# COMPILACIÓN DE EJERCICIOS DE ESTÁTICA

Fernando Sánchez Rodríguez

# FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

# COMPILACIÓN DE EJERCICIOS DE ESTÁTICA

**FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ**

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, Fernando. *Compilación de ejercicios de Estática.* México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2013, 90 p.

*Compilación de ejercicios de Estática.*

Primera edición 2013


Facultad de Ingeniería
Avenida Universidad 3000 Ciudad Universitaria,
Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, D. F.

http://www.ingenieria.unam.mx/



Impreso y hecho en México

## *PRÓLOGO*

La presente Compilación de Ejercicios de Estática tiene el propósito de dotar al alumno de ingeniería de ejercicios de la asignatura con su respectiva resolución, para constatar la aplicación de los conceptos estudiados en clase y por ende adquirir habilidades en la resolución de problemas de Estática.

Este trabajo fue conformado a partir de los ejercicios de los exámenes colegiados de la asignatura, los cuales fueron revisados, adaptados, integrados y resueltos correctamente.

La obra se integra con ejercicios de los temas correspondientes al temario vigente de la asignatura de Estática. Para cada tema se presentan varios ejercicios con su correspondiente resolución, de esta manera el alumno podrá seguirla y comprenderla.

Finalmente, agradezco a la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad, así como a los responsables de los Departamentos de Cinemática y Dinámica y de Estática, quienes realizaron la revisión y pertinencia del presente material. Asimismo los comentarios, críticas o sugerencias que expresen profesores y alumnos en un futuro acerca de la presente compilación serán tomados en cuenta con el fin de enriquecerla.

Mtro. Fernando Sánchez Rodríguez

Ciudad Universitaria, D.F., marzo de 2013

*ÍNDICE*

Página

## Capítulo 1. Ley de la gravitación universal

1. Considerando que la masa de la Tierra es **$5.98 x 10^{24}$ kg** y la masa de Júpiter es **$1.9 x 10^{27}$ kg**, determine la magnitud de la fuerza de atracción entre ambos planetas, teniendo en cuenta que la distancia promedio entre los centros de dichos planetas es **$628.7 \text{ x } 10^{6}$ km.**

**Solución**

$$F = G\frac{m_T\, m_J}{d^2}$$

$$F = G\frac{(5.98 \times 10^{24})(1.9 \times 10^{27})}{(6.287 \times 10^{11})^2}$$

$$\therefore \underline{\mathbf{F = 2.874 \times 10^{28}\ G\ \ N}}$$

2. Raga, un nuevo planeta descubierto, tiene una densidad igual al triple de la densidad terrestre, pero la intensidad media del campo gravitacional en la superficie de este planeta es exactamente la misma que la de la Tierra; para tales condiciones, calcule la magnitud del radio del planeta Raga en términos del radio de la Tierra y considere como esférica la forma de los planetas.

**Solución**

$$\rho_R = 3\rho_T$$

$$\vartheta_R = \vartheta_T$$

$$\frac{GM_R}{(R_R)^2} = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$$

$$\frac{\rho_R \frac{4}{3}\pi(R_R)^3}{(R_R)^2} = \frac{\rho_T \frac{4}{3}\pi(R_T)^3}{(R_T)^2}$$

$$\rho_R R_R = \rho_T R_T$$

como $\rho_R = 3\rho_T$

$$3\rho_T R_R = \rho_T R_T$$

$$R_R = \frac{\rho_T R_T}{3\rho_T}$$

$$\underline{\mathbf{R_R = \frac{1}{3} R_T}}$$

3. El peso **W** de un cuerpo que se encuentra en contacto con la superficie terrestre es igual a **75000 $kg_f$**. Si se aleja de ella hasta un punto donde la magnitud de la aceleración producida por la atracción terrestre es de **2 $m/s^2$**, considerando que el radio de la tierra es de **6376 km**; calcule:

   a) La altitud **H** sobre la superficie terrestre a la que se aleja dicho cuerpo
   b) La magnitud de la fuerza de atracción producida por la tierra, en la posición correspondiente a la altitud calculada en el inciso anterior

**Solución**

Sobre la superficie terrestre

$$F = mg \quad ; F = G\frac{mM}{{R_T}^2}$$

$$mg = G\frac{mM}{{R_T}^2}$$

$$g = G\frac{M}{{R_T}^2}$$

$$\therefore G = g\frac{{R_T}^2}{M} \qquad \dots (1)$$

A una altitud H

$$F = ma \quad ; \quad F = G\frac{mM}{(R_T + H)^2}$$

$$ma = G\frac{mM}{(R_T + H)^2}$$

$$a = G\frac{M}{(R_T + H)^2} \qquad \dots (2)$$

$$a = \left(g\frac{{R_T}^2}{M}\right)\left(\frac{M}{R_T + H^2}\right)$$

$$a = g\left[\frac{R_T}{R_T + H}\right]^2$$

$$\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{R_T}{R_T + H}$$

$$R + H = \frac{R_T}{\sqrt{\frac{a}{g}}}$$

$$H = \frac{R_T}{\sqrt{\frac{a}{g}}} - R_T$$

$$H = \frac{6376}{\sqrt{\frac{2}{9.81}}} - 6376$$

a) $\underline{\mathbf{H = 7745.5\ km}}$

$$F = ma; \quad F = \frac{75000}{9.81}(2)$$

b) $\underline{\mathbf{F = 15290.52\ k_{gf}}}$

4. Un astronauta se encuentra a una altitud **H** sobre la superficie terrestre; en ese punto la fuerza de atracción que ejerce la Tierra se reduce a un tercio con respecto a la que tiene cuando se ubica sobre su superficie. Para tales condiciones, determine la altitud **H** a la que se encuentra el astronauta. Considere el radio de la Tierra **$R_T$=6370 km**.

**Solución**

Sobre la superficie terrestre

$$F = mg \quad ; F = G\frac{mM}{{R_T}^2}$$

$$mg = G\frac{mM}{{R_T}^2} \quad ; \quad g = G\frac{M}{{R_T}^2} \quad \therefore G = g\frac{{R_T}^2}{M} \quad ...(1)$$

A una altitud H

$$F = ma \quad ; \quad F = G\frac{mM}{(R_T + H)^2}$$

$$ma = G\frac{mM}{(R_T + H)^2}$$

$$a = G\frac{M}{(R_T + H)^2} \quad ...(2)$$

$$a = \left(g\frac{{R_T}^2}{M}\right)\left(\frac{M}{R_T + H^2}\right)$$

$$a = g\left[\frac{R_T}{R_T + H}\right]^2$$

Si la fuerza de atracción se reduce a un tercio, se tiene que $a = \frac{g}{3}$; por lo tanto:

$$\frac{g}{3} = g\left[\frac{R_T}{R_T + H}\right]^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{R_T}{R_T + H} \qquad R + H = \frac{R_T}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \quad ; \quad H = \frac{R_T}{\sqrt{\frac{1}{3}}} - R_T$$

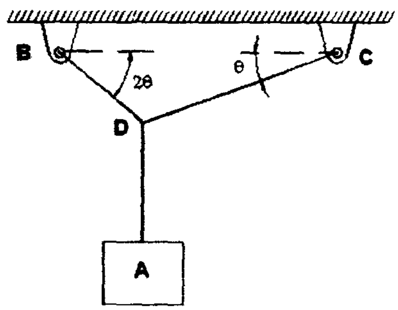
$$H = \frac{R_T}{\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}}{\sqrt{3}}} - R_T = R_T\sqrt{3} - R_T = R(\sqrt{3} - 1)$$

$$H = R(\sqrt{3} - 1)$$

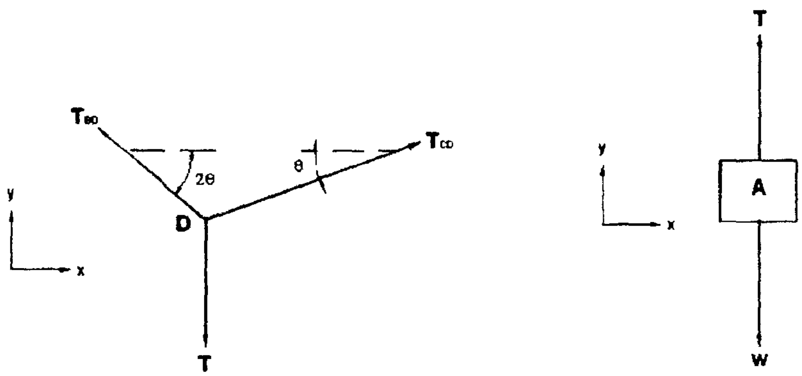
$\underline{\mathbf{H = 4663.16\ km}}$

## Capítulo 2. Conceptos básicos de la estática

5. El bloque A, que pesa 200 N, es sostenido por los cables de pesos despreciables $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$, que se muestran en la figura. Sabiendo que el ángulo $\theta$ que forma $\overline{DC}$ con la horizontal es **20º**, determine la magnitud de la tensión en los citados cables, que garanticen mantener en equilibrio al bloque **A**.




**Solución**




Bloque A

$\sum Fy = 0; \qquad T = 200\ N$

Punto D

$\sum \bar{F} = \bar{0}; \qquad T_{CD}(\cos 20°\, i + \operatorname{sen} 20° j) + T_{BD}(-\cos 40° i + \operatorname{sen} 40° j) - 200j = 0i + 0j$

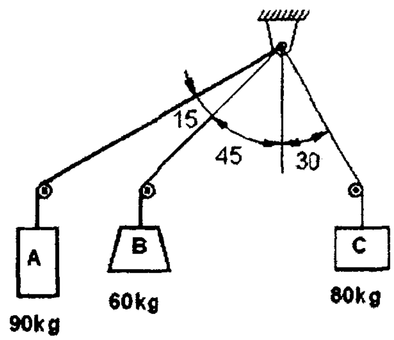
$T_{CD} = \cos 20° - T_{BD} \cos 40° = 0 \ \ldots (1)$

$T_{CD} = \operatorname{sen} 20° + T_{BD} \operatorname{sen} 40° = 200 \ \ldots (2)$

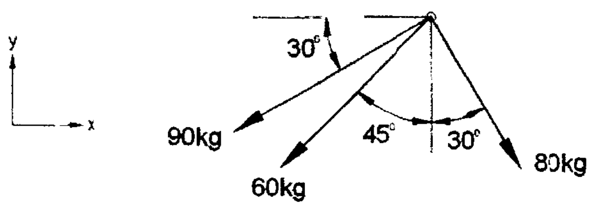
resolviendo (1) y (2):

$\mathbf{T_{BD} = 217.01\ N; \quad T_{CD} = 176.90\ N}$

6. Considerando que los cuerpos **A**, **B** y **C** se encuentran en un mismo plano vertical, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas que ejercen los tres cables sobre la argolla de la figura.




**Solución**

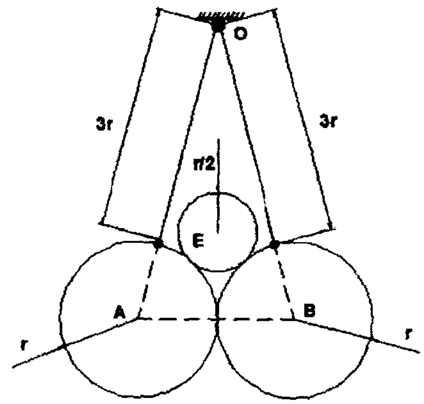



$\bar{\mathbf{R}} = (-90\cos 30° - 60\,\mathrm{sen}\,45° + 80\,\mathrm{sen}\,30°)\mathrm{i} + (-90\,\mathrm{sen}\,30° - 60\cos 45° - 80\cos 30°)\mathrm{j}$

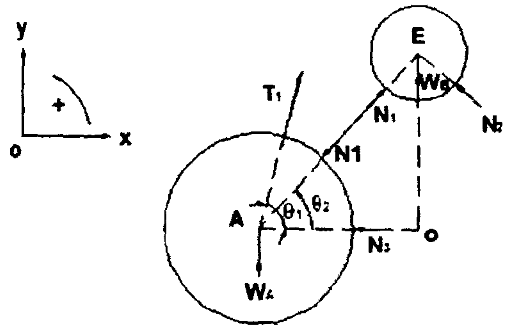
$\bar{\mathbf{R}} = -80.56\mathrm{i} - 156.70\mathrm{j}\ \ \mathrm{kg}$

$\therefore\ \underline{|\bar{\mathbf{R}}| = \mathbf{176.10\ kg}}\,;\qquad \underline{\boldsymbol{\theta} = \mathbf{62.85°}}$

7. Tres cilindros lisos homogéneos están colocados tal como se muestra en la figura. Los cilindros **A** y **B** tienen el mismo peso **W** y su radio es igual a **r**, mientras que el radio del cilindro **E** es igual a **r/2**. Para tales condiciones, determine el máximo peso del cilindro **E** para que el sistema se mantenga en equilibrio. Considere las cuerdas flexibles, extensibles y de masa despreciable.




**Solución**




$$\cos\theta_1 = \frac{1}{4};\ \theta_1 = 75.52°$$

$$\cos\theta_2 = \frac{2}{3};\ \theta_2 = 48.19°$$

DCL de E $\sum F_x = 0;\ N_1\cos\theta_2 - N_2\cos\theta_2 = 0$ ... (1)

$\sum F_y = 0;\ N_1\operatorname{sen}\theta_2 + N_2\operatorname{sen}\theta_2 - W_E = 0$ ... (2)

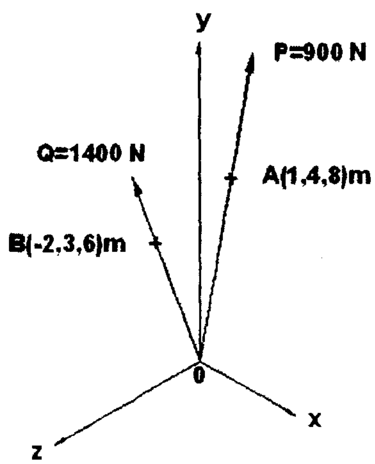
DCL de A $\sum F_x = 0;\ T_1\cos\theta_1 - N_1\cos\theta_2 - N_3 = 0$ ... (3)

$\sum F_y = 0;\ T_1\operatorname{sen}\theta_1 - N_1\operatorname{sen}\theta_2 - W_A = 0$ ... (4)

Condición $W_E$ es máximo cuando $N_3=0$, resolviendo

$\underline{\mathbf{W_E = 0.8W_A}}$

8. Sean las fuerzas **P** y **Q** de la figura, cuyas magnitudes son **900 N** y **1400 N**, respectivamente. Si además de pasar por el origen del sistema de referencia mostrado, las líneas de acción de **P** y **Q** lo hacen por los puntos **A** y **B**, según se ilustra, determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante del sistema conformado por esas dos fuerzas.




**Solución**

$$\bar{\mathbf{P}} = 900\bar{e}_{OA} = 900\left(\frac{i+4j+8k}{9}\right)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = 100i + 400j + 800k \quad N$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = 1400\bar{e}_{OB} = 1400\left(\frac{-2i+3j+6k}{7}\right)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = -400i + 600j + 1200k \quad N$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} = -300i + 1000j + 2000k$$

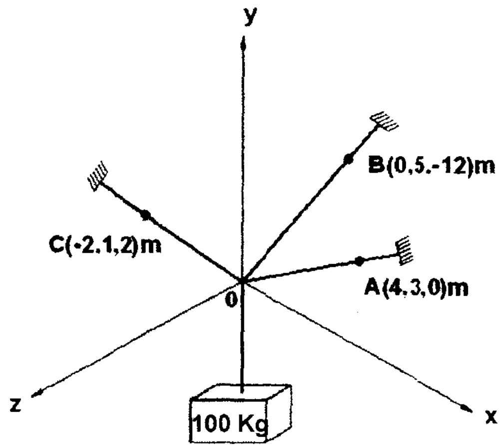
$$\therefore \underline{|\bar{\mathbf{R}}| = \mathbf{225610 \quad N}}$$

$$\theta_{xx} = \text{ang}\cos\frac{-300}{2256.10} = \underline{\mathbf{97.64°}}$$

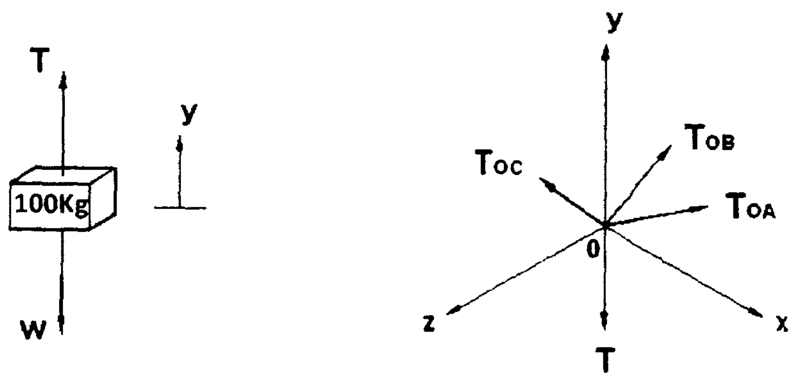
$$\theta_{yy} = \text{ang}\cos\frac{1000}{2256.10} = \underline{\mathbf{63.69°}}$$

$$\theta_{zz} = \text{ang}\cos\frac{2000}{2256.10} = \underline{\mathbf{27.56°}}$$

9. Una caja de **100 kg** de peso cuelga de un cable vertical unido, en **0**, a los cables **0A**, **0B** y **0C** que se muestran. Considerando que el eje **y** es vertical, determine las magnitudes de las tensiones en los citados cables con el propósito de mantener en equilibrio la caja.




**Solución**




$$\overline{T_{OA}} + \overline{T_{OB}} + \overline{T_{OC}} - 100j = \bar{0}$$

$$T_{OA}\left(\frac{4i+3j}{5}\right) + T_{OB}\left(\frac{5j-12k}{13}\right) + T_{OC}\left(\frac{-2i+j+2k}{3}\right) - 100j = \bar{0}$$

$$\frac{4}{5}T_{OA} - \frac{2}{3}T_{OC} = 0 \Rightarrow T_{OA} = \frac{10}{12}T_{OC} \qquad ...(1)$$
$$\frac{3}{5}T_{OA} + \frac{5}{13}T_{OB} + \frac{1}{3}T_{OC} - 100 = 0 \qquad ...(2)$$

$$-\frac{12}{13}T_{OB} + \frac{2}{3}T_{OC} = 0 \Rightarrow T_{OB} = \frac{26}{36}T_{OC} \qquad ...(3)$$

Resolviendo (1), (2) y (3):

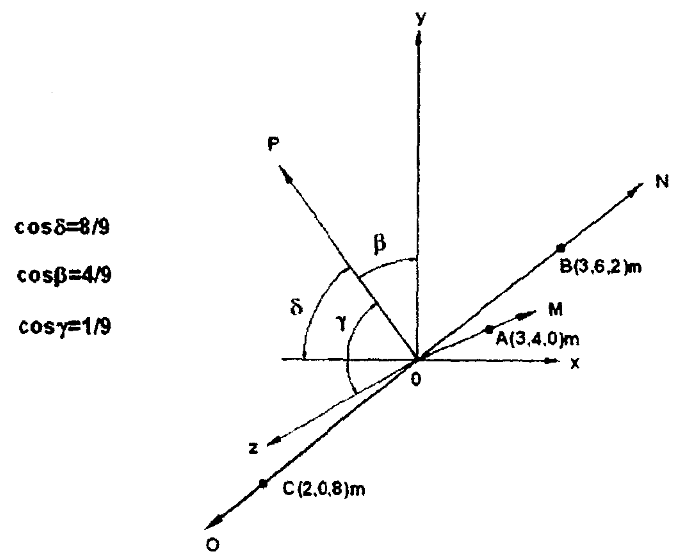
$\underline{\mathbf{T_{OA} = 75\ kg}}$

$\underline{\mathbf{T_{OB} = 65\ kg}}$

$\underline{\mathbf{T_{CA} = 90\ kg}}$

10. Sean un sistema **F** conformado por las fuerzas **P, Q, R** y **S** de la figura, cuyas magnitudes son **450 N, 210 N,** $\mathbf{125\sqrt{68}}$ **N** y **360 N**, respectivamente. Si además de pasar por el origen del sistema de referencia mostrado, las líneas de acción de **P, Q, R** lo hacen por los puntos **A, B** y **C**, mientras que el soporte de **S** se orienta según se ilustra, determine:

    a) La expresión vectorial de las fuerzas **P, Q, R,** y **S**
    b) La expresión vectorial y la magnitud de la fuerza resultante de **F**
    c) La dirección de dicha fuerza resultante




**Solución**

a)

$$\bar{\mathbf{P}} = 450\left(\frac{3\mathrm{i} + 4\mathrm{j}}{5}\right) = \underline{\mathbf{270i + 360j\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = 210\left(\frac{-3\mathrm{i} + 6\mathrm{j} + 2\mathrm{k}}{7}\right) = \underline{\mathbf{-90i + 180j + 60k\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{R}} = 125\sqrt{68}\left(\frac{-2\mathrm{i} + 8\mathrm{k}}{\sqrt{68}}\right) = \underline{\mathbf{-250i + 1000k\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = 360\left(-\frac{8}{9}\mathrm{i} + \frac{4}{9}\mathrm{j} + \frac{1}{9}\mathrm{k}\right) = \underline{\mathbf{-320i + 160j + 40k\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{S}}$$

b)

$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{F}} = \mathbf{-300i + 700j + 1100\,kN}$

$|\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{F}}| = \mathbf{1360.918\,kN}$

c)

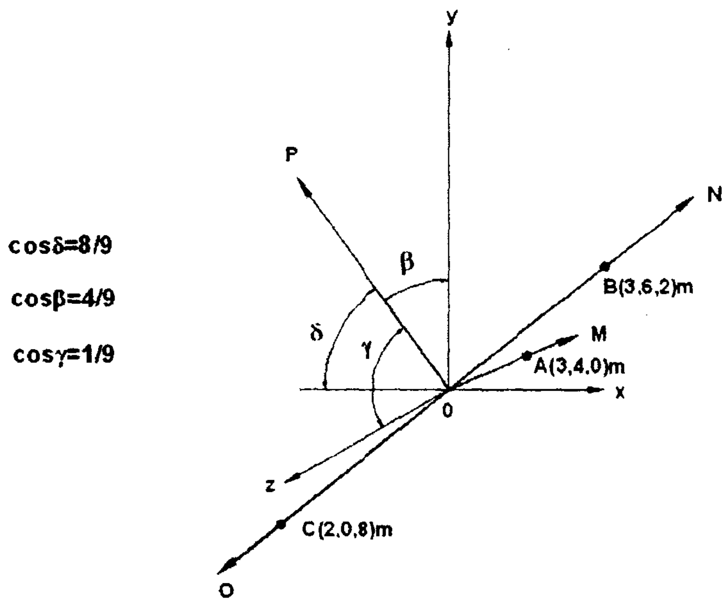
$$\alpha_R = \cos^{-1}\left(\frac{-390}{1360.918}\right) = \underline{\mathbf{106.65°}}$$

$$\beta_R = \cos^{-1}\left(\frac{700}{1360.918}\right) = \underline{\mathbf{59.04°}}$$

$$\gamma_R = \cos^{-1}\left(\frac{1100}{1360.918}\right) = \underline{\mathbf{36.07°}}$$

11. Sea un sistema **F** conformado por las fuerzas **M, N, O** y **P** de la figura, cuyas magnitudes son **900 N, 420 N, 250$\sqrt{68}$ N** y **360 N**, respectivamente. Si además de pasar por el origen del sistema de referencia mostrado, las líneas de acción de **M, N, O** lo hacen por los puntos **A, B** y **C**, mientras que el soporte de **P**, se orienta según se ilustra, determine:

    a) La expresión vectorial de las fuerzas **M, N, O,** y **P**
    b) La expresión vectorial y la magnitud de la fuerza resultante de **F**
    c) La dirección de dicha fuerza resultante




**Solución**

a)

$$\bar{\mathbf{M}} = 900\left(\frac{3i+4j}{5}\right) = \underline{\mathbf{540i + 720j\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{N}} = 420\left(\frac{3i+6j+2k}{7}\right) = \underline{\mathbf{180i + 360j + 120k\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{O}} = 250\sqrt{68}\left(\frac{2i+8k}{\sqrt{68}}\right) = \underline{\mathbf{500i + 2000k\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = 360\left(-\frac{8}{9}i+\frac{4}{9}j+\frac{1}{9}k\right) = \underline{\mathbf{-320i + 160j + 40k\ N}}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{N}} + \bar{\mathbf{O}} + \bar{\mathbf{P}}$$

b)

$$\underline{\mathbf{\bar{R}_F = 900i + 1240j + 2160k\ N}}$$

$$\underline{\mathbf{|\bar{R}_F| = 2648.24\ N}}$$

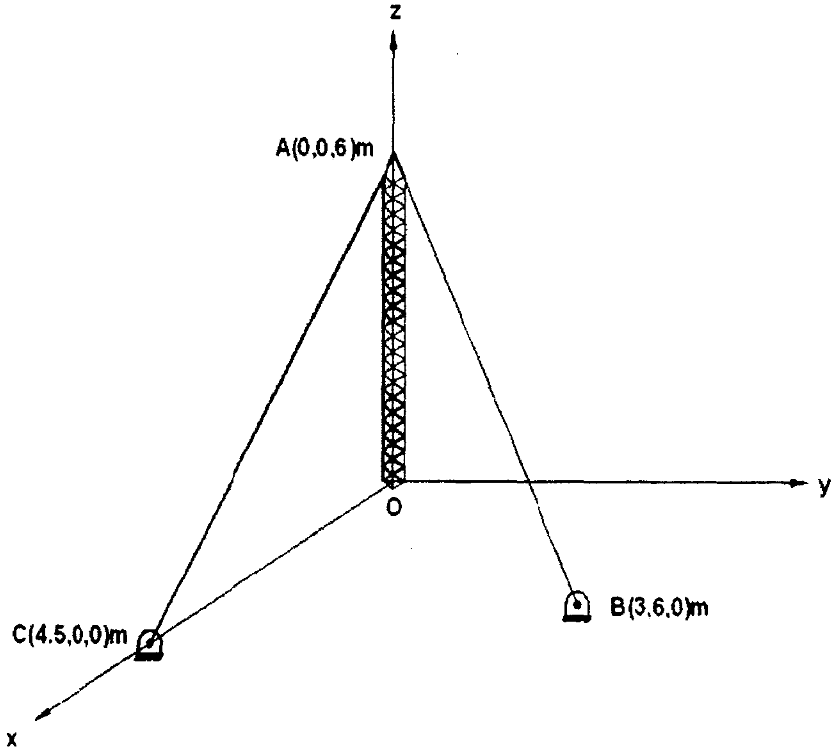
c)

$$\propto_R = \cos^{-1}\left(\frac{900}{2648.24}\right) = \underline{\mathbf{70.13^{\circ}}}$$

$$\beta_R = \cos^{-1}\left(\frac{1240}{2648.24}\right) = \underline{\mathbf{62.08^{\circ}}}$$

$$\gamma_R = \cos^{-1}\left(\frac{2160}{2648.24}\right) = \underline{\mathbf{35.34^{\circ}}}$$

12. Considerando que las fuerzas de los cables **AC** y **AB** de la figura tienen magnitudes de **5 kN** y **3 kN**, respectivamente, de modo que mantienen vertical a la torre **OA** mostrada, determine el ángulo **θ** que se forma entre los cables y verifique el cumplimiento del Teorema de Varignon, considerando momentos de esas dos fuerzas, así como de su resultante, con respecto al punto **D(0,4,0) m**.




**Solución**

$$\overline{T_{AC}} = 5\left(\frac{4.5i - 6k}{7.5}\right) = 3i - 4k \text{ Kn}$$

$$\overline{T_{AB}} = 3\left(\frac{3i + 6j - 6k}{9}\right) = i + 2j - 2k \text{ kN}$$

$$\theta = \text{angcos}\frac{T_{AC} \cdot T_{AB}}{|T_{AC}||T_{AB}|} = \text{ang cos}\frac{3+8}{(5)(3)} = \text{ang cos}\frac{11}{15}$$

$\therefore \underline{\boldsymbol{\theta = 42.83°}}$

$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{T_{AC}}} + \overline{\mathbf{T_{AB}}} = 4i + 2j - 6k\ kN$

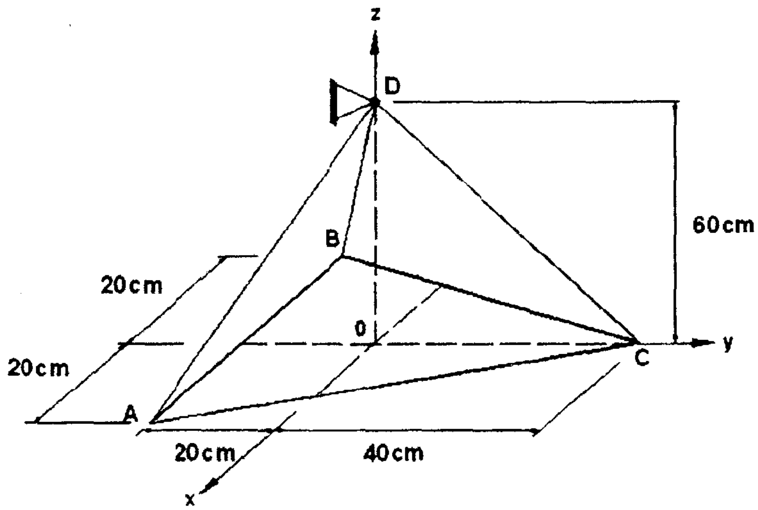
$\overline{\mathbf{M_D^R}} = \overline{\mathbf{M_D^{T_{AC}}}} + \overline{\mathbf{M_D^{T_{AB}}}}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4.5 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

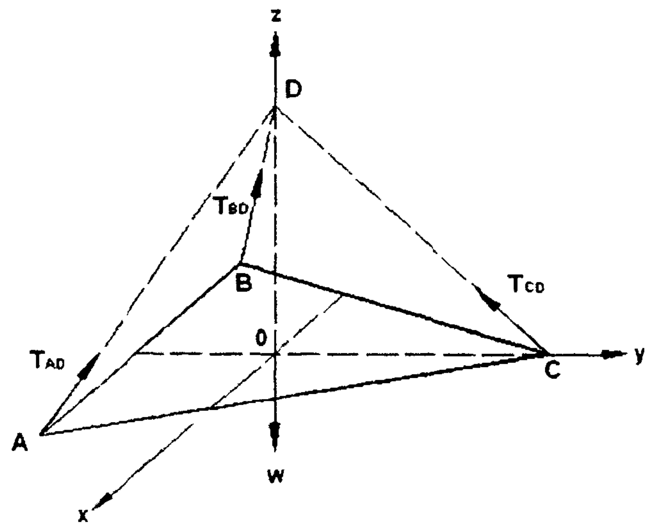
$12i + 24j + 16k = (16i + 18j + 12k) + (-4i + 6j + 4k)$

$\therefore \underline{\mathbf{12i + 24j + 16k = 12i + 24j + 16k}}$

13. Determinar la tensión de los cables que sostienen en sus vértices a la placa triangular de peso total **16 kg** mostrada, que se encuentra en equilibrio en posición horizontal.




**Solución**




De la figura se obtiene:

A (20,-20,0) cm  B (-20,-20,0) cm  C (0, 40,0) cm  D (0, 0,60)cm

$$-16k + T_{AD}\left(\frac{-20i + 20j + 60k}{\sqrt{4400}}\right) + T_{BD}\left(\frac{20i + 20j + 60k}{\sqrt{4400}}\right) + T_{CD}\left(\frac{-40j + 60k}{\sqrt{5200}}\right) = \bar{0}$$

$$(-0.3T_{AD} + 0.3T_{BD})i + (0.3T_{AD} + 0.3T_{BD} - 0.55T_{CD})j + (-16 + 0.9T_{AD} + 0.9T_{BD} + 0.83T_{CD})k = \bar{0}$$

$$-0.3T_{AD} + 0.3T_{BD} = 0$$

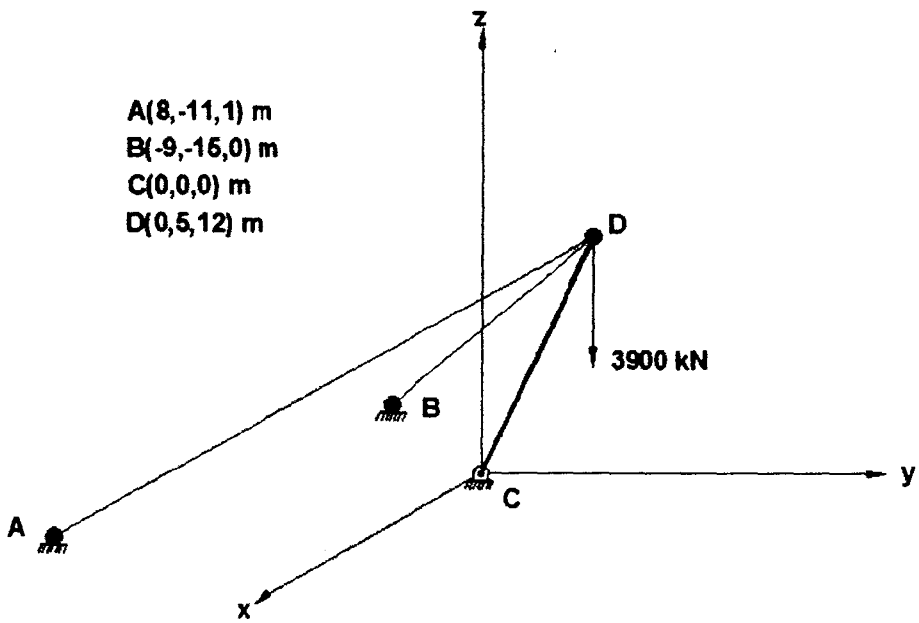
$$0.3T_{AD} + 0.3T_{BD} - 0.55T_{CD} = 0$$

$$0.9T_{AD} + 0.9T_{BD} + 0.83T_{CD} = 16$$

$$\underline{\mathbf{T_{AD} = T_{BD} = 5.91\ N}}$$

$$\underline{\mathbf{T_{CD} = 6.44\ N}}$$

14. En la figura se muestra una barra articulada sostenida por dos cables y sujeta a la acción de la fuerza **F** de magnitud igual a **3900 [kN]** dirigida hacia abajo y paralela al eje **z**. Para la condición de equilibrio, determine las fuerzas actuantes sobre la barra **CD** y los cables **DA** y **DB**. Considere que la barra **CD** está contenida en el plano **yz**.




**Solución**

$$\vec{F}_{\overline{DA}} + \vec{F}_{\overline{DB}} + F_{\overline{CD}} + \vec{F}_{3900} = \overline{0}$$

$$\vec{F}_{\overline{DA}} = F_{\overline{DA}}\left(\frac{8i - 16j - 11k}{\sqrt{8^2 + 16^2 + 11^2}}\right) = \frac{8}{21}F_{\overline{DA}}i - \frac{16}{21}F_{\overline{DA}}j - \frac{11}{21}F_{\overline{DA}}k$$

$$\vec{F}_{\overline{DB}} = F_{\overline{DB}}\left(\frac{-9i - 20j - 12k}{\sqrt{81^2 + 20^2 - 12^2}}\right) = -\frac{9}{25}F_{\overline{DB}}i - \frac{20}{25}F_{\overline{DB}}j - \frac{12}{25}F_{\overline{DB}}k$$

$$\vec{F}_{\overline{CD}} = F_{\overline{CD}}\left(\frac{0i + 5j + 12k}{\sqrt{0^2 + 5^2 + 12^2}}\right) = \frac{0}{13}F_{\overline{CD}}i + \frac{5}{13}F_{\overline{CD}}j + \frac{12}{13}F_{\overline{CD}}k$$

$$\vec{F}_{3900} = 0i + 0j - 3900k$$

Igualando componentes:

$$\frac{8}{21}F_{\overline{DA}} - \frac{9}{25}F_{\overline{DB}} + \frac{0}{13}F_{\overline{CD}} = 0 \qquad \text{...(1)}$$

$-\frac{16}{21}F_{\overline{DA}} - \frac{20}{25}F_{\overline{DB}} + \frac{5}{13}F_{\overline{CD}} = 0 \qquad ...(2)$

$-\frac{11}{21}F_{\overline{DA}} - \frac{12}{25}F_{\overline{DB}} + \frac{12}{13}F_{\overline{CD}} = 3900 \qquad ...(3)$

Resolviendo (1), (2) y (3):

$$\begin{vmatrix} +\frac{8}{21} & -\frac{9}{25} & +\frac{0}{13} \\ -\frac{16}{21} & -\frac{20}{25} & +\frac{5}{13} \\ -\frac{11}{21} & -\frac{12}{25} & +\frac{12}{13} \end{vmatrix} \begin{matrix} +\frac{8}{21} & -\frac{9}{25} \\ -\frac{16}{21} & -\frac{20}{25} \\ -\frac{11}{21} & -\frac{12}{25} \end{matrix} =$$

$$= \left(-\frac{1920}{6825} + \frac{480}{6825}\right) + \left(+\frac{495}{6825} - \frac{1728}{6825}\right) + \left(\frac{0}{6825} - \frac{0}{6825}\right); \qquad A = -\frac{2673}{6825}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{9}{25} & +\frac{0}{13} \\ 0 & -\frac{20}{25} & +\frac{5}{13} \\ 3900 & -\frac{12}{25} & +\frac{12}{13} \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -\frac{9}{25} \\ 0 & -\frac{20}{25} \\ 3900 & -\frac{12}{25} \end{matrix} = 0 + \left(-\frac{175500}{325} - 0\right) + 0$$

$$AF_{\overline{DA}} = -\frac{175500}{325} \quad ; \quad F_{\overline{DA}} = \frac{-\frac{175500}{325}}{-\frac{2673}{6825}}$$

$\mathbf{F_{\overline{DA}} = 1378.78\ kN}$

$$\begin{vmatrix} +\frac{8}{21} & 0 & +\frac{0}{13} \\ -\frac{16}{21} & 0 & +\frac{5}{13} \\ -\frac{11}{21} & 3900 & +\frac{12}{13} \end{vmatrix} \begin{matrix} +\frac{8}{21} & 0 \\ -\frac{16}{21} & 0 \\ -\frac{11}{21} & 3900 \end{matrix} = -\frac{156000}{273}$$

$$AF_{\overline{DB}} = -\frac{156000}{273} \quad ; \quad F_{\overline{DB}} = \frac{-\frac{156000}{273}}{-\frac{2673}{6825}} = \frac{1064700000}{729729}$$

$\mathbf{F_{\overline{DB}} = 1459.03\ kN}$

$$\begin{vmatrix} +\frac{8}{21} & -\frac{9}{25} & 0 \\ -\frac{16}{21} & -\frac{20}{25} & 0 \\ -\frac{11}{21} & -\frac{12}{25} & 3900 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} +\frac{8}{21} & -\frac{9}{25} \\ -\frac{16}{21} & -\frac{20}{25} \\ -\frac{11}{21} & -\frac{12}{25} \end{vmatrix} = -\frac{624000}{525} - \frac{561600}{525}$$

$$AF_{\overline{CD}} = -\frac{1185600}{525} \;;\; F_{\overline{CD}} = \frac{-\frac{1185600}{525}}{-\frac{2673}{6825}} = \frac{8091720}{1403325}$$

$$\underline{\mathbf{F_{\overline{CD}} = 5766.1055\ kN}}$$

Comprobación:

$$\vec{F}_{\overline{DA}} = 1378.78\left[\frac{8}{21}i - \frac{16}{21}j - \frac{11}{21}k\right] = 525.25i - 1050.50j - 722.22k\ kN$$

$$\vec{F}_{\overline{DB}} = 1459.03\left[-\frac{9}{25}i - \frac{20}{25}j - \frac{12}{25}k\right] = -525.25i - 1167.22j - 700.33k\ kN$$

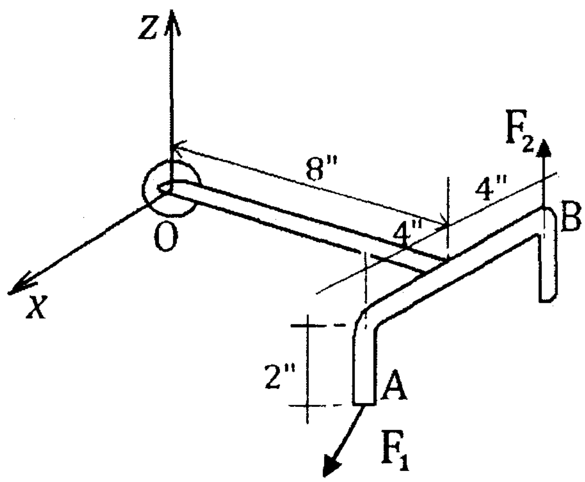
$$\vec{F}_{\overline{CD}} = 5766.1055\left[\frac{0}{13}i + \frac{5}{13}j + \frac{12}{13}k\right] = 0i + 2217.73j + 5322.56k\ kN$$

$$\vec{F}_{3900} = 0i + 0j - 3900k\ kN$$

Se verifica:

$$\vec{F}_{\overline{DA}} + \vec{F}_{\overline{DB}} + \vec{F}_{\overline{CD}} + \vec{F}_{3900} = 0i + 0j + 0k$$

15. Suponga que un piloto aplica dos fuerzas: **$F_1 = 8i + 4j - 2k$ lb** a uno de los extremos del volante de la figura en el punto **A** y, **$F_2 = 5k$ lb** en el otro extremo en el punto **B**, en un intento de girar el volante. Calcule el momento resultante con respecto al punto **O**, ocasionado por estas dos fuerzas.




**Solución**

$$\sum M_O = 0$$

$$\bar{M}_O = (4i + 8j - 2k) \times (8i + 4j - 2k) + (-4i + 8j) \times (5k)$$

$$\underline{\bar{\mathbf{M}}_O = \mathbf{32i + 12j - 48k \ \ lb \cdot in}}$$

16. Considérense los puntos **A (3, -1, 2) m** y **B (1, -3, 1) m**, así como una fuerza **F** de magnitud igual a **12 N,** cuyo soporte pasa por **A** y por **B,** y su sentido es el del segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$. Con base en ello determine:

a) El vector representativo de **F**
b) Los momentos de **F** respecto al origen y respecto a **D (-1,-5,0) m**. ¿Qué puede deducirse de lo obtenido como momento de **F** respecto a D?
c) El momento de **F** respecto a un eje que, pasando por el origen **O** (del sistema de referencia) y por el punto **E (-6, 2, 3) m**, está orientado de **O** hacia **E**

**Solución**

$$\bar{F} = |\bar{F}|\overline{e_{AB}}; \quad \bar{F} = 12\left(\frac{-2i - 2j - k}{3}\right)$$

a) $\underline{\mathbf{\bar{F} = -8i - 8j - ak\ \ N}}$

$$\bar{M}_o^F = \bar{O}A x \bar{F}; \quad \bar{M}_o^F = (3i - j + 2k) \times (-8i - 8j - 4k)$$

b) $\underline{\mathbf{\bar{M}_o^F = 20i - 4j - 32k\ \ N \cdot m}}$

$$\bar{M}_D^F = \bar{D}A x \bar{F}; \quad \bar{M}_D^F = (4i - 4j + 2k) \times (-8i - 8j - 4k)$$

b) $\underline{\mathbf{\bar{M}_D^F = \bar{0}\ N \cdot m}}$; **D es un punto del soporte de $\bar{F}$**

$$\bar{M}_{oE}^F = \left(\bar{M}_o^F \cdot \overline{e_{OE}}\right) \cdot \overline{e_{OE}}$$

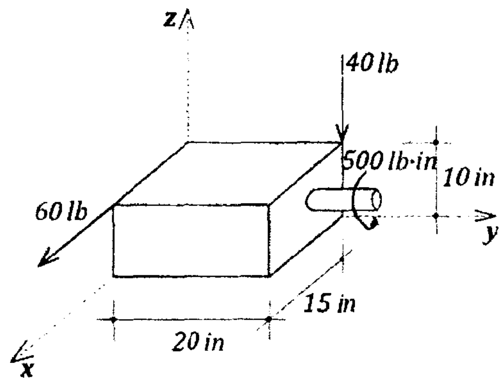
$$\left|\bar{M}_{oE}^F\right| = (20i - 4j - 32k) \cdot \left(\frac{-6i + 2j + 3k}{7}\right)$$

$$\bar{M}_{oE}^F = -32\left(\frac{-6i + 2j + 3k}{7}\right)$$

c) $\underline{\mathbf{\bar{M}_{oE}^F = 27.42i - 9.14j - 13.71\ N \cdot m}}$

## Capítulo 3. Sistemas equivalentes de fuerzas

17. Considerando que el momento de **500 lb·ft** es producido por un par de fuerzas y está alojado en un plano paralelo al **xz,** sustituya el sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo de la figura, por un sistema fuerza-par equivalente, en que la fuerza resultante esté aplicada en el origen del sistema de referencia mostrado. Conteste en forma vectorial.




**Solución**

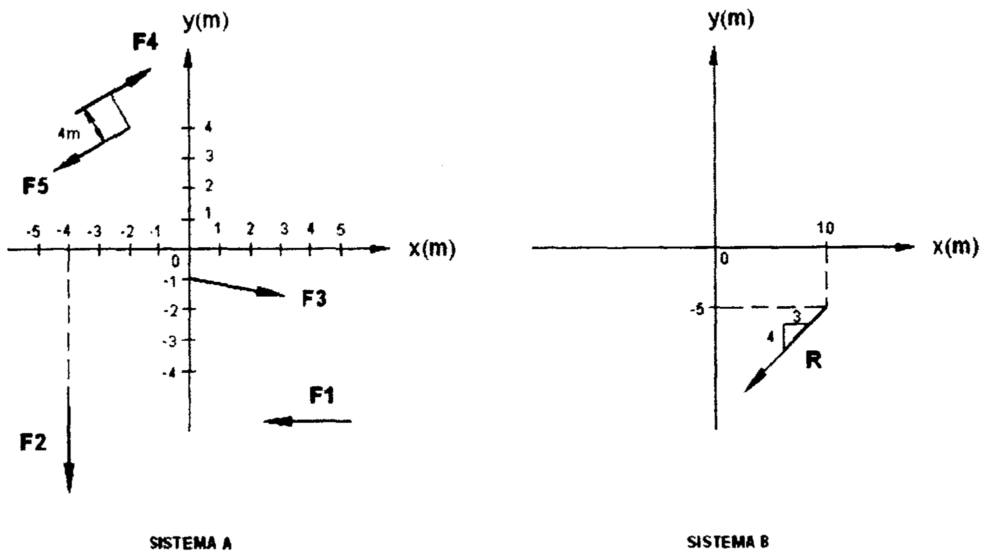
$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{60i - 40k\ lb}$

$\overline{M_O} = -40(20)i + (60(10) + 500)j\ \text{lb} \cdot \text{in}$

$\overline{\mathbf{M_O}} = \mathbf{-800i + 1100j\ \ lb \cdot in}$

**Para que $\bar{\mathbf{R}}$ se aplique en el origen, $\overline{\mathbf{M_{par}}} = \overline{\mathbf{M_O}}$**

18. Los sistemas de fuerzas coplanares **A** y **B** mostrados son equivalentes. Sabiendo que $\mathbf{F_1}$ es igual a **-20i N**, $\mathbf{F_2}$ es **-10j N**, las magnitudes de $\mathbf{F_4}$ y $\mathbf{F_5}$ son **8 N** y el momento de **R** con respecto al origen es **-220k N·m**, determine $\mathbf{F_3}$ y **R**, así como un punto del soporte de $\mathbf{F_1}$.




**Solución**

$$\bar{M}_o^R = (10i - 5j) \times (-0.6Ri - 0.8Rj)$$

$$\bar{M}_o^R = -11Rk = -220k$$

$$-11R = -220 \Rightarrow \quad \mathbf{R = 20 \ \ N}$$

$$\therefore \underline{\mathbf{\bar{R} = -12i - 16j \ \ N}}$$

$$\overline{\mathbf{F_1}} + \overline{\mathbf{F_2}} + \overline{\mathbf{F_3}} + \overline{\mathbf{F_4}} + \overline{\mathbf{F_5}} = \overline{\mathbf{R}}$$

$$-20i - 10j + \overline{F_3} + \bar{0} = -12 - 16j$$

$$\therefore \underline{\mathbf{\overline{F_3} = 8i - 6j \ \ N}}$$

$$\bar{M}_o^{SA} = (aj) \times (-20i) + (-4i) \times (-10j) + (-j) \times (8i - 6j) - 32k = -220k$$

$$\bar{M}_o^{SA} = (20a + 16)k = -220k \ ; \qquad 20a + 16 = -220 \Rightarrow \quad \mathbf{a = -11.8m}$$

$$\therefore \underline{\mathbf{P(0, -11.8)m \text{ es un punto del soporte de } \bar{F}_1}}$$

19. Sobre una esfera fija, que tiene centro en el origen y radio **5 m**, actúa un sistema **S** conformado por las seis fuerzas definidas enseguida, donde las fuerzas están en **N** y las coordenadas en metros.

| | | |
|---|---|---|
| $F_A = 2i - 4j$, | aplicada en | A (0, 0, 5) |
| $F_B = 2i + 4k$, | aplicada en | B (0, -5, 0) |
| $F_C = bj + 6k$, | aplicada en | C (5, 0, 0) |
| $F_D = -5k$, | aplicada en | D (4, 0, -3) |
| $F_E = 2i - 1.5k$, | aplicada en | E (3, 0, 4) |
| $F_G = -2i + 1.5k$, | aplicada en | G (-3, 0, -4) |

Bajo las condiciones establecidas, determine:

a) El valor que debe tener **b** para que **S** pueda reducirse a una sola fuerza
b) Una ecuación cartesiana de la línea de acción de la resultante correspondiente (considerando el valor de **b** que pidió determinarse en el inciso **a)** de este problema)

**Solución**

$\bar{\mathbf{R}} = \overline{F_A} + \overline{F_B} + \overline{F_C} + \overline{F_D} + \overline{F_E} + \overline{F_G}$ ; $\quad \bar{\mathbf{R}} = 4i + (b-4)j + 5k$ N

$$\overline{\mathbf{M_O}} = \bar{M}_O^{F_A} + \bar{M}_O^{F_B} + \bar{M}_O^{F_C} + \bar{M}_O^{F_D} + \bar{M}_O^{F_E} + \bar{M}_O^{F_G}$$

$$\overline{\mathbf{M_O}} = (5h) \times (2i - 4j) + (-5j) \times (2i + 4k) + (5i) \times (bj + 6k) + (4i - 3k) \times (-5k) + (3i + 4k) \times (2i - 1.5k) + (-3i - 4k) \times (-2i + 1.5k)$$

$$\overline{\mathbf{M_O}} = 25j + (10 + 5b)k \quad \mathrm{N \cdot m}$$

$\bar{\mathbf{R}} \cdot \overline{\mathbf{M_O}} = \mathbf{0}$; $\quad (4i + (b-4)j + 5k) \cdot (25j + (10+5b)k) = 0$; $\quad 50b - 50 = 0$

a) $\mathbf{b = 1}$

$\therefore \bar{\mathbf{R}} = 4i - 3j + 5k$ N

$\overline{\mathbf{M_O}} = 25j + 15k$ N · m

$\bar{r} \times \bar{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{M_O}}$; $\quad (xi + yj + zk) \times (4i - 3j + 5k) = 25j + 15k$

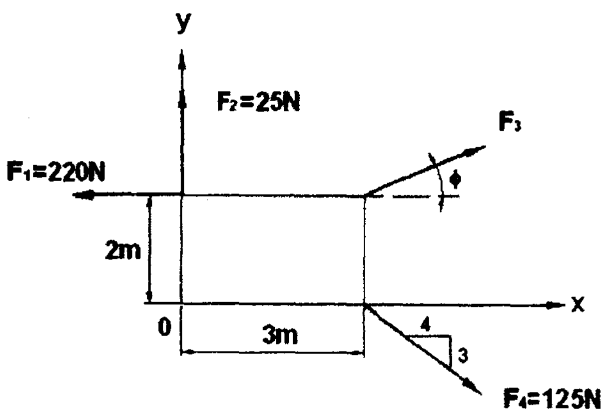
$5y + 3z = 0 \quad \ldots (1) \qquad 4z - 5x = 25 \quad \ldots (2) \qquad -3x - 4y = 15 \quad \ldots (3)$

de (1), (2) y (3)

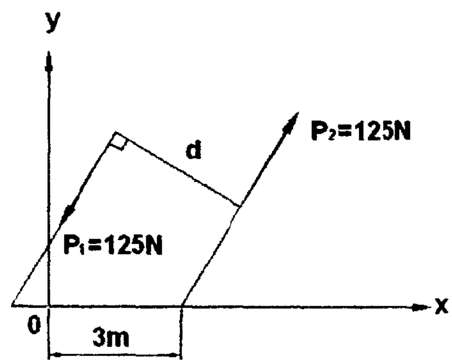
b) $\mathbf{x = \frac{4}{5}z - 5 = -\frac{4}{3}y - 5}$

20. Los sistemas de fuerzas $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ mostrados en las siguientes figuras son equivalentes. Si todas las fuerzas mostradas se encuentran en el plano **xy**, considerando que $\mathbf{S_1}$ está conformado por las fuerzas $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$ y $\mathbf{F_4}$, mientras que $\mathbf{S_2}$ se compone por el par de fuerzas formado por $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$, teniendo en cuenta la información proporcionada, determine:

a) La magnitud de la fuerza $\mathbf{F_3}$
b) La distancia **d** del par de fuerzas del sistema $\mathbf{S_2}$




SISTEMA S1




SISTEMA S2

**Solución**

$$\overline{\mathbf{R_1}} = (-220 + 125(0.8) + F_3 \cos \emptyset)i + (25 - 125(0.6) + \quad F_3 \operatorname{sen} \emptyset)j$$

$$\overline{\mathbf{R_1}} = (-120 + F_3 \cos \emptyset)i + (-50 + F_3 \operatorname{sen} \emptyset)j$$

$$\overline{\mathbf{R_2}} = \bar{0}$$

Igualando $\overline{R_1}$ y $\overline{R_2}$:

$$F_3 \cos \emptyset = 120 \qquad ...(1)$$

$$F_3 \operatorname{sen} \emptyset = 50 \qquad ...(2)$$

De (1) y (2):

$$F_3^2(\cos^2\emptyset + \operatorname{sen}^2\emptyset) = 16900; \qquad \Rightarrow F_3 = [16900]^{1/2}$$

a) $\underline{\mathbf{F_3 = 130\ N}}$

$M_O^{F_1} + M_O^{F_2} + M_O^{F_3} + M_O^{F_4} = Mpar$

$M_O^{S_1} = 220(2) - 130\left(\frac{12}{13}\right)(2) + 130\left(\frac{5}{13}\right)(3) - 125\left(\frac{3}{5}\right)(3)$

$M_O^{S_1} = 125$ ...(3)

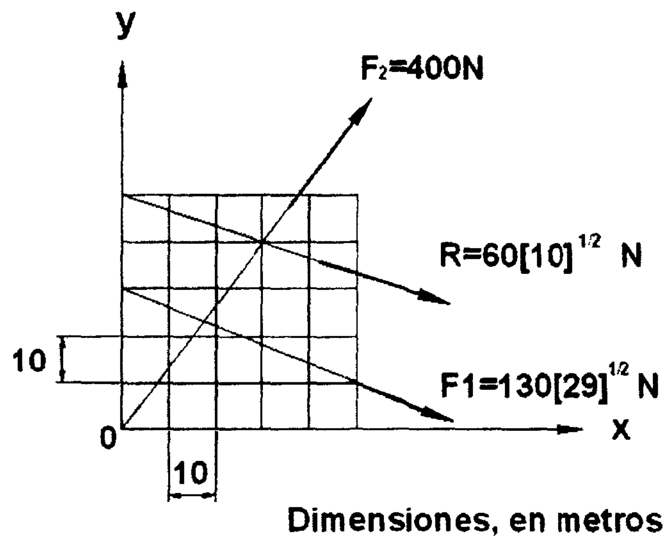
$M_O^{S_2} = 125d$ ...(4)

Igualando (3) y (4):

$125 = 125d;$

b)$\underline{\mathbf{d = 1\ m}}$

21. En la figura, se muestra la fuerza **R**, la cual es equivalente al sistema formado por tres fuerzas $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_3}$. Si las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ tienen la magnitud y direcciones indicadas, determine la magnitud, así como dos puntos de la línea de acción de la fuerza $\mathbf{F_3}$.




**Solución**

A partir de la información de la figura, las componentes de **R**, $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ se pueden expresar como:

Para **R**:

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\mathrm{R}\cos\theta = 60\sqrt{10}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = 18\ \mathrm{N}$$

$$-\mathrm{R}\operatorname{sen}\theta = -60\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}} = -6\ \mathrm{N}$$

Para $\mathbf{F_1}$:

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{29}}; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\mathrm{F_1}\cos\theta = 130\sqrt{29}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = 650\ \mathrm{N}$$

$$-F_1 \operatorname{sen}\theta = -130\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = -260 \text{ N}$$

Para **$F_2$**:

$$\cos\theta = \frac{3}{5}; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$$

$$F_2\cos\theta = 400\left(\frac{3}{5}\right) = 240 \text{ N}$$

$$F_2\operatorname{sen}\theta = 400\left(\frac{4}{5}\right) = 320 \text{ N}$$

Considerando las componentes obtenidas, **R**, **$F_1$**, **$F_2$** y **$F_3$** quedan expresadas como:

$\mathbf{F_1} = 650\mathrm{i} - 26 \qquad ...(1)$

$\mathbf{F_2} = 240\mathrm{i} + 320 \qquad ...(2)$

$\mathbf{F_3} = F_3x\mathrm{i} + F_3y\mathrm{j} \qquad ...(3)$

$\mathbf{R} = 180\mathrm{i} - 60\mathrm{j} \qquad ...(4)$

Dado que:

$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$ y tomando cuenta (1), (2), (3) y (4), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$180 = 650 + 240 + F_3x$$

$$-60 = -260 + 320 + F_3y$$

Cuya solución es:

$$F_3x = -710 \text{ N}$$

$$F_3y = 120 \text{ N}$$

Por lo tanto **$F_3$** se escribe como:

**$\underline{F_3 = -710\mathrm{i} - 120\mathrm{j} \text{ N}}$**

Ahora se procederá a calcular los momentos de **R**, **$F_1$**, **$F_2$** y **$F_3$** respecto al origen:

$M_0^R = 5j x(180i - 60j) = -900k \ N \cdot m$

$M_O^{F1} = 3j x(650i - 260j) = -1950k \ N \cdot m$

$M_O^{F2} = \bar{0} = \bar{0} \ N \cdot m$

$M_O^{F3} = (xi + yj) \times (-710i - 120j) = (-120x + 710y)k \ N \cdot m$

Tomando en cuenta los momentos obtenidos se tiene:

$M_0^R = M_O^{F1} + M_O^{F2} + M_O^{F3}$

De donde se obtiene la siguiente ecuación:

$-900 = 1950 - 120x + 710y$

Simplificando términos:

$1050 = -120x + 710y$

Resolviendo:

$x = 0$, $y = 1.478$ m

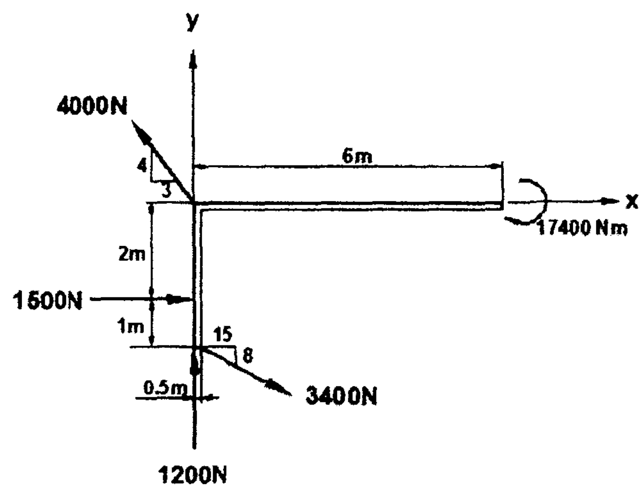
$y = 0$, $x = -8.75$ m

Por lo tanto dos puntos de la línea de acción de $F_3$ son:

$\underline{\mathbf{P_1(0, 1.478)\ m}}$

$\underline{\mathbf{P_2(-8,75, 0) m}}$

22. Dado el sistema de fuerzas mostrado en la figura, determine su representación mínima equivalente, indicando dos puntos de la línea de acción por donde pasa la fuerza resultante.




**Solución**

$\vec{F}_{1500} = 1500i + 0j \ \text{N}$

$\vec{F}_{1200} = 0i + 1200j \ \text{N}$

$\vec{F}_{3400} = 3000i - 1600j \ \text{N}$

$\vec{F}_{4000} = -2400i + 3200j \ \text{N}$

$\therefore \ \vec{R} = 2100i + 2800j \ \text{N}$

$\vec{M}_0^{4000} = \overline{0} \ \text{N} \cdot \text{m}$

$\vec{M}_0^{1500} = 3000k \ \text{N} \cdot \text{m}$

$\vec{M}_0^{1200} = \overline{0} \ \text{N} \cdot \text{m}$

$\vec{M}_0^{3400} = 8200k \ \text{N} \cdot \text{m}$

$\vec{m}_{17400} = -17400k \ \text{N} \cdot \text{m}$

$\therefore \ \vec{M}_o = -6200k \ \text{N} \cdot \text{m}$

$\vec{R} \cdot \vec{M}_o = (2100i + 2800j) \cdot (-6200k) = 0$

**El sistema se reduce a una fuerza que no pasa por el origen.**

$$\vec{r}\times\vec{R}=\vec{M}_o; \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 2100 & 2800 & 0 \end{vmatrix} = (2800x-2100y)k = 6200k$$

Lo que da lugar al sistema de ecuaciones siguiente:

$-200z = 0$

$-200z = 0$

$2800x - 2100y = -6200 = 0$

Que al resolverse, se obtiene:

Para x=0

$y = 2.95$ m

$z = 0$ m

Por lo tanto dos puntos de la línea de acción de la resultante **R** son:

$\underline{\mathbf{P_1(\,0, 2.95, 0)m}}$

$\underline{\mathbf{P_2(-2.21, 0, 0)m}}$

23. Sea **S** un sistema constituido por las siguientes tres fuerzas, donde las fuerzas están en **newtons** y las coordenadas en **metros**.

| | | |
|---|---|---|
| **$F_1$ = 2i-3j-4k** | cuyo soporte pasa por | **O (0, 0, 0)** |
| **$F_2$ = 3j+2k** | cuyo soporte pasa por | **P (6, 0, 0)** |
| **$F_3$ = -i+2j** | cuyo soporte pasa por | **Q (0, 0, -6)** |

Con la información proporcionada:

a) Compruebe que **S** puede reducirse a un motor
b) Obtenga el momento del motor del sistema **$S_E$**, a que puede reducirse **S**
c) Determine una ecuación del eje central correspondiente al sistema **$S_E$**

**Solución**

$$\bar{\mathbf{R}} = (2i - 3j - 4k) + (3j + 2k) + (-i + 2j)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = i + 2j - 2k\,\mathrm{N} \quad \Rightarrow \bar{R} \neq \bar{0}$$

$$\overline{\mathbf{M_O}} = (6i) \times (3j + 2k) + (-6k) \times (-i + 2j)$$

$$\overline{\mathbf{M_O}} = 12i - 6j + 18k\,\mathrm{N \cdot m} \quad \Rightarrow \overline{M_O} \neq \bar{0}$$

$$\bar{\mathbf{R}} \cdot \overline{\mathbf{M_O}} = (i + 2j - 2k) \cdot (12i - 6j + 18k)$$

$$\bar{\mathbf{R}} \cdot \overline{\mathbf{M_O}} = -36 \quad \Rightarrow \bar{R} \cdot \overline{M_o} \neq 0$$

a) <u>**Se comprueba que S puede reducirse a un motor**</u>

$$\bar{\mathbf{m}} = \left(\frac{\overline{M_o} \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|}\right)\frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \left(\frac{-36}{3}\right)\left(\frac{i + 2j - 2k}{3}\right)$$

b) $\underline{\bar{\mathbf{m}} = -4\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}\,\mathbf{N \cdot m}}$

$$\overline{M_o} - \bar{m} = 16i + 2j + 10k$$

$$16i + 2j + 10k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$-2y - 27 = 16 \quad \Rightarrow y + z = -8 \quad \ldots (a)$

$2x + z = 2 \quad \ldots (b)$

$2x - y = 10 \quad \ldots (c)$

de (a) $\quad y = -z - 8 \quad \ldots (d)$

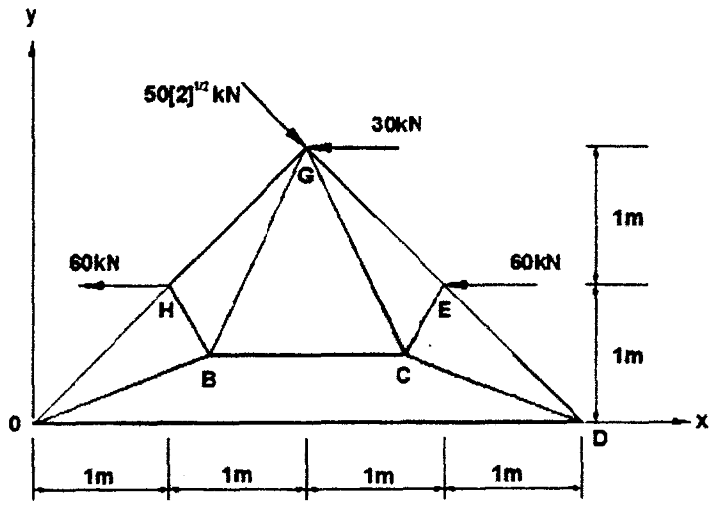
de (c) $\quad y = 2x - 10 \quad \ldots (e)$

Igualando (d) y (e):

c) $\underline{\mathbf{2x - 10 = y = -z - 8}}$

**Ecuación del eje central de $S_E$**

24. La armadura de la figura está sujeta a la acción de cuatro fuerzas: tres paralelas al eje **x** y la otra en la dirección **GD**, tal como se ilustra. Para estas condiciones de carga, determine el sistema de fuerzas mínimo equivalente, así como las coordenadas de dos puntos por donde pasa la línea de acción de la fuerza resultante.




**Solución**

$$\vec{R} = \sum_{f=1}^{n} \overline{F_i}$$

$$\vec{F}_{60} = -60i + 0j \;\; kN$$

$$\vec{F}_{30} = -30i + 0j \;\; kN$$

$$F_{60} = -60i + 0j \;\; kN$$

$$F_{50\sqrt{2}} = 50i - 50j \;\; kN$$

$$\vec{R} = -100i - 50j \;\; kN$$

$$\overrightarrow{M_o} = \sum_{f=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F_i}$$

$$\overline{M_0^{F_{60}}} = (i + j) \times (-60i) = 60k \;\; kN \cdot m$$

$$\overline{M_0^{F_{30}}} = (2i + 2j) \times (-30i) = 60k \;\; kN \cdot m$$

$$\overline{M_0^{F_{60}}} = (3i \times j) \times (-60i) = 60k \;\; kN \cdot m$$

$$\overline{M}_0^{F_{50\sqrt{2}}} = (2i + 2j) \times (50i - 50j) = -200k\ kN \cdot m$$

$$\overrightarrow{M_o} = -20k\ kN \cdot m$$

$$\overline{R} \cdot \overline{M} = (-100i - 50j) \cdot (-20k) = 0$$

**∴ Se reduce a una fuerza que no pasa por el origen**

$$(xi + yj) \times (-100i - 50j) = -20k$$

$$-50x + 100y = -20 \begin{cases} \text{para } x = 0m; & y = -0.2m \\ \text{Para } y = 0m; & x = 0.4m \end{cases}$$

**∴ P (0, -0.2) m y Q (0.4, 0) m**

Comprobación:

$$\overline{r}_m = \frac{\overline{R} \times \overline{M}_0}{R^2}$$

$$\vec{r}_m = \frac{(-100i - 50j) \times (-20k)}{(\sqrt{100^2 + 50^2})^2}$$

$$\vec{r}_m = 0.08i + 0.16j$$

$$|\overline{r}_m| = 0.179m$$

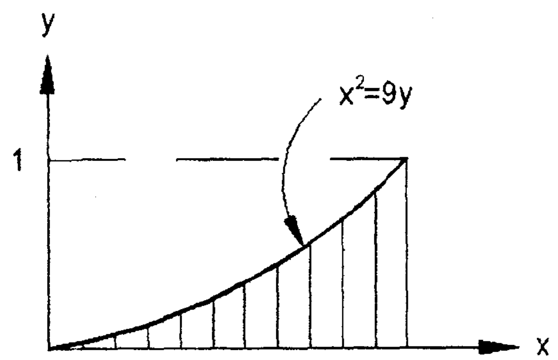
$$d = \frac{M}{F}$$

$$d = \frac{20}{111.80}$$

**$d = 0.179m$**

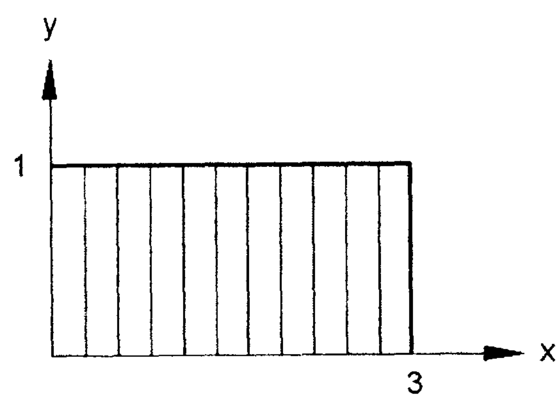
## Capítulo 4. Centroides de área de superficies planas

25. Determine el área, los primeros momentos respecto a los ejes del sistema de referencia indicado, así como las coordenadas del centroide del área de la superficie mostrada en la figura, considerando que tanto **x** como **y** están en **centímetros.**




**Solución**

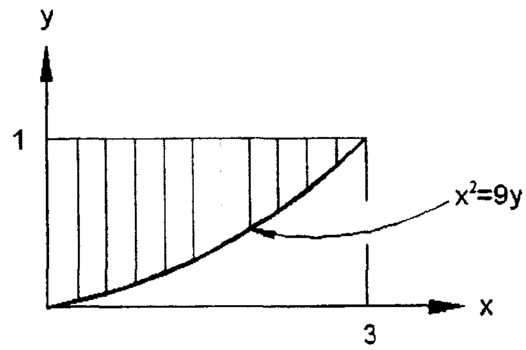
Calculando el área, los primeros momentos y determinando las coordenadas del centroide del rectángulo que se muestra a continuación:




$A_{\blacksquare} = 3cm^2$;  $M_{xx} = 1.5cm^3$;  $M_{yy} = 4.5cm^3$

$\overline{X}_{\blacksquare} = 1.5cm$;  $\overline{Y}_{\blacksquare} = 0.5cm$

Calculado en área, los primeros momentos y determinando las coordenadas del centroide de la superficie que se ilustra en la siguiente figura:




$$\mathbf{A} = \int_0^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^1 dydx = \int_0^3 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{27}\right)\Big|_0^3 = 2\text{cm}^2$$

$$\mathbf{M_{xx}} = \int_0^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^1 ydydx = \int_0^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{162}\right) dx = \frac{3}{2} - \frac{243}{810} = 1.2\text{cm}^3$$

$$\mathbf{M_{yy}} = \int_0^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^1 dyxdx = \int_0^3 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) xdx = \frac{9}{2} - \frac{81}{36} = 2.25\text{cm}^3$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{M_{yy}}}{\mathbf{A}} = 1.125\text{cm}; \qquad \overline{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{M_{xx}}}{\mathbf{A}} = 0.6\text{cm}$$

Considerando los resultados previamente determinados, se procede a calcular el área, los primeros momentos y las coordenadas del centroide solicitados:

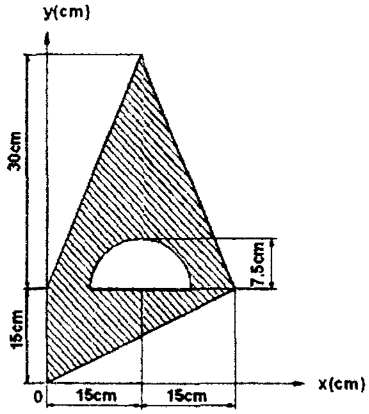
$\underline{\mathbf{A_{\Delta} = 3 - 2 = 1cm^2}}$

$\underline{\mathbf{M_{xx} = 1.5 - 1.2 = 0.3cm^3}}$

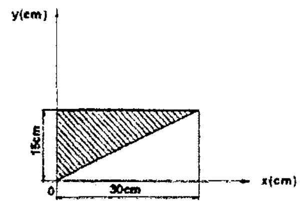
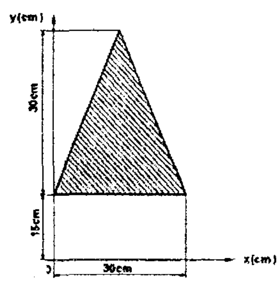
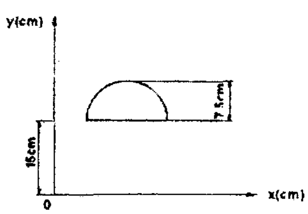
$\underline{\mathbf{M_{yy} = 4.5 - 2.25 = 2.25cm^3}}$

$\underline{\mathbf{\overline{X}_{\Delta} = 2.25cm}}$; $\qquad \underline{\mathbf{\overline{Y}_{\Delta} = 0.3cm}}$

26. La siguiente figura representa una placa delgada, recortada en su parte interior, donde no se encuentra rayada. Con base en ello, determine las coordenadas de su centroide, respecto al sistema de referencia dado.

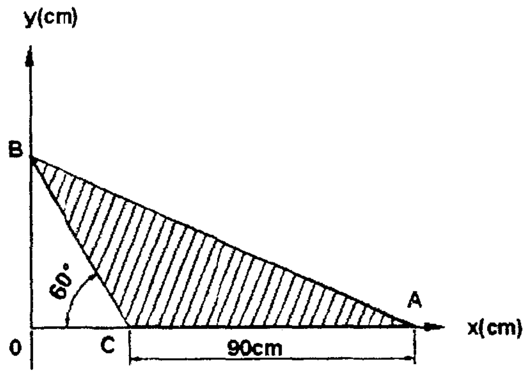



**Solución**

| Superficie | Área(cm²) | X(cm) | Y(cm) | $Q_{XX}$(cm³) | $Q_{YY}$(cm³) |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 225 | 10 | 10 | 2250 | 2250 |
|  | 450 | 15 | 25 | 11250 | 6750 |
|  | -88.357 | 15 | 18.183 | -1606.595 | -1325.355 |
| **Sumas totales** | 586.643 | | | 11893.405 | 7674.645 |

**$X_C = 13.082$ cm** **$X_C = 20.273$ cm**

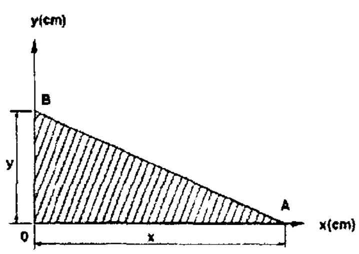
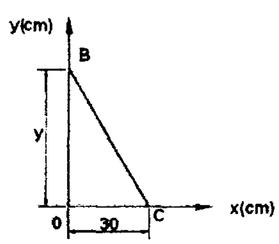
27. La siguiente figura representa una placa delgada. Considerando que la magnitud del segmento **CA** es igual a **1.5** veces la del segmento **CB**, determine las coordenadas de su centroide, respecto al sistema de referencia dado.




## Solución

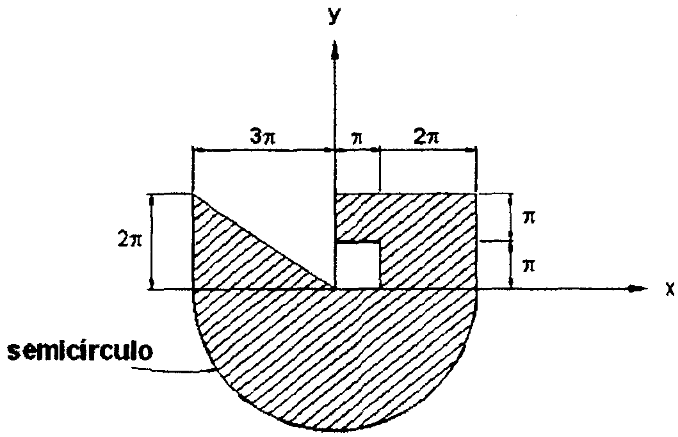
x= 90+60cos60⁰ = 120 cm

y= 60sen60⁰= 51.96 cm

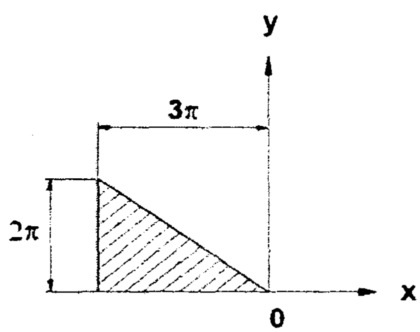
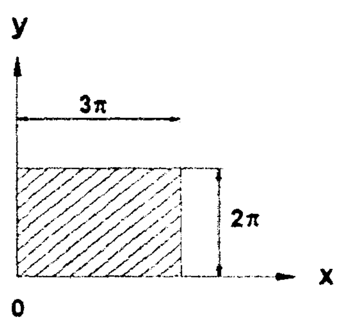
| Superficie | Área ($cm^2$) | X (cm) | Y (cm) | $Q_{XX}$ ($cm^3$) | $Q_{YY}$ ($cm^3$) |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 3117.6 | 40 | 17.32 | 53996.832 | 124704 |
|  | -779.4 | 10 | 17.32 | -13499.208 | -7794 |
| **Sumas totales** | 2338.2 | | | 40497.624 | 116910 |

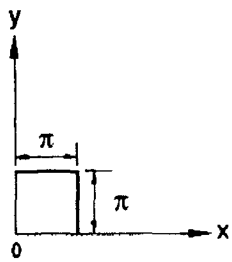
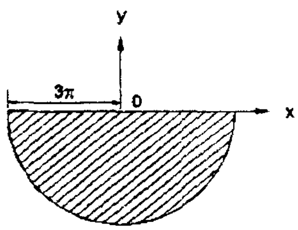
<u>$X_C$ = 50 cm</u>  <u>$Y_C$ = 17.32 cm</u>

28. Obtenga las coordenadas del centroide del área de la superficie compuesta de la figura, teniendo en cuenta el sistema de referencia dado. Las medidas proporcionadas están en **centímetros**.



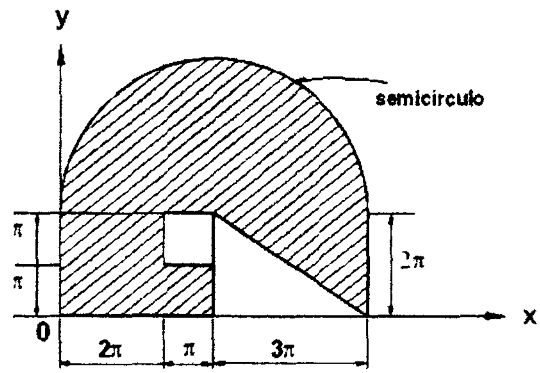

**Solución**

| Superficie | Área | X | Y | Qxx | Qyy |
|---|---|---|---|---|---|
|   | $3\pi^2$ | $-2\pi$ | $2\pi/3$ | $2\pi^3$ | $-6\pi^3$ |
|   | $6\pi^2$ | $1.5\pi$ | $\pi$ | $6\pi^3$ | $9\pi^3$ |

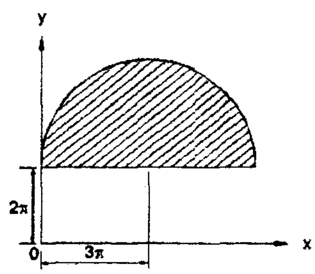
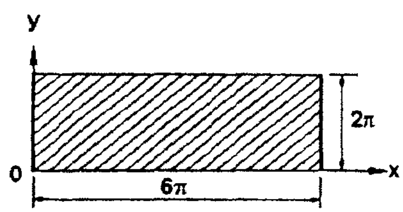
| Superficie | Área | X | Y | $Q_{XX}$ | $Q_{YY}$ |
|---|---|---|---|---|---|
|  | $-\pi^2$ | $05\pi$ | $05\pi$ | $-05\pi^3$ | $-05\pi^3$ |
|  | $4.5\pi^3$ | 0 | -4 | $-18\pi^3$ | 0 |
| **Sumas totales** | $\pi^2(4.5\pi+8)$ | | | $-10.5\pi^3$ | $2.5\pi^3$ |

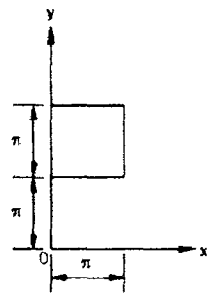
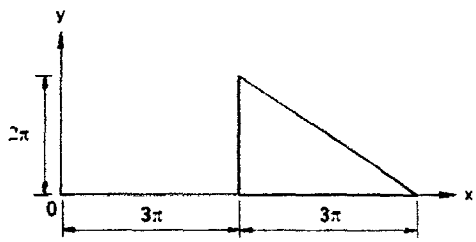
**$X_C$=0.354 cm** **$Y_C$=-1.490 cm**

29. La siguiente figura representa una placa delgada, de peso despreciable y homogénea, recortada en su parte interior. Con base en ello, determine las coordenadas de su centroide, respecto al sistema de referencia dado. Las medidas proporcionadas están en **centímetros**.



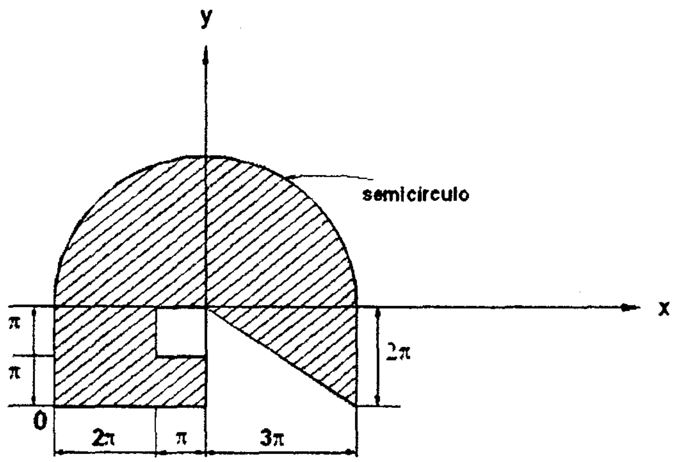

## Solución

| Superficie | Área | X | Y | Qxx | QYY |
|---|---|---|---|---|---|
|  | $4.5\pi^3$ | $3\pi$ | $4+2\pi$ | $18\pi^3+9\pi^4$ | $13.5\pi^4$ |
|  | $12\pi^2$ | $3\pi$ | $\pi$ | $12\pi^3$ | $36\pi^3$ |

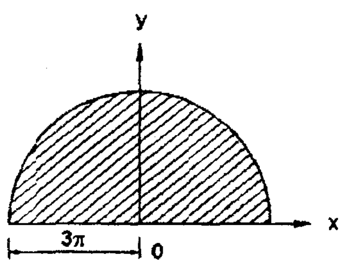
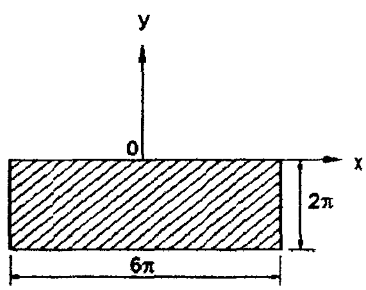
| Superficie | Área | X | Y | $Q_{XX}$ | $Q_{YY}$ |
|---|---|---|---|---|---|
|  | $-\pi^2$ | $2.5\pi$ | $1.5\pi$ | $-1.5\pi^3$ | $-2.5\pi^3$ |
|  | $-3\pi^2$ | $4\pi$ | $2\pi/3$ | $-2\pi^3$ | $-12\pi^3$ |
| **Sumas totales** | $\pi^2(4.5\pi+8)$ | | | $(26.5+9\pi)\pi^3$ | $\pi^3(13.5\pi+21.5)$ |

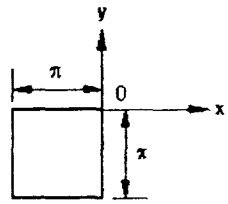
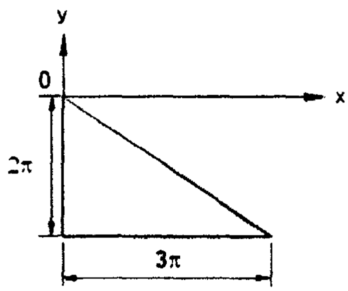
$X_C$=9.069 cm $Y_C$=-7.773 cm

30. La siguiente figura representa una placa delgada, de peso despreciable y homogénea, recortada en su parte interior. Con base en ello, determine las coordenadas de su centroide, respecto al sistema de referencia dado. Las medidas proporcionadas están en **centímetros.**




**Solución**

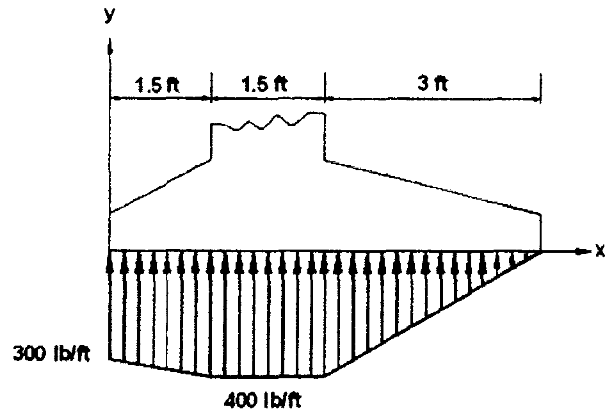
| Superficie | Área | X | Y | Qxx | Qyy |
|---|---|---|---|---|---|
|   | $4.5\pi^3$ | 0 | 4 | $18\pi^3$ | 0 |
|   | $12\pi^2$ | 0 | $-\pi$ | $-12\pi^3$ | 0 |

| Superficie | Área | X | Y | $Q_{XX}$ | $Q_{YY}$ |
|---|---|---|---|---|---|
|  | $-\pi^2$ | $-05\pi$ | $-05\pi$ | $05\pi^3$ | $05\pi^3$ |
|  | $-3\pi^2$ | $\pi$ | $-4\pi/3$ | $4\pi^3$ | $-3\pi^3$ |
| **Sumas totales** | $\pi^2(4.5\pi+8)$ | | | $10.5\pi^3$ | $-2.5\pi^3$ |

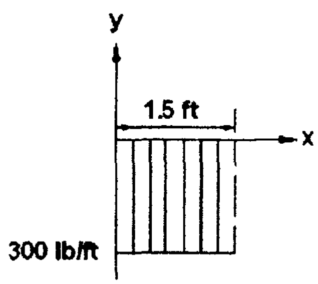
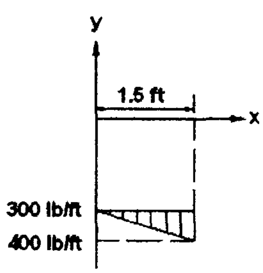
<u>**$X_C$=-0.354 cm**</u>  <u>**$Y_C$=1.490 cm**</u>

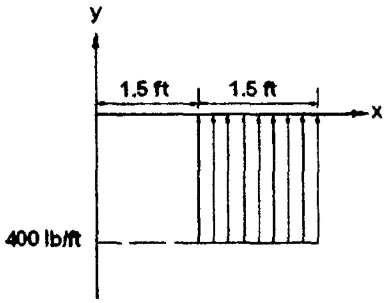
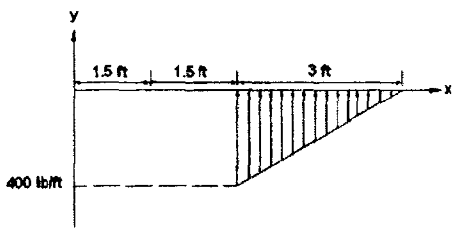
31. La reacción en la base de una zapata de concreto puede aproximarse a cargas cuya variación se muestra en la figura. A partir de la información proporcionada, determine:

a) La magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la zapata
b) La ubicación de dicha fuerza resultante



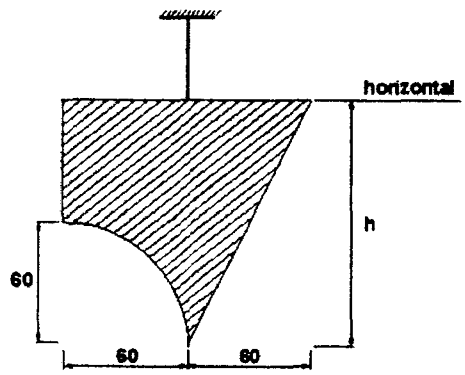

**Solución**

| Superficie | Área | X | $Q_{YY}$ |
|---|---|---|---|
|   | 4.50 | 0.75 | 337.5 |
|   | 75 | 1 | 75 |

| Superficie | Área | X | $Q_{YY}$ |
|---|---|---|---|
|  | 600 | 2.25 | 1350 |
|  | 600 | 4 | 2400 |
| **Sumas totales** | 1725 | | 4162.5 |

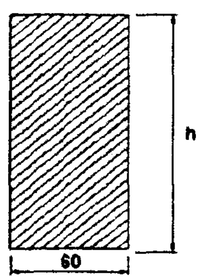
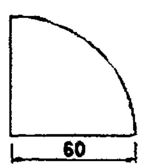
a) R=1725 lb b) X=2.413 ft

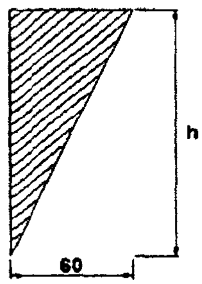
32. Calcule la distancia **h**, para que la placa delgada se conserve en la posición indicada en la figura.




Dimensiones en, cm

**Solución**

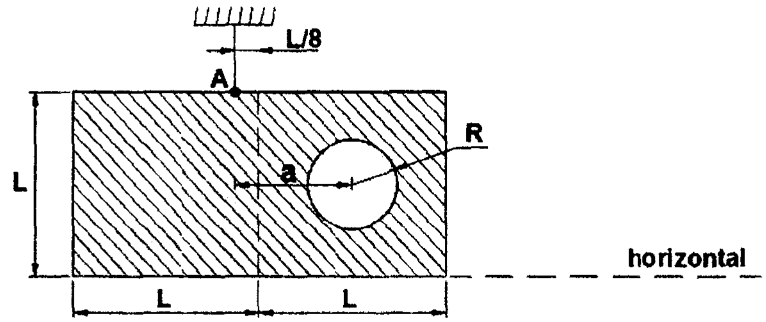
| Superficie | Área($cm^2$) | X(cm) | $Q_{YY}$($cm^3$) |
|---|---|---|---|
|   | 60h | 30 | 1800h |
|   | $-900\pi$ | 34.535 | -97646 |
| SUMA 1 | | | 1800h-97646 |

| Superficie | Área(cm$^2$) | X(cm) | $Q_{YY}$(cm$^3$) |
|---|---|---|---|
|  | 30h | 20 | 600h |
| **SUMA 2** | | | 600h |

Para que la placa se conserve en la posición mostrada, debe cumplirse que $\mathbf{Q_{YY1} = Q_{YY2}}$, por lo tanto: 1800h-97646=600h

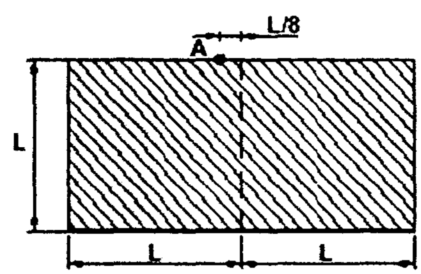
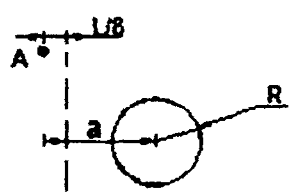
$\therefore$ <u>h= 81.37 cm</u>

33. La placa delgada y homogénea representada en la figura se sostiene mediante un cable atado en **A**. Para la condición de equilibrio, determine el valor de **a** que ubica el centro de la perforación circular de radio **R=L/3**, y que permite que la placa conserve la posición mostrada. Considere el valor de **L=24 cm**.




**Solución**

**Considerando dos figuras**

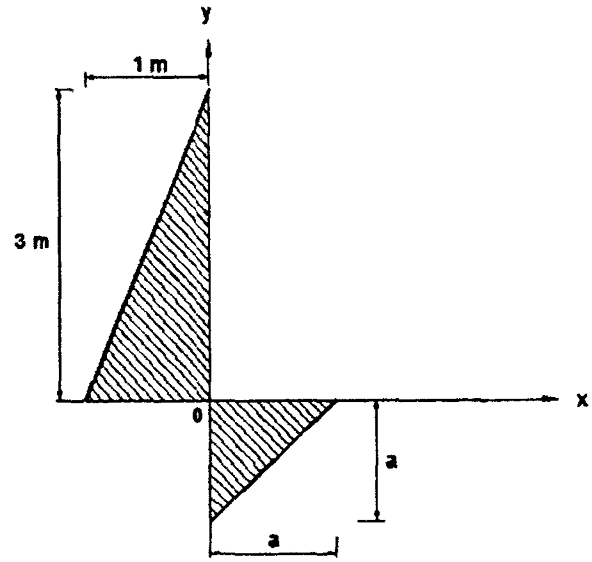
| Superficie | Área(cm²) | X(cm) | $Q_{YY}$(cm³) |
|---|---|---|---|
|   | $2L^2$ | $L/8$ | $L^3/4$ |
|   | $\pi L^2/2$ | a | $a\pi L^3/9$ |

$$\overline{M}_y = 0; \quad \frac{L^3}{4} - \frac{a\pi L^2}{9} = 0; \quad a = \frac{9L}{4\pi}$$

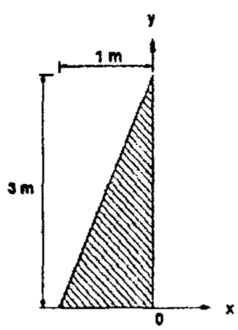
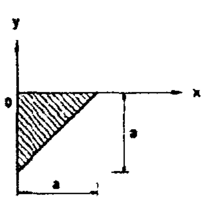
$$\therefore \ a = \frac{9(24)}{4\pi};$$

$$\underline{a = 17.19\text{cm}}$$

34. En la figura se muestra una placa delgada homogénea compuesta por dos triángulos y se requiere calcular el valor máximo de la longitud **a**, para que el centroide de área se localice dentro del triángulo superior izquierdo.




**Solución**

| Superficie | Área(cm²) | X(cm) | Y(cm) | $Q_{XX}$(cm³) | $Q_{YY}$(cm³) |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 1.5 | -1/3 | 1 | 1.5 | -0.5 |
|  | $a^2/2$ | $a/3$ | $-a/3$ | $-a^3/6$ | $a^3/6$ |
| **Sumas totales** | $(3+a^2)/2$ | | | $(9-a^3)/6$ | $(-3+a^3)/6$ |

$$\bar{x} = \frac{-\frac{3}{6} + \frac{a^3}{6}}{\frac{3 + a^2}{2}} = \frac{\frac{a^3 - 3}{6}}{\frac{3 + a^2}{2}} = \frac{2(a^3 - 3)}{6(3 + a^2)} = \frac{a^3 - 3}{3(3 + a^2)}$$

para que $\bar{x}$ esté en el segundo cuadrante debe cumplirse que:

$$a^3 - 3 < 0 \quad ; \quad a^3 < 3 \quad ; \quad a^3 < \sqrt[3]{3} \quad \therefore \quad a < 1.44$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{9 - a^3}{6}}{\frac{3 + a^2}{2}} = \frac{2(9 - a^3)}{6(3 + a^2)} = \frac{9 - a^3}{3(3 + a^2)}$$

para que $\bar{y}$ esté en el segundo cuadrante debe cumplirse que:

$$a - a^3 > 0 \quad ; \quad a > a^3 \quad ; \quad a^3 < 9 \quad \therefore a < 2.08$$

para $a < 1.44 \quad ; \quad a = 1$

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x} = \frac{1^3 - 3}{3(3 + 1^3)} \quad ; & \bar{x} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6} \\ \bar{y} = \frac{9 - (1)^3}{3(3 + 1^3)} \quad ; & \bar{y} = \frac{9}{12} = +\frac{3}{4} \end{array}\right\} \text{Se cumple}$$

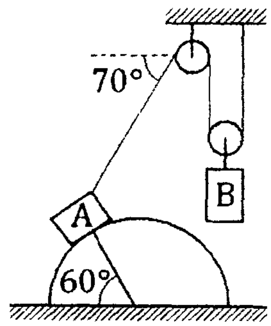
para $a < 2.08 \quad ; \quad a = 2$

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x} = \frac{2^3 - 3}{3(3 + 2^2)} \quad ; & \bar{x} = \frac{8 - 3}{3(12)} = +\frac{5}{36} \\ \bar{y} = \frac{9 - (2)^3}{3(3 + 2^3)} \quad ; & \bar{y} = \frac{1}{3(24)} = +\frac{1}{72} \end{array}\right\} \text{No cumple}$$

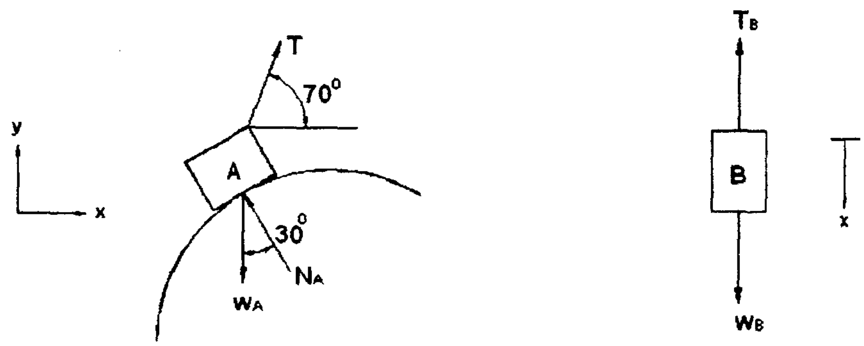
por lo que el valor máximo debe ser: **$a < \sqrt[3]{3}$**

## Capítulo 5. Equilibrio de cuerpos

35. La partícula A que pesa **50 N** reposa sobre un semicilindro liso. Determine el peso del cuerpo **B** para el arreglo mostrado. Considere que entre el cable y las poleas no se presenta fricción y que las masas de éstas y del cable son despreciables.




**Solución**




$\sum F_x = 0$ ; $\quad T\cos 70° - N_A \operatorname{sen} 30° = 0 \quad \ldots (1)$

$\sum F_x = 0$; $\quad T_B = W_B \quad \ldots (2)$

$\sum F_x = 0$; $\quad T_B = 2T \quad \ldots (3)$

$\sum F_y = 0 \quad -W_A + N_A \cos 30° + T \operatorname{sen} 70° = 0 \quad \ldots (4)$

de (2) y (3): $\quad T = \dfrac{W_B}{2} \quad \ldots (5)$

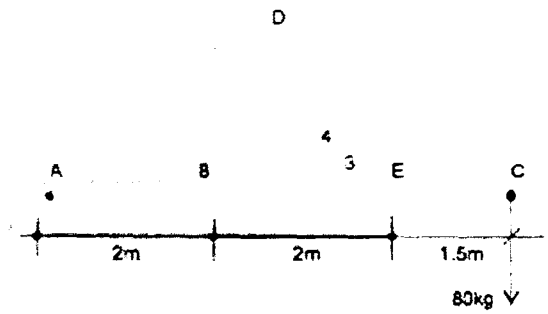
Sustituyendo (5) en (1) y (4): $\dfrac{W_B}{2}\cos 70° - N_A \operatorname{sen} 30° = 0$; $\quad N_A = 0.342W_B \quad \ldots (6)$

$$-W_A + N_A \cos 30° + \frac{W_B}{2} \text{ sen } 70° = 0; \qquad -50 + 0.866N_A + 0.4698\, W_B = 0 \qquad \ldots(7)$$

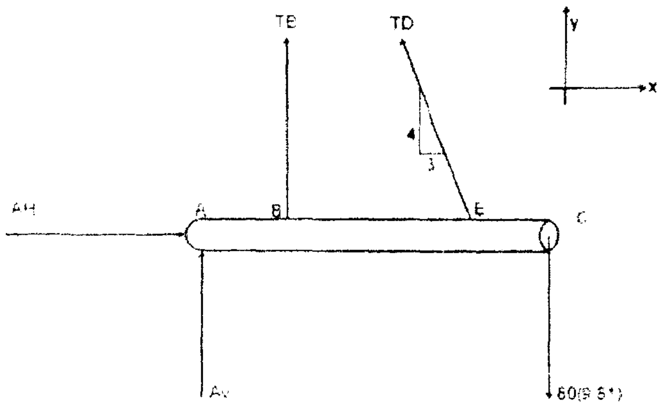
Sustituyendo (6) en (7) y despejando $W_B$:

$$-50 + 0.866(0.342W_B) + 0.4698W_B = 0 \Rightarrow \underline{\mathbf{W_B = 65.27\ N}}$$

36. Determinar las reacciones en el apoyo **A** de la viga de peso despreciable que se muestra en la figura, así como la magnitud de la tensión de la cuerda **BE**.




**Solución**




$\sum F_x = 0$

$AH - TD\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad ...(1)$

$\sum F_y = 0$

$Av + T + T\left(\frac{4}{5}\right) - 80(9.81) = 0$

$Av + \frac{9}{5}T - 784.8 = 0 \quad ...(2)$

$+\circlearrowleft \sum MA = 0$

$-T(2) - T\left(\frac{4}{5}\right)(4) + 784.5(5.5) = 0; \ -\frac{26}{5}T + 4316.4 = 0 \Rightarrow T = 830.07N \quad ...(3)$

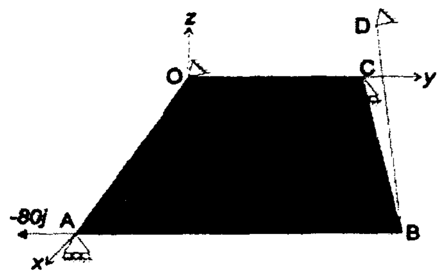
Sustituyendo (3) en (1) y (2):

$AH = 498.04N$

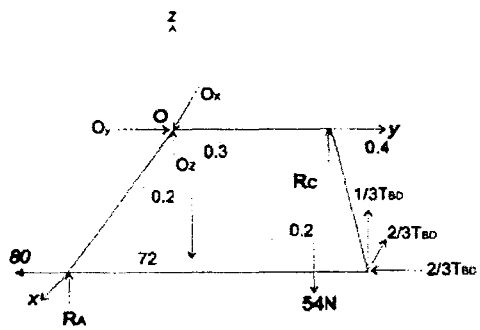
$Av = 709.32N$

$\therefore \underline{\mathbf{A = 498.04i - 709.32j\ N}}$

37. La placa horizontal de la figura es delgada, homogénea, tiene espesor constante, pesa en total **126 N**, y sobre su esquina **A** actúa una fuerza horizontal dada por **-80*j* N**. Dicha placa se encuentra articulada en **O**, está simplemente apoyada (verticalmente) tanto en **A** como en **C**, y en su esquina **B** cuelga de un cable amarrado en **D**. Teniendo en cuenta tales condiciones, determine el vector representativo de la reacción en **O**, así como la magnitud de la tensión del cable citado. Las coordenadas están en metros: **A(0.6, 0, 0)**, **B(0.6, 1, 0)**, **C(0, 0.4, 0)** y **D(0, 0.4, 0.3)**.




**Solución**




$$\overline{T_{BD}} = T_{BD}\left(\frac{-0.6i - 0.6j + 0.3k}{0.9}\right) = \frac{1}{3}T_{BD}(-2i - 2j + i)$$

$$M_{zz} = 0;\ -(0.6)(80) + 1\left(\frac{2}{3}T_{BD}\right) - 0.6\left(\frac{2}{3}T_{BD}\right) = 0; \qquad \frac{0.8}{3}T_{BD} = 48; \qquad \underline{\mathbf{T_{BD} = 180N}}$$

$$M_{xx} = -0.6(54) - 0.2(72) + 0.4R_C + 1\left(\frac{1}{3}T_{BD}\right) = 0; \qquad \underline{\mathbf{R_C = -33\ N}}$$

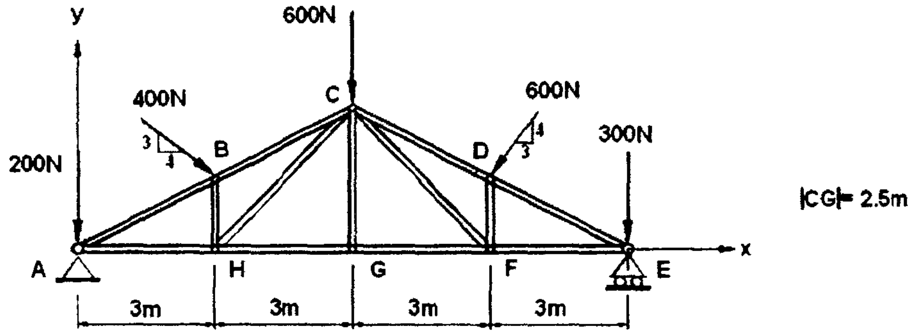
$$M_{yy} = (0.3)(72) + (0.4)(54) - 0.6R_A - 0.6\left(\frac{1}{3}T_{BD}\right) = 0; \qquad \underline{\mathbf{R_A = 12\ N}}$$

$$\sum F_x = 0; \quad O_x - \frac{2}{3}T_{BD} = 0; \qquad \underline{\mathbf{O_x = 120\ N}}$$

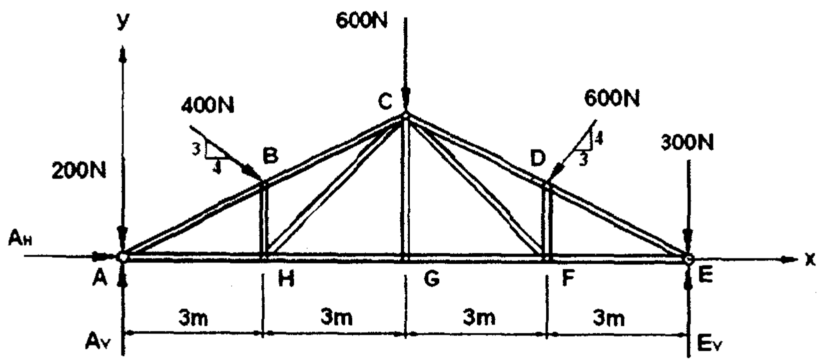
$$\sum F_y = 0; \quad -80 + O_y - \frac{2}{3}T_{BD} = 0; \qquad \underline{\mathbf{O_y = 200\ N}}$$

$$\sum F_Z = 0; \quad O_z + R_A - 126 + R_C + \frac{1}{3}T_{BD} = 0; \qquad \underline{\mathbf{O_z = 87\ N}}$$

38. La armadura de la figura se encuentra sujeta a las fuerzas que se muestran. Despreciando el peso de la armadura, determine la magnitud de las reacciones en los apoyos **A** y **E**.




## Solución




$\sum F_x = 0; \qquad AH + 400\left(\frac{4}{5}\right) - 600\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow$ **AH = 40N**

$\sum F_y = 0; \quad Av - 200 - 400\left(\frac{3}{5}\right) - 600 - 600\left(\frac{4}{5}\right) - 300 + Ev = 0$

$Av + Ev = 1820 \qquad ...(1)$

$\sum MA = 0$

$-400\left(\frac{4}{5}\right)(1.25) - 400\left(\frac{3}{5}\right)(3) - 600(6) + 600\left(\frac{3}{5}\right)(1.25) - 600\left(\frac{4}{5}\right)(9)$

$-300(12) + Ev(12) = 0$

$12Ev = 12190 \Rightarrow$ $\underline{\mathbf{Ev = 1015.83N}}$

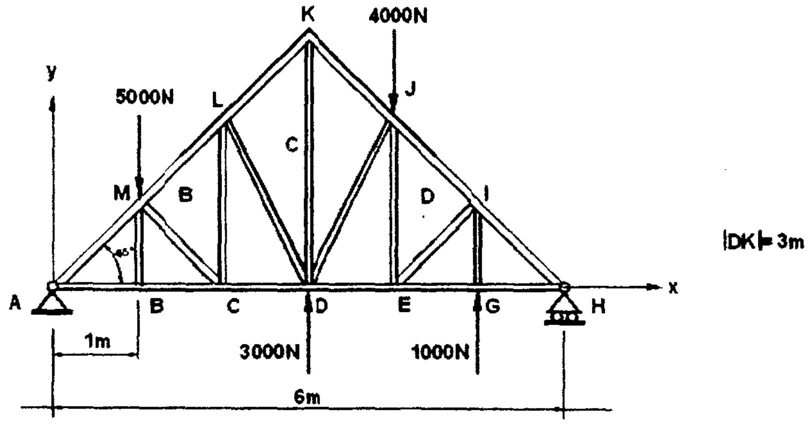
De (1):

$\underline{\mathbf{Av = 804.17N}}$

$A = [(AH)^2 + (Av)^2] \Rightarrow$ $\underline{\mathbf{A = 805.16N}}$

39. La armadura mostrada en la figura está sujeta a las fuerzas indicadas. Para tales condiciones determine:

   a) El sistema equivalente (coordenadas vectoriales) en **H**
   b) Las barras por donde atraviesa la línea de acción de la resultante
   c) Las magnitudes de las reacciones en los apoyos **A** y **H**




**Solución**

A partir de la figura, se determinan las fuerzas:

$$\vec{F}_{5000} = 0i - 5000j + 0k \text{ N}$$

$$\vec{F}_{3000} = 0i + 3000j + 0k \text{ N}$$

$$\vec{F}_{4000} = 0i - 4000j + 0k \text{ N}$$

$$\vec{F}_{1000} = 0i + 1000j + 0k \text{ N}$$

La fuerza resultante es:

$$\vec{R} = 0i - 5000j + 0k \quad \text{N} \quad \ldots (1)$$

A continuación se obtienen los momentos de las fuerzas respecto al punto H:

$$\bar{M}_H^{\bar{F}_M} = 0i - 0j + 25000k \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_H^{\bar{F}_D} = 0i + 0j - 9000k \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_H^{\bar{F}_J} = 0i + 0j + 8000k \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

$\overline{M}_H^{\overline{F}_G} = 0i + 0j - 1000k \quad N \cdot m$

El momento de las fuerzas respecto al punto H es:

$\overline{M}_H = 0i + 0j + 23000k \quad N \cdot m \quad ...(2)$

Las coordenadas vectoriales en H se representan por (1) y (2):

$\overline{R} \cdot \overline{M}_o = 0j(-5000j) \cdot (+23000k) = 0 \quad ...(3)$

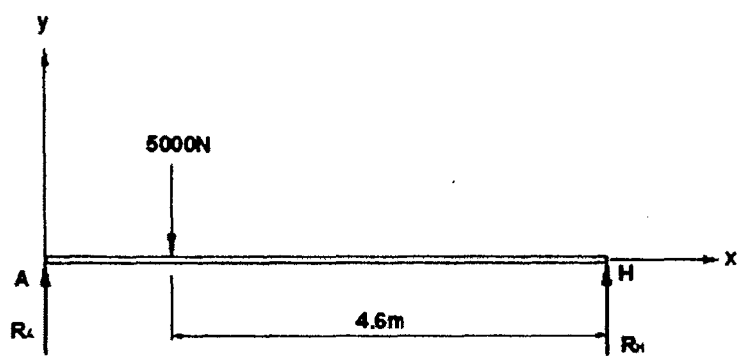
de (3) se concluye que el sistema de fuerzas se reduce a una fuerza que no pasa por el origen, dando respuesta al inciso a).

$(xi + yj + zk) \times (-5000j) = 23000k$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & -5000 & 0 \end{vmatrix} = (+5000z)i - (0)j + (-5000x)k$$

$$\left.\begin{matrix} 5000z = 0 \\ -5000x = 23000 \end{matrix}\right\} \therefore P(-4.6, 0, 0)m$$

b) por lo tanto la línea de acción pasa por las barras $\overline{ML}$, $\overline{MC}$ y $\overline{BC}$




$\sum F_y = 0; \qquad R_A + R_H - 5000 = 0 \quad ...(4)$

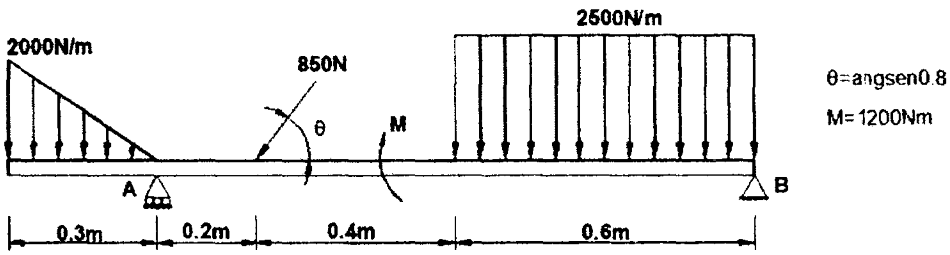
$+)\sum M_H = 0; \ +(5000)(4.6) - R_A(6) = 0;$ c) $\mathbf{R_A = 3833.33\ N}$

De (4):

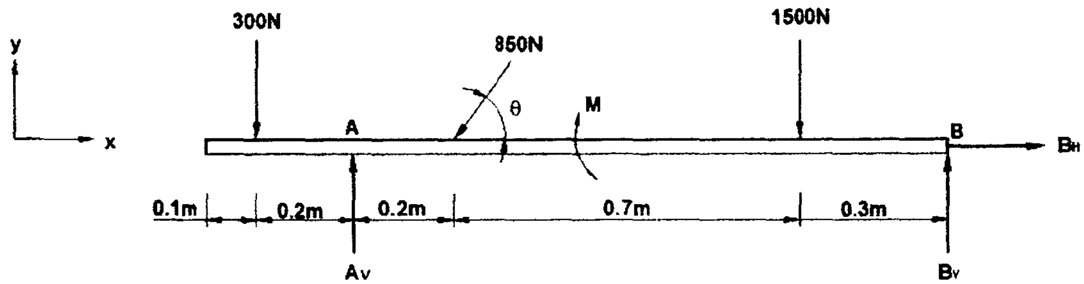
$R_H = 5000 - 38333.33\ N$

c) $\mathbf{R_H = 1166.67\ N}$

40. La viga de la figura se encuentra sujeta a la acción de las cargas y a la de un par cuyo momento, de módulo **M**, está indicado. Considerando que dicha viga está en equilibrio, determine la magnitud de las fuerzas reactivas en los apoyos **A** y **B**.




**Solución**




$\sum F_X=0;$ $-850\cos\theta+B_H=0;$ $-850(0.6)+B_H=0$

**$B_H$=510 N**

$\sum F_Y=0;$ $-300+A_V-850\text{sen}\theta-1500+B_V=0;$ $-300+A_V-850(0.8)-1500+B_V=0$

$-300+A_V-680-1500+B_V=0$ ...(1)

$\sum M_B=0;$ $300(1.4)-A_V(1.2)+680(1)-1200+1500(0.3)=0$

$420-1.2A_V+680-1200+450=0;$ $350-1.2A_V=0$

**$A_V$= 291.66 N**

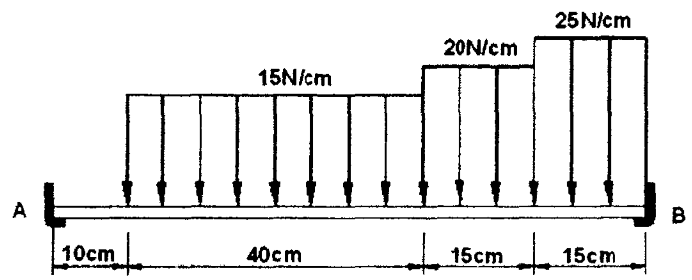
Despejando de (1) $B_V$ y sustituyendo **$A_V$**:

$B_V$= 300-291.66+680+1500

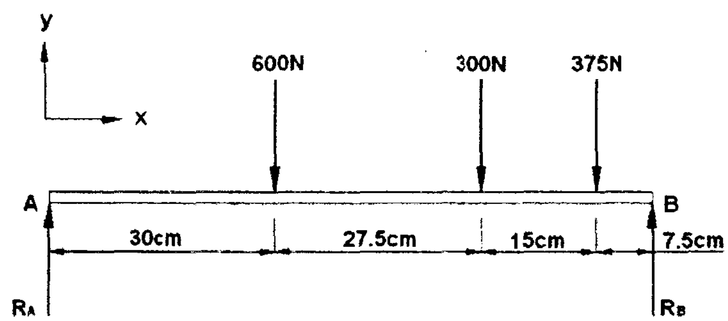
**$B_V$=2188.34 N**

41. Sobre la repisa de peso despreciable, de un gabinete, se encuentran colocados unos libros distribuidos de tal manera que su peso por unidad de longitud se muestra en la figura. Considerando la información proporcionada, determine:

a) la fuerza total ejercida por los libros
b) la posición en que debe aplicarse la fuerza total para producir lo mismos efectos sobre los soportes del gabinete
c) las magnitudes de las fuerzas reactivas en los soportes fijos **A** y **B**.




**Solución**




$\bar{\mathbf{F}} = -600\mathrm{j} - 300\mathrm{j} - 375\mathrm{j}$

a) $\underline{\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{-1275j\ N}}$

$600(30) + 300(57.5) + 375(72.5) = 1275d$

b) $\underline{\mathbf{d = 48.97\ cm}}$ a partir de A

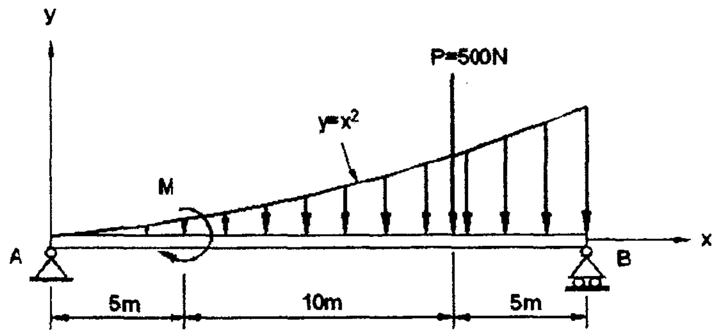
$\sum F_y = 0; \quad R_A + R_B - 1275 = 0 \qquad \ldots (1)$

$\sum M_A = 0; \quad R_B(80) - 600(30) - 300(57.5) - 375(72.5) = 0$

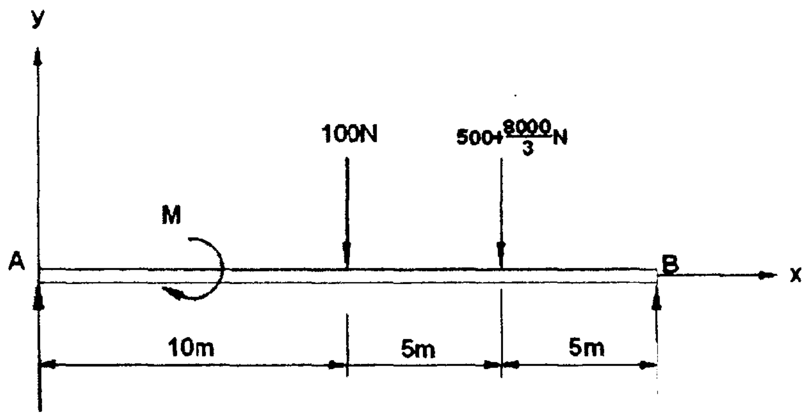
c) $\underline{\mathbf{R_B = 780.46\ N}}$

de (1): c) $\underline{\mathbf{R_A = 494.54\ N}}$

42. La viga delgada y homogénea de la figura, que en total pesa **100 N**, se encuentra bajo la acción de la carga de la forma parabólica mostrada y se comporta de acuerdo a la ley $\mathbf{y = x^2}$ (donde **y** está en **N/m** para **x** en metros); además sobre ella actúan una fuerza vertical **P** de **500 N** y un par de fuerzas **M** de magnitud **500 N· m**, tal como se muestran en la figura. Teniendo en cuenta la información proporcionada, determine las magnitudes de las fuerzas reactivas ejercidas por los apoyos **A** y **B,** con el propósito de mantener en equilibrio la viga.




**Solución**




$$A = \int_0^{20} x^2 dx = \frac{8000}{3}$$

$$Q_y = \int_0^{20} x(x^2)dx = \int_0^{20} x^3 dx = 40000$$

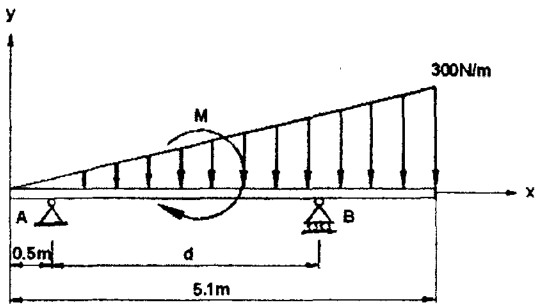
$$\sum F_y = 0; \qquad R_A + R_B - \frac{9800}{3} = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \qquad R_B(20) - 500 - 100(10) - \frac{9500}{3}(15) = 0 \qquad \ldots(2)$$

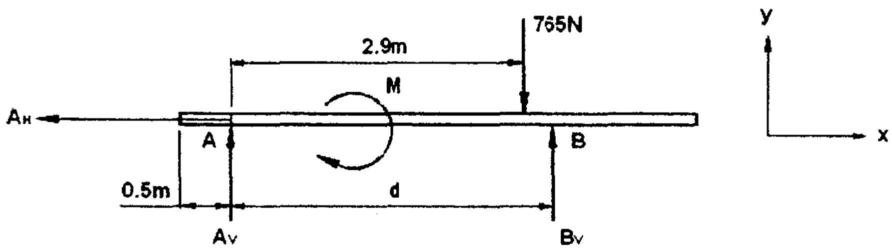
de (1) y (2): $\underline{\mathbf{R_A = 816.67\ \ N}}$ ; $\underline{\mathbf{R_B = 2450\ \ N}}$

43. La viga delgada, homogénea y de masa despreciable de la figura se encuentra bajo la acción de la carga triangular mostrada; además, sobre ella actúa un par de fuerzas **M** alojado en el plano **xy**, de magnitud **126 N· m**, aplicado como se indica. Teniendo en cuenta la información proporcionada, determine:

a) Las magnitudes de las fuerzas reactivas ejercidas por los apoyos **A** y **B**
b) La distancia **d** entre los apoyos **A** y **B**, de manera que el módulo de la fuerza reactiva en **B** sea igual a **nueve veces** la magnitud de la fuerza reactiva en **A**




**Solución**




$\sum F_x = 0;$ a) $\underline{\mathbf{A_H = 0\ N}}$

$\sum F_y = 0$

$Av - 765 - Bv = 0;$ como $Bv = 9Av$

$10Av = 765;$ a) $\underline{\mathbf{A_V = 76.5\ N}}$

$Bv = 9(76.5)$ a) $\underline{\mathbf{B_V = 688.5\ N}}$

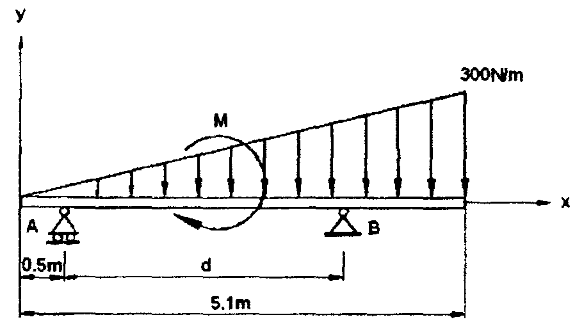
$+\circlearrowleft \sum MA = 0$

$-M - 765(2.9) + 688.5d = 0$

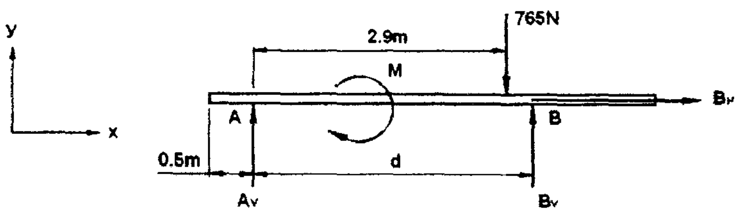
b) $\underline{\mathbf{d = 3.405\ m}}$

44. La viga delgada, homogénea y de masa despreciable de la figura se encuentra bajo la acción de la carga triangular mostrada; además, sobre ella actúa un par de fuerzas **M** alojado en el plano **xy**, de magnitud **126 N· m**, aplicado como se indica. Teniendo en cuenta la información proporcionada, determine:

a) Las magnitudes de las fuerzas reactivas ejercidas por los apoyos **A** y **B**
b) La distancia **d** entre los apoyos **A** y **B**, de manera que el módulo de la fuerza reactiva en **B** sea igual a **cinco veces** la magnitud de la fuerza reactiva en **A**




**Solución**




$\sum F_x = 0;$ $\quad$ $\underline{\textbf{a) } \mathbf{B_H = 0\ N}}$

$\sum F_y = 0$

$Av + Bv - 765 = 0;$ $\quad$ como: $Bv = 5Av$

$6Av = 765;$ $\quad$ a) $\underline{\mathbf{A_V = 127.5\ N}}$

$Bv = 5(127.5)$

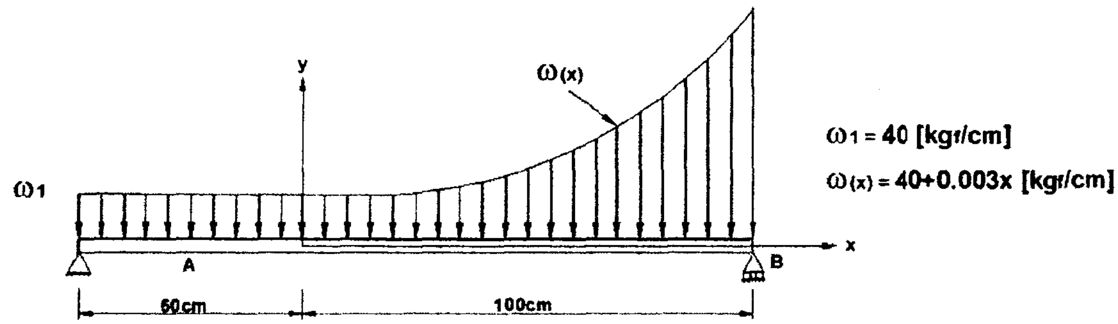
a) $\underline{\mathbf{B_V = 637.5\ N}}$

$+\circlearrowleft \sum MA = 0$

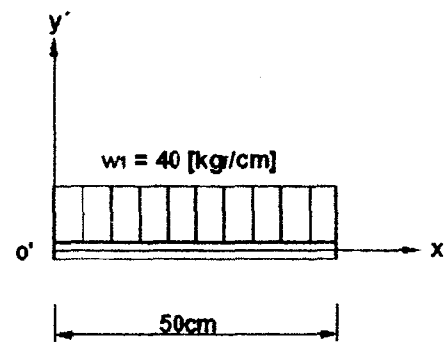
$-765(2.9) - 126 + 637.5(d) = 0$

b) $\underline{\mathbf{d = 3.677\ m}}$

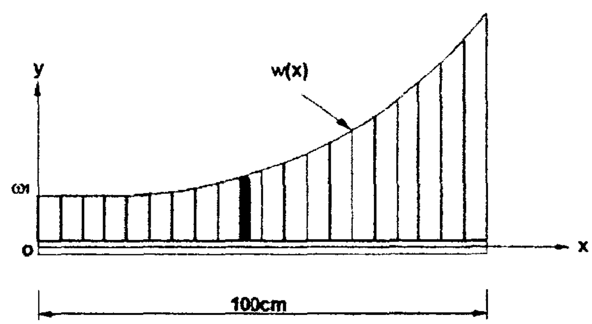
45. La figura representa una viga simplemente apoyada, cuya carga se distribuye como se indica. Para tales condiciones, determine las reacciones en los apoyos. Desprecie el peso de la viga.




**Solución**



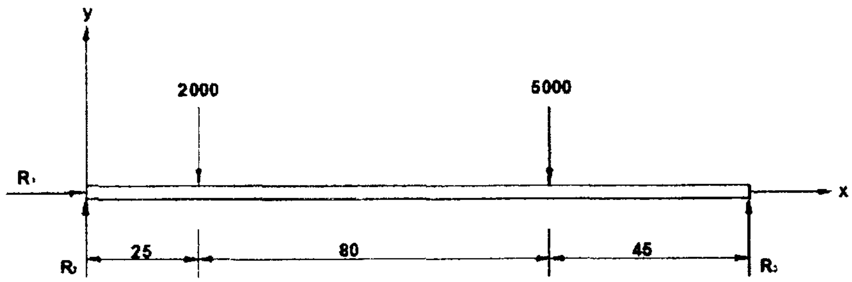

P = (w1)l; P = (49)50 = 2000 kgf




$dw = y\,dx$; $dw = \omega(x)dx$; $dw = (\omega_1 + 0.003x^2)dx$

$$w = \int_0^{100} (40 + 0.003)(2)dx; \therefore w = 5000kgf$$

$$\overline{x} = \frac{\oint \overline{x} dw}{\oint dw}; \quad \overline{x} = \frac{\int_0^{100} x(40 + 0.003x^2)dx}{W}; \quad \overline{x} = 55cm$$




$\overline{R} = \overline{0}; \;\; R_1 i + R_2 j + R_3 j - 2000j - 5000j = \overline{0}$

$\overline{M}_o = \overline{0}; \;\; (150R_3 - 50000 - 525000)k = \overline{0}$

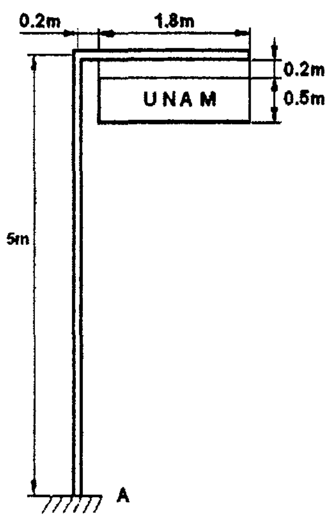
Resolviendo:

$\mathbf{R_1 = 0\ kgf}$

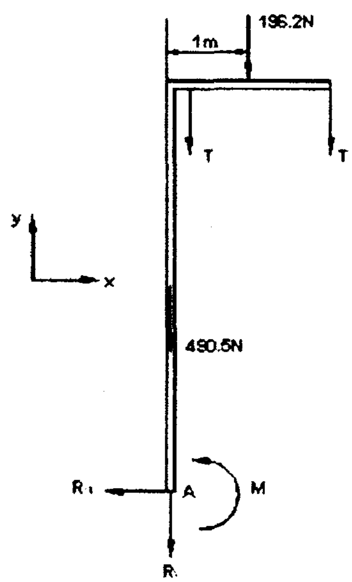
$\mathbf{R_2 = 3166.67kgf}$

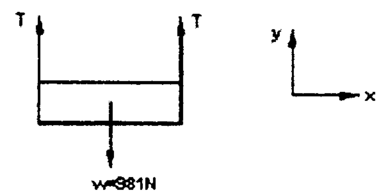
$\mathbf{R_3 = 3833.33kgf}$

46. El letrero delgado, de espesor constante y homogéneo, de forma rectangular y de peso **981 N**, mostrado en la figura, es sostenido mediante dos cables de peso despreciable y un marco. Si el citado marco es rígido, tiene una sección transversal uniforme y el material de que está hecho pesa **98.1 N/m**, determine las magnitudes de los elementos reactivos en la base **A,** donde se encuentra empotrado dicho marco.




**Solución**




Análisis del letrero:

$\sum F_y = 0; \quad 2T - 981 = 0; \quad T = 490.5 \text{ N}$

Análisis del marco:

$\sum F_x = 0;$ $\underline{\mathbf{R_H = 0\ N}}$

$\sum F_Y = 0$

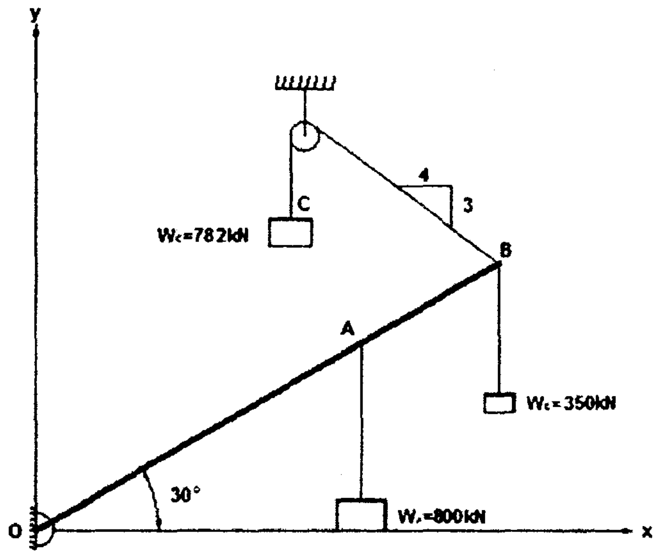
$R_V - 2(490.5) - 196.2 - 490.5$

$\underline{\mathbf{R_V = 1667.7\ N}}$

$\sum M_A = 0;$ $M - 490.5(0.2) - 196.2(1) - 490.5(2);$

$\underline{\mathbf{M = 1275.3\ N \cdot m}}$

47. La barra **OB**, articulada en **O**, está sujeta a la acción de fuerzas ejercidas por los cables que se ilustran en la figura. Para la condición de equilibrio, determine las coordenadas del punto **A** y las magnitudes de las componentes de la fuerza de reacción en **O**. Considere lisa la polea y de peso despreciable la barra **OB**. La longitud de la barra es **2.5 m**.




**Solución**

$\overline{R} = \overline{0}$

$\overline{T}_A = -800j \text{ kN}$

$\overline{T}_B = -350j \text{ kN}$

$\overline{T}_C = -(0.8)(782)i + (0.6)(782)j \text{ kN}$

$\overline{O}_1 = O_1 i \text{ kN}$

$\overline{O}_2 = O_2 j \text{ kN}$

$O_1 - (0.8)(782) = 0;$

$\mathbf{O_1 = 625.5 \text{ kN}}$

$O_2 - 800 - 350 + (0.6)(782) = 0$

$\mathbf{O_2 = 680.8 \text{ kN}}$

$\overline{M}_o = \overline{0}$

$\overline{M}_o^{T_A} = [(l\cos 30^2)i + (l\sin 30°)j \times (800j)] = -692.82lk\ \ kN \cdot m$

$\overline{M}_o^{T_B} = (2.165i + 125j) \times (-350j) = -757.75\ kN \cdot m$

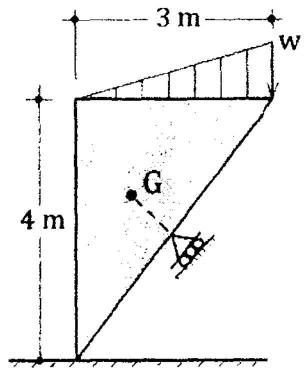
$\overline{M}_o^{T_C} = (2.165i + 125j) \times (-625.6i + 496.2j) = 1782.663k$

$-692.82l - 757.75 + 1782.663 = 0 \quad \therefore l = 1.48m$

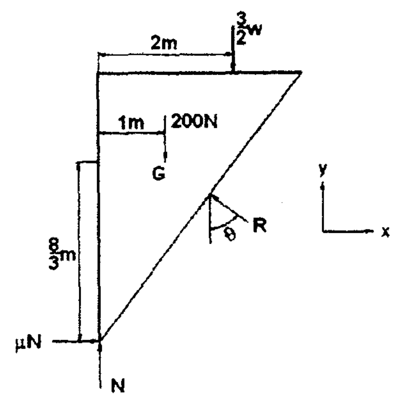
$$A\begin{cases} \mathbf{x = (1.48)(cos\,30°)} & ; \quad \mathbf{x = 1.28m} \\ \mathbf{y = (1.40)(sen\,30°)} & ; \quad \mathbf{y = 0.74m} \end{cases}$$

## Capítulo 6. Fricción

48. Considerando que el apoyo deslizante mostrado ejerce sobre la placa una fuerza cuyo soporte pasa por el centro de gravedad de la placa, calcule el máximo valor de la carga **w**, para que la placa homogénea de forma triangular, cuyo peso es de **200 kg**, permanezca en equilibrio sobre la superficie rugosa de la figura. El coeficiente de fricción estática es **0.5** en tanto que la placa se muestra en posición vertical.




**Solución**




$\sum F_x = 0;$ $\mu N - R\,\mathrm{sen}\,\theta = 0;$ $0.5N - 0.8R = 0$

$R = 0.625N$ ... (1)

$\sum F_y = 0;$ $N - 200 + R\cos\theta - \frac{3}{2}w = 0$

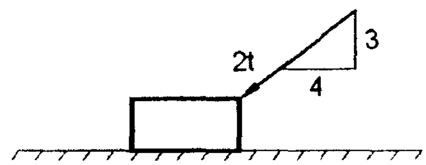
$N - 200 + 0.6(0.625N) - 1.5w = 0;$ $1.375N - 200 - 1.5w = 0$ ... (2)

$+\circlearrowleft \sum M_G = 0$

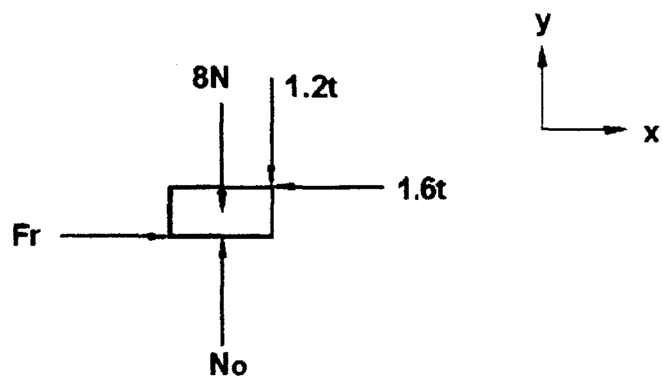
$\mu N\left(\frac{8}{3}\right) - N(1) - \left(\frac{3}{2}\right)w(1) = 0;$ $0.33N - 1.5w = 0;$ $N = 4.54w$ ... (3)

Sustituyendo (3) en (2) y despejando w: $\underline{w = 42.17}$

49. Sobre el pequeño cuerpo de la figura, que pesa **8 N**, a partir de **t=0**, va a aplicarse la fuerza mostrada, cuya magnitud está dada por **2t** (en N para *t* en segundos), y cuya dirección será siempre la indicada. Considerando que los coeficientes de fricción estática y cinética, entre el cuerpo y el plano horizontal que lo soporta, son **0.5** y **0.4** respectivamente, determine el módulo de la fuerza de fricción que actuará sobre el cuerpo para **t=2, t=3, t=4** y **t=5 s**.




**Solución**




$\sum F_Y=0;\qquad N_o = 8 + 1.2t$

$F_r = \mu_k N_O = 0.5(8 + 1.2t) = 4 + 0.6t$

Equilibrio: $\sum F_X = 0;\quad F_r - 1.6t = 0;\qquad F_r = 1.6t$

$\Rightarrow 1.6t - (4 + 0.6t) = 0;\qquad t - 4 = 0;\qquad t = 4$

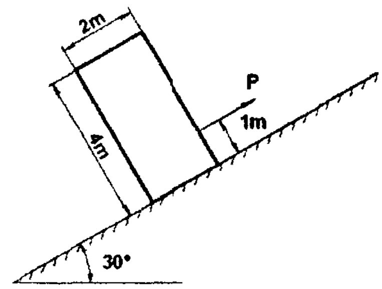
para $t = 4;\ F_r = 1.6(4) = 0;\qquad Fr - 6.4 = 0 \Rightarrow\qquad \underline{\mathbf{F_r = 6.4\ N}}$

para $t = 2;\ F_r - 1.6(2) = 0;\qquad F_r - 3.2 = 0 \Rightarrow\qquad \underline{\mathbf{F_r = 3.2\ N}}$

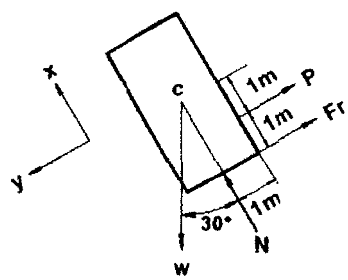
para $t = 3;\ F_r - 1.6(3) = 0;\qquad F_r - 4.8 = 0 \Rightarrow\qquad \underline{\mathbf{F_r = 4.8\ N}}$

para $t = 5;\qquad N_o = 14N;\qquad F_r = \mu_E N_O\qquad \Rightarrow\qquad \underline{\mathbf{F_r = 5.6\ N}}$

50. Determine el intervalo de valores para la fuerza **P** de modo que el bloque de la figura, que se encuentra sobre el plano inclinado, no deslice hacia abajo ni vuelque. Considere que el peso del bloque es **2 kN** y el coeficiente de fricción estática entre las superficies en contacto es **0.2.**




**Solución**




$\sum F_y = 0$; N-wcosθ=0; N=wcosθ ...(1) $\sum F_x = 0$; wsenθ-μN-P=0 ...(2)

despejando P de (2) y sustituyendo (1):

P= w(senθ-μcosθ)

sustituyendo datos:

P=2(sen30$^0$-0.2(cos30$^0$)); ⇒**P=0.6535 kN**

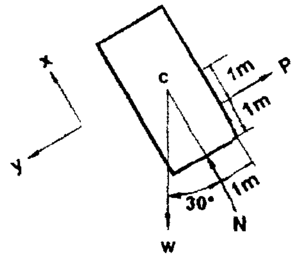
$\sum M_C = 0$; μN(2)+P(1)-N(d)=0 (3)

despejando d de (3) y sustituyendo (1) y datos:

$$d = \frac{\mu w\cos\theta(2) + 0.6535(1)}{w\cos\theta}$$

$$d = \frac{0.2(2)(2)\cos 30^0 + 0.6535(1)}{2\cos 30^0} = 0.777\text{m}$$

**Sin considerar fricción**




$\sum F_x = 0;$ wsenθ-P=0

despejando P:

P= wsenθ

Sustituyendo datos:

P= 2sen30⁰

**P=1 kN**

$\sum M_C = 0\,;$ P(1)-N(d)=0 ...(4)

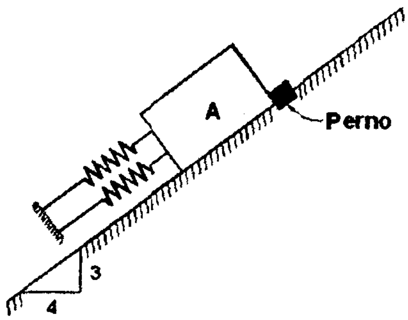
despejando d de (4), sustituyendo (1) y el valor de P:

$$d = \frac{P(1)}{w\cos\theta}$$

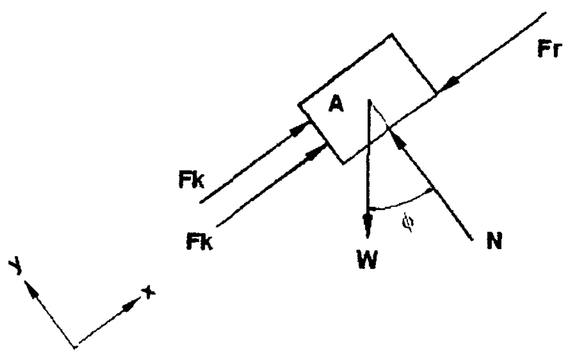
$$d = \frac{1(1)}{2\cos 30^0} = 0.577\text{m}$$

**∴ 0.6535≤P≤1 kN**

51. Un sistema formado por dos resortes idénticos y de masas despreciables está unido a un bloque de **2 kg** de masa como se muestra en la figura; para la posición ilustrada los resortes se encuentran comprimidos **2 cm**. El coeficiente de fricción estática entre el bloque **A** y el plano inclinado mostrado vale **0.5** y además existe un perno que sujeta a **A**, por medio del cual se le mantiene fijo respecto al plano, en tanto dicho perno no se retire. Bajo estas condiciones, determine el valor de la constante de elasticidad de cada uno de los resortes para que, al retirar el perno, **A** esté a punto de moverse hacia arriba del plano.




**Solución**




$$2Kx - \mu W \cos\emptyset - W \operatorname{sen}\emptyset = 0$$

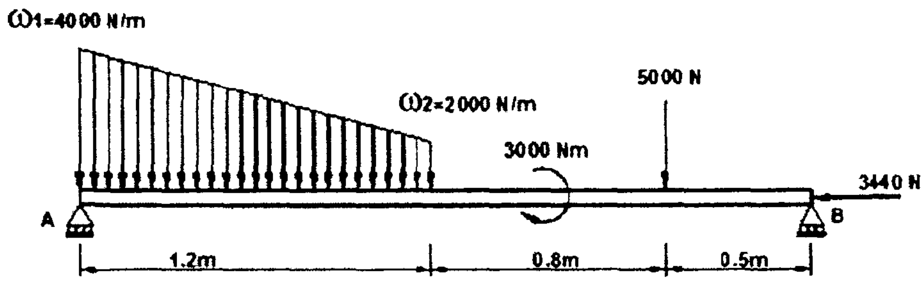
$$K = \frac{\mu W \cos\emptyset + W \operatorname{sen}\emptyset}{2x}$$

Sustituyendo datos:

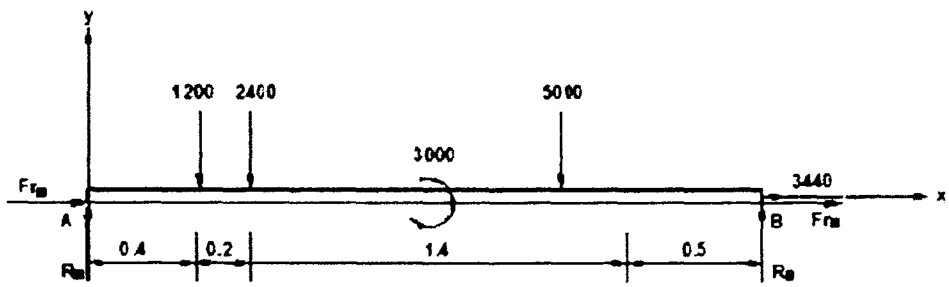
$$K = \frac{0.5(2)(9{,}81)\left(\frac{4}{5}\right) + 2(9.81)\left(\frac{3}{5}\right)}{2(0.02)}$$

$$\therefore \mathbf{K > 490.5\ \frac{N}{m}}$$

52. En la figura se muestra una viga simplemente apoyada. Para las condiciones de carga, determine las reacciones vectoriales en los apoyos **A** y **B**, así como el coeficiente de fricción estática entre los rodillos de los apoyos y la superficie horizontal para obligar el equilibrio. Considere idénticas las superficies en contacto.




**Solución**




$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad F_{rA} + F_{rB} - 3440 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad R_A - 1200 - 2400 - 5000 + R_B = 0 \quad ; \quad R_A + R_B - 8600 = 0$$

$$+)\sum M_A = 0 \quad ; \quad -(1200)(0.4) - (2400)(0.6) - (5000)(2) - 3000 + R_B(2.5) = 0$$

$$-480 - 1440 - 10000 - 3000 + 2.5R_B = 0$$

$\mathbf{R_B = 5968\ N}$

$\therefore R_A = 8600 - 5968$

$\mathbf{R_A = 2632\ N}$

$F_{rA} = \mu_E N_A; \quad F_{rA} = \mu_E R_A$

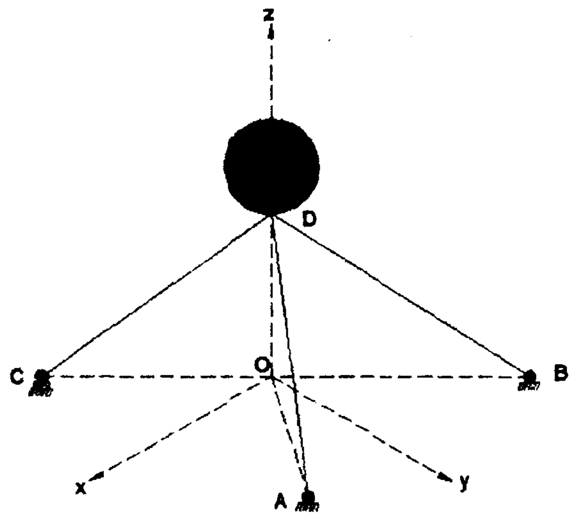
$F_{rB} = \mu_E N_B; \quad F_{rB} = \mu_E NR_B$

$\mu_E(2632) + \mu_E(5968) - 3440 = 0; \quad \mu_E(2632 + 5968) = 3440;$

$$\mu_E = \frac{3440}{8600}$$

$\underline{\boldsymbol{\mu_E = 0.4}}$

53. En la figura se muestra un anuncio esférico sostenido por tres barras. Para tales condiciones, determine las magnitudes de las fuerzas ejercidas por las barras y el coeficiente de fricción estática entre el bloque **C**, de peso despreciable y la superficie horizontal en que se apoya, de manera tal que se mantenga el equilibrio del sistema en la posición indicada.




**Solución**

$$\overline{C_{\overline{AD}}} = \overline{C_1} = -\left(\frac{3.6}{7.5}C_1\right)i - \left(\frac{4.5}{7.5}C_1\right)j + \left(\frac{4.8}{7.5}C_1\right)k$$

$$\overline{C_{\overline{BD}}} = \overline{C_2} = \left(\frac{3.6}{6.5}C_2\right)i - \left(\frac{2.5}{6.5}C_2\right)j + \left(\frac{4.8}{6.5}C_2\right)k$$

$$\overline{C_{\overline{CD}}} = C_3 = -\left(\frac{3.6}{6.8}C_3\right)i + \left(\frac{3.2}{6.8}C_3\right)j + \left(\frac{4.8}{6.8}C_3\right)k$$

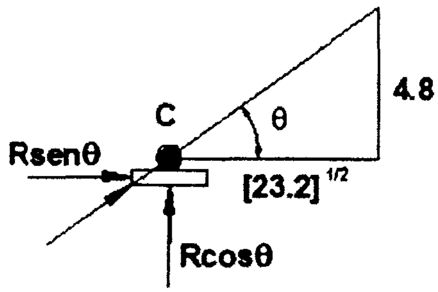
$$\overline{W} = 0i + 0j - 10k\ \mathrm{kN}$$

Resolviendo:

$\underline{\mathbf{C_1 = 0.7125\ kN}}$

$\underline{\mathbf{C_2 = 6.7900\ kN}}$

$\underline{\mathbf{C_3 = 6.4600\ kN}}$




$$\theta = \text{angtan}\left(\frac{4.8}{\sqrt{23.2}}\right); \;\; \theta = 45°$$

$$N = R\cos\theta; \; F_r = R\,\text{sen}\,\theta$$

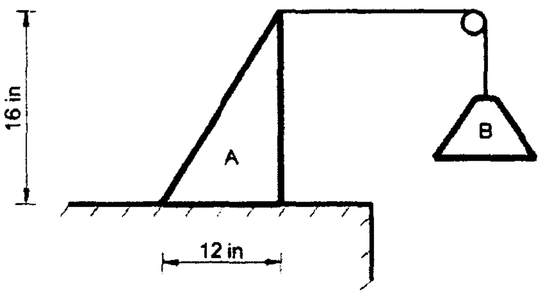
$$F_r = \mu_E N$$

$$\mu_E = \frac{F_r}{N}; \quad \mu_E = \frac{R\,\text{sen}\,\theta}{R\cos\theta}$$

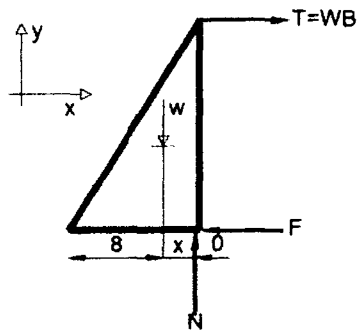
$$\mu_E = \tan\theta$$

$$\underline{\boldsymbol{\mu_E = 1.0}}$$

54. La cuña **A** de la figura pesa **80 lb**. Considerando que el cable mostrado es liso, calcule el máximo peso que puede tener el cuerpo **B**, sin que la cuña se vuelque ni se deslice. Los coeficientes de fricción estática y cinética son **0.3** y **0.2**, respectivamente, entre la cuña y la superficie horizontal.




**Solución**




$\sum M_O = 0$

$T(16) - W(4) + W(4 - x) = 0; \quad 16T - Wx = 0; \quad T = \frac{1}{16}Wx$

$\sum F_y = 0; \quad N = W$

$\sum F_x = 0; \quad F_r = T; \quad F_r = \frac{1}{16}Wx$

Si $F_r = F_{R_{MÁX}} = \mu_E N = \mu_E W; \quad \mu_E W = \frac{1}{16}Wx; \quad x = 16\mu_E; \quad x = 16(0.3) = 4.8;$

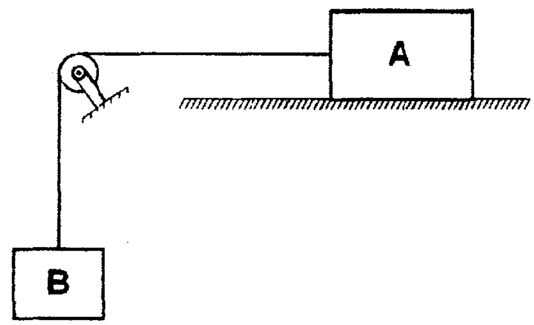
$\therefore$ No es máximo

$\Rightarrow F_r = T = W_B$

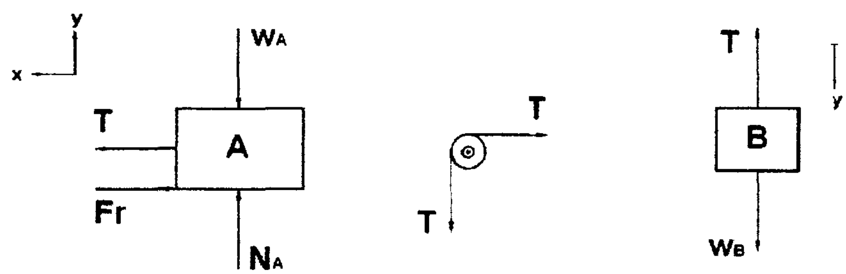
$W_B = \frac{1}{16}W_x; \quad W_{B_{MÁX}} = \frac{1}{16}W(4) = \frac{1}{4}W$

$\therefore$ $\mathbf{W_{B_{MÁX}} = 20lb}$

55. Considerando que los pequeños cuerpos **A** y **B** de la figura se encuentran conectados por medio de la cuerda lisa de peso despreciable que pasa por una polea, como se muestra, determine el valor del peso del cuerpo **B** de manera que el cuerpo **A**, que pesa **2N**, esté a punto de moverse, después de soltarse en la posición mostrada, donde **A** está en contacto con el plano horizontal de la figura. Considere que el coeficiente de fricción estática entre **A** y el plano vale **0.25**.




**Solución**




**Bloque A**

$\sum \mathbf{F_y} = 0; \quad N = W_A$

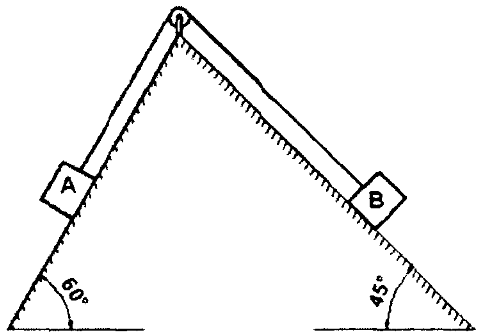
$\sum \mathbf{F_x} = 0; \quad T - \mu W_A; \quad T = 0.5\ N$

**Bloque B**

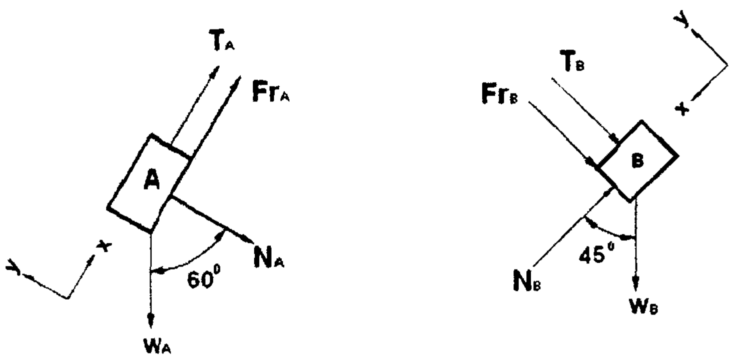
$\sum \mathbf{F_x} = 0; \quad W_B - T = 0$

$\therefore \underline{\mathbf{W_B = 0.5\ N}}$

56. Los bloques **A** y **B** de la figura se encuentran unidos por medio de una cuerda lisa y están en contacto con planos inclinados como se muestra. Si el peso de **A** es **60 lb** y el coeficiente de fricción estática entre las superficies es **0.3**, considerando que **A** y **B** se sueltan en la posición mostrada, determine el valor del peso del bloque **B** para que esté a punto de desplazarse hacia arriba del plano, pero sin moverse.




**Solución**




Bloque A:

$\sum \mathbf{F_y} = \mathbf{0}$; $\quad N_A = w_A \cos 60°$; $\quad N_A = 30 \ \ N$;

$\sum \mathbf{F_x} = \mathbf{0}$; $\quad -\mu_E N_A - T + w_A \operatorname{sen} 60° = 0$;

$\mathbf{T} = -0.3(30) + 60 \operatorname{sen} 60°$; $\quad T = 42.96 \text{lb}$ $\qquad$ ...(1)

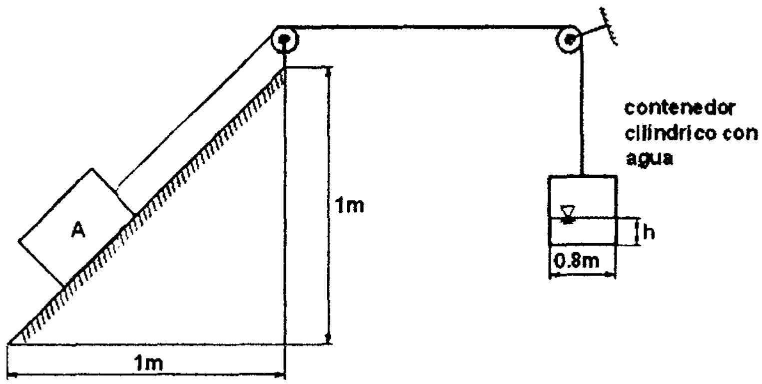
Bloque B:

$\sum \mathbf{F_y} = 0$; $\quad N_B - 0.7071 w_B$ ; $\qquad N_B = 0.7071 w_B$ $\qquad$ ...(2)

$\sum \mathbf{F_x} = 0$; $\quad T - \mu_E N_B - w_B \operatorname{sen} 45° = 0$ $\qquad$ ...(3)

de (1) y (2)en (3): $\quad \underline{\mathbf{w_B = 46.734 lb}}$

57. Determine el valor de la altura **h** indicada en el contenedor cilíndrico que se muestra, para que el bloque **A,** de masa **87.5 kg**, permanezca inmóvil y a punto de moverse hacia arriba del plano inclinado. Suponga que el agua pesa **1000 kg/m³** y que el cable es liso e inextensible. Además, desprecie tanto el peso del cable como el del contenedor y considere que el coeficiente de fricción estática vale **0.3.**




**Solución**

**Bloque A**

$\sum \mathbf{F_y} = 0; \qquad \mathrm{NA} = 87.5\mathrm{g}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\sum \mathbf{F_x} = 0; \quad \mathrm{T} - \mu\mathrm{NA} - \mathrm{WA}\sin\theta = 0$

$$\mathrm{T} = 0.3\left(\frac{87.59}{\sqrt{2}}\right) + \frac{87.59}{\sqrt{2}}$$

$\mathrm{T} = 789.05\ \mathrm{N}$

**Cilindro**

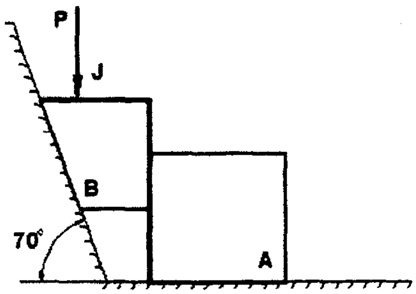
$\mathrm{T} = \mathrm{Wagua}$

$\mathrm{Wagua} = 1000\pi\mathrm{r}^2\mathrm{gh} = 1000\pi(0.4)^2\mathrm{gh}$

$789.05 = 4931.04\mathrm{h}$

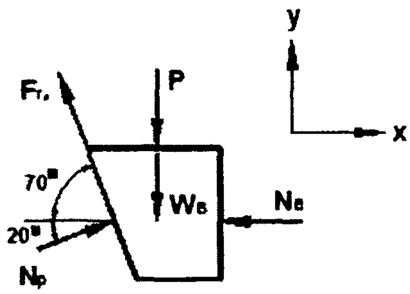
$\therefore \mathbf{h = 0.16m}$

58. Para el arreglo de cuerpos mostrado, determine el valor máximo que puede alcanzar la fuerza vertical **P**, que permita garantizar el equilibrio de dicho arreglo. Considere el coeficiente de fricción estática $\mu_E = 0.3$, para todas las superficies en contacto, excepto para las que están entre los cuerpos **A** y **B**.




**Solución**

**dcl de B:**




$$\sum \overline{F} = \overline{0}$$

$$\overline{P} + \overline{W}_B + \overline{N}_B + \overline{N}_P + \overline{F}_{rP} = \overline{0}$$

$$\overline{F}_{rP} = \overline{F}_{r'P}$$

$$(N_P \cos\emptyset - F_{r'P}\cos\theta - N_B)i + (N_P \operatorname{sen}\emptyset + F_{r'P}\operatorname{sen}\theta - P - W_B)j = 0i + 0j$$

$N_P\cos\emptyset - \mu_E N_P\cos\theta - N_B = 0$ ; $N_P(\cos\emptyset - \mu_E\cos\theta) - N_B = 0$ ...(1)

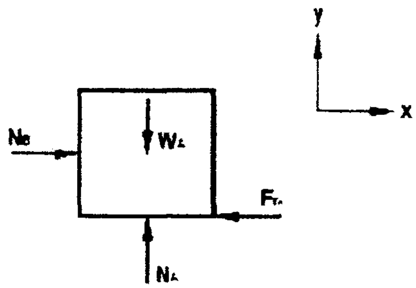
$N_P\sin\emptyset + \mu_E N_P\sin\theta - P - W_B = 0$ ; $N_P(\sin\emptyset + \mu_E\sin\theta) - P - W_B = 0$ ... (2)

de (1) $N_P = \frac{N_B}{\cos\emptyset - \mu_E\cos\theta}$ ...(3)

(3) en (2): $N_B\left(\frac{\sin\emptyset+\mu_E\sin\theta}{\cos\emptyset-\mu_E\cos\theta}\right)-P-W_B=0$

$P=N_B\left(\frac{\sin\emptyset+\mu_E\sin\theta}{\cos\emptyset-\mu_E\cos\theta}\right)-W_B \quad \ldots(4)$

**dcl de A:**




$\sum\overline{F}=\overline{0}$

$\overline{N}_B+\overline{F}_{rA}+\overline{N}_A+\overline{W}_A=\overline{0}$

$\overline{F}_{rA}=\overline{F}_{r'A}$

$(N_B-F_{rA})i+(N_A-W_A)j=\overline{0}$

$(N_B-\mu_E N_A)i+(N_A-W_A)j=\overline{0}$

$N_A-W_A=0 \quad ; \quad N_A=W_A \qquad \ldots(5)$

$N_B-\mu_E N_A=0 \quad ; \quad N_B=\mu_E W_A \quad \ldots(6)$

(6) en (4) $P=\mu_E W_A\left(\frac{\sin\emptyset+\mu_E\sin\theta}{\cos\emptyset-\mu_E\cos\theta}\right)-W_B$

Sustituyendo datos:

$$P=(0.3)(20)\left(\frac{\sin 26°+0.3\sin 70°}{\cos 20°-\mu_E\cos 70°}\right)-1$$

$$P=6\left(\frac{0.6239}{0.8371}\right)-1$$

$\mathbf{P=3.472\ kN}$

Compilación de ejercicios de Estática, editado por la Facultad de Ingeniería. Se terminó de imprimir el 15 de octubre de 2013 en el Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Av. Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C. U., Delegación Coyoacán, México, D. F., Código Postal 04510. Se imprimió en offset a una tinta interiores y forros. El tiraje consta de 60 ejemplares, impresos en papel bond de 75 gramos y forros en couché de 300 gramos, con un tamaño final de 21.5x28.0 cm.

**Secretaría de Servicios Académicos**

**Universidad Nacional Autónoma de México**

**Facultad de Ingeniería**