^T \\ K(x^*) &= -\frac{\partial H(x^*)}{\partial x} \\ \frac{\partial K(x^*)}{\partial x} &> -\frac{\partial^2 H(x^*)}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

⁵Por las siglas en ingles Interconeccting Damping Assigment.

⁶Ver referencia [17].

Entonces el sistema en lazo cerrado $u = \beta(x)$ tendrá una forma HPC con disipación, donde

$$H_d(x) := H(x) + H_a(x) \quad (3.35)$$

y

$$\frac{\partial H_a(x)}{\partial x} = K(x). \quad (3.36)$$

La ecuación del MIPSE tiene la forma HPC. Para esto note que si se redefine el vector de estados x como

$$x := (L_d i_d, L_q i_q, (J_0/P)\omega) \quad (3.37)$$

con $J_0 := 2J/3$ y

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L_d} x_1^2 + \frac{1}{L_q} x_2^2 + \frac{1}{J_0} x_3^2 \right] & u &= \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} \\ J(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -P(x_1 + \lambda_f) \\ -x_2 & P(x_1 + \lambda_f) & 0 \end{bmatrix} & g(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ N(x) &= \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \gamma &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{T_L}{P} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

entonces (2.36) se puede reescribir como (3.32).

En lo subsecuente se utilizará la notación dada en (3.38) para hallar un control pasivo mediante la metodología IDA. En la referencia [22] se encuentra el control tipo IDA mediante la solución de una ecuación diferencial parcial (EDP). Sin embargo, se anexará el control IDA que se obtiene de resolver una ecuación algebraica, publicado en la referencia [8]. Es decir, dada la ecuación (3.33) basta con proponer $K(x)$ para luego poder encontrar J_a y N_a .

Sea el punto de equilibrio x^* definido como

$$x^* = \left(0, \frac{L_q T_L}{P L_f}, \frac{J_0}{P} \omega^* \right). \quad (3.39)$$

Se desea que el sistema tenga una función hamiltoniana-deseada $H_d(x)$ como

$$H_d(x) = H(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T M^{-1}(x - x^*). \quad (3.40)$$

De (3.35), (3.36) y (3.40) se tiene que

$$K(x) = \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} - \frac{\partial H(x)}{\partial x} = -M^{-1}x^*. \quad (3.41)$$

Por un lado, las incógnitas $J_a(x)$ y $N_a(x)$ se definen como

$$J_a(x) = \begin{bmatrix} 0 & -J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & 0 & -J_{23} \\ -J_{13} & J_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N_a = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Por otro lado, las matrices $J_d(x)$ y $N_d(x)$ se obtienen de (3.34), (3.38) y (3.42), las cuales resultan en

$$J_d(x) = \begin{bmatrix} 0 & -J_{12} & Px_2J_{13} \\ J_{12} & 0 & -P(x_1 + \lambda_f) - J_{23} \\ -Px_2 - J_{13} & P(x_1 + \lambda_f) + J_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

y

$$N_d(x) = \begin{bmatrix} R + r_1 & 0 & 0 \\ 0 & R + r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

respectivamente.

Sustituyendo (3.41), (3.42), (3.43), y (3.44) en (3.33) y junto con (3.38) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} R + r_1 & -J_{12} & Px_2J_{13} \\ J_{12} & R + r_2 & -P(x_1 + \lambda_f) - J_{23} \\ -Px_2 - J_{13} & P(x_1 + \lambda_f) + J_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1^*/L_d \\ -x_2^*/L_q \\ -x_3^*/J \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -r_1 & -J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & -r_2 & -J_{23} \\ -J_{13} & J_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1/L_d \\ -x_2/L_q \\ -x_3/J \end{bmatrix} + g(x)u + \gamma. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Claramente las incógnitas en (3.45) son J_{12} , J_{13} , J_{23} , r_1 y r_2 , para encontrar estos términos es necesario resolver una ecuación algebraica. Por lo que desarrollando el último renglón se obtiene que

$$\begin{aligned} J_{23}(x_2 - x_2^*) &= L_q \left\{ x_1 \left(\frac{J_{13}}{L_d} + \frac{Px_2^*}{L_q} \right) \right\} + \frac{L_q P \lambda_f x_2^*}{L_q} - L_q T_L \\ &= L_q \left\{ x_1 \left(\frac{J_{13}}{L_d} + \frac{Px_2^*}{L_q} \right) \right\} + \underbrace{P \lambda_f x_2^*}_{=L_q T_L} - L_q T_L \\ &= -Px_1 \left(\frac{-J_{13}L_q}{PL_d} - x_2^* \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Los términos

$$J_{13} = \frac{-L_d P x_2}{L_q} \quad \text{y} \quad J_{23} = -P x_1 \quad (3.47)$$

son las constantes que hacen compatible la igualdad (3.46)

De los primeros dos renglones de (3.45) se obtiene

$$u_d = -\frac{r_1 x_1}{L_d} - \frac{J_{12}}{L_q} (x_2 - x_2^*) + \frac{J_{13}}{J} (x_3 - x_3^*) - \frac{P x_2 x_3^*}{J} \quad (3.48)$$

y

$$u_q = \frac{J_{12} x_1}{L_d} - \frac{r_2}{L_q} (x_2 - x_2^*) - \frac{J_{23}}{J} (x_3 - x_3^*) + \frac{R x_2^*}{L_q} + \frac{P x_3^*}{J} (x_1 + \lambda_f). \quad (3.49)$$

Sustituyendo (3.37), (3.39), (3.47) y $J_{12} = -k x_3$ en (3.48) y (3.49) resulta

$$\begin{aligned} u_d &= -r_1 i_d + k J \omega i_q - \frac{k J \omega T_L}{P \lambda_f} - L_d P i_q \omega + L_d P i_q \omega^* - P L_q i_q \omega^* \\ &= -r_1 i_d + (k J - L_d P) i_q \omega - \frac{k J \omega T_L}{P \lambda_f} + (L_d - L_q) P i_q \omega^* \end{aligned} \quad (3.50)$$

y

$$\begin{aligned} u_q &= -k i_d J \omega - r_2 i_q + \frac{r_2 T_L}{P \lambda_f} + P L_d i_d \omega - P L_d i_d \omega^* + \frac{R T_L}{P \lambda_f} + P \omega^* L_d i_d + P \lambda_m \omega^* \\ &= -r_2 i_q + (P L_d - k J) i_d \omega + P \lambda_f \omega^* + (R + r_2) \frac{T_L}{P \lambda_f}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde k es una constante arbitraria y r_1, r_2 son variables tales que satisfacen que la matriz R es negativa semidefinida.

Capítulo 4

Resultados de simulación

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos de la simulación numérica para cada uno de los controles obtenidos en el capítulo anterior. Se obtienen resultados como la respuesta de seguimiento y magnitud en el error. Se comparan resultados debido a variaciones de ganancias, incertidumbre paramétrica y variación de parámetros.

4.1. Parámetros del MIPSE

En esta sección se añaden los parámetros del MIPSE de flujo axial que se encuentra en la hoja de datos¹, con los cuales se obtiene los resultados numéricos en las siguientes secciones.

- $P = 4$ pares de polo.
- $R = 0.013 \text{ } [\Omega]$ resistencia de fase a fase en el devanado.
- $L = 0.0001 \text{ } [H]$ inductancia de fase a fase en el devanado.
- $J = 0.0045 \text{ } [Kg \cdot m^2]$ inercia del rotor.
- $\lambda_f = 0.15 \text{ } [N \cdot m]$ constante del par.
- Torque de quiebre $90 \text{ } [N \cdot m]$.
- Velocidad máxima es de $5000 \text{ } [rpm]$.

¹Ver datos del motor en la página web: <http://www.motenergy.com/me1115motor.html>. (23/Enero/2014).

4.2. Variación de ganancias

En esta sección se anexan los resultados que se obtuvieron al variar las ganancias de cada esquema de control. En cada esquema de control se muestra que las ganancias propuestas mejoran la respuesta de control.

El primer control que se muestra es el esquema de linealización exacta, en el cual se necesitó de la ecuación de Lyapunov para obtener las ganancias cuyos polos están dados a priori. Las ganancias k_d , k_1 , k_2 y k_I corresponden a los errores de la ecuación (3.16). Los polos que se utilizan, así como la respuesta de velocidad, se muestran en la Figura 4.1. Como se puede notar, cuando los polos están más alejados del origen, el sistema responde mejor. La respuesta del error, para el control de linealización

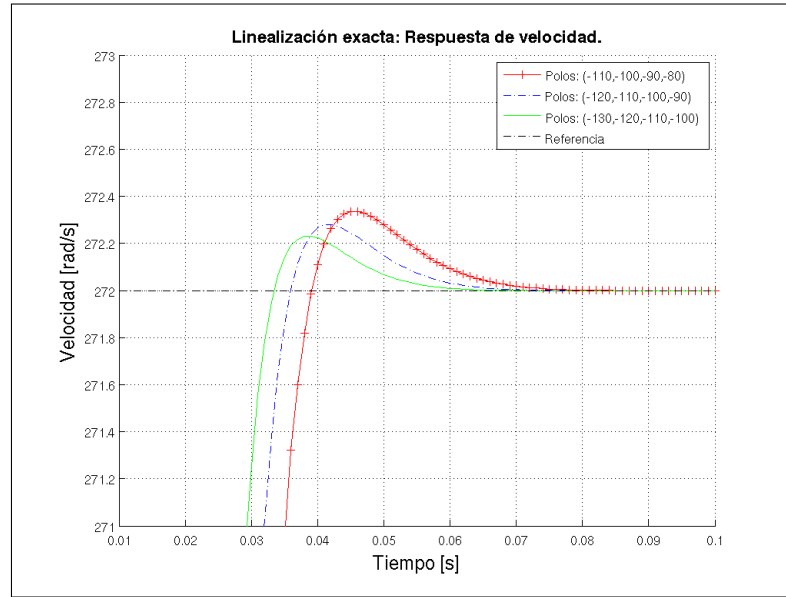


Figura 4.1: Variación de ganancias; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad.

exacta, también mejora; la Figura 4.2 confirma lo anterior.

Para el caso de control pasivo la respuesta de velocidad se observa en la Figura 4.3. En este caso, por simplicidad, únicamente una de las dos ganancias de (3.31) se varía. La primera ganancia k_1 es 190, y la segunda, k_2 varía sólo en las décimas. El valor óptimo corresponde al par $(k_1, k_2) = (190, 0.589)$. La respuesta del error que corresponde al análisis anterior le corresponde a la Figura 4.4.

El esquema de control pasivo basado en la metodología IDA tiene como parámetros a r_1 , r_2 y k , ver las ecuaciones (3.50) y (3.51). En este esquema se ajusta el

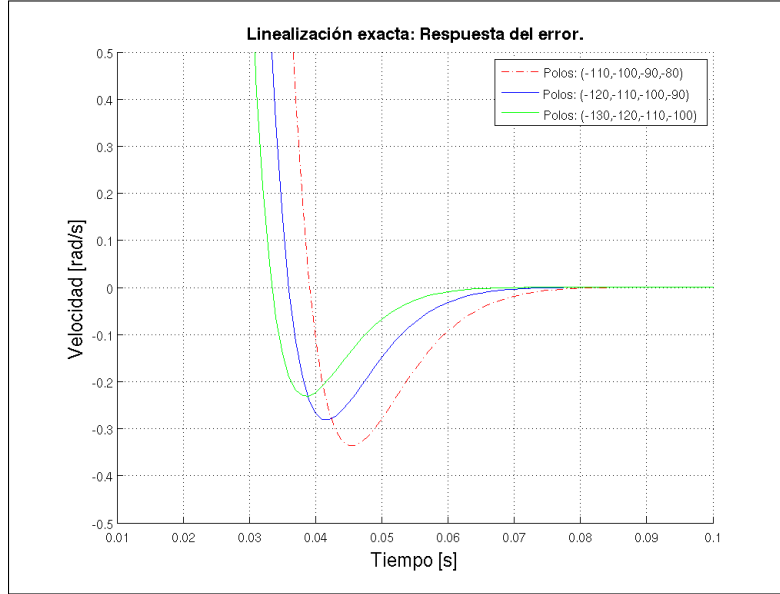


Figura 4.2: Variación de ganancias; control por linealización exacta. Respuesta del error.

parámetro r_2 . La Figura (4.5) muestra que la mejor combinación de ganancias es la tripleta $(r_1, r_2, k) = (0.3, 6.5, 1.773)$ ya que se acerca lo más posible a la referencia. La Figura 4.6 muestra que la magnitud del error es menor a 0.5, lo que significa que tiene un porcentaje alrededor del 0.18 % respecto a la consigna de velocidad.

4.3. Respuesta de seguimiento y magnitud del error

Los resultados numéricos siguientes se obtuvieron con un par de carga de $T_L = 5 [N \cdot m]$, que equivale al 5.5 % del par de quiebre.

Se desea que el rotor siga una referencia de $272 [rad/s]$, que representa poco más del 52 % de la velocidad máxima del motor. El primer resultado es la prueba de seguimiento, el cual se muestra en la Figura 4.7. Como se observa en esta figura la respuesta más lenta es la del control por linealización exacta, seguido del control pasivo, y el más rápido es el control de la metodología IDA.

El error que se obtiene del seguimiento se muestra en la Figura 4.8. El control que presenta mayor error en estado estable es el esquema pasivo, con una magnitud de 0.5 que equivale a un 0.18 % de la velocidad de referencia. Por otro lado, el control que tiene el mayor sobrepaso es el control por linealización exacta.

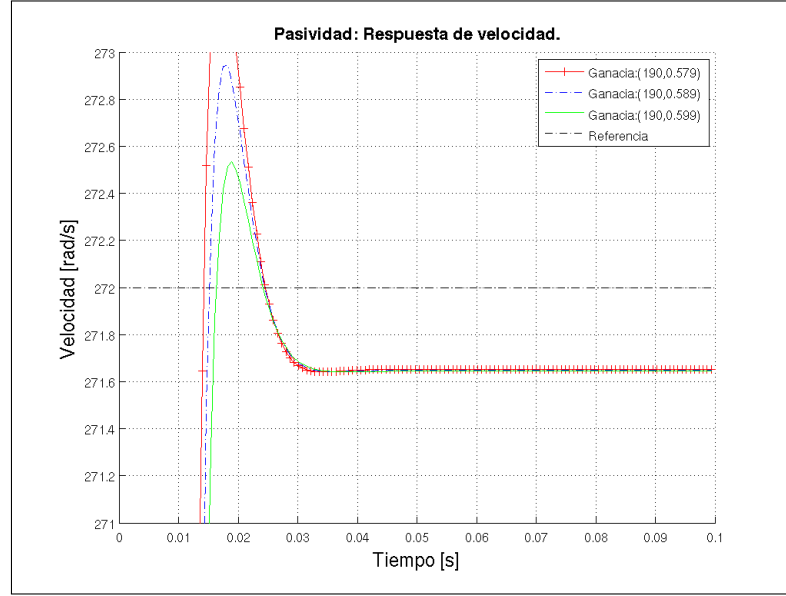


Figura 4.3: Variación de ganancias; control pasivo. Respuesta de velocidad.

4.3.1. Respuesta de las entradas de control

En esta subsección se anexan las gráficas de los voltajes del marco $d - q$. Cabe señalar que el voltaje en el eje d no es de gran interés para nuestro análisis, ya que se busca que el motor alcance una velocidad de referencia constante. Sin embargo se anexa estos resultados para observar cómo esta acción de control aparece cuando el motor debe de frenar.

La Figura 4.9 muestra todos los voltajes del eje d de todos los esquemas de control.

Análogamente, la Figura 4.10 muestra todos los voltajes del eje q .

4.4. Variaciones y perturbaciones

4.4.1. Pruebas de par variable

En este apartado se presentan las gráficas obtenidas de simulación que muestran el comportamiento de la velocidad del rotor cuando el motor está bajo la influencia de un par variable. La magnitud de la variación del par fue de $10[N \cdot m]$; se inicia con un par positivo de $5[N \cdot m]$ al tiempo $t = 0[s]$, después en $t = 2[s]$ hay un incremento y al tiempo $t = 5[s]$ el par es $T_L = -5[N \cdot m]$ constante.

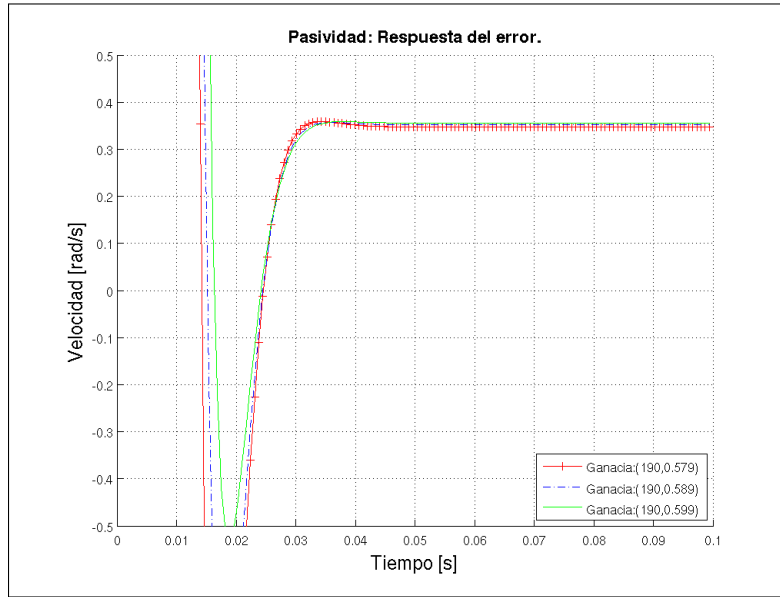


Figura 4.4: Variación de ganancias; control pasivo. Respuesta del error.

La gráfica de la Figura 4.11 muestra la respuesta del rotor, cuando el motor es controlado por un esquema de linealización exacta. Se observa un decremento de velocidad en el intervalo en el que el par cambia de signo, pero cuando el par se vuelve constante la velocidad vuelve a la referencia.

La respuesta de velocidad por variación del par del esquema pasivo se observa en la Figura 4.12. Esta gráfica muestra que la respuesta del error se puede reducir alrededor de dos décimas de punto.

El control por la metodología IDA tiene una respuesta de velocidad por variación de carga dada en la Figura 4.13. La velocidad angular presenta un cambio de signo debido al cambio de signo del par. Cuando el par se establece constante al tiempo $t = 5[s]$ la velocidad del rotor presenta un aumento en la magnitud del error de estado estable.

4.4.2. Perturbación del par

En este segundo apartado se incluyen las gráficas obtenidas cuando el par del motor se perturba un 15 % de la magnitud real, en este caso se supone una magnitud de par de $5[N \cdot m]$. El lapso de tiempo de dura la perturbación es de 1 segundo, de $t = 1[s]$ a $t = 2[s]$.

La Figura 4.14 muestra la respuesta del rotor para el control por linealización

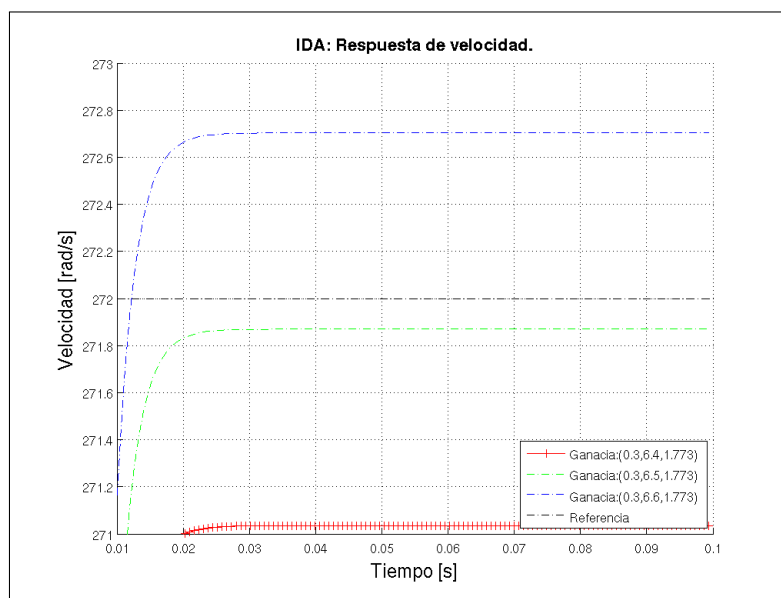


Figura 4.5: Ajuste de ganancias; control IDA. Respuesta de velocidad.

exacta. Al tiempo $t = 1[s]$ la velocidad se reduce debido a que existe un decremento del par, pero al tiempo $t = 1.5[s]$ el control hace que la velocidad angular del rotor vuelva al valor de referencia correcto. Después, cuando la perturbación desaparece, lo que significa que el rotor se encontró ante un incremento positivo en el par, la velocidad aumenta por lo que el control debe compensar ese exceso y al tiempo $t = 2[s]$ la velocidad alcanza la referencia una vez más.

En la gráfica de la Figura 4.15 se tiene la respuesta de velocidad del rotor ante una perturbación en magnitud de la carga, cuando el motor se controla por un esquema pasivo. Como la perturbación existe en el intervalo de tiempo que va de 1 segundo a 2 segundos, se tiene un cambio de velocidad en el rotor de casi una unidad, incluso esta aumenta si la perturbación es mayor al 15 % por ciento. A diferencia de la respuesta de velocidad angular dada por variación de la carga, Figura 4.12, se tiene en este caso una mayor magnitud del error. Quizá se deba a que el sistema este bajo un cambio brusco del par, es decir, en un lapso de tiempo muy pequeño el par hipotético no fue idéntico al real.

La respuesta de velocidad del esquema IDA con perturbación de carga se muestra en la Figura 4.16. A diferencia de los otros controles la velocidad del rotor presenta sólo un decremento de la velocidad mientras el par está bajo una perturbación, este decremento persiste el mismo intervalo de tiempo que la perturbación. Y además, la magnitud de la velocidad del rotor cuando es constante y menor tiene un intervalo

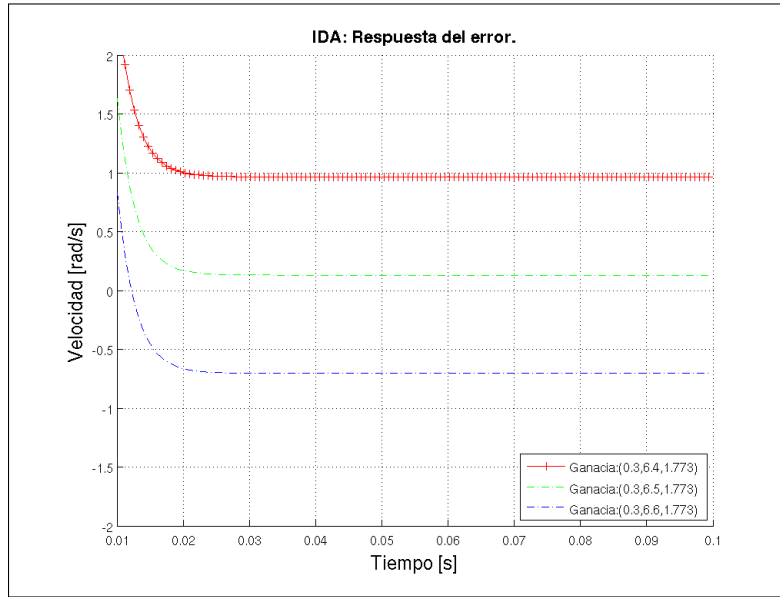


Figura 4.6: Ajuste de ganancias; control IDA. Respuesta de error.

de tiempo equivalente al lapso en el que la perturbación se mantiene constante.

4.4.3. Perturbación del momento de inercia

Como el momento de inercia del motor es un valor que se puede medir y modificar fácilmente en las pruebas de laboratorio, a diferencia de las resistencias del devanado, se optó por realizar simulaciones en las cuales se observara el comportamiento de la velocidad ante un caso hipotético en el que dicha constante fuera distinta. Bajo este escenario la constante del momento de inercia, J dado en la sección 4.1, se varió un 15 % respecto del valor inicial tanto un porciento arriba del hipotético como un tanto porciento por debajo (esto se denota en las figuras como +15 % y -15 %, respectivamente).

Como se puede observar en la Figura 4.17 la mejor respuesta de velocidad del control por linealización exacta tiene un mejor desempeño cuando hay perturbación menor al valor real ya que la velocidad no tiene sobrepaso y casi tiene el mismo tiempo de asentamiento que las otras dos curvas.

La Figura 4.18 muestra las gráficas de respuesta de velocidad con perturbación de inercia para el control pasivo. Se puede notar que el mejor desempeño se logra cuando el valor del momento de inercia es mayor al real, por un 15 %. Esto se debe a que la respuesta no tiene sobrepaso y tiene casi el mismo tiempo de asentamiento

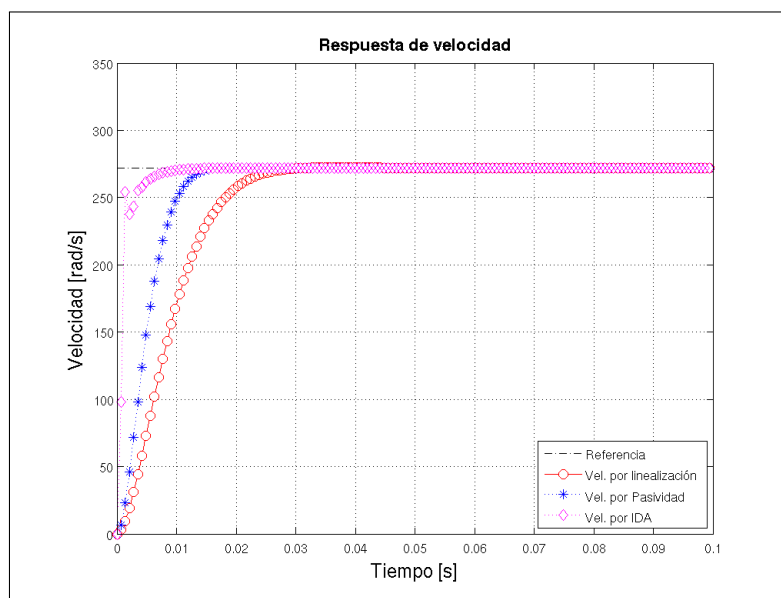


Figura 4.7: Seguimiento de velocidad.

que los otros dos casos.

La respuesta de velocidad con perturbación de inercia para el esquema de control IDA se muestra en la Figura 4.19. En este caso para la diferencia que existen entre los tres casos se está hablando de magnitudes de décimas de punto, por lo que resulta poco útil si se comparan con respecto de la velocidad de referencia.

4.5. Discusión de resultados

De los esquemas de control que se simularon en este trabajo se observó que todos logran seguimiento de una consigna de velocidad, salvo por diferencias en sobrepasos y tiempos de establecimiento; si se comparan los sobrepasos en la velocidad con respecto a la velocidad de referencia resulta que las magnitudes del sobrepaso son menores al 1 %, por lo que no son relevantes en un escenario práctico. Sin embargo, en simulación el mejor seguimiento se logró con el esquema de linealización exacta ya que tiene un error de cero en estado estable.

Sobre la sintonía de las ganancias se puede decir que los ajustes más complicados pertenecen al control pasivo y la metodología IDA, ya que tienen más de dos ganancias de las cuales no se pudo observar algún patrón que facilitara encontrar un algoritmo de ajuste. Los valores que se presentan en las distintas gráficas se obtuvie-

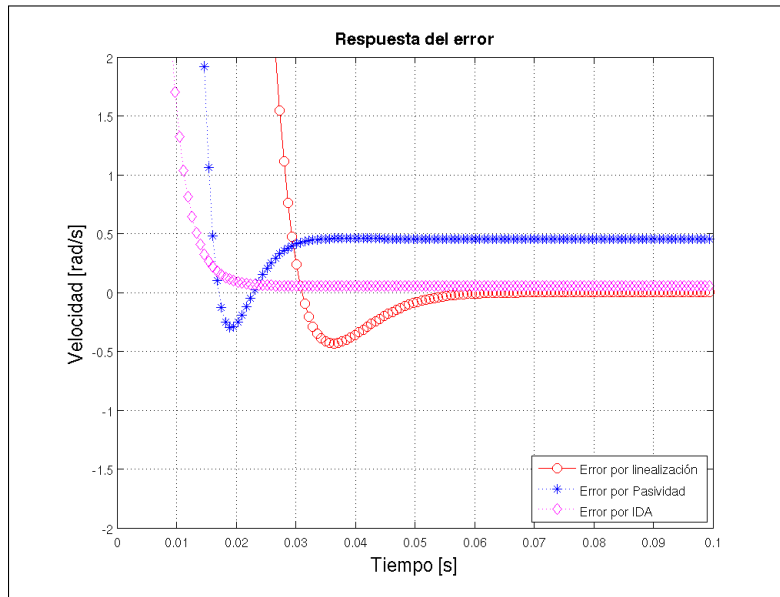


Figura 4.8: Magnitud del error.

ron mediante prueba-error.

Los resultados sobre las respuestas de voltajes que arrojan los controles nos dice que el esquema que consume más voltaje es debido a la metodología IDA, esto se debe, quizá, a que la respuesta de velocidad del rotor no tiene sobrepaso; esto lo último se comprueba al ver la Figura 4.8. En segundo lugar se encuentra el voltaje del control por retroalimentación de estados y el control que utiliza menos voltaje es el control pasivo.

En la última subsección de este capítulo se encontró que el par variable genera que el esquema de control IDA empeore el desempeño de seguimiento. En esta misma prueba, el control pasivo mejora cuando el momento de carga se opone al motor, ya que la magnitud del error de estado estable se reduce. En las simulaciones de perturbación de par el control con una respuesta de error más grande fue el esquema pasivo, por lo que es un control sensible ante este tipo de escenario, pero también el control IDA presentó un cambio considerable ante esta perturbación.

Finalmente, en las pruebas de perturbación de inercias los controles que mostraron respuestas distintas son el control por linealización exacta y el pasivo. Esta última prueba arrojó lo siguiente observación: resulta mejor dejar un momento de inercia menor al real en el esquema de linealización exacta y un momento de inercia mayor en el esquema pasivo, para mejorar la respuesta de seguimiento de velocidad en cada control.

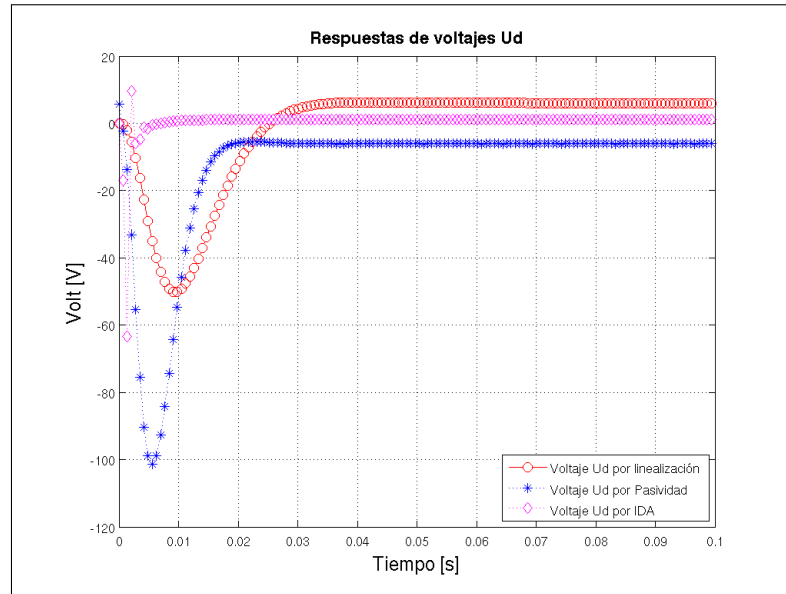


Figura 4.9: Respuesta de los voltajes del eje d , de todos los esquemas de control.

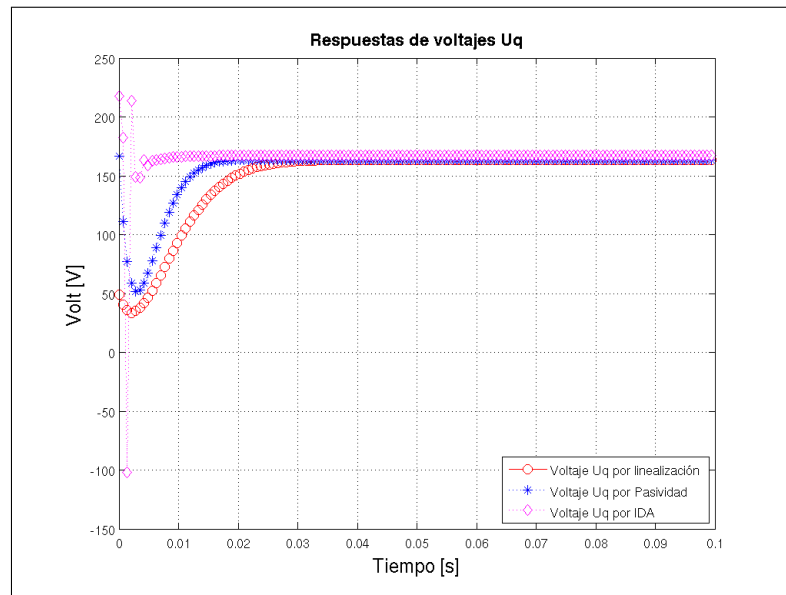


Figura 4.10: Respuesta de los voltajes del eje q , de todos los esquemas de control.

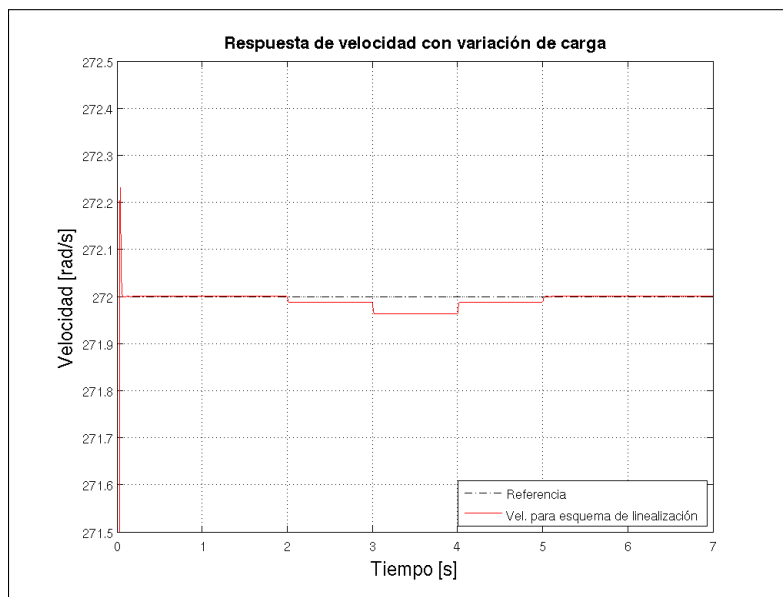


Figura 4.11: Torque variable; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad del rotor.

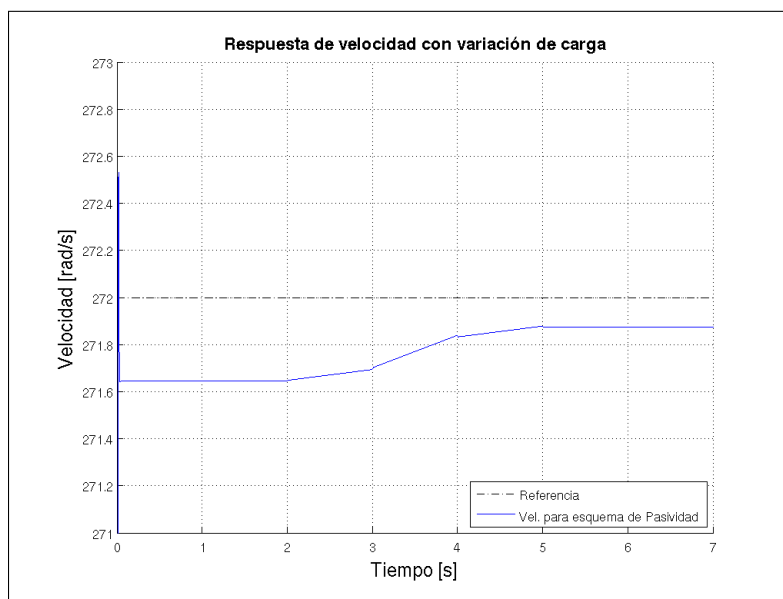


Figura 4.12: Torque variable; control pasivo. Respuesta de velocidad del rotor.

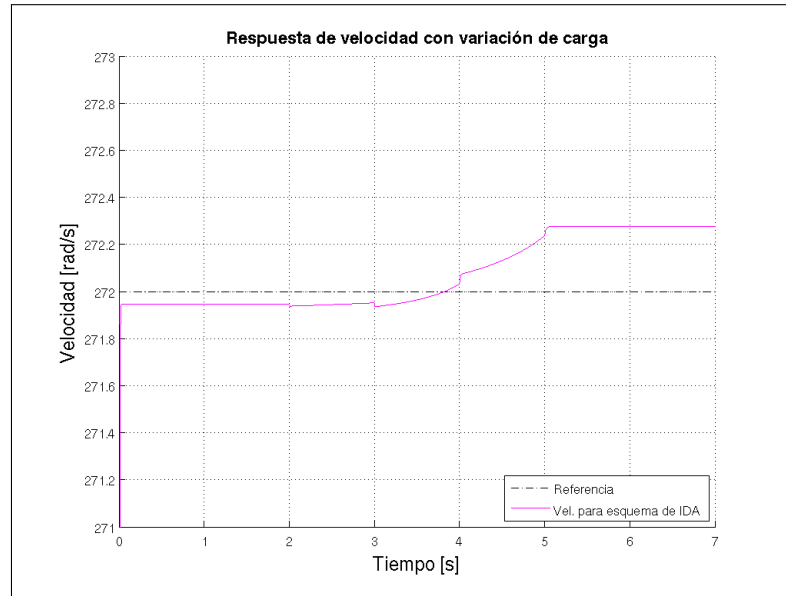


Figura 4.13: Torque variable; control IDA. Respuesta de velocidad del rotor.

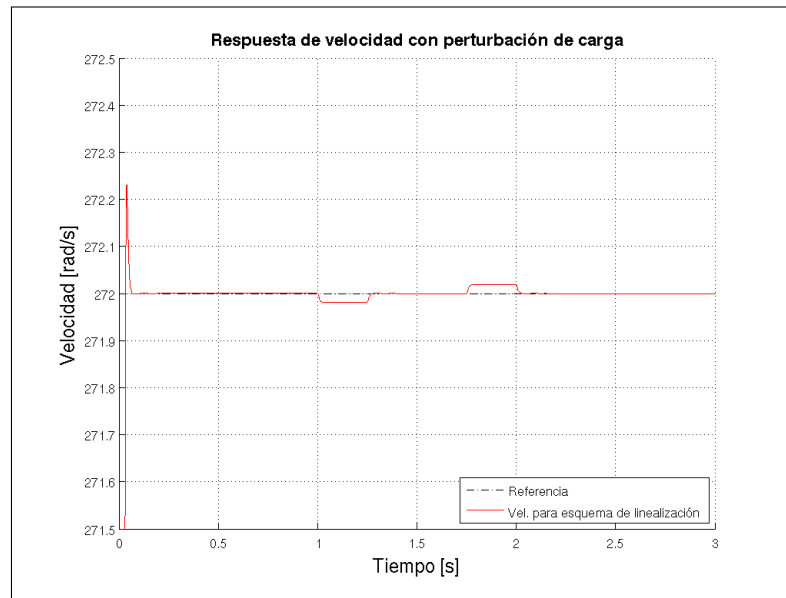


Figura 4.14: Perturbación del par; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad del rotor.

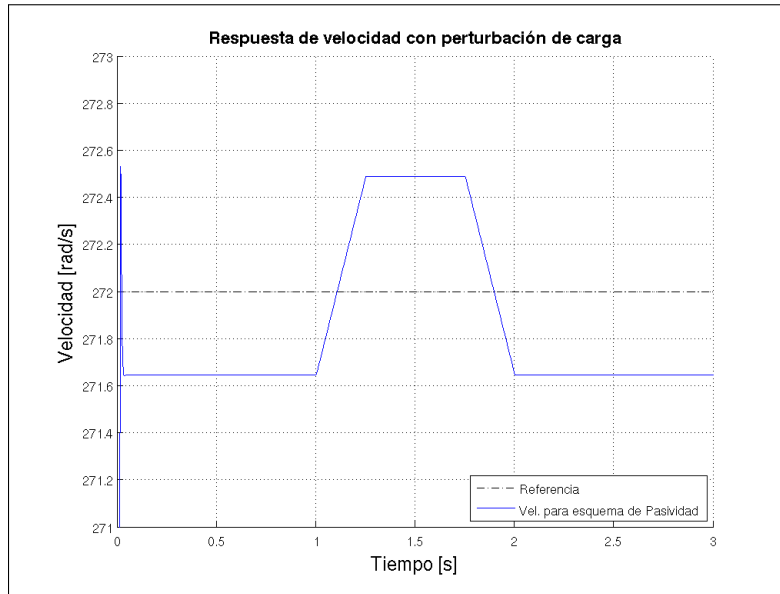


Figura 4.15: Perturbación del par; control pasivo. Respuesta de velocidad del rotor.

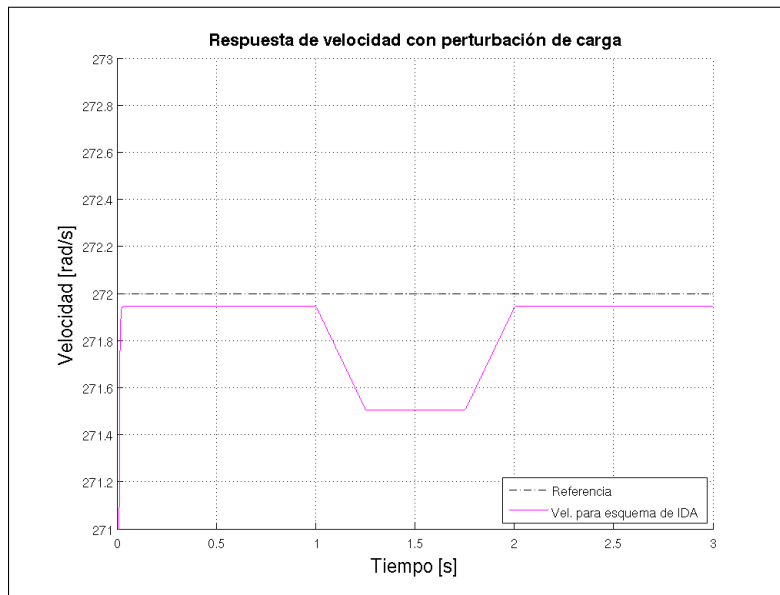


Figura 4.16: Perturbación del par; control IDA. Respuesta de velocidad del rotor.

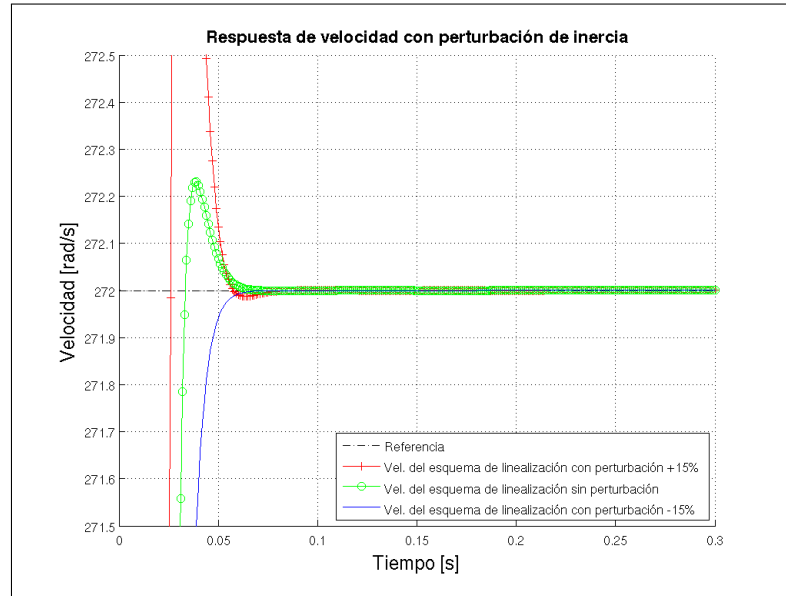


Figura 4.17: Perturbación del momento de inercia; control por linealización exacta. Respuesta de velocidad del rotor.

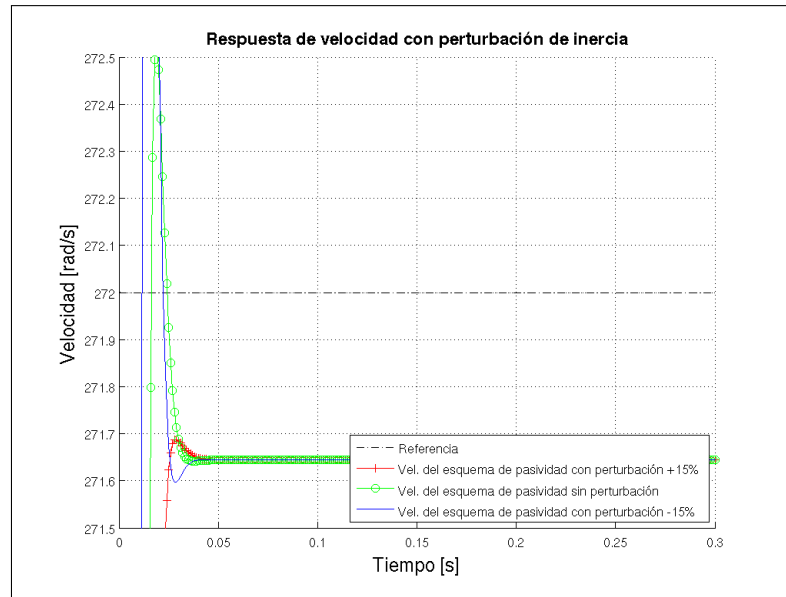


Figura 4.18: Perturbación del momento de inercia; control pasivo. Respuesta de velocidad del rotor.

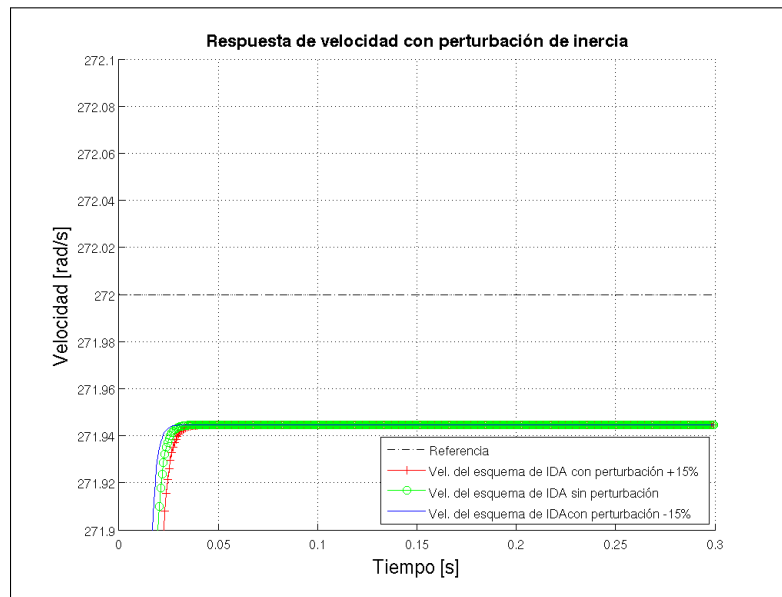


Figura 4.19: Perturbación del momento de inercia; control IDA. Respuesta de velocidad del rotor.

Capítulo 5

Conclusiones

Se puede concluir, de la investigación acerca del motor eléctrico de imán permanente, que esta máquina eléctrica es resultado de mejores diseños de motores eléctricos, así como, del desarrollo de mejores materiales magnéticos. El MIPSE es capaz de sustituir a varios tipos de motores, como el motor de inducción o el motor de DC con escobillas, igualando las capacidades de desempeño, reduciendo los mantenimientos, con un volumen y peso menor. Se encontró que existen dos grandes clases de MIPSES's, el primero de flujo radial que se caracteriza por tener el flujo magnético perpendicular al eje de giro del rotor. El segundo es el de flujo axial, el cual tiene el flujo magnético paralelo al eje de giro del rotor. Ambos diseños se pueden utilizar en aplicaciones indistintamente.

Como parte del estudio acerca de motores de imán permanente se incluyó el desarrollo del conjunto de ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico del motor. Dichas ecuaciones se plasmaron en sus dos formas, tanto en variables estándar o variables máquina, como en variables equivalentes del marco $d - q$. Se observó que el conjunto de ecuaciones en variables máquina que modelan la dinámica del MIPSE tienen dos vertientes: si se supone que el MIPSE de DC entonces el motor tendría voltajes contraelectromotrices trapezoidales, y lo mismo la ecuación matemática. Si se supone que el MIPSE es de AC entonces el motor tiene voltajes contraelectromotrices sinusoidales, al igual, que su modelo matemático. En el primer caso el motor se llama MIP de DC y en el segundo caso se llama MIP síncrono. En particular, se encontró que el modelado matemático para los MIPSE's de flujo radial, que comúnmente se encuentra en la bibliografía, también se aplica para los MIPSE's de flujo axial. Lo anterior reduce la complejidad de modelar mediante ecuaciones de electromagnetismo, más generales, la interacción entre el devanado y el conjunto de imanes del rotor.

En este trabajo se realizó investigación sobre algoritmos de control existentes en la literatura para MIPSE's de flujo axial con el fin de determinar su comportamiento y desempeño. El modelo matemático del MIPSE se representó de forma tal que pudiera ser utilizado por todas las leyes de control seleccionadas. Se hizo la comparación para tres leyes de control: linealización por retroalimentación de estados (LE), control basado en pasividad (CBP) y control basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento (IDA).

Se realizaron numerosas simulaciones numéricas a través de MATLAB en las que se evaluaron: respuesta transitoria y permanednte, robustez frente a cambios en el sistema de cargas y facilidad de sintonización de los controladores. Los resultados se pueden resumir en la siguiente tabla 5.1

Cuadro 5.1: Resumen de resultados (menor es mejor)

	LE	CBP	IDA
Respuesta transitoria	3	2	1
Error de estado permanente	1	3	2
Esfuerzo de control	1	2	3
Pulso en par de carga	1	2	3
Transitorio por cambio de inercia	1	1	1
Facilidad de sintonización	1	2	3

A partir de los resultados de simulación el control que mostró mejor desempeño global frente a las distintas medidas adoptadas fue el control por linealización exacta. Sin embargo, falta aún por realizar la evaluación de estos algoritmos sobre un motor real, donde los efectos de inexactitud en los parámetros modelo tendrán posiblemente efectos mayores. Estos experimentos no se pudieron llevar a cabo por retrasos en la importación de la plataforma experimental.

Apéndice A

Transformada de Park

En los años 20's Rober H. Park introdujo un nuevo acercamiento al análisis de máquinas eléctricas, el cual consistió en utilizar una transformación que envía las variables de voltaje, corriente y flujos de encadenamiento de los devanados del estator a variables asociadas a devanados ficticios que están en un plano fijo al rotor. La matriz

$$K_s := \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin \theta & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

se le conoce como Transformada Park, y es muy útil ya que elimina a las inductancias dependientes de la posición de la ecuación de voltaje; las cuales se generan a partir del movimiento relativo de dos circuitos, ver referencia [11, Pág. 109]. La variable θ representa el desplazamiento angular, y está en función del tiempo (t).

La velocidad angular se denota con ω . La velocidad y la posición están relacionadas por la ecuación

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt.$$

Sean $\mathcal{F}_{abc}, \mathcal{F}_{qd0} \in \mathbb{R}^3$ (un par de vectores que representan, ya sea voltajes, corrientes o flujos de encadenamiento) dados como

$$\mathcal{F}_{abc} := [f_a, f_b, f_c]^T \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_{qd0} := [f_q, f_d, f_0]^T$$

y $K_s \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ la matriz en (A.1).

La matriz K_s transforma a los vectores del marco (a, b, c) al marco $(d, q, 0)$, es decir,

$$\mathcal{F}_{qd0} = K_s \mathcal{F}_{abc}.$$

La matriz K_s resulta invertible, la inversa es

$$K_s^{-1} := \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Sabemos que una máquina eléctrica síncrona está descrita, parcialmente, por las siguientes ecuaciones¹ de voltaje

$$\left. \begin{aligned} v_{as} &= R_s i_{as} + \frac{d\lambda_{as}}{dt} \\ v_{bs} &= R_s i_{bs} + \frac{d\lambda_{bs}}{dt} \\ v_{cs} &= R_s i_{cs} + \frac{d\lambda_{cs}}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

donde R_s , V_{js} , i_{js} y λ_{js} son la resistencia, el voltaje, la corriente y el flujo de encaadenamiento en el j -ésimo devanado, con $j \in \{a, b, c\}$. El flujo de encadenamiento se representa como

$$\Lambda_{abcs} = L_s I_{abcs},$$

donde L_s es la matriz de inductancias definida como

$$L_s := \begin{bmatrix} L_{ls} + \hat{L}_m - L_{\Delta m} \cos(\theta_s) & -\frac{\hat{L}_m}{2} - L_{\Delta m} \cos(\theta_s - \frac{2\pi}{3}) & -\frac{\hat{L}_m}{2} - L_{\Delta m} \cos(\theta_s + \frac{2\pi}{3}) \\ -\frac{\hat{L}_m}{2} - L_{\Delta m} \cos(\theta_s - \frac{2\pi}{3}) & L_{ls} + \hat{L}_m - L_{\Delta m} \cos(\theta_s - \frac{4\pi}{3}) & -\frac{\hat{L}_m}{2} - L_{\Delta m} \cos(\theta_s + 2\pi) \\ -\frac{\hat{L}_m}{2} - L_{\Delta m} \cos(\theta_s + \frac{2\pi}{3}) & -\frac{\hat{L}_m}{2} - L_{\Delta m} \cos(\theta_s + 2\pi) & L_{ls} + \hat{L}_m - L_{\Delta m} \cos(\theta_s + \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix},$$

donde L_{ls} representa la pérdida en la inductancia, $L_{\Delta m}$ es la mitad de la amplitud de la variación sinusoidal de la inductancia y $\hat{L}_m$ es el valor promedio de la inductancia.

Aplicando la transformación de coordenadas K_s en (A.3), es decir

$$\left. \begin{aligned} V_{abcs} &\xrightarrow{K_s} V_{qd0s} = K_s^{-1} V_{abcs} \\ I_{abcs} &\xrightarrow{K_s} I_{qd0s} = K_s^{-1} I_{abcs} \\ \Lambda_{abcs} &\xrightarrow{K_s} \Lambda_{qd0s} = K_s^{-1} \Lambda_{abcs}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

¹El subíndice s denota, que las constantes, las variables y las funciones, pertenecen al estator.

nos queda que el sistema de ecuaciones de voltaje se reescribe como

$$\left. \begin{aligned} v_{qs}^r &= R_s i_{qs}^r + \frac{d\lambda_{qs}^r}{dt} + \omega \lambda_{ds}^r, \\ v_{ds}^r &= R_s i_{ds}^r + \frac{d\lambda_{ds}^r}{dt} - \omega \lambda_{qs}^r, \\ v_{0s}^r &= \frac{d\lambda_{0s}^r}{dt}. \end{aligned} \right\}. \quad (\text{A.5})$$

El sistema de ecuaciones (A.5) describe a la máquina eléctrica síncrona con marco de referencia a los ejes $d - q$, el cual se encuentra en el rotor.

Apéndice B

Algunas definiciones básicas

Derivadas de Lie

Sean las funciones $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, suficientemente suaves y continuas, tales que $f(0) = 0$ y

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (\text{B.1})$$

Definición B.0.1. La derivada k -ésima de Lie de h respecto a f se define como

$$L_f^k h(x) := \frac{\partial(L_f^{k-1}h)}{\partial x} f(x) \quad y \quad L_f^0 h = h,$$

con k algún número natural.

El k -ésimo corchete de Lie de h con respecto a f se define como

$$\begin{aligned} ad_f^0 h &= h, \\ ad_f^1 h &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} h(x) \\ &\vdots \\ ad_f^k h &= \frac{\partial(ad_f^{k-1}h)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} (ad_f^{k-1}h), \end{aligned}$$

con k algún número natural.

Definición B.0.2. El sistema no lineal (B.1) tiene grado relativo ρ , $1 \leq \rho \leq n$, en la región $D_0 \subset D$ si

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (\text{B.2})$$

para todo $x \in D_0$.

Definición B.0.3. Se define al conjunto de corchetes de Lie asociado a (B.1), que genera a $\mathcal{G}_l$, como

$$\mathcal{G}_l = \text{span}\{ad_f^j g_i \mid 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq l\}, \quad (\text{B.3})$$

con $0 \leq l \leq n-2$.

Definición B.0.4. Los índices de controlabilidad $\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ asociados al sistema (3.1) se definen como

$$\kappa_i = \text{card}\{m_j \geq i \mid j \geq 0\} \quad 1 \geq i \geq m \quad (\text{B.4})$$

con

$$\begin{aligned} m_0 &= \text{rank } \mathcal{G}_0, \\ m_1 &= \text{rank } \mathcal{G}_1 - \text{rank } \mathcal{G}_0, \\ &\vdots \\ m_{n-1} &= \text{rank } \mathcal{G}_{n-1} - \text{rank } \mathcal{G}_{n-2}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}_l$ se define en la ecuación (B.3).

Definición B.0.5. Se dice que el conjunto $\mathcal{G}_l$ en (B.3) es involutivo si

$$\forall a, b \in \mathcal{G}_l \Rightarrow ad_a b \in \mathcal{G}_l.$$

Bibliografía

- [1] ABDELYAZID, ACHOR. *Passivity Based Control for Permanent-Magnet Synchronous Motors*, INTECH. Recent Advances in Robust Control: Theory and Applications in Robotics and Electromechanics 2011.
- [2] ACHOUR, A.Y. ET AL. *Passivity-Based Current Controlled Design for a Permanent-Magnet Synchronous Motor*, Elsevier. ISA Transactions 48, 2009.
- [3] CHAPMAN, STHEPEN J. *Electric machinery fundamentals*, Mc Graw Hill, 4^{ta} Ed. 2005.
- [4] CHIASSON, JOHN NELSON. *Modeling and High Performance Control of Electric machines*, Wiley-Intersciencie 2005.
- [5] GIERAS, JACEK F. ET AL. *Axial Flux Permanent Magnet Brushless Machines*, Springer, 2^{da} Ed. 2008.
- [6] GRGAR, BOJAN. ET AL. *Nonlinear Control of Synchronous Servo Drive*, IEEE Transactions on Control Systems Technology Vol. 4 Núm. 2, 1996.
- [7] HASELMAN, DUANE C. *Brushless permanent magnet motor design*, Magna Physics Publishing, 2^{da} Ed. 2003.
- [8] HAISHENG, YU. ET AL. *Energy-Shaping Control of PM Synchronous Motor Based on Hamiltonian System Theory*, IEEE. International Conference on Electrical Machines and Systems 2005.
- [9] HU, J. *Position Control of a Brushless DC Motor without Velocity Measurements*, IEEE. Electric Power Applications Vol. 142 Num. 2. Marzo 1995.
- [10] KHALIL, HASSAN K. *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 3^{ra} Ed.
- [11] KRAUSE, PAUL C. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*, Wiley-Intersciencie, 2^{da} Ed. 2002.

- [12] KRISHNAN, RAMU *Electric Motor Drives: Modeling, Analysis and Control*, Prentice Hall 2001.
- [13] MEHDI MIRIMANI, SEYYED. ET AL. *Static Eccentricity Fault Detection in Single-Stator-Single-Rotor Axial-Flux Permanent-Magnet Machines*, IEEE. Transactions on Industry Applications Vol. 48 Núm. 6 Noviembre/Diciembre 2012.
- [14] LYSHENVSKI, SERGEY EDWARD. *Electromechanical Systems and Devices*, CRC Press 1988.
- [15] MARINO, RICCARDO. TOMEI, PATRIZIO. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice Hall 1995.
- [16] NASIRI-GHEIDARI, ZAHRA. & LESANI, HAMID. *A Survey on Axial Flux Induction Motors*, Przegląd Elektrotechniczny (Reseña eléctrica) Núm. 2, 2012.
- [17] ORTEGA, ROMEO. ET AL. *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A survey*, European Journal of Control 2004.
- [18] ORTEGA, ROMEO. ET AL. *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Port-Controlled Hamiltonian Systems*. Elsevier. Automatica, 2002.
- [19] PADMARAJA, YEDAMALE. *Brushless DC (BLDC) Motor Fundamentals*. Microchip Technology, AN885 2003.
- [20] PARVIAINEN, ASKO. *Design of Axial-Flux Permanent-Magnet Low-Speed Machines and Performance Comparison Between Radial-Flux and Axial-Flux Machines*, Tesis de Doctorado. Universidad de Tecnología Lappeeranta. Abril 2005.
- [21] PETROVIĆ, VLADAN. ET AL. A GLOBALLY CONVERGENT ENERGY-BASED CONTROLLER SYNCHRONOUS MOTORS, IEEE. Proceedings of the 38th Conference an Decision & Control, 1999.
- [22] PETROVIĆ, VLADAN. ET AL. *Interconnection and Damping Assignment Approach to Control of PM Synchronous Motors*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 9 Núm. 6. Noviembre 2001.
- [23] RAHMAN, MD. AZIZUR *History of Interior Permanent Magnet Motors*. IEEE. Industial Applications Magazine, 2013.

- [24] RAHMAN, MD. AZIZUR *Modern Electric Motors in Electric World*. IEEE. Proceedings of the Industrial Electronics: Control and Instrumentation, 1993.
- [25] RAMÍREZ-LEYVA, F. H. *Passivity-Based Speed Control for Permanent Magnet Motors* Elsevier. Procedia Technology 7, 2013.
- [26] SAHIN, FUNDA. *Design and Development of High Axial-Flux Permanent Machine*, Tesis de Doctorado. Universidad Técnica de Eindhoven. Mayo 2001.
- [27] TIEGNA, HUGUETTE. ET AL. *Analytical Modeling of the Open-Circuit Magnetic Field in Axial Flux Permanent-Magnet Machines With Semi-Closed Slots*, Transactions on Magnetics IEEE. Vol. 48 Núm. 3 Marzo 2012.
- [28] ZHAI, SHUANG. ET AL. *Research on Brushless DC Motor Speed Control System Based on Passivity-Based Control*, Transactions Technology Publications. Advanced Materials Research Vols. 301-303, 2011.