



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Control robustecido basado en LQ singular y
controladores por modos deslizantes aplicado en un
carro-péndulo**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Ingeniero Eléctrico-Electrónico

PRESENTA:
Jesús Mendoza Avila

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Leonid Fridman

México, D.F. junio 2015

*A mis padres,
porque en este trabajo hay más esfuerzo suyo que mio.
A mi tia Sara,
por ser parte de esta aventura.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a quienes han sido importantes en mi vida y que de alguna forma contribuyeron para que pudiera lograr este objetivo, a todos ustedes les brindo este pequeño detalle.

A mi mamá Argelia por todo el amor que me has dado y por todo el esfuerzo que has realizado para hacer de mí una buena persona.

A mi papá Vicente por siempre estar al pendiente de mí y por haberme inculcado los valores más importantes en mi formación profesional: la responsabilidad y el trabajo.

A mi tía Sara por quereme como a un hijo y por que tu fortaleza y tu alegría me contagian y me ayudan a salir adelante.

A mi tío Gabriel por el cariño y el ejemplo que me has dado.

A mi hermano Vicente por que se siempre estarás cuando te necesite.

A mis amigos porque hacer mi vida más entretenida.

A los compañeros del Lab. de Modos Deslizantes, en especial a Ismael, por haberme apoyado en la realización de este trabajo.

Al Dr. Leonid Fridman por invitarme a formar parte de su familia científica.

Finalmente, agradezco el apoyo recibido de los proyectos de investigación PAPIIT IN112915 y PAPIIT IN113613.

Índice general

Agradecimientos	V
1. Introducción	9
1.1. Motivación y estado del arte	9
1.1.1. Control por Modos Deslizantes	10
1.1.2. Sistema de pruebas en laboratorio carro-péndulo	11
1.2. Objetivo de la tesis	12
1.3. Contribuciones	12
1.4. Organización de la tesis	13
2. Marco teórico	15
2.1. Linealización entorno a un punto de equilibrio	15
2.2. Estabilidad de puntos de equilibrio	16
2.3. Análisis de controlabilidad y observabilidad para un sistema lineal	17
2.4. Forma canónica de controlador para sistemas SISO	18
2.5. Control por Modos Deslizantes	19
2.5.1. Diseño convencional	19
2.5.2. Modos deslizantes de orden superior	20
2.5.3. Precisión de controladores por modos deslizantes	23
2.6. Control óptimo	23
2.7. Diseño de variables de deslizamiento de orden superior basado en LQ singular	24
2.7.1. Diseño de variables de deslizamiento basado en la solu- ción del SOSP	25
2.7.2. Toolbox para MATLAB: función SSLQ	28
2.8. Diseño de controladores de orden arbitrario	30
2.8.1. Controlador de convergencia exponencial	30
2.8.2. Controladores de convergencia en tiempo finito	30
2.9. Robustecimiento de controladores de orden arbitrario	31
3. Sistema carro-péndulo	33
3.1. Plataforma física	33
3.1.1. Descripción del sistema	34

3.1.2.	<i>Swing up</i> y control estabilizante	35
3.1.3.	Software	36
3.1.4.	Hardware	37
3.2.	Modelo matemático	38
3.2.1.	Modelo no lineal	38
3.2.2.	Puntos de equilibrio	40
3.2.3.	Linealización	41
3.2.4.	Análisis de estabilidad	42
3.2.5.	Controlabilidad y observabilidad	44
3.2.6.	Forma canónica controlable	45
4.	Diseño de variables de deslizamiento de orden arbitrario para el sistema carro-péndulo	47
5.	Implementación de controladores en el sistema carro-péndulo	51
6.	Resultados	55
6.1.	Simulaciones	55
6.2.	Experimentos	63
7.	Conclusiones	73
A.	Diagramas de Simulink y archivos de Matlab	75
A.1.	Diagrama de simulación	75
A.2.	Diagrama de experimento	76
A.3.	Archivos de Matlab	77
	Bibliografía	78

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y estado del arte

Algunos de los problemas que se presentan en la implementación de controladores en sistemas físicos son la incertidumbre paramétrica y las dinámicas parásitas o no modeladas. Es aquí donde se hace necesario el uso de controladores robustos que tengan un buen desempeño aún en la presencia de este tipo de perturbaciones e incertidumbres paramétricas.

Dicho problema ha sido resuelto para sistemas de grado relativo uno utilizando técnicas de control como Control de Alta Ganancia [Khalil, 2002], Control por Modos Deslizantes [Utkin, 1992], entre otras. Los sistemas de grado relativo superior presentan un reto mayor para los sistemas de control, sin embargo, ya existen técnicas de control que pueden tratar con este tipo de sistemas como por ejemplo: control H_∞ , control óptimo, entre otros [Ogata, 2010].

La técnica de control por Modos Deslizantes ofrece una compensación exacta de las incertidumbres del sistema, además de convergencia en tiempo finito. Los Modos Deslizantes de Orden Superior [Levant, 2003] tienen la ventaja de que cuando el orden del controlador coincide con el grado relativo del sistema se obtiene la máxima precisión posible [Levant, 1993].

Ahora, el problema está en la calidad de los sensores y actuadores del sistema que no permiten explotar las propiedades teóricas de Modos Deslizantes en la implementación de los controladores [Levant y Fridman, 2010].

El propósito de esta tesis es probar experimentalmente, en un sistema de grado relativo superior este reto de la precisión del control contra la precisión máxima que te permiten alcanzar los sensores y actuadores.

Para los experimentos se utilizará un sistema carro-péndulo, que es de grado relativo cuatro y los controladores robustecidos [Castillo et al., 2014] con los cuales podemos controlar sistemas de grado relativo arbitrario y tienen la ventaja de ofrecer las propiedades de Modos Deslizantes y generar señales de control continuas.

1.1.1. Control por Modos Deslizantes

Control bajo condiciones de incertidumbre es uno de los principales temas de la teoría de control moderna y una buena opción para tratar con este tipo de sistemas es el control por Modos Deslizantes, esta técnica de control robusto ofrece importantes ventajas como [Shtessel et al., 2014]:

- Compensación de perturbaciones acotadas y acopladas al canal de control.
- Dinámicas de orden reducido independiente de las perturbaciones y del control.
- Convergencia en tiempo finito de los estados, a la superficie de deslizamiento cuando el grado relativo del sistema mayor que orden del controlador, y al origen cuando el grado relativo del sistema es igual al orden del controlador.

El diseño de control por Modos Deslizantes consta de dos pasos, el diseño de variables de deslizamiento y el diseño de controladores, que lleven las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento.

En la tabla (1.1) se pueden ver algunos de los controladores por modos deslizantes disponibles hasta el momento.

Orden	Algoritmo	Señal de control	Convergencia	Información
1	Convencional	Discontinua	Tiempo finito	x, σ
2	Super-Twisting	Continua	Tiempo finito	x, σ
2	Twisting	Discontinua	Tiempo finito	$x, \sigma, \dot{\sigma}$
3	Control Integral Discontinuo	Continua	Tiempo finito	$x, \sigma, \dot{\sigma}$
3	Super-Twisting de tercer orden	Continua	Tiempo finito	$x, \sigma, \dot{\sigma}$
r	Quasi-continuo	Discontinua	Tiempo finito	$x, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(n)}$

Cuadro 1.1: Tabla de controladores por modos deslizantes.

En la tabla (1.1) se pueden observar que existen controladores que producen una señal de control continua y otros una señal de control discontinua, además, se observa que mientras mayor es el orden del controlador, la información requerida para su implementación es mayor.

Existen ventajas cuando el orden del controlador coincide con el grado relativo del sistema como son: esabilización en tiempo finito de los estados del sistema SISO, no es necesario el diseño de una superficie de deslizamiento y se tiene mayor precisión en la presencia de no idealidades (frecuencia de muestreo finita, ruido de medición, entre otros.) [Castillo y Fridman, 2013].

Hasta el momento los algoritmos existentes de control por modos deslizantes de orden mayor que dos, producen una señal de control discontinua y tienen la desventaja de que provocan el fenómeno de *chattering* que es causado oscilaciones de alta frecuencia, teóricamente infinita, de la señal de control discontinua y que se hace presente como vibraciones de alta frecuencia en los estados de la planta [Levant, 2010]. Sin embargo, teóricamente ya han sido diseñados algoritmos de robustecimiento de controladores continuos de convergencia en tiempo finito, los cuales permiten heredar las propiedades de los Modos Deslizantes de Orden Superior. De probar experimentalmente que dichos controladores robustecidos pueden ser implementados en sistemas físicos se tendrán nuevos controladores continuos, de convergencia en tiempo finito y robustos ante perturbaciones, acopladas al canal de control, e incertidumbre paramétrica.

1.1.2. Sistema de pruebas en laboratorio carro-péndulo

En el Laboratorio de Modos Deslizantes se cuenta con un sistema de pruebas carro-péndulo de la marca INTECO. Dicho sistema es controlado desde MATLAB, donde se puede programar los algoritmos de control que se desean probar, y a través de una tarjeta de adquisición de datos es posible la comunicación con el sistema, es decir, recibir información de los estados del sistema y mandar la señal de control necesaria para estabilizarlo. El sistema carro-péndulo puede ilustrar varios problemas complejos y no triviales de la teoría de control como son [INTECO, 2008]:

- Cuatro variables de estado y una variable de control.
- La dinámica es descrita por una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden o por cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Existen un número infinito de puntos de equilibrio para el sistema.
- Existen puntos de equilibrio inestables.
- El sistema es no lineal.
- El control es acotado.
- El carro-péndulo es un sistema subactuado de cuarto orden.
- La longitud del riel es limitada y la posición del carro es acotada.

1.2. Objetivo de la tesis

Controlar un sistema mecánico subactuado carro-péndulo por medio del diseño de superficies de deslizamiento de orden arbitrario basado en el criterio LQ Singular y controladores de convergencia en tiempo finito robustecidos por medio de algoritmos por modos deslizantes de orden superior.

Analizar la precisión de controladores por modos deslizantes de diferentes órdenes implementados en el sistema carro-péndulo y establecer un compromiso entre la precisión del controlador y la máxima precisión que los sensores y actuadores pueden ofrecer.

1.3. Contribuciones

Con los resultados obtenidos se tiene una prueba experimental de los controladores de convergencia en tiempo finito robustecidos y como se aprecia en la tabla (1.2), ahora existe una herramienta más dentro de los controladores por modos deslizantes para sistemas de grado relativo arbitrario que produce una señal de control continua.

Grado relativo del sistema	Controlador discontinuo	Controlador continuo
1	Convencional	Super-Twisting
2	Twisting	Control Integral Discontinuo, Super-Twisting de tercer orden
r	Quasi-continuo	Controlador de convergencia en tiempo finito robustecido

Cuadro 1.2: Tabla de controladores por modos deslizantes completa.

Después de probar los controladores de orden uno, dos, tres y cuatro en el sistema carro-péndulo, se verifica que la precisión alcanzada con un controlador de orden dos no es superada por controladores de mayor orden, y esto se debe principalmente a que los sensores y actuadores del sistema no dan la información necesaria para que los controladores de orden tres y cuatro mejoren al desempeño alcanzando por el controlador de orden dos.

1.4. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se presentan todas las herramientas teóricas necesarias para cumplir con los objetivos planteados. Se presenta teoría acerca del modelado y análisis de sistemas físicos, teoría del control por Modos Deslizantes, que incluye el diseño convencional, así como controladores de orden superior. Además, preliminares para el diseño de variables de deslizamiento. Las dos partes principales de la teoría presentada en este capítulo son el diseño de superficies basado en el enfoque LQ singular y el robustecimiento de controladores via Super-Twisting. En este capítulo también se presentan controladores de orden arbitrario.

En el Capítulo 3, se hace el modelado, linealización, análisis y se lleva a la forma canónica controlable, el sistema carro-péndulo que se encuentra en el Laboratorio de Modos deslizantes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Dicho sistema se ocupará para realizar las pruebas de las variables de deslizamiento diseñadas y su respectivo controlador.

En el Capítulo 4, se diseñan variables de deslizamiento para el sistema carro-péndulo por el método basado en LQ singular y de forma automática por la función SSLQ para MATLAB [Castillo y Fridman, 2013]. Se hace el diseño de variables de deslizamiento para el sistema carro-péndulo, de grado relativo uno, dos y tres.

En el Capítulo 5 se aplica el algoritmo de robustecimiento a los controladores de orden arbitrario, presentados en el capítulo 2, para tener controladores robustos por modos deslizantes, continuos, de orden dos, tres y cuatro.

Finalmente, en el Capítulo 6, se presentan los resultados, tanto de simulaciones como de experimentos, de los controladores implementados en el sistema carro-péndulo con su respectiva variable de deslizamiento. Una vez probados todos los controladores se analiza su precisión para establecer cual es el algoritmo más adecuado para la estabilización de este sistema.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Linealización entorno a un punto de equilibrio

Si un sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y las señales involucradas son señales pequeñas, es posible aproximar el sistema no lineal por un sistema lineal [Ogata, 2010].

Para linealizar un sistema se emplea el método de linealización por series de Taylor, el cual se basa en la estabilidad local de un sistema no lineal. Este método es la formalización de la intuición de que un sistema no lineal debería comportarse igual a su aproximación lineal en un pequeño rango de operación [Slotine et al., 1991].

Sea un sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), u(t)), \\ y &= h(x(t), u(t)),\end{aligned}$$

donde f y h son continuamente diferenciables y $f(0, 0) = 0$ se puede decir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\frac{df}{dx}\right)_{(x=0, u=0)} x + \left(\frac{df}{du}\right)_{(x=0, u=0)} u + f_{t.o.s.}(x, u), \\ y &= \left(\frac{dh}{dx}\right)_{(x=0, u=0)} x + \left(\frac{dh}{du}\right)_{(x=0, u=0)} u + h_{t.o.s.}(x, u),\end{aligned}$$

donde $f_{t.o.s.}$ y $h_{t.o.s.}$ son los términos de orden superior del desarrollo en serie de Taylor de $f(x(t), u(t))$ y $h(x(t), u(t))$ respectivamente. Se denota por A a la matriz jacobiana de f con respecto a x , por B a la matriz jacobiana de f con respecto a u , C representa la matriz jacobiana de h con respecto a x y D la matriz jacobiana de h con respecto a u , todas evaluadas en $x = 0, u = 0$:

$$A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{(x=0, u=0)}, \quad (2.1)$$

$$B = \left. \frac{df}{du} \right|_{(x=0, u=0)}, \quad (2.2)$$

$$C = \left. \frac{dh}{dx} \right|_{(x=0, u=0)}, \quad (2.3)$$

$$D = \left. \frac{dh}{du} \right|_{(x=0, u=0)}, \quad (2.4)$$

el sistema lineal aproximado del sistema original no lineal es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2. Estabilidad de puntos de equilibrio

Método indirecto de Lyapunov

Se puede entender que un punto de equilibrio es estable si las trayectorias del sistema que empiezan en una vecindad del punto de equilibrio permanecen alrededor del dicho punto, de otro modo, este es inestable. Un punto de equilibrio es asintóticamente estable si todas las trayectorias que inician en una vecindad del punto de equilibrio no solo permanecen cerca del punto de equilibrio sino que además tienden al equilibrio a medida que el tiempo tiende a infinito [Khalil, 2002].

Lo anterior refiere al concepto de estabilidad de puntos de equilibrio o estabilidad en el sentido de Lyapunov. Para determinar la estabilidad de un sistema no lineal existe el método indirecto de Lyapunov.

Dicho método se basa en el análisis de estabilidad de sistemas lineales y es la justificación fundamental del uso de técnicas de control lineal en la práctica, es decir, el diseño de un control lineal garantiza la estabilidad local del sistema físico no lineal original.

Teorema de Lyapunov para estabilidad (Método Indirecto de Lyapunov) [Khalil, 2002]:

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x),$$

donde $f : D \rightarrow R^n$ es una función continuamente diferenciable y $D \subset R^n$ es un entorno del origen. Sea

$$A = \left. \frac{df}{dx}(x) \right|_{(x=0)},$$

entonces:

1. El origen es asintóticamente estable si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.
2. El origen es inestable si uno o más valores propios de A tiene parte real positiva.
3. Si existen uno o más valores propios con parte real cero y todos los demás con parte real negativa, no se puede decir nada acerca de la estabilidad del origen.

Los eigenvalores de una matriz son las raíces de su polinomio característico $\det(\lambda I - A) = 0$.

Teorema de inestabilidad de Chetaev

Teorema de Chetaev [Khalil, 2002].

Sea $X = 0$ un punto de equilibrio. Sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que $V(0) = 0$ y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 con $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña. Definimos el conjunto $U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}$ con $B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq r\}$ y $r > 0$, y supongamos que $\dot{V}(x) > 0$ en U . Entonces $X = 0$ es inestable.

2.3. Análisis de controlabilidad y observabilidad para un sistema lineal

El análisis de controlabilidad/observabilidad de un sistema nos dice cuantos y cuales de los estados del sistema pueden ser controlados/observados.

Controlabilidad

Se dice que un sistema es de estado controlable en $t = t_0$ si es posible construir una señal de control no acotada que transfiera un estado inicial en cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todo estado es controlable se dice que el sistema es de estado controlable completo. La matriz de controlabilidad para un sistema lineal (2.5) se define como:

$$C = [B \ AB \ A^2 \ \dots \ A^{n-1}B],$$

Un sistema es de estado completamente controlable si, y solo si, la matriz de controlabilidad es de rango completo [Ogata, 2010].

Observabilidad

Se dice que un sistema es completamente observable si se puede determinar todo estado inicial $x(0)$ a partir de la observación de la salida $y(t)$ en un intervalo de tiempo finito. El sistema es, por tanto, completamente observable si toda transición de estado puede afectar a todo elemento del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil para resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de las medibles en el espacio de tiempo mínimo posible.

La matriz de observabilidad para un sistema lineal (2.5) se define como:

$$O = [C' \ A' C' \ A'^2 C' \ \dots \ A'^{n-1} C'],$$

Un sistema es completamente observable si, y solo si, la matriz de observabilidad es de rango completo [Ogata, 2010].

2.4. Forma canónica de controlador para sistemas SISO

La siguiente representación en el espacio de estados es llamada una forma canónica controlable [Ogata, 2010]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Para llevar un sistema a la forma canónica controlable se necesita una transformación de similitud.

Dicha transformación consiste en asociar a una matriz \mathbf{A} , de $n \times n$ con elementos en \mathbf{R}^n , a una base ortonormal $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$, entonces $\bar{\mathbf{A}}$ es una representación de \mathbf{A} con respecto a la base ortonormal.

Sea el sistema (2.5), donde el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable, una transformación de similitud que puede llevar al sistema a la forma controlable puede ser construida con la matriz de controlabilidad del sistema, se define:

$$Q^{-1} = [B \ AB \ A^2 \ \dots \ A^{n-1} B],$$

además, se define el vector \mathbf{b} como la n -ésima columna de Q y se construye la matriz P como

$$P = [\mathbf{b} \ \mathbf{b}A \ \dots \ \mathbf{b}A^{n-1}]$$

y $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz no singular, tal que $\bar{x} = Px$ entonces las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$\bar{A} = PAP^{-1} \quad \bar{B} = PB \quad \bar{C} = CP^{-1} \quad \bar{D} = D, \quad (2.7)$$

se dice que son algebraicamente equivalentes a (2.5) y $\bar{x} = Px$ es llamada una transformación de similitud [Chen, 1995].

2.5. Control por Modos Deslizantes

El enfoque de control por modos deslizantes (SMC por sus siglas en inglés) es una de las principales opciones cuando uno se enfrenta a incertidumbre paramétrica y dinámicas no modeladas. Dicho enfoque está basado en mantener exactamente las trayectorias del sistema en una restricción, elegida adecuadamente, por medio de un control de conmutación de alta frecuencia. Esto expone las principales características de los modos deslizantes: insensibilidad ante incertidumbres externas e internas, máxima precisión y convergencia en tiempo finito. Por otra parte, el control de conmutación de alta frecuencia provoca el llamado efecto *chattering*, el cual es exhibido por vibraciones de alta frecuencia en la planta controlada y puede ser peligroso en la implementación [Levant, 2003].

2.5.1. Diseño convencional

El diseño convencional de controladores por modos deslizantes (primer orden) consiste en dos pasos:

- El diseño de la variable de deslizamiento de grado relativo uno.
- El diseño de un control por modos deslizantes convencional que force a las trayectorias del sistema a alcanzar la superficie de deslizamiento en tiempo finito [Utkin, 1992].

Dado un sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x) + u + \phi(x, t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde x_i son los estados del sistema, $f(x)$ es la dinamica conocida del sistema, u es una entrada del control y $\phi(x, t)$ representa las perturbaciones e incertidumbres del sistema.

La superficie de deslizamiento para (2.8) puede ser escrita como:

$$\sigma = x_n + cx_{n-1,1} = 0,$$

donde $x_{n-1,1} = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ y c es un vector de ganancias.

Una manera de elegir un conjunto deslizante de dimensión $(n - 1)$ es usando el índice de desempeño Lineal Cuadratico (LQ) [Utkin, 1992] y otra forma de elegirlo es por el método de colocación de polos [Ackermann y Utkin, 1998].

El diseño convencional de SMC para (2.8) esta dado por

$$u = u_{neq} + v,$$

donde $u_{neq} = -f(x)$ es el control nominal equivalente y

$$v = -k \cdot \text{sign}(\sigma), \quad (2.9)$$

el controlador que lleva las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$, donde

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma > 0 \\ -1 & \text{si } \sigma < 0 \end{cases},$$

y

$$\text{sign}(0) \in [-1, 1].$$

La ganancia k de (2.9) está definida de forma que

$$k = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

donde $L = |\phi(x, t)|$ es diseñada para compensar la perturbación acotada $\phi(x, t)$ y $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ determina el tiempo que toma al sistema alcanzar la superficie de deslizamiento [Shtessel et al., 2014].

2.5.2. Modos deslizantes de orden superior

La idea principal de SMC es elegir adecuadamente una variable de deslizamiento y mantenerla en cero. Si se supone una variable de deslizamiento σ en cuya r -ésima derivada temporal aparece por primera vez el control, se dice que σ es de grado relativo r . Para poder llevar la variable de deslizamiento a cero es necesario que $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma_{r-1} = 0$, y para esto se requiere de un controlador de orden r [Castillo, 2013].

Para el diseño de superficies de deslizamiento de orden superior se tienen los métodos de diseño, basado en LQ singular [Castillo y Fridman, 2013] y por colocación de polos [Hernández et al., 2013].

Los controladores por modos deslizantes de orden superior (HOSMC por sus siglas en inglés) aseguran estabilización en tiempo finito de los estados de un sistema controlable SISO, aún en la presencia de perturbaciones acotadas y acopladas al canal de control.

Cuando el orden del controlador por modos deslizantes y el grado relativo del sistema coinciden, no es necesario el diseño de una superficie de deslizamiento. Además, HOSMC provee la máxima precisión asintótica posible en la presencia de no idealidades (frecuencia de muestreo finita, ruido de medición, etc.) [Levant, 2007].

Existen HOSMC (Super-twisting, Control Integral Discontinuo, Super-Twisting de tercer orden, etc.), que generan señales de control continuas, estos tienen la ventaja de reducir el fenómeno del *chattering*, y esto evita daños a la planta.

Algoritmos de modos deslizantes de orden superior

Se presentan algunos algoritmos de HOSM.

- Algoritmo Super-Twisting (STA)

Éste es un algoritmo de segundo orden que genera una señal de control continua, por lo que se reduce el efecto *chattering*, y puede llevar variables de deslizamiento, de grado relativo uno, a cero en tiempo finito. Además, STA puede compensar exactamente perturbaciones Lipschitz, es decir, $|\dot{\phi}(x, t)| < C$.

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + w, \\ \dot{w} &= -k_2 \text{sign}(\sigma), \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $k_1 = 1.5\sqrt{C}$ y $k_2 = 1.1C$ [Levant, 1993].

- Algoritmo Twisting

Es un controlador discontinuo de segundo orden que lleva las trayectorias del sistema a una superficie de deslizamiento de grado relativo dos. Este controlador es capaz de rechazar perturbaciones acotadas, es decir, $|\phi(x, t)| < C$.

$$u = -k_1 \text{sign}(\sigma) - k_2 \text{sign}(\dot{\sigma}), \tag{2.11}$$

donde $k_1 > k_2 > 0$ [Levant, 1993].

- Control Integral Discontinuo

Éste controlador produce una señal de control continua y está diseñado para que variables de deslizamiento de grado relativo dos convergan a cero, en tiempo finito, aún en la presencia de perturbaciones con primera derivada temporal acotada $|\dot{\phi}(x, t)| < C$.

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |\sigma|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\sigma) - k_2 |\dot{\sigma}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\dot{\sigma}) + z, \\ \dot{z} &= -k_3 \text{sign}(\sigma), \end{aligned} \quad (2.12)$$

Las ganancias k_1 , k_2 y k_3 deben ser diseñadas adecuadamente para cumplir con la tarea de control [Zamora et al., 2013].

- Algoritmo Super-Twisting de tercer orden

Como su nombre lo dice es un algoritmo de tercer orden, que genera una señal de control continua, y puede llevar a cero variables de deslizamiento, de grado relativo dos, en tiempo finito. Es insensible ante perturbaciones con primera derivada temporal acotada, es decir, $|\dot{\phi}(x, t)| < C$.

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |\phi|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\phi) + L, \\ \dot{L} &= -k_3 \text{sign}(\phi), \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde $\phi = \dot{\sigma} + k_2 |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma)$ y k_1 , k_2 y k_3 , son ganancias diseñadas apropiadamente para cumplir con la tarea de control [Kamal et al., 2014].

- Controlador de orden superior Quasi-continuo

Éste controlador, de orden arbitrario, es capaz de llevar a cero, en tiempo finito, variables de deslizamiento de grado relativo arbitrario. Los controladores Quasi-continuos tienen la propiedad de producir una señal de control continua fuera del modo deslizante, es decir, en $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{r-1} \neq 0$ y discontinua en el modo deslizante. Es insensible ante perturbaciones acotadas, $|\phi(x, t)| < C$.

El controlador Quasi-continuo para los tres primeros ordenes se define como:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha_1 \text{sign}(\sigma), \\ u_2 &= -\alpha_2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) \right), \\ u_3 &= -\alpha_3 \left[\left| \ddot{\sigma} + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma) \right) \right| \right]^{-1} \\ &\quad \left[\ddot{\sigma} + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde α_r es la ganancia de controlador que debe ser diseñada adecuadamente para cumplir con la tarea de control [Levant, 2005].

2.5.3. Precisión de controladores por modos deslizantes

En [Levant, 1993] y [Levant y Fridman, 2010] se presentan trabajos acerca de la precisión de los controladores por modos deslizantes con base en: el tiempo de muestreo y la constante de tiempo del actuador, respectivamente, y dependiendo en ambos casos del orden del controlador.

En [Levant, 1993] se propone lo siguiente:

Sea $l = \lceil r \rceil$ el máximo número entero que no excede r . Si la l -ésima derivada de la variable de deslizamiento $\sigma(t, x(t, \epsilon))$ es uniformemente acotada por ϵ , para la parte de estado estacionario de $x(t, \epsilon)$, entonces existe una constante positiva C_1, C_2, \dots, C_{l-1} , tal que para el estado estacionario cumpla las siguientes desigualdades

$$|\sigma| \leq C_0 \tau^l, \quad |\dot{\sigma}| \leq C_1 \tau^{l-1}, \quad |\ddot{\sigma}| \leq C_2 \tau^{l-2}, \dots, \quad |\sigma^{l-1}| \leq C_{l-1} \tau.$$

2.6. Control óptimo

El método de diseño de control óptimo calcula de un forma sistemática la matriz de ganancias para el control por retroalimentación de estados lineal.

Problema del controlador cuadrático óptimo

Dado el sistema (2.5), donde las matrices A y B son constantes y además el par (A, B) es controlable.

El problema del regulador óptimo consiste en determinar la matriz K , del vector de control óptimo

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.15)$$

tal que se minimice el índice de desempeño

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u(t)^T Ru(t)) dt, \quad (2.16)$$

donde las matrices constantes Q y R , simétrica positiva semidefinida y simétrica positiva definida, respectivamente. Dichas matrices determinan la importancia

que se le da a cada uno de los estados en el cálculo del control. Si la matriz de ganancias K se calcula de tal forma que (2.16) sea mínimo, entonces (2.15) es una ley de control óptima [Ogata, 2010].

Solución del problema del controlador cuadrático óptimo

Definimos el índice de desempeño óptimo, en un tiempo inicial t_0 y con una condición inicial $x(t_0)$:

$$J = x^T P x, \quad (2.17)$$

donde P es la solución de la ecuación algebraica de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (2.18)$$

Entonces la ley de control óptima (2.15) está dada por:

$$u(t) = -R^{-1} B P x(t), \quad (2.19)$$

donde $R^{-1} B P = K$ es la matriz de ganancias óptima [Ogata, 2010].

2.7. Diseño de variables de deslizamiento de orden superior basado en LQ singular

Uno de los métodos más populares para el diseño de variables de deslizamiento esta basado en el problema de estabilización óptima LQ singular [Jacobson y Speyer, 1971],[Gabasov y Kirillova,] (SOSP por sus siglas en inglés). La extensión de SOSP para un índice de singularidad arbitrario permite unificar el diseño de variables de deslizamiento de grado relativo arbitrario y la elección del correspondiente HOSMC [Castillo y Fridman, 2013].

Planteamiento del SOSP

Se considera el sistema perturbado SISO, lineal e invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B(u(t) + \phi(x, t)), \\ x(0) &= x_0, \quad \|x_0\| \leq L, \quad L \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^n$ es la matriz de entradas, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}$ es una entrada de control escalar, y $\phi(x, t) \in \mathbb{R}$ es una perturbación acoplada al canal de control y acotada por una constante real positiva $|\phi(x, t)| \leq F \in \mathbb{R}^+$, que puede representar perturbaciones externas y dinámicas acotadas no modeladas del sistema. Las condiciones iniciales del

sistema deben estar en un conjunto compacto definido por L . Suponemos el par (A,B) controlable. Para el diseño de la variable de deslizamiento se toma el sistema nominal (2.5) y la función de costo

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T(t) Q x(t) dt \quad (2.21)$$

donde $Q \in R^{n \times n}$ es simétrica y positiva semidefinida. El criterio (2.21) es singular con respecto a la entrada de control $u(t)$ y es llamada función de costo con control libre de costo [Castillo, 2013],[Castillo y Fridman, 2013].

2.7.1. Diseño de variables de deslizamiento basado en la solución del SOSP

En [Castillo, 2013] y [Castillo y Fridman, 2013] se presenta un método de diseño de variables de deslizamiento basado en la solución al problema de estabilización óptima singular. El algoritmo de diseño consta de los siguientes pasos:

1. Transformación, a la forma canónica controlable del sistema (2.5) y de (2.21) por medio de la transformación de similitud definida en la sección 2.4.

De esta forma obtenemos un sistema como (2.6) donde las matrices \bar{A} y \bar{B} tienen la forma:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde a_n, \dots, a_1 son los coeficientes del polinomio característico.

La matriz de ponderación Q de los estados del índice de desempeño necesita ser transformada para mantener la ponderación a los estados del sistema (2.6):

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} \quad (2.22)$$

2. Definición del orden de singularidad del índice de desempeño mediante un análisis de la forma de la matriz de ponderación \bar{Q} donde se busca el escalar \bar{Q}_{22} .

Es importante remarcar que en el diseño convencional de controladores por Modos Deslizantes mencionado en la sección 2.5.1, se hacen particiones a \bar{Q} de la siguiente forma:

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & \tilde{Q}_{22} \end{pmatrix} \text{ con } \tilde{Q}_{11} \in R^{(n-1) \times (n-1)}, \tilde{Q}_{22} > 0. \quad (2.23)$$

El orden de la singularidad es el número $i=k+1$, donde k es el número de columnas cero de la matriz de ponderación \bar{Q} tales que $\bar{Q}_{22} > 0$, $\bar{Q}_{22} \in R$.

3. Definición de particiones sobre la matriz de ponderación \bar{Q} y sobre el sistema transformado.

El diseño de superficies de orden superior parte del supuesto que al transformar la matriz Q con (2.22) y hacer las particiones (2.23), el escalar $\bar{Q}_{22} = 0$. Si $\bar{Q}_{22} = 0$, debido a las propiedades de simetría y positividad semidefinida, \bar{Q} , todos los elementos \bar{Q}_{12} y \bar{Q}_{21} son cero. Por lo tanto \bar{Q} solo puede tener una forma:

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$\bar{Q}_{11} \in R^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$ es una matriz simétrica positiva semidefinida, $\bar{Q}_{22} > 0$, $\bar{Q}_{22} \in R$.

Después de hacer las particiones a \bar{Q} , es necesario hacer una partición a las matrices del sistema (2.6) de las mismas dimensiones de (2.24).

Entonces el vector de estados de (2.6) se divide en tres subconjuntos de variables de estado $z = [\bar{z}_1^T \bar{z}_2^T \bar{z}_3^T]^T$ donde \bar{z}_1 representa las variables de estado que formarán la dinámica reducida de modos deslizantes, \bar{z}_2 un control virtual y \bar{z}_3 el resto de las variables de estado

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= [z_1 \cdots z_{n-i}]^T, \\ \bar{z}_2 &= z_{n-i+1}, \\ \bar{z}_3 &= [z_{n-i+2} \cdots z_n]^T. \end{aligned} \quad (2.25)$$

El sistema se representa de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} u,$$

debido a que las matrices \bar{A} y \bar{B} están en la forma canónica controlable, el subsistema \bar{z}_1 tiene la forma:

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\bar{z}_2, \quad (2.26)$$

donde \bar{A}_{11} tiene las mismas dimensiones que \bar{Q}_{11} y \bar{A}_{12} es una matriz columna con las mismas filas que \bar{Q}_{11} , y las particiones \bar{A}_{11} y \bar{A}_{12} tienen la forma canónica de controlador:

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

4. Diseño de la variable de deslizamiento mediante el diseño de un control estabilizante para el subsistema \bar{z}_1 mediante un índice de desempeño no singular de orden reducido y la ecuación algebraica de Riccati.

Después de las particiones, de la matriz del sistema A y la matriz de ponderación Q, el índice de desempeño singular con respecto a $u(t)$ (2.21), también ha sido transformado a un índice de desempeño regular

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\bar{z}_1^T(t) \hat{Q} \bar{z}_1(t) + v^T(t) \hat{R} v(t)) dt, \quad (2.28)$$

donde

$$v(t) = \bar{z}_2(t) + \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1(t), \quad (2.29)$$

es una variable utilizada para eliminar términos cruzados de $\bar{z}_1(t)$ y $\bar{z}_2(t)$ que aparecen en (2.21) debido a las particiones del sistema y la matriz de ponderación Q. $\hat{Q} = \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T$ es la matriz de ponderación de los estados del subsistema \bar{z}_1 y $\hat{R} = \bar{Q}_{22}$ la matriz de ponderación del control virtual $v(t)$. Debido al cambio de variable el sistema (2.26) es:

$$\dot{\bar{z}}_1 = \hat{A} \bar{z}_1 + \hat{B} v, \quad (2.30)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{Q}_{12}^T \in R^{(n-i) \times (n-i)}, \\ \hat{B} &= \bar{A}_{12} \in R^{n-i}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

El sistema (2.5) y el índice de desempeño singular (2.21) han sido transformados, de un SOSP, en un problema de control óptimo regular para el subsistema (2.30) y el índice de desempeño regular (2.28), que para sistemas lineales invariantes en el tiempo, puede ser resuelto como se explica en la sección 2.6. La ecuación de Riccati esta dada por:

$$\hat{A}^T P + P \hat{A} - P \hat{B} \hat{R}^{-1} \hat{B}^T P + \hat{Q} = 0, \quad (2.32)$$

donde P es la única solución positiva definida de (2.32) si y solo si el par (\hat{A}, \bar{D}) es observable, con \bar{D} una matriz tal que $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$.

Al sustituir P de (2.32) en la ecuación (2.19) y con el cambio de variable (2.29) podemos construir una ley de control óptimo estabilizante, con respecto a (2.28), para el subsistema (2.30)

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= -K\bar{z}_1, \\ &= -(\hat{R})^{-1}(\hat{B}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1, \\ &= -(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Entonces, la variable de deslizamiento de grado relativo $r \geq 1$ puede ser diseñada de la siguiente manera

$$\sigma = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1.\tag{2.34}$$

El orden de singularidad del índice de desempeño es igual al grado relativo de la variable de deslizamiento diseñada.

2.7.2. Toolbox para MATLAB: función SSLQ

En [Castillo y Fridman, 2013] se presenta la función SSLQ, para MATLAB, que permite automatizar el método de diseño de variables de deslizamiento basado en LQ singular para sistemas perturbados SISO (2.20) con un índice de desempeño (2.21).

Sintaxis

$$[T, SS, QC, Ueqn, Algorithm] = SSLQ(A, B, Qb, AlphaGain)\tag{2.35}$$

Descripción

La función SSLQ aplica la metodología de diseño de superficies LQ singular y selección de controlador en cinco pasos. Cada paso es ejecutado por una subfunción específica que puede ser usada independientemente:

1. *TransCC*: Transformación del sistema a forma canónica controlable, y transformación del índice de desempeño.
2. *OrderSingular*: Análisis de la matriz de ponderación \bar{Q} para encontrar el Orden de Singularidad i del índice de desempeño.
3. *PartK*: Diseña un control virtual óptimo para el sistema de orden reducido z_1 de orden $(n - i)$ a través de la solución de la ecuación algebraica de Riccati.
4. *Surfaces*: Diseño de la superficie de deslizamiento de grado relativo i , usando el control virtual óptimo diseñado.

5. *SLQCL*: Diseño de control nominal equivalente y la selección del orden del HOSMC.

Argumentos

- A - Matriz de estados del sistema LTI perturbado original.
- B - Matriz de entradas del sistema LTI perturbado original.
- Qb - Es la matriz de ponderación transformada \bar{Q} . En la práctica la matriz Q es dada a priori, y transformada de la misma manera que el sistema a través de $\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1}$. En la teoría Q es manipulada para obtener los resultados de desempeño deseados para el sistema completo. Aquí, en la teoría de diseño de superficies LQ singular, es mejor manipular y ajustar la matriz \bar{Q} directamente para manejar el orden de singularidad, y por lo tanto el grado relativo de la superficie diseñada. Esta configuración no puede ser encontrada fácilmente ajustando la matriz Q.
- AlphaGain - Es la ganancia del controlador Quasi-continuo. Debe satisfacer la condición $AlphaGain > F$, donde $|f| \leq F$.

Salidas

- T - Matriz de transformación, no singular, a forma canónica controlable $z = Tx$.
- SS - Matriz de tamaño $(i-1) \times n$, donde i es el índice de singularidad que contiene a la superficie de deslizamiento y a sus $i-1$ derivadas temporales.

$$[\sigma \dot{\sigma} \dots \sigma^{(i-1)}]^T = SSz$$

- QC - Variable cadena de caracteres que contiene el algoritmo Quasi-continuo de orden i . La superficie de deslizamiento y sus derivadas temporales $[\sigma \dot{\sigma} \dots \sigma^{(i-1)}]^T$ son denotadas como [s,sd,...,sddd...d].
- Ueqn - matriz de tamaño $(1 \times n)$ que contiene los términos lineales del control nominal equivalente.

$$ueqn = Ueqnz$$

- Algorithm - Variable cadena de caracteres que contiene todo el algoritmo en código .m.

2.8. Diseño de controladores de orden arbitrario

Los controladores de orden arbitrario pueden estabilizar sistemas de cualquier orden sin la necesidad de diseñar una variable de deslizamiento y esto puede mejorar la precisión del sistema en lazo cerrado para llegar al punto de operación deseado. Además, en el caso de los controladores de convergencia en tiempo finito se asegura que los estados del sistema lleguen a cero en un tiempo finito.

En la literatura existen controladores de orden arbitrario, cada uno con sus ventajas y desventajas, por ejemplo tenemos el controlador Quasi-continuo [Levant, 2005], que es un controlador insensible ante cierto tipo de perturbaciones y asegura convergencia en tiempo finito de los estados del sistema, pero tiene el problema de que cuando se alcanza el modo deslizante el controlador genera una señal de control discontinua lo que provoca el efecto *chattering*. A continuación se presentan algunos controladores de orden arbitrario que producen una señal de control continua, por lo que se reduce el fenómeno de *chattering*, pero no compensan exactamente las perturbaciones.

2.8.1. Controlador de convergencia exponencial

El control LQR es diseñado a partir de la solución al problema del controlador cuadrático óptimo que se presentó en la sección 2.6. Dadas las matrices de ponderación, Q de los estados, y R de la entrada de control, se puede diseñar una ley de control óptima:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.36)$$

donde K es la matriz de ganancias dada por (2.19).

2.8.2. Controladores de convergencia en tiempo finito

Considerese el controlador de Hong [Hong et al., 2005] de orden $r \leq 4$ definido de la siguiente forma:

$$u_1 = -l_1 \|\sigma_1\|^{\beta_0} \text{sign}(\sigma_1) - u_0 \left| \frac{\alpha_1}{\beta_0} \text{sign}(\sigma_1) \right|^{\beta_0} \text{sign}(\sigma_1) - u_0 \quad (2.37)$$

$$u_2 = -l_2 \|\sigma_2\|^{\beta_1} \text{sign}(\sigma_2) - u_1 \left| \frac{\alpha_2}{\beta_1} \text{sign}(\sigma_2) \right|^{\beta_1} \text{sign}(\sigma_2) - u_1 \quad (2.38)$$

$$u_3 = -l_3 \|\sigma_3\|^{\beta_2} \text{sign}(\sigma_3) - u_2 \left| \frac{\alpha_3}{\beta_2} \text{sign}(\sigma_3) \right|^{\beta_2} \text{sign}(\sigma_3) - u_2 \quad (2.39)$$

$$u_4 = -l_4 \|\sigma_4\|^{\beta_3} \text{sign}(\sigma_4) - u_3 \left| \frac{\alpha_4}{\beta_3} \text{sign}(\sigma_4) \right|^{\beta_3} \text{sign}(\sigma_4) - u_3 \quad (2.40)$$

donde σ es la variable de deslizamiento, l_1 , l_2 , l_3 y l_4 son las ganancias del controlador que deben ser ajustadas de forma adecuada para cumplir con la tarea de control, $k = \frac{p}{q} - 1 < 0$ (p y q enteros impares mayores que cero), y

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1, \dots, \alpha_i = \alpha_{i-1} + k, & \quad \alpha_i > -k > 0 & \quad i = 1, \dots, n \\ \beta_0 = \alpha_2 & \quad (\beta_i + 1)r_{i+1} = (\beta_{i-1} + 1)r_i > 0 & \quad i = 1, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

2.9. Robustecimiento de controladores de orden arbitrario

En el diseño de controladores es necesario tomar en cuenta las perturbaciones, incertidumbre y dinámicas no modeladas, de tal forma que el controlador sea capaz de contrarestar sus efectos. Una forma de hacer esto es diseñar un controlador que estabilice al sistema en su forma nominal (sin tomar en cuenta el efecto de las perturbaciones) y después aplicar un método de robustecimiento, por ejemplo rediseño de Lyapunov, tal que el controlador final pueda estabilizar al sistema con las mismas propiedades de convergencia del sistema en lazo cerrado nominal, pero en presencia de perturbaciones [Khalil, 2002].

En [Castillo et al., 2014] se propone un método de robustecimiento de controladores de orden arbitrario mediante la integración del algoritmo Super-Twisting. Este permite el rechazo de perturbaciones Lipschitz en el tiempo respetando las propiedades de convergencia del control nominal. La principal ventaja de este tipo de robustecimiento es que la señal de control robustecida es continua lo cual reduce significativamente el efecto chattering.

Se considera el sistema dinámico de orden arbitrario dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)(u + \phi(t)), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ es el vector de estados, $u \in R$ es la entrada de control, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones suaves de los estados que representan la dinámica nominal y conocida, además $0 < k_m \leq g(x) \leq k_M$, $\phi(t)$ es una función Lipschitz, continua, que actúa persistentemente y que representa las perturbaciones e incertidumbres actuando sobre el sistema y que están acopladas al canal de control.

Si para un sistema nominal ($\phi(t) = 0$) existe un controlador $u = u_0(x)$ tal que el origen del sistema en lazo cerrado es estable, entonces es posible diseñar un variable de deslizamiento y un controlador, tal que un sistema perturbado se comporte de forma robusta con respecto a perturbaciones, con derivada temporal acotada, conservando todas las propiedades de estabilidad del sistema nominal en lazo cerrado [Castillo et al., 2014].

Se define la variable de deslizamiento como:

$$\sigma(x(t), u_0(x(t))) = x_n(t) - \int_0^t (f(x(\tau)) + g(x(\tau))u_0(x(\tau))) d\tau$$

donde $x(t)$ es una trayectoria del sistema nominal. Cuando $\sigma(x(t), u_0(x(t))) = 0$ el sistema se comporta de manera nominal, aún en la presencia de perturbaciones.

Ahora es necesario diseñar un controlador que haga $\sigma(x(t), u_0(x(t))) = 0$ en tiempo finito.

Si se aplica el siguiente control

$$u = u_0 + v$$

Donde v es una entrada adicional de control, la dinámica de la superficie queda:

$$\dot{\sigma} = g(x)(v + \phi(t)),$$

puesto que la superficie diseñada es de grado relativo uno, se puede usar el STA como entrada de control v .

Finalmete la ley de control total está dada por:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + v \\ v &= -k_1 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + w \\ \dot{w} &= -k_2 \text{sign}(\sigma) \\ \sigma &= x_n(t) - \int_0^t (f(x(\tau)) + g(x(\tau))u_0(x(\tau)))d\tau \end{aligned} \tag{2.42}$$

Esto nos garantiza que el sistema perturbado en lazo cerrado, con el control $u = u_0 + v$, tendrá un comportamiento igual al sistema en lazo cerrado nominal, con el control u_0 , aún en la presencia de perturbaciones Lipschitz y acopladas al canal de control.

Capítulo 3

Sistema carro-péndulo

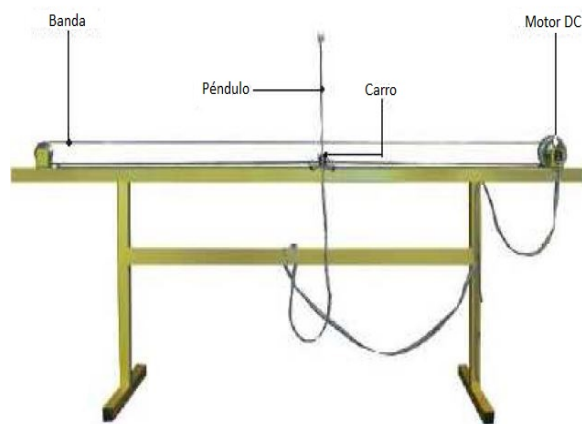


Figura 3.1: Foto del sistema carro-péndulo [INTECO, 2008].

3.1. Plataforma física

La información que se presenta en la sección 3.1 acerca del sistema carro-péndulo fue tomada del Manual de usuario [INTECO, 2008].

El sistema carro-péndulo consiste en:

- PC equipada con la tarjeta de adquisición de datos RTDAC4/PCI.
- Unidad mecánica carro-péndulo.
- Interfaz de potencia.
- Software de control.

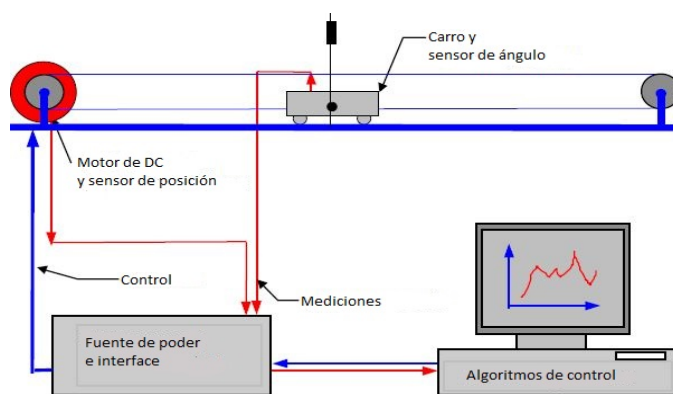


Figura 3.2: Sistema de control del carro-péndulo [INTECO, 2008].

3.1.1. Descripción del sistema

La configuración carro-péndulo consiste en un poste montado sobre un carro de tal manera que el poste puede girar libremente en el plano vertical. Para columpiar y balancear el poste, el carro es empujado hacia atrás y hacia adelante sobre un riel de dos metros de longitud.

El sistema es subactuado porque un sólo actuador maneja los dos grados de libertad del sistema, de tal forma que la única manera de mover el péndulo es mediante las fuerzas aplicadas al carro. Dichas fuerzas son generadas por el motor de CD y son transferidas al carro por una banda. Las señales de control son calculadas en la PC y mandadas al motor de CD en forma de voltaje PWM. Para medir la posición del carro y el ángulo del poste se utilizan dos codificadores incrementales ópticos. El primero está instalado en el eje del péndulo y el segundo en el eje del motor de CD.

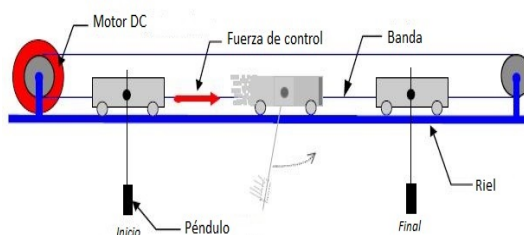


Figura 3.3: Configuración del sistema carro-péndulo [INTECO, 2008].

El sistema carro-péndulo es de tipo abierto, es decir, el usuario puede diseñar y resolver cualquier problema de control de péndulo sobre la base del presente hardware y software.

Generalmente el problema de control sobre el carro-péndulo consiste en llevar al sistema a algunos de los dos puntos de equilibrio mediante la aplicación de fuerzas acotadas para que el péndulo gire y llegue a una vecindad de dichos puntos. Preferentemente esto se debe hacer lo más rápido posible, con pocas oscilaciones, y sin dejar que el ángulo y la velocidad crezcan demasiado. Una vez que se alcanza la posición deseada los estados se deben mantener ahí, aún en la presencia de perturbaciones. Para dicha tarea se debe implementar un sistema de control en lazo cerrado.

3.1.2. *Swing up* y control estabilizante

La señal de control aplicada al sistema carro-péndulo tiene dos partes, la primera consiste en el uso de un algoritmo *Swing up*, que columpia el péndulo para llevarlo a su posición mas alta. Una vez ahí, el control conmuta a otro controlador que estabiliza al sistema. Solo uno de los dos algoritmos de control trabajan en cada zona de control como se muestra en la figura (3.4).

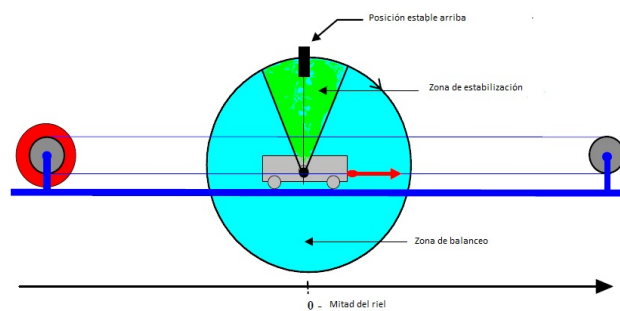


Figura 3.4: Zona de balanceo y estabilización del sistema de control del carro-péndulo [INTECO, 2008].

El algoritmo swing up está basado en la leyes de la energía. Este algoritmo dirige hacia arriba el péndulo incrementando su energía total. Existe una compensación entre dos tareas: balancear el péndulo hacia la posición de arriba y centrar el carro en el riel. Debido a la presencia de perturbaciones e incertidumbre paramétrica, es más importante un comportamiento robusto que el carácter óptimo de la estrategia de control. La rutina característica del control es su condición *Bang-Bang* que balancea el péndulo hasta alcanzar en la parte superior el punto de equilibrio inestable.

Al lograr un acercamiento suave al punto de equilibrio, una rutina llamada *Soft landing arbiter* verifica si la energía cinética del péndulo menos la energía perdida debido a la fricción es suficiente para levantar el centro de gravedad

del péndulo hasta su posición más alta. Si la condición se cumple entonces la señal de control se va a cero y la rutina *Bang-Bang* finaliza.

Una vez que el sistema ha entrado en la zona de estabilización el sistema puede ser tratado como lineal. El control conmuta a un algoritmo de estabilización. Debido a la longitud limitada del riel una rutina llamada *Length control* es introducida para forzar el centrado del carro y prevenir que choque con los bordes del riel.

3.1.3. Software

El sistema carro-péndulo es controlado desde MATLAB y SIMULINK. El software incluye controladores de software de dispositivos que son compatibles con *RTWT* (Real Time Windows Target) *MathWorks Toolbox* (herramientas de tiempo real en MATLAB).

El usuario tiene un rápido acceso a las funciones básicas del sistema carro-péndulo desde la ventana de control del péndulo. Esto incluye: identificación, controladores de software, modelos de simulación y ejemplos de aplicaciones.

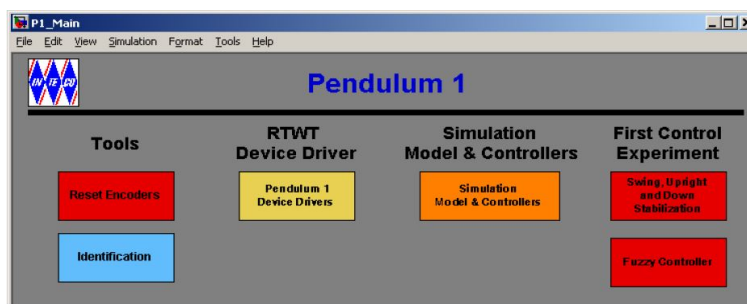


Figura 3.5: Ventana de control del péndulo [INTECO, 2008].

El controlador de software principal, que sirve para el control y medición de señales, está colocado en la columna *RTWE Device Driver*. Dicho controlador de software conecta el ambiente de MATLAB para tiempo real y la tarjeta de adquisición de datos RT-DAC/PCI.

El sistema es controlado en tiempo real. El término tiempo real se refiere a la operación de una computadora en la cual los programas para el procesamiento de datos externos son leídos permanentemente, tal que sus resultados estarán disponibles en periodos predeterminados de tiempo. El arribo de los datos puede ser aleatoriamente distribuido o ser ya determinado dependiendo de las diferentes aplicaciones.

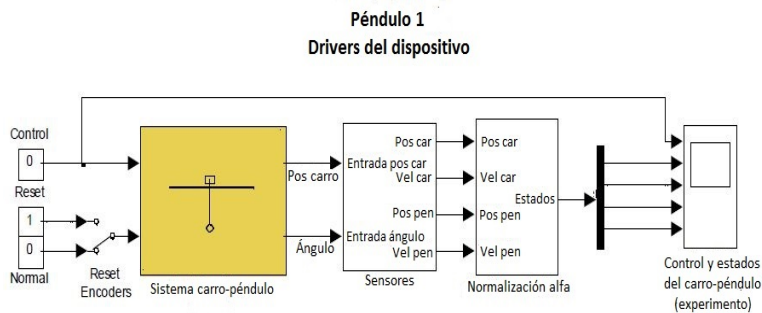


Figura 3.6: controlador de software dedicado al sistema carro-péndulo [INTECO, 2008].

El controlador de software mencionado está incluido en el bloque Sistema carro-péndulo de la figura (3.6). El bloque Sensores calcula las velocidades del carro y del péndulo, mediante diferenciación numérica, debido a que los sensores sólo miden posiciones.

3.1.4. Hardware

El hardware necesario para el control del carro-péndulo consiste en:

- Tarjeta de adquisición de datos RTDAC4/PCI.
- Codificadores incrementales ópticos.
- Fuente de alimentación.

La RTDAC4/PCI es una tarjeta de sincronización de entradas y salidas multifuncional analógica y digital dedicada a la adquisición de datos en tiempo real y control en el ambiente Windows 95/98/NT/2000. La tarjeta usa un bus PCI y soporta operaciones en tiempo real sin introducir retardos causados por el propio sistema de temporización de Windows. La tarjeta contiene un integrado FPGA *Xilinx^R* que puede ser reprogramado para introducir una nueva función de entradas y salidas digitales sin modificar el hardware. La configuración por defecto del chip FPGA acepta señales desde un codificador incremental y genera salidas PWM, típicas para aplicaciones de control mecatrónico [INTECO, 2013]. A través de la tarjeta de adquisición de datos, la PC lee la posición del carro y el ángulo del péndulo en forma digital, y también controla al motor de CD.

Un codificador incremental óptico básicamente consiste en una fuente de luz, un dispositivo receptor de luz y un disco codificador rotativo con ranuras. El encoder óptico obtiene el número de pulsos proporcionales al ángulo de rotación del disco y en combinación con el FPGA se puede obtener los estados medidos.

En la figura (3.7) se muestra un ejemplo del funcionamiento del sistema de control: los estados medibles del sistema son obtenidos por los encoders ópticos y digitalizados por el FPGA para poder ser leídos por la PC. Esta calcula la señal de control y la envía al generador de PWM, el cual manda una señal de control al motor de CD. El reloj base que activa el periodo de muestreo para los encoders, sincroniza el cálculo de la salida de control y la generación de la señal PWM.

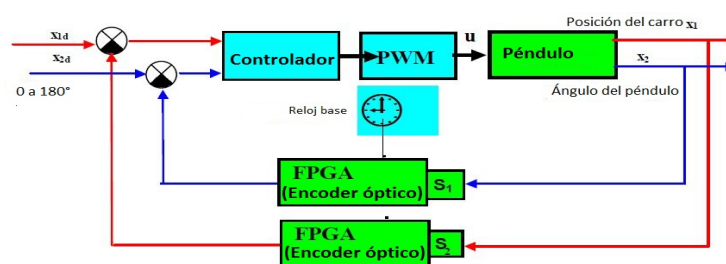


Figura 3.7: Control digital del sistema carro-péndulo [INTECO, 2008].

3.2. Modelo matemático

El modelo matemático que describe al sistema carro-péndulo en el espacio de estados esta formado por cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

3.2.1. Modelo no lineal

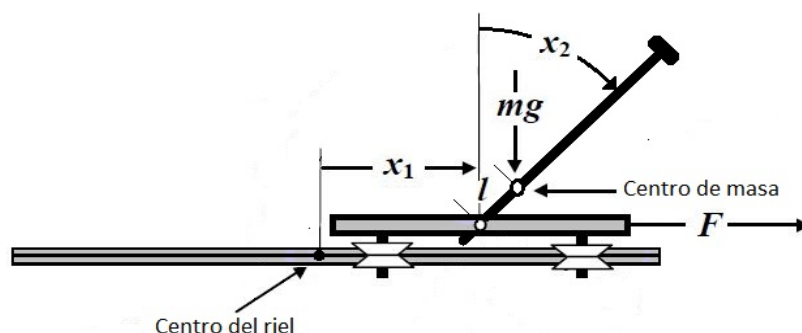


Figura 3.8: Diagrama del carro-péndulo en un sistema de coordenadas [INTECO, 2008].

El modelo matemático no lineal del sistema carro-péndulo [INTECO, 2008] considerando el sistema representado en la figura (3.8), es:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{a_1 w_1(x,u) + w_2(x) \cos(x_2)}{d(x)} \\
 \dot{x}_4 &= \frac{w_1(x,u) \cos(x_2) + a_2 w_2(x)}{d(x)}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde el vector de estados $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ representa, $x_1 \equiv$ Posición del carro, $x_2 \equiv$ Posición angular del péndulo, $x_3 \equiv$ Velocidad del carro, $x_4 \equiv$ Velocidad angular del péndulo. Además,

$$\begin{aligned}
 w_1(x, u) &= k_1 u + x_4^2 \sin(x_2) - k_2 x_3, \\
 w_2(x, u) &= -g \sin(x_2) - k_3 x_4, \\
 d(x) &= b - \cos^2(x_2),
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{J_p}{ml}, & a_2 &= \frac{1}{l}, & b &= a_1 a_2 = \frac{J_p}{ml^2}, \\
 k_1 &= \frac{p_1}{ml}, & k_2 &= \frac{f_c - p_2}{ml}, & k_3 &= \frac{f_p}{ml}.
 \end{aligned}$$

A continuación se presenta la tabla con los parámetros del sistema dados por el fabricante [INTECO, 2008].

Símbolo	Descripción	Valor
m	Masa equivalente del carro y péndulo	0.872[Kg]
l	Distancia del eje de rotación al centro de masa del sistema	0.011[m]
f_c	Coefficiente de fricción dinámica del carro	0.5[N·s/m]
f_s	Fricción estática del carro	1.203[N]
f_p	Coefficiente de fricción rotacional	$6.5 \cdot 10^{-5}$ [N·m·s/rad]
J_p	Momento de inercia del péndulo con respecto al eje de rotación	0.00292[kg·m ²]
g	Aceleración de la gravedad	9.81[m/s ²]
p_1	Razón de la fuerza del control a la señal PWM	9.4[N]
p_2	Razón de la fuerza de control a la velocidad del carro	-0.548[N·s/m]
u_{max}	Máximo valor de la señal PWM	0.5
m_c	Masa equivalente del carro	0.768[Kg]
m_{ps}	Masa del poste	0.038[kg]
m_{pw}	Masa de la carga	0.014[kg]
R_l	Longitud del riel	1.8[m]
l_p	Longitud del poste	0.5[m]
l_{po}	Distancia entre el centro de masa del poste y el eje de rotación	0.107[m]
l_c	Longitud de la carga	0.03[m]
l_{pw}	Distancia entre el centro de masa de la carga y el eje de rotación	0.354[m]
T	Periodo del péndulo	1.17[s]
J	Momento de inercia relacionado al centro de masa	0.00282[kg·m ²]

Cuadro 3.1: Tabla de parámetros del sistema original.

Si se sustituyen los valores de las constantes en el modelo matemático del carro-péndulo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{0.304w_1(x,u)+w_2(x)\cos(x_2)}{d(x)} \\
 \dot{x}_4 &= \frac{w_1(x,u)\cos(x_2)+90.91w_2(x)}{d(x)}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 w_1(x, u) &= 980u + x_4^2 \sin(x_2) - 109x_3, \\
 w_2(x, u) &= -9.81 \sin(x_2) - 0.00693x_4, \\
 d(x) &= 27.7 - \cos^2(x_2).
 \end{aligned}$$

3.2.2. Puntos de equilibrio

Igualando a cero las ecuaciones de estado del sistema (3.1) se pueden obtener sus puntos de equilibrio:

$$\dot{x}_1 = x_3 = 0, \tag{3.3}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 = 0, \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{a_1 w_1(x,u) + w_2(x) \cos(x_2)}{d(x)} = 0, \tag{3.5}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{w_1(x,u) \cos(x_2) + a_2 w_2(x)}{d(x)} = 0, \tag{3.6}$$

para que (3.5) y (3.6) sean cero se necesita que $w_1(x, u)$ y $w_2(x)$ sean cero:

$$w_1(x, u) = k_1 u + x_4^2 \sin(x_2) - k_2 x_3 = 0, \tag{3.7}$$

$$w_2(x, u) = -g \sin(x_2) - k_3 x_4 = 0, \tag{3.8}$$

se sustituyen (3.3) y (3.4) en (3.7) y (3.8):

$$k_1 u = 0, \tag{3.9}$$

$$-g \sin(x_2) = 0, \tag{3.10}$$

de (3.9) se tiene:

$$u = 0,$$

y de (3.10):

$$x_2 = n\pi ; n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

x_1 sólo está acotado por el tamaño del riel y puede tomar cualquier valor entre $[-1, 1]$ [m].

Por lo tanto el sistema tiene infinitos puntos de equilibrio pero solo se consideran 2 que son de interés:

$$X_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; U_0 = 0 \quad y \quad X_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; U_0 = 0$$

3.2.3. Linealización

En este caso se linealiza (3.1) entorno al punto X_{01} . De la ecuación (2.1):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g}{1-b} & \frac{a_1 k_2}{1-b} & \frac{k_3}{1-b} \\ 0 & \frac{a_2 g}{1-b} & \frac{k_2}{1-b} & \frac{k_3}{1-b} \end{bmatrix},$$

y de la ecuación (2.2):

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_1 k_1}{b-1} \\ \frac{k_1}{b-1} \end{bmatrix}.$$

El sistema linealizado en torno a X_{01} es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g}{1-b} & \frac{a_1 k_2}{1-b} & \frac{k_3}{1-b} \\ 0 & \frac{a_2 g}{1-b} & \frac{k_2}{1-b} & \frac{k_3}{1-b} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_1 k_1}{b-1} \\ \frac{k_1}{b-1} \end{bmatrix} u. \quad (3.11)$$

La salida del sistema esta dada por:

$$y = Cx,$$

puesto que los únicos estados medibles son x_1 y x_2 :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al sustituir los valores de las constantes en (3.11) se tiene el modelo lineal de (3.1):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.3678 & -1.2469 & -0.0003 \\ 0 & -33.4333 & -4.0959 & -0.0003 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11.1839 \\ 36.7385 \end{bmatrix} u \quad (3.12)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

3.2.4. Análisis de estabilidad

Para el sistema (3.1) se analiza la estabilidad del punto X_{01} mediante el método indirecto de Lyapunov.

De (3.12):

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.3678 & -1.2469 & -0.0003 \\ 0 & -33.4333 & -4.0959 & -0.0003 \end{bmatrix} \right), \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0.3678 & \lambda + 1.2469 & 0.0003 \\ 0 & 33.4333 & 4.0959 & \lambda + 0.0003 \end{bmatrix} \right), \\ &= (\lambda)(\lambda)(\lambda + 1.2469)(\lambda + 0.0003) - (-1)(\lambda)(\lambda + 1.2469)(33.4333), \\ &= \lambda^4 + 1.2472\lambda^3 + 33.4325\lambda^2 + 40.1813\lambda. \end{aligned}$$

La ecuación característica de A es:

$$\lambda^4 + 1.2472\lambda^3 + 33.4325\lambda^2 + 40.1813\lambda = 0,$$

y las raíces de dicho polinomio son:

$$\lambda_{1,4} = \{0, -0.0217 + 5.7775i, -0.0217 - 5.7775i, -1.2037\},$$

puesto que existe una raíz en el eje $j\omega$ el sistema lineal es marginalmente estable pero no se puede decir nada acerca de la estabilidad del sistema no lineal original.

Se intuye que X_{01} es inestable, por lo que se prueba el teorema de inestabilidad de Chetaev.

Para el sistema (3.1) con $X_{01} = 0$ un punto de equilibrio.

Se propone:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad (3.13)$$

tal que:

$$V(0) = 0.$$

La derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema (3.1) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{dV}{dx} \dot{x}, \\ &= [2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{0.304w_1(x,u) + w_2(x)\cos(x_2)}{d(x)} \\ \frac{w_1(x,u)\cos(x_2) + 90.91w_2(x)}{d(x)} \end{bmatrix}, \\ &= 2x_1x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3 \frac{0.304w_1(x,u) + w_2(x)\cos(x_2)}{d(x)} + \quad (3.14) \\ &\quad 2x_4 \frac{w_1(x,u)\cos(x_2) + 90.91w_2(x)}{d(x)}. \end{aligned}$$

Si $r = 0.01$ tal que $B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq 0.01\}$ y definimos U como: $U = \{x_1, x_3 > 0, x_2, x_4 < 0, x \in B_r \mid V(x) > 0\}$. En U (3.14) es positiva definida y por lo tanto X_{01} es **inestable**.

3.2.5. Controlabilidad y observabilidad

La matriz de controlabilidad para un sistema de cuarto orden se define como:

$$C = [B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B],$$

para el sistema (3.12) la matriz C es

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 11.18 & -14 & 3.9 \\ 0 & 36.74 & -45.8 & -1171.1 \\ 11.18 & -13.95 & 3.9 & 12.3 \\ 36.74 & -45.82 & -1171.1 & 1516.2 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Si la matriz (3.17) es de rango completo, su determinante debe ser diferente de cero:

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 0 & 11.18 & -14 & 3.9 \\ 0 & 36.74 & -45.8 & -1171.1 \\ 11.18 & -13.95 & 3.9 & 12.3 \\ 36.74 & -45.82 & -1171.1 & 1516.2 \end{pmatrix} = -175320000 \neq 0.$$

Se puede observar que la matriz (3.17) es de rango completo, por lo tanto, se dice, que el sistema (3.12) es de estado completamente controlable.

La matriz de observabilidad para un sistema de cuarto orden se define como:

$$O = [C' \mid A'C' \mid A^2C' \mid A^3C'],$$

Concatenando los anteriores vectores en la matriz O :

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.3678 & -1.2469 & -0.0003 \\ 0 & -33.4333 & -4.0959 & -0.0003 \\ 0 & 0.4686 & 1.5560 & -0.3674 \\ 0 & 1.5165 & 5.1084 & -33.43216 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Si la matriz O es de rango completo, su determinante debe ser diferente de cero:

$$\det(O) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.3678 & -1.2469 & -0.0003 \\ 0 & -33.4333 & -4.0959 & -0.0003 \\ 0 & 0.4686 & 1.5560 & -0.3674 \\ 0 & 1.5165 & 5.1084 & -33.43216 \end{pmatrix} = -1357.1 \neq 0.$$

Se observa que la matriz (3.18) es de rango completo, por lo tanto, se puede decir que el sistema (3.12) es completamente observable.

3.2.6. Forma canónica controlable

Para llevar al modelo lineal del carro-péndulo a la forma canónica controlable deseada se necesita construir la matriz \mathbf{P} .

Del sistema (3.12), se obtiene una matriz \mathbf{Q}^{-1} tal que:

$$\mathbf{Q}^{-1} = [B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B]$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 11.18 & -14 & 3.9 \\ 0 & 36.74 & -45.8 & -1171.1 \\ 11.18 & -13.95 & 3.9 & 12.3 \\ 36.74 & -45.82 & -1171.1 & 1516.2 \end{bmatrix}$$

Se invierte \mathbf{Q}^{-1} para obtener \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.1115 & 0 & 0.0928 & -0.0010 \\ 0.0928 & -0.0010 & 0.0035 & -0.0011 \\ 0.0035 & -0.0011 & 0.0028 & -0.0008 \\ 0.0028 & -0.0008 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se toman los elementos $q_{41}, q_{42}, q_{43}, q_{44}$ correspondientes a la fila 4 de la matriz \mathbf{Q} y se forma el vector \mathbf{b} .

$$\mathbf{b} = [0.0028 \quad -0.0008 \quad 0 \quad 0]$$

A partir de \mathbf{b} se obtienen las filas de la matriz \mathbf{P} :

$$p1 = b = [0.0028 \quad -0.0008 \quad 0 \quad 0]$$

$$p2 = bA = [0 \quad 0 \quad 0.0028 \quad -0.0008]$$

$$p3 = bA^2 = [0 \quad 0.0272 \quad 0 \quad 0]$$

$$p4 = bA^3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.0272]$$

La matriz \mathbf{P} queda:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0028 & -0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0028 & -0.0008 \\ 0 & 0.0272 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0272 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que la matriz $\mathbf{P} \in R^{4 \times 4}$ y además $\det(\mathbf{P}) = -5704 \times 10^6 \neq 0$, lo que significa que \mathbf{P} es no singular.

Aplicando las ecuaciones (2.7) al sistema (3.12) se obtiene la transformación de similitud que lleva al modelo lineal del carro-péndulo a la forma canónica controlable.

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40.1813 & -33.4325 & -1.2472 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.17)$$

$$y = [0.4045 \quad -0.0066 \quad 47.9224 \quad 0] \bar{x}$$

En capítulos posteriores ésta forma del modelo de sistema carro-péndulo es utilizada en el diseño de superficies y controladores por Modos Deslizantes.

Capítulo 4

Diseño de variables de deslizamiento de orden arbitrario para el sistema carro-péndulo

En este capítulo se diseñan variables de deslizamiento, de grado relativo 1, 2 y 3, para ser implementadas en el sistema carro-péndulo. Se tienen cuatro controladores (Super-Twisting, Control Integral Discontinuo, Control de Hong de segundo orden robustecido y Control de Hong de tercer orden robustecido) que requieren del diseño de una variable de deslizamiento para ser implementados en el sistema carro-péndulo, por lo tanto, se deben diseñar cuatro variables de deslizamiento.

Para ejemplificar el método de diseño de variables de deslizamiento presentado en la sección 2.7.1, se realiza el diseño de una variable de deslizamiento de grado relativo tres.

El primer paso de diseño consiste en transformar a la forma canónica controlable el sistema (3.12) y la matriz de ponderación Q . El sistema (3.17) es la representación en forma canónica controlable de (3.12) y se tiene la matriz

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

El segundo paso es definir el orden de singularidad i del índice de desempeño dado por:

$$i = k + 1,$$

donde k es el número de columnas cero de \bar{Q} , en este caso $k = 2$, por lo tanto,

$$i = 3.$$

En el paso tres se hacen las particiones de \bar{Q} y de el sistema (3.19) donde los subconjuntos de variables de estado es

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 &= \bar{x}_1, \\ \bar{z}_2 &= \bar{x}_2, \\ \bar{z}_3 &= [\bar{x}_3 \ \bar{x}_4]^T,\end{aligned}$$

de esta forma obtenemos las matrices

$$\bar{Q}_{11} = [49], \quad (4.1)$$

$$\bar{Q}_{22} = [9], \quad (4.2)$$

$$\bar{A}_{11} = [0], \quad (4.3)$$

$$\bar{A}_{12} = [1]. \quad (4.4)$$

Por último, el cuarto paso consiste en el diseño de la variable de deslizamiento mediante la obtención de una ley de control para el subsistema \bar{z}_1 a través del índice de desempeño

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{11} \bar{z}_1(t) + \bar{z}_2^T(t) \bar{Q}_{22} \bar{z}_2(t)) dt, \quad (4.5)$$

como $\bar{Q}_{12} = 0$ no hay términos cruzados en (4.5), por lo que no es necesario hacer el cambio de variable que se describe en la sección 2.7.1. La ecuación algebraica de Riccati queda

$$\bar{A}_{11}^T P + P \bar{A}_{11} - P \bar{A}_{12} \bar{Q}_{22}^{-1} \bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{11} = 0, \quad (4.6)$$

si se sustituyen (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4) en (4.6) se tiene

$$-P[1][9]^{-1}[1]P + [49] = 0, \quad (4.7)$$

y se obtiene

$$P = [21], \quad (4.8)$$

que es positiva definida y el par (\bar{A}_{11}, \bar{D}) , con $\bar{D} = 7$, es observable, por lo tanto se puede obtener la variable de deslizamiento por medio de la ecuación (2.34)

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{z}_2 + [9]^{-1}([1][21] + [0])\bar{z}_1 \\ \sigma &= \bar{z}_2 + \frac{7}{3}\bar{z}_1,\end{aligned}$$

finalmente la variable de deslizamiento queda:

$$\sigma = [2.333 \ 1 \ 0 \ 0]\bar{x} \quad (4.9)$$

Para el diseño del resto de las variables de deslizamiento se va a usar la función SSLQ presentada en la sección 2.7.2.

Se considera la función (2.35) donde las entradas están dadas por: las matrices A y B del modelo matemático lineal del carro-péndulo (3.12), la matriz de ponderación $Qb = \bar{Q}$ y la ganancia *AlphaGain* puede tomar cualquier valor porque no se requiere del controlador Quasi-continuo diseñado por (2.35), en este caso *AlphaGain* = 1.

Después de ejecutar la función (2.35) en MATLAB se tiene la salida SS que da el vector de ganancias de la variable de deslizamiento. A continuación se muestran las variables de deslizamiento diseñadas con su respectiva matriz de costo \bar{Q} .

- Variables de deslizamiento de grado relativo dos con:

$$Qb = \begin{bmatrix} 544000 & 0 & 131750 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 131750 & 0 & 34000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

el vector de SS queda:

$$SS = \begin{bmatrix} 4 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo tanto, la variable de deslizamiento está dada por:

$$\sigma = [4 \ 0.5 \ 1 \ 0]\bar{x}. \quad (4.10)$$

- Variable de deslizamiento de grado relativo dos con:

$$Qb = \begin{bmatrix} 5299200 & 0 & 1093650 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1093650 & 0 & 230000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces, la salida SS de (2.35) da:

$$SS = \begin{bmatrix} 4.8 & 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 4.8 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

y la variable de deslizamiento esta dada por:

$$\sigma = [4.8 \ 0.3 \ 1 \ 0]\bar{x}. \quad (4.11)$$

- Variable de deslizamiento de grado relativo uno con:

$$Qb = \begin{bmatrix} 560000 & 0 & 138680 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 138680 & 0 & 34609 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix},$$

el vector SS es:

$$SS = [285 \ 18 \ 45 \ 1],$$

por lo tanto, la variable de deslizamiento esta dada por:

$$\sigma = [285 \ 18 \ 45 \ 1]\bar{x}. \quad (4.12)$$

Una vez diseñadas las superficies de deslizamiento para el sistema carro-pendulo, se necesita de un controlador que pueda llevar a las trayectorias del sistema a dichas superficies.

Capítulo 5

Implementación de controladores en el sistema carro-péndulo

En este capítulo se presentan los controladores por modos deslizantes de orden superior implementados en el sistema carro-péndulo. Todos estos controladores son continuos y pueden rechazar perturbaciones con primera derivada temporal acotada. El diseño de las ganancias para todos los controladores es de forma experimental.

A continuación, se presentan los controladores implementados, ya con las ganancias diseñadas para lograr estabilizar al sistema en el origen.

Super-Twisting

El algoritmo (2.10), con las ganancias adecuadas para cumplir con la tarea de control y la variable de deslizamiento correspondiente queda

$$\begin{aligned} u &= -15 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + w, \\ \dot{w} &= -15 \text{sign}(\sigma), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde σ esta dada por (4.12).

Control Integral Discontinuo

El algoritmo (2.11), con las ganancias adecuadas para cumplir con la tarea de control queda

$$\begin{aligned} u &= -26 |\sigma|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\sigma) - 25 |\dot{\sigma}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\dot{\sigma}) + z, \\ \dot{z} &= -5 \text{sign}(\sigma), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde σ esta dada por (4.10).

Control de Hong de segundo orden robustecido

El controlador (2.38), robustecido por medio del algoritmo (2.42), con las ganancias adecuadas para cumplir con la tarea de control esta dado por

$$\begin{aligned}
u_1 &= -4.3 \|\sigma\|^{0.9} \operatorname{sign}(\sigma) | \operatorname{sign}(|\sigma|^{0.9} \operatorname{sign}(\sigma)) \\
u_2 &= -120 \|\dot{\sigma}\|^{1.11} \operatorname{sign}(\dot{\sigma}) - u_1 |^{1.25} \operatorname{sign}(|\dot{\sigma}|^{1.11} \operatorname{sign}(\dot{\sigma}) - u_1) \\
v &= -10 |S|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(S) + w \\
\dot{w} &= -5 \operatorname{sign}(S) \\
S &= \dot{\sigma} - \int_0^t (f(\sigma(\tau)) + g(x(\tau))u_0(\sigma(\tau)))d\tau \\
u &= u_2 + v
\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde σ esta dada por (4.11).

Control de Hong de tercer orden robustecido

El algoritmo (2.39), robustecido por medio del algoritmo (2.42), con las ganancias adecuadas para estabilizar el sistema esta dado por

$$\begin{aligned}
u_1 &= -1 \|\sigma\|^{0.9} \operatorname{sign}(\sigma) | \operatorname{sign}(|\sigma|^{0.9} \operatorname{sign}(\sigma)) \\
u_2 &= -1.6 \|\dot{\sigma}\|^{1.11} \operatorname{sign}(\dot{\sigma}) - u_1 |^{1.25} \operatorname{sign}(|\dot{\sigma}|^{1.11} \operatorname{sign}(\dot{\sigma}) - u_1) \\
u_3 &= -70 \|\ddot{\sigma}\|^{1.37} \operatorname{sign}(\ddot{\sigma}) - u_2 |^{1.57} \operatorname{sign}(|\ddot{\sigma}|^{1.37} \operatorname{sign}(\ddot{\sigma}) - u_2) \\
v &= -5 |S|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(S) + w \\
\dot{w} &= -5 \operatorname{sign}(S) \\
S &= \ddot{\sigma} - \int_0^t (f(\sigma(\tau)) + g(\sigma(\tau))u_0(\sigma(\tau)))d\tau \\
u &= u_3 + v
\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde σ esta dada por (4.9).

Control de Hong de cuarto orden robustecido

El controlador (2.40), robustecido por medio del algoritmo (2.42), con las ganancias adecuadas para cumplir con la tarea de control queda

$$\begin{aligned}
u_1 &= -0.8 \|x_1\|^{0.9} \operatorname{sign}(x_1) | \operatorname{sign}(|x_1|^{0.9} \operatorname{sign}(x_1)) \\
u_2 &= -0.9 \|x_2\|^{1.11} \operatorname{sign}(x_2) - u_1 |^{1.25} \operatorname{sign}(|x_2|^{1.11} \operatorname{sign}(x_2) - u_1) \\
u_3 &= -2 \|x_3\|^{1.37} \operatorname{sign}(x_3) - u_2 |^{1.57} \operatorname{sign}(|x_3|^{1.37} \operatorname{sign}(x_3) - u_2) \\
u_4 &= -140 \|x_4\|^{1.71} \operatorname{sign}(x_4) - u_3 |^2 \operatorname{sign}(|x_4|^{1.71} \operatorname{sign}(x_4) - u_3) \\
v &= -5 |S|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(S) + w \\
\dot{w} &= -5 \operatorname{sign}(S) \\
S &= x_4 - \int_0^t (f(x(\tau)) + g(x(\tau))u_0(x(\tau)))d\tau \\
u &= u_4 + v
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Control LQR robustecido

La ley de control (2.36), robustecida por medio del algoritmo (2.42), con la matriz ganancias adecuada para estabilizar el sistema queda

$$\begin{aligned}
 u_0 &= -[7.2 \ 42 \ 8.4 \ 7.2]x \\
 v &= -5 |S|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S) + w \\
 \dot{w} &= -5 \text{sign}(S) \\
 S &= x_4 - \int_0^t (f(x(\tau)) + g(x(\tau))u_0(x(\tau)))d\tau \\
 u &= u_0 + v
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde la matriz de ganancias de u_0 se diseña como se muestra en la sección 2.6, con las matrices de ponderación

$$Q = \begin{bmatrix} 51.84 & 72.36 & 0 & 0 \\ 72.36 & 537 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24.2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 90 \end{bmatrix}; \quad R = 1.$$

Los controladores diseñados en el presente capítulo se implementan en el sistema carro-péndulo, logrando la estabilización del sistema en el punto de equilibrio X_{01} .

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos, tanto en simulaciones como experimentalmente, de la implementación de los controladores por modos deslizantes de orden superior, presentados en el capítulo 5, con la correspondiente variable de deslizamiento, diseñada en el capítulo 4, aplicados al sistema carro-péndulo descrito en el capítulo 3.

6.1. Simulaciones

En las simulaciones se utiliza el modelo matemático no lineal (3.1) como una aproximación de la planta. En las simulaciones el objetivo de control es estabilizar el sistema en el origen en la presencia de una perturbación, acotada y acoplada al canal de control, descrita por la ecuación

$$f = \text{sen}(5t) + 2\text{cos}(3t) + 2. \quad (6.1)$$

Para todos los casos las condiciones iniciales de los estados son cero, excepto para el ángulo del péndulo que es 0.2 [rad], y el periodo de muestreo es de un milisegundo.

En la gráfica (6.1) se muestra el resultado de la simulación del algoritmo (5.1) implementado en el sistema carro-péndulo.

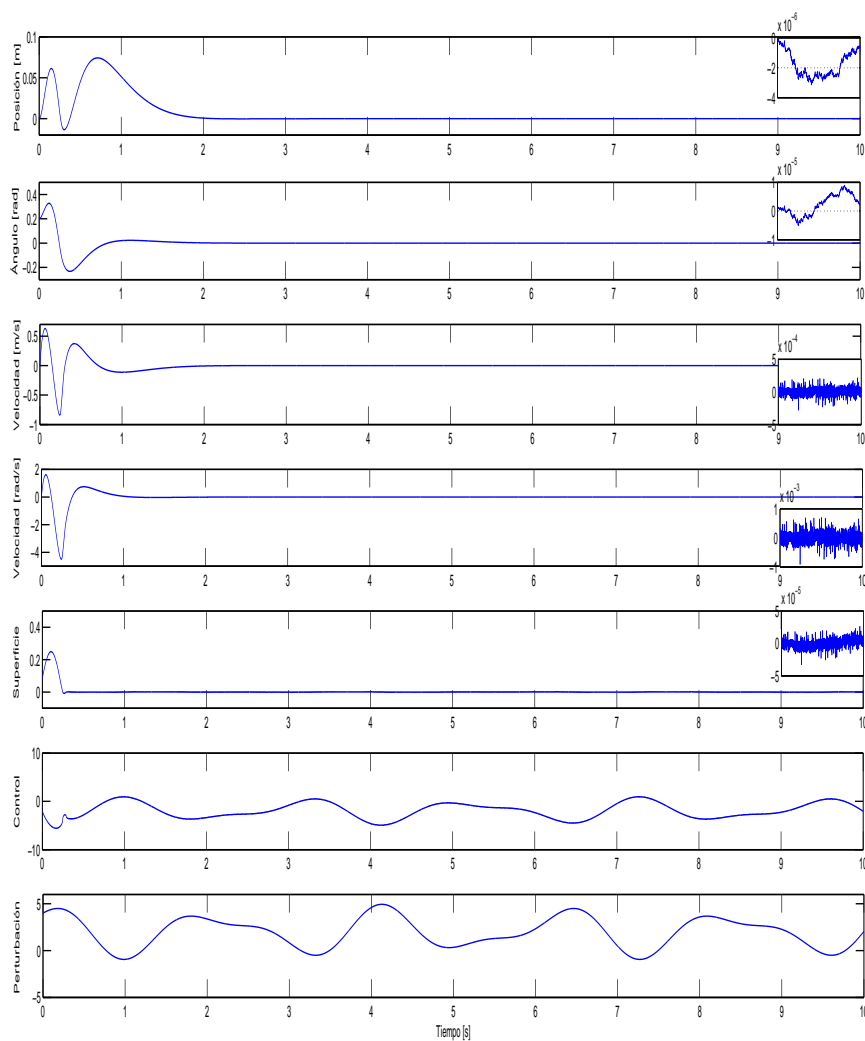


Figura 6.1: Simulación del carro-péndulo con Algoritmo Super-Twisting y superficie de grado relativo 1.

Se puede observar que las trayectorias del sistema convergen a la superficie de deslizamiento en tiempo finito y, después de esto, los estados convergen al origen de forma exponencial. La señal de control, en un principio lleva la variable de deslizamiento a cero y después toma la misma forma de la perturbación (6.1) pero con signo contrario, lo cual nos indica una compensación exacta de esta.

Se analiza la precisión del controlador (5.1), como se muestra en la sección 2.5.3:

$$\|\sigma\| \leq 32.78 \cdot 10^{-6}; \quad \gamma_1 = 32.78 \cdot 10^{-3}.$$

En la figura (6.2) se presentan los resultados de la simulación del sistema carro-péndulo con el controlador (5.2).

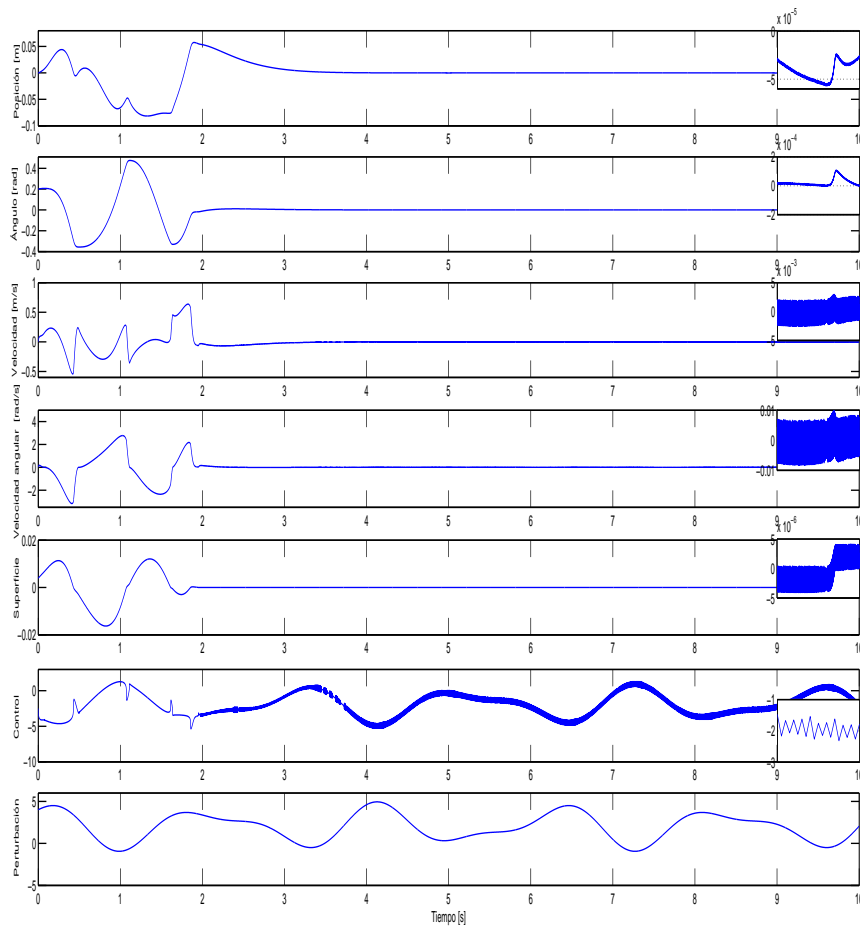


Figura 6.2: Simulación del carro-péndulo con Control Integral Discontinuo y superficie de grado relativo 2.

Se puede ver que la variable de deslizamiento llega a cero en tiempo finito, entonces, los estados del sistema van a cero de forma exponencial. La señal de control es continua y compensa de forma exacta a (6.1).

En cuanto a la precisión obtenida con (5.2) se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 0.67 \cdot 10^{-6}; & \gamma_1 &= 0.67, \\ \|\dot{\sigma}\| &\leq 0.0486 \cdot 10^{-3}; & \gamma_2 &= 0.0486. \end{aligned}$$

En la figura (6.3) se puede ver la simulación del carro-péndulo con el controlador (5.3).

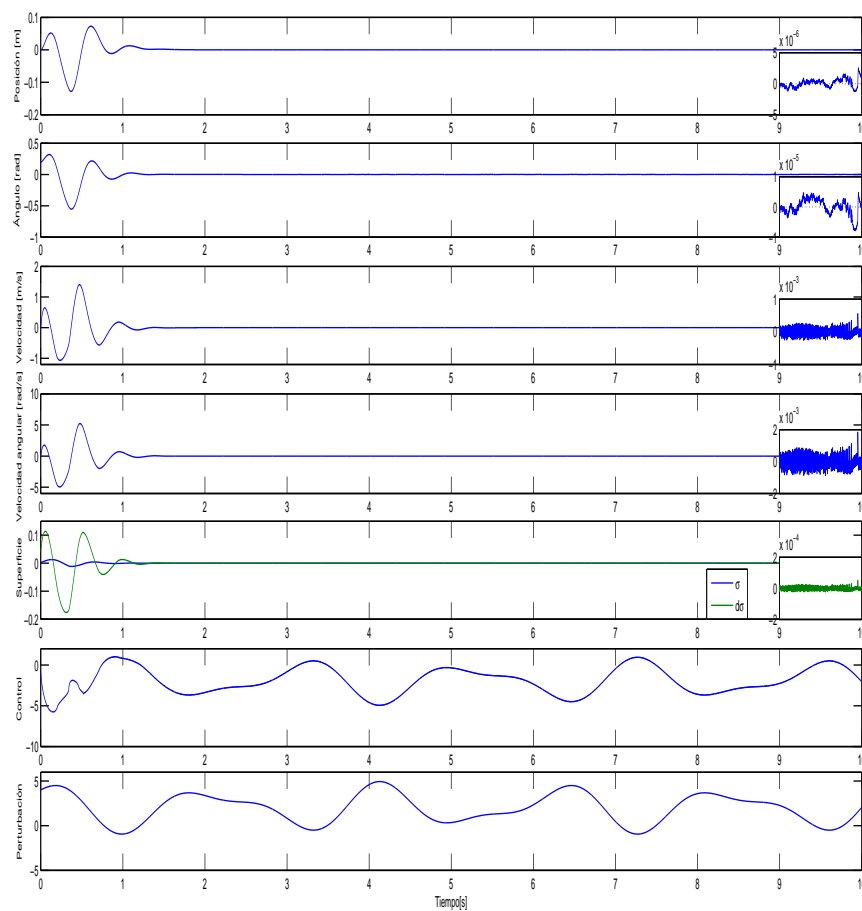


Figura 6.3: Simulación del carro-péndulo con Control de Hong robustecido de segundo orden y superficie de grado relativo 2.

Se observa que, tanto la variable de deslizamiento como su primera derivada temporal, convergen a cero en tiempo finito, y los estados del sistema lo hacen de forma exponencial. La señal de control es continua y toma la misma forma de(6.1) pero con signo opuesto para compensarla.

Al analizar la precisión de el controlador (5.3) en la simulación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 0.75 \cdot 10^{-6}; & \gamma_1 &= 0.75, \\ \|\dot{\sigma}\| &\leq 0.0515 \cdot 10^{-3}; & \gamma_2 &= 0.0515. \end{aligned}$$

En la figura (6.4) se muestra la simulación de (5.4) estabilizando al sistema (3.1).

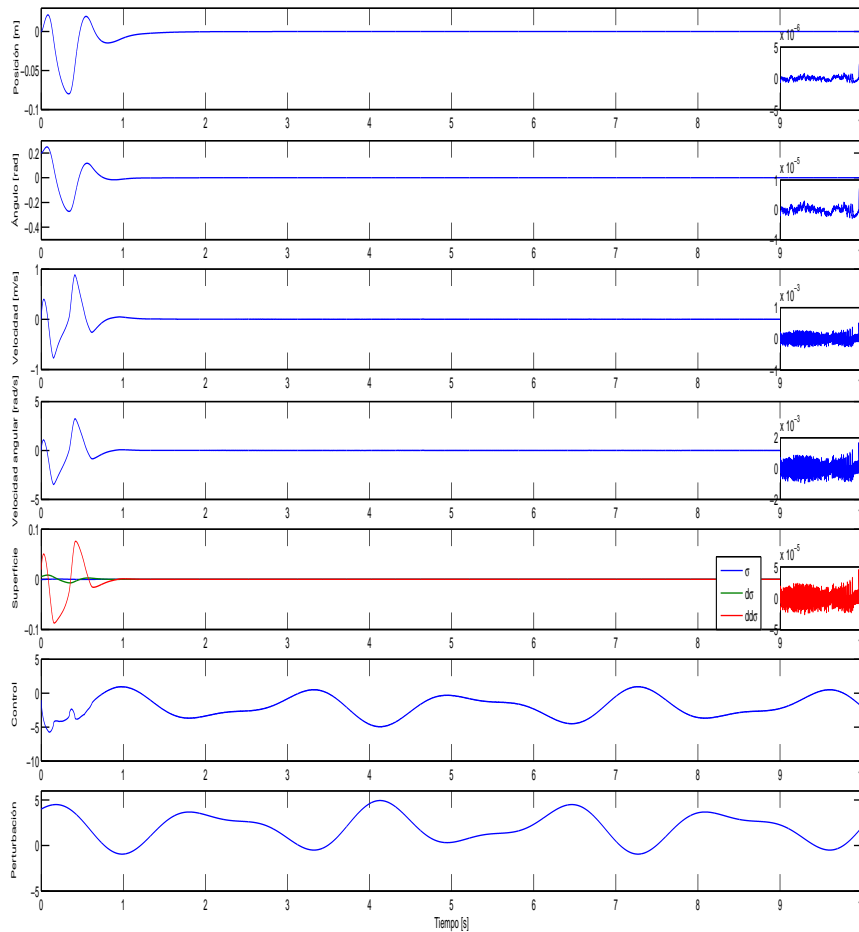


Figura 6.4: Simulación del carro-péndulo con Control de Hong de tercer orden robustecido y superficie de grado relativo 3.

Se puede apreciar que la variable de deslizamiento, y su primera y segunda derivada con respecto al tiempo, convergen a cero en tiempo finito y los estados del sistema lo hacen de forma exponencial. Además, la señal de control compensa exactamente a la perturbación (6.1).

La precisión obtenida con el controlador (5.4) esta dada por:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 87.67 \cdot 10^{-9}; & \gamma_1 &= 87.67 \\ \|\dot{\sigma}\| &\leq 0.36 \cdot 10^{-6}; & \gamma_2 &= 0.36 \\ \|\ddot{\sigma}\| &\leq 0.046 \cdot 10^{-3}; & \gamma_3 &= 0.046 \end{aligned}$$

En la figura (6.5) se presentan los resultados obtenidos con el algoritmo (5.5).

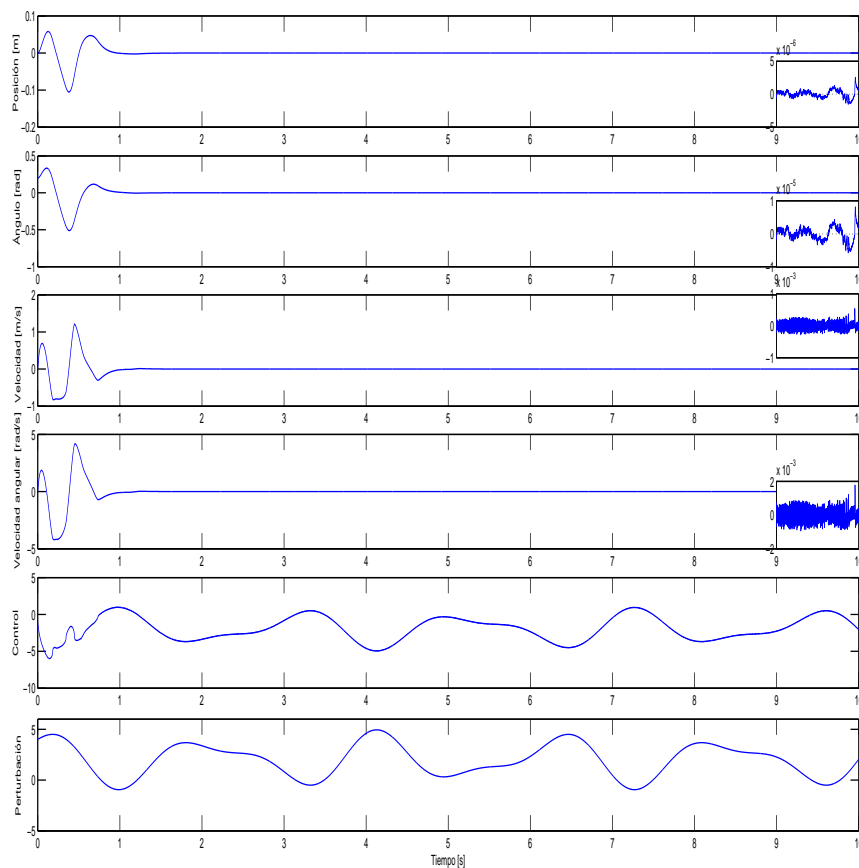


Figura 6.5: Simulación del carro-péndulo con Control de Hong de cuarto orden robustecido.

En esta simulación el controlador es del mismo orden de la planta, por lo que, no hay variable de deslizamiento, entonces, el controlador lleva directamente los estados a cero, por la acción del controlador de Hong, y se tiene una compensación exacta de (6.1) por medio del algoritmo de robustecimiento.

Aunque no hay una superficie de deslizamiento se puede determinar la precisión del controlador (5.5) en la simulación, si se considera una variable de deslizamiento, de grado relativo cuatro, diseñada de tal forma que sea directamente los estados de un sistema como (3.17) empleado en el diseño del controlador:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 360 \cdot 10^{-12}; & \gamma_1 &= 360 \\ \|\sigma\| &\leq 51 \cdot 10^{-9}; & \gamma_2 &= 51 \\ \|\dot{\sigma}\| &\leq 0.157 \cdot 10^{-6}; & \gamma_3 &= 0.157 \\ \|\ddot{\sigma}\| &\leq 0.026 \cdot 10^{-3}; & \gamma_4 &= 0.026 \end{aligned}$$

En la gráfica (6.6) se presentan los resultados obtenidos por (5.6).

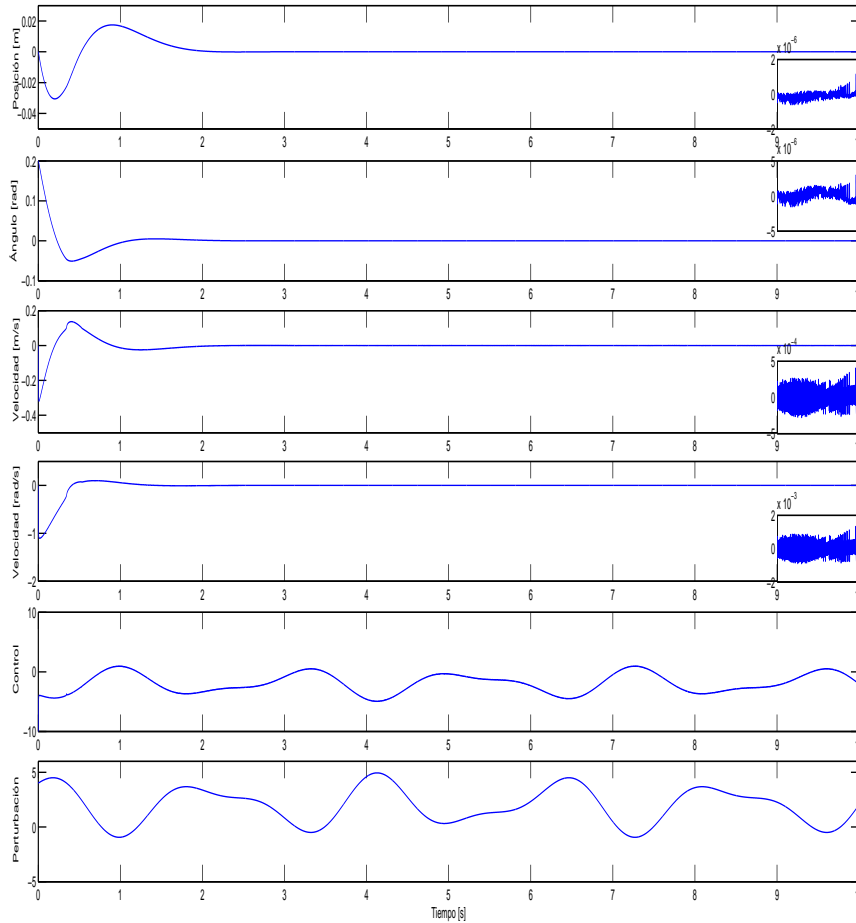


Figura 6.6: Simulación del carro-péndulo con Control LQR robustecido.

El control LQR lleva los estados del sistema a cero exponencialmente y mediante el algoritmo de robustecimiento se compensa exactamente la perturbación f .

En la tabla (6.1) se hace una comparación de los diferentes controladores, con base en su precisión, tanto en la superficie como en los estados del sistema, esto con la finalidad de ver cual controlador es el que conviene usar para estabilizar el sistema carro-péndulo.

Controlador	$ \sigma $	$ \dot{\sigma} $	$ \ddot{\sigma} $	$ \sigma^{(3)} $	$ x_1 $	$ x_2 $	$ x_3 $	$ x_4 $
Algoritmo Super-Twisting	$32.78 \cdot 10^{-6}$	*	*	*	$4 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
Control Integral Discontinuo	$0.67 \cdot 10^{-6}$	$48.6 \cdot 10^{-6}$	*	*	$6 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-5}$	$5.32 \cdot 10^{-4}$	$1.77 \cdot 10^{-3}$
Hong de segundo orden robustecido	$0.75 \cdot 10^{-6}$	$45.2 \cdot 10^{-6}$	*	*	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$5.75 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$
Hong de tercer orden robustecido	$80 \cdot 10^{-9}$	$0.296 \cdot 10^{-6}$	$43.5 \cdot 10^{-6}$	*	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$3.835 \cdot 10^{-6}$	$4.85 \cdot 10^{-4}$	$1.47 \cdot 10^{-3}$
Hong de cuarto orden robustecido	$360 \cdot 10^{-12}$	$51 \cdot 10^{-9}$	$1.57 \cdot 10^{-7}$	$2.63 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$5.66 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$
LQR robustecido	*	*	*	*	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$1.34 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 6.1: Tabla comparativa de la precisión de los controladores utilizados para estabilizar el sistema carro-péndulo con un tiempo de muestreo de un milisegundo.

En la tabla se puede observar que mientras mayor fue el orden del controlador mejor fue la precisión en las superficies de deslizamiento y con esto se comprueba que, en teoría (de forma ideal), la precisión crece proporcionalmente al orden del controlador como se muestra en la siguiente gráfica.

Lo más importante es la precisión que se alcanza en la estabilización de los estados del sistema y en este rubro, los controladores que presentaron mejores resultados fueron los de cuarto orden, que no necesitaron el diseño de una variable de deslizamiento, el control LQR robustecido y el controlador de Hong de cuarto orden robustecido, y así se comprueba que cuando el orden del controlador coincide con el grado relativo del sistema se obtiene la máxima precisión posible.

6.2. Experimentos

En los experimentos realizados se utiliza el sistema de control descrito en la sección 3.1.2, donde el sistema es llevado de su posición inicial hasta una vecindad del punto de equilibrio inestable mediante el algoritmo *swing up*, cuando esto se logra el controlador conmuta a uno de los diseñados en el capítulo 5 que estabiliza al sistema en el origen. La zona de estabilización esta acotada por 0.2 radianes alrededor del origen y las condiciones iniciales del sistema, cuando se conmuta el controlador, se pueden apreciar en las gráficas correspondientes a los resultados obtenidos por cada controlador implementado.

Una vez que el sistema está en estado estacionario se le aplican dos perturbaciones, una acoplada al canal de control, a los 30 segundos del experimento, que consiste en ejercer fuerza sobre el carro, y otra no acoplada al canal de control, a los 45 segundos aproximadamente, que es un golpe al péndulo. En las gráficas siguientes se muestra la respuesta del sistema con el correspondiente controlador implementado.

En la gráfica (6.7) se muestran los resultados de la implementación del algoritmo (5.1).

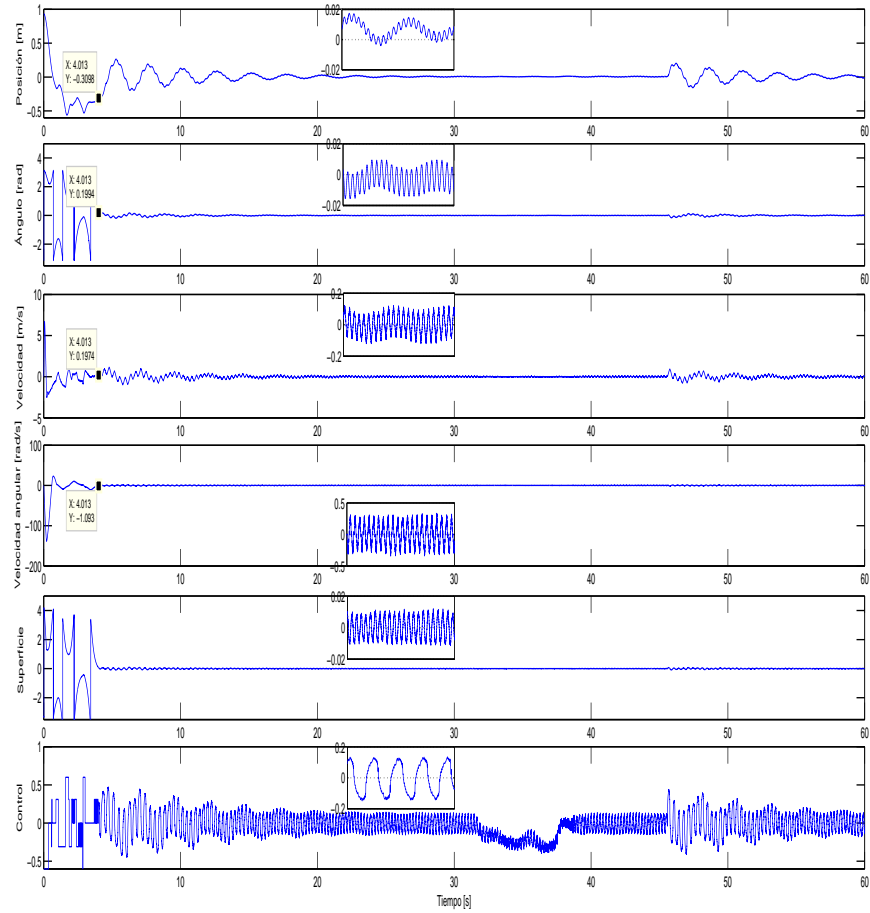


Figura 6.7: Carro-péndulo con Algoritmo Super-Twisting y superficie de grado relativo 1.

En la gráfica se puede observar que el sistema converge a la superficie de deslizamiento en tiempo finito y los estados van a cero de forma exponencial.

La precisión del algoritmo (5.1) en el experimento esta dada por:

$$\| \sigma \| \leq 11.86 \cdot 10^{-3}; \quad \gamma_1 = 11.86$$

En la figura (6.8) se muestra la respuesta del sistema con el algoritmo (5.2).

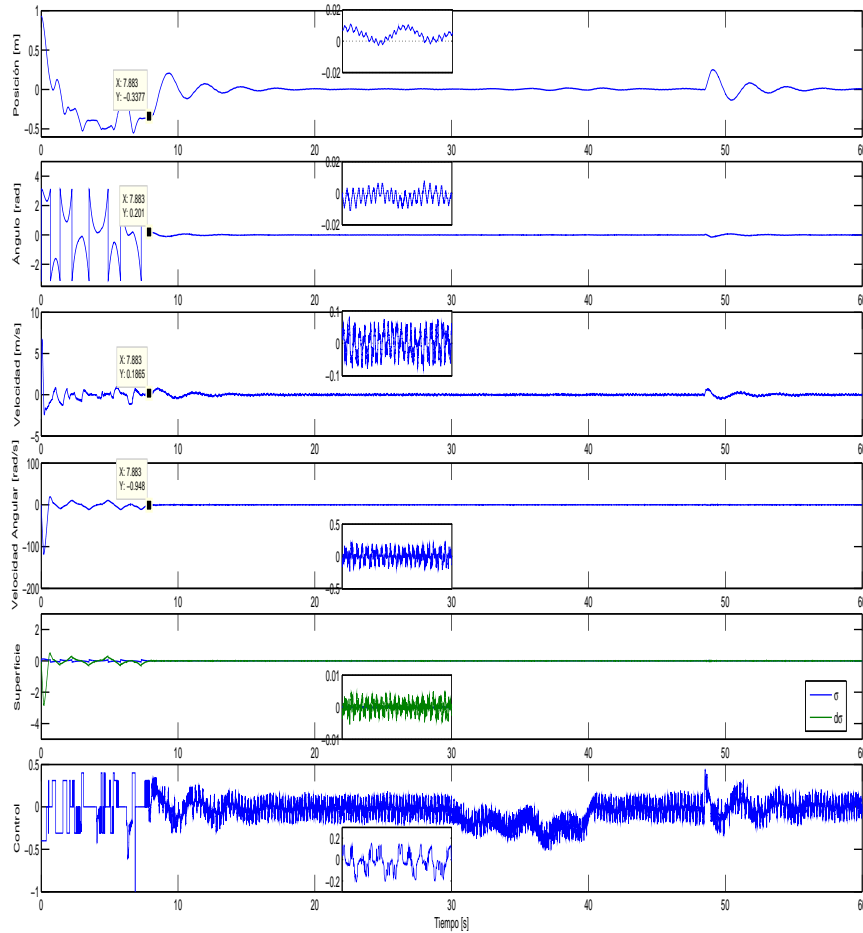


Figura 6.8: Carro-péndulo con Control Integral Discontinuo y superficie de grado relativo 2.

Se observa que tanto la variable de deslizamiento como los estados llegan a cero y el controlador compensa la perturbación acoplada al canal de control.

La precisión del controlador (5.2) en el experimento es:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 150 \cdot 10^{-6}; & \gamma_1 &= 150 \\ \|\sigma\| &\leq 5.15 \cdot 10^{-3}; & \gamma_1 &= 5.15 \end{aligned}$$

En la gráfica (6.9) se presentan los resultados obtenidos al implementar el controlador (5.3) en el sistema carro-péndulo.

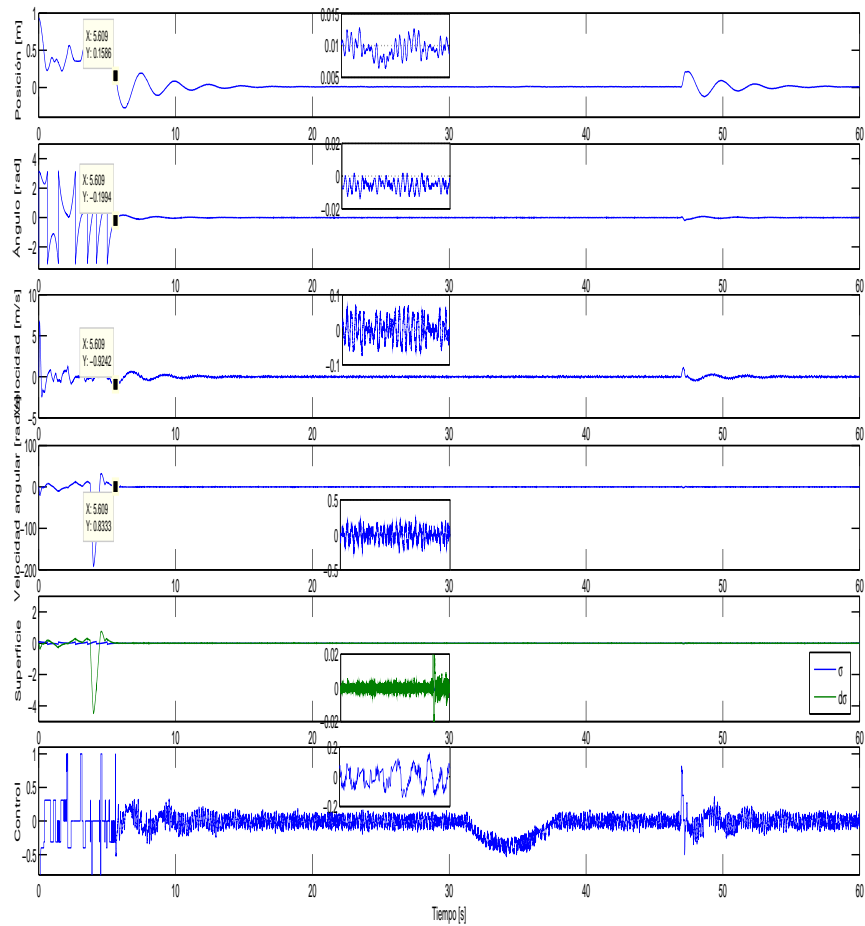


Figura 6.9: Carro-péndulo con Control de Hong de segundo orden robustecido y superficie de grado relativo 2.

Se puede apreciar que los estados convergen a cero, una vez que las trayectorias del sistema se encuentran en la superficie de deslizamiento, además, el controlador trata de compensar de forma exacta a la perturbación acoplada al canal de control.

La precisión del controlador (5.3) está dada por:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 154 \cdot 10^{-6}; & \gamma_1 &= 154 \\ \|\dot{\sigma}\| &\leq 5.2 \cdot 10^{-3}; & \gamma_2 &= 5.2 \end{aligned}$$

En la figura (6.10) se muestran los resultados obtenidos con la implementación del controlador (5.4).

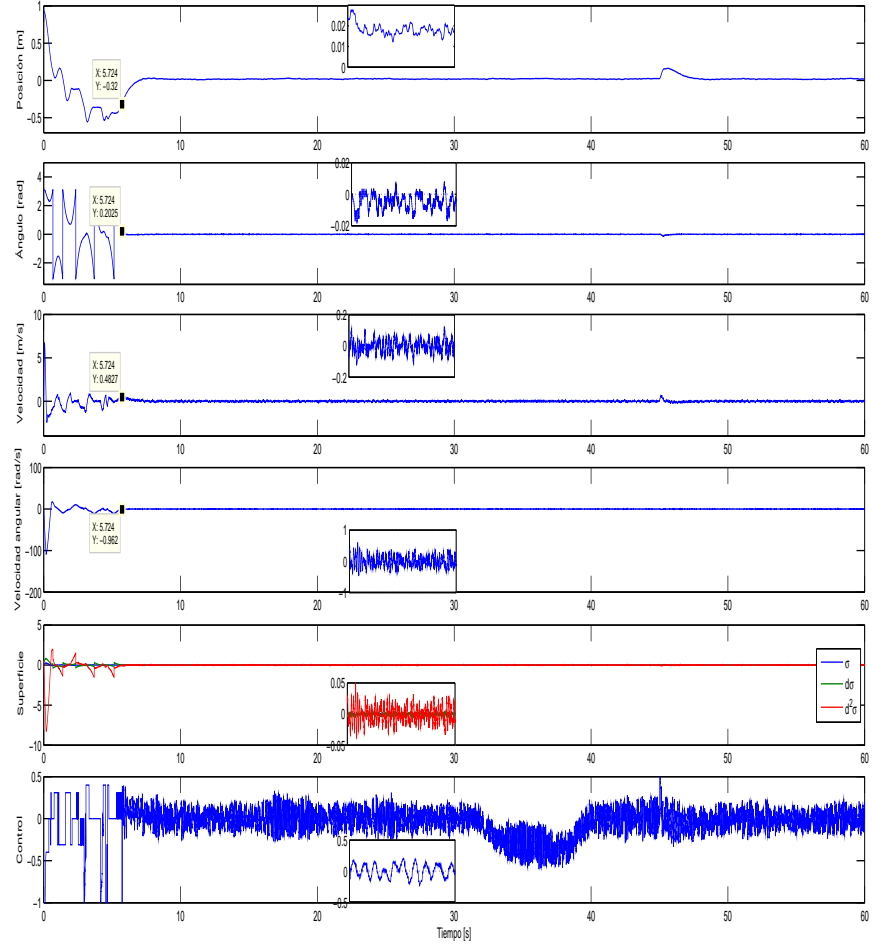


Figura 6.10: Carro-péndulo con Control de Hong de tercer orden robustecido y superficie de grado relativo 3.

La variable de deslizamiento y sus dos primeras derivadas temporales llegan a cero al igual que los estados.

La precisión para el algoritmo (5.4) implementado en el carro-péndulo se obtiene como:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 2.24 \cdot 10^{-3}; & \gamma_1 &= 2240000 \\ \|\dot{\sigma}\| &\leq 4.1 \cdot 10^{-3}; & \gamma_2 &= 4100 \\ \|\ddot{\sigma}\| &\leq 32 \cdot 10^{-3}; & \gamma_3 &= 32 \end{aligned}$$

En la gráfica (6.11) están los resultados obtenidos con la implementación del algoritmo (5.5).

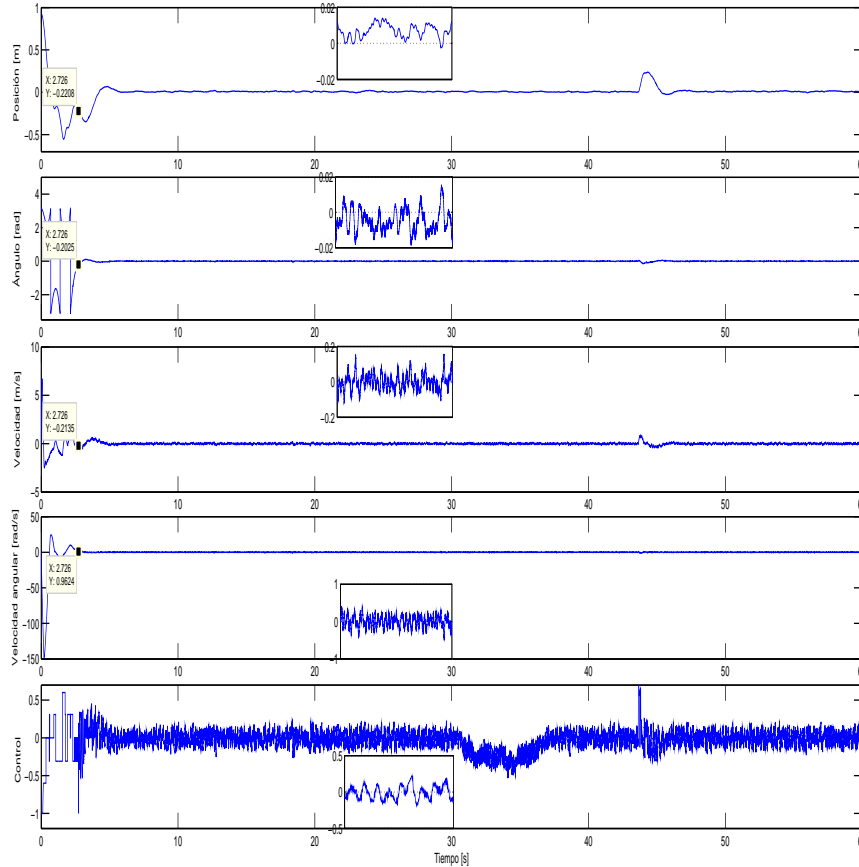


Figura 6.11: Carro-péndulo con Control de Hong de cuarto orden robustecido.

Este algoritmo al ser del mismo orden del sistema no necesita de una variable de deslizamiento para llevar los estados a cero y al ser robustecido compensa la perturbación acoplada al canal de control.

La precisión para el controlador (5.5) implementado en el sistema carro-péndulo esta dada por:

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &\leq 61.6 \cdot 10^{-6}; & \gamma_1 &= 61600000 \\ \|\sigma\| &\leq 0.59 \cdot 10^{-3}; & \gamma_2 &= 590000 \\ \|\dot{\sigma}\| &\leq 0.69 \cdot 10^{-3}; & \gamma_3 &= 690 \\ \|\ddot{\sigma}\| &\leq 10.8 \cdot 10^{-3}; & \gamma_4 &= 10.8 \end{aligned}$$

En la gráfica (6.12) están los resultados obtenidos en la implementación de la ley de control (5.6).

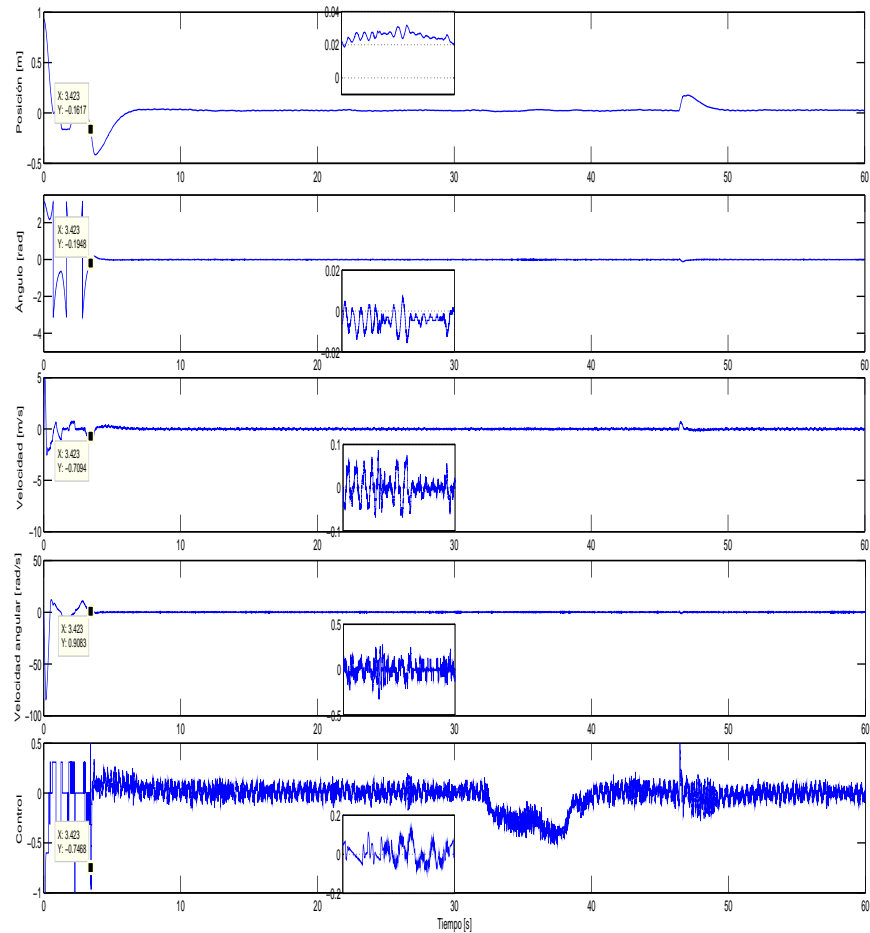


Figura 6.12: Carro-péndulo con Control LQR robustificado.

El control LQR se encarga de llevar los estados al origen y por el algoritmo de robustecimiento compensa las perturbaciones acopladas al canal de control.

En la tabla (6.2) se hace una comparación de los diferentes controladores implementados en el sistema carro-péndulo, con base en su precisión, tanto en la superficie como en los estados del sistema, esto con la finalidad de ver cual controlador es el que conviene usar para estabilizar al sistema carro-péndulo.

Controlador	$ \sigma $	$ \dot{\sigma} $	$ \ddot{\sigma} $	$ \sigma^{(3)} $	$ x_1 $	$ x_2 $	$ x_3 $	$ x_4 $
Algoritmo Super-Twisting	$11.86 \cdot 10^{-3}$	*	*	*	$17 \cdot 10^{-3}$	$12.3 \cdot 10^{-3}$	$104 \cdot 10^{-3}$	$328 \cdot 10^{-3}$
Control Integral Discontinuo	$150 \cdot 10^{-6}$	$5.15 \cdot 10^{-3}$	*	*	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$74.7 \cdot 10^{-3}$	$296 \cdot 10^{-3}$
Hong de segundo orden robustecido	$154 \cdot 10^{-6}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	*	*	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$10.7 \cdot 10^{-3}$	$71.2 \cdot 10^{-3}$	$264.5 \cdot 10^{-3}$
Hong de tercer orden robustecido	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$32 \cdot 10^{-3}$	*	$20.7 \cdot 10^{-3}$	$16.9 \cdot 10^{-3}$	$123.5 \cdot 10^{-3}$	$396 \cdot 10^{-3}$
Hong de cuarto orden robustecido	$6.16 \cdot 10^{-5}$	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$6.68 \cdot 10^{-4}$	$10.8 \cdot 10^{-3}$	$12 \cdot 10^{-3}$	$18.4 \cdot 10^{-3}$	$158 \cdot 10^{-3}$	$503 \cdot 10^{-3}$
LQR robustecido	*	*	*	*	$27 \cdot 10^{-3}$	$12.3 \cdot 10^{-3}$	$61.3 \cdot 10^{-3}$	$250 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 6.2: Tabla comparativa de la precisión de los controladores utilizados para estabilizar el sistema carro-péndulo con un tiempo de muestreo de un milisegundo.

En la tabla se puede observar que la precisión tanto en los estados como en la superficie de deslizamiento alcanzada por los controladores de segundo orden, el Control Integral Discontinuo y el Controlador de Hong de segundo orden robustecido, ya no es superada de forma significativa por controladores de mayor orden como se ve en las gráficas (6.13) y (6.14).

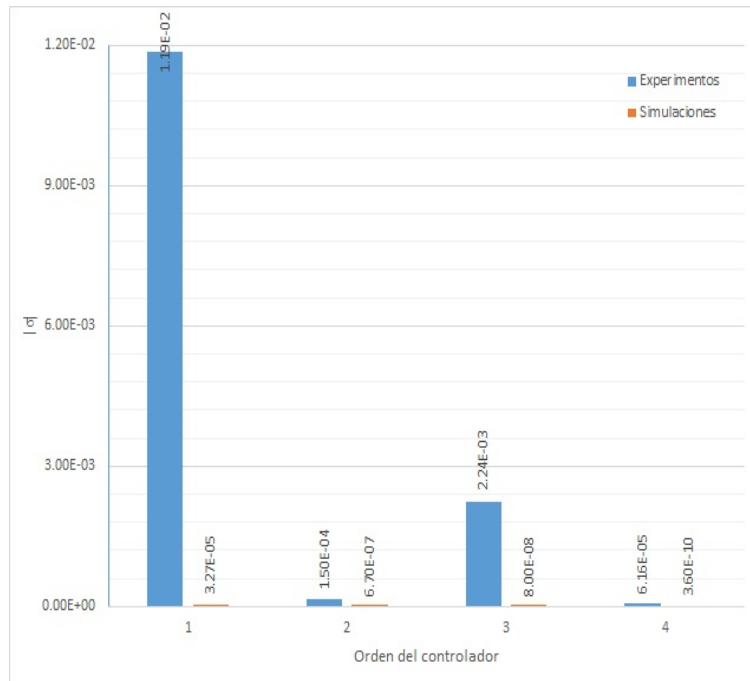


Figura 6.13: Precisión de la superficie de deslizamiento.

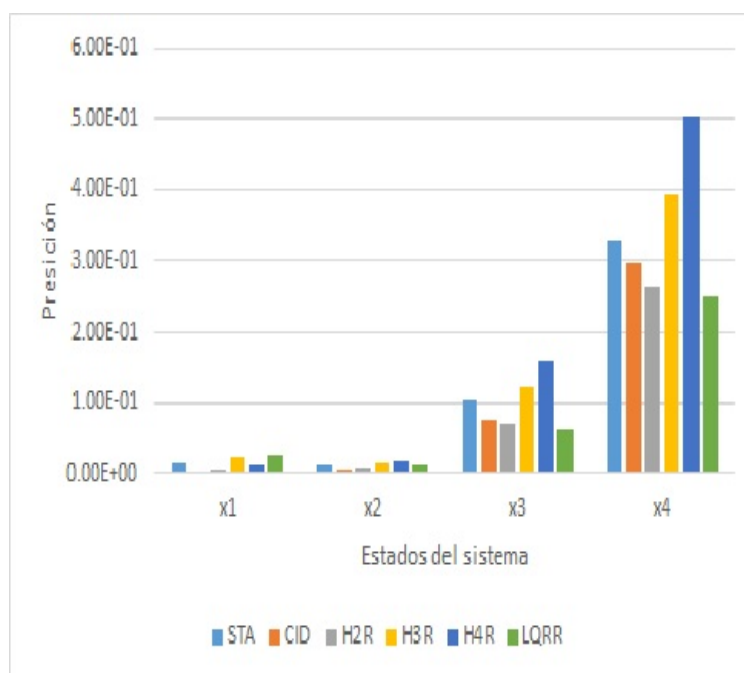


Figura 6.14: Precisión de los estados del sistema experimental.

En la gráfica (6.13) se puede observar la diferencia que existe entre la precisión obtenida, por un sistema ideal (simulaciones), y un sistema real (experimentos).

Se puede ver que en las simulaciones, la precisión aumenta conforme aumenta el orden del controlador, mientras que, en los experimentos la precisión alcanzado por el controlador de orden dos ya no es superada, significativamente, e incluso en el controlador de tercer orden empeora, debido a que es más difícil sintonizar sus ganancias, entonces, se puede decir que, el controlador que más conviene implementar en el sistema real es el de segundo orden.

Este resultado se lo podemos atribuir a que, aunque se aumente el orden del controlador, los sensores y actuadores del sistema ya no permiten más precisión tanto en las mediciones como en las señales de control y, por lo tanto, está por demás que se implemente un controlador de mayor orden. En la teoría no existe una forma para determinar el orden de controlador más adecuado para un sistema y lo único que se puede hacer es probar todos los controladores de orden menor o igual al grado relativo del sistema y analizar los resultados para determinar el que mejor desempeño tiene como se hizo este caso.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se trabajaron las dos partes que conciernen al diseño de controladores por modos deslizantes de orden superior:

- 1.-El diseño de una variable de deslizamiento de grado relativo arbitrario.
- 2.-El diseño de un controlador adecuado que force a las trayectorias del sistema a entrar en la superficie de deslizamiento.

Para el diseño de las variables de deslizamiento se usó el enfoque LQ singular, y se realizó el diseño de forma automática por medio de la función SSLQ de Matlab propuesta en [Castillo y Fridman, 2013].

Los controladores por modos deslizantes de orden superior implementados son de señal continua y compensan exactamente las perturbaciones, con primera derivada temporal acotada y acoplada al canal de control.

Puesto que solo se cuenta con controladores continuos que pueden llevar a cero variables de deslizamiento de grado relativo uno y dos, se utilizó el algoritmo de robustecimiento via Super-Twisting [Castillo et al., 2014] para robustecer controladores de orden arbitrario con convergencia en tiempo finito (Control de Hong), y también controladores de convergencia exponencial (LQR).

El trabajo principal de esta tesis consistió en la implementación de los controladores por modos deslizantes de orden superior continuos, en un sistema carro-péndulo, en el cual la tarea de control consiste principalmente en estabilizar el sistema en el punto de equilibrio inestable.

Una vez implementados todos los controladores se pudo hacer un análisis de los resultados y de esta manera determinar que controlador es el más adecuado para cumplir con la tarea de control. De los resultados obtenidos se puede concluir que en simulaciones el controlador que mejor desempeño tuvo fue de cuarto orden, ya que logra una mayor precisión en los estados del sistema (como se predice teóricamente).

Finalmente, en los experimentos los mejores resultados fueron obtenidos con el Control Integral Discontinuo y con el Controlador de Hong de segundo orden robustecido, ambos de orden dos. Aún cuando en el artículo [Levant, 1993] se menciona que la precisión de los controladores está ligada al orden de estos, en la implementación existen no idealidades que hacen que el funcionamiento de los controladores sea mermado, por lo cual la precisión alcanzada por un controlador de orden dos no puede ser superada por uno de mayor orden o en su defecto resulta poco práctico la implementación de controladores de orden mayor.

Apéndice A

Diagramas de Simulink y archivos de Matlab

Para realizar las simulaciones y los experimentos en tiempo real se utilizó el software Matlab y Simulink. A continuación, se presentan los diagramas de Simulink y los archivos de las funciones programadas, utilizados en la implementación de los controladores tanto en las simulaciones como en los experimentos.

A.1. Diagrama de simulación

En la figura (A.1) se muestra el diagrama general utilizados en las simulaciones realizadas.

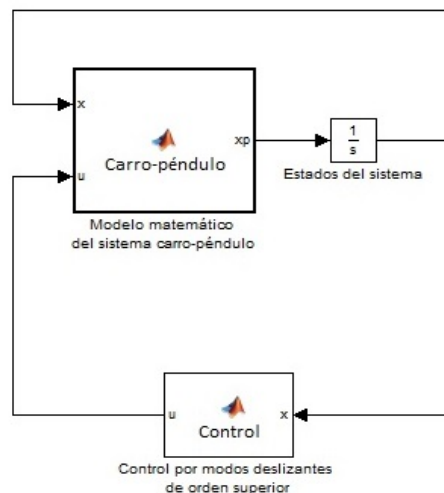


Figura A.1: Diagrama de Simulink para las simulaciones.

En el bloque Carro-péndulo está programado el modelo matemático del sistema carro-péndulo figura (A.2), dicho bloque recibe la señal de control u proveniente del bloque Control. La salida del bloque Carro-péndulo es la derivada del vector de estados, por esta razón se utiliza un bloque integrador para obtener los estados del sistema. En el bloque de control esta programado el algoritmo de control implementado.

```

1  function xp =carropendolo(x,u)
2  - x1=x(1);
3  - x2=x(2);
4  - x3=x(3);
5  - x4=x(4);
6  - m=0.872;
7  - l=0.011;
8  - fc=0.5;
9  - fg=1.203;
10 - fp=6.65e-5;
11 - jp=0.00292;
12 - g=9.81;
13 - p1=9.4;
14 - p2=-0.548;
15 - a1=jp/(m*l);
16 - a2=l/l;
17 - b=a1*a2;
18 - k1=p1/(m*l);
19 - k2=(fc-p2)/(m*l);
20 - k3=fp/(m*l);
21 - f=sin(5*t)+2*cos(3*t)+2;
22 - d=b-(cos(x2))^2;
23 - w1=k1*(u+f)+(x4^2)*sin(x2)-k2*x3;
24 - w2=-g*sin(x2)-k3*x4;
25 - xp3=(a1*w1+w2*cos(x2))/d;
26 - xp4=(a2*w2+w1*cos(x2))/d;
27 - xp=[x3,x4,xp3,xp4]';

```

Figura A.2: Modelo matemático del carro-péndulo programado en Matlab.

A.2. Diagrama de experimento

En la figura (A.3) se muestra el diagrama de bloques programado en simulink para el control en tiempo real del sistema carro-péndulo.

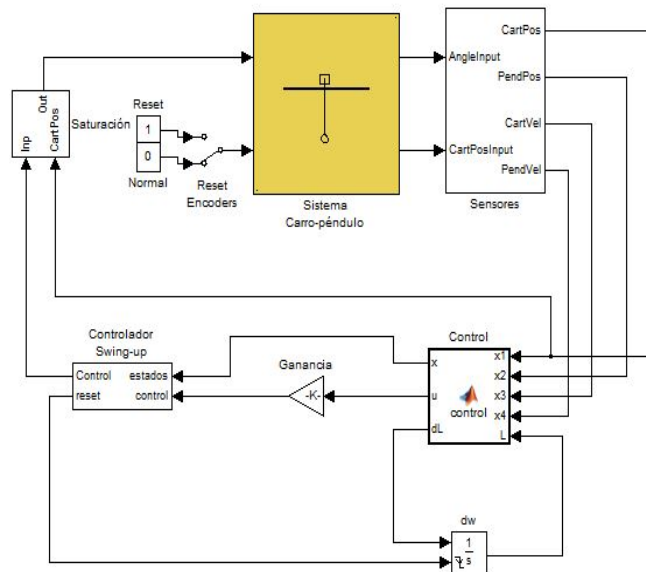


Figura A.3: Diagrama de Simulink general para los experimentos.

En el bloque Sistema carro-péndulo se encuentran los driver necesarios para la comunicación con los sensores y actuadores del sistema. En el bloque Sensores se tiene la adecuación de las señales recibidas desde los sensores, además que, como los sensores solo miden posiciones, las velocidades son calculadas mediante un derivador de Levant [Levant, 2003], que permite una mayor precisión que la diferenciación numérica. El bloque de Control tiene programado el algoritmo de control a implementar. En el bloque Controlador Swing up se programa el algoritmo descrito en la sección (3.1.2). Por último, en el bloque Saturación se programa un algoritmo que evite que la señal de control crezca hasta ciertos valores que puedan dañar al actuador.

A.3. Archivos de Matlab

En la figura (A.4) se tiene el programa de las funciones necesarias para realizar cálculos referentes al modelado del sistema, diseño de variables de deslizamiento y diseño de las ganancias un control LQR.

```

%Parámetros del sistema carro-péndulo
m=0.872;
l=0.011;
fc=0.5;
fs=1.203;
fp=6.65e-5;
jp=0.00292;
g=9.81;
p1=9.4;
p2=-0.548;
a1=jp/(m*l);
a2=l/l;
b=a1*a2;
k1=p1/(m*l);
k2=(fc-p2)/(m*l);
k3=fp/(m*l);
%Modelo matemático lineal del carro-péndulo
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 g/(1-b) a1*k2/(1-b) k3/(1-b);0 a2*g/(1-b) k2/(1-b) k3/(1-b)];
B=[0 0 a1*k1/(b-1) k1/(b-1)]';
C=[1 1 0 0];
%Controlabilidad
Co=ctrb(A,B);
r1=rank(Co);
%Observabilidad
Ob=obsv(A,C);
r2=rank(Ob);
%Transformación de similaridad
Tin=ctrb(A,B);
T=inv(Tin);
s1=[T(4) T(8) T(12) T(16)];
s2=[T(4) T(8) T(12) T(16)]*A;
s3=[T(4) T(8) T(12) T(16)]*A^2;
s4=[T(4) T(8) T(12) T(16)]*A^3;
S=[s1;s2;s3;s4];
det(S);
Ab=S*A*inv(S);
Eb=S*B;
Cb=C*inv(S);
%Matriz de ganancias del control LQR
Q=[51.84 72.36 0 0;72.36 537 0 0;0 0 24.2 2;0 0 2 90];
R=1;
K=lqr(A,B,Q,R);
%Diseño de las variables de deslizamiento
Qb=[54380 0 13175 0;0 1 0 0;13175 0 3399 0;0 0 0 0];
Gain=1;
[T,SS,QC,Ueqn,algorithm] = SSLQ(A,B,Qb,Gain)

```

Figura A.4: Archivo de las funciones programadas en Matlab.

Bibliografía

- [Ackermann y Utkin, 1998] Ackermann, J. y Utkin, V. (1998). Sliding mode control design based on ackermann's formula. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(2):234–237.
- [Castillo, 2013] Castillo, A. I. (2013). Diseño de superficies por modos deslizantes de alto orden: enfoque lq singular. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [Castillo y Fridman, 2013] Castillo, I. y Fridman, L. (2013). Matlab toolbox for singular lq based sliding mode control design. En *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 4242–4247. IEEE.
- [Castillo et al., 2014] Castillo, I., Moreno, J. A., y Fridman, L. (2014). Robustificación de controladores de grado relativo arbitrario vía algoritmo super-twisting.
- [Chen, 1995] Chen, C.-T. (1995). *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc.
- [Gabasov y Kirillova,] Gabasov, R. y Kirillova, F. M. *Singular optimal controls*.
- [Hernández et al., 2013] Hernández, D., Castanos, F., y Fridman, L. (2013). Pole-placement in higher-order sliding-mode control. *arXiv preprint arXiv:1309.3317*.
- [Hong et al., 2005] Hong, Y., Wang, J., y Xi, Z. (2005). Stabilization of uncertain chained form systems within finite settling time. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(9):1379–1384.
- [INTECO, 2008] INTECO (2008). Pendulum-cart system user's manual.
- [INTECO, 2013] INTECO (2013). Rtdac4/pci user's manual.
- [Jacobson y Speyer, 1971] Jacobson, D. H. y Speyer, J. L. (1971). Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems: A limit approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34(2):239–266.

- [Kamal et al., 2014] Kamal, S., Chalanga, A., Moreno, J., Fridman, L., y Bandyopadhyay, B. (2014). Higher order super-twisting algorithm. En *Variable Structure Systems (VSS), 2014 13th International Workshop on*, pages 1–5. IEEE.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). Nonlinear systems.
- [Levant, 1993] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263.
- [Levant, 2003] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941.
- [Levant, 2005] Levant, A. (2005). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11):1812–1816.
- [Levant, 2007] Levant, A. (2007). Finite differences in homogeneous discontinuous control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(7):1208–1217.
- [Levant, 2010] Levant, A. (2010). Chattering analysis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(6):1380–1389.
- [Levant y Fridman, 2010] Levant, A. y Fridman, L. M. (2010). Accuracy of homogeneous sliding modes in the presence of fast actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(3):810.
- [Ogata, 2010] Ogata, K. (2010). Modern control engineering.
- [Shtessel et al., 2014] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., y Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*. Springer.
- [Slotine et al., 1991] Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied nonlinear control*, volume 60. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- [Utkin, 1992] Utkin, V. I. (1992). *Sliding modes in control and optimization*, volume 116. Springer-Verlag Berlin.
- [Zamora et al., 2013] Zamora, C. A., Moreno, J. A., y Kamal, S. (2013). Control integral discontinuo para sistemas mecánicos.