DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

"ANALISIS DE ESFUERZOS PARA FLEXIBILIDAD EN TUBERIAS"

DESCRIPCION GENERAL DEL PROGRAMA

S A P. IV

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

JUNIO, 1984

DESCRIPCION DEL PROGRAMA SAP IV

- PROGRAMA DE PROPOSITO GENERAL
- ORIENTADO A LA MECANICA DE SOLIDOS Y ESTRUCTURAL
- DESARROLLADO POR BATHE, WILSON y PETERSON EN LA U. DE C., BERKELEY
- REALIZA ANALISIS ELASTOSTATICO Y ELASTODINAMICO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES

- TIPOS DE ELEMENTOS
  1. ELEMENTO BARRA (3D)
  2. " VIGA (3D)
  3. " PLANO (ESFUERZO PLANO) (2D) ISOP.
  4. " " (ESF., DEF., AXISIM.) (2D) ISOP.
  5. " SOLIDO (3D) ISOP.
  6. " CASCARON Y PLACA (3D) ISOP.
  7. " FRONTERA (ESPECIAL)
  8. " CASCARON Y PLACA GRUESA (3D) ISOP.
  9. " TUBO (RECTO O CURVO) (3D) ISOP.

- TIPOS DE CARGAS
  - CONCENTRADAS
  - DISTRIBUIDAS
  - TERMICAS
  - DESPLAZAMIENTOS
  - GRAVEDAD
  - INERCIA

TIPOS DE ANALISIS

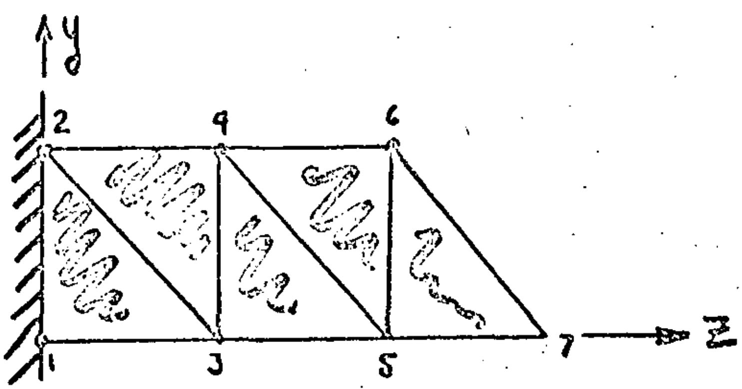
I. ESTATICO

CARGAS: CONCENTRADAS
DISTRIBUIDAS
TERMICAS
GRAVEDAD
DE DESPLAZAMIENTO

II. DINAMICO

- CALCULO DE FRECUENCIAS Y MODOS DE VIB.
- CALCULO DE FREC. Y RESPUESTA EN EL TIEMPO
- ANALISIS DE RESPUESTA ESPECTRAL
- INTEGRACION DIRECTA (RESP. EN EL TIEMPO)

CONDICIONES DE FRONTERA NODALES



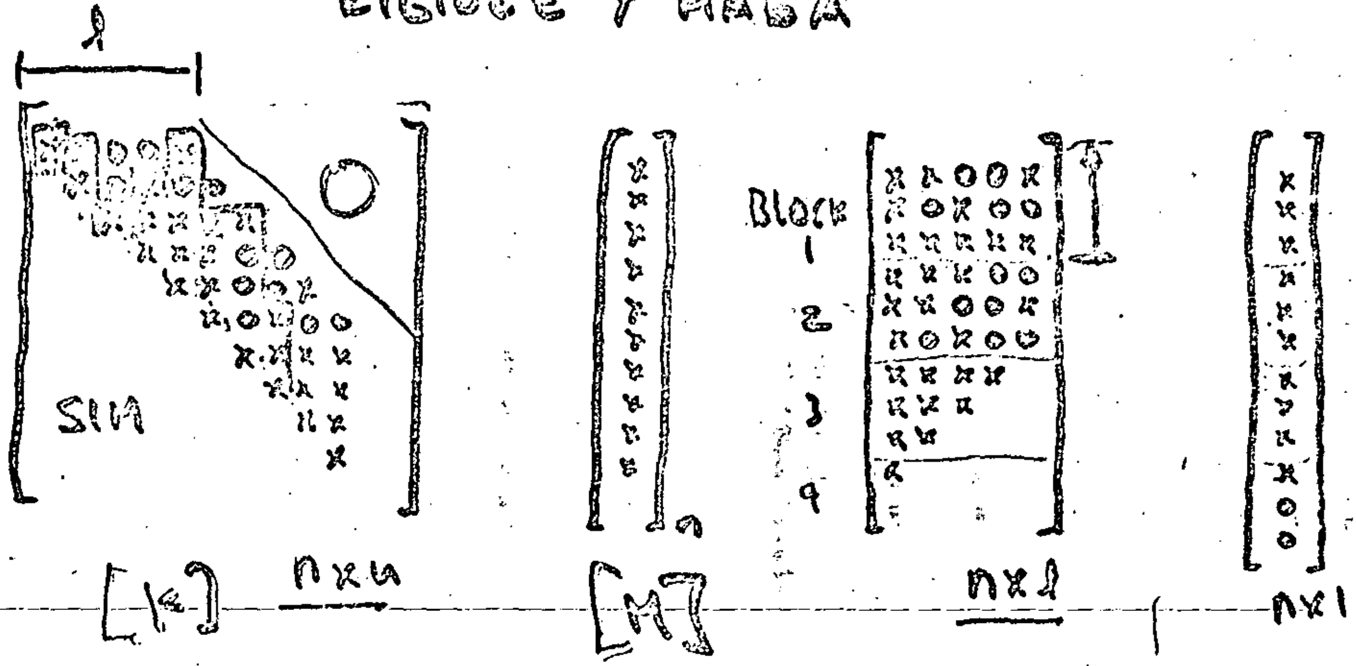
TRASLACION ROTACION

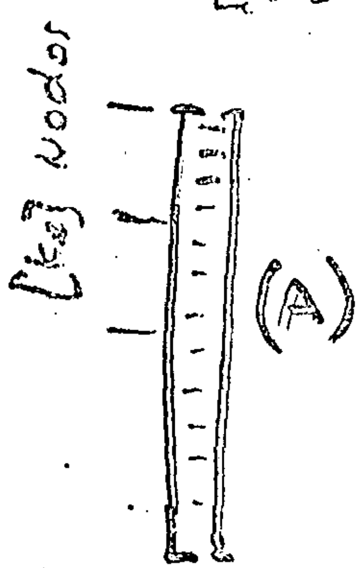
Coord
X Y Z T

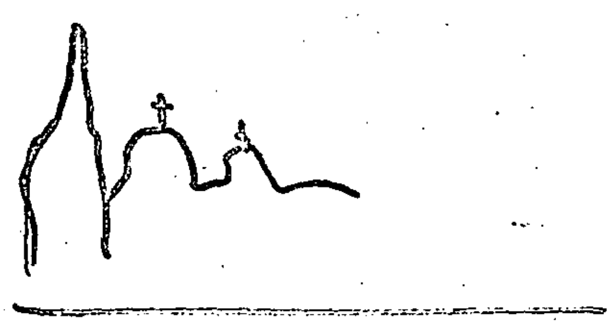
$$
[ID] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} X & Y & Z & X & Y & Z \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{1} & 0^{2} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{3} & 0^{4} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{5} & 0^{6} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{7} & 0^{8} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{9} & 0^{10} & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

10 grados de libertad activos

ALMACENAMIENTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ Y MASA







"ANALISIS DE ESFUERZOS PARA FLEXIBILIDAD EN TUBERIAS"

- PROBLEMA DE FIN DE CURSO

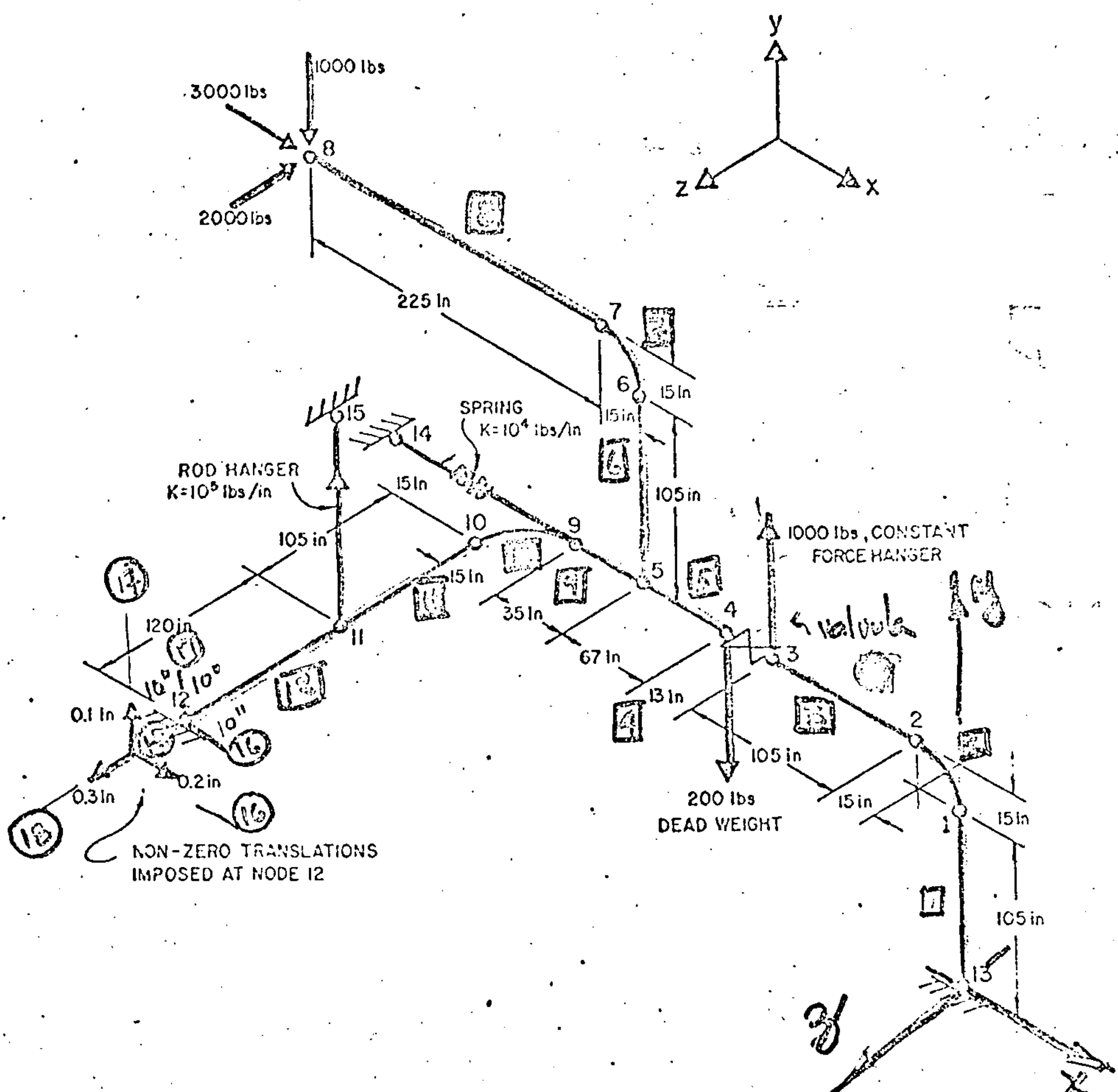
DR. PORFIRIO BALLESTEROS

JUNIO, 1984

PROBLEM 12.1 PIPE NETWORK STATIC ANALYSIS

Problem Definition

Ref: SAP IV Manual, problem 1



Problem Formulation

The non-zero displacements at node 12 are created by using boundary elements connected to added nodes 16, 17 and 18.

TARJETA IDENTIFICADORA
ANALISIS ESTATICO DE UNA RED DE TUBERIA

PARAMETROS DEL ANALISIS							
NUMNP	NELTYP	LL	NP	NOYN	MODEX	NAD	KERB
18	2	1	0	0	0		

NUMNP = No. de Nodos
NELTYP = No. de tipos de elem.
LL = No. de casos de carga
NF = No. de frecuencias

NOYN = Tipo de Análisis
MODEX = Modo de Ejecución
NAD = No. de vectores, solamente para NOYN = 1
KERB = No. de grados de libertad

DEFINICION DE NODOS

SIST. COOR.	NUME. NODO.	Fronteras de Tras. Código de Condic.			Fronteras de Rotación Código de Condic.			Coordenadas			No de Increm.	Temp. nodal
	1	0	0	0	0	0	0	0.0	105.0	0.0	0	740.0
	2	0	0	0	0	0	0	-15.0	120.0	0.0	0	740.0
	3	0	0	0	0	0	0	-120.0	120.0	0.0	0	740.0
	4	0	0	0	0	0	0	-133.0	120.0	0.0	0	740.0
	5	0	0	0	0	0	0	-200.0	120.0	0.0	0	740.0
	6	0	0	0	0	0	0	-200.0	225.0	0.0	0	740.0
	7	0	0	0	0	0	0	-215.0	240.0	0.0	0	740.0
	8	0	0	0	0	0	0	[illegible]	240.0	0.0	0	740.0
	9	0	0	0	0	0	0	-235.0	120.0	0.0	0	740.0
	10	0	0	0	0	0	0	-250.0	120.0	15.0	0	740.0
	11	0	0	0	0	0	0	-250.0	120.0	120.0	0	740.0
	12	0	0	0	1	1	1	-250.0	120.0	240.0	0	740.0
	13	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	0	740.0
	14	1	1	1	1	1	1	-245.0	120.0	0.0	0	0
1	2-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-45	46-55	56-65	66-70	71-80

FORMATO(A1, I4, 6I5, 3F10.0, I5, F10.0)

Sist. Coord.	Nume. Nodo.	Front. de Translación Código de Condic.			Front. de Rotación Código de Condic.			Coordenadas			No de Increm.	Temp. Nodal
[illegible]	15	1	1	1	1	1	1	-250.0	130.0	120.0	0	0
[illegible]	16	1	1	1	1	1	1	-240.0	120.0	240.0	0	0
[illegible]	17	1	1	1	1	1	1	-250.0	130.0	240.0	0	0
[illegible]	18	1	1	1	1	1	1	-250.0	120.0	250.0	0	0
1	2-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-45	46-55	56-65	66-70	71-80

FORMAT(A1, I4, 6I5, 3F10.0, I5, F10.0)

Nodos 16, 17, y 18 son para simular desplazamientos

Datos de los elementos de frontera

TARJETA DE CONTROL	
Tipo	No. de Elem.
7	5
1-5	6-10

FORMAT (2I5)

FACTORES DE CARGA DEL ELEM.			
Carga del El. Caso A	Carga del El. Caso B	Carga del El. Caso C	Carga del El. Caso D.
1.0	0.0	0.0	0.0
1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(4F10.0)

TARJETAS DE ELEMENTOS FRONTERA										
NODE A	NODE B	NODE J	NODE K	NODE L	CDISP	CROT	K	DEAX	REAX	SSTF
9	14	0	0	0	1	0	0	0.0	0.0	1.0E4
11	15	0	0	0	1	0	0	0.0	0.0	1.0E5
-12	16	0	0	0	1	0	0	0.2	0.0	1.0E13
12	17	0	0	0	1	0	0	0.1	0.0	1.0E13
12	18	0	0	0	1	0	0	0.3	0.0	1.0E13
1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-50	51-60	61-70

FORMAT(8I5,3F10.0)

Datos para los elementos tubo

TARJETA DE CONTROL				
TYPE	NPIPE	NUMMAT	MAXTP	NSECT
12	12	1	1	2
2-5	6-10	11-15	16-20	21-25

FORMAT(5I5)

PROP. DEL MATERIAL		
No. iden.	No. de Tem.	Identificación
1	1	CARBON STEEL
1-5	6-10	11-46

FORMAT(2I5,6A6)

TARJETA DE MATERIALES			
Temp.	Mod. Young	Rad. Poisson	coef. de exp. Term.
0.0	27.9E6	0.333	6.81E-6
1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(4F10.0)

PROPIEDADES DE LA SECCION						
No. de Secc.	diámetro exterior	espesor pared	factor de forma	peso por un. de long.	masa por un. de long.	Identificación
1	10.74	0.50	0.0	6.61		NORMAL PIPE
2	10.74	2.00	0.0	6.61		VALVE
1-5	6-15	16-25	26-35	36-45	46-55	56-73

FORMAT(I5,5F10.0,3A6)

Multiplicadores de los Casos de Carga				
caso A	caso B	caso C	caso D	
0.0	0.0	0.0	0.0	x-gravity
-1.0	0.0	0.0	0.0	y-gravity
0.0	0.0	0.0	0.0	z-gravity
1.0	0.0	0.0	0.0	Thermal
0.0	0.0	0.0	0.0	Pressure
1-10	11-20	21-30	31-40	

FORMAT (4F10.0)

TARJETAS DEL ELEMENTO TUBO					
N		Nodo I	Nodo J	Mat.	Secc.
1	T	13	1	1	1
2	B	1	2	1	1
3	T	2	3	1	1
4	T	3	4	1	2
5	T	4	5	1	1
1-4	5	6-10	11-15	16-20	21-25

FORMAT (I4, A1, 4I5)

N		Nodo I	Nodo J	Mat.	Sec.
6	T	5	6	1	1
7	B	6	7	1	1
8	T	7	8	1	1
9	T	5	9	1	1
10	B	9	10	1	1
11	T	10	11	1	1
12	T	11	12	1	1
1-4	5	6-10	11-15	16-20	21-25

FORMAT(4I,A1,4I5)

	R	tercer pto.	x	y	z
2	15.0	CC	-15.0	105.0	0.0
7	15.0	CC	-215.0	225.0	0.0
10	15.0	CC	-235.0	120.0	15.0
	1-10	14-15	16-25	26-35	36-45

Elementos

FORMAT(F10.0,3X,A2,3F10.0)

CARGAS/MASAS CONCENTRADAS							
N	L	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
3	1	0.0	1000.0	0.0			
4	1	0.0	-200.0	0.0			
8	1	3000.0	1000.0	2000.0			
1-5	6-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70

FORMAT(2I5, 6F10.0)

Multiplicadores de carga del elem.			
caso A	caso B	caso C	caso D
1.0	0.0	0.0	0.0
1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT (4F10.0)

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

"ANALISIS DE ESFUERZOS PARA FLEXIBILIDAD EN TUBERIAS"

FLEXIBILIDAD- RIGIDEZ- MIXTO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

JUNIO, 1984

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

CONTENIDO

INTRODUCCION

I

El análisis estructural, a través del método de rigideces, resuelve el problema del análisis de sistemas estructurales, mediante la solución de la ecuación general $\{F\}=[K]\{d\}$, en donde el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura $[K]$, mantiene una relación directa con el número de grados de libertad angular y lineal del sistema estructural.

En un planteamiento tradicional, el análisis estructural concibe como nudos de una estructura a todos aquellos puntos en que concurren dos o más elementos de la misma.

Es posible, a través de un planteamiento más elaborado reducir el número de nudos de una estructura si sólo se consideran como tales a los puntos en que concurren tres o más elementos de esta, lo cual reduce considerablemente el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura $[K]$, siendo esto ventajoso desde el punto de vista de la solución matemática y sobre todo de la aplicación de computadores al análisis estructural.

Este planteamiento es de interés particular cuando se aplica al análisis estructural de sistemas de tuberías en dos o tres dimensiones, debido a que en estos sistemas estructurales existe por lo general un número suficientemente grande de puntos en que concurren solamente dos tramos de tubería (quiebres), como para pensar en un tratamiento especial para ellos, sin considerarlos como nudos.

CARACTERISTICAS

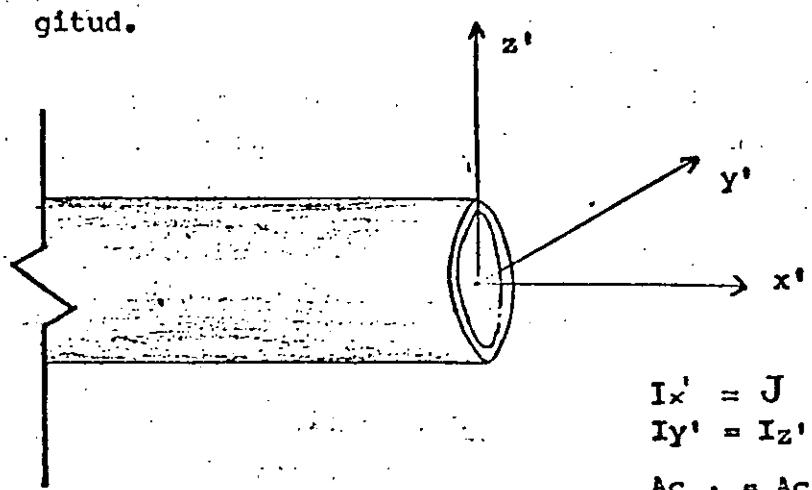
II

1.- NUDO.- Se considerarán como nudos sólo aquellos puntos de la estructura en que concurran tres o más tramos de barra y a los apoyos incompletos.

2.- TRAMO DE BARRA.- Se llamará así al tramo recto comprendido entre dos quiebres adyacentes de una barra.

3.- BARRA.- Se entenderá por barra, a la parte de tubería comprendida entre dos nudos.

4.- SECCION TRANSVERSAL.- La sección transversal de cada barra, será un anillo circular constante en toda su longitud.



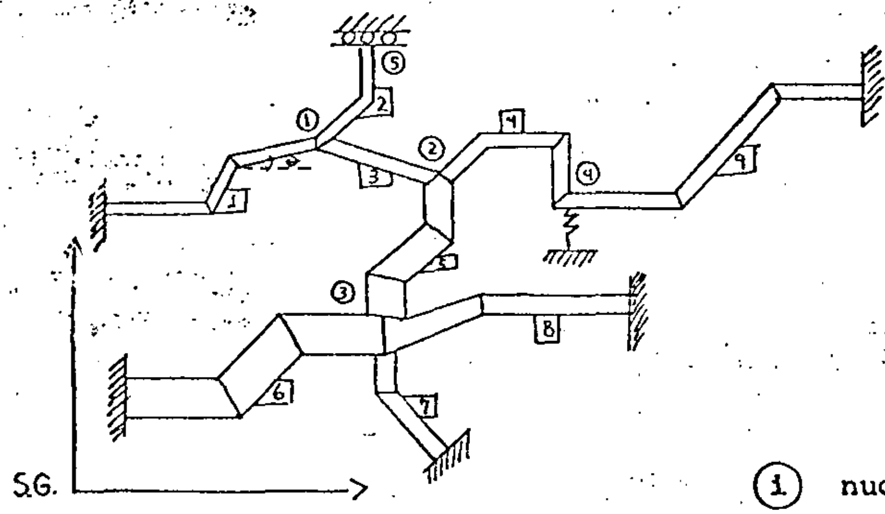
$I_{x'} = J$

$I_{y'} = I_{z'} = I$

$Ac_{y'} = Ac_{z'} = Ac$

FIG 1 .- Propiedades de la sección transversal y ejes locales de referencia. (S.L.)

A).- Para análisis en dos dimensiones.



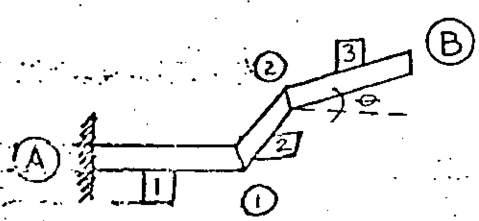
(i) nudo

[i] barra

S.G.≡ Sistema global de referencia.

FIG. 2.- Tubería en el plano. Nótese que en un nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

A. 1.).- Matriz de transformación de coordenadas T para un tramo de barra.



(j) quiebre

[j] tramo

FIG 3.- Tramos de barra y ángulo θ para la barra 1 de la figura 2.

$$[T]_{[j]} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde θ = inclinación del tramo de barra j referido al eje x positivo en el S.G. medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

A. 2.) Matriz de transporte entre los puntos (B) y (j) referidos al S.G.

$$\left[H_{Bj}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(Y_B - Y_j) & (X_B - X_j) & 1 \end{bmatrix}$$

Referido al tramo $\boxed{3}$ de la barra $\boxed{1}$ (fig. 3), B es el nudo (1) y j es el quiebre (2)

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte $\left[H_{Bj}\right]$ toma la forma de la matriz identidad $\left[I\right]$.

A. 3.) Matriz de flexibilidad del tramo $\boxed{j}$ en su extremo (j) referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

$$\left[f'_{BB}\right]_{\boxed{j}} = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{L^3(1+C)}{3EI} & \dfrac{L^2}{2EI} \\ 0 & \dfrac{L^2}{2EI} & \dfrac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

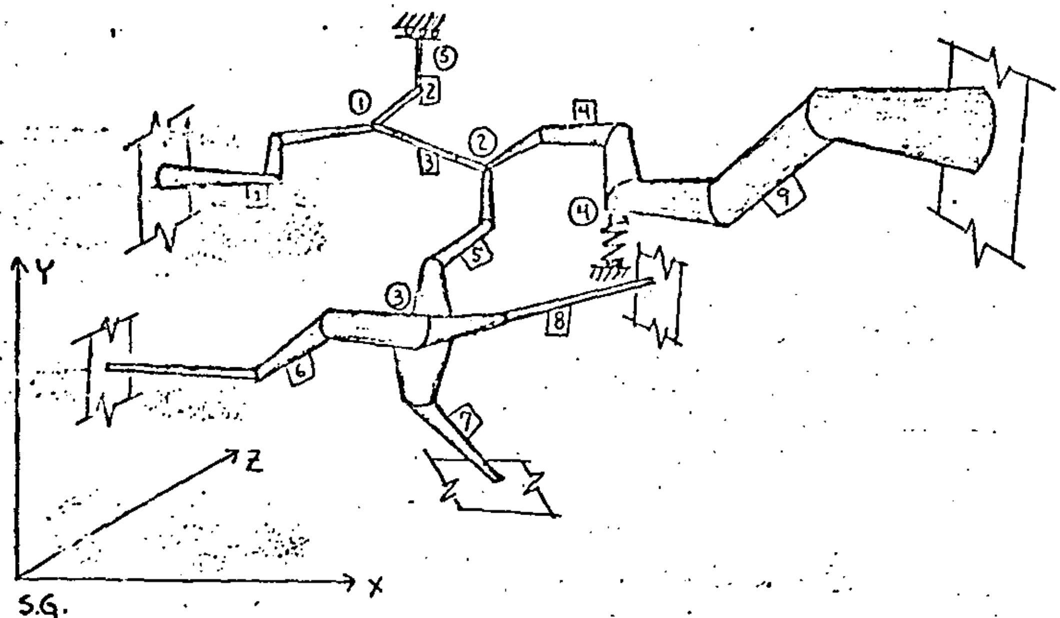
(en S.L.)

donde: $C = G\,(1+\nu)\dfrac{I}{AcL}$

ν = Módulo de Poisson del material

Ac = Area de cortante de la sección transversal

B).- Para análisis en tres dimensiones.



(i)	nudo
[i]	barra
S.G.	Sistema global de referencia

FIG. 4.- Tubería en el espacio. Nótese que en el nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

B. 1.) .- Matriz de transformación de coordenadas (T) para un tramo de barra.

$$[T]_{\boxed{j}} = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_3 \end{array}\right]$$

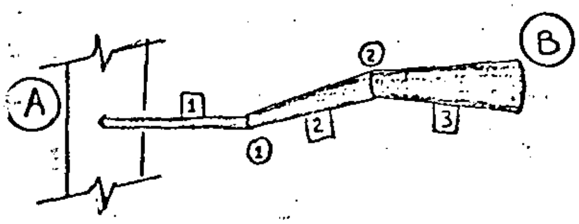
$$\text{donde: } [\Lambda_3] = \left|\begin{array}{c|c|c} Cx'x & Cy'x & Cz'x \\ \hline Cx'y & Cy'y & Cz'y \\ \hline Cx'z & Cy'z & Cz'z \end{array}\right|$$

En la matriz $[\Lambda_3]$ los elementos de las columnas 1,2 y 3 son los cosenos directores de x', Y' y z' respectivamente, del tramo $\boxed{j}$ en la barra $\boxed{i}$ en S.L., con respecto al S.G. (ver fig 1 y fig 4)

B. 2.) .- Matriz de transporte entre los puntos B y j referidos al S.G.

$$\left[H_{Bj}\right] = \left(\begin{array}{c|c} [I] & 0 \\ \hline [h] & [I] \end{array}\right)$$

$$\text{donde: } [h] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -(Z_B-Z_j) & (Y_B-Y_j) \\ \hline (Z_B-Z_j) & 0 & -(X_B-X_j) \\ \hline -(Y_B-Y_j) & (X_B-X_j) & 0 \end{array}\right)$$



(j) quiebre

$\boxed{j}$ tramo

FIG.5.- Tramos de barra y quiebres para la barra $\boxed{i}$ de la figura 4 (para el tramo $\boxed{1}$, B es el nudo (3) y j es el quiebre (1))

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte $[H_{Bj}]$ toma la forma de la matriz identidad $[I]$.

B. 3.) .- Matriz de flexibilidad del tramo $\boxed{j}$ en su extremo (j) referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

donde: $C = G(1+\nu)\dfrac{I}{A_c L^2}$

$\nu \equiv$ Módulo de Poisson del material

A_c = Area de cortante de la sección transversal

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

$$\left[f'_{BB}\right]_{\boxed{j}} = \begin{pmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI} \end{pmatrix}$$

(en S. L.)

PLANTEAMIENTO GENERAL IV

La solución de la ecuación general planteada en el análisis estructural a través del método de rigideces

$$\{F\} = [K]\{d\} \qquad \ldots (1)$$

comprende las siguientes etapas:

A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$

B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$

C.- Obtención del vector de desplazamientos d mediante la solución de la ecuación general (1).

D.- Obtención de los elementos mecánicos en los extremos de cada barra, calculados a partir del vector de desplazamiento $\{d\}$

Se tratarán aquí solamente los puntos A y B. Los puntos C y D corresponden a un planteamiento tradicional del análisis estructural.

A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$

1).- Formación de la matriz $[K]$ en forma topológica

Se entiende por forma topológica de la matriz K a la representación matricial de la relación que guardan los extremos de las barras con los nudos de la estructura

La matriz topológica $[K]$ para las estructuras de las figuras 2 y 4 es idéntica y tiene la siguiente forma, si el extremo B de las barras coincide con el nudo 1, 4 o 3

$$
\left[K\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\left[k_{BB}\right]_{\boxed{1}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{2}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{3}} & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{3}} & 0 & 0 & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{2}} \\
\hline
\left[k_{AB}\right]_{\boxed{3}} & \left[k_{AA}\right]_{\boxed{3}} + \left[k_{AA}\right]_{\boxed{4}} + \left[k_{AA}\right]_{\boxed{5}} & \left[k_{AB}\right]_{\boxed{5}} & \left[k_{AB}\right]_{\boxed{4}} & 0 \\
\hline
0 & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{5}} & \left[k_{BB}\right]_{\boxed{5}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{6}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{7}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{8}} & 0 & 0 \\
\hline
0 & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{4}} & 0 & \left[k_{BB}\right]_{\boxed{4}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{9}} & 0 \\
\hline
\left[k_{AB}\right]_{\boxed{2}} & 0 & 0 & 0 & \left[k_{AA}\right]_{\boxed{2}}
\end{array}\right]
$$

(en S. G.)

Nótese que puede pensarse en una reordenación de la nomenclatura de los nudos a fin de obtener un menor ancho de banda de la matriz $\left[K\right]$, lo cual es conveniente desde el punto de vista de la aplicación de computadores.

2).- <u>Obtención de las matrices $\left[k_{AA}\right]$, $\left[k_{AB}\right]$, $\left[k_{BA}\right]$ y $\left[k_{BB}\right]$ para cada barra en S. G.</u>

Estas matrices están relacionadas entre sí através de las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
\left[k_{AA}\right] &= \left[H_{BA}\right]\left[k_{BB}\right]\left[H_{BA}\right]^T \\
\left[k_{AB}\right] &= -\left[H_{BA}\right]\left[k_{BB}\right] \\
\left[k_{BA}\right] &= -\left[k_{BB}\right]\left[H_{BA}\right]^T
\end{aligned}
$$

donde A y B son los extremos de la barra (ver figuras 3 y 5)

Por lo que sólo será necesario calcular $\left[k_{BB}\right]$ de cada barra, y aplicar las expresiones anteriores para calcular $\left[k_{AA}\right]$, $\left[k_{AB}\right]$ y $\left[k_{BA}\right]$.

Para calcular $\left[k_{BB}\right]$ se procede de la manera siguiente:

Recuérdese que $\left[k_{BB}\right] = \left[f_{BB}\right]^{-1}$, por lo que el problema se reduce a calcular $\left[f_{BB}\right]$ en S. G., la cual se obtiene a partir de la siguiente expresión : (Ver figuras 3 y 5).

$$\left(f_{BB}\right)_{\boxed{i}} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}\,tramos} \left(H_{Bj}\right)^T \left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}} \left(H_{Bj}\right) \quad (\text{en S.G})$$

donde $\left(H_{Bj}\right)$ y $\left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}}$ se encuentran referidas al S.G. de referencia.

La matriz de flexibilidades del tramo $\boxed{j}$ en el extremo B, referida al S.G. puede calcularse con la siguiente expresión.

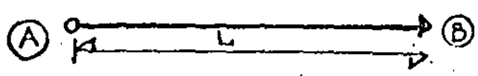
$$\left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}} = \left(T\right)_{\boxed{j}} \left(f'_{BB}\right)_{\boxed{j}} \left(T\right)^T_{\boxed{j}}$$

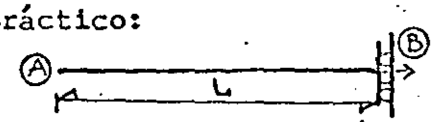
(en S.G.)

3).- Tratamiento de apoyos incompletos

Un apoyo incompleto puede no ser considerado como nudo, si se emplean las rigideces modificadas del tramo de barra que concurre en él.

A continuacion se listan las matrices de rigideces modificadas para dos casos de interés práctico:





$$\left(k'_{AB}\right) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

$$\left(k'_{BB}\right) = \left(k'_{AA}\right) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

$$\left(k'_{BB}\right) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

$$\left(k'_{AB}\right) = \left(k'_{BA}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} \end{pmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

Para obtener $\{k\}$ en S.G. se emplea la siguiente expresion:

$$[k] = [T][k'][T]^T$$

Con $[T]$ tal como fue definído en III

B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$

Las cargas que pueden presentarse en un sistema de tuberías como el de las figuras 2 y 4, son las siguientes:

1.- Fuerzas externas aplicadas en:
- los nudos de la estructura
- los quiebres de las barras
- los tramos de cada barra

Considérese la barra $\boxed{1}$ de la fig. 2, cargada como se muestra en la figura 6

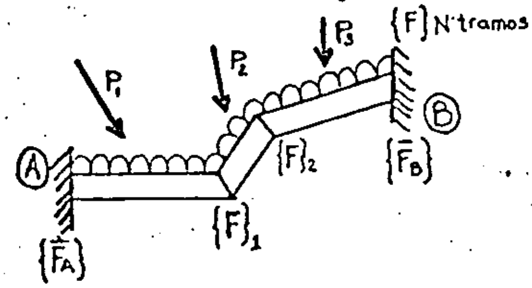


FIG. 6.- Barra $\boxed{1}$ cargada y fuerzas de fijación $\{\bar{F}_A\}$ y $\{F_B\}$

$\{F_J\}$ = Fuerzas quiebre - Fuerzas fijación.

FIG. 7.- Barra $\boxed{i}$ en cantiliver.

Las fuerzas de fijación en el extremo B de la barra $\boxed{i}$ se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_B\} = -[k_{BB}]\{d_B^*\}$$

donde $\{d_B^*\}$ es la matriz de desplazamientos del extremo B considerando a la barra en cantiliver (ver fig. 7) y se calcula con la siguiente expresión

$$\{d_B^*\} = \sum_{j=1}^{N^\circ tramos} [H_{Bj}]^T [\tilde{f}_j] \{F_j\}$$

En la expresión anterior, $\{F_j\}$ es el vector resultante de restar las fuerzas externas aplicadas en el quiebre (j) ($\{F\}_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \{F\}_{N^\circ tramos}$ en la figura 6) menos las fuerzas de fijación producidas por las cargas externas aplicadas en los tramos adyacentes al quiebre (j) ambas referidos al S.G.

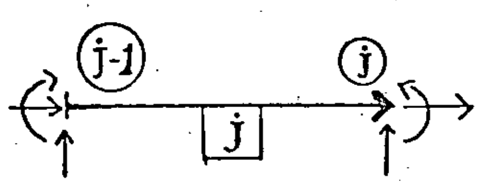
El vector $\{F_j\}$, tiene la forma siguiente para el caso de sistemas de tuberías en dos y tres dimensiones.

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$$

(S.P. 2D)

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jY} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jY} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$$

(S.G. 3D)



Convención positiva del vector $\{F_j\}$

La matriz $[H_{Bj}]$ se aplica tal como fue definida en III.

La matriz $[\tilde{f}_j]$ es la matriz de flexibilidades del segmento de barra comprendido entre el extremo origen (A) y el quiebre (j) respecto al extremo destino (j) y está definida mediante la siguiente fórmula de recurrencia.

$$[\tilde{f}_{j+1}] = [f_{\boxed{j+1}}] + [H_{(j+1)(j)}]^T [\tilde{f}_j] [H_{(j+1)(j)}]$$

$$1 \leq j \leq (N^\circ tramos - 1)$$

en donde $\left[H_{\boxed{j+1}\boxed{j}}\right]$ se aplica tal como fue definida en III y $\left(f_{\boxed{j+1}}\right)$ se obtiene por un procedimiento similar al descrito en A.2.

Nótese que en la ecuación anterior se tiene que:

$$\left(\tilde{f}_1\right) = \left(f_{BB}\right)_{\boxed{1}}$$

$$\text{y} \qquad \left(\tilde{f}\ N\text{ tramos}\right) = \left(f_{BB}\right)_{\boxed{i}}$$

Mediante el procedimiento descrito, se obtiene $\left\{d_B^*\right\}$ se calcula $\left\{\bar{F}_B\right\}$ y se le suman las fuerzas de fijación en el extremo Ⓑ de la barra $\boxed{i}$ producidas por las cargas aplicadas en el tramo adyacente a él, obteniendose así el vector $\left\{\bar{F}_B\right\}$ definitivo.

Una vez conocido el vector de fuerzas $\left\{\bar{F}_B\right\}$ de la barra $\boxed{i}$ se calcula el vector de fuerzas $\left\{\bar{F}_A\right\}$ de la misma barra con la siguiente expresión:

$$\left\{\bar{F}_A\right\} = \left\{\bar{F}_A\right\}^* - \left[H_{BA}\right]\left\{\bar{F}_B\right\}$$

donde: $\left\{\bar{F}_A\right\}^*$ es el vector de fuerzas en el extremo Ⓐ de la barra $\boxed{i}$, producido por las cargas actuantes en ella considerándola en cantiliver, (ver fig. 7) y $\left[H_{BA}\right]$ se aplica tal como fue definida en III.

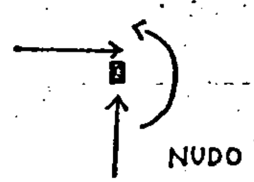
Los vectores de fuerzas $\left\{\bar{F}_A\right\}$ y $\left\{\bar{F}_B\right\}$ así obtenidos constituyen el estado I de cargas (fuerzas de fijación).

Al aplicar vectores de carga en sentido contrario a los del estado I, y sumar los que concurren en un nudo mas el vector de cargas aplicado en el mismo, se constituye el estado II de cargas.

La forma topológica del vector de cargas $\{F\}$ en la ecuación (1) para las estructuras de las figuras 2 y 4, siendo nudos destino el ①, ③ o ④, es la siguiente:

$$
\{F\} = \left\{ \begin{array}{c}
\{\bar{F}_B\}_{\boxed{1}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{2}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{3}} + \{F\}_{①} \\
\hline
\{\bar{F}_A\}_{\boxed{3}} + \{\bar{F}_A\}_{\boxed{4}} + \{\bar{F}_A\}_{\boxed{5}} + \{F\}_{②} \\
\hline
\{\bar{F}_B\}_{\boxed{5}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{6}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{7}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{8}} + \{F\}_{③} \\
\hline
\{\bar{F}_B\}_{\boxed{8}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{9}} + \{F\}_{④}
\end{array} \right\}
$$

Convención positiva para los componentes del vector $\{F\}$



Estamos ahora en posibilidad de resolver la ecuación general $\{F\}=[K]\{d\}$ y obtener los desplazamientos de los nudos de la estructura y calcular a partir de ellos los elementos mecánicos que se generan en los extremos de las barras (inciso IV.C), lo cual puede hacerse a través de un planteamiento tradicional de análisis estructural.

A los elementos mecánicos así obtenidos, se les suman los vectores de fuerzas de fijación que constituyen el estado I de cargas para obtener los elementos mecánicos definitivos en los extremos de cada barra de la estructura.

2.- Fuerzas Producidas por Cambios de Temperatura

Es aplicable todo lo estipulado en B.1, pero ahora el problema es más sencillo, ya que la única diferencia con lo visto allá, es que la matriz d ahora se calcula de la manera siguiente:

α = Coeficiente de dilatación lineal del material

Δt = Cambio de temperatura

Para α = cte

Δt = cte

$$\{d_B^*\} = \begin{Bmatrix} dx_B^* = \alpha\Delta t(X_B - X_A) \\ dy_B^* = \alpha\Delta t(Y_B - Y_A) \\ \phi_{zB}^* = 0 \end{Bmatrix}$$

(S.G. 2D)

$$d = \begin{Bmatrix} dx_B^* = \alpha\Delta t(X_B - X_A) \\ dy_B^* = \alpha\Delta t(Y_B - Y_A) \\ dz_B^* = \alpha\Delta t(Z_B - Z_A) \\ \phi x_B^* = 0 \\ \phi y_B^* = 0 \\ \phi z_B^* = 0 \end{Bmatrix}$$

(S.G. 3D)

Para α = cte

$(\Delta t)_{\boxed{j}}$ = variable para cada tramo $\boxed{j}$

$$\{d_B^*\} = \begin{Bmatrix} dx_B^* = \sum_{j=1}^{N^\circ tramos} \Delta t_{\boxed{j}} (\Delta x)_{\boxed{j}} \\ dy_B^* = \sum_{j=1}^{N^\circ tramos} \Delta t_{\boxed{j}} (\Delta y)_{\boxed{j}} \\ \phi z_B^* = 0 \end{Bmatrix}$$ (S.G. 2D)

$$\{d_B^*\} = \begin{Bmatrix} dx_B^* = \sum_{j=1}^{N^\circ tramos} \alpha\Delta t_{\boxed{j}} (\Delta x)_{\boxed{j}} & \phi x_B^* = 0 \\ dy_B^* = \sum_{j=1}^{N^\circ tramos} \alpha\Delta t_{\boxed{j}} (\Delta y)_{\boxed{j}} & \phi y_B^* = 0 \\ dz_B^* = \sum_{j=1}^{N^\circ tramos} \alpha\Delta t_{\boxed{j}} (\Delta z)_{\boxed{j}} & \phi z_B^* = 0 \end{Bmatrix}$$ (S.G. 3D)

3.- Fuerzas producidas por desplazamientos impuestos a los apoyos.

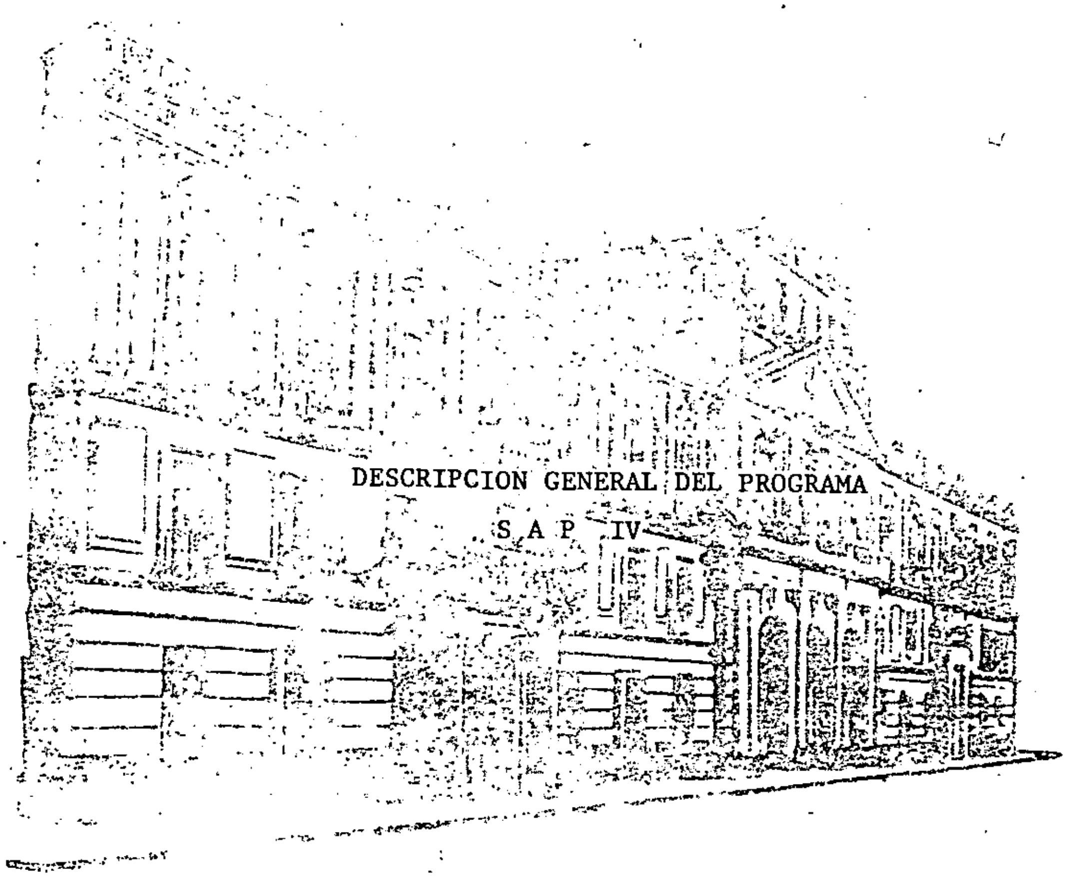
Es aplicable también ahora todo lo estipulado en B.1 y el problema resulta ser mas sencillo que los planteados en B.1 y B.2 puesto que ahora $\{\bar{F}_B\}$ se calcula directamente a partir de la siguiente espresión:

$$\{\bar{F}_B\} = [k_{BA}]\{\bar{d}_A\}$$

donde $\{\bar{d}_A\}$ es el vector de desplazamientos impuestos a la estructura en el apoyo A.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

"ANALISIS DE ESFUERZOS PARA FLEXIBILIDAD EN TUBERIAS"



DESCRIPCION GENERAL DEL PROGRAMA

S A P IV

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

JUNIO, 1984

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

DESCRIPCION DEL PROGRAMA SAP IV

- PROGRAMA DE PROPOSITO GENERAL
- ORIENTADO A LA MECANICA DE SOLIDOS Y ESTRUCTURAL
- DESARROLLADO POR BATHE, WILSON y PETERSON EN LA U. DE C., BERKELEY
- REALIZA ANALISIS ELASTOSTATICO Y ELASTODINAMICO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES

- TIPOS DE ELEMENTOS

1. ELEMENTO BARRA (3D)
2. " VIGA (3D)
3. " PLANO (ESFUERZO PLANO) (2D) ISOP.
4. " " (ESF., DEF., AXISIM.) (2D) ISOP.
5. " SOLIDO (3D) ISOP.
6. " CASCARON Y PLACA (3D) ISOP.
7. " FRONTERA (ESPECIAL)
8. " CASCARON Y PLACA GRUESA (3D) ISOP.
9. " TUBO (RECTO O CURVO) (3D) ISOP.

- TIPOS DE CARGAS
  - CONCENTRADAS
  - DISTRIBUIDAS
  - TERMICAS
  - DESPLAZAMIENTOS
  - GRAVEDAD
  - INERCIA

TIPOS DE ANALISIS

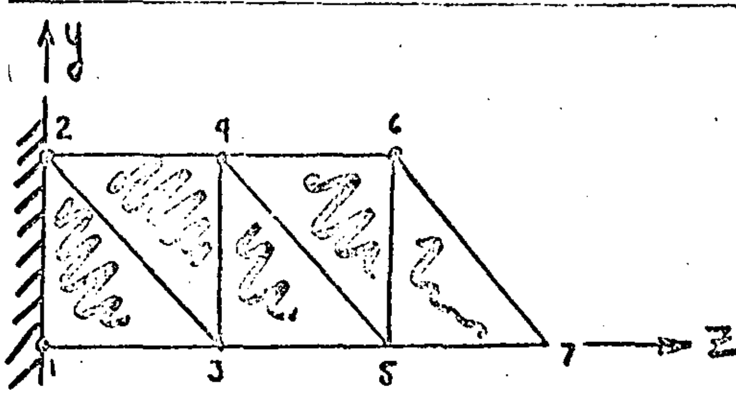
I. ESTATICO

CARGAS: CONCENTRADAS
DISTRIBUIDAS
TERMICAS
GRAVEDAD
DE DESPLAZAMIENTO

II. DINAMICO

- CALCULO DE FRECUENCIAS Y MODOS DE VIB.
- CALCULO DE FREC. Y RESPUESTA EN EL TIEMPO
- ANALISIS DE RESPUESTA ESPECTRAL
- INTEGRACION DIRECTA (RESP. EN EL TIEMPO)

CONDICIONES DE FRONTERA NODALES



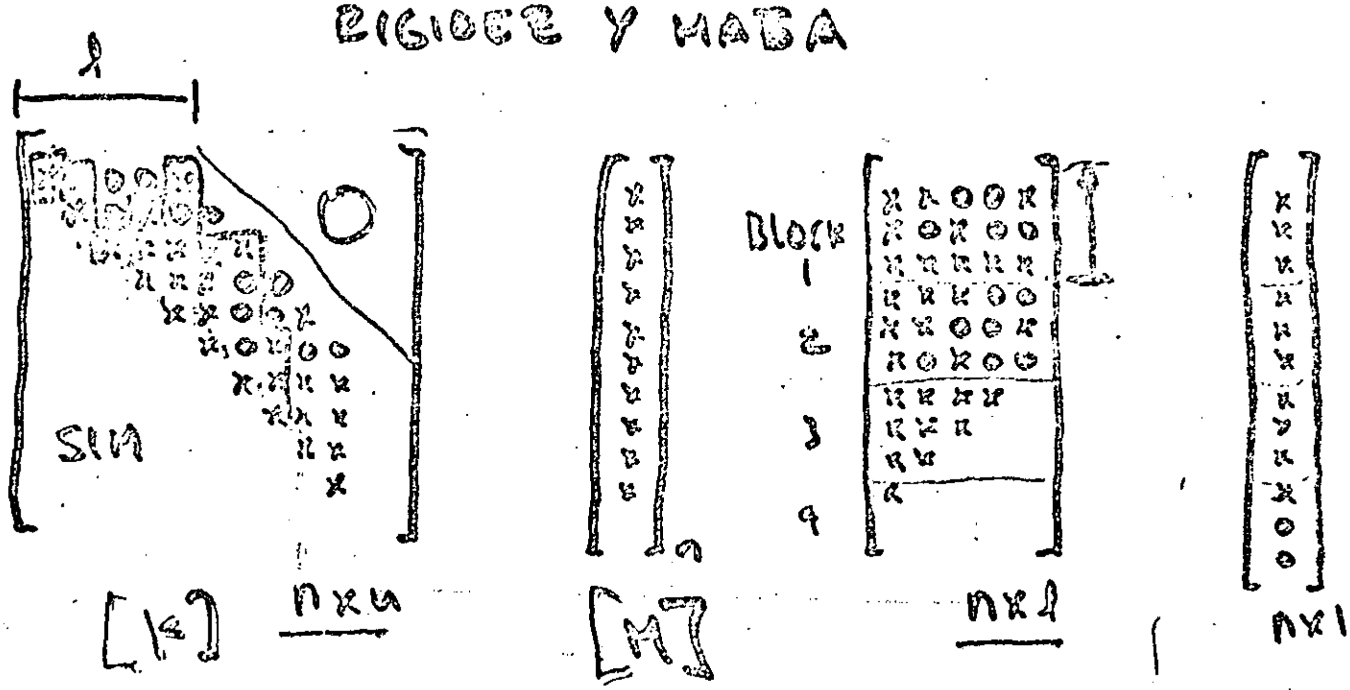
$$
[ID] = \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \multicolumn{3}{c}{\text{TRASLACION}} & \multicolumn{3}{c}{\text{ROTACION}} \\ X & Y & Z & X & Y & Z \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{1} & 0^{2} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{3} & 0^{4} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{5} & 0^{6} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{7} & 0^{8} & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0^{9} & 0^{10} & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

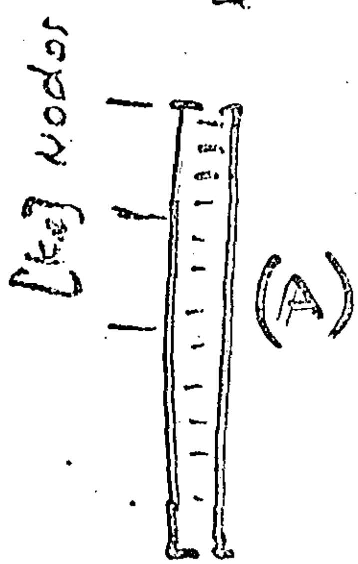
coord

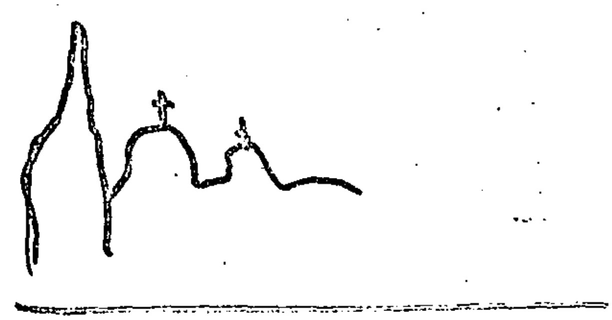
X Y Z T

10 grados de libertad activos

ALMACENAMIENTO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ Y MASA







DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

"ANALISIS DE ESFUERZOS PARA FLEXIBILIDAD EN TUBERIAS"

- PROBLEMA DE FIN DE CURSO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

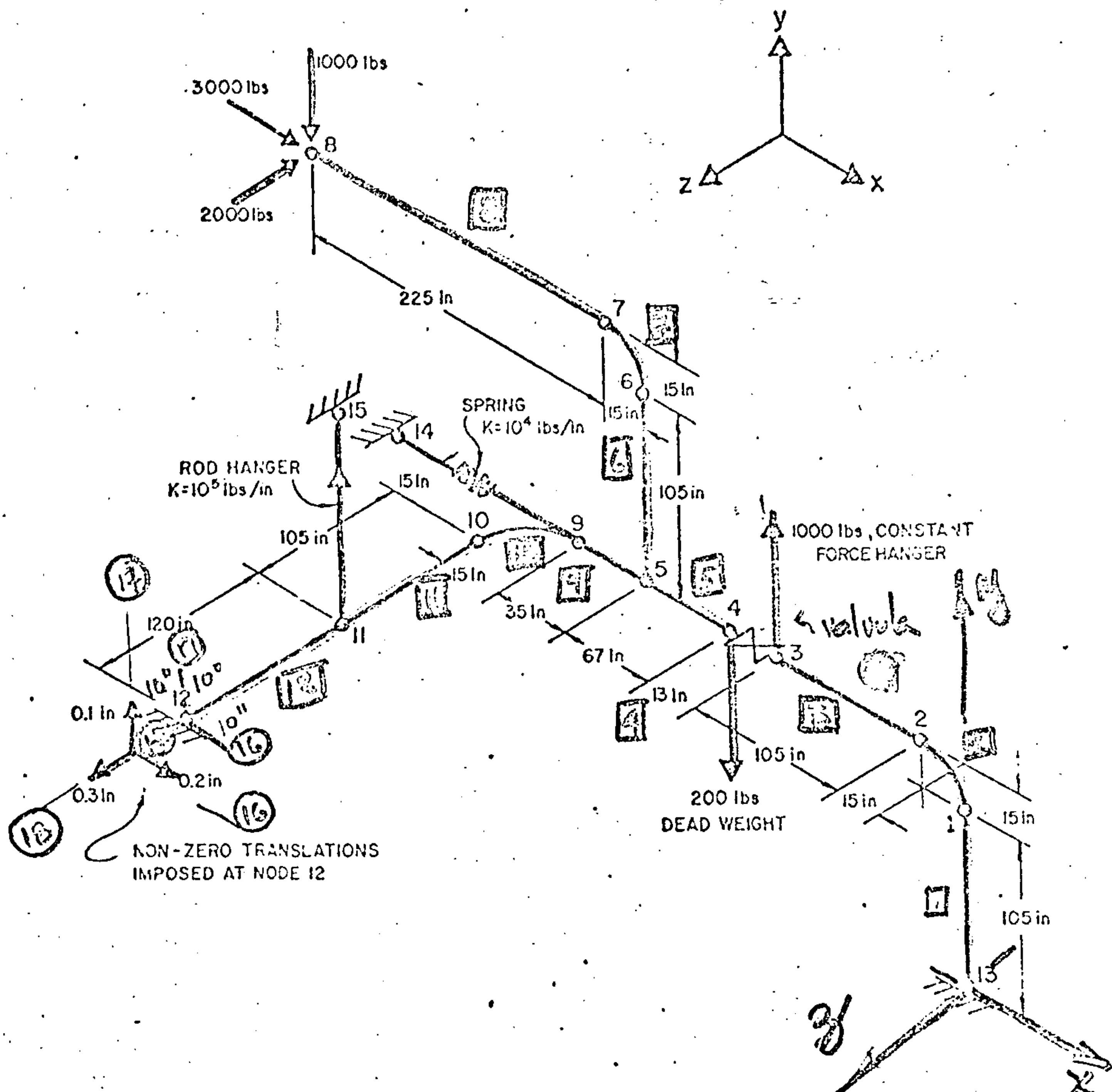
JUNIO, 1984

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

PROBLEM 12.1 PIPE NETWORK STATIC ANALYSIS

Problem Definition

Ref: SAP IV Manual, problem 1



Problem Formulation

The non-zero displacements at node 12 are created by using boundary elements connected to added nodes 16, 17 and 18.

TARJETA IDENTIFICADORA
ANALISIS ESTATICO DE UNA RED DE TUBERIA

PARAMETROS DEL ANALISIS							
NUMNP	NELTYP	LL	NF	NOYN	MODEX	NAD	KERB
18	2	1	0	0	0		

NUMNP = No. de Nodos
NELTYP = No. de tipos de elem.
LL = No. de casos de carga
NF = No. de frecuencias

NOYN = Tipo de Análisis
MODEX = Modo de Ejecución
NAD = No. de vectores, solamente para NOYN = 1
KERB = No. de grados de libertad

DEFINICION DE NODOS

SIST. COOR.	NUME. NODO.	Fronteras de Tras. Código de Condic.			Fronteras de Rotación Código de Condic.			Coordenadas			No de Increm.	Temp. nodal
	1	0	0	0	0	0	0	0.0	105.0	0.0	0	740.0
	2	0	0	0	0	0	0	-15.0	120.0	0.0	0	740.0
	3	0	0	0	0	0	0	-120.0	120.0	0.0	0	740.0
	4	0	0	0	0	0	0	-133.0	120.0	0.0	0	740.0
	5	0	0	0	0	0	0	-200.0	120.0	0.0	0	740.0
	6	0	0	0	0	0	0	-200.0	225.0	0.0	0	740.0
	7	0	0	0	0	0	0	-215.0	240.0	0.0	0	740.0
	8	0	0	0	0	0	0	[illegible]	[illegible]	0.0	0	740.0
	9	0	0	0	0	0	0	-235.0	120.0	0.0	0	740.0
	10	0	0	0	0	0	0	-250.0	120.0	15.0	0	740.0
	11	0	0	0	0	0	0	-250.0	120.0	120.0	0	740.0
	12	0	0	0	1	1	1	-250.0	120.0	240.0	0	740.0
	13	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	0	740.0
	14	1	1	1	1	1	1	-245.0	120.0	0.0	0	0
1	2-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-45	46-55	56-65	66-70	71-80

FORMATO(A1, I4, 6I5, 3F10.0, I5, F10.0)

Sist. Coord.	Nume. Nodo.	Front. de Translación Código de Condic.			Front. de Rotación Código de Condic.			Coordenadas			No de Increm.	Temp. Nodal
[illegible]	15	1	1	1	1	1	1	-250.0	130.0	120.0	0	0
[illegible]	16	1	1	1	1	1	1	-240.0	120.0	240.0	0	0
[illegible]	17	1	1	1	1	1	1	-250.0	130.0	240.0	0	0
[illegible]	18	1	1	1	1	1	1	-250.0	120.0	250.0	0	0
1	2-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-45	46-55	56-65	66-70	71-80

FORMAT(A1, I4, 6I5, 3F10.0, I5, F10.0)

Nodos 16, 17, y 18 son para simular desplazamientos

Datos de los elementos de frontera

TARJETA DE CONTROL	
Tipo	No. de Elem.
7	5
1-5	6-10

FORMAT (2I5)

FACTORES DE CARGA DEL ELEM.			
Carga del El. Caso A	Carga del El. Caso B	Carga del El. Caso C	Carga del El. Caso D.
1.0	0.0	0.0	0.0
1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(4F10.0)

TARJETAS DE ELEMENTOS FRONTERA

NODE(A)	NODE(B)	NODE(I)	NODE(R)	NODE(L)	CDISP	CROT	K	DEAX	REAX	SSTF
9	14	0	0	0	1	0	0	0.0	0.0	1.0E4
11	15	0	0	0	1	0	0	0.0	0.0	1.0E5
-12	16	0	0	0	1	0	0	0.2	0.0	1.0E13
12	17	0	0	0	1	0	0	0.1	0.0	1.0E13
12	18	0	0	0	1	0	0	0.3	0.0	1.0E13
1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-50	51-60	61-70

FORMAT(8I5, 3F10.0)

Datos para los elementos tubo

TARJETA DE CONTROL				
TYPE	NPIPE	NUMMAT	MAXTP	NSECT
12	12	1	1	2
2-5	6-10	11-15	16-20	21-25

FORMAT(5I5)

PROP. DEL MATERIAL		
No. iden.	No. de Tem.	Identificación
1	1	CARBON STEEL
1-5	6-10	11-46

FORMAT(2I5,6A6)

TARJETA DE MATERIALES			
Temp.	Mod. Young	Rad. Poisson	coef. de exp. Term.
0.0	27.9E6	0.333	6.81E-6
1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT(4F10.0)

PROPIEDADES DE LA SECCION						
No. de Secc.	diámetro exterior	espesor pared	factor de forma	peso por un. de long.	masa por un. de long.	Identificación
1	10.74	0.50	0.0	6.61		NORMAL PIPE
2	10.74	2.00	0.0	6.61		VALVE
1-5	6-15	16-25	26-35	36-45	46-55	56-73

FORMAT(I5,5F10.0,3A6)

Multiplicadores de los Casos de Carga				
caso A	caso B	caso C	caso D	
0.0	0.0	0.0	0.0	x-gravity
-1.0	0.0	0.0	0.0	y-gravity
0.0	0.0	0.0	0.0	z-gravity
1.0	0.0	0.0	0.0	Thermal
0.0	0.0	0.0	0.0	Pressure
1-10	11-20	21-30	31-40	

FORMAT (4F10.0)

TARJETAS DEL ELEMENTO TUBO					
N		Nodo I	Nodo J	Mat.	Secc.
1	T	13	1	1	1
2	B	1	2	1	1
3	T	2	3	1	1
4	T	3	4	1	2
5	T	4	5	1	1
1-4	5	6-10	11-15	16-20	21-25

FORMAT (I4, A1, 4I5)

N		Nodo I	Nodo J	Mat.	Sec.
6	T	5	6	1	1
7	B	6	7	1	1
8	T	7	8	1	1
9	T	5	9	1	1
10	B	9	10	1	1
11	T	10	11	1	1
12	T	11	12	1	1
1-4	5	6-10	11-15	16-20	21-25

FORMAT(4I,A1,4I5)

	R	tercer pto.	x	y	z
2	15.0	CC	-15.0	105.0	0.0
7	15.0	CC	-215.0	225.0	0.0
10	15.0	CC	-235.0	120.0	15.0
	1-10	14-15	16-25	26-35	36-45

Elementos

FORMAT(F10.0,3X,A2,3F10.0)

CARGAS/MASAS CONCENTRADAS							
N	L	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
3	1	0.0	1000.0	0.0			
4	1	0.0	-200.0	0.0			
8	1	3000.0	1000.0	2000.0			
1-5	6-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70

FORMAT(2I5, 6F10.0)

Multiplicadores de carga del elem.			
caso A	caso B	caso C	caso D
1.0	0.0	0.0	0.0
1-10	11-20	21-30	31-40

FORMAT (4F10.0)

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

"ANALISIS DE ESFUERZOS PARA FLEXIBILIDAD EN TUBERIAS"

FLEXIBILIDAD- RIGIDEZ- MIXTO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

JUNIO, 1984

CONTENIDO

INTRODUCCION I

El análisis estructural, a través del método de rigideces, resuelve el problema del análisis de sistemas estructurales, mediante la solución de la ecuación general $\{F\}=[K]\{d\}$, en donde el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura $[K]$, mantiene una relación directa con el número de grados de libertad angular y lineal del sistema estructural.

En un planteamiento tradicional, el análisis estructural concibe como nudos de una estructura a todos aquellos puntos en que concurren dos o más elementos de la misma.

Es posible, a través de un planteamiento más elaborado reducir el número de nudos de una estructura si sólo se consideran como tales a los puntos en que concurren tres o más elementos de esta, lo cual reduce considerablemente el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura $[K]$, siendo esto ventajoso desde el punto de vista de la solución matemática y sobre todo de la aplicación de computadores al análisis estructural.

Este planteamiento es de interés particular cuando se aplica al análisis estructural de sistemas de tuberías en dos o tres dimensiones, debido a que en estos sistemas estructurales existe por lo general un número suficientemente grande de puntos en que concurren solamente dos tramos de tubería (quiebres), como para pensar en un tratamiento especial para ellos, sin considerarlos como nudos.

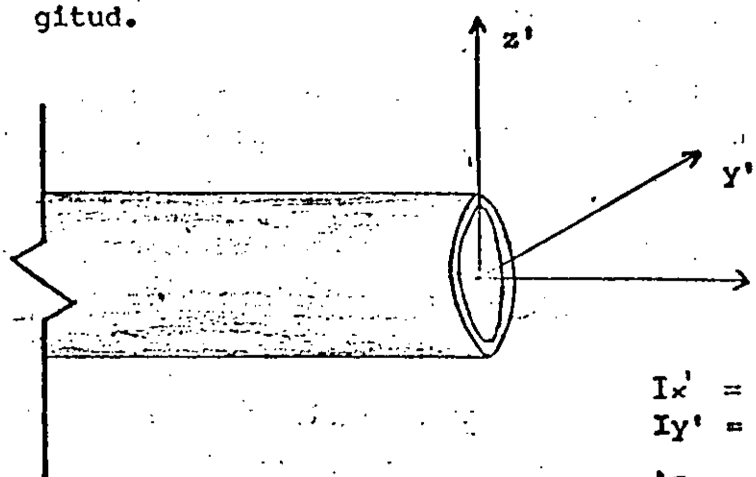
CARACTERISTICAS II

1.- NUDO.- Se considerarán como nudos sólo aquellos puntos de la estructura en que concurran tres o más tramos de barra y a los apoyos incompletos.

2.- TRAMO DE BARRA.- Se llamará así al tramo recto comprendido entre dos quiebres adyacentes de una barra.

3.- BARRA.- Se entenderá por barra, a la parte de tubería comprendida entre dos nudos.

4.- SECCION TRANSVERSAL.- La sección transversal de cada barra, será un anillo circular constante en toda su longitud.



$I_{x'} = J$

$I_{y'} = I_{z'} = I$

$Ac_{y'} = Ac_{z'} = Ac$

FIG 1 .- Propiedades de la sección transversal y ejes locales de referencia. (S.L.)

DEFINICIONES

A).- Para análisis en dos dimensiones.

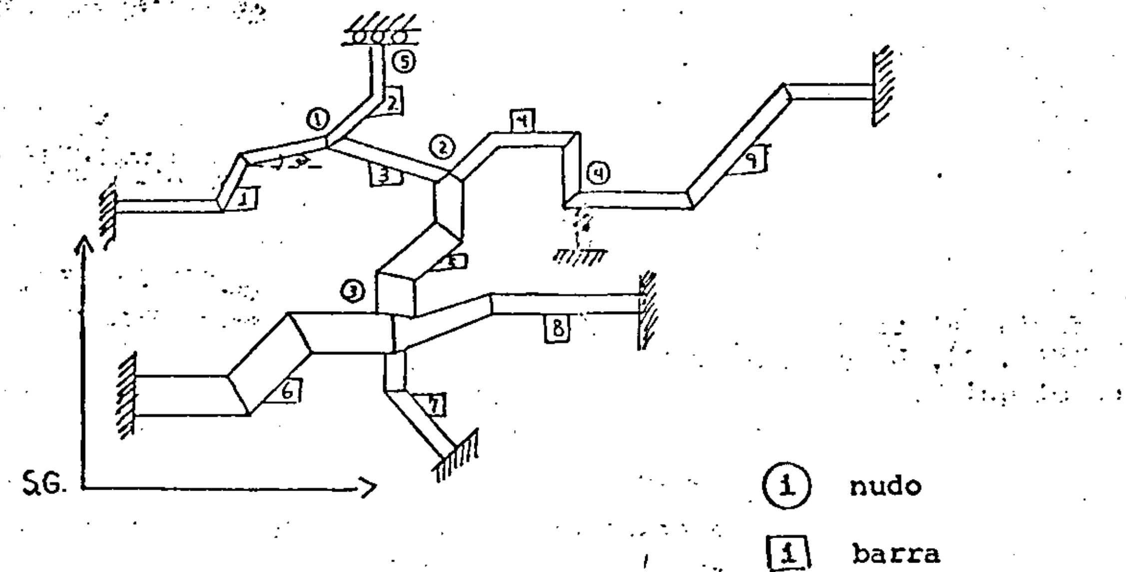


FIG. 2.- Tubería en el plano. Nótese que en un nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

A. 1.).- Matriz de transformación de coordenadas T para un tramo de barra.

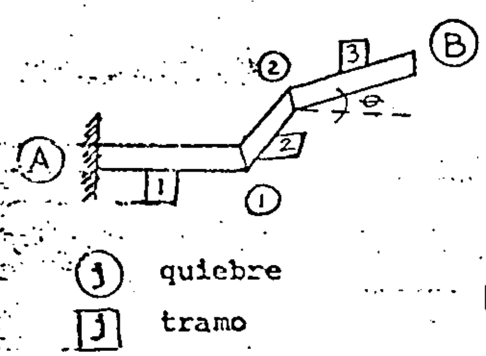


FIG 3.- Tramos de barra y ángulo θ para la barra 1 de la figura 2.

$$[T]_{j} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde θ = inclinación del tramo de barra j referido al eje x positivo en el S.G. medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

A. 2.) Matriz de transporte entre los puntos (B) y (j) referidos al S.G.

$$\left[H_{Bj}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -(Y_B-Y_j) & (X_B-X_j) & 1 \end{array}\right]$$

Referido al tramo $\boxed{3}$ de la barra $\boxed{1}$ (fig. 3), B es el nudo (1) y j es el quiebre (2)

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte $\left[H_{Bj}\right]$ toma la forma de la matriz identidad $\left[I\right]$.

A. 3.) Matriz de flexibilidad del tramo $\boxed{j}$ en su extremo (j) referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

$$\left[f'_{BB}\right]_{\boxed{j}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \hline 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{array}\right]$$

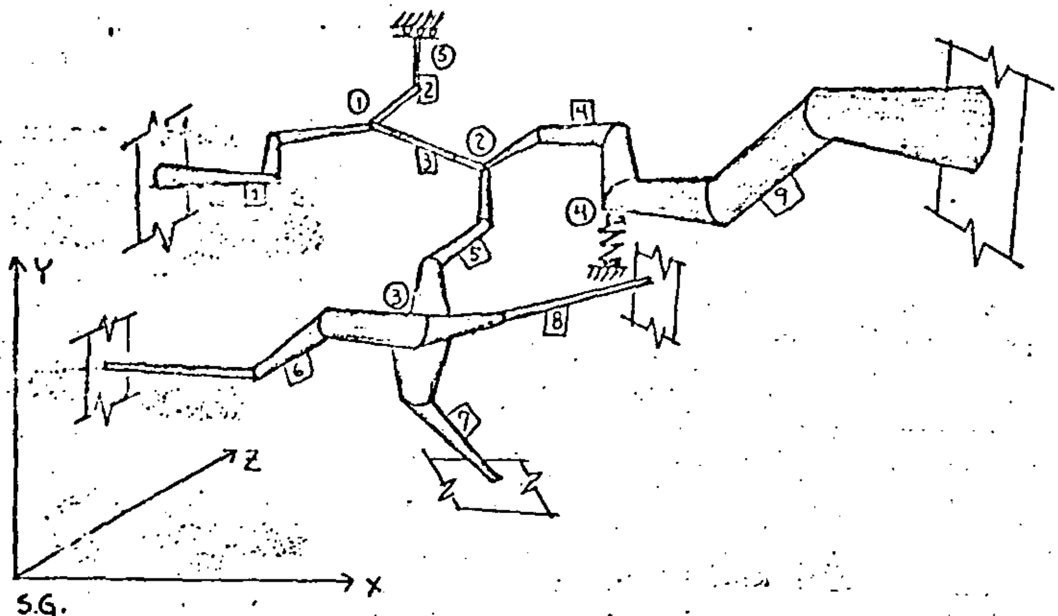
(en S.L.)

donde: $C = G\,(1+\nu)\dfrac{I}{AcL}$

ν = Módulo de Poisson del material

Ac = Area de cortante de la sección transversal

B).- <u>Para análisis en tres dimensiones.</u>



(i) nudo

$\boxed{i}$ barra

S.G. Sistema global de referencia

FIG. 4.- Tubería en el espacio. Nótese que en el nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

B. 1.) .- Matriz de transformación de coordenadas $[T]$ para un tramo de barra.

$$[T]_{\boxed{j}} = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_3 \end{array}\right]$$

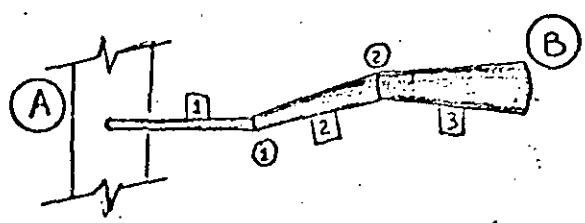
$$\text{donde: } [\Lambda_3] = \left|\begin{array}{c|c|c} Cx'x & Cy'x & Cz'x \\ \hline Cx'y & Cy'y & Cz'y \\ \hline Cx'z & Cy'z & Cz'z \end{array}\right|$$

En la matriz $[\Lambda_3]$ los elementos de las columnas 1,2 y 3 son los cosenos directores de x', Y' y z' respectivamente, del tramo $\boxed{j}$ en la barra $\boxed{i}$ en S.L., con respecto al S.G. (ver fig 1 y fig 4)

B. 2.) .- Matriz de transporte entre los puntos B y j referidos al S.G.

$$\left[H_{Bj}\right] = \left[\begin{array}{c|c} [I] & 0 \\ \hline [h] & [I] \end{array}\right]$$

$$\text{donde: } [h] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -(Z_B - Z_j) & (Y_B - Y_j) \\ \hline (Z_B - Z_j) & 0 & -(X_B - X_j) \\ \hline -(Y_B - Y_j) & (X_B - X_j) & 0 \end{array}\right]$$



(j) quiebre

[j] tramo

FIG.5.- Tramos de barra y quiebres para la barra [i] de la figura 4 (para el tramo [1], B es el nudo (3) y j es el quiebre (1))

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte $[H_{Bj}]$ toma la forma de la matriz identidad $[I]$.

B. 3.) .- Matriz de flexibilidad del tramo [j] en su extremo (j) referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

donde: $C = G(1+\nu) \dfrac{I}{AcL^2}$

$\nu \equiv$ Módulo de Poisson del material

Ac = Area de cortante de la sección transversal

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

$$\left\{f'_{BB}\right\}_{\boxed{j}} = \begin{pmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI} \end{pmatrix}$$

(en S. L.)

PLANTEAMIENTO GENERAL IV

La solución de la ecuación general planteada en el análisis estructural a través del método de rigideces

$$\{F\} = [K]\{d\} \qquad \ldots (1)$$

comprende las siguientes etapas:

A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$

B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$

C.- Obtención del vector de desplazamientos d mediante la solución de la ecuación general (1).

D.- Obtención de los elementos mecánicos en los extremos de cada barra, calculados a partir del vector de desplazamiento $\{d\}$

Se tratarán aquí solamente los puntos A y B. Los puntos C y D corresponden a un planteamiento tradicional del análisis estructural.

A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$

1).- Formación de la matriz $[K]$ en forma topológica

Se entiende por forma topológica de la matriz K a la representación matricial de la relación que guardan los extremos de las barras con los nudos de la estructura

La matriz topológica $[K]$ para las estructuras de las figuras 2 y 4 es idéntica y tiene la siguiente forma, si el extremo B de las barras coincide con el nudo 1, 4 o 3

$$
\left[K \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\left[k_{BB}\right]_{\boxed{1}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{2}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{3}} & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{3}} & 0 & 0 & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{2}} \\
\hline
\left[k_{AB}\right]_{\boxed{3}} & \left[k_{AA}\right]_{\boxed{3}} + \left[k_{AA}\right]_{\boxed{4}} + \left[k_{AA}\right]_{\boxed{5}} & \left[k_{AB}\right]_{\boxed{5}} & \left[k_{AB}\right]_{\boxed{4}} & 0 \\
\hline
0 & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{5}} & \left[k_{BB}\right]_{\boxed{5}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{6}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{7}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{8}} & 0 & 0 \\
\hline
0 & \left[k_{BA}\right]_{\boxed{4}} & 0 & \left[k_{BB}\right]_{\boxed{8}} + \left[k_{BB}\right]_{\boxed{9}} & 0 \\
\hline
\left[k_{AB}\right]_{\boxed{2}} & 0 & 0 & 0 & \left[k_{AA}\right]_{\boxed{2}}
\end{array} \right]
$$

(en S. G.)

Nótese que puede pensarse en una reordenación de la nomenclatura de los nudos a fin de obtener un menor ancho de banda de la matriz $\left[K\right]$, lo cual es conveniente desde el punto de vista de la aplicación de computadores.

2.- <u>Obtención de las matrices $\left[k_{AA}\right]$, $\left[k_{AB}\right]$, $\left[k_{BA}\right]$ y $\left[k_{BB}\right]$ para cada barra en S. G.</u>

Estas matrices están relacionadas entre si através de las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
\left[k_{AA}\right] &= \left[H_{BA}\right]\left[k_{BB}\right]\left[H_{BA}\right]^T \\
\left[k_{AB}\right] &= -\left[H_{BA}\right]\left[k_{BB}\right] \\
\left[k_{BA}\right] &= -\left[k_{BB}\right]\left[H_{BA}\right]^T
\end{aligned}
$$

donde A y B son los extremos de la barra (ver figuras 3 y 5)

Por lo que sólo será necesario calcular $\left[k_{BB}\right]$ de cada barra, y aplicar las expresiones anteriores para calcular $\left[k_{AA}\right]$, $\left[k_{AB}\right]$ y $\left[k_{BA}\right]$.

Para calcular $\left[k_{BB}\right]$ se procede de la manera siguiente:

Recuérdese que $\left[k_{BB}\right] = \left[f_{BB}\right]^{-1}$, por lo que el problema se reduce a calcular $\left[f_{BB}\right]$ en S. G., la cual se obtiene a partir de la siguiente expresión : (Ver figuras 3 y 5).

$$\left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}} = \sum_{j=1}^{N^{o}\,tramos} \left(H_{Bj}\right)^{T} \left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}} \left(H_{Bj}\right) \quad (\text{en S.G})$$

donde $\left(H_{Bj}\right)$ y $\left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}}$ se encuentran referidas al S.G. de referencia.

La matriz de flexibilidades del tramo $\boxed{j}$ en el extremo B, referida al S.G. puede calcularse con la siguiente expresión.

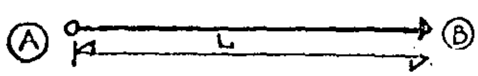
$$\left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}} = \left(T\right)_{\boxed{j}} \left(f'_{BB}\right)_{\boxed{j}} \left(T\right)^{T}_{\boxed{j}}$$

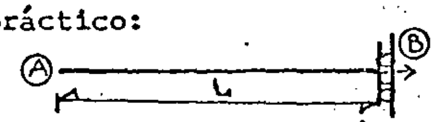
(en S.G.)

3).- Tratamiento de apoyos incompletos

Un apoyo incompleto puede no ser considerado como nudo, si se emplean las rigideces modificadas del tramo de barra que concurre en él.

A continuacion se listan las matrices de rigideces modificadas para dos casos de interés práctico:





$$\left(k'_{AB}\right) = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

$$\left(k'_{BB}\right) = \left(k'_{AA}\right) = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

$$\left(k'_{BB}\right) = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

$$\left(k'_{AB}\right) = \left(k'_{BA}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{en S.L.})$$

Para obtener $\{k\}$ en S.G. se emplea la siguiente expresion:

$$\{k\} = \{T\}\{k'\}\{T\}^T$$

Con $\{T\}$ tal como fue definido en III

B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$

Las cargas que pueden presentarse en un sistema de tuberías como el de las figuras 2 y 4, son las siguientes:

1.- Fuerzas externas aplicadas en:

- los nudos de la estructura
- los quiebres de las barras
- los tramos de cada barra

Considérese la barra $\boxed{1}$ de la fig. 2, cargada como se muestra en la figura 6

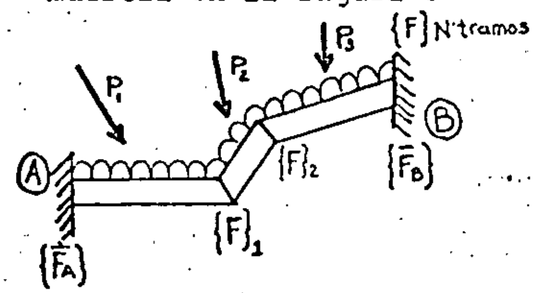


FIG. 6.- Barra $\boxed{1}$ cargada y fuerzas de fijación $\{\bar{F}_A\}$ y $\{F_B\}$

$\{F_J\}$ = Fuerzas quiebre - Fuerzas fijación.

FIG. 7.- Barra $\boxed{i}$ en cantiliver.

Las fuerzas de fijación en el extremo B de la barra $\boxed{i}$ se obtienen a partir de la siguiente expresion:

$$\{\bar{F}_B\} = -\{k_{BB}\}\{d_B^*\}$$

donde $\{d_B^*\}$ es la matriz de desplazamientos del extremo B considerando a la barra en cantiliver (ver fig. 7) y se calcula con la siguiente expresión

$$\{d_B^*\} = \sum_{j=1}^{N^\circ tramos} [H_{Bj}]^T [\tilde{f}_j] \{F_j\}$$

En la expresión anterior, $\{F_j\}$ es el vector resultante de restar las fuerzas externas aplicadas en el quiebre (j) ($\{F\}_1$, ..., $\{F\}_{N^\circ tramos}$ en la figura 6) menos las fuerzas de fijación producidas por las cargas externas aplicadas en los tramos adyacentes al quiebre (j) ambas referidas al S.G.

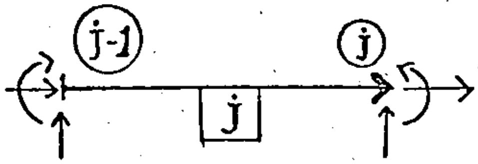
El vector $\{F_j\}$, tiene la forma siguiente para el caso de sistemas de tuberías en dos y tres dimensiones.

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$$

(S.P. 2D)

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jY} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jY} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$$

(S.G. 3D)



Convención positiva del vector $\{F_j\}$

La matriz $[H_{Bj}]$ se aplica tal como fue definida en III.

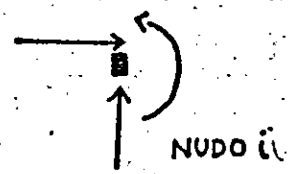
La matriz $[\tilde{f}_j]$ es la matriz de flexibilidades del segmento de barra comprendido entre el extremo origen (A) y el quiebre (j) respecto al extremo destino (j) y está definida mediante la siguiente fórmula de recurrencia.

$$[\tilde{f}_{j+1}] = [f_{\boxed{j+1}}] + [H_{(j+1)(j)}]^T [\tilde{f}_j] [H_{(j+1)(j)}]$$

$$1 \leq j \leq (N^\circ tramos - 1)$$

$$
\{F\} = \left\{ \begin{array}{c}
\{\bar{F}_B\}_{\boxed{1}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{2}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{3}} + \{F\}_{①} \\
\hline
\{\bar{F}_A\}_{\boxed{3}} + \{\bar{F}_A\}_{\boxed{4}} + \{\bar{F}_A\}_{\boxed{5}} + \{F\}_{②} \\
\hline
\{\bar{F}_B\}_{\boxed{5}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{6}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{7}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{8}} + \{F\}_{③} \\
\hline
\{\bar{F}_B\}_{\boxed{4}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{9}} + \{F\}_{④}
\end{array} \right\}
$$

Convención positiva para los componentes del vector $\{F\}$



Estamos ahora en posibilidad de resolver la ecuación general $\{F\}=[K]\{d\}$ y obtener los desplazamientos de los nudos de la estructura y calcular a partir de ellos los elementos mecánicos que se generan en los extremos de las barras (inciso IV.C), lo cual puede hacerse a través de un planteamiento tradicional de análisis estructural.

A los elementos mecánicos así obtenidos, se les suman los vectores de fuerzas de fijación que constituyen el estado I de cargas para obtener los elementos mecánicos definitivos en los extremos de cada barra de la estructura.

2.- Fuerzas Producidas por Cambios de Temperatura

Es aplicable todo lo estipulado en B.1, pero ahora el problema es más sencillo, ya que la única diferencia con lo visto allá, es que la matriz d ahora se calcula de la manera siguiente:

3.- <u>Fuerzas producidas por desplazamientos impuestos a los apoyos.</u>

Es aplicable también ahora todo lo estipulado en B.1 y el problema resulta ser mas sencillo que los planteados en B.1 y B.2 puesto que ahora $\{\bar{F}_B\}$ se calcula ~~directamente~~ a partir de la siguiente espresión:

$$\{\bar{F}_B\} = [k_{BA}]\{\bar{d}_A\}$$

donde $\{\bar{d}_A\}$ es el vector de desplazamientos impuestos a la estructura en el apoyo A.