



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

**CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE LYAPUNOV
PARA SISTEMAS HOMOGÉNEOS DE SEGUNDO ORDEN
(MÉTODO POR REDUCCIÓN DE VARIABLE)**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

P R E S E N T A :

FRANCISCO LÓPEZ RAMÍREZ

TUTOR:

**DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA - UNAM**

MÉXICO, D. F. ENERO 2014

Jurado Asignado

Presidente: **Dra. María Cristina Verde Rodarte**
Secretario: **Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria**
Vocal: **Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez**
1er Suplente: **Dr. Leonid Fridman**
2do Suplente: **Dr. Fernando Castaños Luna**

Lugar donde se realizó la tesis:
Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria, México, D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

*A mis dos mamás.
A Valeria.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quisiera agradecer a mi tutor, el Dr. Jaime Moreno, por su enseñanza, su compromiso y por haberme dado la oportunidad de involucrarme en este interesante trabajo. También quisiera agradecer al M. en I. Tonámetl Sánchez por su vasta asesoría y apoyo para la realización de esta tesis; al Dr. Leonid Fridman por su entusiasta apoyo y a todos los miembros del jurado por sus oportunos comentarios y correcciones.

De igual forma, agradezco a mis compañeros de la maestría Edgar Berrospe, Misie Aguado e Indira Alcaide por su apoyo durante la formación de la maestría. A mi hermano Rafael López y a Valeria Hansberg por su ayuda en la corrección ortográfica y de redacción. Finalmente quisiera agradecer al CONACYT, al posgrado en ingeniería de la UNAM y al Instituto de Ingeniería de la UNAM el apoyo tanto económico como académico durante mi estancia en la maestría.

Resumen

Encontrar funciones de Lyapunov explícitas para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos, involucra siempre obtener una solución de una desigualdad diferencial parcial, una tarea que dista mucho de ser sencilla. A pesar de que existe una gran variedad de métodos para encontrar funciones de Lyapunov, a la fecha no existe un método universal que permita obtener funciones de Lyapunov (FL) simples y explícitas para sistemas dinámicos con puntos de equilibrio estables. Para reducir la complejidad de las ecuaciones involucradas en la obtención de FL es posible utilizar propiedades de homogeneidad. Esta tesis de maestría tiene como objetivo presentar un método de construcción de FL homogéneas para sistemas homogéneos de segundo orden. En comparación con otros métodos disponibles, el que aquí se desarrolla permite obtener funciones de Lyapunov explícitas para un conjunto mayor de sistemas y reduce significativamente el análisis de definitividad de signo tanto de las funciones candidatas como de sus respectivas derivadas.

Abstract

Finding explicit Lyapunov functions for stability analysis of dynamical systems entails the nontrivial task of solving a partial differential inequality. Although many methods for finding Lyapunov functions are available, much remains to be done in this regard since there isn't a universal constructive method for finding simple, explicit Lyapunov functions for dynamical systems with stable equilibria. Homogeneity properties of systems may be used to address this problem since they are capable of reducing the complexity of the equations involved. The present work outlines a method to obtain homogeneous Lyapunov functions for homogeneous second-order systems. In comparison with previous results, the method described here provides explicit Lyapunov functions for a larger set of dynamical systems and greatly reduces the sign-definiteness analysis of the underlying equations.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Sistemas Dinámicos y Estabilidad	1
1.2. Métodos <i>Clásicos</i>	2
1.2.1. Método del Gradiente Variable	3
1.2.2. Método de Zubov	3
1.2.3. Método de Krasovskii	3
1.3. Estabilidad y Homogeneidad	4
1.4. Estado del Arte y Motivación	5
1.5. Objetivo	6
2. Marco Teórico	7
2.1. Método Directo de Lyapunov	7
2.2. Inclusiones Diferenciales	8
2.3. Homogeneidad Ponderada	9
2.4. Ecuaciones Diferenciales	10
2.4.1. Ecuaciones Diferenciales Lineales	11
2.4.2. Ecuación Diferencial de Bernoulli	11
2.5. Notación Asintótica	11
2.6. Método por Homogeneidad de Zubov	13
3. Método por Reducción de Variable	16
3.1. Representación Alternativa de Funciones Homogéneas	16
3.1.1. Continuidad Sobre el Eje x_1	20
3.1.2. Positividad Definida	21
3.1.3. Diferenciabilidad	22
3.1.4. Reducción de Variable en Expresiones Diferenciales	23
3.1.5. Resumen de Propiedades en la Variable z	24
3.2. Descripción del Método por Reducción de Variable	25
3.3. Variación del MRV con Ecuaciones de Bernoulli	30
3.4. Procedimiento Constructivo	30

4. Ejemplos	32
4.1. Ejemplo Comparativo	32
4.1.1. Con el Método por Homogeneidad de Zubov	32
4.1.2. Con el Método por Reducción de Variable	33
4.2. FL para un Controlador Homogéneo	34
4.3. FL para el Algoritmo <i>Super Twisting</i>	37
4.4. FL para el Algoritmo <i>Terminal</i>	39
5. Conclusiones	44
Lista de Acrónimos y Abreviaturas	46
Lista de Símbolos	47
Bibliografía	49

1

Introducción

Los sistemas dinámicos son objetos matemáticos que se utilizan para representar fenómenos naturales. Su principal característica radica en que poseen una regla de correspondencia que establece la dependencia temporal de los estados específicos del fenómeno que representan. Esto significa que para cualquier instante de tiempo, un sistema dinámico posee un conjunto de valores, normalmente números reales, que puede ser representado como un punto dentro del espacio de posibles estados. Si se asume un fenómeno natural como continuo, es decir, que las magnitudes físicas que lo representan pueden tratarse como señales continuas, las ecuaciones diferenciales resultan ser la forma más natural para su representación. Así, las soluciones de dichas ecuaciones representan las posibles trayectorias, es decir la sucesión temporal de puntos en el espacio de estados que dicho fenómeno exhibe.

1.1. Sistemas Dinámicos y Estabilidad

Aunque existe una gran variedad de clasificaciones para los sistemas dinámicos, sin duda la más relevante en ingeniería resulta la división entre sistemas lineales y no lineales. Para ser lineal, un sistema dinámico $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ debe cumplir la propiedad de homogeneidad

$$f(\varepsilon x) = \varepsilon f(x), \quad \varepsilon > 0$$

y de aditividad

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

Ambas propiedades se conocen como el principio de *superposición*. Este principio, aplicado a ecuaciones diferenciales, establece que cualesquiera dos soluciones del sistema pueden ser sumadas para formar una nueva solución. Los sistemas no lineales se definen entonces como aquellos que no cumplen con el principio de superposición. Definir

a los sistemas no lineales de esta forma sólo esboza la enormidad de sistemas incluidos en esta clasificación. A este respecto, el matemático estadounidense de origen austriaco Stanislaw Ulam solía decir que esta definición de sistemas no lineales es como tratar de dividir la zoología entera entre animales *elefantinos* y *no elefantinos*. Esta analogía con los elefantes, además de señalar la vastedad de los sistemas no lineales, resulta justa en el sentido de que los sistemas lineales son en realidad una excepción relevante en la generalidad de los fenómenos naturales.

Tanto en sistemas lineales como en no lineales, una de las propiedades fundamentales es la estabilidad, que someramente se refiere a la capacidad que tienen las trayectorias de un sistema de crecer arbitrariamente. En un sistema lineal expresado en la forma

$$\dot{x} = Ax,$$

donde A es la matriz del sistema y x es el vector de estado, la estabilidad del origen se reduce, en lo general, a determinar el signo de los autovalores de la matriz A . En un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x),$$

el análisis de estabilidad está lejos de ser tan sencillo y sin duda la herramienta más importante a este respecto es el célebre *Método Directo de Lyapunov* (MDL). Este método, concebido en 1892 por el matemático ruso A.M. Lyapunov, establece que de existir una función escalar V , positiva definida (pd), tal que su derivada \dot{V} a lo largo de las trayectorias del sistema sea negativa, implica que el origen del sistema estudiado es estable. De aquí se puede ver que la función V , llamada función de Lyapunov (FL), se ve involucrada en una desigualdad diferencial parcial (DDP) del tipo

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n < 0, \quad (1.1)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa el vector de estados y $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ el campo vectorial del sistema dinámico a estudiar.

Comúnmente en sistemas simples, para encontrar una FL se postula una función definida positiva V (conocida como función candidata) y se obtiene su derivada \dot{V} a lo largo de las trayectorias del sistema. Si esta resulta negativa, entonces se concluye que V es una FL y que el origen del sistema es estable. Al realizar este procedimiento, se encuentra una solución particular de la Ecuación (1.1). Para sistemas más complejos, este método de ensayo y error resulta inoperante y es necesario utilizar herramientas más eficaces.

1.2. Métodos *clásicos* de Obtención de FL

En la década de los sesenta del siglo pasado, surgieron tres métodos de obtención de FL que por su amplio uso pueden considerarse como métodos *clásicos* y se resumen a continuación.

1.2.1. Método del Gradiente Variable

La idea detrás de este método consiste en suponer que existe una función $g(x)$, que es el gradiente de una función escalar positiva definida $V(x)$, tal que su derivada $\dot{V}(x)$ es negativa definida (nd) [Khalil, 2002]. Para que $g(x)$ sea el gradiente de una función escalar $g(x) = \nabla V$, su matriz Jacobiana debe ser simétrica, es decir

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Bajo esta restricción el método inicia escogiendo una $g(x)$ tal que $g^T(x)f(x)$ sea negativa definida. La función V se calcula entonces a partir de la integral

$$V(x) = \int_0^x g^T(y)dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y)dy_i \quad (1.3)$$

Dado que la integral de línea de un vector gradiente es independiente de la trayectoria, la integral anterior se calcula sobre cualquier trayectoria que una el origen con el punto x , usualmente las trayectorias escogidas son sobre los ejes coordenados, esto es

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0)dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, 0, \dots, 0)dy_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n)dy_n$$

1.2.2. Método de Zubov

En este método se propone la siguiente forma especial de la DDP (1.1):

$$\nabla V(x) \cdot f(x) = -h(x)(1 - V(x))\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}, \quad (1.4)$$

donde $h(x)$ es una función positiva definida, usualmente una forma cuadrática del vector x . Al plantear de esta forma la desigualdad diferencial, Zubov logra simplificar las ecuaciones involucradas en su solución general y, de existir V en forma explícita, define de manera única el borde exacto de la región de estabilidad [Zubov, 1964].

1.2.3. Método de Krasovskii

En el método de Krasovskii, notablemente simple, se propone la función

$$V(x) = f(x)^T P f(x) \quad (1.5)$$

y se busca una matriz P constante, simétrica y positiva definida, que satisfaga la ecuación algebraica de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q, \quad A = \frac{\partial f(x)}{\partial(x)}, \quad Q = Q^T > 0. \quad (1.6)$$

De existir P , se concluye que el origen es asintóticamente estable; si además $V(x)$ es radialmente no acotada, se concluye que el origen es global y asintóticamente estable [Krasovskii, 1963].

A pesar de que estos métodos son ampliamente utilizados, aún existe una gran cantidad de sistemas no lineales para los cuales estos métodos no pueden aplicarse o no producen FL explícitas. Por mencionar uno de estos casos, en los algoritmos de control por modos deslizantes, la señal discontinua del control impide obtener una FL del sistema con control utilizando los métodos *clásicos*.

1.3. Estabilidad y Homogeneidad

La homogeneidad es una propiedad de escalamiento multiplicativo exhibida por una gran cantidad de sistemas dinámicos. Concretamente, como se mencionó en la Sección 1.1 una función homogénea cumple con

$$f(\varepsilon x) = \varepsilon f(x), \quad \varepsilon > 0.$$

Es decir que multiplicar los argumentos de una función homogénea por un factor, equivale a multiplicar la función original por este mismo factor. Esto produce un efecto de escala multiplicativa que puede observarse en la Figura 1.1: en las tres funciones mostradas, para cada curva de nivel, el valor de la función $f(x_1, x_2)$ aumenta en diez unidades, sólo la tercera función es homogénea ya que la distancia entre cada curva de nivel es la misma, esto es, $f(10x_1, 10x_2) = 10f(x_1, x_2)$.

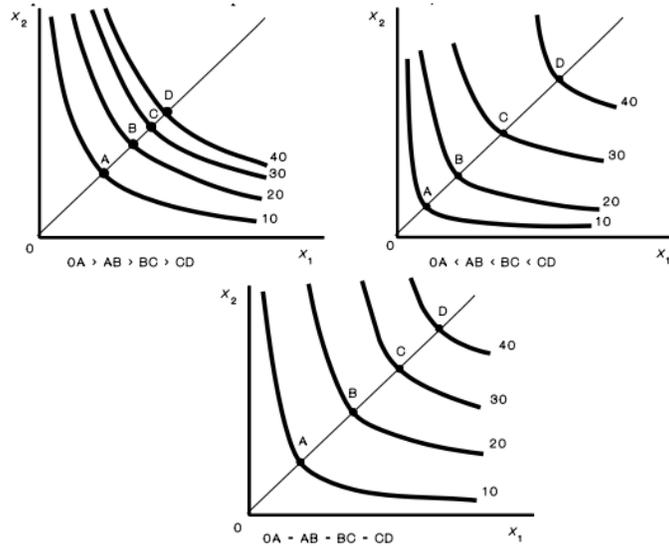


Figura 1.1: Curvas de nivel de tres funciones escalares en \mathbb{R}^2 ; sólo la tercera función es homogénea.

Esta propiedad de escalamiento conlleva a que la información en funciones homogéneas esté repetida. Es decir que, tomando como ejemplo la figura anterior, para describir por completo la función homogénea $f(x_1, x_2)$, basta con conocer una curva de nivel.

En trabajos recientes, se ha abordado con éxito el análisis de la estabilidad en sistemas dinámicos a través de la propiedad de homogeneidad. En algunos casos ésta se utiliza como una herramienta auxiliar para la obtención de FL y en otros para obtener conclusiones directas acerca de la estabilidad del sistema. Esta nueva vía aún no ha sido explorada en su totalidad y representa una alternativa a los métodos de obtención de FL convencionales.

1.4. Estado del Arte y Motivación

Como parte de los avances más recientes en el análisis de estabilidad en sistemas dinámicos homogéneos, podemos destacar:

- En [Levant, 2005] se demuestra estabilidad en tiempo finito de sistemas con modos deslizantes de orden superior (MDOS) a través de la homogeneidad y de construcciones geométricas no triviales.
- En [Orlov, 2004] se demuestra estabilidad en tiempo finito de sistemas con grado de homogeneidad negativo y un punto de equilibrio asintóticamente estable. Desafortunadamente, la derivada obtenida \dot{V} , es sólo negativa semidefinida y no permite realizar estimaciones del tiempo de convergencia al origen.
- En [Polyakov y Poznyak, 2012], aplicando el método de Zubov para sistemas discontinuos, los autores proponen una FL *unificada* para sistemas con modos deslizantes de segundo orden. Sin embargo, la forma de esta función es poco práctica y su método de obtención no es constructivo.
- En [Sanchez y Moreno, 2012] se presenta un método constructivo de FL para MDOS homogéneos, afines en el estado y continuos a tramos. A pesar de que este método es válido para MDOS de orden n , es aplicable sólo a una subclase de MDOS.
- Por último, en [Zubov, 1958], Zubov presenta una forma general de FL para sistemas homogéneos de segundo orden. A pesar de que este método no es reciente, la proximidad que guarda con el método que aquí se presenta amerita su mención tanto en esta sección como, de manera más detallada, en la Sección 2.

Con excepción de [Zubov, 1958], ninguno de los trabajos mencionados explota las propiedades específicas de los sistemas dinámicos homogéneos de segundo orden para obtener FL. A pesar de que en [Zubov, 1958] se aborda cabalmente este problema, la forma general de FL obtenida no cuenta con representación explícita para una gran cantidad de sistemas. Cuando esto ocurre, la FL debe permanecer en forma implícita, lo cual no es útil para analizar la estabilidad del sistema. Además, en el artículo sólo se abordan sistemas con grado de homogeneidad positivo y se exige que la FL sea continuamente diferenciable.

Así, contar con un método constructivo de obtención de FL para sistemas homogéneos de segundo orden, que permita obtener FL explícitas para un conjunto mayor de

sistemas y que permita formas no diferenciables de FL, contribuye a expandir el análisis de estabilidad en sistemas homogéneos. Además, contar con una FL para un sistema no sólo resulta útil para determinar la estabilidad del mismo, ya que a través de ésta también es posible estudiar regiones de atracción, procesos transitorios, estabilidad en tiempo finito y esquemas de control tales como el rediseño de Lyapunov y el *Backstepping*.

1.5. Objetivo

El objetivo general de este trabajo es presentar un método constructivo de obtención de FL homogéneas para sistemas homogéneos de segundo orden denominado *Método por Reducción de Variable* (MRV). Asimismo, el desarrollar herramientas analíticas que faciliten la aplicación del MRV y presentar ejemplos que ilustren sus principales características figuran como objetivos particulares.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el siguiente capítulo se presenta el marco teórico necesario para poder fundamentar el MRV y, con fines comparativos, se presenta brevemente el trabajo realizado por Zubov en [Zubov, 1958]. A continuación se presenta formalmente el MRV y en el Capítulo 4 se presentan cuatro ejemplos que ilustran sus principales características. El trabajo cierra con algunas conclusiones y trabajo futuro en el Capítulo 5.

2

Marco Teórico

En este capítulo se abordará la teoría necesaria para poder presentar el método por reducción de variable (MRV). La primera sección presenta el método directo de Lyapunov (MDL). A continuación se definen las inclusiones diferenciales de Filippov, que permiten estudiar sistemas dinámicos discontinuos. En la Sección 2.3 se presentan las definiciones formales de homogeneidad ponderada para funciones, campos vectoriales e inclusiones diferenciales; asimismo se mencionan dos teoremas relevantes con respecto a la existencia de FL en sistemas e inclusiones diferenciales homogéneos. Enseguida se presentan brevemente las soluciones generales de ecuaciones diferenciales lineales, ecuaciones de Bernoulli y notación asintótica, ya que se hará referencia a ellas en el siguiente capítulo. Finalmente, en la Sección 2.6 se analiza la forma general de FL para sistemas homogéneos de segundo orden presentada en [Zubov, 1958].

2.1. Método Directo de Lyapunov

El MDL puede enunciarse de la siguiente manera:

Teorema 2.1.1 (Método Directo de Lyapunov [Khalil, 2002]). *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo continuo de un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n que contiene al origen. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.1) y sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad (2.2)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D \quad (2.3)$$

Entonces $x = 0$ es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en } D - \{0\}, \quad (2.4)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Una función, continuamente diferenciable, que satisfaga (2.2) y (2.3) se denomina función de Lyapunov (FL) o FL *débil*; si además satisface (2.4) se le conoce como función de Lyapunov *estricta* (FLE) o FL *fuerte*. Para sistemas de segundo orden, las condiciones (2.3) y (2.4) pueden reescribirse como

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = W, \quad (2.5)$$

donde W es una función negativa semidefinida en el primer caso y negativa definida en el segundo.

Con el subsecuente desarrollo de la teoría de Lyapunov se han logrado relajar las condiciones de continuidad [Roxin, 1966] y diferenciabilidad [Zubov, 1964] de las funciones de Lyapunov. El siguiente teorema, establecido por Zubov en 1964, establece un criterio de estabilidad para sistemas no lineales basado sólo en el decrecimiento de la FL.

Teorema 2.1.2 (Criterio de estabilidad [Zubov, 1964]). *El origen del sistema $\dot{x} = f(t, x(t))$ ¹ es estable en el sentido de Lyapunov (o localmente estable) si y sólo si existe una función $V(t, x)$, llamada función de Lyapunov, que satisfaga las siguientes condiciones:*

1. $V(t, x)$ está definida para $\|x\| \leq h$ y $t \geq t_0$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $h > 0$
2. $V(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ y es continua en x para todo $t \geq t_0$ en el punto $x = 0$
3. $V(t, x)$ es positiva definida, esto es, existe una función $Y(x)$ tal que

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq Y(x) \quad \text{para todo } t \geq t_0 \\ Y(0) &= 0, Y(x) > 0 \quad \text{para } \|x\| > 0 \end{aligned}$$

4. La función $\bar{V}(t) := V(t, \bar{x}(t, x_0, t_0))$, donde $\bar{x}(t, x_0, t_0)$ representa la trayectoria que satisface $\dot{x} = f(t, x(t))$ cuando $x(t_0) = x_0$, no crece² en $t \geq t_0$ para todo x_0 que satisfaga $\|x_0\| \geq h$.

2.2. Inclusiones Diferenciales

Las inclusiones diferenciales surgen como generalizaciones de ecuaciones diferenciales cuando el lado derecho de éstas es discontinuo. En este caso el sistema se representa como

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (2.6)$$

¹El autor define $x(t, x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n$ como un *movimiento dinámico en desviaciones*. Para mayor información, el lector puede consultar [Poznyak, 2010, p. 562].

²Nótese que no es necesario que \bar{V}_i sea diferenciable en t

donde $F(t,x)$ es un mapeo multivaluado, es decir que a cada punto del dominio de \dot{x} le corresponde, en general, un conjunto $F(t,x)$ del codominio. Si $F(t,x)$ es una función continua a tramos, esto es, discontinua en un conjunto de puntos de medida cero, no vacía, cerrada, convexa, localmente acotada y semicontinua por arriba entonces es conocida como inclusión diferencial de Filippov [Filippov y Arscott, 1988].

La solución $x(t)$ de (2.6) resulta entonces una función absolutamente continua y satisface, casi en todos lados, la ecuación

$$\dot{x} = f(t,x), \quad (2.7)$$

donde f es una función continua que reemplaza a F en los tramos donde existe continuidad. A lo largo del presente trabajo las soluciones de los sistemas de la forma (2.7) se entienden en este sentido, es decir, en el sentido de Filippov.

2.3. Homogeneidad Ponderada

Como se mencionó en la introducción, la homogeneidad es una propiedad de escalamiento que permite que multiplicar los argumentos de una función por un parámetro ε , equivalga a multiplicar la función original por este parámetro. Esto es

$$\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Un caso más general, conocido como homogeneidad ponderada, permite que el factor multiplicativo ε esté elevado a potencias que en los argumentos se denominan *pesos de homogeneidad* y en la función *grado de homogeneidad*. Formalmente esto es

Definición 2.3.1 (Dilataciones [Bacciotti y Rosier, 2005]). *Para un conjunto fijo de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n , sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una n -tupla de números reales positivos.*

La familia monoparamétrica de dilataciones δ_ε^r (asociada a r) está definida por

$$\delta_\varepsilon^r(x) := (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0. \quad (2.8)$$

*A los números r_i se les denomina **pesos de homogeneidad**.*

Definición 2.3.2 (Función Homogénea [Bacciotti y Rosier, 2005]). *Se dice que una función $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es δ^r -homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si*

$$H(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^m H(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0.$$

Definición 2.3.3 (Campo Vectorial Homogéneo [Bacciotti y Rosier, 2005]). *Se dice que un campo vectorial $f = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$ es δ^r -homogéneo de grado k si su componente f_i es δ^r -homogénea de grado $k + r_i$ para cada i ; esto es*

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \forall i \in [1, n]. \quad (2.9)$$

Definición 2.3.4 (Inclusión Diferencial Homogénea [Levant, 2005]). *Se dice que un mapeo valuado de conjuntos $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ es homogéneo de grado $m \in \mathbb{R}$ si*

$$F(\delta_\varepsilon^r) = \varepsilon^m \delta_\varepsilon^r F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Esta definición y la Definición 2.3.2, equivalen a afirmar que $H(x)$ y $F(x)$ son invariantes ante la transformación $G_\varepsilon : (t, x) \mapsto (\varepsilon^{-m}t, \delta_\varepsilon^r x)$.

El grado de homogeneidad $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ de un campo vectorial o inclusión diferencial puede escalarse siempre a ± 1 con un cambio proporcional de los pesos de homogeneidad r_1, \dots, r_n .

Teorema 2.3.1 (Función de Lyapunov Homogénea [Bacciotti y Rosier, 2005]). *Sea el sistema $\dot{x} = f(x)$, donde f es un campo vectorial continuo en \mathbb{R}^n tal que su origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Asuma que f es δ^r -homogénea de grado k para algún $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para cualquier $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ y cualquier $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$, existe una FLE V que es δ^r -homogénea de grado m y de clase C^p . Como una consecuencia directa, la derivada temporal $\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$ es δ^r -homogénea de grado $m + k$.*

Este último teorema resulta relevante ya que garantiza la existencia de una FLE homogénea para cualquier sistema homogéneo continuo que posea un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. Esta aseveración también es válida para inclusiones diferenciales, como muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.3.2 (FL para Inclusiones Diferenciales Homogéneas [Nakamura et al., 2002]). *Asuma que la inclusión diferencial homogénea $\dot{x} \in F(x)$ satisface las siguientes condiciones:*

C1 F es un subconjunto convexo, compacto, Lebesgue medible y semicontinuo por arriba.

C2 F es homogénea con pesos de homogeneidad (r_1, r_2, \dots, r_n) .

C3 Cada solución generalizada de la inclusión diferencial está acotada uniformemente.

Entonces, existe una FL débil, homogénea de grado arbitrario positivo que es diferenciable un número arbitrario de veces.

C4 Para cada solución $x(t)$, se tiene que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Más aún, si una inclusión diferencial satisface esta última condición, existe una FLE homogénea de grado arbitrario positivo que es diferenciable un número arbitrario de veces.

2.4. Ecuaciones Diferenciales

En esta sección se presentan brevemente dos tipos de ecuaciones diferenciales que resultarán relevantes para el desarrollo del MRV.

2.4.1. Ecuaciones Diferenciales Lineales

Definición 2.4.1 (Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden [Weisstein, 2002]). *Se dice que una ecuación diferencial de la forma*

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2.10)$$

es una ecuación lineal en la variable dependiente y .

Al dividir ambos lados de (2.10) por el coeficiente principal $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil conocida como la *forma estándar* de una ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

La solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden está dada por:

$$y = \frac{\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C}{e^{\int P(x)dx}}, \quad (2.11)$$

donde C es una constante arbitraria [Weisstein, 2002].

2.4.2. Ecuación Diferencial de Bernoulli

Definición 2.4.2 (Ecuación Diferencial de Bernoulli [Weisstein, 2002]). *La forma estándar de la ecuación de Bernoulli está dada por:*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (2.12)$$

A pesar de ser una ecuación diferencial no lineal, esta ecuación posee la siguiente solución general:

$$y = \begin{cases} \left[\frac{(1-n) \int e^{(1-n) \int P(x)dx} Q(x)dx + C_1}{e^{(1-n) \int P(x)dx}} \right]^{\frac{1}{1-n}} & \text{para } n \neq 1 \\ C_2 e^{\int [Q(x) - P(x)]dx} & \text{para } n = 1, \end{cases} \quad (2.13)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias [Weisstein, 2002].

2.5. Notación Asintótica

La notación asintótica se utiliza para analizar el comportamiento de funciones cuando estas tienden a un punto específico, comúnmente a infinito. Consideremos, por ejemplo, la siguiente expresión:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (2.14)$$

donde f y g son funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si g crece a una tasa mucho menor con la que lo hace f , en alguna vecindad de infinito f dominará a g y el límite anterior será infinito; lo que puede interpretarse como que el crecimiento de g es *despreciable* con respecto al de f o que g es *asintóticamente* menor que f . Si ocurre lo contrario, es decir, que g crece a una tasa mucho mayor que f , entonces en alguna vecindad de infinito, g dominará a f y el límite (2.14) será cero. No obstante, si f y g crecen a una tasa *similar* o idéntica, el límite (2.14) resultará un número real distinto de cero. Esta noción de funciones *asintóticamente mayores* da origen a la notación asintótica³, que se define a continuación.

Definición 2.5.1 (Notación de la gran O [Graham et al., 1989]). *Sean f y g dos funciones definidas en un subconjunto de los números reales. Se escribe*

$$f(x) \in O(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

si y sólo si existe un número real positivo κ y un número real x_0 tales que

$$|f(x)| \leq \kappa|g(x)| \text{ para todo } x \geq x_0.$$

Intuitivamente, la notación de la gran O establece una relación en la que f es *asintóticamente menor o igual* a g o, de manera equivalente, que f puede ser acotada por arriba por alguna constante positiva κ y $g(x)$.

Existen otros dos símbolos que forman parte de la familia de notaciones de Bachmann-Landau que resultarán relevantes en el desarrollo de este trabajo. El primero, denotado por Θ , está relacionado con la *similitud asintótica*, mientras que el segundo se relaciona con la *equivalencia asintótica*, denotada con el símbolo \sim .

Definición 2.5.2 (Notación de la gran Θ [Knuth, 1976]). *Sean f y g dos funciones definidas en un subconjunto de los números reales. Se escribe*

$$f(x) \in \Theta(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

si y sólo si existen números reales positivos κ_1 y κ_2 y un número real x_0 tales que

$$\kappa_1 g(x) \leq f(x) \leq \kappa_2 g(x) \text{ para todo } x \geq x_0.$$

La intuición detrás de la notación de la gran Θ es que se puede acotar asintóticamente a $f(x)$, tanto por arriba como por abajo, por $g(x)$ y dos constantes positivas κ_1 y κ_2 .

Definición 2.5.3 (En el orden de [Knuth, 1976]). *Sean f y g dos funciones definidas en un subconjunto de números reales. Se escribe*

$$f(x) \sim g(x) \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

si y sólo si existe un número real x_0 tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ para todo } x \geq x_0.$$

³Existen diversas familias de notaciones asintóticas, en este trabajo se hace uso de la familia de notaciones Bachmann-Landau [Graham et al., 1989].

Verbalmente se dice que f está en el orden de g .

La diferencia sustancial entre los símbolos Θ y \sim es que Θ denota *similitud asintótica* entre f y g , esto es, que ninguna domina significativamente a la otra. En cambio, \sim denota *equivalencia asintótica*, es decir que para algún $x_0 \geq x$, f y g son idénticas.

Ejemplo 2.5.1 Considere las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x \\ g(x) &= 3x^2 + x \\ h(x) &= -x^2 + x \\ i(x) &= x^2 - x. \end{aligned}$$

Las funciones f y g no son *asintóticamente equivalentes*, ya que el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$. Así también f y h , ya que el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} = -1$; sólo f e i tienen el mismo comportamiento asintótico con respecto a ∞ , ya que el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{i(x)} = 1$, esto es, $f(x) \sim i(x)$. No obstante, dado que f , g e i tienen comportamientos asintóticos *similares*, podemos afirmar que $f(x) \in \Theta(g(x))$, $f(x) \in \Theta(i(x))$ y que $g \in \Theta(i(x))$.

2.6. Método por Homogeneidad de Zubov

En 1958 V.I. Zubov propuso una forma general de funciones de Lyapunov para sistemas homogéneos de segundo orden [Zubov, 1958]. La idea detrás de este método, que denominaremos método por homogeneidad de Zubov (MHZ), es similar a la que se presentará en esta tesis, por lo que en esta sección se describirá con detalle para poder compararlo con el MRV.

El autor parte de la derivada temporal de una función candidata de Lyapunov V a lo largo de las trayectorias del sistema δ^r -homogéneo de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.15}$$

es decir

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = W \tag{2.16}$$

Para poder simplificar esta ecuación, Zubov comienza haciendo uso del siguiente teorema y definición:

Definición 2.6.1 (Campo Vectorial de Euler [Bacciotti y Rosier, 2005]). *El campo vectorial de Euler asociado con la familia de dilataciones δ_ε^r (Definición 2.3.1) está definido por*

$$e = \sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.17}$$

Teorema 2.6.1. [Bacciotti y Rosier, 2005] Sean δ_ε^r y e como en la Definición 2.6.1. Sea V una función de clase C^1 en \mathbb{R}^n , y sea $m \in \mathbb{R}$. Entonces V es δ^r -homogénea de grado m si, y sólo si

$$e \cdot V = mV. \quad (2.18)$$

Al reescribir (2.18) para $n = 2$ se obtiene

$$r_1 x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + r_2 x_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} = mV. \quad (2.19)$$

Las Ecuaciones (2.19) y (2.16) forman un sistema de ecuaciones diferenciales que puede representarse de la siguiente forma:

$$A \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ mV \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ r_1 x_1 & r_2 x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Asumiendo que la matriz A es invertible, la Ecuación (2.20) puede ser expresada como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_2 x_2 f_1 - r_1 x_1 f_2} \begin{bmatrix} r_2 x_2 & -f_2 \\ -r_1 x_1 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ mV \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

dando origen al sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{m f_2}{r_2 x_2 f_1 - r_1 x_1 f_2} V = \frac{r_2 x_2 W}{r_2 x_2 f_1 - r_1 x_1 f_2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{m f_1}{r_2 x_2 f_1 - r_1 x_1 f_2} V = -\frac{r_1 x_1 W}{r_2 x_2 f_1 - r_1 x_1 f_2}. \quad (2.23)$$

Como se puede apreciar, utilizando el vector generalizado de Euler, el autor logra desacoplar la ecuación diferencial parcial (2.16) en dos ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de primer orden que pueden resolverse como ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Para encontrar la función V , es posible proceder de dos formas: a) Resolver las dos EDO (2.22) y (2.23) e igualar las soluciones con el fin de encontrar la función que satisface ambas ecuaciones; b) resolver ya sea (2.22) o (2.23), sustituir la solución en la ecuación complementaria y resolverla. Utilizando la segunda forma se llega a la expresión general

$$V = e^{\int_{x_1^*}^{x_1} a_1(\nu, x_2) d\nu} \left[\int_{x_1^*}^{x_1} a_2(\nu, x_2) e^{-\int_{x_1^*}^{\nu} a_1(\eta, x_2) d\eta} d\nu + c(x_2) \right], \quad (2.24)$$

donde

$$a_1(x_1, x_2) = \frac{m f_2}{r_2 x_2 f_1 - r_1 x_1 f_2}$$

y

$$a_2(x_1, x_2) = \frac{-r_2 x_2 W}{r_2 x_2 f_1 - r_1 x_1 f_2}.$$

Dado que (2.24) debe satisfacer también (2.23), se tiene que

$$\frac{dc}{dx_2} = c_1(x_2)c + c_2(x_2),$$

cuya solución general es

$$c(x_2) = e^{\int_{x_2^*}^{x_2} c_1(\nu)d\nu} \left[\int_{x_2^*}^{x_2} e^{-\int_{x_2^*}^{\nu} c_1(\eta)d\eta} c_2(\nu)d\nu + \gamma \right].$$

La constante γ puede ser determinada de manera única al encontrar las condiciones iniciales, x_1^* y x_2^* tales que $V(0,0) = 0$.

Al apoyarse en el campo vectorial de Euler, este método impone dos restricciones principales: a) V debe ser una función continuamente diferenciable; b) la matriz A en (2.20) debe ser invertible. Asimismo, en [Zubov, 1958], sólo son considerados sistemas con grado de homogeneidad positivo.

3

Método por Reducción de Variable

En este capítulo se presenta el resultado principal de esta tesis. En la primera sección se describe una representación alternativa de funciones homogéneas, lo cual constituye la base para desarrollar el MRV. A continuación se describe la idea general detrás este método, que consiste en asociar la representación alternativa de funciones homogéneas con el método directo de Lyapunov. Posteriormente se establece formalmente el MRV en un teorema y se presenta una variante con ecuaciones de Bernoulli. El capítulo concluye con un procedimiento constructivo de obtención de FL basado en el método desarrollado.

3.1. Representación Alternativa de Funciones Homogéneas

Cualquier función en dos variables $H(x_1, x_2)$, δ^r -homogénea de grado m cumple, de acuerdo con la Definición 2.3.2, con

$$H(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2) = \varepsilon^m H(x_1, x_2), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (3.1)$$

donde r_1 y r_2 representan los pesos de homogeneidad. Si se escoge $\varepsilon = |x_1|^{-\frac{1}{r_1}}$, se tiene que

$$H\left(\frac{x_1}{|x_1|}, \frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right) = |x_1|^{-\frac{m}{r_1}} H(x_1, x_2), \quad \forall x_1 \neq 0. \quad (3.2)$$

Al reacomodar términos se obtiene

$$H(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} H\left(\text{sign}(x_1), \frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right), \quad \forall x_1 \neq 0,$$

que puede descomponerse en dos funciones de acuerdo con el signo de x_1 , esto es

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} H(-1, \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}), & x_1 < 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} H(+1, \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}), & x_1 > 0. \end{cases}$$

Dado que se forma una función a tramos donde el primer argumento es constante, podemos representar la función anterior utilizando la siguiente notación:

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^-(\frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}), & x_1 < 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+(\frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}), & x_1 > 0 \end{cases},$$

donde \mathcal{H}^- y \mathcal{H}^+ representan el tramo negativo y positivo del signo de x_1 , respectivamente.

Para el caso $x_1 = 0$, dado que la definición de homogeneidad exige que el factor de escalamiento ε sea estrictamente mayor que cero, utilizamos el límite de $H(x_1, x_2)$ cuando x_1 tiende a cero ya sea por la izquierda o por la derecha (si H es continua en $x_1 = 0$ estos límites coinciden), de tal manera que la función H puede expresarse de la siguiente manera:

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^-(\frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}), & x_1 < 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+(\frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}), & x_1 = 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+(\frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}}), & x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Al definir el cambio de variable

$$z = \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}},$$

la ecuación anterior se reduce a

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^-(z), & x_1 < 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+(z), & x_1 = 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+(z), & x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Así, es posible representar una función homogénea en dos variables utilizando dos funciones, $\mathcal{H}^+(z)$ y $\mathcal{H}^-(z)$, en la nueva variable $z = x_2/|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}$. En ocasiones, y cuando el contexto lo permita, se abreviarán estas funciones como $\mathcal{H}^\pm(z)$ y en consecuencia, la Ecuación (3.3) como

$$H(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(z). \quad (3.5)$$

Este procedimiento de representación alternativa de funciones homogéneas en dos variables puede resumirse con el siguiente lema:

Lema 3.1.1. Sea $H(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función δ^r -homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$ con pesos de homogeneidad $r = (r_1, r_2)$. Entonces es posible expresar H en términos de la variable z mediante la expresión

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^-\left(\frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right), & x_1 < 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+\left(\frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right), & x_1 = 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+\left(\frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right), & x_1 > 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^-(z) &= H(-1, z) \\ \mathcal{H}^+(z) &= H(1, z). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.1 Considere la función en \mathbb{R}^2

$$H(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Al multiplicar las coordenadas x_1 y x_2 de la función H por los valores ε^{r_1} y ε^{r_2} obtenemos

$$H(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2) = \varepsilon^{2r_1} x_1^2 + \varepsilon^{r_1 r_2} x_1 x_2 + \varepsilon^{2r_2} x_2^2.$$

Escogiendo $r = (r_1, r_2) = (1, 1)$, esto resulta

$$H(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2) = \varepsilon^2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \varepsilon^2 H(x_1, x_2),$$

por lo que podemos concluir que H es una función δ^r -homogénea de grado $m = 2$.

Dado que los pesos de homogeneidad son $(r_1, r_2) = (1, 1)$, la nueva variable z resulta

$$z = \frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}} = \frac{x_2}{|x_1|}$$

y es posible representar la función H , utilizando (3.5), como

$$H(x_1, x_2) = |x_1|^2 \mathcal{H}^\pm(z),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^-(z) &= H(-1, z) = 1 - z + z^2 \\ \mathcal{H}^+(z) &= H(1, z) = 1 + z + z^2. \end{aligned}$$

Del mismo modo en que una función homogénea en dos variables puede expresarse usando dos funciones en una sola variable, es posible ensamblar una función homogénea en dos variables a partir de dos funciones, homogéneas o no, en una sola variable. Esto último puede enunciarse con siguiente lema:

Lema 3.1.2. Para cualquier par de funciones $\mathcal{H}^+(z), \mathcal{H}^-(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ es posible formar una función $H(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, δ^r -homogénea de grado m a través de la relación

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^-\left(\frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right), & x_1 < 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+\left(\frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right), & x_1 = 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+\left(\frac{x_2}{|x_1|^{r_2/r_1}}\right), & x_1 > 0. \end{cases}$$

Los Lemas (3.1.1) y (3.1.2) establecen las direcciones para pasar del dominio de las coordenadas originales (x_1, x_2) al de la variable z y viceversa. Sin embargo, al utilizar el Lema 3.1.2 se debe ser más cuidadoso ya que una elección indiscriminada de las funciones \mathcal{H}^\pm puede producir propiedades *indeseables* en la función H , como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.2 Considere las funciones $\mathcal{H}^\pm(z)$ del Ejemplo 3.1.1. Al construir $H(x_1, x_2)$ escogiendo el grado de homogeneidad $m = 1$ en lugar de $m = 2$, se obtiene la función

$$H_2(x_1, x_2) = |x_1| + x_2 + \frac{x_2^2}{|x_1|},$$

que resulta discontinua sobre la recta $x_1 = 0$ (Figura 3.1). De manera similar, al proponer las funciones en z

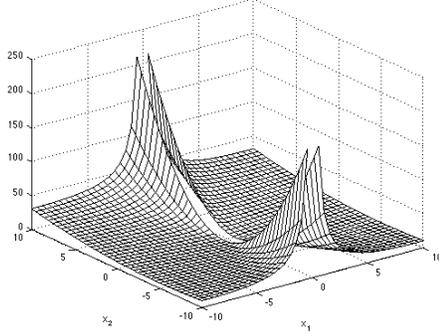
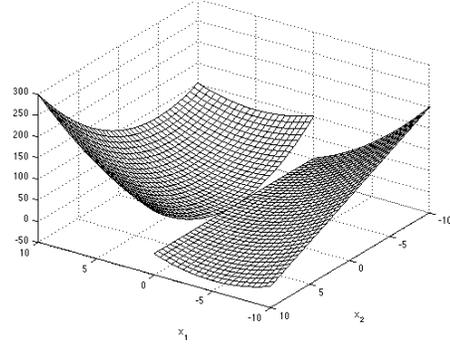
$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+(z) &= 1 + z + z^2 \\ \mathcal{H}^-(z) &= 1 - z \end{aligned}$$

y grado de homogeneidad $m = 2$ se obtiene la función en coordenadas originales

$$H_3(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, & x_1 \geq 0 \\ x_1^2 + x_1 x_2, & x_1 < 0 \end{cases}$$

que también resulta discontinua sobre la recta $x_1 = 0$, excluyendo al origen (Figura 3.2).

El ejemplo anterior indica, por un lado, que a pesar de que las funciones $\mathcal{H}^\pm(z)$ son continuas en z , la función en coordenadas originales podría no serlo; por otro, que la relación entre el grado de homogeneidad de la función H y el orden de crecimiento de las funciones $\mathcal{H}^\pm(z)$ intervienen en la continuidad de H sobre el eje x_1 . Así, estudiar las condiciones bajo las cuales las funciones $\mathcal{H}^\pm(z)$ componen una función $H(x_1, x_2)$ continua en $x_1 = 0$ resultan relevantes y son estudiadas a continuación.

Figura 3.1: $H_2(x_1, x_2)$ Figura 3.2: $H_3(x_1, x_2)$

3.1.1. Continuidad Sobre el Eje x_1

Para que la función $H(x_1, x_2)$ sea continua a lo largo del eje x_1 , los límites $\lim_{x_1 \rightarrow 0^-} H(x_1, x_2)$ y $\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} H(x_1, x_2)$ deben existir y ser iguales. Al escribir H en términos de z , esto se traduce en

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+(z) = \lim_{x_1 \rightarrow 0^-} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^-(z). \quad (3.6)$$

Para expresar la ecuación anterior usando límites en la variable z , partimos de la definición de ésta:

$$z = \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{r_2}{r_1}}},$$

de donde se obtiene que

$$|x_1|^{\frac{m}{r_1}} = \frac{x_2^{\frac{m}{r_2}}}{z^{\frac{m}{r_2}}}.$$

También de la definición de z se observa que cuando x_1 tiende a 0^+ , z tiende a $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del valor de x_2 . Del mismo modo, cuando x_1 tiende a 0^- , z tiende a $+\infty$ o $-\infty$, de tal forma que al reescribir los límites en términos de z , la Ecuación (3.6) encierra dos igualdades entre cuatro límites, esto es:

$$\begin{aligned} x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} &= x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \\ x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} &= x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Eliminando el término x_2^{m/r_2} , las igualdades se reducen a

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

de donde es claro concluir que para que ambas igualdades se satisfagan, $\mathcal{H}^+(z)/z^{\frac{m}{r_2}}$ y $\mathcal{H}^-(z)/z^{\frac{m}{r_2}}$ deben ser *asintóticamente equivalentes* tanto para $z \rightarrow +\infty$ como para $z \rightarrow -\infty$. Tal como se definió en la Sección 2.5 esto es:

$$\frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \sim \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}.$$

Del análisis anterior es posible establecer las condiciones sobre $\mathcal{H}^\pm(z)$ y m para que $H(x_1, x_2)$ resulte continua.

Lema 3.1.3. Sean $\mathcal{H}^\pm(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en \mathbb{R} . Sean los números $m \in \mathbb{R}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$. Entonces la función

$$H(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(z),$$

donde $z = x_2/|x_1|^{r_2/r_1}$, es continua en \mathbb{R}^2 si y sólo si

$$\frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \sim \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \quad (3.9)$$

tanto para $z \rightarrow +\infty$ como para $z \rightarrow -\infty$.

Así como resulta relevante estudiar las condiciones sobre $\mathcal{H}^\pm(z)$ para obtener $H(x_1, x_2)$ continua, también lo es estudiar las condiciones para obtener $H(x_1, x_2)$ positiva definida y diferenciable sobre $x_1 = 0$. Estos aspectos son analizados en las siguientes subsecciones.

3.1.2. Positividad Definida

Para que H sea una función positiva, resulta claro de la Ecuación (3.5) que

$$\mathcal{H}^\pm(z) > 0 \Rightarrow H(x_1, x_2) > 0. \quad (3.10)$$

Para que H sea una función positiva definida se requiere un análisis más cuidadoso. Se comienza por asumir que $\mathcal{H}^\pm(z) > 0$. Al considerar el caso en que $x_2 = 0$, de (3.5) resulta que

$$H(x_1, 0) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(0), \quad (3.11)$$

dado que $\mathcal{H}^\pm(0) > 0$, $H(x_1, 0)$ es una función pd en x_1 . Considerando a continuación el caso cuando $x_1 = 0$, se forman los cuatro límites analizados en (3.7):

$$L_{-\infty}^- = x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}, \quad L_{-\infty}^+ = x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \quad (3.12)$$

$$L_{+\infty}^- = x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}, \quad L_{+\infty}^+ = x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}, \quad (3.13)$$

de manera que la Ecuación (3.11) puede abreviarse como

$$H(0, x_2) = x_2^{\frac{m}{r_2}} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{\mathcal{H}^\pm(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}.$$

Si $z^{\frac{m}{x_2}}$ domina significativamente a $\mathcal{H}^\pm(z)$, entonces $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{\mathcal{H}^\pm(z)}{z^{m/r_2}} = 0$ y $H(0, x_2) = 0$ sin importar el valor x_2 . Sin embargo, si $\mathcal{H}^\pm(z) \in \Theta(z^{\frac{m}{r_2}})$, la Ecuación (3.1.2) resulta

$$H(0, x_2) = x_2^{\frac{m}{r_2}} L_{\pm\infty}^\pm, \quad L_{\pm\infty}^\pm \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y si $m \geq r_2$, dado que $\mathcal{H}^\pm(z) > 0$, la ecuación anterior será positiva en todos lados excepto en $x_2 = 0$, es decir una ecuación positiva definida en x_2 . En este caso y en contraste con el análisis de continuidad, no es necesaria la igualdad entre ninguno de los cuatro límites $L_{\pm\infty}^\pm$, sólo que éstos existan y sean positivos.

A partir de estas consideraciones es posible enunciar las condiciones sobre $\mathcal{H}^\pm(z)$ que permiten que $H(x_1, x_2)$ sea pd:

Lema 3.1.4. Sean $\mathcal{H}^\pm(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en \mathbb{R} . Sean los números $m \in \mathbb{R}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $m \geq r_2$. Entonces la función

$$H(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(z),$$

donde $z = x_2/|x_1|^{r_2/r_1}$, es positiva definida si y sólo si

- $\mathcal{H}^\pm(z) > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{H}^\pm(z) \in \Theta(z^{\frac{m}{r_2}})$.

Resulta importante notar que el análisis de definitividad de signo de $H(x_1, x_2)$, una función en dos variables, se reduce al análisis de definitividad de signo de $\mathcal{H}^\pm(z)$, es decir, dos funciones en una sola variable.

3.1.3. Diferenciabilidad

Al calcular las derivadas parciales de (3.5) usando la regla de la cadena, se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = |x_1|^{\frac{m-r_1}{r_1}} \left(-\frac{r_2}{r_1} z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^\pm(z) + \frac{m}{r_1} \mathcal{H}^\pm(z) \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = |x_1|^{\frac{m-r_2}{r_1}} \frac{d}{dz} \mathcal{H}^\pm(z) \quad (3.15)$$

de donde puede concluirse que la existencia de $\frac{d\mathcal{H}^\pm(z)}{dz}$ implica la diferenciabilidad de $H(x)$ para $x_1 \neq 0$. Para que $H(x)$ sea diferenciable en $x_1 = 0$ debe cumplirse que

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \frac{\partial H}{\partial x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow 0^-} \frac{\partial H}{\partial x_1} \quad (3.16)$$

Transformando esta condición a la variable z se obtiene

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} |x_1|^{\frac{m}{r_1}-1} \left(-\frac{r_2}{r_1} z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^+(z) + \frac{m}{r_1} \mathcal{H}^+(z) \right) = \lim_{x_1 \rightarrow 0^-} |x_1|^{\frac{m}{r_1}-1} \left(-\frac{r_2}{r_1} z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^-(z) + \frac{m}{r_1} \mathcal{H}^-(z) \right),$$

que nuevamente puede enunciarse como una restricción de orden conforme $z \rightarrow \pm\infty$ de la forma

$$\frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^+(z) - \mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}} \sim \frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^-(z) - \mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}} \quad (3.17)$$

Así, es posible enunciar con el siguiente lema las condiciones sobre $\mathcal{H}^\pm(z)$ para que $H(x_1, x_2)$ sea diferenciable en todo el dominio

Lema 3.1.5. Sean $\mathcal{H}^\pm(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en \mathbb{R} . Sean los números $m \in \mathbb{R}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$. Entonces la función

$$H(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(z),$$

donde $z = x_2/|x_1|^{r_2/r_1}$, es continuamente diferenciable en \mathbb{R}^2 si y sólo si

- $\mathcal{H}^\pm(z) \in C^1$
- $\frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^+(z) - \mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}} \sim \frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^-(z) - \mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}}$

tanto para $z \rightarrow +\infty$ como para $z \rightarrow -\infty$.

La representación alternativa de funciones homogéneas puede extenderse a expresiones diferenciales en donde las funciones involucradas sean homogéneas. Es aquí donde la representación alternativa exhibe su mayor virtud ya que, como se verá en la siguiente subsección, permite representar la expresión diferencial con una variable menos.

3.1.4. Reducción de Variable en Expresiones Diferenciales

Considere la siguiente expresión diferencial parcial en \mathbb{R}^2 :

$$\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = M(x_1, x_2), \quad (3.18)$$

donde la función H es δ^r -homogénea de grado m y las funciones f_1 y f_2 son δ^r -homogéneas de grado $k + r_1$ y $k + r_2$ respectivamente. En consecuencia, M resulta una función δ^r -homogénea de grado $m + k$ y la Ecuación (3.18) puede expresarse en la variable z como

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(|x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(z) \right) |x_1|^{\frac{k+r_1}{r_1}} \phi_1^\pm(z) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(|x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(z) \right) |x_1|^{\frac{k+r_2}{r_1}} \phi_2^\pm(z) = |x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \mathcal{M}^\pm(z)$$

Al sustituir las derivadas parciales de H [Ecuaciones (3.14) y (3.15)] en la ecuación anterior obtenemos:

$$|x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \left(-\frac{r_2}{r_1} z \operatorname{sign}(x_1) \phi_1^\pm + \phi_2^\pm \right) \frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm + |x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \frac{m}{r_1} \operatorname{sign}(x_1) \phi_1^\pm \mathcal{V}^\pm = |x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \mathcal{M}^\pm(z).$$

Simplificando y separando esta última ecuación en la parte positiva y negativa de la función $\operatorname{sign}(x_1)$, se obtienen las siguientes expresiones diferenciales, ordinarias, lineales

y de primer orden

$$\frac{d}{dz} \mathcal{H}^+(z) + \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^+}{-\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^+ + \phi_2^+} \mathcal{H}^+(z) = \frac{\mathcal{M}^+(z)}{-\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^+ + \phi_2^+} \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dz} \mathcal{H}^-(z) - \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^-}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^- + \phi_2^-} \mathcal{H}^-(z) = \frac{\mathcal{M}^-(z)}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^- + \phi_2^-}. \quad (3.20)$$

De esta forma, utilizando la homogeneidad de las funciones H, f_1 y f_2 y asumiendo que H es la función incógnita, se logra transformar la EDP (3.18) (lineal en H) en dos EDO lineales de primer orden. Claramente, (3.18) tiene la forma de la derivada de una función escalar H a lo largo de las trayectorias de un sistema de segundo orden, por lo que esta descomposición resulta central en el desarrollo del MRV y se enuncia a continuación como un lema.

Lema 3.1.6. Sean $H, M, f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones δ^r -homogéneas de grado $m, m+k, k+r_1$ y $k+r_2$, respectivamente; donde $m, k \in \mathbb{R}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ y H es continuamente diferenciable al menos una vez. Entonces la expresión diferencial

$$\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = M(x_1, x_2)$$

puede representarse en la variable $z = x_2/|x_1|^{r_2/r_1}$ como

$$\frac{d}{dz} \mathcal{H}^\pm(z) \pm \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^\pm}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm} \mathcal{H}^\pm(z) = \mathcal{M}^\pm(z),$$

donde

$$\phi_1^\pm(z) = \frac{f_1(x_1, x_2)}{|x_1|^{\frac{k+r_1}{r_1}}}, \quad \phi_2^\pm(z) = \frac{f_2(x_1, x_2)}{|x_1|^{\frac{k+r_2}{r_2}}}. \quad .$$

3.1.5. Resumen de Propiedades en la Variable z

Con el fin de sintetizar las condiciones en z que producen determinadas propiedades en x_1 y x_2 se presenta el siguiente cuadro sinóptico:

$H(x_1, x_2) = x_1 ^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^\pm(z)$		
Dominio z	Dominio x_1, x_2	Lemas
Equivalencia		
$\mathcal{H}^+(z) = H(+1, z)$	$H(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 ^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^-\left(\frac{x_2}{ x_1 ^{\frac{r_2}{r_1}}}\right), & x_1 < 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} x_1 ^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+\left(\frac{x_2}{ x_1 ^{\frac{r_2}{r_1}}}\right), & x_1 = 0 \\ x_1 ^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{H}^+\left(\frac{x_2}{ x_1 ^{\frac{r_2}{r_1}}}\right), & x_1 > 0 \end{cases}$	3.1.1
$\mathcal{H}^-(z) = H(-1, z)$		3.1.2
Continuidad en $x_1 = 0$		
$\frac{\mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \sim \frac{\mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}$	$\lim_{x_1 \rightarrow 0} H(x_1, x_2) = H(0, x_2)$	3.1.3
Positividad Definida		
$\mathcal{H}^\pm(z) > 0,$ $\mathcal{H}^\pm(z) \in \Theta(z^{\frac{m}{r_2}})$	$H(0, 0) = 0,$ $H(x_1, x_2) > 0$ en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$	3.1.4
Diferenciabilidad		
$\mathcal{H}^\pm(z) \in C^1,$ $\frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^\pm(z) - \mathcal{H}^\pm(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}}$ \sim $\frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^\mp(z) - \mathcal{H}^\mp(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}}$	$H(x_1, x_2) \in C^1$	3.1.5
Reducción de Variable en Expresiones Diferenciales		
$\frac{d}{dz} \mathcal{H}^\pm \pm \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^\pm}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm} \mathcal{H}^\pm$ $=$ $\frac{\mathcal{M}^\pm}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm}$	$\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = M(x_1, x_2)$	3.1.6

3.2. Descripción del Método por Reducción de Variable

Considere el sistema δ^r -homogéneo de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.21}$$

con grado de homogeneidad $k \in \mathbb{R}$ y con un punto de equilibrio en el origen. Considere las funciones homogéneas $V(x_1, x_2)$ y $W(x_1, x_2)$ tales que, de acuerdo al procedimiento descrito en la Sección 3.1, pueden expresarse como

$$V(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^\pm(z) \tag{3.22}$$

$$W(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m+k}{r_1}} \mathcal{W}^\pm(z), \tag{3.23}$$

donde $m \in \mathbb{R}^+$ representa el grado de homogeneidad de V .

Dado que las funciones f_1 y f_2 son homogéneas por hipótesis, también es posible expresarlas en términos de la variable z como sigue:

$$f_1(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{r_1+k}{r_1}} \phi_1^\pm(z) \quad (3.24)$$

$$f_2(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{r_2+k}{r_1}} \phi_2^\pm(z). \quad (3.25)$$

Así, la derivada de V a lo largo de las trayectorias de (3.21) está dada por

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = W$$

y dado que V , W , f_1 y f_2 son funciones homogéneas, es posible utilizar el Lema 3.1.6 para transformar la ecuación anterior en la variable z , es decir,

$$\frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm(z) \pm \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^\pm}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm} \mathcal{V}^\pm(z) = \mathcal{W}^\pm(z).$$

Las ecuaciones anteriores, al ser ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, poseen las soluciones generales

$$\mathcal{V}^+(z) = e^{-\int \alpha^+(z) dz} \left[\int e^{\int \alpha^+(z) dz} \beta^+(z) dz + C \right] \quad (3.26)$$

$$\mathcal{V}^-(z) = e^{-\int \alpha^-(z) dz} \left[\int e^{\int \alpha^-(z) dz} \beta^-(z) dz + D \right], \quad (3.27)$$

donde

$$\alpha^+(z) = \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^+(z)}{-\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^+(z) + \phi_2^+(z)}, \quad \alpha^-(z) = \frac{-\frac{m}{r_1} \phi_1^-(z)}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^-(z) - \phi_2^-(z)},$$

$$\beta^+(z) = \frac{\mathcal{W}^+(z)}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^+(z) - \phi_2^+(z)}, \quad \beta^-(z) = \frac{\mathcal{W}^-(z)}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^-(z) + \phi_2^-(z)},$$

y C, D son constantes arbitrarias de integración; por lo que es posible proponer un valor de m y funciones $\mathcal{W}^\pm(z)$ para obtener $\mathcal{V}^\pm(z)$. Si se proponen $\mathcal{W}^\pm(z)$ negativas tales que cumplan con las condiciones de negatividad definida (3.1.4) y se obtienen $\mathcal{V}^\pm(z)$ positivas tales que cumplan con las condiciones de continuidad (3.1.3), positividad definida (3.1.4) y diferenciabilidad (3.1.5), entonces es posible concluir que el origen de (3.21) es estable.

Para completar el procedimiento de encontrar la FL V , es necesario transformar (3.26) y (3.27) a las coordenadas originales (x_1, x_2) , es decir

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^-(z), & x_1 < 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^+(z), & x_1 = 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^+(z), & x_1 > 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

y encontrar los valores C y D que permiten que V sea continua a lo largo del eje x_1 . La función V resultante representa la función Lyapunov homogénea y continua cuya derivada a lo largo de las trayectorias de sistema (2.1) es W . Nótese que se obtuvo la función V proponiendo un número m y funciones negativas $\mathcal{W}^\pm(z)$ en una sola variable y no necesariamente homogéneas, es decir que a través de la homogeneidad se ha reducido el problema original de encontrar la función $V(x_1, x_2)$ a dos problemas monovariabes de encontrar las funciones $\mathcal{V}^\pm(z)$.

También es importante notar que el análisis de definitividad de signo también se reduce, de un análisis en dos variables, a uno monovariable, ya que como se mencionó en la Sección 3.1.2, el signo de $\mathcal{V}^\pm(z)$ implica directamente el signo de $V(x_1, x_2)$.

Dado que (3.19) y (3.20) son ecuaciones diferenciales ordinarias, si no es posible encontrar soluciones generales explícitas, es posible utilizar otros métodos de resolución como el método de series de potencias o utilizar ecuaciones de Bernoulli (como se mostrará más adelante).

Finalmente, en (3.2) se pudo haber escogido $\varepsilon = |x_2|^{-\frac{1}{r_2}}$, que conduce al cambio de variable $z = x_1/|x_2|^{r_1/r_2}$ y ecuaciones análogas en el desarrollo del método. Dependiendo de los pesos de homogeneidad del sistema, esta segunda elección permite obtener funciones más simples en la variable z .

Hasta aquí se ha presentado una noción clara del método por reducción de variable, sin embargo es necesario establecerlo formalmente. Con este fin, se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Considere el sistema de segundo orden continuo*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{3.29}$$

con un punto de equilibrio en el origen y donde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ constituyen un campo vectorial δ^r -homogéneo de grado k y cuya representación en la variable $z = x_2/|x_1|^{r_2/r_1}$ está dada por

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= |x_1|^{\frac{r_1+k}{r_1}} \phi_1^\pm(z) \\ f_2(x_1, x_2) &= |x_1|^{\frac{r_2+k}{r_1}} \phi_2^\pm(z).\end{aligned}$$

Entonces, el origen de (3.29) es asintóticamente estable si y sólo si existen funciones $\mathcal{V}^\pm(z), \mathcal{W}^\pm(z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para alguna $m \in \mathbb{R}^+$ satisfagan:

1.
 - $\mathcal{V}^\pm(z) > 0$ en \mathbb{R}
 - $\frac{\mathcal{V}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} \sim \frac{\mathcal{V}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}$
 - $\frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{V}^+(z) - \mathcal{V}^+(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}} \sim \frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{V}^-(z) - \mathcal{V}^-(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}}$
2.
 - $\mathcal{W}^\pm(z) < 0$ en \mathbb{R}

$$\begin{aligned} & \blacksquare \mathcal{W}^\pm(z) \in \Theta\left(z^{\frac{m+k}{r_2}}\right) \\ 3. \quad & \frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm(z) \pm \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^\pm}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm} \mathcal{V}^\pm(z) = \frac{\mathcal{W}^\pm(z)}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm}. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{W}^\pm(z)$ sólo satisface $\mathcal{W}^\pm(z) \leq 0$ en \mathbb{R} , entonces el origen de (3.29) es estable. En ambos casos,

$$V(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^\pm(z)$$

es una función de Lyapunov continuamente diferenciable y δ^r -homogénea de grado m del sistema (3.29).

Demostración

Implicación directa Dado que \mathcal{V}^\pm es una función positiva en z y satisface (3.1.3) y (3.1.4) para alguna $m \in \mathbb{R}^+$ es posible, de acuerdo con el Lema 3.1.2, construir la función continua y positiva definida

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^-(z), & x_1 < 0 \\ \lim_{x_1 \rightarrow 0} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^\pm(z), & x_1 = 0 \\ |x_1|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^+(z), & x_1 > 0 \end{cases}$$

con $z = x_2/|x_1|^{r_2/r_1}$, tal que sus derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = |x_1|^{\frac{m-r_1}{r_1}} \left(-\frac{r_2}{r_1} z \frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm(z) + \frac{m}{r_1} \mathcal{V}^\pm(z) \right) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = |x_1|^{\frac{m-r_2}{r_1}} \frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm(z). \quad (3.31)$$

Dado que \mathcal{V}^\pm y \mathcal{W}^\pm están relacionadas mediante

$$\frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm(z) \pm \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^\pm}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm} \mathcal{V}^\pm(z) = \frac{\mathcal{W}^\pm(z)}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm},$$

por el Lema 3.1.6 se tiene que V y W satisfacen

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = W^\pm. \quad (3.32)$$

Dado que \mathcal{W}^\pm cumple con las condiciones (3.1.4), se puede afirmar que W es una función negativa definida y por tanto $\dot{V} < 0$ en todo el dominio excepto en el origen. Con esto se satisfacen las condiciones del teorema directo de Lyapunov y podemos concluir que el sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. Si \mathcal{W}^\pm sólo cumple con $\mathcal{W}^\pm \leq 0$ en \mathbb{R} , entonces W resulta negativa semidefinida y sólo es posible afirmar que el origen de (3.29) es estable.

Implicación recíproca De acuerdo con el Teorema 2.3.1, dado que el origen del sistema (3.29) es asintóticamente estable, para cualquier $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ y cualquier $m > p \cdot \max\{r_1, r_2\}$, existe una función de Lyapunov estricta V , δ^r -homogénea de grado m , de clase C^p y su derivada W a lo largo de las trayectorias es negativa definida y δ^r -homogénea de grado $m+k$. Dado que esta función V es δ^r -homogénea, puede expresarse usando el Lema 3.1.1, como

$$V = |x|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{V}^\pm(z).$$

De los Lemas 3.1.5 y 3.1.4 sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\pm(z) &> 0 \text{ en } \mathbb{R}, \\ \frac{\mathcal{V}^+(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}} &\sim \frac{\mathcal{V}^-(z)}{z^{\frac{m}{r_2}}}, \end{aligned}$$

ya que V es continua y positiva definida. Del Lema 3.1.5 sabemos que

$$\frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^+(z) - \mathcal{H}^+(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}} \sim \frac{z \frac{d}{dz} \mathcal{H}^-(z) - \mathcal{H}^-(z)}{z^{\frac{m-r_1}{r_2}}}$$

ya que V es una función de clase C^p . Del mismo modo $\mathcal{W}^\pm(z)$ es δ^r -homogénea de grado $m+k$, por lo que puede expresarse como

$$W = |x|^{\frac{m}{r_1}} \mathcal{W}^\pm(z),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\pm(z) &< 0 \text{ en } \mathbb{R}, \\ \mathcal{W}^\pm(z) &\in \Theta(z^{\frac{m+k}{r_2}}), \end{aligned}$$

ya que W es negativa definida. Finalmente, dado que W es la derivada temporal de V a lo largo de las trayectorias de 3.29, se tiene que

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = W$$

y por el Lema 3.1.6, $\mathcal{V}^\pm(z)$ y $\mathcal{W}^\pm(z)$ satisfacen

$$\frac{d}{dz} \mathcal{V}^\pm(z) \pm \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^\pm}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm} \mathcal{V}^\pm(z) = \frac{\mathcal{W}^\pm(z)}{\mp \frac{r_2}{r_1} z \phi_1^\pm + \phi_2^\pm}$$

□

Como puede apreciarse, el Teorema 3.2.1 puede enunciarse como una doble implicación, ya que se apoya en el método directo de Lyapunov para su primera implicación y en el Teorema 2.3.1 para la implicación recíproca. Realizar esto para inclusiones diferenciales requiere un análisis más cuidadoso y excede el alcance de este trabajo. Sin embargo, como se verá en el siguiente capítulo, es posible aplicar el MRV para obtener FL de sistemas discontinuos.

3.3. Variación de MRV con Ecuaciones de Bernoulli

Una forma alterna en la que se puede enunciar el MRV es proponiendo $W(x_1, x_2)$ como una potencia de $V(x_1, x_2)$, es decir

$$W = -V^p$$

El valor del exponente p no es libre, ya que de acuerdo con el Teorema 2.3.1, el grado de homogeneidad de W debe ser $m + k$. Al transformar esta nueva W en la variable z se tiene

$$-V^{m+k} = -|x_1|^{\frac{m}{r_1}} (\mathcal{V}^\pm(z))^{\frac{m+k}{m}}$$

y al sustituir esta expresión en la Ecuación (3.2) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli

$$\frac{d}{dz} \mathcal{V}^+ + \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^+}{-\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^+ + \phi_2^+} \mathcal{V}^+ = \frac{-(\mathcal{V}^+)^{\frac{m+k}{m}}}{-\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^+ + \phi_2^+} \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{dz} \mathcal{V}^- - \frac{\frac{m}{r_1} \phi_1^-}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^- + \phi_2^-} \mathcal{V}^- = \frac{-(\mathcal{V}^-)^{\frac{m+k}{m}}}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^- + \phi_2^-}, \quad (3.34)$$

que, aunque no son ecuaciones diferenciales lineales, poseen las siguientes soluciones generales (de acuerdo a lo presentado en la Sección 2.4):

$$\mathcal{V}^+ = \left[\frac{\frac{k}{m} \int \frac{e^{-\frac{k}{m} \int \alpha^+(z) dz}}{-\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^+ + \phi_2^+} dz + C}{e^{-\frac{k}{m} \int \alpha^+(z) dz}} \right]^{-\frac{m}{k}}, \quad k \neq 0 \quad (3.35)$$

$$\mathcal{V}^- = \left[\frac{\frac{k}{m} \int \frac{e^{\frac{k}{m} \int \alpha^-(z) dz}}{\frac{r_2}{r_1} z \phi_1^- + \phi_2^-} dz + D}{e^{\frac{k}{m} \int \alpha^-(z) dz}} \right]^{-\frac{m}{k}}, \quad k \neq 0 \quad (3.36)$$

Al escoger esta variante, se sacrifica el grado de libertad que otorga el proponer $\mathcal{W}^\pm(z)$. A cambio, el usar esta aproximación puede, al regresar a las coordenadas originales, definir la derivada temporal de la FL \dot{V} en términos de una potencia de V , lo cual resulta útil para determinar con exactitud el tiempo de convergencia al origen. Más aún, cuando sea muy complicado proponer \mathcal{W}^\pm tal que \mathcal{V}^\pm tenga una forma explícita, esta variante del MRV podría resultar exitosa.

Una vez cubierto el desarrollo del MRV, es posible enunciarlo de manera constructiva.

3.4. Procedimiento Constructivo

Considere nuevamente el sistema homogéneo de segundo orden (3.21) con un punto de equilibrio en el origen. Para encontrar una función de Lyapunov que demuestre la estabilidad del origen síganse los siguientes pasos:

1. Fije un grado de homogeneidad $m \in \mathbb{R}^+$ para la función de Lyapunov a obtener¹.
2. Para obtener una FL, proponga una función $\mathcal{W}^\pm(z) \leq 0$. Para obtener una FLE, proponga una función negativa $\mathcal{W}^\pm(z)$ tal que $\frac{\mathcal{W}^\pm(z)}{z^{(m+k)/r_2}} \in \Theta(\frac{\mathcal{W}^\pm(z)}{z^{(m+k)/r_2}})$.
3. Exprese las funciones $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ del sistema (2.1) en términos de la variable z siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 3.1.
4. Obtenga las funciones $\mathcal{V}^\pm(z)$ usando las Ecuaciones (3.26)-(3.27). Si no es posible obtener una solución general explícita usando estas ecuaciones, utilice la solución general de las ecuaciones de Bernoulli (3.35)-(3.36). Si aún no es posible encontrar una solución explícita, utilice algún otro método de solución de EDO para las Ecuaciones (3.34), por ejemplo, series de potencias. Si todo lo anterior falla, fije una m distinta y/o una función $\mathcal{W}^\pm(z)$ diferente.
5. Verifique que $\mathcal{V}^\pm(z)$ cumple las condiciones de continuidad (3.1.3), positividad definida (3.1.4) y diferenciabilidad (3.1.5).
6. Transforme a las coordenadas originales (x_1, x_2) utilizando el Lema (3.1.2).
7. Encuentre las condiciones bajo las cuales V es continua sobre el eje x_1 .

¹Una buena conjetura puede extraerse del Teorema 2.3.1, es decir, para obtener una FL de clase C^p , $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$.

4

Ejemplos

En este capítulo se presentan cuatro ejemplos en los que se obtienen FL para sistemas homogéneos de segundo orden; dos de los cuales son continuos y dos son discontinuos. A través de estos ejemplos se ilustran las principales características del MRV.

4.1. Ejemplo Comparativo

En este ejemplo, se propone un sistema sencillo de segundo orden y se aplica tanto el MHZ como el MRV con fines ilustrativos y comparativos.

Considere el sistema homogéneo de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^5,\end{aligned}\tag{4.1}$$

con grado de homogeneidad $k = 2$, pesos de homogeneidad $(r_1, r_2) = (1, 3)$, y con un punto de equilibrio en el origen. Considere también la función negativa semidefinida $W(x_1, x_2) = -x^8$, con grado de homogeneidad $n = 8$.

4.1.1. Con el Método por Homogeneidad de Zubov

Al utilizar MHZ, específicamente al tratar de sustituir f_1 , f_2 y W en (2.24), aparece el término

$$\int_{x_1^*}^{x_1} \frac{-3x_2\nu^8}{(2x_2^2 - 3\nu^3x_2 + \nu^6)^{\frac{4}{3}}} e^{\frac{-2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\nu^3 - 3x_2}{\sqrt{3}x_2}\right)} d\nu,$$

el cual no posee representación explícita y V debe permanecer como una expresión integral, que no es útil para analizar la estabilidad del sistema.

4.1.2. Con el Método por Reducción de Variable

Al aplicar el MRV, primero fijamos $m = 6$ como grado de homogeneidad para la FL V a obtener; de manera que al expresarla en la variable z , se tiene

$$V(x_1, x_2) = |x_1|^6 \mathcal{V}^\pm(z),$$

con $z = \frac{x_2}{|x_1|^3}$. A continuación, se propone la función negativa $\mathcal{W}^\pm(z) = -1$ y se transforman las funciones f_1 y f_2 en (4.1) a la variable z :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= |x_1|^3 (\text{sign}(x_1) - z) \\ f_2(x_1, x_2) &= -|x_1|^5 \text{sign}(x_1), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \phi_1^\pm(z) &= \text{sign}(x_1) - z \\ \phi_2^\pm(z) &= -\text{sign}(x_1). \end{aligned}$$

Sustituyendo ϕ_1^\pm , ϕ_2^\pm y \mathcal{W}^\pm en (3.26), (3.27) da como resultado las siguientes soluciones explícitas:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^+(z) &= \frac{1}{6} + \frac{z^2}{2} - Ce^{-2\sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}(2z-1))}(-3z^2 + 3z - 1) \\ \mathcal{V}^-(z) &= \frac{1}{6} + \frac{z^2}{2} + De^{2\sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}(2z+1))}(3z^2 + 3z - 1). \end{aligned}$$

Ambas funciones son positivas para $C, D \geq 0$. Nótese que, dado que se cumplen las condiciones (3.1.5) y (3.1.4) para $\mathcal{V}^\pm(z)$ es posible concluir la estabilidad del origen de (4.1). Al transformar a las coordenadas originales se tiene

$$V = \begin{cases} \frac{x_1^6}{6} + \frac{x_2^2}{2} + \omega_1(x_1, x_2) \\ \frac{x_1^6}{6} + \frac{x_2^2}{2} + \omega_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (4.2)$$

donde

$$\omega_1 = -Ce^{-2\sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}(2\frac{x_2}{|x_1|}-1))}(-3x_2^2 + 3|x_1|^3x_2 - x_1^6)$$

y

$$\omega_2 = De^{-2\sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}(2\frac{x_2}{|x_1|}+1))}(3x_2^2 + 3|x_1|^3x_2 - x_1^6).$$

Para encontrar los valores de C y D que hacen a la función V continua a lo largo del eje x_1 , se igualan ambos tramos de (4.2). Para este ejemplo, V es continua sólo para $C = D = 0$, de manera que la FL V , que muestra la estabilidad del origen de (4.1), resulta

$$V = \frac{x_1^6}{6} + \frac{x_2^2}{2}.$$

4.2. FL para un Controlador Homogéneo

Para este ejemplo se construirá una FL para el doble integrador:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ u &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde $[\cdot] = |\cdot| \text{sign}(\cdot)$.

El sistema en lazo cerrado es δ^r -homogéneo de grado $k = -1$ con $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$. Al transformarlo a la variable

$$z = \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{2}{3}}}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= |x_1|^{\frac{2}{3}} z \\ f_2(x_1, x_2) &= |x_1|^{\frac{1}{3}} \left(-k_1 \text{sign}(x_1) - k_2 |z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) \right),\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\phi_1^\pm(z) &= z \\ \phi_2^\pm(z) &= -k_1 \text{sign}(x_1) - k_2 |z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z).\end{aligned}$$

Al escoger un grado de homogeneidad $m = 5$ y sustituir en la Ecuaciones (3.19) y (3.20) del MRV se forman las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\left(-\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - k_1 \right) \frac{d}{dz} \mathcal{V}^+(z) + \frac{5}{3}z \mathcal{V}^+(z) = \mathcal{W}^+(z)\tag{4.4}$$

$$\left(\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) + k_1 \right) \frac{d}{dz} \mathcal{V}^-(z) - \frac{5}{3}z \mathcal{V}^-(z) = \mathcal{W}^-(z)\tag{4.5}$$

Cuyas soluciones generales están dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^+(z) &= e^{-\int \alpha^+(z) dz} \left[\int e^{\int \alpha^+(z) dz} \beta^+(z) dz + C \right] \\ \mathcal{V}^-(z) &= e^{-\int \alpha^-(z) dz} \left[\int e^{\int \alpha^-(z) dz} \beta^-(z) dz + D \right],\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\alpha^+(z) &= \frac{\frac{5}{3}z}{-\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - k_1}, \quad \alpha^-(z) = \frac{-\frac{5}{3}z}{\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) + k_1} \\ \beta^+(z) &= \frac{\mathcal{W}^+(z)}{-\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - k_1}, \quad \beta^-(z) = \frac{\mathcal{W}^-(z)}{\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) + k_1}.\end{aligned}$$

En este caso, los polinomios $-\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - k_1$ y $\frac{2}{3}z^2 - k_2|z|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) + k_1$ contenidos en los términos $\alpha^+(z)$ y $\alpha^-(z)$ tienen raíces complejas, lo que imposibilita la obtención de $\mathcal{V}^\pm(z)$ explícita utilizando las soluciones generales. En lugar de esto, se propone $\mathcal{V}^\pm(z)$ de la siguiente forma polinomial

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^+(z) &= \alpha_1 + \alpha_2|z|^{\frac{1}{2}} + \alpha_3z + \alpha_4|z|^{\frac{3}{2}} + \alpha_5z^2 + \alpha_6|z|^{\frac{5}{2}} \\ \mathcal{V}^-(z) &= \beta_1 + \beta_2|z|^{\frac{1}{2}} + \beta_3z + \beta_4|z|^{\frac{3}{2}} + \beta_5z^2 + \beta_6|z|^{\frac{5}{2}},\end{aligned}$$

que es la suma de una serie geométrica donde cada exponente de z aumenta en $\frac{1}{2}$ y donde se utiliza el valor absoluto de z para evitar números complejos. Al sustituir $\mathcal{V}^\pm(z)$ en las Ecuaciones (4.4) y (4.5) se forman los polinomios

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^+(z) &= -\frac{1}{2}\alpha_2k_1|z|^{-\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - \left(\alpha_3k_1 + \frac{1}{2}\alpha_2k_2\right)z^0 + \left(-\alpha_3k_2 - \frac{3}{2}\alpha_4k_1\right)z^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) + \\ &+ \left(\frac{5}{3}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_4k_2 \text{sign}(z) - 2\alpha_5k_1\right)z + \left(\frac{4}{3}\alpha_2 - 2\alpha_5k_2 \text{sign}(z) - \frac{5}{2}\alpha_6k_1\right)|z|^{\frac{3}{2}} + \left(\alpha_3 - \frac{5}{2}\alpha_6k_2\right)z^2 + \\ &+ \frac{2}{3}\alpha_4|z|^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\alpha_5z^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^-(z) &= \frac{1}{2}\beta_2k_1|z|^{-\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - \left(\beta_3k_1 + \frac{1}{2}\beta_2k_2\right)z^0 + \left(-\beta_3k_2 - \frac{3}{2}\beta_4k_1\right)z^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) + \\ &- \left(\frac{5}{3}\beta_1 + \frac{3}{2}\beta_4k_2 \text{sign}(z) - 2\beta_5k_1\right)z + \left(-\frac{4}{3}\beta_2 - 2\beta_5k_2 \text{sign}(z) + \frac{5}{2}\beta_6k_1\right)|z|^{\frac{3}{2}} + \left(\beta_3 - \frac{5}{2}\beta_6k_2\right)z^2 + \\ &- \frac{2}{3}\beta_4|z|^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}\beta_5z^3.\end{aligned}$$

Al buscar que se cumplan las condiciones de negatividad definida (3.1.4), se observa que para que se cumpla la condición $\mathcal{W}^+ \in \Theta(z^2)$, los coeficientes α_4 , α_5 , β_4 y β_5 deben ser cero, por lo que los polinomios anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^+(z) &= -\frac{1}{2}\alpha_2k_1|z|^{-\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - \left(\alpha_3k_1 + \frac{1}{2}\alpha_2k_2\right)z^0 - \alpha_3k_2z^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) + \frac{5}{3}\alpha_1z + \\ &\left(\frac{4}{3}\alpha_2k_2 \text{sign}(z) - \frac{5}{2}\alpha_6k_1\right)|z|^{\frac{3}{2}} + \left(\alpha_3 - \frac{5}{2}\alpha_6k_2\right)z^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^-(z) &= \frac{1}{2}\beta_2k_1|z|^{-\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - \left(\beta_3k_1 + \frac{1}{2}\beta_2k_2\right)z^0 - \beta_3k_2z^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z) - \frac{5}{3}\beta_1z + \\ &\left(-\frac{4}{3}\beta_2 - 2k_2 \text{sign}(z) + \frac{5}{2}\beta_6k_1\right)|z|^{\frac{3}{2}} + \left(\beta_3 - \frac{5}{2}\beta_6k_2\right)z^2.\end{aligned}$$

Ahora sólo resta encontrar los valores α_{1-3} , α_6 , β_{1-3} y β_6 tales que $\mathcal{V}^\pm(z)$ sea una función positiva y $\mathcal{W}^\pm(z)$ sea una función negativa (para este ejemplo se considera $k_1 = k_2 = 1$). En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran las gráficas de $\mathcal{V}^\pm(z)$ y $\mathcal{W}^\pm(z)$ para valores $\alpha_1 =$

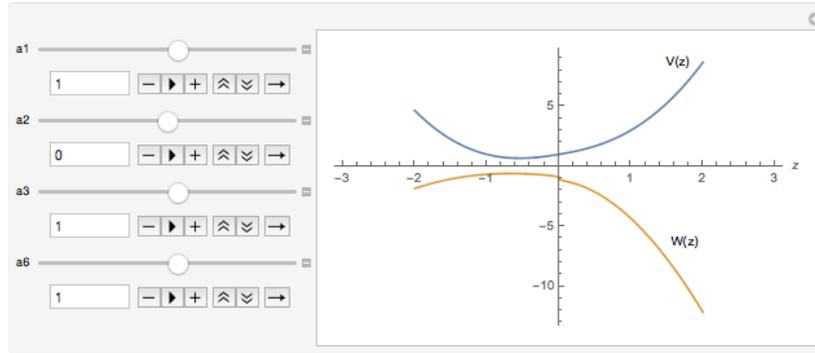


Figura 4.1: Gráfica conjunta de $\mathcal{V}^+(z)$ y $\mathcal{W}^+(z)$. Los valores a_i denotan los coeficientes α_i .

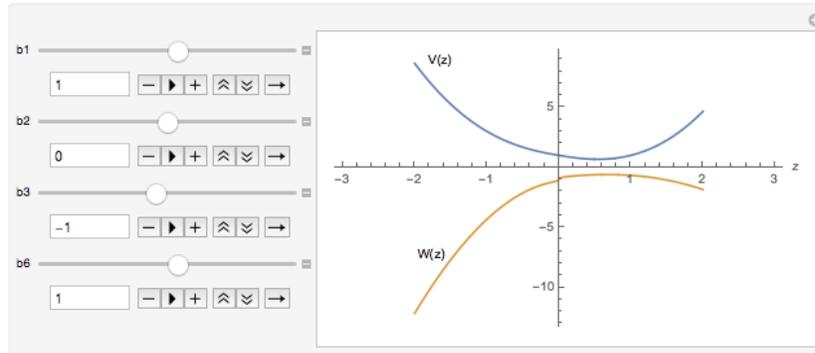


Figura 4.2: Gráfica conjunta de $\mathcal{V}^-(z)$ y $\mathcal{W}^-(z)$. Los valores b_i denotan los coeficientes β_i .

$\beta_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = \beta_6 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ y $\beta_3 = -\alpha_3$; con los cuales $\mathcal{V}^\pm(z)$ resulta positiva y $\mathcal{W}^\pm(z)$ negativa, por lo que se cumplen cabalmente las condiciones de positividad definida y, por el Teorema 3.2.1, podemos concluir que el sistema (4.3) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen.

Para obtener la FL en coordenadas originales basta con calcular

$$V(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{5}{2}} \mathcal{V}^\pm(z),$$

es decir

$$V(x_1, x_2) = |x_1|^{\frac{5}{3}} + x_1 x_2 + |x_2|^{\frac{5}{2}}.$$

La Figura 4.3 muestra la FL para el controlador homogéneo continuo (4.3) para valores $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = 1$, de donde se puede apreciar que la función es pd y suave.

En este ejemplo, a pesar de no poder obtener $\mathcal{V}^\pm(z)$ por integración directa, se obtuvo una FL para el sistema (4.3) proponiendo $\mathcal{V}^\pm(z)$ como un polinomio (en general una

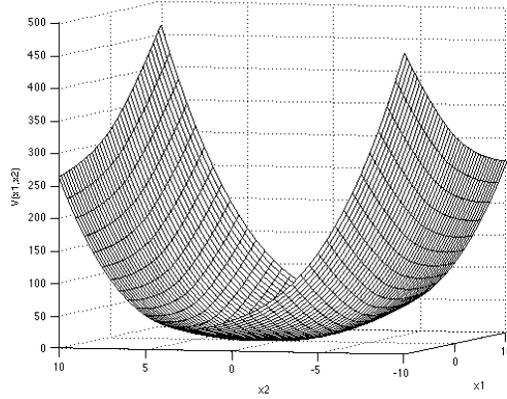


Figura 4.3: FL para el controlador homogéneo continuo (4.3) con $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = 1$.

serie de potencias) y encontrando los valores que hacen a $\mathcal{V}^\pm(z)$ un polinomio positivo y a $\mathcal{W}^\pm(z)$ un polinomio negativo, reduciendo así la obtención de FL al análisis de signo de polinomios en una variable.

A pesar de que el MRV ha sido enunciado formalmente para sistemas continuos y FL continuamente diferenciables, en los siguientes ejemplos se mostrará que también puede ser aplicado para obtener FL de sistemas discontinuos.

4.3. FL para el Algoritmo *Super Twisting*

El algoritmo *Super Twisting* (AST) es un algoritmo por modos deslizantes de segundo orden ampliamente utilizado en control [Bartolini et al., 2000; Boiko et al., 2007], observación [Davila et al., 2006] y diferenciación exacta [Levant, 1998]. En esta sección se obtendrá una familia de funciones de Lyapunov para este algoritmo. El AST sin perturbaciones está descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2\text{sign}(x_1),\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde k_i son constantes utilizadas como ganancias. Este sistema tiene grado de homogeneidad $k = -1$ y pesos de homogeneidad $(r_1, r_2) = (2, 1)$. Comenzamos por establecer el grado de homogeneidad $m = 2$ para la función de Lyapunov a obtener. Con fines ilustrativos, posponemos la proposición de la función $\mathcal{W}^\pm(z)$ y transformamos las funciones f_1 y f_2 de (4.6) a la variable $z = \frac{x_2}{|x_1|^{1/2}}$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= |x_1|^{\frac{1}{2}}(z - k_1 \text{sign}(x_1)) \\ f_2(x_1, x_2) &= -k_2 \text{sign}(x_1), \end{aligned}$$

es decir que

$$\begin{aligned} \phi_1^\pm(z) &= z - k_1 \text{sign}(x_1) \\ \phi_2^\pm(z) &= -k_2 \text{sign}(x_1). \end{aligned}$$

Con este cambio de variable podemos expresar las EDO lineales que satisfacen toda FL para el AST usando (3.19) y (3.20):

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}k_1z - k_2\right)\frac{d}{dz}\mathcal{V}^+(z) + (z - k_1)\mathcal{V}^+(z) &= \mathcal{W}^+(z) \\ \left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}k_1z + k_2\right)\frac{d}{dz}\mathcal{V}^-(z) - (z + k_1)\mathcal{V}^-(z) &= \mathcal{W}^-(z) \quad , \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\mathcal{V}^+(z) = e^{-\int \frac{m(z-k_1)}{\rho^+(z)} dz} \left[\int \frac{\mathcal{W}^+}{\rho^+(z)} e^{\int \frac{m(z-k_1)}{\rho^+(z)} dz} dz + C \right] \quad (4.7)$$

$$\mathcal{V}^-(z) = e^{-\int \frac{m(z+k_1)}{\rho^-(z)} dz} \left[\int \frac{\mathcal{W}^-}{\rho^-(z)} e^{\int \frac{m(z+k_1)}{\rho^-(z)} dz} dz + D \right], \quad (4.8)$$

con $\rho^+(z) = -z^2 + k_1z - 2k_2$ y $\rho^-(z) = -z^2 - k_1z - 2k_2$. A continuación, se propone la función negativa $\mathcal{W}^\pm(z) = -(1 + z^2)$. Al sustituir $\mathcal{W}^\pm(z)$ en las ecuaciones (4.7) y (4.8) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^+(z) &= \frac{2k_2 + 1}{k_1} - 2z + \frac{1 + k_1^2 + 2k_2}{2k_1k_2}z^2 + \Omega_1(z) \\ \mathcal{V}^-(z) &= \frac{2k_2 + 1}{k_1} + 2z + \frac{1 + k_1^2 + 2k_2}{2k_1k_2}z^2 + \Omega_2(z), \end{aligned}$$

con

$$\Omega_1(z) = -e^{\frac{-2k_1}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}} \arctan\left(\frac{k_1-2z}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}}\right)} (-z^2 + k_1z - 2k_2)C$$

y

$$\Omega_2(z) = e^{\frac{-2k_1}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}} \arctan\left(\frac{k_1+2z}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}}\right)} (z^2 + k_1z + 2k_2)D.$$

Ambas funciones son positivas para $C, D \geq 0$. Transformando a las coordenadas originales tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^+ &= |x_1| \frac{2k_2 + 1}{k_1} - 2x_2|x_1|^{\frac{1}{2}} + \frac{1 + k_1^2 + 2k_2}{2k_1k_2}x_2^2 + \omega_1 \\ \mathcal{V}^- &= |x_1| \frac{2k_2 + 1}{k_1} + 2x_2|x_1|^{\frac{1}{2}} + \frac{1 + k_1^2 + 2k_2}{2k_1k_2}x_2^2 + \omega_2, \end{aligned}$$

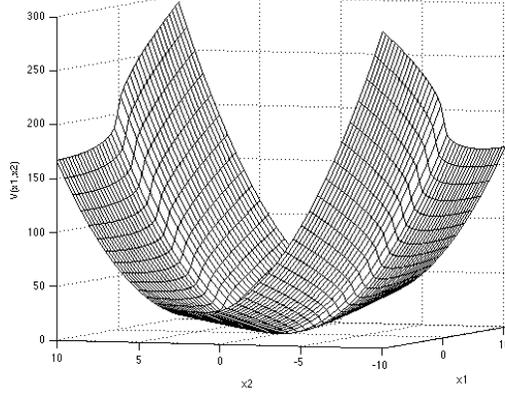


Figura 4.4: FL para el algoritmo Super Twisting con $k_1 = k_2 = 1$.

donde

$$\omega_1 = -e^{\frac{-2k_1}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}} \arctan\left(\frac{k_1-2x_2|x_1|^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}}\right)} (-x_2^2 + k_1x_2|x_1|^{\frac{1}{2}} - 2|x_1|k_2)C$$

y

$$\omega_2 = e^{\frac{-2k_1}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}} \arctan\left(\frac{k_1+2x_2|x_1|^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-k_1^2+8k_2}}\right)} (x_2^2 + k_1x_2|x_1|^{\frac{1}{2}} + 2|x_1|k_2)D.$$

Como en el Ejemplo 4.1, V es continua a lo largo del eje x_2 sólo para $C, D = 0$. Así, la FL que muestra la estabilidad del AST resulta

$$V = |x_1| \frac{2k_2 + 1}{k_1} + 2x_2|x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + \frac{1 + k_1^2 + 2k_2}{2k_1k_2} x_2^2.$$

En la Figura 4.4 se muestra la función V para $k_1 = k_2 = 1$, donde se puede apreciar que la función no es *suave* sobre el eje x_1 , por lo que no es diferenciable en esta región. Sin embargo, de acuerdo con el criterio de Zubov (2.1.2) podemos concluir que el origen es estable, tal como se hace en [Moreno y Osorio, 2012] con esta misma función de Lyapunov.

4.4. FL para el Algoritmo *Terminal*

En la presente sección se construirá una familia de FL para el algoritmo Terminal [Zhihong et al., 1994]. Este algoritmo por modos deslizantes de segundo orden está dado por:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\alpha \text{sign}(\sigma), \quad (4.9)$$

donde la variable de conmutación del control se define como

$$\sigma = x_2 + \beta\sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1).$$

Note que (4.9) es un sistema homogéneo de grado $k = -1$ con pesos de homogeneidad $(r_1, r_2) = (2, 1)$. Las trayectorias de este algoritmo presentan, dependiendo de la relación entre las constantes α y β , tres tipos de comportamientos¹. Por simplicidad sólo se considerará el caso

$$\beta^2 > 2\alpha. \quad (4.10)$$

Como puede apreciarse de (4.9), \dot{x}_2 puede descomponerse en una función continua a tramos, es decir

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} -\alpha, & \sigma > 0 \\ \alpha, & \sigma < 0 \end{cases},$$

por lo que es posible obtener una FL para cada caso y posteriormente unir las a lo largo de la superficie $\sigma = 0$. En ambos casos, para aplicar el MRV, se utilizará el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{x_2}{|x_1|^{\frac{1}{2}}}.$$

Caso $\sigma > 0$

Al expresar f_1 y f_2 del algoritmo Terminal en términos de la variable z , utilizando (3.25), tenemos

$$\phi_1^\pm(z) = z, \quad \phi_2^\pm(z) = -\alpha,$$

y al aplicar la variante de Bernoulli de nuestro método [Ecuaciones (3.35) y (3.36)] obtenemos las soluciones generales

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^+ &= \left(\frac{z}{\alpha m} + C\sqrt{z^2 + 2\alpha} \right)^m \\ \mathcal{V}^- &= \left(\frac{z}{\alpha m} + D\sqrt{z^2 - 2\alpha} \right)^m, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde C y D son constantes arbitrarias. Para analizar la positividad de estas funciones, es necesario expresar la región $\sigma > 0$ en términos de z como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma > 0 &\Rightarrow x_2 + \beta\sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1) > 0 \Rightarrow z\sqrt{|x_1|} + \beta\sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1) > 0 \Rightarrow \\ &\sqrt{|x_1|}(z + \beta\text{sign}(x_1)) > 0 \Rightarrow z + \beta\text{sign}(x_1) > 0. \end{aligned}$$

Dado que se analiza el caso cuando $\beta^2 > 2\alpha$ la región correspondiente en z resulta

$$z > -\sqrt{2\alpha}\text{sign}(x_1),$$

¹Para una clara descripción de los distintos comportamientos vea [Sánchez, 2012].

por lo que la soluciones generales (4.11) restringidas a esta región son

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^+ &= \left(\frac{z}{\alpha m} + C\sqrt{z^2 + 2\alpha} \right)^m, & z > -\sqrt{2\alpha} \\ \mathcal{V}^- &= \left(\frac{z}{\alpha m} + D\sqrt{z^2 - 2\alpha} \right)^m, & z > \sqrt{2\alpha},\end{aligned}\quad (4.12)$$

de donde se observa que para cualquier $C, D > 0$, $\mathcal{V}^\pm(z)$ resulta positiva y podemos continuar con el método. Al transformar a las coordenadas originales se obtiene

$$V = \begin{cases} \left(\frac{x_2}{\alpha m} + C\sqrt{x_2^2 + 2\alpha|x_1|} \right)^m, & x_1 > 0 \\ \left(\frac{x_2}{\alpha m} + D\sqrt{x_2^2 - 2\alpha|x_1|} \right)^m, & x_1 < 0, \end{cases}\quad (4.13)$$

que resulta una función continua a lo largo del del eje x_1 para toda $C = D$. Así, podemos unir las dos funciones anteriores para formar V escogiendo $C = D = C_1 > 0$, es decir

$$V = \left(\frac{x_2}{\alpha m} + C_1\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1} \right)^m, \quad \sigma > 0. \quad (4.14)$$

Caso $\sigma < 0$

Para este caso, las funciones ϕ_1^\pm y ϕ_2^\pm resultan

$$\phi_1^\pm(z) = z, \quad \phi_2^\pm(z) = \alpha. \quad (4.15)$$

Al repetir el análisis del caso anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^+ &= \left(-\frac{z}{\alpha m} + E\sqrt{z^2 - 2\alpha} \right)^m, & z < -\sqrt{2\alpha} \\ \mathcal{V}^- &= \left(-\frac{z}{\alpha m} + F\sqrt{z^2 + 2\alpha} \right)^m, & z < \sqrt{2\alpha},\end{aligned}\quad (4.16)$$

que nuevamente son funciones positivas para $E, F > 0$. Al transformar a las coordenadas originales se obtiene:

$$V = \begin{cases} \left(-\frac{x_2}{\alpha m} + E\sqrt{x_2^2 - 2\alpha|x_1|} \right)^m, & x_1 > 0 \\ \left(-\frac{x_2}{\alpha m} + F\sqrt{x_2^2 + 2\alpha|x_1|} \right)^m, & x_1 < 0, \end{cases}\quad (4.17)$$

donde E y F son constantes arbitrarias que, de ser iguales y positivas, garantizan la continuidad y pd de V sobre el eje x_1 . Al componer la función V escogiendo $E = F = C_2 > 0$ se tiene

$$V = \left(-\frac{x_2}{\alpha m} + C_2\sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1} \right)^m, \quad \sigma < 0. \quad (4.18)$$

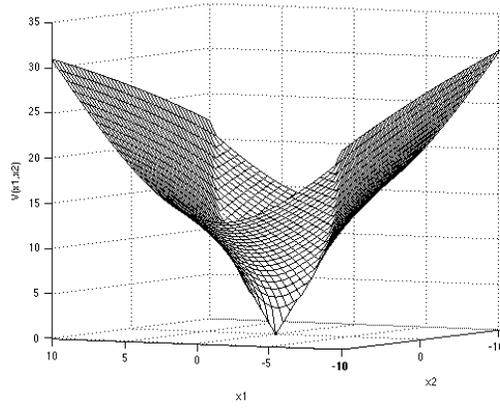


Figura 4.5: FL con grado de homogeneidad $m = 1$ para el algoritmo Terminal con $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

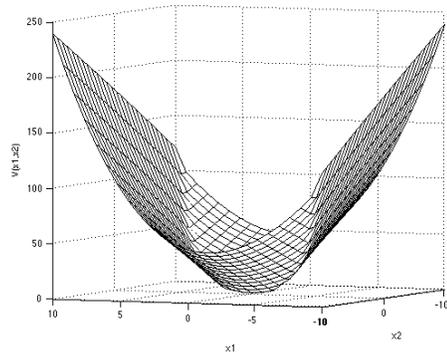


Figura 4.6: FL con grado de homogeneidad $m = 2$ para el algoritmo Terminal con $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

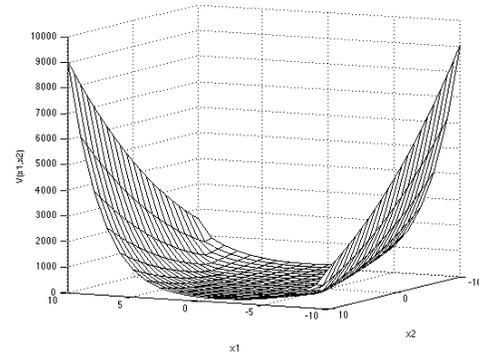


Figura 4.7: FL con grado de homogeneidad $m = 5$ para el algoritmo Terminal con $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Agrupación de las partes de V

Una vez que se ha encontrado el valor de la función V para los casos $\sigma > 0$ y $\sigma < 0$, sólo resta ensamblar la función V encontrando las condiciones sobre C_1 y C_2 que garanticen la continuidad de V a lo largo del conjunto $\sigma = 0$. Igualando ambos casos se encuentra que $C_1 = C_2 = \mu$ donde

$$\mu = \frac{(2\beta)}{\alpha m (\sqrt{\beta^2 + 2\alpha} - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha})}, \quad (4.19)$$

por lo que finalmente

$$V(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_2}{m\alpha} + \mu \sqrt{x_2^2 + 2\alpha x_1} \right)^m, & \sigma \geq 0 \\ \left(-\frac{x_2}{m\alpha} + \mu \sqrt{x_2^2 - 2\alpha x_1} \right)^m, & \sigma < 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

es una FL para (4.9).

En [Sánchez, 2012] se utiliza un método basado en la integración de trayectorias del algoritmo Terminal para obtener una FL con grado de homogeneidad $m = 1$. No obstante, la función (4.20) representa una generalización del resultado presentado en [Sánchez, 2012], ya que describe una familia de FL con grado de homogeneidad m arbitrario. Esto a su vez permite obtener FL más *suaves* conforme aumenta m . En las Figuras 4.5 - 4.7 se muestran FL para el algoritmo Terminal con diferentes grados de homogeneidad. Es posible apreciar cómo, a mayor grado m , se obtiene una FL más *suave*; sin embargo, en ningún caso se obtiene diferenciabilidad sobre la curva $\sigma = 0$.

5

Conclusiones

En este trabajo se presentó un método de obtención de FL homogéneas para sistemas homogéneos de segundo orden. Este método, llamado Método por Reducción de Variable, aprovecha la homogeneidad del sistema para transformar la desigualdad diferencial parcial del método directo de Lyapunov (originalmente en dos variables), en dos ecuaciones diferenciales lineales y ordinarias en una sola variable. Por tanto, para aplicar el método MRV sólo es necesario proponer un par funciones en una sola variable y un grado de homogeneidad deseado. Asimismo, al reducir el número de variables del análisis de estabilidad, el MRV simplifica significativamente el análisis de definitividad de signo de las FL. Se presentaron también resultados formales para sistemas continuos en donde se establece un criterio de estabilidad en la variable z . Las condiciones para la continuidad, positividad definida y diferenciabilidad en las coordenadas originales de las funciones en la variable z también fueron estudiadas. En cuanto a los ejemplos presentados, podemos concluir que:

- En el primer ejemplo se mostró que existen sistemas muy simples para los cuales el método homogéneo de Zubov no permite obtener FL explícitas, mientras que el MRV sí lo consigue.
- En el segundo ejemplo se ilustró que es posible proponer un polinomio en z para obtener una FL, evitando así resolver las integrales de las soluciones generales.
- En el tercer ejemplo, utilizando soluciones de ecuaciones de Bernoulli, se obtuvo una FL cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema está en términos de una potencia de esta misma FL; lo cual es útil para establecer convergencia al origen en tiempo finito.
- Finalmente, en el último ejemplo se mostró que proponiendo un grado de homogeneidad m y una función simple en la variable z es posible obtener una FL para un sistema discontinuo.

Trabajo futuro

Como extensiones del presente trabajo podemos mencionar:

- Extender el MRV formalmente para sistemas discontinuos.
- Utilizar el MRV para análisis de estabilidad en sistemas con perturbaciones.
- Extender el método para abordar sistemas bajo transformaciones de homogeneidad.
- Extender el MRV para sistemas de mayor orden.
- Análisis de esquemas de control en la variable z .

Lista de Acrónimos y Abreviaturas

AST Algoritmo *Super Twisting*

DDP Desigualdad Diferencial Parcial

EDO Ecuación Diferencial Ordinaria

EDP Ecuación Diferencial Parcial

FL Función de Lyapunov

FLE Función de Lyapunov Estricta

MDL Método Directo de Lyapunov

MHZ Método por Homogeneidad de Zubov

MRV Método por Reducción de Variable

nd negativa definida

pd positiva definida

Lista de Símbolos

- O **Notación de la gran O.** Símbolo de comportamiento asintótico; indica que si $f(x) \in O(g(x))$ entonces $f(x)$ puede ser acotada por arriba por $g(x)$ y alguna constante positiva κ , esto es $|f(x)| \leq \kappa g(x)$. Página 12.
- Θ **Notación de la gran Θ .** Símbolo de comportamiento asintótico; indica que si $f(x) \in \Theta(g(x))$ entonces $f(x)$ puede ser acotada por arriba y por abajo con $g(x)$ y dos constantes positivas κ_1 y κ_2 , esto es $\kappa_1 g(x) \leq f(x) \leq \kappa_2 g(x)$ para todo $x \geq x_0$. Página 12.
- \sim **En el orden de.** Símbolo de comportamiento asintótico; indica que si $f(x) \sim g(x)$ entonces para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ para todo $x \geq x_0$. Página 12.

Bibliografía

- Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer-Verlag, second edition.
- Bartolini, G., Ferrara, A., Usai, E., y Utkin, V. I. (2000). On multi-input chattering-free second-order sliding mode control. *Automatic control, IEEE Transactions on*, 45(9):1711–1717.
- Boiko, I., Fridman, L., Pisano, A., y Usai, E. (2007). Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(11):2085–2102.
- Davila, J., Fridman, L., y Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251–1262.
- Filippov, A. F. y Arscott, F. M. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, volume 18. Springer.
- Graham, R. L., Knuth, D. E., y Patashnik, O. (1989). Concrete mathematics. *Massachusetts: Addison-Wesley*.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upsaddle River, NJ, third edition.
- Knuth, D. E. (1976). Big omicron and big omega and big theta. *ACM Sigact News*, 8(2):18–24.
- Krasovskii, N. N. (1963). Problems of the theory of stability of motion. (*Russian*), 1959, *English translation: Stanford University Press*.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830.

- Moreno, J. A. y Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 57(4):1035–1040.
- Nakamura, H., Yamashita, Y., y Nishitani, H. (2002). Smooth Lyapunov functions for homogeneous differential inclusions. In *SICE 2002. Proceedings of the 41st SICE Annual Conference*, volume 3, pages 1974–1979. IEEE.
- Orlov, Y. (2004). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4):1253–1271.
- Polyakov, A. y Poznyak, A. (2012). Unified Lyapunov function for a finite-time stability analysis of relay second-order sliding mode control systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 29(4):529–550.
- Poznyak, A. (2010). *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*, volume 1. Elsevier.
- Roxin, E. (1966). On finite stability in control systems. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 15(3):273–282.
- Sánchez, T. (2012). *Construcción de Funciones de Lyapunov para algoritmos por Modos Deslizantes de Orden Superior*. Tesis de Maestría, UNAM.
- Sanchez, T. y Moreno, J. A. (2012). Construction of Lyapunov functions for a class of higher order sliding modes algorithms. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 6454–6459. IEEE.
- Weisstein, E. W. (2002). *CRC concise encyclopedia of mathematics*. CRC press.
- Zhihong, M., Paplinski, A., y Wu, H. (1994). A robust mimo terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(12):2464–2469.
- Zubov, V. (1958). Systems of ordinary differential equations with generalized-homogeneous right-hand sides. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1:80–88.
- Zubov, V. I. (1964). *Methods of AM Lyapunov and their Application*. Number . 263pp. Noordhoff Groningen.