



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

**DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DIFUSO PARA  
UN GRUPO DE SISTEMAS DESACOPLADOS, Y  
ANÁLISIS DE SU ESTABILIDAD ANTE RETARDOS DE  
TIEMPO**

**T E S I S**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

*PRESENTA:*  
OCTAVIO ORIOL CASTILLO GUTIÉRREZ.

*TUTOR*  
DR. HÉCTOR BENÍTEZ PÉREZ  
*IIMAS, UNAM.*

MÉXICO D.F. JUNIO DE 2015

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Gerardo R. Espinosa Pérez.

Secretario: Dr. Javier Gómez Castellanos.

Vocal: Dr. Héctor Benítez Pérez.

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz.

2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria.

Lugar donde se realizó la tesis:

IIMAS, Ciudad Universitaria.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Héctor Benítez Pérez.

---

FIRMA

*Siempre orgulloso de pertenecer a ella, doy gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por siempre acogerme entre sus brazos... Agradezco al Dr. Héctor Benítez Pérez por haber dirigido este trabajo. Finalmente reconozco y agradezco el valioso apoyo brindado por CONACYT.*

*A mis padres...*

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Objetivo de la tesis . . . . .	8
1.2. Caso de estudio . . . . .	8
1.3. Estructura del trabajo . . . . .	8
<b>2. Fundamentos</b>	<b>9</b>
2.1. Lógica difusa . . . . .	9
2.2. Modelo difuso de Takagi-Sugeno . . . . .	10
2.3. Diseño de controladores difusos . . . . .	11
2.3.1. Especificaciones de desempeño de control . . . . .	13
2.4. Sistemas de control sobre redes . . . . .	16
2.5. Conclusiones del capítulo . . . . .	19
<b>3. Descripción general del sistema</b>	<b>20</b>
3.1. Cuadricóptero . . . . .	20
3.1.1. Modelo Matemático del Cuadricóptero . . . . .	22
3.2. Helicóptero . . . . .	25
3.2.1. Modelo Matemático del Helicóptero . . . . .	27
3.3. Conclusiones del capítulo . . . . .	28
<b>4. Diseño de Controladores</b>	<b>30</b>
4.1. Cuadricóptero . . . . .	30
4.1.1. Representación en el espacio de estados . . . . .	30
4.1.2. Modelo difuso de Takagi-Sugeno . . . . .	31
4.1.3. Funciones de membresía . . . . .	32
4.1.4. Diseño del controlador difuso . . . . .	32
4.1.5. Anti-windup . . . . .	34
4.2. Helicóptero . . . . .	34
4.2.1. Representación en el espacio de estados . . . . .	35
4.2.2. Modelo difuso de Takagi-Sugeno . . . . .	35
4.2.3. Funciones de membresía . . . . .	36
4.2.4. Diseño del controlador difuso . . . . .	37
4.2.5. Anti-windup . . . . .	38

4.3. Conclusiones del capítulo . . . . .	38
<b>5. Resultados de controladores</b>	<b>40</b>
5.1. Cuadricóptero . . . . .	40
5.1.1. Resultados experimentales . . . . .	43
5.2. Helicóptero . . . . .	45
5.2.1. Resultados experimentales . . . . .	46
5.3. Conclusiones del capítulo . . . . .	48
<b>6. Análisis de estabilidad de los sistemas sobre la red de comunicación</b>	<b>50</b>
6.1. Distribución de los sistemas de control en red . . . . .	50
6.2. MADB del cuadricóptero . . . . .	51
6.3. MADB del helicóptero . . . . .	51
6.4. Conclusiones del capítulo . . . . .	53
<b>7. Conclusiones</b>	<b>56</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>

# Índice de figuras

---

1.1. <i>Sistema de control sobre una red de comunicación digital . . . . .</i>	6
2.1. <i>Estructura de un sistema de control operando sobre una red de comunicación digital. . . . .</i>	17
2.2. <i>Representación de las muestras <math>i_k</math>-ésimas del sensor, y los retardos de tiempo <math>\tau_k</math> que tiene la muestra <math>i_k</math>-ésima en viajar del sensor hasta el actuador. . . . .</i>	18
3.1. <i>Cuadróptero de Quanser (3-DOF Hover) . . . . .</i>	21
3.2. <i>Estructura electrónica del funcionamiento del cuadróptero. . . . .</i>	21
3.3. <i>(a) Cuadróptero de Quanser (b) Marco de referencia usado . . . . .</i>	22
3.4. <i>Helicóptero de la empresa Quanser . . . . .</i>	25
3.5. <i>Estructura electrónica del funcionamiento del helicóptero . . . . .</i>	26
3.6. <i>(a) Helicóptero de Quanser (2-DOF helicopter) (b) Marco de referencia para la orientación . . . . .</i>	27
4.1. <i>Funciones de membresía del cuadróptero . . . . .</i>	33
4.2. <i>Estructura de anti-windup utilizada en el trabajo. . . . .</i>	34
4.3. <i>Funciones de membresía del helicóptero . . . . .</i>	37
5.1. <i>Regulación cuadróptero <math>\phi = 0^\circ</math>, <math>\theta = 20^\circ</math>, y <math>\psi = -20^\circ</math>. . . . .</i>	44
5.2. <i>Seguimiento cuadróptero <math>\phi = 0^\circ</math>, <math>\theta = 40^\circ \sin(\frac{2\pi}{50}t)</math>, <math>\psi = 40^\circ \sin(\frac{2\pi}{50}t - \frac{\pi}{2})</math>. . . . .</i>	44
5.3. <i>Regulación helicóptero <math>\theta = 20^\circ</math>, <math>\psi = -20^\circ</math> . . . . .</i>	47
5.4. <i>Seguimiento helicóptero <math>\theta = 30^\circ \sin(\frac{2\pi}{50}t - \frac{\pi}{2})</math>, <math>\psi = 30^\circ \sin(\frac{2\pi}{50}t)</math>. . . . .</i>	47
5.5. <i>Seguimiento helicóptero <math>\theta = \psi = 30^\circ \sin \frac{2\pi}{50}t</math>. . . . .</i>	48
6.1. <i>Sistemas de control distribuidos sobre la red de comunicación . . . . .</i>	51
6.2. <i>Comportamiento del cuadróptero ante carga baja en la red: a) Regulación <math>\phi = 0^\circ</math>, <math>\theta = 20^\circ</math>, <math>\psi = -20^\circ</math>. b) Retardos medido por muestra. . . . .</i>	52
6.3. <i>Comportamiento del cuadróptero ante carga media en la red: a) Regulación <math>\phi = 0^\circ</math>, <math>\theta = 20^\circ</math>, <math>\psi = -20^\circ</math>. b) Retardos medido por muestra. . . . .</i>	52
6.4. <i>Comportamiento del cuadróptero ante carga alta en la red: a) Regulación <math>\phi = 0^\circ</math>, <math>\theta = 20^\circ</math>, <math>\psi = -20^\circ</math>. b) Retardos medido por muestra. . . . .</i>	53
6.5. <i>Comportamiento del helicóptero ante carga baja en la red: a) Regulación <math>\theta = 20^\circ</math>, <math>\psi = -20^\circ</math>. b) Retardos medido por muestra. . . . .</i>	54

6.6. <i>Comportamiento del helicóptero ante carga media en la red: a) Regulación</i> <i><math>\theta = 20^\circ</math>, <math>\psi = -20^\circ</math>. b) Retardos medido por muestra. . . . .</i>	54
6.7. <i>Comportamiento del helicóptero ante carga alta en la red: a) Regulación</i> <i><math>\theta = 20^\circ</math>, <math>\psi = -20^\circ</math>. b) Retardos medido por muestra. . . . .</i>	55



## Índice de tablas

---

3.1. Parámetros del cuadricóptero proporcionados por Quanser. . . . .	22
3.2. Parámetros del helicóptero proporcionados por Quanser. . . . .	26
6.1. MADB estimado para el cuadricóptero . . . . .	51
6.2. MADB estimado para el helicóptero . . . . .	53

# Introducción

---

Un sistema de control en red (*Networked Control Systems*) es un sistema de control en lazo cerrado donde la comunicación entre sensores, actuadores y controlador se realiza a través de una red de comunicación digital (ver figura 1.1). Este tipo de estructura de

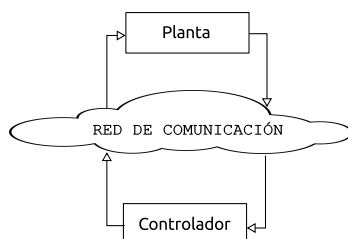


Figura 1.1: *Sistema de control sobre una red de comunicación digital*

sistema de control puede considerarse la punta en la evolución en los sistemas de control. Y es que desde los inicios en el estudio de la realimentación de sistemas y su formalización con el análisis en frecuencia, los sistemas de control han evolucionado de la mano del avance tecnológico [Mahmoud, 2014]. Con el surgimiento de los dispositivos digitales y las computadoras, el interés en la implementación de un sistema de control con estos dispositivos dio lugar a la investigación de control discreto. Sin embargo, bajo este enfoque, los dispositivos de comunicación deben estar bien sincronizados y casi destinados a una sola tarea de control. Esto hace complejo incorporar más lazos de control al sistema, y dificulta la modificación de algún lazo de control existente. Hoy en día, la expansión y el desarrollo de las tecnologías de comunicación, han hecho de las redes de comunicación digital, como *Ethernet* o *Wireless*, un medio muy atractivo para implementar sistemas de control. Si un sistema de control es implementado sobre una de estas redes de manera distribuida, es decir con sensores y actuadores en diferentes nodos de una red, la flexibilidad de los sistemas de control se incrementa. Sin embargo, aunque estas redes proporcionan modularidad, poco cableado, bajo costo, descentralización del control, instalación sencilla, fácil mantenimiento y flexibilidad [Khalil and Wang, 2011], también imponen restricciones en los canales de comunicación [Lunze and Grüne, 2014, Mahmoud, 2014].

Las restricciones e imperfecciones en los canales de comunicación inducen retardos de

---

tiempo y pérdida de paquetes en el envío de información. La pérdida de paquetes puede considerarse también un retardo de tiempo de mayor duración [Zhang et al., 2008]. De esta forma, si el retardo de tiempo es largo, el sistema de control pierde estabilidad. En este sentido, se puede hablar de un *umbral* que separa la zona de estabilidad del sistema de control. Cuando la duración del retardo cruza ese umbral, el sistema de control se inestabilizará. En el estudio de los sistemas de control en red, este umbral se denomina Máximo Retardo Permitido (*Maximum Allowable Delay Bound MADB*).

De acuerdo a lo anterior, si un sistema de control se implementa sobre una red de comunicación digital, el flujo de información influirá en el desempeño total del sistema. Para atacar este problema, han surgido tres enfoques principales que analizan el impacto de la red de comunicación al desempeño del sistema de control [Lunze and Grüne, 2014]

- Enfoque teórico de Control
- Enfoque teórico de Información
- Enfoque teórico de Gráficas

Bajo el enfoque teórico de control, la red de comunicación principalmente induce retardos en el envío de información entre sensor-controlador-actuador. En esta área, las líneas de investigación se pueden dividir en 2 perspectivas

- 1<sup>ra</sup> En la primera se intenta diseñar un controlador robusto a retardos de tiempo. El retardo puede ser estático, pertenecer a un intervalo de tiempo, ó incluso considerarlo un evento estocástico [Shousong and Qixin, 2003]. En esta área predominan los análisis de estabilidad mediante Funcionales de Lyapunov-Krasovskii, donde el controlador se diseña resolviendo una desigualdad lineal matricial (LMI).
- 2<sup>da</sup> La segunda intenta implementar *hardware* adicional al sistema de control para soportar los retardos y la pérdida de paquetes. Como ejemplo puede mencionarse la implementación de sistemas de control predictivo con *buffers* de almacenamiento [Sun et al., 2010, Millán et al., 2008]. En estos trabajos, las predicciones del control se almacenan en memorias y son usadas para compensar el retardo y la pérdida de paquetes.

Bajo estas perspectivas, la mayoría de las investigaciones en la estabilidad de los sistemas de control en red, se centran en sistemas lineales. Y aunque existe teoría de control para sistemas no lineales, su análisis de estabilidad en red resulta complejo. Como alternativa, el control difuso ofrece una nueva perspectiva en el análisis de estabilidad de sistemas no lineales. El enfoque de control difuso se basa en el uso del modelo de Takagi-Sugeno para describir el modelo no lineal del sistema. Desde un punto de vista difuso, el modelo no lineal del sistema puede representarse mediante la combinación de representaciones lineales y locales del sistema no lineal. Esta representación difusa es mejor conocida como el modelo difuso de Takagi-Sugeno. Desde la aparición de este modelo, las investigaciones de estabilidad en sistemas no lineales mediante esta representación se ha incrementado considerablemente. En esta área, uno de los trabajos más sobresaliente es el desarrollado en

[Tanaka and Wang, 2004]. En él se aborda el diseño de controladores no solo haciendo uso del modelo de Takagi-Sugeno, sino también aprovechando el planteamiento de condiciones de estabilidad mediante desigualdades lineales matriciales (*Linear Matrix Inequalities* LMIs).

Tras estos desarrollos, el uso del modelo de Takagi-Sugeno se ha incorporado al análisis de estabilidad y al diseño de controladores para sistemas de control sobre redes. En [Peng and Yang, 2010] se presenta un análisis de estabilidad y el diseño de controladores tomando en cuenta la distribución de probabilidad que tienen los retardos de tiempo durante el envío de información.

Siguiendo estas líneas de investigación, en este trabajo se diseñan dos controladores difusos para un par de sistemas desacoplados, y se analiza su estabilidad cuando son implementados sobre una red de comunicación digital.

## 1.1. Objetivo de la tesis

En este trabajo se diseñarán dos sistemas de control difuso basados en LMI's para dos sistemas de dinámicas no lineales, y se analizará experimentalmente la estabilidad de cada uno de ellos considerando los retardos de tiempo inducidos por una red de comunicación.

## 1.2. Caso de estudio

Durante el trabajo se diseñan dos sistemas de control difuso, uno para un cuadricóptero y otro para un helicóptero. Ambos controladores son implementados sobre una red de comunicación *Ethernet* TCP/IP.

## 1.3. Estructura del trabajo

Este trabajo consta de 7 capítulos. En el capítulo 1 se da una introducción a los temas que aborda este trabajo, y se presenta el objetivo y la estructura de esta tesis. En el capítulo 2 se da la teoría básica que sustenta el diseño de controladores, y el análisis de estabilidad ante retardos de tiempo de los sistemas en estudio. El capítulo 3 describe las características principales del helicóptero, y el cuadricóptero. Además se desarrollan los modelos matemáticos de los sistemas, necesarios en el diseño de controladores difusos del capítulo 4. En el capítulo 5 se muestran los resultados del diseño desarrollado en el capítulo 4. El capítulo 6 presenta el análisis de estabilidad de los sistemas ante los retardos de tiempo que se inducen cuando los sistemas de control son implementados y distribuidos sobre la red de comunicación TCP/IP. Finalmente en el capítulo 7, se presentan las conclusiones resultado de la elaboración de este trabajo.

---

Este capítulo presenta la teoría básica usada en el desarrollo de este trabajo. Se revisa la estructura básica de la lógica difusa, se introduce el modelo difuso de Takagi-Sugeno, y se incluye el enfoque usado para analizar un sistema de control lineal cuando se implementa sobre una red de comunicación digital.

## 2.1. Lógica difusa

La lógica difusa surgió en 1965 por los trabajos del Profr. Lofti Zadeh de la Universidad de California en Berkeley. Ésta puede considerarse una extensión de la lógica clásica cuando la información usada para evaluar un problema es imprecisa. Es decir, mientras la lógica clásica infiere soluciones sobre variables que solamente toman dos valores (0 ó 1), la lógica difusa permite evaluar premisas cuando las variables pueden tomar valores dentro de un intervalo (p.e.  $[0, 1]$ ).

Para clarificar la situación anterior, y explicar las diferencias que existen entre un sistema digital convencional y un sistema difuso, considere la salida de un sistema digital convencional, que denotamos por  $Y$ . En este caso, la salida  $Y$  del sistema puede tomar el valor 0 ó 1, dependiendo de las operaciones lógicas AND, OR, y NOT de las entradas. Si definimos como  $z_i$  la  $i$ -ésima entrada del sistema y como  $y$  la salida, podemos expresar la salida del sistema mediante la siguiente *sentencia* lingüística

$$IF \ z_1 \text{ AND } z_2 \text{ AND } \dots \text{ AND } z_p \ \text{ THEN } \ Y = f(z_1, z_2, \dots, z_p) \quad (2.1)$$

En este ejemplo, las variables de entrada y salida solo pueden tomar el valor 0 ó 1, y para evaluar la sentencia basta realizar las operaciones lógicas convencionales de las entradas.

Por su parte, la lógica difusa tiene la misma estructura de la premisa 2.1, sin embargo, el valor de las variables pueden caer dentro de un intervalo de valores y no solamente 0 ó 1. El hecho que las entradas  $z_i$  puedan tomar valores dentro de un intervalo, significa que a  $z_i$  se le asigna cierto grado de alguna cualidad. Por ejemplo, si una variable de entrada de un sistema notifica temperaturas  $T$  mayores a  $100[^\circ C]$ , se puede asignar el valor de 1 a temperaturas superiores a  $100[^\circ C]$  para notificarlo. Sin embargo, si la temperatura es de

50[°C], podemos asignar un valor de 0.5 a la variable de entrada. Este mismo razonamiento puede aplicarse a otras temperaturas hasta digamos 0[°C].

En un sistema difuso, esta asignación de grado de cualidad, o bien pertenencia a alguna característica, se le conoce como **fuzzyfication**, y se realiza a través de funciones de membresía. Una vez que las entradas  $z_i$  han fusicado la información, se evalúa la premisa de la sentencia mediante las operaciones logicas. Las operaciones lógicas en esta etapa, se definen de manera diferente a la convencional, sin embargo, cuando los valores de  $z_i$  son 0 ó 1, se reducen a las operaciones convencionales. Esta fase se conoce como **agregación**. Una vez que se ha evaluado la premisa, se calcula la salida de la sentencia. Esta fase se conoce como **activación**.

Si el sistema difuso consta de  $r$  sentencias, o bien  $r$  reglas difusas, la salida del sistema se calcula usando la activación de todas las sentencias. Esta fase se conoce como **acumulación**. Por último, si el sistema lo requiere, la salida del sistema se somete a la **defuzzyfication**, es decir se adecua a una interpretación más conveniente.

Entre los modelos difusos mas comunes se pueden mencionar el sistema difuso de *Mamdani*, el sistema difuso *Singleton*, y el sistema difuso de *Takagi-Sugeno*. Este último es el modelo más usado para propósitos de control, y en base a éste se desarrolla el trabajo presente.

## 2.2. Modelo difuso de Takagi-Sugeno

En 1985, Takagi y Sugeno propusieron la siguiente estructura de sistema difuso

$$\begin{array}{l}
 \text{regla 1 : } IF \quad z_1 = D_{11} \text{ AND } z_2 = D_{21} \text{ AND } \dots z_p = D_{p1} \quad THEN \quad y = f_1(z_1, z_2, \dots, z_p) \\
 \quad \cdot \quad \cdot \\
 \quad \cdot \quad \cdot \\
 \quad \cdot \quad \cdot \\
 \text{regla r : } IF \quad z_1 = D_{1r} \text{ AND } z_2 = D_{2r} \text{ AND } \dots z_p = D_{pr} \quad THEN \quad y = f_r(z_1, z_2, \dots, z_p) \\
 \quad (2.2)
 \end{array}$$

Este esquema considera que el sistema difuso está descrito por  $r$  reglas difusas y  $p$  entradas  $z_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ . Cada expresión  $z_i = D_{1i}$  significa que la entrada  $z_i$  toma valores de un conjunto difuso  $D_{1i}$  (el intervalo  $[0, 1]$  por ejemplo). En este modelo, no toda la sentencia es difusa, solo lo es la premisa. La consecuencia es una expresión matemática estática elegida por las entradas difusas  $z_i$ . Sin embargo, en control difuso, el modelo de Takagi-Sugeno se usa para describir dinámicas de sistemas, por lo que la parte consecuente está formada por modelos dinámicos. Por tanto, en este trabajo se usa la siguiente expresión del modelo

difuso de Takagi-Sugeno

$$\begin{array}{l}
 r_1 \quad IF \quad z_1 = D_{11} \text{ AND } z_2 = D_{21} \text{ AND } \dots z_p = D_{p1} \quad THEN \quad \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\
 \cdot \quad \cdot \\
 \cdot \quad \cdot \\
 \cdot \quad \cdot \\
 r_r \quad IF \quad z_1 = D_{1r} \text{ AND } z_2 = D_{2r} \text{ AND } \dots z_p = D_{pr} \quad THEN \quad \dot{x}(t) = A_r x(t) + B_r u(t)
 \end{array} \tag{2.3}$$

donde la consecuencia de cada regla difusa corresponde a una representación lineal de un sistema no lineal. Nótese que las entradas  $z_i$  son variables difusas y toman valores mediante las funciones de membresía. La salida del sistema difuso de Takagi-Sugeno es

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \tag{2.4}$$

donde

$$h_i(z) \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^r h_i(z) = 1. \tag{2.5}$$

Note que se ha utilizado  $h(z)$  para denotar  $h(z_1, \dots, z_p)$ , esta misma notación se usará a lo largo de este trabajo. De manera frecuente,  $h_i(z)$  es llamada la defusificación ponderada del sistema y se construye como se explica a continuación. Defínase  $d_i(z)$  como el resultado de la operación difusa de la regla  $r_i$ , es decir

$$d_i(z) \equiv z_1 = D_{1i} \text{ AND } \dots \text{ AND } z_p = D_{pi} \tag{2.6}$$

Luego, si se asigna  $d_i(z)$  como grado de activación de la regla difusa  $r_i$ , resulta claro que si se define

$$h_i(z) = \frac{d_i(z)}{\sum_{i=1}^r d_i(z)} \tag{2.7}$$

se satisfacen las condiciones de la ecuación (2.5). Esta técnica es la más usada para la *defuzzification* de sistemas difusos, y es conocida como el método de los centroides. Esta técnica es utilizada en este trabajo.

## 2.3. Diseño de controladores difusos basados en LMIs

El diseño de controladores presentado en el capítulo 4, se basa en la idea de realimentar el modelo de Takagi-Sugeno con el siguiente controlador difuso

$$\begin{array}{l}
 r_i \quad IF \quad z_1 = D_{1i} \text{ AND } z_2 = D_{2i} \text{ AND } \dots z_p = D_{pi} \quad THEN \quad u(t) = -K_i x(t) \\
 \cdot \quad \cdot \\
 \cdot \quad \cdot \\
 \cdot \quad \cdot \\
 r_r \quad IF \quad z_1 = D_{1r} \text{ AND } z_2 = D_{2r} \text{ AND } \dots z_p = D_{pr} \quad THEN \quad u(t) = -K_r x(t)
 \end{array} \tag{2.8}$$

cuya salida es

$$\dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z) K_i x(t). \quad (2.9)$$

Sustituyendo el controlador difuso de la ecuación (2.9) en el modelo de la ecuación (2.4), el sistema en lazo cerrado resulta

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (2.10)$$

En [Tanaka and Sugeno, 1992], se muestra que el sistema de la ecuación (2.10) es global y asintóticamente estable si se cumple que

$$P G_{ij} + G_{ij}^T P < 0 \quad (2.11)$$

con  $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ , e  $i, j = 1, 2, \dots, r$ . Con este enfoque, el diseño de controladores consiste en encontrar ganancias de retroalimentación  $K_i$  y una  $P > 0$  que satisfaga la condición (2.11). Este problema puede plantearse como una desigualdad lineal matricial (LMI) bajo las manipulaciones algebraicas apropiadas. Por ejemplo, desarrollando la desigualdad (2.11) se tiene que

$$P A_i + A_i^T P - P B_i K_j - K_j^T B_i^T P < 0 \quad (2.12)$$

Si la meta es buscar una  $P$  y una  $K_i$ , claramente la desigualdad (2.12) no representa una LMI. Sin embargo, al pre y post-multiplicar por  $X = P^{-1}$  se obtiene

$$A_i X + X A_i^T - B_i K_j X - X K_j^T B_i^T < 0 \quad (2.13)$$

ahora definiendo  $M_j = K_j X$  resulta

$$A_i X + X A_i^T - B_i M_j - M_j^T B_i^T < 0 \quad (2.14)$$

Esta última desigualdad es una LMI con variables  $X$  y  $M_j$ <sup>1</sup>, ya que  $A_i$  y  $B_i$  son matrices constantes. Luego de resolver, las ganancias de retroalimentación  $K_i$  se obtienen mediante  $K_j = M_j X^{-1}$ .

El desarrollo anterior es usado en [Tanaka and Wang, 2004] para desplegar el diseño de controladores difusos basados en LMI's. Debe mencionarse, que la desigualdad (2.14) solo asegura estabilidad. Si se desea agregar especificaciones de desempeño de control, la desigualdad (2.14) debe resolverse simultáneamente junto a otras LMIs. A continuación, se presentan sin demostración, las condiciones y teoremas que garantizan las especificaciones de desempeño de control usadas en el diseño de controladores del capítulo 4.

---

<sup>1</sup>Existen paquetes de software capaces de buscar soluciones a LMI's. Entre los más populares se encuentran LMILAB de matlab, CVX, y PENBMI.



### 2.3.1. Especificaciones de desempeño de control

Los teoremas presentados en esta sección, son extraídos de [Tanaka and Wang, 2004]. La teoría presentada en esta sección, es desarrollada bajo las siguientes consideraciones:

- El modelo difuso de Takagi-Sugeno tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t) + E_i v(t)\} \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t)\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde  $v(t)$  es una perturbación en el sistema.

- El controlador difuso tiene la forma

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t).\tag{2.16}$$

- Las matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  y  $E_i$  son constantes.
- Los pares  $(A_i, B_i)$  son completamente controlables.
- Los pares  $(A_i, C_i)$  son completamente observables.
- $s$  denota el número de reglas difusas activadas durante la operación del controlador difuso ( $0 < s \leq r$ ).

#### Controlador estable

El problema de encontrar ganancias de retroalimentación  $K_i$  que aseguran la estabilidad del modelo difuso de Takagi-Sugeno de la ecuación (2.10), puede plantearse como sigue. Encuentre  $X > 0$ ,  $Y \geq 0$ , y  $M_i$  con  $i = 1, 2, \dots, r$  que satisfaga

$$\begin{aligned}X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + (s-1)Y &\leq 0 \\ -2Y + X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i &\geq 0 \\ i < j \text{ s. t. } h_i \cap h_j &\neq \phi\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde  $K_i = M_i X^{-1}$ ,  $X = P^{-1}$ ,  $Y = X Q X$ .

#### Tasa de decaimiento

Sea  $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$  con  $P > 0$  una función de Lyapunov para el sistema de la ecuación (2.15), y defínase  $G_{ij} = A_i - B_i K_j$  para  $i, j = 1, 2, \dots, r$ . Entonces, la condición de que  $\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t))$  para todas las trayectorias, es equivalente a la condición

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + 2\alpha P < 0\tag{2.18}$$

para todo  $i$ , y

$$\frac{G_{ij} + G_{ji}^T}{2} P + P \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} + 2\alpha P \leq 0 \quad (2.19)$$

para  $i < j$  excepto el par  $(i, j)$  tal que  $h_i h_j = 0, \forall t$ , donde  $\alpha > 0$ . Desarrollando las condiciones anteriores, se puede decir que el supremo de la tasa de decaimiento que podemos encontrar, puede hallarse resolviendo el siguiente problema de minimización de los eigenvalores generalizados GEVP (*generalized eigenvalue minimization problem*) en  $X$  y  $\alpha$

$$\begin{aligned} & \underset{X, M_1, \dots, M_r}{\text{Maximizar}} && \alpha \\ & \text{sujeto a} && \\ & && X > 0, \\ & && XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + 2\alpha X < 0 \\ & && XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i \leq 0 \\ & && i < j \text{ s. t. } h_i \cap h_j \neq \phi \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$K_i = M_i X^{-1}, \quad X = P^{-1} \quad (2.21)$$

### Restricción a la entrada

**Teorema 1** *Asuma que la condición inicial  $x(0)$  es conocida. La restricción  $\|u(t)\|_2 \leq \mu$  es forzada para todo  $t \geq 0$  si las LMI's*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

se satisfacen, donde  $X = P^{-1}$  y  $M_i = K_i X$ .

### Rechazo a perturbaciones

Considere el modelo difuso de la ecuación (2.15) donde  $v(t)$  representa las perturbaciones. El rechazo a perturbaciones puede ser realizado minimizando  $\gamma$  sujeto a

$$\sup_{\|v(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|v(t)\|_2} \leq \gamma. \quad (2.23)$$

Entonces las ganancias de retroalimentación  $K_i$  que estabilizan el modelo difuso (2.15) y realizan el rechazo a perturbaciones pueden ser obtenidas resolviendo el siguiente problema

de minimización basada en LMIs

$$\begin{aligned}
 & \underset{X, M_1, \dots, M_r}{\text{Minimizar}} && \gamma^2 \\
 & \text{sujeto a} \\
 & X > 0 \\
 & \left[ \begin{array}{ccc} \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2}(X A_i^T + A_i X - M_j^T B_i^T - B_i M_j) \\ + X A_j^T + A_j X - M_i^T B_j^T - B_j M_i \end{array} \right) & \frac{1}{2}(E_i + E_j) & -\frac{1}{2}X(C_i + C_j)^T \\ \frac{1}{2}(E_i + E_j)^T & -\gamma^2 I & 0 \\ -\frac{1}{2}X(C_i + C_j)^T & 0 & -I \end{array} \right] \leq 0 \\
 & i < j \text{ s. t. } h_i \cap h_j \neq \phi
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde  $K_i = M_i X^{-1}$ .

### Control óptimo

Considere la función de desempeño

$$J = \int_0^\infty \{y^T(t)Hy(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \tag{2.25}$$

**Teorema 2** *Las ganancias de retroalimentación  $K_i$  para minimizar la cota superior de la función de desempeño de la ecuación (2.25), pueden ser obtenidas resolviendo el siguiente problema de minimización*

$$\begin{aligned}
 & \underset{X, M_1, \dots, M_r, Y_0}{\text{Minimizar}} && \lambda \\
 & \text{sujeto a} \\
 & X > 0, Y_0 \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} \lambda & x^T(0) \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0 \\
 & U_{ii} + (s-1)Y_3 < 0 \\
 & V_{ij} - 2Y_4 < 0, \quad i < j \text{ s. t. } h_i \cap h_j \neq \phi
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde  $s > 1$ ,

$$\begin{aligned}
 U_{ii} &= \begin{bmatrix} (XA_i^T + A_iX - M_i^T B_i^T - B_i M_i) & XC_i^T & -M_i^T \\ C_i X & -H^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & -R \end{bmatrix} \\
 V_{ij} &= \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} XA_i^T + A_iX + XA_j^T + A_jX \\ -B_i M_j - M_j^T B_i^T - B_j M_i - M_i^T B_j^T \end{array} \right) & XC_i^T & -M_j^T & XC_j^T & -M_i^T \\ C_i X & -H^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -M_j & 0 & -R^{-1} & 0 & 0 \\ C_j X & 0 & 0 & -H^{-1} & 0 \\ -M_i & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.27) \\
 Y_3 &= \text{diag}(Y_0 \quad 0 \quad 0) \\
 Y_4 &= \text{diag}(Y_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\
 K_i &= M_i X^{-1}
 \end{aligned}$$

## 2.4. Sistemas de control sobre redes

Todo sistema de control requiere del flujo de información de los sensores al controlador y del controlador a los actuadores. Si el sistema de control utiliza una red de comunicación digital como medio de transporte de información, la red inducirá retardos de tiempo y pérdida de paquetes durante el envío de información, lo que afectará el desempeño del sistema de control. En suma, si los retardos de tiempo son largos el sistema de control puede perder estabilidad. En este sentido, se puede hablar de un *umbral* que separa la zona de estabilidad del sistema de control. Cuando la duración del retardo cruza ese umbral, el sistema de control se inestabiliza. En el estudio de los sistemas de control sobre redes, este umbral se denomina el Máximo Retardo Permitido, o bien MADB por sus siglas en inglés (*Maximum Allowable Delay Bound*).

Debido al impacto que tiene la red comunicación en un sistema de control, se requiere de nuevas estructuras y métodos de análisis en el diseño de sistemas de control. Como se ha mencionado, se han propuesto varias estructuras de control que compensan los retardos de tiempo. Entre los más destacados se encuentra el control predictivo con *buffers* de almacenamiento [Sun et al., 2010, Millán et al., 2008]. En estos trabajos, las predicciones del control se almacenan en memoria y son usadas para compensar los retardos y la pérdida de paquetes. La desventaja de esta estructura, es que el diseño del controlador se realiza sin tomar en cuenta la red de comunicación.

Por otro lado, ha surgido teoría de control robusta a las imperfecciones de las redes de comunicación. Estas líneas de investigación buscan encontrar ganancias de retroalimentación de estados que soporten los retardos y la pérdida de paquetes. El enfoque que se usa en este trabajo, recae dentro de estas líneas de investigación.

El presente trabajo, adoptó la estructura de la figura 2.1 como sistema de control sobre redes. Este esquema posee las siguientes características

1. El sensor muestrea con periodo constante  $h$ .
2. El funcionamiento del controlador y el actuador es orientado a eventos.
3. Las muestras tomadas por el sensor están estampadas en el tiempo.
4. El tiempo de transporte de paquetes, y el tiempo de procesamiento en el controlador se engloban en un solo retardo de tiempo  $\tau_k$ , considerado del sensor hasta el actuador. De esta forma, se puede decir que la muestra  $i_k$ -ésima tarda  $\tau_k$  en viajar del sensor al actuador.

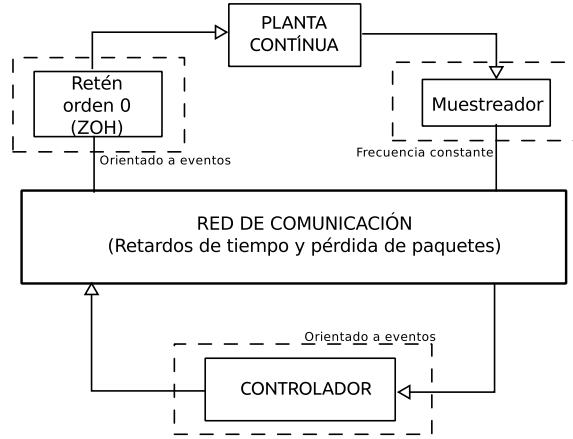


Figura 2.1: Estructura de un sistema de control operando sobre una red de comunicación digital.

Con la estructura descrita, se hará la siguiente aclaración: las muestras tomadas por el sensor son estampadas en el tiempo y cuando llegan al actuador son denotadas por  $i_k = \{1, 2, 3, \dots\}$  con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Con esto se quiere decir que el subíndice  $k$  indica el orden en que las muestras llegan al actuador, e  $i_k$  guarda las estampas de tiempo del paquete  $k$ -ésimo que llega al actuador.

Tras lo anterior, un sistema lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.28)$$

operando sobre una red de comunicación, se transformará en

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BKx(i_k h) \\ t &\in [i_k h + \tau_k, i_{k+1} h + \tau_{k+1}] \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde se ha considerado  $u(t) = Kx(i_k h)$ , con  $K$  una ganancia de retroalimentación de estados. Debe observarse que este enfoque considera en todo momento un sistema continuo con retardos en la entrada, inducidos por la red de comunicación. Este enfoque es diferente de los presentados en [Zhu et al., 2012, Fridman, 2010] respecto a los sistemas muestreados con retardos en la entrada. Estos últimos consideran que  $t \in [i_k h, i_{k+1} h]$ .

En [Yue et al., 2004] se analiza el modelo de la ecuación (2.29). En él se propone un planteamiento que permite estructurar de forma matemática los retardos de tiempo ante la pérdida de paquetes. A saber, considere la figura 2.2. De esta figura se deduce que

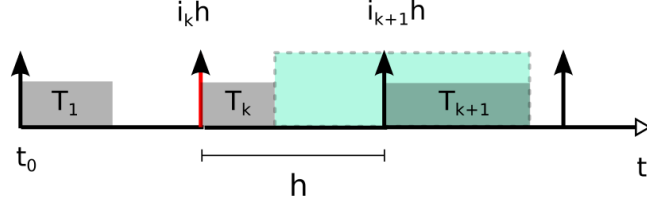


Figura 2.2: Representación de las muestras  $i_k$ -ésimas del sensor, y los retardos de tiempo  $\tau_k$  que tiene la muestra  $i_k$ -ésima en viajar del sensor hasta el actuador.

- Si  $i_{k+1} - i_k = 1$  entonces no existe pérdida de paquetes y  $\tau_k < h + \tau_{k+1}$ .
- Si  $i_{k+1} - i_k > 1$  implica que existe pérdida de paquetes.
- Si  $i_{k+1} < i_k$  significa que los paquetes llegan de forma desordenada.

Con estas observaciones, se puede proponer la siguiente desigualdad para expresar que los retardos de tiempo no superen algún valor  $\eta > 0$

$$(i_{k+1} - i_k)h + \tau_{k+1} < \eta \quad (2.30)$$

donde  $\eta$  representa alguna cota. Bajo este enfoque, [Yue et al., 2004] propone una funcional de Lyapunov-Krasovskii y deduce una condición suficiente de estabilidad asintótica. Sus resultados se resumen en el teorema 3 y el corolario 4.

**Teorema 3** Para escalares dados  $\eta$ , y  $\rho_j > 0$  ( $j = 2, 3$ ), si existen matrices  $P > 0$ ,  $T > 0$ , una matriz no singular  $X$  y matrices  $Y$  y  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de dimensiones apropiadas tal que

$$\begin{bmatrix} N_1 + N_1^T - AX^T - XA^T & N_2^T - N_1 - \rho_2 XA^T - BY & N_3^T - \rho_3 XA^T + X^T + P & \eta N_1 \\ * & -N_2 - N_2^T - \rho_2 BY & -N_3^T + \rho_2 X^T - \rho_3 Y^T B^T & \eta N_2 \\ * & * & \rho_3 X + \rho_3 X^T + \eta T & \eta N_3 \\ * & * & * & -\eta T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

$(i_{k+1} - i_k)h + \tau_{k+1} < \eta$

entonces el sistema de la ecuación (2.29) con  $K = YX^{-T}$ , es exponencial y asintóticamente estable.

**Corolario 4** Para una escalar dado  $\eta$  y una matriz dada  $K$ , si existen matrices  $P > 0$ ,  $T > 0$ ,  $N_i$  y  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de dimensiones apropiadas tal que

$$\begin{bmatrix} N_1 + N_1^T - M_1 A - A^T M_1^t & N_2^T - N_1 - A^T M_2^T - M_1 B K & N_3^T - A^T M_3^T + M_1 + P & \eta N_1 \\ * & -N_2 - N_2^T - M_2 B K - K^T B^T M_2^T & -N_3^T + M_2 - K^T B^T M_3^T & \eta N_2 \\ * & * & M_3 + M_3^T + \eta T & \eta N_3 \\ * & * & * & -\eta T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.32)$$

$(i_{k+1} - i_k)h + \tau_{k+1} < \eta$

entonces el sistema de la ecuación (2.29) con ganancia de retroalimentación  $K$  es exponencial y asintóticamente estable.

Nótese que al encontrar una  $\eta_{máxima}$  para toda  $k$  en el corolario 4, se encuentra el MADB del sistema. Esta idea se usó en el capítulo 6 para calcular el MADB de los sistemas que integraron los modelos difusos de Takagi-Sugeno de los sistemas en estudio.

## 2.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha presentado la teoría necesaria para abordar el desarrollo de este trabajo. Inicialmente se ha introducido el modelo difuso de Takagi-Sugeno, y enseguida se ha mostrado que el diseño de controladores difusos consiste en resolver un conjunto de LMIs. Este conjunto de LMIs representan especificaciones de diseño para el desempeño del sistema de control.

Asimismo, se ha introducido el enfoque usado para analizar un sistema de control sobre redes. El enfoque presentado es muy parecido a los llamados *sistemas muestreados con retardo en la entrada*, en los que el sistema es modelado en tiempo continuo con entrada de control retrasada. La diferencia clara para el análisis de sistemas de control sobre redes, son los retardos  $\tau_k, \tau_{k+1} \dots$  de la ecuación (2.29), que son inducidos por la red de comunicación digital (véase figura 2.2). En los sistemas muestreados con retardo en la entrada, los retardos  $\tau_k, \tau_{k+1} \dots$  son inexistentes. Bajo este enfoque, se ha presentado el teorema 3. Este teorema asegura la estabilidad asintótica de un sistema de control lineal bajo la influencia de los retardos de tiempo inducidos por la red de comunicación. Este teorema, como es común en el estudio de estabilidad en sistemas de control sobre redes, se deduce de un análisis de estabilidad por funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

La teoría presentada en este capítulo, se relaciona estrechamente con los desarrollos de los capítulos 4 y 6.

---

## Descripción general del sistema

---

En el capítulo 1, se mencionó que como caso de estudio se eligió un helicóptero y un cuadricóptero operando sobre una red de comunicación *Ethernet* TCP/IP. En este capítulo se describen las características básicas de estos sistemas físicos, y se presenta su modelo matemático.

Como es sabido, el movimiento de un cuerpo rígido en el espacio queda bien determinado por seis coordenadas generalizadas, tres asociadas al movimiento del centro de masa en el espacio, y tres más que describen su orientación respecto al centro de masa. En el modelado de vuelo de vehículos aéreos, es común usar la tupla  $(x, y, z)$  para situar la posición del centro de masa, y usar los *ángulos de Euler*  $(\phi, \theta, \psi)$  para describir la orientación del vehículo. En esta última terna el ángulo  $\phi$  denota la rotación en torno al eje X (*Roll*),  $\theta$  denota la rotación alrededor del eje Y (*Pitch*), y  $\psi$  denota la rotación en torno al eje Z (*Yaw*). Esta misma convención se usó para modelar la dinámica del cuadricóptero y el helicóptero presentada en este capítulo.

### 3.1. Cuadricóptero

Un cuadricóptero es un helicóptero compuesto de cuatro rotores montados al final de dos ejes perpendiculares. Los rotores proporcionan las fuerzas y torques necesarios para que el objeto se mueva en el espacio. Aunque estos vehículos tienen la capacidad de suspenderse y alcanzar orientaciones preescritas, el cuadricóptero usado en este trabajo tiene su centro de masa fijo a tierra impidiendo su vuelo, por lo que el sistema posee tres grados de libertad: rotación en *roll*, rotación en *pitch*, y rotación en *yaw*. La figura 3.1 muestra el cuadricóptero.

Los componentes principales del cuadricóptero son 4 motores DC de 24[V] que proporcionan los torques aerodinámicos y las fuerzas de sustentación. Las fuerzas de sustentación generan los torques de entrada en *roll* y en *pitch*, y los torques aerodinámicos generan la rotación en *yaw* del cuadricóptero. Estos torques se consideran proporcionales al voltaje aplicado a los motores: la constante de proporcionalidad entre el torque en *roll* (o *pitch*) y el voltaje aplicado a un motor la definimos como  $K_l$ , y la constante de proporcionalidad





Figura 3.1: *Cuadricóptero de Quanser (3-DOF Hover)*

entre el torque en *yaw* y el voltaje se define como  $K_t$ . Los motores son alimentados a través de una fuente de voltaje que es controlada por cuatro salidas analógicas de una tarjeta de adquisición de datos. La tarjeta de adquisición de datos es controlada a través de Simulink de Matlab.

Para determinar la orientación del cuadricóptero, el sistema está equipado con 3 encoder. Cada sensor determina el ángulo de giro respecto a los ejes de un marco de referencia fijo en el espacio. En este caso, miden los ángulos en *roll*, *pitch* y *yaw*, cuyos rangos de operación en el sistema son  $\phi \in [-50^\circ, 50^\circ]$ ,  $\theta \in [-50^\circ, 50^\circ]$ , y  $\psi \in [-360^\circ, 360^\circ]$ . Estos 3 encoder son leídos por la tarjeta de adquisición de datos.

Este cuadricóptero se encuentra instalado en el *Laboratorio de cómputo móvil* del IIMAS, UNAM. Fue comprado a la empresa Quanser con el fin de apoyar los proyectos de investigación en este instituto. Quanser proporciona los componentes necesarios para que el cuadricóptero opere con una tarjeta de adquisición de datos conectada a una computadora. Asimismo, el fabricante proporciona software para que el cuadricóptero pueda ser manipulado a través de Simulink de Matlab. En suma, Quanser proporciona un valor estimado de los parámetros del sistema (véase tabla 3.1).

La tarjeta de adquisición de datos es la llamada Q8-USB de la misma empresa, Quanser. La figura 3.2 muestra la arquitectura general del funcionamiento del cuadricóptero.

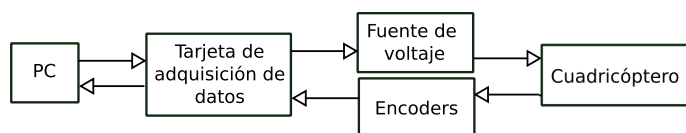


Figura 3.2: *Estructura electrónica del funcionamiento del cuadricóptero.*

Tabla 3.1: Parámetros del cuadricóptero proporcionados por Quanser.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	Valor	Unidades
$K_l$	Constante de proporcionalidad entre el torque en <i>roll</i> ( <i>pitch</i> ) y el voltaje del motor.	0.0036	$[\frac{N-m}{v}]$
$K_t$	Constante de proporcionalidad entre el torque en <i>yaw</i> y el voltaje del motor.	0.0012	$[\frac{N-m}{v}]$
$m_c$	masa del cuadricóptero	2.85	$[Kg]$
$I_x$	Inercia alrededor del eje x	0.055	$[Kg - m^2]$
$I_y$	Inercia alrededor del eje y	0.055	$[Kg - m^2]$
$I_z$	Inercia alrededor del eje z	0.110	$[Kg - m^2]$
$K_{enc}$	Resolución de los encoder	8192	$[\frac{pulsos}{revolucion}]$

### 3.1.1. Modelo Matemático del Cuadricóptero

La figura 3.3 muestra el cuadricóptero y el marco de referencia usado durante este trabajo. Para obtener la dinámica del sistema se consideraron dos marcos de referencia,

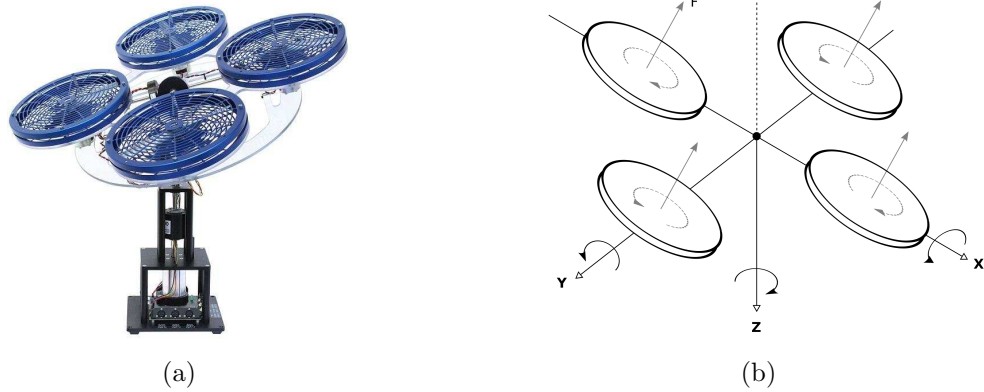


Figura 3.3: (a) Cuadricóptero de Quanser (b) Marco de referencia usado

un marco fijo en el espacio con su origen en el centro de masa del cuadricóptero, y otro marco atado al cuadricóptero también con su origen en el centro de masa. Estos marcos de referencia se relacionaron a través de la secuencia de rotaciones *roll-pitch-yaw*. Trás esto, la transformación en función de los ángulos de Euler que relaciona ambos marcos de referencia es

$$P_{MC} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_Y(\psi)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}}_{M_F(\theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{M_R(\phi)} P_{MF} \quad (3.1)$$

donde se ha definido  $M_R(\phi)$  como la matriz de rotación en *roll*,  $M_P(\theta)$  la matriz de rotación en *pitch*, y  $M_Y(\psi)$  la matriz de rotación en *yaw*. Ahora, ya que los ángulos de Euler describen completamente la orientación del cuerpo, resulta útil obtener la velocidad angular del cuerpo  $\Omega$  en función de estos ángulos y su variación. Es decir, se busca obtener  $\Omega = f(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ . Por simplicidad, se definen los vectores  $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$  y  $\dot{\eta} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ . Así, lo que buscamos es

$$\Omega = f(\eta, \dot{\eta}). \quad (3.2)$$

Para realizar lo anterior, llevamos cada una de las velocidades  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  al marco de referencia del cuerpo, y llamamos a esta velocidad  $\Omega_{MC}$ . Esto es

$$\begin{aligned} \Omega_{MC} &= M_Y(\psi)M_P(\theta)M_R(\phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M_Y(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + I \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

y definiendo

$$W = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

se obtiene

$$\Omega_{MC} = W\dot{\eta}. \quad (3.5)$$

Luego, usando la representación de la velocidad de la ecuación (3.5), la energía cinética se escribe como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\Omega^T I \Omega \\ &= \frac{1}{2}\dot{\eta}^T J \dot{\eta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $J = W^T I W$ , e  $I$  es la matriz de inercia del cuadricóptero. En este caso  $I = \text{diag}\{I_x, I_y, I_z\}$ .

Ya que no existe cambio en la energía potencial (el centro de masa está fijo), el Lagrangiano resulta

$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (3.7)$$

Finalmente, la dinámica se obtiene realizando

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = \tau \quad (3.8)$$

donde  $\tau$  es el par de entrada. A saber

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = J\dot{\eta} &\quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \dot{J}\dot{\eta} + J\ddot{\eta} \\ \frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} [\dot{\eta}^T J \dot{\eta}] &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} [J \dot{\eta}] \right)^T \dot{\eta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

resultando

$$\begin{aligned} J\ddot{\eta} + \dot{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} [J \dot{\eta}] \right)^T \dot{\eta} &= \tau \\ J\ddot{\eta} + \left( \dot{J} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} [J \dot{\eta}] \right)^T \right) \dot{\eta} &= \tau \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ahora, definiendo  $C(\eta, \dot{\eta}) = \dot{J} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} [J \dot{\eta}] \right)^T$ , y adicionando un par de pérdida de energía  $\tau_B = B\dot{\eta}$  con  $B = \text{diag}\{B_\phi, B_\theta, B_\psi\}$ , el modelo resulta

$$J\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau - B\dot{\eta} \quad (3.11)$$

o bien

$$\ddot{\eta} = f(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + g(\eta)\tau \quad (3.12)$$

con  $f(\eta, \dot{\eta}) = -J^{-1}(C(\eta, \dot{\eta}) + B)$ , y  $g(\eta) = J^{-1}$ . El modelo de la ecuación (3.12) es el modelo del cuadricóptero usado en este trabajo.

En este punto es necesario hacer algunas observaciones

1. En el modelo de la ecuación (3.12), el vector de entrada  $\tau$  consiste de los pares generados por la rotación de los cuatro rotores del cuadricóptero. Según la configuración de la figura 3.3, cada rotor genera un par aerodinámico en sentido contrario al de su rotación, y una fuerza de empuje perpendicular al plano XY. Si se considera que estos pares y fuerzas son generados proporcionalmente al voltaje aplicado a cada rotor, el vector de entrada tiene la siguiente configuración

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_l & 0 & -k_l \\ k_l & 0 & -k_t & 0 \\ -k_t & k_t & -k_t & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

o bien

$$\tau = \Gamma u \quad (3.14)$$

donde se han realizado las siguientes definiciones

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & k_l & 0 & -k_l \\ k_l & 0 & -k_t & 0 \\ -k_t & k_t & -k_t & k_t \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

2. Es importante mencionar que el modelo de la ecuación (3.12) fue calculado en el software *Mathematica*. Esta actividad mostró que las funciones  $f$  y  $g$  de la ecuación (3.12) dependen solamente de las variables  $\theta$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ , y  $\dot{\psi}$ . Esto fue aprovechado para diseñar el controlador difuso presentado en el capítulo 4.
3. El hecho que el modelo de la ecuación (3.12) no dependa de  $\phi$  y  $\psi$  no es sorprendente. Debe observarse que la secuencia de rotaciones *roll-pitch-yaw* llevo a que  $\Omega_{MC}$  no dependiera de  $\phi$  (véase ecuación (3.4)). Por otro lado, es evidente que para cualquier valor de  $\theta$ , resulta irrelevante el valor de  $\psi$ .

## 3.2. Helicóptero

Un helicóptero es una aeronave sustentada, en la mayoría de los casos, por dos rotores. El helicóptero usado en este trabajo se muestra en la figura 3.4. Al igual que el cuadricóptero,

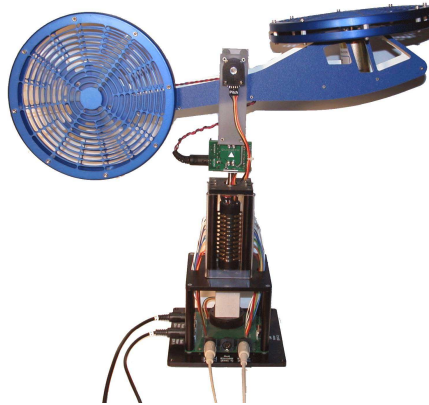


Figura 3.4: *Helicóptero de la empresa Quanser*

el helicóptero es un sistema del *Laboratorio de cómputo móvil* destinado a la investigación.

El helicóptero tiene dos grados de libertad: 1) movimiento en un plano horizontal (*yaw*), y 2) movimiento en la dirección vertical (*pitch*). Los componentes principales son dos motores DC que proporcionan los torques aerodinámicos y las fuerzas de sustentación. Los torques y fuerzas de sustentación se consideran proporcionales al voltaje aplicado a los motores. El motor delantero es de  $24[v]$ , y el trasero es de  $12[v]$ . El voltaje aplicado a los motores es controlado por una fuente de voltaje conectada a una tarjeta de adquisición de datos. La tarjeta de adquisición de datos es la Q4-USB de Quanser.

El sistema cuenta con dos encoder para medir la rotación de los ángulos *pitch* y *yaw*, cuyos rangos de operación en el sistema son  $\theta \in [-38^\circ, 45^\circ]$ , y  $\psi \in [-360^\circ, 360^\circ]$ . La resolución de los encoder en *pitch*  $K_{enc,P}$  y en *yaw*  $K_{enc,Y}$  se muestra en la tabla 3.2. La información de los encoder es leída por la tarjeta de adquisición de datos. La figura 3.5 muestra la estructura de este sistema.

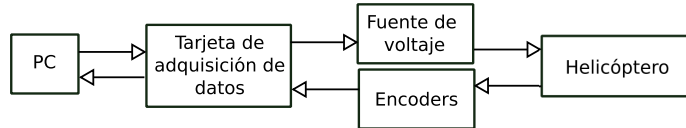


Figura 3.5: Estructura electrónica del funcionamiento del helicóptero

Tabla 3.2: Parámetros del helicóptero proporcionados por Quanser.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	VALOR	UNIDADES
$K_{pp}$	Constante de proporcionalidad entre la fuerza de empuje vertical ( <i>pitch</i> ) y el voltaje del motor delantero ( <i>pitch</i> ).	0.204	$[\frac{N-m}{v}]$
$K_{yy}$	Constante de proporcionalidad entre la fuerza de empuje horizontal ( <i>yaw</i> ) y el voltaje del motor lateral ( <i>yaw</i> ).	0.072	$[\frac{N-m}{v}]$
$K_{py}$	Constante de proporcionalidad entre la fuerza de empuje vertical ( <i>pitch</i> ) y el voltaje del motor lateral ( <i>yaw</i> ).	0.0068	$[\frac{N-m}{v}]$
$K_{yp}$	Constante de proporcionalidad entre la fuerza de empuje lateral ( <i>yaw</i> ) y el voltaje del motor delantero ( <i>pitch</i> ).	0.0219	$[\frac{N-m}{v}]$
$m_h$	Masa del helicóptero	1.3872	$[Kg]$
$g$	Aceleración gravitacional	9.81	$[\frac{m}{s^2}]$
$J_p$	Momento de inercia alrededor del pivote en <i>pitch</i>	0.0178	$[Kg - m^2]$
$J_y$	Momento de inercia alrededor del pivote en <i>yaw</i>	0.0084	$[Kg - m^2]$
$K_{enc,P}$	Resolución del encoder que mide el ángulo <i>pitch</i>	4096	$[\frac{pulsos}{revolucion}]$
$K_{enc,Y}$	Resolución del encoder que mide el ángulo <i>yaw</i>	8192	$[\frac{pulsos}{revolucion}]$
$l_{cm}$	Distancia del pivote al centro de masa del helicóptero	0.186	$[m]$

### 3.2.1. Modelo Matemático del Helicóptero

Aunque el modelo del helicóptero puede ser desarrollado en forma semejante al cuadricóptero, en este caso, resultó más conveniente usar el modelo proporcionado por el fabricante debido a la configuración de parámetros. Es decir, mientras que el centro de masa del cuadricóptero se encuentra fijo, el centro de masa del helicóptero no lo está. En suma, la simetría del helicóptero es más complicada que la del cuadricóptero y dificulta obtener nuevos valores de parámetros. Por tanto, en esta sección se presenta a grandes rasgos el desarrollo del modelo.

El helicóptero posee dos grados de libertad. Consiste de una hélice frontal que proporciona la fuerza de cabeceo  $F_p$  (rotación en *pitch*), y una hélice trasera que proporciona la fuerza de viraje  $F_y$  (rotación en *yaw*). La figura 3.6 muestra la configuración del helicóptero y la orientación del marco de referencia.

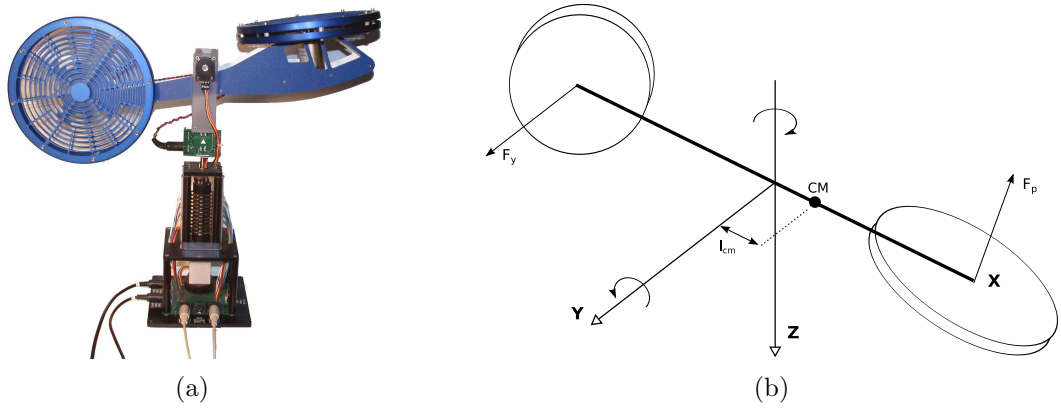


Figura 3.6: (a) Helicóptero de Quanser (2-DOF helicopter) (b) Marco de referencia para la orientación

De acuerdo a la figura 3.6, el centro de masa se mueve cuando existe giro en *pitch* y *yaw*. Así, la energía cinética  $T$  del sistema es tomada como

$$T = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_y\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m_h v_{cm}^2 \quad (3.16)$$

donde  $J_p$  es la inercia a la rotación en *pitch*,  $J_y$  es la inercia a la rotación en *yaw*,  $m_h$  es la masa del helicóptero, y  $v_{cm}$  es la velocidad del centro de masa. Por otro lado la energía potencial  $V$  es

$$V = m_h g l_{cm} \sin \theta. \quad (3.17)$$

donde  $g$  es la aceleración gravitacional, y  $l_{cm}$  es la distancia del centro de masa al origen del sistema (véase figura 3.6). Por tanto, el Lagrangiano se escribe como

$$L = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_y\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m_h v_{cm}^2 - m_h g l_{cm} \sin \theta \quad (3.18)$$

y nuevamente por la ecuación (3.8), la dinámica del helicóptero resulta

$$\begin{aligned} (J_p + m_h l_{cm}^2) \ddot{\theta} &= -m_h g l_{cm} \cos \theta - m_h l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 + \tau_\theta \\ (J_y + m_h l_{cm}^2 \cos^2 \theta) \ddot{\psi} &= 2m_h l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \tau_\psi \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde  $\tau_\theta$  y  $\tau_\psi$  son los pares de entrada al sistema. Si se consideran los efectos de disipación de energía en los rodamientos, la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} (J_p + m_h l_{cm}^2) \ddot{\theta} &= -m_h g l_{cm} \cos \theta - m_h l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 - B_p \dot{\theta} + \tau_\theta \\ (J_y + m_h l_{cm}^2 \cos^2 \theta) \ddot{\psi} &= 2m_h l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} - B_y \dot{\psi} + \tau_\psi \end{aligned} \quad (3.20)$$

con  $B_p$  y  $B_y$  constantes.

Ahora, cada rotor genera un fuerza de empuje y un par aerodinámico en sentido contrario a su rotación. Así, el rotor frontal genera un torque en *pitch* debido a la fuerza de empuje  $F_p$ , y un torque aerodinámico en *yaw* debido a su rotación. Análogamente, el rotor trasero genera un torque en *yaw* debido a la fuerza de empuje  $F_y$ , y otro torque en *pitch* debido a su rotación. Tras esta explicación, y considerando que los torques son proporcionales al voltaje aplicado a los rotores, los pares de entrada al sistema resultan ser

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= K_{pp} v_p + K_{py} v_y \\ \tau_\psi &= K_{yp} v_p + K_{yy} v_y \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $K_{pp}$ ,  $K_{py}$ ,  $K_{yp}$  y  $K_{yy}$  son constantes de proporcionalidad, y  $v_p$  y  $v_y$  son los voltajes aplicados a los rotores delantero y trasero respectivamente.

Luego, sustituyendo la ecuación (3.21) en la ecuación (3.20), el modelo del helicóptero resulta

$$\begin{aligned} (J_p + m_h l_{cm}^2) \ddot{\theta} &= -m_h g l_{cm} \cos \theta - m_h l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 - B_p \dot{\theta} + K_{pp} v_p + K_{py} v_y \\ (J_y + m_h l_{cm}^2 \cos^2 \theta) \ddot{\psi} &= 2m_h l_{cm}^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} - B_y \dot{\psi} + K_{yp} v_p + K_{yy} v_y \end{aligned} \quad (3.22)$$

Note que este modelo, al igual que el modelo del cuadricóptero, no depende de los ángulos  $\phi$  y  $\psi$ . Esto último tiene una justificación inmediata: 1) el movimiento en  $\phi$  no está permitido en el sistema, y 2) igual que en el cuadricóptero, para cualquier valor de  $\theta$  el valor de  $\psi$  es relativo.

El modelo de la ecuación (3.22) es el modelo del helicóptero usado en este trabajo. Todos los parámetros que aparecen en esta ecuación son proporcionados por Quanser (véase tabla 3.2).

### 3.3. Conclusiones del capítulo

De manera general, este capítulo ha descrito la arquitectura electrónica de los sistemas, y ha deducido la dinámica del cuadricóptero y el helicóptero. La arquitectura electrónica



es sencilla y se facilita su manejo debido a la compatibilidad de todos los dispositivos con Simulink. Por su parte, las ecuaciones de movimiento del cuadricóptero y el helicóptero se han obtenido mediante la formulación Lagrangiana. Aunque este camino involucra complejas operaciones, se ha elegido esta formulación debido a nuestra disponibilidad del software *Mathematica*. Los modelos obtenidos en este capítulo son la parte medular en el diseño de controladores del capítulo 4.

---

# Diseño de controladores difusos

---

En el capítulo anterior se obtuvieron los modelos matemáticos del cuadricóptero y el helicóptero. Este capítulo presenta el diseño de los controladores para ambos sistemas. Como se mencionó en el capítulo 1, el diseño de estos controladores se basa en el modelo difuso de Takagi-Sugeno y las especificaciones de desempeño presentadas en el capítulo 2.

## 4.1. Cuadricóptero

### 4.1.1. Representación en el espacio de estados

En el capítulo 3 se indicó que el modelo que describe la dinámica del cuadricóptero es

$$\ddot{\eta} = f(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + g(\eta)\tau \quad (4.1)$$

y se mostró que las funciones  $f$  y  $g$  dependen del ángulo  $\theta$  y las velocidades  $\dot{\eta} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ . También se dijo que el vector  $\tau$  es el resultado de los efectos aerodinámicos de los cuatro rotores de cuadricóptero. Estos efectos son representados por la ecuación (3.13). Lo que sigue, es expresar el modelo de la ecuación (4.1) en el espacio de estados, y diseñar el controlador difuso que regula los ángulos de Euler  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ .

Con este fin, se elige el vector de estado

$$x = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

y por las ecuaciones (4.1) y (3.13), el modelo en el espacio de estados resulta

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ f(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g(x)\Gamma \end{bmatrix} u(t) \quad (4.3)$$

donde  $\dot{x} \in \mathbf{R}^6$ ,  $f(x) \in \mathbf{R}^3$ ,  $g(x) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ ,  $\Gamma \in \mathbf{R}^{3 \times 4}$ , y  $u = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$  es el vector de entrada al sistema formado por los voltajes aplicados a los motores.

#### 4.1.2. Modelo difuso de Takagi-Sugeno

Ahora, el modelo (4.3) es un modelo no lineal que depende de  $\theta = x_2$  y  $\dot{\eta} = [x_4 \ x_5 \ x_6]$ . Por otro parte, el modelo de Takagi-Sugeno requiere de modelos lineales locales para formar el modelo difuso. Así que para expresar el modelo de la ecuación (4.3) mediante el modelo difuso de Takagi-Sugeno, la ecuación (4.3) se linealizó alrededor de tres puntos de regulación

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -45^\circ \\ \theta_2 &= 0^\circ \\ \theta_3 &= 45^\circ \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esto con el fin de cubrir el rango de operación del ángulo  $\theta$ . Ahora, ya que el objetivo del controlador es regular los ángulos  $(\phi, \theta, \psi)$ , por cada linealización se obtuvo un modelo lineal de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $x(t) \in \mathbf{R}^6$ . Sin embargo, para reducir las incertidumbres en los parámetros, se agregaron integradores a la salida  $y(t) = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ . Esto generó un vector de estado adicional  $x_a$  dado por

$$\dot{x}_a(t) = r(t) - y(t). \quad (4.6)$$

donde  $x_a(t) \in \mathbf{R}^3$ ,  $r(t) \in \mathbf{R}^3$  es la señal de referencia, y  $y(t) \in \mathbf{R}^3$  es la salida del sistema. La inclusión del vector  $x_a$  extiende cada uno de los modelos lineales a la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= C_i x(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Redefiniendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

y usando la aproximación local de las linealizaciones alrededor de los puntos de regulación de la ecuación (4.4), las reglas del modelo difuso resultan

$$\begin{array}{ll}
 \text{IF } x_2(t) = -45^\circ & \text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ y_1(t) = C_1x(t) \end{cases} \\
 \text{IF } x_2(t) = 0^\circ & \text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ y_2(t) = C_2x(t) \end{cases} \\
 \text{IF } x_2(t) = 45^\circ & \text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ y_3(t) = C_3x(t) \end{cases}
 \end{array} \quad (4.9)$$

cuya salida corresponde a

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^3 h_i(x_2) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\
 y(t) &= \sum_{i=1}^3 h_i(x_2) y_i(t)
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

con  $x \in \mathbf{R}^9$ ,  $A_i \in \mathbf{R}^{9 \times 9}$ ,  $B_i \in \mathbf{R}^{9 \times 4}$ , y  $u \in \mathbf{R}^4$ . En esta expresión,  $h(x_2)$  corresponde a la *defuzzyfication* del modelo difuso, y su valor es resultado de las funciones de membresía descritas en el siguiente apartado.

### 4.1.3. Funciones de membresía

El modelo difuso de la ecuación (4.10) requiere de la fusificación de la información obtenida por  $x_2$ . Esta fusificación se realizó a través de tres funciones de membresía *Gaussianas*. Las funciones de membresía se presentan en la ecuación (4.11), y la figura 4.1 muestra sus gráficas.

$$\begin{aligned}
 d_1(x_2) &= e^{-4\left(\frac{x_2+45}{30}\right)^6} \\
 d_2(x_2) &= e^{-4\left(\frac{x_2}{30}\right)^6} \\
 d_3(x_2) &= e^{-4\left(\frac{x_2-45}{30}\right)^6}
 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observe que cada una de estas funciones está centrada en los puntos de linealizaciones  $x_2 = \theta = -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ . Con las ecuaciones (4.11), el peso  $h_i(x_2)$  de cada regla difusa resultó

$$h_i(x_2) = \frac{d_i(x_2)}{\sum_{j=1}^3 d_j(x_2)}. \quad (4.12)$$

### 4.1.4. Diseño del controlador difuso

Con el modelo de la ecuación (4.10), el diseño del controlador se realizó con base en las especificaciones de desempeño presentadas en el capítulo 2. Recuerdese que en el capítulo

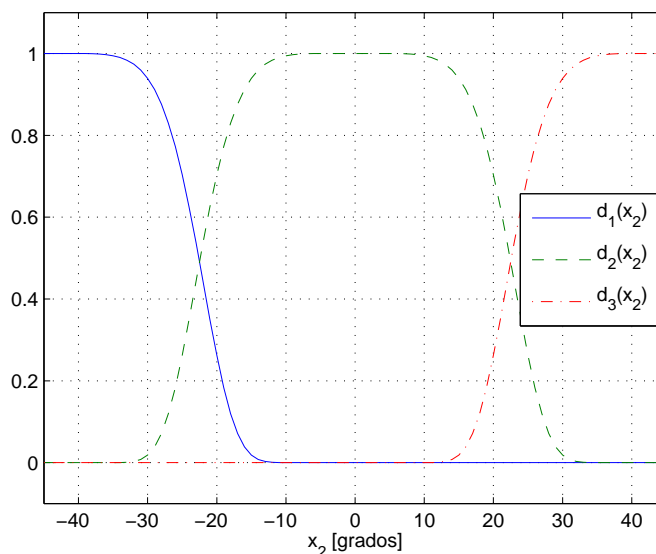


Figura 4.1: *Funciones de membresía del cuadricóptero*

2 se presentaron condiciones de estabilidad y especificaciones de desempeño como LMIs. En consecuencia, la búsqueda de las ganancias de retroalimentación  $K_i$  se obtienen resolviendo numéricamente esas desigualdades. En particular, el controlador del cuadricóptero se diseñó resolviendo las siguientes especificaciones de desempeño

1. Tasa de decaimiento
2. Restricción a la entrada

El aumento en la tasa de decaimiento consistió en resolver el problema de los eigenvalores generalizados presentado en la sección 2.3.1. Este problema de optimización consistió en encontrar el conjunto solución de las LMIs especificadas, y después realizar la minimización sobre el conjunto solución.

Por su parte, la restricción a la entrada se impuso resolviendo el teorema 1. Como es sabido, la solución de una LMI es un conjunto convexo, así que para que ambas LMIs se satisfagan basta resolverlas simultáneamente. En nuestro caso, el problema del aumento en la tasa de decaimiento y la restricción a la entrada, se resolvieron simultáneamente. La solución a este problema se realizó con Matlab.

Una vez que los problemas fueron resueltos, se deducieron las ganancias de retroalimentación  $K_i$ , y se contruyó el siguiente controlador difuso

$$\begin{aligned}
 r_1 : \quad & IF \quad x_2 = -45^\circ \quad THEN \quad u(t) = -K_1 x(t) \\
 r_2 : \quad & IF \quad x_2 = 0^\circ \quad THEN \quad u(t) = -K_2 x(t) \\
 r_3 : \quad & IF \quad x_2 = 45^\circ \quad THEN \quad u(t) = -K_3 x(t)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

con salida

$$\dot{x} = - \sum_{i=1}^3 h_i(x_2) K_i x(t). \quad (4.14)$$

### 4.1.5. Anti-windup

Aunque el modelo (4.10) es robusto a las incertidumbres en los parámetros, la inclusión de los integradores lleva a grandes sobrepasos cuando la integral del error  $x_a$  (ecuación (4.6)) crece demasiado durante algún intervalo de tiempo. Este fenómeno se conoce como *windup*.

Para evitar el *windup*, se implementó la estructura de *anti-windup* de la figura 4.2. En la figura 4.2,  $K_a$  es la ganancia de realimentación correspondiente al vector de estado  $x_a$ , con lo que la entrada al integrador es

$$e = K_a \dot{x}_a + \frac{u - v}{T_r} \quad (4.15)$$

donde  $T_r$  una constante que acelera o retrasa la acción de anti-windup. Con esta estructura, cuando la señal  $v$  sobrepasa algún valor límite del saturador (superior  $v_{sat+}$  ó inferior  $v_{sat-}$ ), el término  $\frac{v-u}{T_r}$  impide que los estados en  $x_a$  continuen acumulándose. En este diseño, los valores límite del saturador fueron  $v_{sat+} = 24[v]$  y  $v_{sat-} = 0[v]$ .

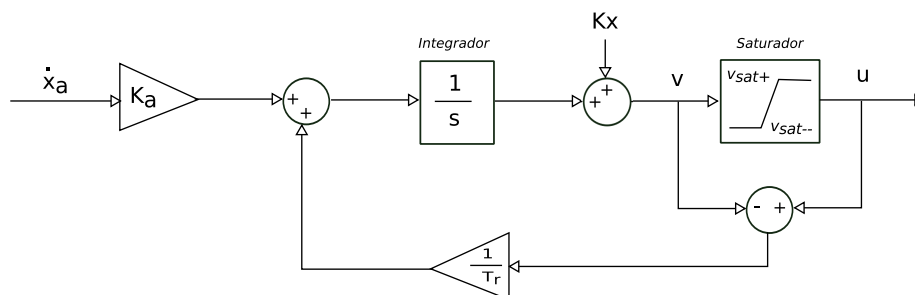


Figura 4.2: Estructura de anti-windup utilizada en el trabajo.

Los resultados del controlador y el antiwindup se presentan en el capítulo 5.

## 4.2. Helicóptero

Análogamente al caso del cuadricóptero, el modelo del helicóptero es un modelo no lineal independiente de las posiciones  $\phi$  y  $\psi$ . Debido a esto, el diseño del controlador para el helicóptero siguió el mismo procedimiento que el diseño de controlador del cuadricóptero: se obtuvo el modelo en espacio de estados del sistema, y se usaron tres aproximaciones locales para formar el modelo difuso. Nuevamente, las linealizaciones se realizaron en puntos que cubren el rango de operación del ángulo  $\theta$ .

### 4.2.1. Representación en el espacio de estados

Para obtener el modelo en espacio de estados, se definió el vector de estado  $x$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

y el vector salida del sistema  $y$

$$y = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Usando las definiciones anteriores y el modelo de la ecuación (3.22), se obtiene

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ p(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix} u(t) \quad (4.18)$$

con  $p(x) \in \mathbf{R}^2$ ,  $q(x) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ , y  $u(t) = [v_p \ v_y]^T \in \mathbf{R}^2$  como vector de entrada al sistema (voltajes aplicados a los rotores).

### 4.2.2. Modelo difuso de Takagi-Sugeno

Para representar la dinámica no lineal de la ecuación (4.18) mediante el modelo de Takagi-Sugeno, se aprovecho el hecho que el modelo no depende de la posición  $\psi = x_2$ . Es decir, se linealizó el modelo de la ec. (4.18) alrededor de tres puntos de regulación

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -40^\circ \\ \theta_2 &= 0^\circ \\ \theta_3 &= 40^\circ \end{aligned} \quad (4.19)$$

todos con  $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$ . Luego se obtuvieron tres modelos lineales de la forma

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

En este caso,  $x \in \mathbf{R}^4$  y  $u \in \mathbf{R}^2$ . Sin embargo, al igual que en el desarrollo del modelo del cuadricóptero, se agregaron integradores a la salida del sistema para mejorar los resultados. Así, se definió el vector de estado  $x_b(t)$

$$\dot{x}_b(t) = r(t) - y(t) \quad (4.21)$$

con  $r(t), y(t) \in \mathbf{R}^2$ , siendo  $r(t)$  la señal de regulación y  $y(t)$  la salida del sistema. Tras la definición de la ec. (4.21), cada sistema de la ecuación (4.20) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Redefiniendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_b(t) \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

los sistemas en los tres puntos de regulación se transforman en

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u, \\ y(t) &= C_i x(t) \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $x \in \mathbf{R}^6$ ,  $A \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{6 \times 2}$ ,  $u \in \mathbf{R}^2$ ,  $C_i \in \mathbf{R}^{2 \times 6}$ , y  $y \in \mathbf{R}^2$

Con los tres modelos locales de la ecuación (4.24), el modelo difuso de Takagi-Sugeno resulta

$$\begin{aligned} \text{IF } x_1 = -40^\circ \quad \text{THEN} & \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ y_1 = C_1 x \end{cases} \\ \text{IF } x_1 = 0^\circ \quad \text{THEN} & \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + B_2 u \\ y_2 = C_2 x \end{cases} \\ \text{IF } x_1 = 40^\circ \quad \text{THEN} & \begin{cases} \dot{x} = A_3 x + B_3 u \\ y_3 = C_3 x \end{cases} \end{aligned} \quad (4.25)$$

cuya salida es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^3 h_i(x_1) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y &= \sum_{i=1}^3 h_i(x_1) y_i(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde  $h_i(x_1)$  es peso asignado a cada regla difusa de acuerdo al valor de  $x_1$ . En el caso del helicóptero, esta defusificación se describe a continuación.

### 4.2.3. Funciones de membresía

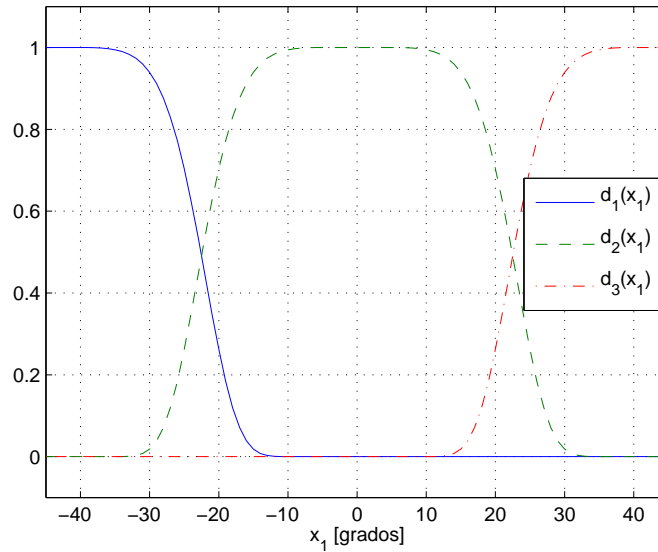
La defusificación del modelo difuso de la ecuación (4.26) se realizó con tres funciones de membresía Gaussianas. Las funciones Gaussianas se centraron en los puntos de regulación donde se linealizó el modelo del helicóptero. Estas funciones se listan en la ecuación (4.27). La figura 4.3, muestra estas funciones de membresía.

$$\begin{aligned} d_1(x_1) &= e^{-4\left(\frac{x_1+40}{30}\right)^6} \\ d_2(x_1) &= e^{-4\left(\frac{x_1}{30}\right)^6} \\ d_3(x_1) &= e^{-4\left(\frac{x_1-40}{30}\right)^6} \end{aligned} \quad (4.27)$$

De acuerdo a estas ecuaciones, los pesos  $h_i(x_1)$  son

$$h_i(x_1) = \frac{d_i(x_1)}{\sum_{j=1}^3 d_j(x_1)}. \quad (4.28)$$



Figura 4.3: *Funciones de membresía del helicóptero*

#### 4.2.4. Diseño del controlador difuso

Con las matrices  $A_i$ ,  $B_i$ , y  $C_i$  del modelo (4.26), (obtenidas como resultado de las linealizaciones), las ganancias de realimentación de estados  $K_i$  se obtuvieron resolviendo las LMIs presentadas el capítulo 2. Para el caso del helicóptero, se resolvieron las siguientes condiciones

1. Control óptimo
2. Rechazo a perturbaciones

Para realizar control óptimo, se consideró la función de costo siguiente

$$J = \int_0^{\infty} \{y^T(t)Hy(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt, \quad (4.29)$$

y se resolvieron las LMIs del teorema 2. Ya que este problema consiste de LMIs, este problema se resolvió simultáneamente a la condición de rechazo a perturbaciones.

Debe mencionarse que en el caso de rechazo a perturbaciones, el modelo de los sistemas considerado fue

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + E_i v(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.30)$$

donde  $v(t)$  es la perturbación. Esto implicó la asignación de valores a las matrices  $E_i$ . La elección de estas matrices se realizó intuitivamente, es decir, se observó que las perturbaciones eran ocasionadas por los rebotes del viento entre la plataforma del sistema y los rotores

del helicóptero. Esto ocasionaba que el helicóptero vibrara y en consecuencia existieran cambios bruscos en las aceleraciones  $\ddot{\theta}$  y  $\ddot{\psi}$ . Siguiendo este pensamiento, las matrices  $E_i$  se eligieron de forma que afectaran directamente las dinámicas de  $x_3$  y  $x_4$ . A saber, las matrices se eligieron

$$E_i = \begin{bmatrix} 10.0 & -10.0 \\ 0 & 0 \\ 200.0 & -200.0 \\ 100.0 & -100.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.31)$$

De los planteamientos anteriores, se obtuvieron ganancias de retroalimentación  $K_i$  con los que se formó el siguiente controlador difuso

$$\begin{aligned} r_1 : & \text{ IF } x_1 = -40^\circ \text{ THEN } u(t) = -K_1 x(t) \\ r_2 : & \text{ IF } x_1 = 0^\circ \text{ THEN } u(t) = -K_2 x(t) \\ r_3 : & \text{ IF } x_1 = 40^\circ \text{ THEN } u(t) = -K_3 x(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

con salida

$$\dot{x} = - \sum_{i=1}^3 h_i(x_1) K_i x(t). \quad (4.33)$$

#### 4.2.5. Anti-windup

Al igual que el modelo del cuadricóptero, el modelo del helicóptero contiene estados integradores ( $x_i$ ). Estos estados generan *windup* en la respuesta del sistema como se explicó en la sección 4.1.5. Para evitarlo, se usó la misma estructura de la figura 4.2. Los valores límite del saturador para el motor frontal fueron  $v_{sat+} = 24[v]$  y  $v_{sat-} = 0[v]$ , y para el motor trasero fueron  $v_{sat+} = -3[v]$  y  $v_{sat-} = -15[v]$ .

### 4.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha presentado la metodología usada durante el diseño de controladores. Con los modelos matemáticos del capítulo 3, se han formado los modelos difusos de Takagi-Sugeno del cuadricóptero y el helicóptero. En el caso del cuadricóptero, el modelo de Takagi-Sugeno fue compuesto por tres modelos de la forma  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ . Por su parte, el modelo de difuso del helicóptero fue formado con modelos de la forma  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + E_i v(t)$  donde  $v(t)$  representa las perturbaciones. Ya que las matrices  $A_i$ ,  $B_i$  y  $E_i$  de los modelos difusos son conocidas, las ganancias de retroalimentación se diseñaron resolviendo las especificaciones de desempeño de control presentadas en la sección 2.3.1. La solución a estas LMIs se realizó con ayuda de LMILAB de Matlab.

Debe observarse que el diseño del controlador del helicóptero fue diferente del cuadricóptero. En el caso del cuadricóptero, fue suficiente acelerar la tasa de decaimiento para obtener buenos resultados durante la operación del controlador. En contraparte, para el helicóptero no fue suficiente acelerar la tasa de decaimiento; la presencia de perturbaciones ocasionaba inestabilidades. En el helicóptero se hizo necesario implementar técnicas robustas a las perturbaciones. El diseño del controlador del helicóptero utilizó control óptimo y una condición de rechazo a perturbaciones. El hecho que el helicóptero fuera más sensible a las perturbaciones que el cuadricóptero, se debe a la mayor simetría que posee el cuadricóptero. Los resultados de los controladores de los sistemas, se presentan en el siguiente capítulo.

# Resultados de controladores

---

En el capítulo 4 se presentaron las ideas generales en torno al desarrollo de los controladores de los sistemas. A partir de tres linealizaciones de los sistemas se formó el modelo de Takagi-Sugeno, y se resolvió el problema de control dando solución a las condiciones de estabilidad y especificaciones de desempeño mencionadas en el capítulo 4. En este capítulo se presentan las linealizaciones que formaron el modelo de Takagi-Sugeno, y las soluciones numéricas de los problemas planteados. Al final de cada sección se presentan los resultados experimentales de los controladores difusos.

## 5.1. Cuadricóptero

El modelo de Takagi-Sugeno del cuadricóptero fue formado por tres linealizaciones locales del sistema:  $\theta = -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ . Las ecuaciones (5.1)-(5.3) presentan los modelos resultantes de cada linealización. La ecuación (5.1) es la linealización en torno a  $\theta = -45^\circ$ , la ecuación (5.2) corresponde a la linealización en  $\theta = 0^\circ$ , y la ecuación (5.3) refiere la linealización en  $\theta = 45^\circ$ .

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2767 & 0 & -0.07246 & 0 & -0.05124 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.03623 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2609 & 0 & -0.05124 & 0 & -0.05435 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.03074 & 0.1394 & -0.03074 & -0.07795 \\ 0.05435 & 0 & -0.05435 & 0 \\ -0.03261 & 0.1095 & -0.03261 & -0.04425 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.03623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.03623 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01812 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05435 & 0 & -0.05435 \\ 0.05435 & 0 & -0.05435 & 0 \\ -0.01087 & 0.01087 & -0.01087 & 0.01087 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = C_1 \\
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2767 & 0 & -0.07246 & 0 & 0.05124 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.03623 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2609 & 0 & 0.05124 & 0 & -0.05435 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_3 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.03074 & 0.07795 & 0.03074 & -0.1394 \\ 0.05435 & 0 & -0.05435 & 0 \\ -0.03261 & -0.04425 & -0.03261 & 0.1095 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = C_1
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Con los modelo anteriores, el modelo de Takagi-Sugeno resultó

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^3 h_i(x_2) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\
y(t) &= C_1 x(t)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Al resolver las especificaciones de desempeño de las ecuaciones (2.20) y (2.22), con la siguiente condición inicial  $x(0)$  y restricción a la entrada  $\mu$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.08 \\ 0.08 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.08 \\ 0.08 \\ 0.08 \end{bmatrix}, \quad \mu = 25 \tag{5.5}$$

las ganancias de retroalimentación resultaron

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 48.24 & 235.8 & -255.8 & 33.55 & 103.2 & -118.9 & -26.5 & -177.9 & 178.9 \\ 225.6 & -33.41 & 221.5 & 90.88 & -8.311 & 104.9 & -188.0 & 11.52 & -167.1 \\ 67.16 & -208.3 & -206.0 & 35.81 & -96.64 & -102.7 & -32.92 & 167.3 & 150.0 \\ -341.0 & 5.983 & 240.3 & -160.2 & 1.719 & 116.7 & 247.5 & -0.9519 & -161.7 \end{bmatrix} \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} -10.95 & 239.2 & -268.3 & -3.675 & 105.3 & -124.6 & 7.686 & -181.2 & 187.1 \\ 293.1 & -28.82 & 218.1 & 128.7 & -7.348 & 107.9 & -230.6 & 8.591 & -160.5 \\ 15.5 & -208.7 & -210.2 & 2.366 & -96.26 & -103.4 & -3.782 & 167.1 & 153.3 \\ -297.6 & -1.598 & 260.4 & -127.4 & -1.659 & 120.1 & 226.7 & 5.51 & -179.8 \end{bmatrix} \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} -72.09 & 247.9 & -239.9 & -41.57 & 108.8 & -113.4 & 42.03 & -191.1 & 163.6 \\ 314.5 & -18.68 & 187.7 & 152.6 & -4.11 & 100.7 & -229.6 & 6.312 & -129.5 \\ -27.84 & -213.1 & -179.8 & -28.09 & -95.55 & -92.77 & 15.23 & 167.7 & 126.0 \\ -214.5 & -16.07 & 231.9 & -82.91 & -9.186 & 105.4 & 172.4 & 17.07 & -160.1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Las matrices  $P$  y  $Q$  resultaron

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} 0.03152 & 0.001985 & 0.00178 & -0.03345 & -0.0001201 & -0.0005086 & 0.02197 & 0.0007719 & 0.000717 \\ 0.001985 & 0.05432 & 0.003843 & -0.0008468 & -0.05985 & -0.002319 & -0.0004774 & 0.03529 & 0.001327 \\ 0.00178 & 0.003843 & 0.02483 & -0.0003928 & -0.002795 & -0.02607 & 0.0009133 & 0.002144 & 0.01781 \\ -0.03345 & -0.0008468 & -0.0003928 & 0.06277 & 0.004651 & 0.002796 & -0.0144 & 0.002344 & 0.001849 \\ -0.0001201 & -0.05985 & -0.002795 & 0.004651 & 0.1202 & 0.007869 & 0.004222 & -0.02218 & 0.002204 \\ -0.0005086 & -0.002319 & -0.02607 & 0.002796 & 0.007869 & 0.04919 & 0.001441 & 0.001305 & -0.01199 \\ 0.02197 & -0.0004774 & 0.0009133 & -0.0144 & 0.004222 & 0.001441 & 0.02 & 0.000378 & 0.001054 \\ 0.0007719 & 0.03529 & 0.002144 & 0.002344 & -0.02218 & 0.001305 & 0.000378 & 0.03131 & 0.001828 \\ 0.000717 & 0.001327 & 0.01781 & 0.001849 & 0.002204 & -0.01199 & 0.001054 & 0.001828 & 0.01653 \end{bmatrix} \\
 Q &= \begin{bmatrix} 0.001428 & -0.0004607 & -0.0004013 & -0.001337 & 0.0008156 & 0.0003031 & 0.0008553 & -0.0003067 & -0.0002352 \\ -0.0004607 & 0.003104 & -0.0003205 & 0.0004501 & -0.002872 & 0.0003202 & -0.0002027 & 0.001853 & -0.0001158 \\ -0.0004013 & -0.0003205 & 0.001038 & 0.0003215 & 0.0003217 & -0.0009472 & -0.000225 & -0.0002392 & 0.0006319 \\ -0.001337 & 0.0004501 & 0.0003215 & 0.003588 & -0.0008574 & -0.0005791 & -0.0002374 & 0.0003432 & 0.0002618 \\ 0.0008156 & -0.002872 & 0.0003217 & -0.0008574 & 0.05455 & -0.0003477 & 0.0005897 & -0.0002034 & 0.0004023 \\ 0.0003031 & 0.0003202 & -0.0009472 & -0.0005791 & -0.0003477 & 0.002163 & 0.0002078 & 0.0002801 & -0.0002077 \\ 0.0008553 & -0.0002027 & -0.000225 & -0.0002374 & 0.0005897 & 0.0002078 & 0.001149 & -3.337 \times 10^{-5} & -3.442 \times 10^{-5} \\ -0.0003067 & 0.001853 & -0.0002392 & 0.0003432 & -0.0002034 & 0.0002801 & -3.337 \times 10^{-5} & 0.002108 & 4.334 \times 10^{-5} \\ -0.0002352 & -0.0001158 & 0.0006319 & 0.0002618 & 0.0004023 & -0.0002077 & -3.442 \times 10^{-5} & 4.334 \times 10^{-5} & 0.0008372 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ambas matrices  $P$  y  $Q$  son positivas definidas. La tasa de decaimiento  $\alpha$  maximizada fue

$$\alpha = 0.9223 \tag{5.8}$$

### 5.1.1. Resultados experimentales

Con las ganancias de retroalimentación de la ecuación (5.6), se implementó el controlador difuso de las ecuaciones (4.13)-(4.14) sobre la planta física. Los resultados se presentan en las figuras 5.1 y 5.2. La figura 5.1 muestra un ejemplo de regulación, y la figura 5.2 muestra una prueba de seguimiento. Durante estas pruebas el periodo de muestreo de los sensores se eligió de  $1[ms]$ , por lo que el valor de  $T_r$  de la ecuación (4.15), referente al algoritmo de anti-windup, se eligió de 0.001.

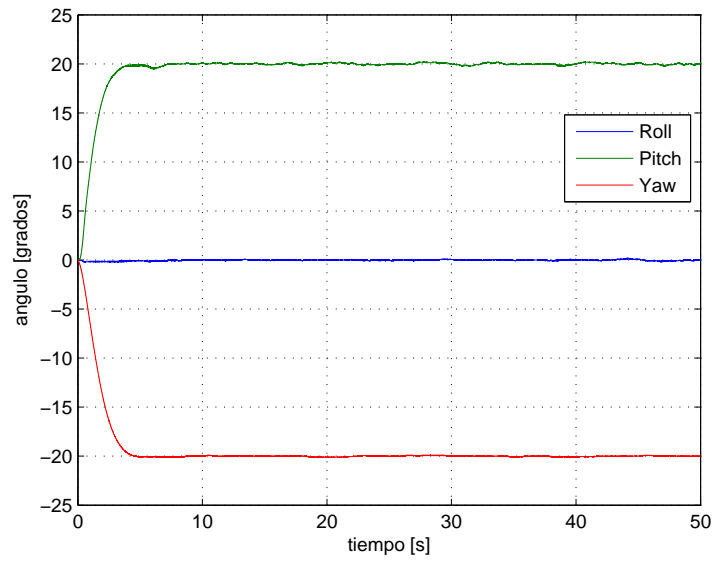


Figura 5.1: Regulación cuadricóptero  $\phi = 0^\circ$ ,  $\theta = 20^\circ$ , y  $\psi = -20^\circ$ .

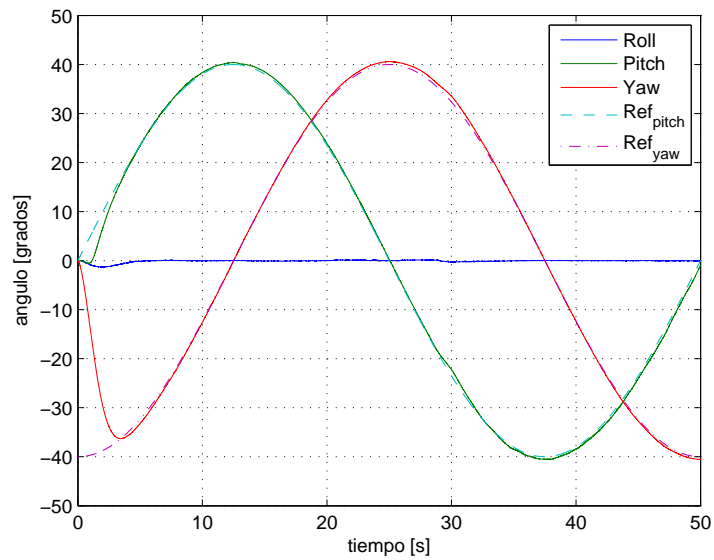


Figura 5.2: Seguimiento cuadricóptero  $\phi = 0^\circ$ ,  $\theta = 40^\circ \sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$ ,  $\psi = 40^\circ \sin\left(\frac{2\pi}{50}t - \frac{\pi}{2}\right)$ .



## 5.2. Helicóptero

Análogamente al cuadricóptero, el modelo de Takagi-Sugeno del helicóptero fue formado por tres linealizaciones en  $\theta = -40^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $40^\circ$ . Las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11) presentan las linealizaciones en  $\theta = -40^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 40^\circ$  respectivamente.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ -18.83 & 0 & -9.275 & 0 & 0 & 0 \\ -2.577 \times 10^{-16} & 0 & 0 & -4.465 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.367 & 0.07898 \\ 0.3079 & 1.011 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.275 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.496 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.367 & 0.07898 \\ 0.241 & 0.7913 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = C_1
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 18.83 & 0 & -9.275 & 0 & 0 & 0 \\ 2.577 \times 10^{-16} & 0 & 0 & -4.465 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.367 & 0.07898 \\ 0.3079 & 1.011 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = C_1
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Con los modelos anteriores, el modelo de Takagi-Sugeno resultó

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^3 h_i(x_1) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) &= C_1 x(t)\end{aligned}\tag{5.12}$$

Al aplicar el teorema 2 junto a la condición de rechazo a perturbaciones (2.24), tomando en cuenta la siguiente condición inicial y las siguientes matrices de perturbación

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad E_1 = E_2 = E_3 = \begin{bmatrix} 10.0 & -10.0 \\ 0 & 0 \\ 200.0 & -200.0 \\ 100.0 & -100.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{5.13}$$

las ganancias de realimentación resultaron

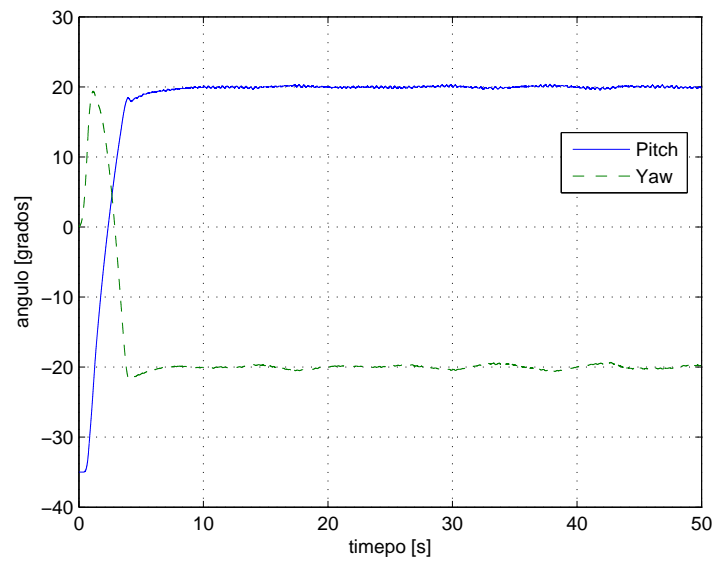
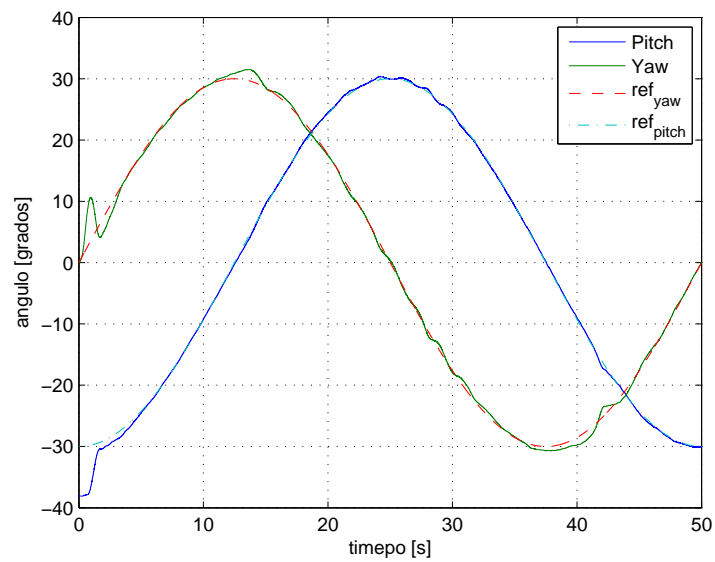
$$\begin{aligned}K_1 &= \begin{bmatrix} 553.3 & 216.7 & 52.75 & 49.09 & -322.7 & -80.89 \\ 196.3 & 146.6 & 19.33 & 31.64 & -87.63 & -87.5 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 534.5 & 186.7 & 50.71 & 42.59 & -320.1 & -59.17 \\ 217.2 & 138.3 & 21.03 & 29.66 & -105.5 & -76.91 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 548.8 & 222.5 & 52.87 & 50.41 & -321.0 & -85.61 \\ 197.6 & 139.8 & 19.15 & 29.99 & -89.56 & -81.97 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.14}$$

Las matrices  $P > 0$  y  $Q > 0$  resultaron

$$\begin{aligned}P &= \begin{bmatrix} 4.761 & -0.05111 & -48.63 & 1.338 & 0.3118 & 0.02938 \\ -0.05111 & 4.543 & 0.489 & -18.83 & -0.0218 & 0.8402 \\ -48.63 & 0.489 & 531.1 & -25.35 & -0.5999 & -0.5058 \\ 1.338 & -18.83 & -25.35 & 93.72 & -0.1616 & -1.785 \\ 0.3118 & -0.0218 & -0.5999 & -0.1616 & 0.3686 & 0.1081 \\ 0.02938 & 0.8402 & -0.5058 & -1.785 & 0.1081 & 0.6108 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} 3.189 & -0.2323 & -34.04 & 0.4898 & 0.05078 & -0.01176 \\ -0.2323 & 1.927 & 3.653 & -9.429 & 0.02371 & 0.256 \\ -34.04 & 3.653 & 367.9 & -13.69 & -0.5073 & 0.1234 \\ 0.4898 & -9.429 & -13.69 & 48.56 & -0.1097 & -1.121 \\ 0.05078 & 0.02371 & -0.5073 & -0.1097 & 0.02459 & -0.01808 \\ -0.01176 & 0.256 & 0.1234 & -1.121 & -0.01808 & 0.08788 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.15}$$

### 5.2.1. Resultados experimentales

Con las ganancias de retroalimentación (5.14), se implementó el controlador difuso de las ecuaciones (4.25)-(4.26) sobre la planta física. Los resultados se muestran en las figuras 5.3, 5.4, y 5.5. La figura 5.3 muestra un ejemplo de regulación, y las figuras 5.4 y 5.5 muestran resultados de seguimiento.

Figura 5.3: Regulación helicóptero  $\theta = 20^\circ$ ,  $\psi = -20^\circ$ Figura 5.4: Seguimiento helicóptero  $\theta = 30^\circ \sin\left(\frac{2\pi}{50}t - \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\psi = 30^\circ \sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$ .

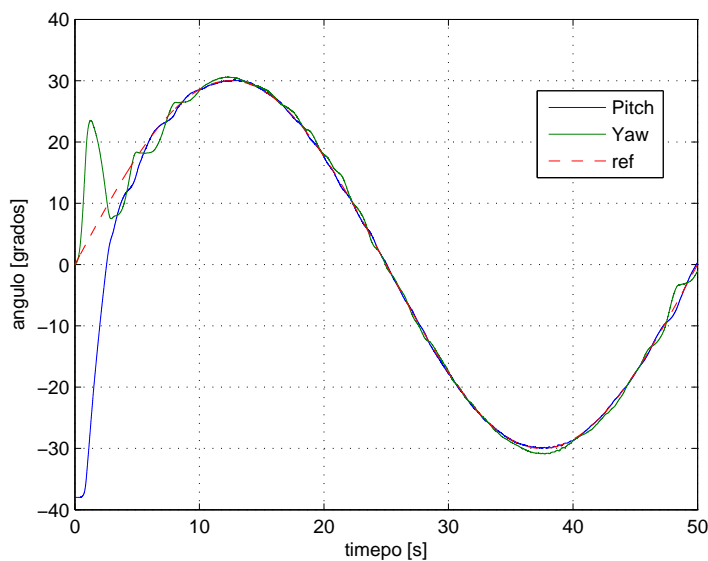


Figura 5.5: Seguimiento helicóptero  $\theta = \psi = 30^\circ \sin \frac{2\pi}{50} t$ .

### 5.3. Conclusiones del capítulo

Este capítulo han resumido los resultados experimentales que se obtuvieron al probar los controladores difusos diseñados en el capítulo 4. Los resultados experimentales presentados en este apartado, reflejan la efectividad del diseño de controladores basados en LMIs. Ambos sistemas son MIMO (*Multi-Input Multi-Output*) y el problema de diseño se ha convertido en la solución numérica de algunas desigualdades matriciales. Este enfoque es diferente del problema de control clásico, en los que se soluciona una ecuación.

Por otro lado, las ganancias de retroalimentación de estados obtenidas en el caso del cuadricóptero (ecuación (5.6)), son bastante semejantes. Este resultado se debe a la simetría en que se realizaron las linealizaciones. En suma, las ganancias del cuadricóptero resultan semejantes por la misma razón. Sin embargo, en las ecuaciones (5.14), puede observarse que las ganancias asociadas a las variables  $x_3$  y  $x_4$  son las de menor magnitud. Esto se debe a que supusimos que las perturbaciones afectaban en mayor grado esas variables (refiérase a la ecuación (4.31)).

En general, los resultados obtenidos con los controladores difusos diseñados son buenos. Las figuras 5.1 y 5.3 muestran que la regulación es bien desempeñada por los controladores difusos. En contraparte, el seguimiento mostrado en las figuras 5.2 y 5.4 no es tan bueno como los resultados de regulación. Este es un resultado esperado ya que el modelo difuso se formó pensando solamente en regulación, recuérdese que las linealizaciones se realizaron en valores fijos del ángulo pitch  $\theta$ .

Con los resultados favorables de este capítulo, el siguiente capítulo analizará el desem-

peño de estos controladores cuando los sistemas de control son implementados sobre una red de comunicación digital.

# Análisis de estabilidad de los sistemas sobre la red de comunicación

---

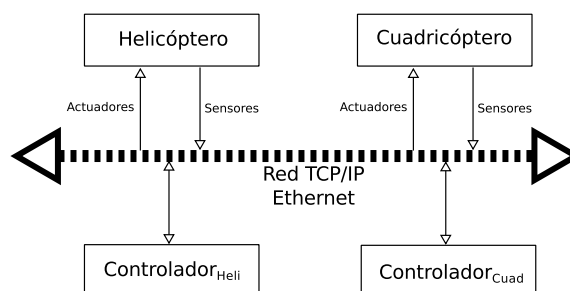
Cuando un sistema de control utiliza una red comunicación digital como medio de transporte de información, la estabilidad del sistema se ve afectada. La red de comunicación induce retardos de tiempo y pérdida de paquetes durante el envío de información. La pérdida de paquetes puede considerarse un retardo de tiempo de mayor duración. De esta forma, si el retardo de tiempo es largo, el sistema de control pierde estabilidad. En este sentido, se puede hablar de un *umbral* que separa la zona de estabilidad del sistema de control. Cuando la duración del retardo cruza el umbral, el sistema de control se inestabilizará. En el estudio de los sistemas de control sobre redes, este umbral se denomina MADB (*Maximum Allowable Delay Bound*).

Este capítulo presenta la estimación teórica y experimental del MADB del cuadricóptero y el helicóptero.

## 6.1. Distribución de los sistemas de control en red

La última parte de la tesis consistió en analizar la estabilidad de los sistemas de control, cuando estos se distribuyen sobre una red de comunicación. Con este fin, el cuadricóptero y el helicóptero se distribuyeron en diferentes nodos de la red de acuerdo a la figura 6.1. En la figura 6.1, se observa que la planta y el controlador de cada sistema se encuentra en un nodo diferente de la red. Así, el flujo de información de los sensores al controlador, y del controlador a los actuadores, utiliza a la red de comunicación como medio de transporte. Recuérdese que cada lazo de control mantiene la estructura de la figura 2.1.

Con la configuración descrita, se midió experimentalmente el MADB de cada sistema. Para esto se incrementó el tráfico en la red gradualmente hasta que la regulación de los sistemas de control se inestabilizaran. Los resultados de estas pruebas se muestran en las secciones siguientes.

Figura 6.1: *Sistemas de control distribuidos sobre la red de comunicación*

## 6.2. MADB del cuadricóptero

Las figuras 6.2, 6.3, y 6.4 muestran el desempeño del cuadricóptero ante el aumento gradual en el tráfico de la red. Estas figuras también ilustran la medición de los retardos inducidos por la red de comunicación. Según se observa en la figura 6.4, el cuadricóptero perdió su estabilidad cuando la duración de los retardos excedió los 30[ms].

Para dar justificación teórica de estos resultados, se usó el teorema 3 y el corolario 4 presentado en [Yue et al., 2004]. El corolario 4 establece que el sistema de control será asintóticamente estable si dada una ganancia de retroalimentación de estados  $K$  y  $\eta > 0$ , se mantiene la desigualdad (2.32). Así, dada una ganancia de retroalimentación de estados  $K_i$  (obtenida en el capítulo 4), se obtuvo una estimación del MADB del sistema lineal  $i$  incrementando  $\eta$  hasta que la solución de la desigualdad (2.32) fuera no factible. Los resultados de esta actividad se muestran en la tabla 6.1.

Tabla 6.1: MADB estimado para el cuadricóptero

Sistema	Modelo lineal	MADB [s]
Cuadricóptero	1	0.0308
	2	0.0719
	3	0.0321

## 6.3. MADB del helicóptero

Análogamente al caso del cuadricóptero, el tráfico en la red de comunicación se aumentó durante la operación del helicóptero y se observó su comportamiento. La respuesta del helicóptero se muestra en las figuras 6.5, 6.6 y 6.7. Según se observa en estas figuras, el comportamiento del helicóptero es más sensible que el del cuadricóptero: la figura 6.7 muestra que la estabilidad del sistema se pierde cuando los retardos de tiempo se encuentran

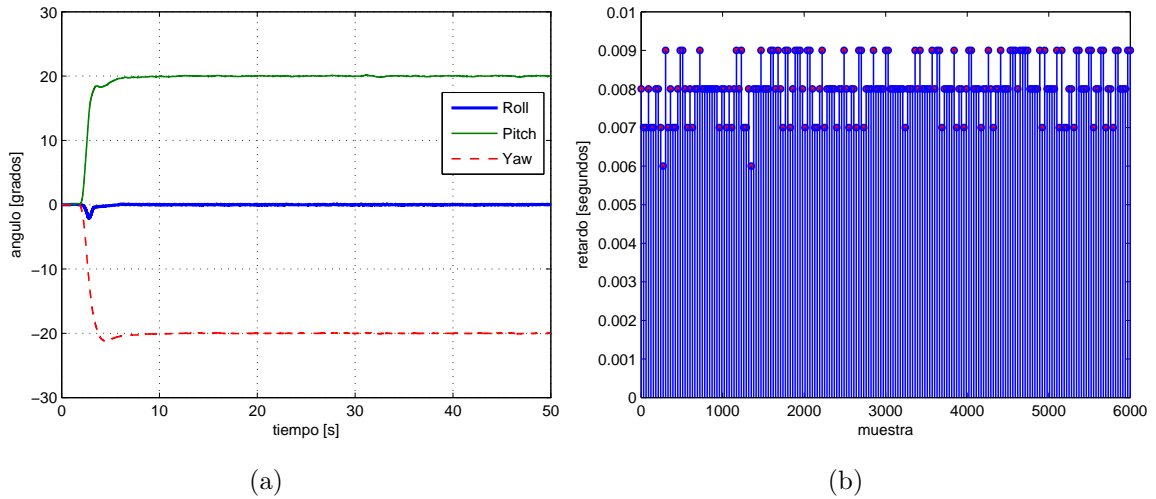


Figura 6.2: *Comportamiento del cuadricóptero ante carga baja en la red: a) Regulación  $\phi = 0^\circ$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\psi = -20^\circ$ . b) Retardos medido por muestra.*

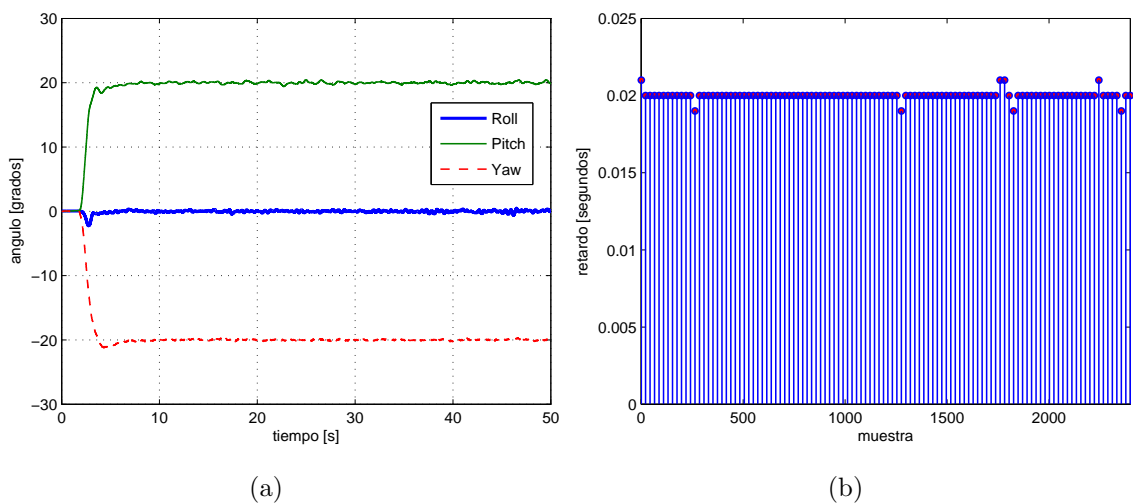


Figura 6.3: *Comportamiento del cuadricóptero ante carga media en la red: a) Regulación  $\phi = 0^\circ$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\psi = -20^\circ$ . b) Retardos medido por muestra.*



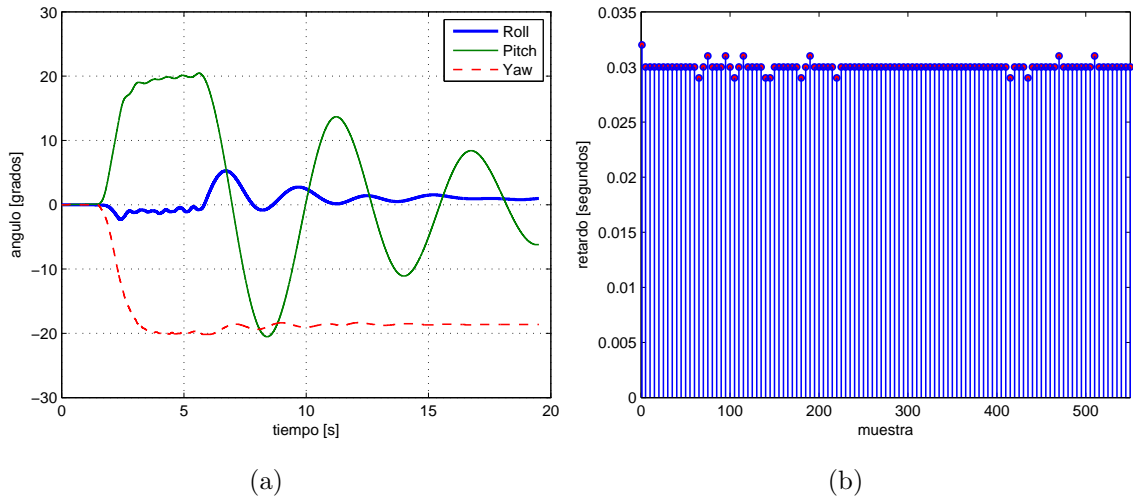


Figura 6.4: *Comportamiento del cuadricóptero ante carga alta en la red: a) Regulación  $\phi = 0^\circ$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\psi = -20^\circ$ . b) Retardos medido por muestra.*

entre los 8 y 10[ms]; incluso se muestra un comportamiento peculiar, los retardos medidos durante estos experimentos se mantienen prácticamente dentro del mismo intervalo, solamente difieren en su distribución.

Los resultados de los experimentos en esta parte, se justificaron nuevamente con el corolario 4. La tabla 6.2 muestra los MADBs resultado de esta actividad.

Tabla 6.2: MADB estimado para el helicóptero

Sistema	Modelo lineal	MADB [s]
Helicóptero	1	0.0064
	2	0.0069
	3	0.0063

## 6.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha explicado que los sistemas en estudio fueron distribuidos sobre una red de comunicación Ethernet TCP/IP, y que se ha analizado su estabilidad ante variaciones de carga en la red. Con el fin de encontrar una estimación del MADB de cada sistema, se han medido los retardos de tiempo inducidos por la red de comunicación ante el incremento gradual de tráfico. Salta a la vista que las justificaciones teóricas de los resultados experimentales se han realizado para cada uno de los modelos lineales que forman el modelo de Takagi-Sugeno, y no para el modelo difuso. Nuestra justificación se construye

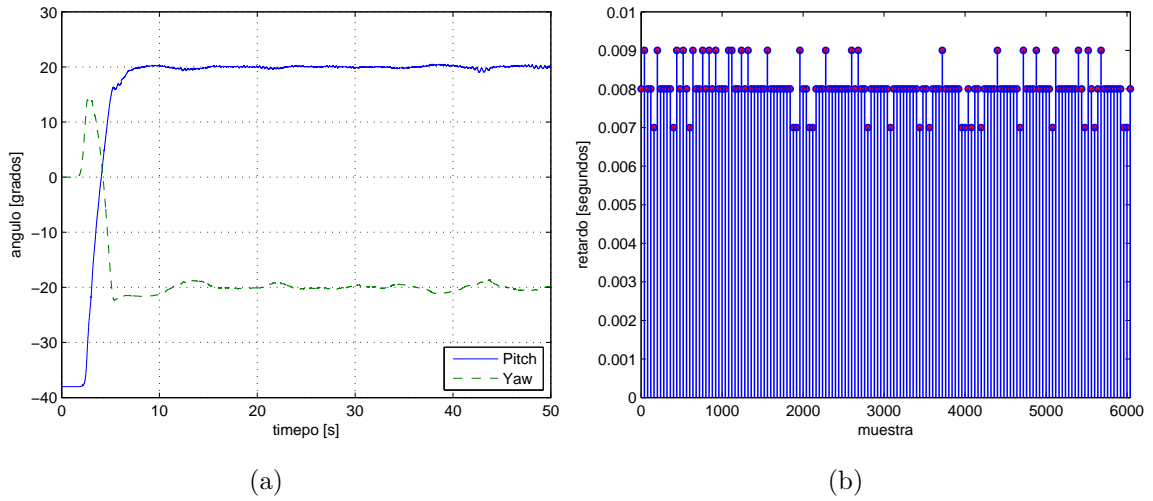


Figura 6.5: Comportamiento del helicóptero ante carga baja en la red: a) Regulación  $\theta = 20^\circ$ ,  $\psi = -20^\circ$ . b) Retardos medido por muestra.

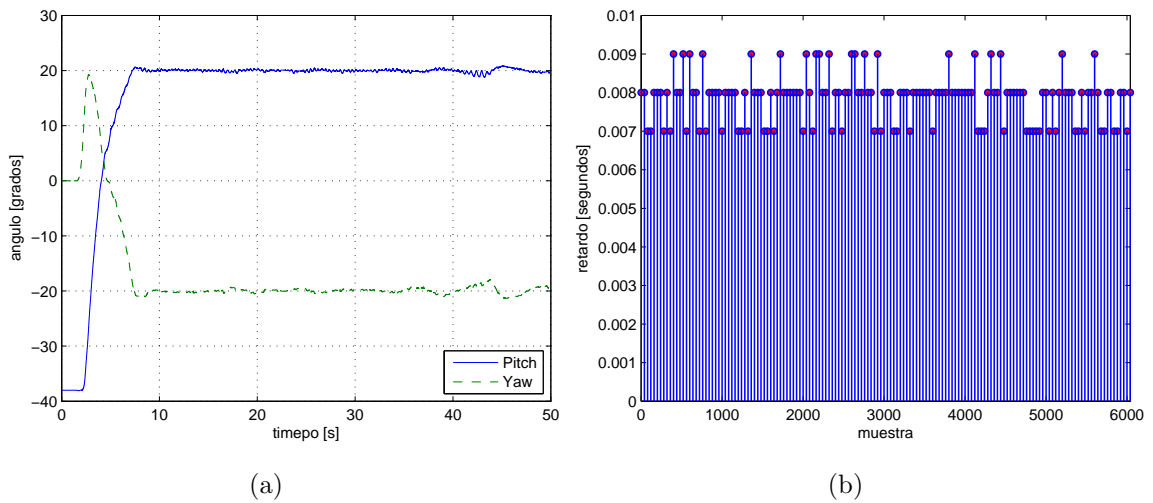


Figura 6.6: Comportamiento del helicóptero ante carga media en la red: a) Regulación  $\theta = 20^\circ$ ,  $\psi = -20^\circ$ . b) Retardos medido por muestra.

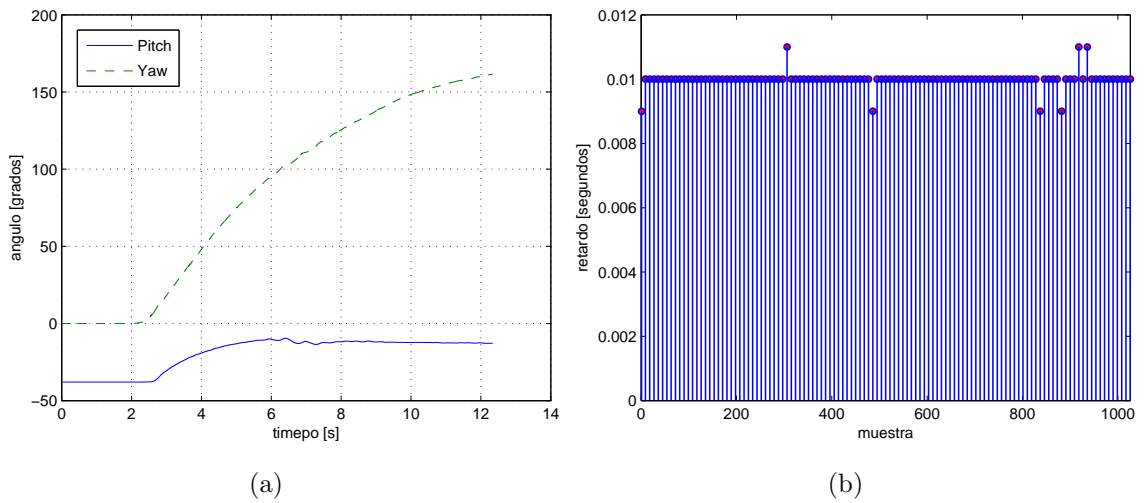


Figura 6.7: Comportamiento del helicóptero ante carga alta en la red: a) Regulación  $\theta = 20^\circ$ ,  $\psi = -20^\circ$ . b) Retardos medido por muestra.

como sigue: de las ecuaciones (2.4) y (2.5), se observa que el modelo difuso de Takagi-Sugeno es una combinación convexa de modelos lineales. Teniendo esto en mente, podemos decir que muy posiblemente, el MADB del modelo difuso de Takagi-Sugeno será el menor MADB de los sistemas que lo componen. De hecho, aunque no se ha abordado teóricamente este argumento, los resultados experimentales lo sugieren. Debido a esto, se ha calculado el MADB para cada uno de los modelos lineales del modelo difuso.

## Conclusiones

---

Durante este trabajo se ha abordado el diseño de controladores difusos a través del modelo de Takagi-Sugeno. Una de las ventajas principales que se obtiene al utilizar este modelo es que las condiciones de estabilidad y las especificaciones de control pueden representarse como LMIs. Ya que la resolución de LMIs puede realizarse con métodos numéricos, la resolución del problema de control resulta sencilla debido a la investigación en optimización convexa y el desarrollo de software especializado. Esto se ha reflejado en el desarrollo de los controladores del cuadricóptero y el helicóptero, donde ambos sistemas son no lineales y de múltiples entradas y salidas (MIMO). La mayor complicación que se tuvo en el desarrollo de sus controladores fue la incertidumbre en los parámetros y el conocimiento de las perturbaciones, debido a esto se utilizaron integradores a la salida de los sistemas. La búsqueda de las ganancias de retroalimentación de estados se ha encontrado fácilmente con ayuda de LMILAB de matlab.

Por otro lado, se ha analizado la estabilidad de los sistemas de control (cuadricóptero y helicóptero) operando sobre una red de comunicación. Para esto se distribuyeron los sistemas de control sobre distintos nodos de la red. Luego se incrementó el tráfico en la red gradualmente y se observó el comportamiento de los sistemas. Las observaciones se trataron de justificar teóricamente con el trabajo de [Yue et al., 2004]. Aunque en [Yue et al., 2004] se presenta un algoritmo para estimar el MADB, lo hace para un sistema lineal invariante en el tiempo, y no para el modelo difuso de Takagi-Sugeno. Sin embargo, ya que el modelo difuso de Takagi-Sugeno consiste de una combinación convexa de modelos lineales, es intuitivo pensar que el MADB de un sistema difuso posiblemente será el menor MADB de los sistemas lineales que forman el modelo de Takagi-Sugeno. Esto lo muestran los resultados experimentales en el capítulo 6, donde el menor MADB del cuadricóptero es de 27.4 [ms] y el sistema se inestabiliza alrededor de los 30 [ms]. Análogamente, para el helicóptero el menor MADB es de 6.3 [ms] y el sistema se inestabiliza a los 8 [ms]. Una característica a resaltar, es que el MADB de los sistemas depende de las ganancias de retroalimentación  $K$ . Debido a esto, es posible robustecer un sistema de control ante retardos de tiempo.

Tareas a futuro relacionadas con este trabajo, pueden desarrollarse en torno al diseño de controladores difusos robustos a los retardos de tiempo inducidos por la red de comunicación.

# Bibliografía

---

- [Amir and Abbass, 2008] Amir, M. and Abbass, V. (2008). Modeling of quadrotor helicopter dynamics. In *Smart Manufacturing Application, 2008. ICSMA 2008. International Conference on*, pages 100–105.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM.
- [Consultiing, 2005a] Consultiing, Q. (2005a). Reference manual 2-DOF Helicopter. *Quanser inc.*
- [Consultiing, 2005b] Consultiing, Q. (2005b). Reference manual 3D Hover system. *Quanser inc.*
- [Dalhoumi et al., 2010] Dalhoumi, L., Djemel, M., and Chtourou, M. (2010). Fuzzy predictive control based on Takagi-Sugeno model for nonlinear systems. In *Systems Signals and Devices (SSD), 2010 7th International Multi-Conference on*, pages 1–7.
- [de Vries and Subbarao, 2010] de Vries, E. and Subbarao, K. (2010). Backstepping based nested multi-loop control laws for a quadrotor. In *Control Automation Robotics Vision (ICARCV), 2010 11th International Conference on*, pages 1911–1916.
- [Fridman, 2010] Fridman, E. (2010). A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46(2):421–427.
- [García Carrillo et al., 2013] García Carrillo, L. R., Lozano, R., Pégard, C., and Dzul López, A. E. (2013). Quad rotorcraft control.
- [Goldstein et al., 2000] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2000). *Classical mechanics*. Addison Wesley.
- [Khalil and Wang, 2011] Khalil, A. and Wang, J. (2011). A new method for estimating the maximum allowable delay in networked control of bounded nonlinear systems. In *Automation and Computing (ICAC), 2011 17th International Conference on*, pages 80–85.

- 
- [Li et al., 2006] Li, Q., Yi, G., Wang, C., Wu, L., and Ma, C. (2006). LMI-based stability analysis of networked control systems with large time-varying delays. In *Mechatronics and Automation, Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on*, pages 713–717.
- [Lunze and Grüne, 2014] Lunze, J. and Grüne, L. (2014). Introduction to networked control systems. In Lunze, J., editor, *Control Theory of Digitally Networked Dynamic Systems*, pages 1–30. Springer International Publishing.
- [Mahmoud, 2014] Mahmoud, M. S. (2014). *Control and Estimation Methods over Communication Networks*. Springer.
- [Millán et al., 2008] Millán, P., Jurado, I., Vivas, C., and Rubio, F. R. (2008). Networked predictive control of systems with data dropouts. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 2704–2709. IEEE.
- [Murray, 2006] Murray, R. M. (2006). An introduction to networked control systems. *California, USA: California Institute of Technology*. Available on: <http://www.cds.caltech.edu/~murray/wiki/images/3/34/Ncsbookintroduction.pdf>, 20.
- [Nelles, 2001] Nelles, O. (2001). *Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models*. Springer Science & Business Media.
- [Nesterov, 2004] Nesterov, Y. (2004). *Introductory lectures on convex optimization*, volume 87. Springer Science & Business Media.
- [Peng et al., 2011] Peng, C., Han, Q.-L., and Yue, D. (2011). A discrete event-triggered communication scheme for networked t-s fuzzy systems. In *IECON 2011 - 37th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pages 2282–2287.
- [Peng and Yang, 2010] Peng, C. and Yang, T. C. (2010). Communication-delay-distribution-dependent networked control for a class of t-s fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 18(2):326–335.
- [Peng and Yue, 2006] Peng, C. and Yue, D. (2006). Maximum allowable equivalent delay bound of networked control systems. In *Intelligent Control and Automation, 2006. WCICA 2006. The Sixth World Congress on*, volume 1, pages 4547–4550.
- [Ramos and Peres, 2002] Ramos, D. and Peres, P. (2002). An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(4):675–678.
- [Shousong and Qixin, 2003] Shousong, H. and Qixin, Z. (2003). Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay. *Automatica*, 39(11):1877–1884.
- [Souza, 2013] Souza, F. O. (2013). Brief paper: further improvement in stability criteria for linear systems with interval time-varying delay. *Control Theory & Applications, IET*, 7(3):440–446.
-

- [Sun et al., 2010] Sun, Z., Li, H., and Pan, F. (2010). A GPC control method and stability analysis of the NCS. In *Computational Aspects of Social Networks (CASoN), 2010 International Conference on*, pages 711–713. IEEE.
- [Tanaka and Sugeno, 1992] Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2):135–156.
- [Tanaka and Wang, 2004] Tanaka, K. and Wang, H. O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- [Vishnupriyan et al., 2014] Vishnupriyan, J., Manoharan, P., and Ramalakshmi, A. (2014). Uncertainty modeling of nonlinear 2-DOF helicopter model. In *Computer Communication and Informatics (ICCCI), 2014 International Conference on*, pages 1–6.
- [Wang and Liu, 2008] Wang, F.-Y. and Liu, D. (2008). *Networked control systems*. Springer.
- [Yue et al., 2004] Yue, D., Han, Q.-L., and Peng, C. (2004). State feedback controller design of networked control systems. In *Control Applications, 2004. Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 242–247. IEEE.
- [Zaeri et al., 2012] Zaeri, A., Mohd-Noor, S., Isa, M., Taip, F., and Marnani, A. (2012). Disturbance rejection for a 2-DOF nonlinear helicopter model by using MIMO fuzzy sliding mode control with boundary layer. In *Intelligent Systems, Modelling and Simulation (ISMS), 2012 Third International Conference on*, pages 411–416.
- [Zhang et al., 2008] Zhang, Y., Zhong, Q., and Wei, L. (2008). Stability of networked control systems with communication constraints. In *Control and Decision Conference, 2008. CCDC 2008. Chinese*, pages 335–339. IEEE.
- [Zhu et al., 2012] Zhu, X.-L., Chen, B., Yue, D., and Wang, Y. (2012). An improved input delay approach to stabilization of fuzzy systems under variable sampling. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 20(2):330–341.