



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

ALGORITMO TWISTING CONTINUO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
VÍCTOR MANUEL TORRES GONZÁLEZ

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. LEONID FRIDMAN, FI-UNAM

MÉXICO, D. F., OCTUBRE DE 2015



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez  
Secretario: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez  
Vocal: Dr. Leonid Fridman  
1er Suplente: Dr. Luis Álvarez Icaza Longoria  
2do Suplente: Dr. Fernando Castaños Luna

Lugar donde se realizó la tesis:

**Universidad Nacional Autónoma de México, D.F., Facultad de Ingeniería.**

TUTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman

---



*A mis padres y mi hermano  
Por siempre apoyarme a volver realidad mis sueños...*



# Agradecimientos

A toda mi familia, principalmente a mis padres Mónica González y Víctor Torres, así como a mi hermano Braulio Torres, por ser ejemplos a seguir, estar siempre conmigo y apoyarme a realizar cada una de las metas que me propongo.

A mis amigos, Juan Cortés, Héctor Carmona, Alba Núñez, Areli Cano, Erick González y Montserrat Sánchez, por su amistad incondicional a lo largo de los años, por impulsar y apoyar mi decisión de realizar un posgrado, además, por toda su ayuda y motivación durante los estudios de maestría.

A mis compañeros y nuevos amigos Raúl Canseco, Mauricio Guerrero, Paul Fernández, Oscar Hernández, Fernando Ortiz, Francisco Rosas, Raúl Cayetano y Alejandro Apaza, por su paciencia y compartir parte de sus conocimientos conmigo, y por supuesto, por hacer más amenos los días en la Universidad.

A los profesores del Colegio de Control Automático de la UNAM, especialmente a los Doctores Leonid Fridman y Jaime Moreno, por su confianza, así como su apoyo, conocimiento y orientación para realizar esta tesis.

A todo el grupo de Control por Modos Deslizantes, por todas sus críticas y comentarios en pro de enriquecer el trabajo realizado.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	1
1.2. Estado del Arte . . . . .	2
1.2.1. Primera generación: Modos deslizantes convencionales . . . . .	2
1.2.2. Segunda generación: Modos deslizantes de segundo orden . . . . .	2
1.2.3. Tercera generación: Super-Twisting . . . . .	3
1.2.4. Cuarta generación: Algoritmos de orden superior . . . . .	3
1.2.5. Quinta generación: Algoritmos continuos de orden superior . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Contribuciones . . . . .	4
1.5. Preliminares . . . . .	5
1.5.1. Notación . . . . .	5
1.5.2. Homogeneidad ponderada . . . . .	5
1.5.3. Formas Clásicas . . . . .	6
1.5.4. Formas Generalizadas . . . . .	6
1.5.5. Teorema de Pólya y construcción de sistemas de desigualdades lineales . . . . .	6
1.5.6. Solución de sistemas de desigualdades lineales y conos poliédricos . . . . .	9
1.5.7. Nociones de estabilidad . . . . .	9
1.6. Organización de la tesis . . . . .	10
<b>2. Análisis de Algoritmo Twisting con funciones de Lyapunov suaves y homogéneas</b>	<b>11</b>
2.1. Modos deslizantes de segundo orden . . . . .	11
2.2. Algoritmo Twisting . . . . .	12
2.3. Sistema Nominal . . . . .	13
2.3.1. Función de Lyapunov suave y homogénea . . . . .	13
2.3.2. Positividad Definida . . . . .	14
2.3.3. Negatividad Definida . . . . .	15
2.4. Sistema perturbado . . . . .	17
2.5. Aplicación del Algoritmo Twisting . . . . .	20
<b>3. Algoritmo Twisting Continuo</b>	<b>23</b>
3.1. Sistema Nominal . . . . .	23
3.1.1. Función de Lyapunov para sistema nominal . . . . .	24
3.1.2. Positividad Definida de $V(x)$ . . . . .	25
3.1.3. Negatividad Definida de $\dot{V}(x)$ . . . . .	26

3.1.4.	Determinación de resultados . . . . .	28
3.2.	Sistema perturbado . . . . .	31
3.2.1.	Función de Lyapunov para el sistema perturbado . . . . .	31
3.2.2.	Determinación de cota máxima de la perturbación admisible . . . . .	31
3.3.	CTA para cota arbitraria de perturbación . . . . .	33
3.3.1.	Escalamiento de las ganancias . . . . .	34
3.3.2.	Escalamiento de la función de Lyapunov . . . . .	34
3.4.	Precisión del CTA . . . . .	36
<b>4.</b>	<b>Algoritmo Twisting Continuo mediante retroalimentación de salida</b>	<b>41</b>
4.1.	Control mediante retroalimentación de salida usando derivadores de orden superior por modos deslizantes . . . . .	41
4.2.	Control mediante retroalimentación de salida usando observador de estados por modos deslizantes . . . . .	42
4.3.	Conexión observador-controlador . . . . .	46
4.3.1.	Sistema nominal . . . . .	47
4.3.2.	Sistema perturbado . . . . .	48
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
5.1.	Trabajo futuro . . . . .	53
	<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El control automático es una disciplina que continuamente adquiere mayor importancia en diversas aplicaciones industriales y que ha desempeñado un papel vital en el avance de la ingeniería. Generalmente, el diseño de un controlador se comienza realizando estudio del sistema que se pretende controlar, de forma convencional esto se realiza a partir de un modelo matemático del mismo del cual es posible obtener información adicional que en muchos casos simplifica el diseño de dicho controlador. La deducción del modelo matemático radica en el conocimiento del sistema que se desea controlar, es un hecho que entre más información se tenga sobre el sistema en cuestión, más exacto y detallado será el modelo y, por lo tanto, se espera que el controlador diseñado presente un desempeño superior en comparación a un diseño basado en un modelo simplificado.

Con el avance de la tecnología surgen sistemas de los cuales no es posible obtener un modelo matemático preciso, por razones tales como su complejidad, dinámicas que no puede ser modeladas, o bien por las perturbaciones desconocidas que actúan sobre el sistema. Por estas y otras razones el diseño de controladores para sistemas inciertos representa un reto importante para los ingenieros de control.

### 1.1. Planteamiento del Problema

Se considera un sistema dinámico formado por un doble integrador

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \Delta(t) + u,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $x_1$  y  $x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados del sistema,  $u \in \mathbb{R}$  es la señal de control y  $\Delta(t)$  representa incertidumbres y/o perturbaciones externas. Se asume que  $\Delta(t)$  es una función Lipschitz y que su derivada respecto al tiempo es acotada. También se supone que esta cota es conocida.

Mediante un controlador dinámico continuo por retroalimentación de estados se requiere que los estados  $x_1$  y  $x_2$  converjan a cero en tiempo finito y permanezcan ahí para todo tiempo futuro a pesar de la perturbación  $\Delta(t)$ .

## 1.2. Estado del Arte

Existen varias tendencias para controlar sistemas con alto grado de incertidumbre. Dos que gozan gran popularidad actualmente son la teoría de  $\mathcal{H}_\infty$  y control por modos deslizantes. La teoría de  $\mathcal{H}_\infty$  es una técnica bien estudiada que permite solucionar problemas de forma muy general. Sin embargo se requiere que las incertidumbre pertenezcan al espacio  $\mathcal{L}_2$  (desvanecientes con el tiempo) y no se logra su compensación exacta. Esto es una condición poco factible en situaciones reales, pues se supone que la perturbación no tendrá efecto alguno conforme el tiempo transcurra.

Otra de las técnicas más eficaces para controlar sistemas con alto grado de incertidumbre es el control basado en modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés) (Utkin *et al.*, 2009; Edwards y Spurgeon, 1998), la técnica desde sus inicios, y hasta la redacción de esta tesis ha logrado avances significativos, los cuales se mencionan a continuación de forma breve.

### 1.2.1. Primera generación: Modos deslizantes convencionales

De forma general, el diseño de controladores por modos deslizantes convencionales se basa en la elección adecuada de una variable de interés  $\sigma$ , la cual se desea hacer converger a cero y lograr que se mantenga en dicho valor a pesar de las perturbaciones y/o incertidumbres del sistema. Para realizar esta tarea es necesario efectuar una acción discontinua de alta frecuencia (teóricamente infinita), cabe mencionar que esta variable de interés debe de tener grado relativo uno respecto a la señal de control. Este enfoque tiene la propiedad de lograr la convergencia en tiempo finito de la variable interés  $\sigma$  a la superficie de deslizamiento (la cual también forma parte del diseño con base en el objetivo de control) a pesar de la existencia de perturbaciones acopladas a la señal de control, sin embargo la acción de control resultante es también una señal discontinua con un efecto de alta frecuencia denominado *chattering*, el cual no es deseable en la mayoría de las aplicaciones reales.

Existen alternativas para utilizar modos deslizantes con el fin de lograr la convergencia a cero de  $\sigma$  aunque esta no tenga grado relativo uno, sin embargo, mediante este enfoque la convergencia a cero de  $\sigma$  se logra de manera asintótica.

### 1.2.2. Segunda generación: Modos deslizantes de segundo orden

Con el fin de eliminar la limitante del grado relativo uno respecto de la variable de interés  $\sigma$  respecto a la señal de control, surgieron los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden. Estos aseguran la convergencia a cero en tiempo finito de  $\sigma$  y su derivada  $\dot{\sigma}$ .

Esta clase de algoritmos, a diferencia de los controladores por modos deslizantes convencionales, presenta precisión cuadrática en  $\sigma$  respecto al paso de muestreo  $\tau$ . Cabe mencionar que los controladores por modos deslizantes de segundo orden tienen la ventaja que en sistemas con grado relativo dos respecto a  $\sigma$  no es necesario diseñar superficie de deslizamiento, esto no ocurre en sistemas con grado relativo mayor, y de igual forma que los controladores por modos deslizantes convencionales, son capaces de compensar perturbaciones acotadas.

Sin embargo, aunque en menor medida que los controladores por modos deslizantes convencionales, la acción de control sigue siendo discontinua ocasionando el efecto nocivo de *chattering* (Boiko *et al.*, 2004).

Otro problema que continua sin solución empleando este tipo de controladores es la compensación exacta de una perturbación en sistemas SISO con grado relativo arbitrario.

### 1.2.3. Tercera generación: Super-Twisting

Este controlador utiliza un modo deslizante de segundo orden; sin embargo, el controlador está diseñado para ser usado en sistemas con grado relativo uno respecto a  $\sigma$ . Esto permite la convergencia en tiempo finito de la variable de interés mediante una señal de control continua. Si se desea emplear este algoritmo en sistemas con grado relativo mayor a uno, es necesario diseñar una superficie de deslizamiento con lo cual la convergencia de  $\sigma$  se llevará a cabo de manera asintótica. El controlador Super-Twisting es capaz de compensar perturbaciones cuyas derivadas estén acotadas, sin embargo estas perturbaciones no pueden crecer más rápido que una función lineal del tiempo.

Es importante mencionar que la estructura del Super-Twisting es empleada para la construcción de derivadores para funciones cuyas derivadas sean Lipschitz, donde, a diferencia de derivadores basados en filtros pasa altas o derivadores de alta ganancia, el derivador basado en Super-Twisting proporciona una señal exacta, debido a la convergencia en tiempo finito.

### 1.2.4. Cuarta generación: Algoritmos de orden superior

La limitante del grado relativo para lograr la convergencia en tiempo finito de las variables de interés, motivó el estudio y desarrollo de una nueva clase de algoritmos. De esta forma surgen los controladores por modos deslizantes de orden superior, (HOSMC por sus siglas en inglés) que se emplean en sistemas con grado relativo  $r$  respecto a la variable de interés  $\sigma$  para lograr la convergencia de la misma y de sus  $r - 1$  derivadas en tiempo finito.

La propiedad que permite su aplicación en sistemas con grado relativo arbitrario radica en el hecho de que estos controladores son construidos de forma recursiva aprovechando su homogeneidad.

Esta clase de controladores requieren la información de  $\sigma$  y sus  $r - 1$  derivadas. Esto generalmente es solucionado con el uso de derivadores por modos deslizantes de orden arbitrario, los cuales proporcionan las derivadas necesarias de una señal de interés en tiempo finito, esto evita el diseño de superficie de deslizamiento ya que el orden del controlador se puede extender hasta el grado relativo necesario.

A pesar de las múltiples ventajas de los HOSMC, la señal de control es discontinua.

### 1.2.5. Quinta generación: Algoritmos continuos de orden superior

Esta familia de controladores corresponden a los denominados controladores continuos por modos deslizantes de orden superior (CHOSMC, por sus siglas en inglés) (Fridman *et al.*, 2015; Basin y Rodríguez-Ramírez, 2014; Kamal *et al.*, 2014; Zamora *et al.*, 2013). Estos algoritmos basados en el Super-Twisting tienen la característica de lograr la convergencia en tiempo finito de  $\sigma$  aun cuando esta posea grado relativo arbitrario respecto a la señal de control y son capaces de compensar perturbaciones tipo Lipschitz empleando una señal de control continua.

Para sistemas con grado relativo dos, los CHOSMC tienen pesos de homogeneidad tres y dos para  $\sigma$  y  $\dot{\sigma}$  respectivamente, lo que garantiza una precisión cúbica y cuadrática de las variables de interés con respecto al paso de muestreo  $\tau$ . Esta clase de controladores requieren la información de  $\sigma$  y  $\dot{\sigma}$ .

En la siguiente tabla se muestra una comparación de las cinco generaciones de controladores por modos deslizantes

Generación	Grado relativo	información	Perturbación	Control
1	1	$\sigma$	Acotada	Discontinuo
2	2	$\sigma, \dot{\sigma}$	Acotada	Discontinuo
3	1	$\sigma$	Lipschitz	Continuo
4	r	$\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$	Acotada	Discontinuo
5	r	$\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$	Lipschitz	Continuo

### 1.3. Objetivos

Para el problema planteado y dadas las características de las distintas generaciones de controladores por modos deslizantes en esta tesis se realizará lo siguiente

- Se construirá una función de Lyapunov suave empleando la metodología propuesta en Sánchez y Moreno (2014), para analizar condiciones que garanticen la convergencia del sistema considerado al aplicársele el algoritmo Twisting

$$u = -k_1 \text{sign}(x_1) - k_2 \text{sign}(x_2).$$

Se demostrará que las condiciones determinadas coinciden con las que se encuentran disponibles en literatura existente, lo cual valida el método propuesto para la construcción de funciones de Lyapunov.

- Mediante el controlador continuo por modos deslizantes de quinta generación

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2) + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_3 \text{sign}(x_1) - k_4 \text{sign}(x_2), \end{aligned}$$

se resolverá el problema planteado, y se demostrarán condiciones que garantizan su estabilidad mediante una función de Lyapunov suave, la cual será construida empleando la misma metodología para la construcción de la función de Lyapunov suave propuesta en el caso del algoritmo Twisting.

- Con el fin de facilitar y extender la aplicación del algoritmo propuesto, se analizará y determinarán condiciones de estabilidad para realizar control a través de retroalimentación de salida empleando el observador de estados

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -l_1 |\hat{x}_1 - x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -l_2 |\hat{x}_1 - x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1) + \epsilon \\ \dot{\epsilon} &= -l_3 \text{sign}(\hat{x}_1 - x_1). \end{aligned}$$

### 1.4. Contribuciones

- Función de Lyapunov suave para el Algoritmo Twisting.
- Propuesta de un método para determinar la cota máxima de la perturbación admisible en una clase de sistemas homogéneos perturbados dada su función de Lyapunov para el caso nominal.

- Análisis del controlador de quinta generación y un método para ajustar sus ganancias con el conocimiento de la cota de la derivada de la perturbación en el sistema.
- Propuesta de un método simple para verificar y garantizar la estabilidad de la conexión de observadores y controladores por modos deslizantes.

## 1.5. Preliminares

### 1.5.1. Notación

Debido a que términos como  $|x|^\gamma \text{sign}(x)$  se utilizarán constantemente a lo largo de esta tesis, se define una forma compacta para escribirlos

$$|\cdot|^\gamma \text{sign}(\cdot) = [\cdot]^\gamma, \quad 0 < \gamma \in \mathbb{R}.$$

Nótese que en el caso de que el exponente  $\gamma$  sea un número entero impar

$$[x]^{2q+1} = x^{2q+1}, \quad q = 1, 2, \dots,$$

y como caso particular

$$[\cdot]^0 = \text{sign}(\cdot).$$

En los Capítulos 2 y 3 con frecuencia se utilizarán sistemas de desigualdades lineales los cuales son expresados mediante

$$A\lambda > [0],$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ . La notación se emplea para indicar que cada uno de los  $p$  elementos del vector resultante es positivo.

### 1.5.2. Homogeneidad ponderada

**Definición 1.1.** (Bacciotti y Rosier, 2006) Para un conjunto de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , y sea  $r = (r_1, \dots, r_n)$  un conjunto de  $n$  números reales positivos.

- La familia de dilataciones de un parámetro  $(\delta_\varepsilon^r)_{\varepsilon > 0}$  (asociado con  $r$ ) se define por

$$\delta_\varepsilon^r(x) := (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n),$$

los números  $r_i$  son los pesos de las coordenadas.

- Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice  $\delta^r$  homogénea de grado  $m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) si

$$V(\delta_\varepsilon^r(x)) = \varepsilon^m V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0.$$

- Un campo vectorial  $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  se dice  $\delta^r$  homogéneo de grado  $v$  si el componente  $f_i$  es  $\delta^r$  homogéneo de grado  $v + r_i$  para cada  $i$ ; esto es

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{v+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \forall i \in [1, n].$$

### 1.5.3. Formas Clásicas

**Definición 1.2.** Una *forma clásica* es un polinomio de grado  $m$  tal que la suma de los exponentes de cada monomio corresponde al grado del polinomio.

Ejemplos de forma clásicas son los polinomios

$$\begin{aligned} H(x) &= x_1^3 - x_1x_2^2 + x_2^3, \\ M(x) &= x_1^5 + x_1^2x_3^3 - x_2^4x_3 + x_3^5. \end{aligned}$$

### 1.5.4. Formas Generalizadas

**Definición 1.3.** (Sánchez y Moreno, 2014)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una *forma generalizada*, si esta es homogénea y todos sus términos son solo sumas, productos y sumas de productos de términos como  $|\cdot|^\gamma$  y  $[\cdot]^\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Ejemplos de formas generalizadas son

$$\begin{aligned} F(x) &= |x_1|^{\frac{3}{2}} - x_1[x_2]^2 + |x_2|^3, \\ G(x) &= |x_1|^{\frac{5}{2}} + [x_1]^{\frac{5}{2}}[x_2]^0 - [x_1]^0[x_2]^5 - |x_2|^5. \end{aligned}$$

Es importante observar que a diferencia de las formas clásicas, las formas generalizadas pueden tener monomios con exponentes racionales.

Las formas generalizadas tienen dos propiedades importantes:

- El producto de dos formas generalizadas es una forma generalizada.
- La derivada parcial de una forma generalizada es una forma generalizada.

### 1.5.5. Teorema de Pólya y construcción de sistemas de desigualdades lineales

**Teorema 1.1.** (Pólya, 1928) Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una forma clásica y  $\mathbf{P} = \{(z_1, \dots, z_n) | z_i \geq 0\}$ . Si  $F$  es homogénea y positiva en  $\mathbf{P}$ , entonces existe una  $p$  suficientemente grande tal que todos los coeficientes de

$$\bar{F}(z) = (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^p F(z),$$

son positivos. □

El Teorema de Pólya es una herramienta que permite determinar condiciones necesarias y suficientes para garantizar la positividad definida de una forma clásica  $F(z)$  mediante la solución de un conjunto de desigualdades lineales.

La aplicación de este Teorema será mostrado mediante un ejemplo.

**Ejemplo 1.1.** Se desean determinar condiciones con las cuales la forma  $F(z)$  es definida positiva

$$F(z) = z_1^3 - bz_1z_2^2 + z_2^3, \quad 0 < b \in \mathbb{R}.$$

Aplicando el Teorema de Pólya con  $p = 1$

$$\bar{F}(z) = (z_1 + z_2)(z_1^3 - bz_1z_2^2 + z_2^3) = z_1^4 + z_1^3z_2 - bz_1^2z_2^2 + (1-b)z_1z_2^3 + z_2^4.$$



Debido a que la forma resultante contiene un coeficiente negativo no se pueden determinar condiciones que aseguren la positividad de  $F(z)$ , por tal motivo se aplicará el Teorema nuevamente con  $p = 2$

$$\bar{F}(z) = (z_1 + z_2)^2(z_1^3 - bz_1z_2^2 + z_2^3) = z_1^5 + 2z_1^4z_2 + (1-b)z_1^3z_2^2 + (1-2b)z_1^2z_2^3 + (2-b)z_1z_2^4 + z_2^5.$$

En este caso es posible apreciar que seleccionando un valor adecuado de  $b$ , todos los coeficientes de la forma resultante  $\bar{F}(z)$  serán positivos. Para esto se deben satisfacer las desigualdades

$$1 - b > 0, \quad 1 - 2b > 0, \quad 2 - b > 0,$$

de las cuales se puede concluir que una condición necesaria y suficiente para asegurar la positividad de  $F(z)$  es  $b < \frac{1}{2}$ .

Si el Teorema de Pólya se aplica con  $p = 3$  se pueden concluir las siguientes condiciones

$$3 - b > 0, \quad 2 - 3b > 0, \quad 1 - b > 0, \quad 3 - 3b > 0,$$

por lo tanto se determina que la positividad de la forma  $F(z)$  puede ser asegurada con  $b < \frac{2}{3}$ , este es un resultado que extiende la condición determinada con  $p = 2$ , por lo tanto, al incrementar el valor de  $p$  se pueden determinar condiciones más exactas. Esto es útil en el caso de analizar formas clásicas que contengan un mayor número de monomios.

## Ordenamiento

Dado que los coeficientes de la forma resultante  $\bar{F}$  son combinaciones lineales de los coeficientes de la forma  $F$ , las desigualdades que se obtienen al aplicar el Teorema de Pólya a una forma clásica pueden ser expresadas mediante un sistema de desigualdades lineales

$$A\lambda > [0], \tag{1.2}$$

donde  $\lambda$  es un vector formado por los coeficientes de la forma  $F$  evaluada.

La construcción de la matriz  $A$  se realiza considerando que el número de monomios en una forma clásica de grado  $m$  y  $n$  variables corresponde a la combinación de exponentes en las variables tales que la suma de los mismos corresponda al grado de la forma en cuestión es decir

$$N_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{1.3}$$

Existen  $N_n^m$  vectores  $q^{[j]}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_n^m$  tales que la suma de cada uno de sus componentes corresponde a  $m$

$$q^{[j]} = [q_1^{[j]} \quad q_2^{[j]} \quad \dots \quad q_n^{[j]}], \quad \sum_{i=1}^n q_i^{[j]} = m. \tag{1.4}$$

Al existir  $N_n^m$  monomios también existe el mismo número de coeficientes para dicha forma y por lo tanto, el conjunto de todos los vectores  $q^{[j]}$  corresponde a todas las combinaciones posibles que pueden tomar los exponentes de las  $n$  variables en la forma  $F$ .

Al aplicar el Teorema de Pólya con una  $p$  determinada se obtiene una forma clásica resultante de grado  $p+m$ , por lo tanto esta forma resultante contiene  $N_n^{p+m}$  monomios y coeficientes

de tal manera que los exponentes de esta forma resultante pueden ser ordenados en  $N_n^{p+m}$  elementos  $s^{[k]}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_n^{p+m}$  tales que la suma de cada uno de sus componentes es  $p + m$ .

$$s^{[k]} = \left[ s_1^{[k]} \quad s_2^{[k]} \quad \dots \quad s_n^{[k]} \right], \quad \sum_{i=1}^n s_i^{[k]} = p + m. \quad (1.5)$$

La función que expresa los coeficientes de la forma resultante está dada por

$$a\left(s^{[k]}\right) = \sum_{\{q^{[j]} \mid q^{[j]} \leq s^{[k]}\}} \frac{p!}{\left(s_1^{[k]} - q_1^{[j]}\right)! \dots \left(s_n^{[k]} - q_n^{[j]}\right)!} \lambda_j. \quad (1.6)$$

Por tal motivo los coeficientes de la forma resultante pueden ser representados mediante una matriz  $A \in \mathbb{R}^{N_n^{m+p} \times N_n^m}$  multiplicada al vector de coeficientes  $\lambda$ . La matriz  $A$  se construye mediante

$$A = [A_{k,j}], \quad A_{k,j} = \begin{cases} \frac{p!}{(s_1^k - q_1^j)! \dots (s_n^k - q_n^j)!} & \text{si } s_n \geq q_n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.7)$$

**Ejemplo 1.2.** Con el fin de mostrar este ordenamiento, mediante el Teorema de Pólya nuevamente se determinarán condiciones necesarias y suficientes para garantizar la positividad definida de la forma clásica  $F(z) = z_1^3 - bz_1z_2^2 + z_2^3$  utilizando  $p = 2$ .

El vector de coeficientes  $\lambda$  de la forma  $F(z)$  es

$$\lambda = [1 \quad 0 \quad -b \quad 1]^T, \quad (1.8)$$

y los vectores que contienen los exponentes de las formas  $F$  y  $\bar{F}$  se definen mediante

$$\begin{aligned} q^{[1]} &= [3 \quad 0] & s^{[1]} &= [5 \quad 0] \\ q^{[2]} &= [2 \quad 1] & s^{[2]} &= [4 \quad 1] \\ q^{[3]} &= [1 \quad 2] & s^{[3]} &= [3 \quad 2] \\ q^{[4]} &= [0 \quad 3] & s^{[4]} &= [2 \quad 3] \\ & & s^{[5]} &= [1 \quad 4] \\ & & s^{[6]} &= [0 \quad 5] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Empleando la ecuación (1.7) se construye la matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

De esta manera los coeficientes de la forma resultante  $\bar{F}$  están asociados a la expresión

$$A\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-b \\ 1-2b \\ 2-b \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

De este resultado se obtienen las desigualdades que deben satisfacerse para garantizar la positividad de la forma  $F(z)$ .

$$1 - b > 0, \quad 1 - 2b > 0, \quad 2 - b > 0,$$

las cuales coinciden con las obtenidas en el Ejemplo 1.1.

### 1.5.6. Solución de sistemas de desigualdades lineales y conos poliédricos

**Definición 1.4.** Un cono poliédrico  $C$  es el conjunto de todas las soluciones a un sistema de desigualdades lineales y homogéneas  $Ax \geq 0$ :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \geq 0\}, \quad (1.12)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ .

Un cono poliédrico puede ser descrito en términos de la intersección de todos los hemiespacios dados por los hiperplanos, o en términos de sus aristas. Esta idea es expresada en el Teorema de Minkowski-Weyl.

El programa de computo *skeleton* (Zolotykh, 2012) emplea el método de la doble descripción para obtener el conjunto de todos los rayos extremos (aristas) de un cono poliédrico, lo cual permite obtener (al menos teóricamente) todos los conjuntos que satisfacen el sistema de desigualdades mediante cualquier combinación convexa de estos rayos extremos. Para su ejecución basta con que el usuario ingrese la matriz  $A$  asociada al sistema de desigualdades que se pretende analizar.

### 1.5.7. Nociones de estabilidad

Se considera el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, d), \quad (1.13)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $d \in \mathbb{R}^m$  es una entrada externa que se asume acotada  $d \in \mathcal{L}_\infty$ , y  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función localmente Lipschitz,  $f(0, 0) = 0$ .

**Definición 1.5.** (Bernuau *et al.*, 2013) El sistema (1.13) se dice *entrada a estado prácticamente estable* (ISpS, por sus siglas en inglés), si existen funciones  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}$  y  $c \geq 0$  tales que para toda  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y cualquier entrada  $d \in \mathcal{L}_\infty$  la solución  $x(t)$  existe y satisface

$$\|x(t, x_0, d)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|d\|_{[0,t]}) + c \quad \forall t \geq 0.$$

La función  $\gamma$  se denomina *ganancia asintótica no lineal*. El sistema es llamado *entrada estado estable* (ISS, por sus siglas en inglés) si  $c = 0$ .

**Definición 1.6.** (Bernuau *et al.*, 2013) El sistema (1.13) se dice *entrada integral a estado estable* (iISS, por sus siglas en inglés) si existen funciones  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}$  y  $\beta \in \mathcal{KL}$  tales que para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $d \in \mathcal{L}_\infty$  se cumple

$$\alpha(\|x(t, x_0, d)\|) \leq \beta(\|x_0\|, t) + \int_0^t \gamma(\|d(s)\|) ds \quad \forall t \geq 0.$$

## 1.6. Organización de la tesis

El Capítulo 2 presenta los modos deslizantes de segundo orden así como el Algoritmo Twisting y sus condiciones de convergencia y un análisis mediante una función de Lyapunov suave y homogénea que permite validar el método de construcción empleado. En el Capítulo 3 se presenta el Algoritmo Twisting Continuo, el cual es uno de los algoritmos por modos deslizantes de quinta generación. El análisis de convergencia se realiza mediante una función de Lyapunov homogénea y suave. En el Capítulo 4 se muestra el análisis del controlador Twisting continuo mediante retroalimentación de salida empleando un observador robusto ante perturbaciones Lipschitz, así mismo se presentan condiciones que garantizan la estabilidad de la conexión del sistema controlador-observador. Finalmente en el Capítulo 5 se exponen las conclusiones y el trabajo futuro.

## Capítulo 2

# Análisis de Algoritmo Twisting con funciones de Lyapunov suaves y homogéneas

Tal como se mencionó brevemente en la introducción, los controladores por modos deslizantes de primer orden requieren que la señal de control aparezca explícitamente en la primera derivada de la variable de deslizamiento  $\sigma$  es decir, se requiere grado relativo uno respecto a la señal de control. Mediante la elección de una superficie de deslizamiento adecuada es posible extender esta restricción a sistemas con grados relativos mayores a uno. Supóngase que se requiere mantener la variable de deslizamiento  $s$  en cero, sin embargo el control aparece de forma explícita en  $\ddot{s}$ ; para solucionar esto la variable de deslizamiento puede ser elegida como  $\sigma = s + \dot{s}$ , por lo tanto  $\dot{\sigma} = \dot{s} + \ddot{s}$  de esta forma es posible aplicar control por modos deslizantes de primer orden, esto asegurará la convergencia en tiempo finito de  $\sigma$ , sin embargo solo se logrará convergencia asintótica de la variable de interés  $s$ .

### 2.1. Modos deslizantes de segundo orden

Se considera una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

De la cual se escoge una función de salida suave  $\sigma = \sigma(x)$  tal que  $\sigma(x)$  y  $\dot{\sigma}(x)$  son funciones continuas de  $x$  (en el sentido de Filippov).

**Definición 2.1.** Se llama Modo deslizante de segundo orden a la dinámica asociada al comportamiento

$$\sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = 0. \quad (2.2)$$

Para ejemplificar la utilidad y funcionamiento de los modos deslizantes de segundo orden se considera el siguiente sistema

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad \sigma = \sigma(t, x). \quad (2.3)$$

El objetivo es lograr que  $\sigma = \sigma(t, x)$  converja a cero en tiempo finito, y mantener dicha variable en el valor deseado por medio de una acción de control discontinuo.

Se supone que  $\sigma$  tiene grado relativo dos respecto a la señal de control  $u$  por lo tanto

$$\ddot{\sigma} = h(t, x) + g(t, x)u, \quad (2.4)$$

donde las funciones  $h(t, x) = \ddot{\sigma}|_{u=0}$  y  $g(t, x) = \frac{\partial}{\partial u}\ddot{\sigma} \neq 0$  son funciones suaves desconocidas. Además de estas funciones se supone

$$0 < K_m \leq g(t, x) \leq K_M, \quad |h(t, x)| \leq \mu, \quad (2.5)$$

para  $K_m, K_M, \mu > 0$ , estas desigualdades se satisfacen al menos localmente en sistemas de la forma (2.3) con grado relativo dos bien definido.

Si se cumplen estas condiciones, entonces se satisface la siguiente inclusión diferencial

$$\ddot{\sigma} \in [-\mu, \mu] + [K_m, K_M]u. \quad (2.6)$$

La mayoría de los controladores por modos deslizantes de segundo orden se consideran controladores para la inclusión (2.6), estos algoritmos deben de asegurar la convergencia de  $\sigma$  y  $\dot{\sigma}$  en tiempo finito.

Es importante notar que (2.6), no tiene relación directa con (2.3) por lo que un controlador por modos deslizantes de segundo orden garantiza su robustez siempre y cuando se satisfagan las desigualdades expuestas. De ahí que el problema es diseñar

$$u = \psi(\sigma, \dot{\sigma}), \quad (2.7)$$

que satisfaga la inclusión diferencial (2.6).

## 2.2. Algoritmo Twisting

Históricamente, el Algoritmo Twisting fue el primer controlador por modos deslizantes de segundo orden propuesto en la literatura (Emel'Yanov *et al.*, 1986), el cual está descrito mediante

$$u = -k_1[\sigma]^0 - k_2[\dot{\sigma}]^0, \quad (2.8)$$

las constantes  $k_1$  y  $k_2$  son ganancias del controlador que deben ser ajustadas para satisfacer las restricciones planteadas.

**Teorema 2.1.** (Shtessel *et al.*, 2014) Sean  $k_1$  y  $k_2$  tales que satisfacen

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)K_m - \mu &> (k_1 - k_2)K_M + \mu \\ (k_1 - k_2)K_m &> \mu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

El controlador en la ecuación (2.8) garantiza la aparición de un modo deslizante de segundo orden  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$  atrayendo las trayectorias de la variable de deslizamiento en tiempo finito.  $\square$

La prueba de este Teorema puede ser verificada en Shtessel *et al.* (2014), la cual se realiza mediante argumentos geométricos. Sin embargo las condiciones de convergencia del Algoritmo Twisting también pueden ser obtenidas empleando funciones de Lyapunov.

Considerando  $x_1 = \sigma$  y  $x_2 = \dot{\sigma}$ , y al sustituir (2.8) en (1.1) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^0 - k_2[x_2]^0 + \Delta(t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

El sistema (2.10) será empleado en la construcción de una función de Lyapunov suave y homogénea, de las cuales se obtendrán condiciones para asegurar convergencia en tiempo finito de los estados  $x$ .

## 2.3. Sistema Nominal

Para efectos de análisis se supondrá que el sistema (2.10) está ausente de perturbaciones, es decir  $\Delta(t) = 0$ , por lo tanto el sistema que será analizado es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^0 - k_2[x_2]^0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

### 2.3.1. Función de Lyapunov suave y homogénea

Con la finalidad de determinar condiciones que garanticen que los estados de (2.11) converjan a cero se efectuará el análisis de este sistema mediante una función de Lyapunov suave y homogénea, para lo cual se empleará la metodología expuesta en Sánchez y Moreno (2014).

Primero se verifica el grado de homogeneidad y pesos del campo vectorial de (2.11)

$$\begin{aligned}f_1(\epsilon^{r_n} x_n) &= \epsilon^{r_2} x_2 = \epsilon^{r_1+v} x_2 \\ f_2(\epsilon^{r_n} x_n) &= -k_1[\epsilon^{r_1} x_1]^0 - k_2[\epsilon^{r_2} x_2]^0 = \epsilon^{r_2+v} (-k_1[x_1]^0 - k_2[x_2]^0).\end{aligned}\tag{2.12}$$

De lo cual se determina que el campo vectorial asociado a (2.11) tiene grado de homogeneidad  $v = -1$ , así como los pesos  $r = [2 \ 1]$  para las variables  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente.

Con esta información, y dado que el campo vectorial de (2.11) está formado por formas generalizadas, aprovechando las propiedades de las mismas se propone una función candidata de Lyapunov como una forma generalizada con la siguiente estructura

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \alpha_2 [x_1]^{\rho_1} [x_2]^{\rho_2} + \bar{\alpha}_3 [x_1]^{\rho_3} [x_2]^{\rho_4} + \alpha_4 |x_2|^{\frac{m}{r_2}},\tag{2.13}$$

donde  $m$  corresponde al grado de homogeneidad de la función candidata. Es importante señalar que la función candidata se propone de tal forma que esta contenga condiciones necesarias para la positividad definida, es decir términos con una sola variable con un signo positivo bien definido.

Los términos cruzados se agregan con el fin de obtener condiciones necesarias para asegurar

la negatividad definida en la derivada de esta función candidata.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \frac{m}{r_1} \alpha_1 [x_1]^{\frac{m-r_1}{r_1}} [x_2] + \underbrace{\rho_2 \alpha_2 [x_1]^{\rho_1} |x_2|^{\rho_2-1} (-k_1 [x_1]^0 - k_2 [x_2]^0)}_A + \rho_1 \alpha_2 |x_1|^{\rho_1-1} |x_2|^{\rho_2+1} \\
&\quad + \rho_4 \bar{\alpha}_3 [x_1]^{\rho_3} |x_2|^{\rho_4-1} (-k_1 [x_1]^0 - k_2 [x_2]^0) + \underbrace{\rho_3 \bar{\alpha}_3 |x_1|^{\rho_3-1} |x_2|^{\rho_4+1}}_B \\
&\quad + \frac{m}{r_2} \alpha_4 [x_2]^{\frac{m-r_2}{r_2}} (-k_1 [x_1]^0 - k_2 [x_2]^0). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Las constantes  $\rho_i$  deben ser seleccionadas de tal forma que en la derivada de la función candidata existan monomios de una sola variable con un signo negativo bien definido. Mediante la observación de los monomios denominados  $A$  y  $B$  en (2.14) es claro que se deben de seleccionar  $\bar{\alpha}_3 = -\alpha_3$  y  $\rho_2 = \rho_3 = 1$  para lograr esta condición.

Es importante señalar que (2.13) debe de cumplir las siguientes condiciones

- Para garantizar la diferenciabilidad de  $V(x)$

$$m > \text{máx } r_i.$$

- Para asegurar que  $V(x)$  sea una función homogénea se debe satisfacer

$$\begin{aligned}
r_1 \rho_1 + r_2 \rho_2 &= m \\
r_1 \rho_3 + r_2 \rho_4 &= m. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

De esta forma seleccionando  $m = 4$  y empleando las condiciones antes planteadas se expresa la función candidata de Lyapunov como

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^2 + \alpha_2 [x_1]^{\frac{3}{2}} x_2 - \alpha_3 x_1 [x_2]^2 + \alpha_4 |x_2|^4, \tag{2.16}$$

así como la derivada de (2.16) a lo largo de las trayectorias de (2.11)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= -\alpha_2 (k_1 + k_2 [x_1]^0 [x_2]^0) |x_1|^{\frac{3}{2}} + 2 (\alpha_1 + \alpha_3 (k_1 [x_1]^0 [x_2]^0 + k_2)) x_1 x_2 \\
&\quad + \frac{3}{2} \alpha_2 |x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2|^2 - (\alpha_3 + 4\alpha_4 (k_1 [x_1]^0 [x_2]^0 + k_2)) |x_2|^3. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Es evidente que la positividad de la función candidata (2.16) y la negatividad definida (2.17) es asegurada mediante una elección adecuada de los coeficientes  $\alpha_i$  y las ganancias  $k_1$  y  $k_2$ .

### 2.3.2. Positividad Definida

Se empleará el Teorema de Pólya para verificar la positividad de esta función candidata de Lyapunov, por tal motivo (2.16) se representará mediante un conjunto de formas clásicas empleando el cambio de variable

$$|x_1| = z_1^2, \quad |x_2| = z_2. \tag{2.18}$$



Al aplicar este cambio de variable en (2.16) se obtiene

$$V(z) = \alpha_1 z_1^4 + \alpha_2 z_1^3 z_2 [x_1]^0 [x_2]^0 - \alpha_3 z_1^2 z_2^2 [x_1]^0 [x_2]^0 + \alpha_4 z_2^4. \quad (2.19)$$

Esta forma clásica quedará completamente determinada al evaluarla en los distintos cuadrantes  $(x_1, x_2)$

- Cuadrantes  $(x_1 > 0, x_2 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0)$

$$V_1(z) = \alpha_1 z_1^4 + \alpha_2 z_1^3 z_2 - \alpha_3 z_1^2 z_2^2 + \alpha_4 z_2^4. \quad (2.20)$$

- Cuadrante  $(x_1 > 0, x_2 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0)$

$$V_2(z) = \alpha_1 z_1^4 - \alpha_2 z_1^3 z_2 + \alpha_3 z_1^2 z_2^2 + \alpha_4 z_2^4. \quad (2.21)$$

Los conjuntos de formas clásicas resultantes revelan que la función candidata es una función simétrica respecto al origen, por lo que con el fin de determinar condiciones suficientes de positividad, el Teorema de Pólya debe ser aplicado únicamente en dos cuadrantes no simétricos. Esto permite construir el siguiente sistema de desigualdades lineales

$$A_v \alpha = \begin{bmatrix} A_{v1} \\ A_{v2} \end{bmatrix} \alpha > [0], \quad \alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]^T, \quad (2.22)$$

donde cada  $A_{vi}$  corresponde al sistema de desigualdades formado por las formas resultantes  $\bar{V}_i(z)$ .

Un conjunto de  $\alpha$  que satisface (2.22) y por lo tanto garantiza la positividad definida de la función candidata de Lyapunov es

$$\alpha_1 = 3.1, \quad \alpha_2 = 1.769555, \quad \alpha_3 = 2.3115914, \quad \alpha_4 = 4.116138. \quad (2.23)$$

### 2.3.3. Negatividad Definida

El Teorema de Pólya analiza la positividad definida de una forma clásica por lo cual se define  $W(x) = -\dot{V}(x)$ . Para el análisis de la positividad de esta forma generalizada nuevamente se efectúa el cambio de variable (2.18)

$$W(z) = \alpha_2 (k_1 + k_2 [x_1]^0 [x_2]^0) z_1^3 - 2(\alpha_1 + \alpha_3 (k_1 [x_1]^0 [x_2]^0 + k_2)) z_1^2 z_2 - \frac{3}{2} \alpha_2 z_1 z_2^2 + (\alpha_3 + 4\alpha_4 (k_1 [x_1]^0 [x_2]^0 + k_2)) z_2^3. \quad (2.24)$$

Los conjuntos de formas clásicas que representan a (2.17) son

- Cuadrantes  $(x_1 > 0, x_2 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0)$

$$W(z) = \alpha_2 (k_1 + k_2) z_1^3 - 2(\alpha_1 + \alpha_3 (k_1 + k_2)) z_1^2 z_2 - \frac{3}{2} \alpha_2 z_1 z_2^2 + (\alpha_2 - \alpha_4 (k_1 + k_2)) z_2^3. \quad (2.25)$$

- Cuadrantes  $(x_1 > 0, x_2 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0)$

$$W(z) = \alpha_2(k_1 - k_2)z_1^3 + 2(\alpha_1 - \alpha_3(k_1 - k_2))z_1^2z_2 - \frac{3}{2}\alpha_2z_1z_2^2 + (\alpha_2 + \alpha_4(k_1 - k_2))z_2^3. \quad (2.26)$$

Es importante notar que las constantes  $\alpha_i$  son lineales en los coeficientes de la función  $W(x)$  y afines en las ganancias  $k_i$  por lo que se puede hacer uso de dos opciones para obtener soluciones que satisfagan las condiciones impuestas.

### Linealidad en los coeficientes $\alpha$

Aprovechando la propiedad de linealidad de los coeficientes  $\alpha_i$  el conjunto de formas resultantes  $\bar{W}_i(z)$ , puede ser expresado por medio de

$$A_w B(k) \alpha > [0], \quad (2.27a)$$

$$B(k) = \begin{bmatrix} 0 & k_1 + k_2[x_1]^0[x_2]^0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2(k_1[x_1]^0[x_2]^0) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4(k_1[x_1]^0[x_2]^0 + k_2) \end{bmatrix} \quad (2.27b)$$

El producto de la matriz  $B(k)$  y el vector de coeficientes  $\alpha$  de la función candidata da como resultado el vector de coeficientes de la forma  $W(z)$ .

Por lo tanto, para garantizar la positividad definida de  $V(x)$  y la negatividad definida de  $\dot{V}(x)$  se deben de satisfacer en conjunto los sistemas de desigualdades (2.22) y (2.27a), es decir

$$\begin{bmatrix} A_v \\ A_w B(k) \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} A_{v1} \\ A_{v2} \\ A_{w1} B_1(k) \\ A_{w2} B_2(k) \end{bmatrix} \alpha > [0]. \quad (2.28)$$

Este enfoque tiene la limitante de exigir el conocimiento previo de las ganancias  $k_i$  para las cuales se satisface la función candidata.

### Afinidad en $k$

Otro enfoque de determinar las condiciones requeridas consiste en expresar el conjunto de formas  $\bar{W}_i$  como

$$A_w C(\alpha^*) K = \begin{bmatrix} A_{w1} C_1(\alpha^*) \\ A_{w2} C_2(\alpha^*) \end{bmatrix} K > [0], \quad K = [k_1 \quad k_2 \quad 1]^T, \quad (2.29a)$$

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_2[x_1]^0[x_2]^0 & 0 \\ \alpha_3[x_1]^0[x_2]^0 & \alpha_3 & 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 4\alpha_4[x_1]^0[x_2]^0 & -4\alpha_4 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (2.29b)$$

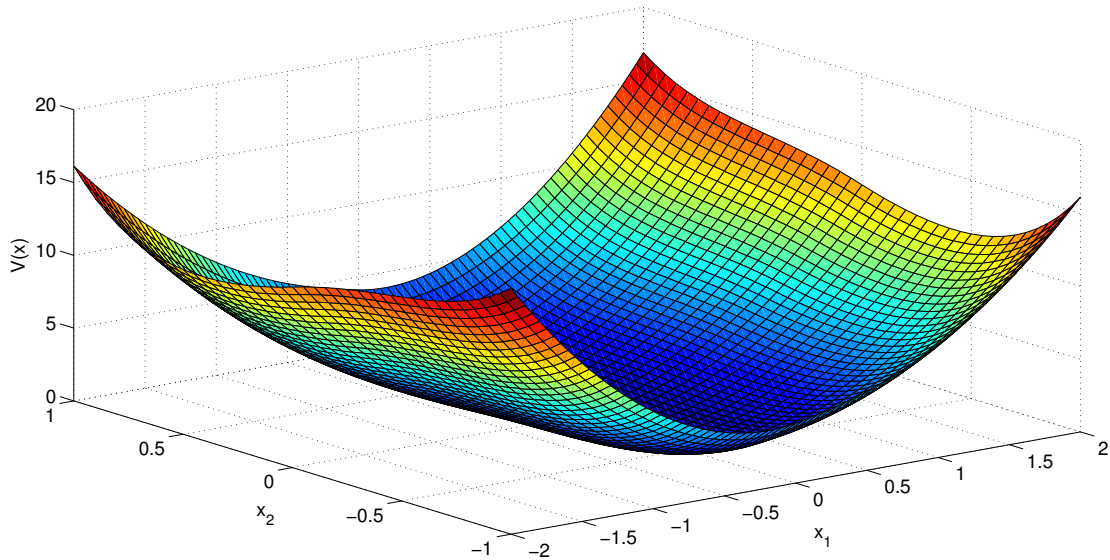


Figura 2.1: Representación gráfica de la función de Lyapunov  $V(x)$  para el algoritmo Twisting empleando los coeficientes (2.23).

donde  $\alpha^*$  corresponde a un vector que satisface el sistema de desigualdades (2.22). Nótese que el producto  $C(\alpha)K$  expresa todos los coeficientes de la derivada de función candidata de Lyapunov (2.17).

Una solución a este sistema de desigualdades empleando los coeficientes  $\alpha$  obtenidos en (2.23) es

$$k_1 = 5.3648, \quad k_2 = 5.3063. \quad (2.30)$$

### Ilustración visual de los resultados

Con la finalidad de validar de forma gráfica los resultados obtenidos en las Figuras 2.1 y 2.2 se muestran las representaciones gráficas de la Función de Lyapunov  $V(x)$  y de  $W(x)$ . La función  $V(x)$  es una función homogénea continua y suave, lo cual puede ser visualizado, por otra parte  $W(x)$  es una función homogénea discontinua positiva definida.

## 2.4. Sistema perturbado

Al tomar en cuenta el efecto de la perturbación se debe considerar que los controladores por modos deslizantes de segunda generación pueden compensar perturbaciones acotadas, por esta razón se debe considerar

$$|\Delta(t)| \leq \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

El análisis del sistema perturbado se lleva a cabo con el fin de determinar el valor máximo de  $\mu$  que el sistema puede admitir empleando los resultados previos. Por lo tanto el sistema a analizar en este caso es

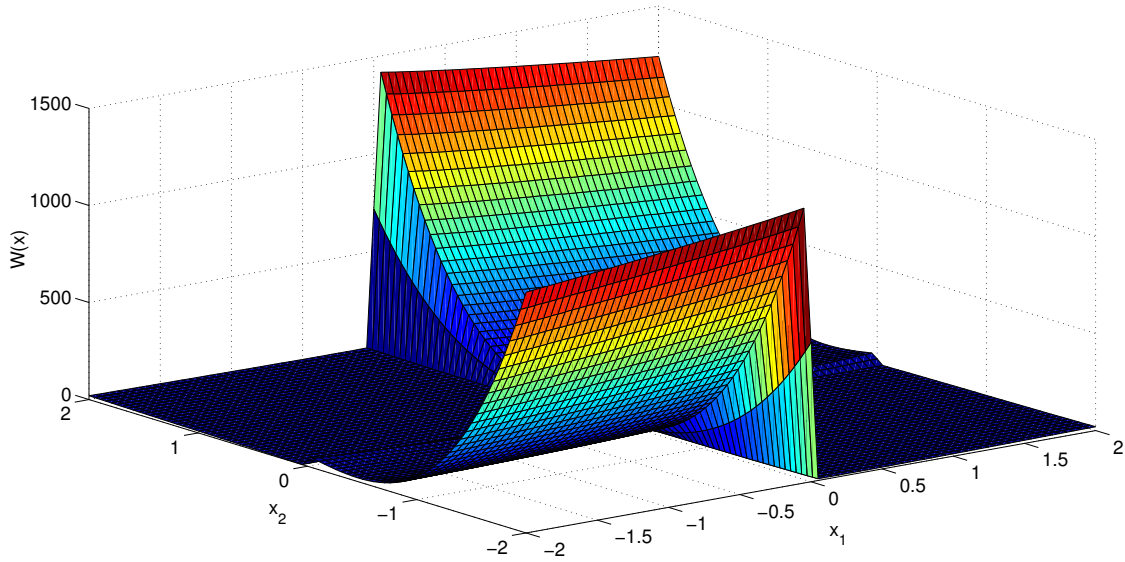


Figura 2.2: Representación gráfica del negativo de la derivada de la función de Lyapunov  $W(x)$  para el algoritmo Twisting utilizando los coeficientes (2.23) y las ganancias (2.30).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^0 - k_2|x_2|^0 + \mu.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Para analizar al sistema (2.32) se utiliza la función de Lyapunov para el caso nominal

$$V_p(x) = \alpha_1|x_1|^2 + \alpha_2|x_1|^{\frac{3}{2}}x_2 - \alpha_3x_1|x_2|^2 + \alpha_4|x_2|^2.\tag{2.33}$$

La derivada de esta función a lo largo de las trayectorias de (2.32) es

$$\begin{aligned}\dot{V}_p(x) &= -\alpha_2(k_1 + k_2|x_1|^0|x_2|^0 - \mu|x_1|^0)|x_1|^{\frac{3}{2}} + 2(\alpha_1 + \alpha_3(k_1|x_1|^0|x_2|^0 + k_2 - \mu|x_2|^0))x_1x_2 \\ &\quad + \frac{3}{2}\alpha_2|x_1|^{\frac{1}{2}}|x_2|^2 - (\alpha_3 + 4\alpha_4(k_1|x_1|^0|x_2|^0 + k_2 - \mu|x_2|^0))|x_2|^3.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Es importante notar que la diferencia entre las funciones (2.34) y (2.17) son los coeficientes donde aparece el término  $\mu$ . Si se consideran los coeficientes  $\alpha$  y las ganancias  $k$  previamente determinadas, el objetivo es obtener el valor máximo  $\mu$  que puede ser admitido tal que (2.34) siga conservando su negatividad definida.

Debido a que  $\mu$  es afín en los coeficientes de la derivada de la función de Lyapunov, se puede utilizar la misma estrategia para determinar los valores de  $k$  en el caso nominal, para ello, (2.34) se representa mediante un conjunto de formas clásicas empleando (2.18).

$$\begin{aligned}W_p(z) &= \alpha_2(k_1 + k_2|x_1|^0|x_2|^0 - \mu|x_1|^0)z_1^3 - 2(\alpha_1 + \alpha_3(k_1|x_1|^0|x_2|^0 + k_2 - \mu|x_2|^0))z_1^2z_2|x_1|^0|x_2|^0 \\ &\quad - \frac{3}{2}z_1z_2^2 + (\alpha_3 + 4\alpha_4(k_1|x_1|^0|x_2|^0 + k_2 - \mu|x_2|^0))z_2^3.\end{aligned}\tag{2.35}$$

- Cuadrante ( $x_1 > 0, x_2 > 0$ )

$$W_{p1}(z) = \alpha_2(k_1 + k_2 - \mu)z_1^3 - 2(\alpha_1 + \alpha_3(k_1 + k_2 - \mu))z_1^2z_2 - \frac{3}{2}z_1z_2^2 + (\alpha_3 + 4\alpha_4(k_1 + k_2 - \mu))z_2^3,$$

- Cuadrante ( $x_1 > 0, x_2 < 0$ )

$$W_{p2}(z) = \alpha_2(k_1 + k_2 - \mu)z_1^3 + 2(\alpha_1 + \alpha_3(-k_1 + k_2 + \mu))z_1^2z_2 - \frac{3}{2}z_1z_2^2 + (\alpha_3 + 4\alpha_4(-k_1 + k_2 + \mu))z_2^3,$$

- Cuadrante ( $x_1 < 0, x_2 > 0$ )

$$W_{p3}(z) = \alpha_2(k_1 - k_2 + \mu)z_1^3 + 2(\alpha_1 + \alpha_3(-k_1 + k_2 + \mu))z_1^2z_2 - \frac{3}{2}z_1z_2^2 + (\alpha_3 + 4\alpha_4(-k_1 + k_2 - \mu))z_2^3,$$

- Cuadrante ( $x_1 < 0, x_2 < 0$ )

$$W_{p4}(z) = \alpha_2(k_1 + k_2 + \mu)z_1^3 - 2(\alpha_1 + \alpha_3(k_1 + k_2 + \mu))z_1^2z_2 - \frac{3}{2}z_1z_2^2 + (\alpha_3 + 4\alpha_4(k_1 + k_2 + \mu))z_2^3.$$

Entonces el Teorema de Pólya se debe aplicar a las cuatro formas  $W_{pi}(z)$  y con ello se define el sistema de desigualdades

$$A_w D(\alpha^*, k^*) P = \begin{bmatrix} A_{w1} \\ A_{w2} \\ A_{w3} \\ A_{w4} \end{bmatrix} D(\alpha^*, k) P > [0], \quad P = [\mu \quad 1]^T, \quad (2.36a)$$

$$D = \begin{bmatrix} -\alpha_2[x_1]^0 & \alpha_2(k_1 + k_2[x_1]^0[x_2]^0) \\ -2\alpha_3[x_2]^0 & 2\alpha_1 + 2\alpha_3(k_1[x_1]^0[x_2]^0 + k_2) \\ 0 & \frac{3}{2}\alpha_2 \\ -4\alpha_4[x_2]^0 & \alpha_3 + 4\alpha_4(k_1[x_1]^0[x_2]^0 + k_2) \end{bmatrix} \quad (2.36b)$$

$\alpha^*$  y  $k^*$  son constantes que satisfacen el sistema de desigualdades (2.29a). De esta forma utilizando (2.23) y (2.30) se puede determinar que el valor de  $\mu$  máximo que satisface el sistema de desigualdades (2.36a)

$$\mu = 0.0584. \quad (2.37)$$

*Observación.* Las ganancias obtenidas (2.30) en conjunto con (2.37) satisfacen las condiciones establecidas por el Teorema 2.1 para el caso  $K_m = K_M = 1$ , es decir

$$k_2 > \mu \quad (2.38)$$

$$k_1 - k_2 > \mu. \quad (2.39)$$

De esta forma, los resultados obtenidos comprueban que el método propuesto asegura la obtención de condiciones adecuadas.

## 2.5. Aplicación del Algoritmo Twisting

Empleando la función de Lyapunov determinada en este Capítulo se determinaron ganancias que aseguran la convergencia de los estados del sistema (2.10), las cuales son capaces de compensar una perturbación  $\Delta(t)$  la cual está acotada por un valor  $\mu$ .

Sin embargo si esta cota es distinta a la determinada, las ganancias obtenidas no serán adecuadas para lograr el objetivo planteado.

Para solucionar este inconveniente se considera que la perturbación del sistema que se pretende controlar  $\Delta(t)$  es acotada por un número real  $\delta$  que se asume conocido. De esta cota se propone lo siguiente

$$\delta = J\mu, \quad (2.40)$$

donde  $0 < J \in \mathbb{R}$  es un factor de escalamiento.

Aprovechando el Teorema 2.1, considerando las condiciones establecidas por el problema, es decir  $K_M = K_m = 1$ , así como las ganancias obtenidas (2.30), se expresan las condiciones que aseguran la convergencia en tiempo finito a cero de los estados  $x$  cuando existe una perturbación con una cota arbitraria  $\delta$

$$Jk_2 > \delta \quad (2.41)$$

$$Jk_1 - Jk_2 > \delta. \quad (2.42)$$

Es decir, las ganancias (2.30) deben ser multiplicadas por el factor de escalamiento  $J$ , el cual se determina con el conocimiento de la cota de la perturbación del sistema que pretende ser controlado.

**Ejemplo 2.1.** *Se considera el sistema (1.1) y para efectos de simulación se asume la perturbación  $\Delta(t) = 4 + 0.6 \sin(2t) + 0.4 \sin(\sqrt{10}t)$  para aplicar el controlador Twisting se determina*

$$|\Delta(t)| \leq 5$$

*Usando el conjunto de ganancias (2.30) se ha determinado la cota máxima admisible  $\mu$  por lo cual se puede determinar el factor de escalamiento  $J$*

$$J = \frac{\delta}{\mu} = 85.61, \quad (2.43)$$

*por lo tanto, las ganancias que deben ser utilizadas en el controlador Twisting son*

$$k_1 = 459.3151, \quad k_2 = 454.3065. \quad (2.44)$$

*En las Figuras 2.4 y 2.3 se muestra la acción de control y la convergencia de los estados  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. Es importante notar que estas ganancias fueron determinadas empleando la función de Lyapunov (2.16), al utilizar otra función candidata, o bien, otro método para determinar las ganancias es posible obtener ganancias menores que aseguren la convergencia de los estados en tiempo finito.*

Pese a los beneficios que ofrece el algoritmo Twisting, al igual que los algoritmos por modos deslizantes de primer orden, producen una señal de control discontinua de alta frecuencia que puede dañar los actuadores, lo cual lo hace impráctico en la mayoría de las aplicaciones reales.

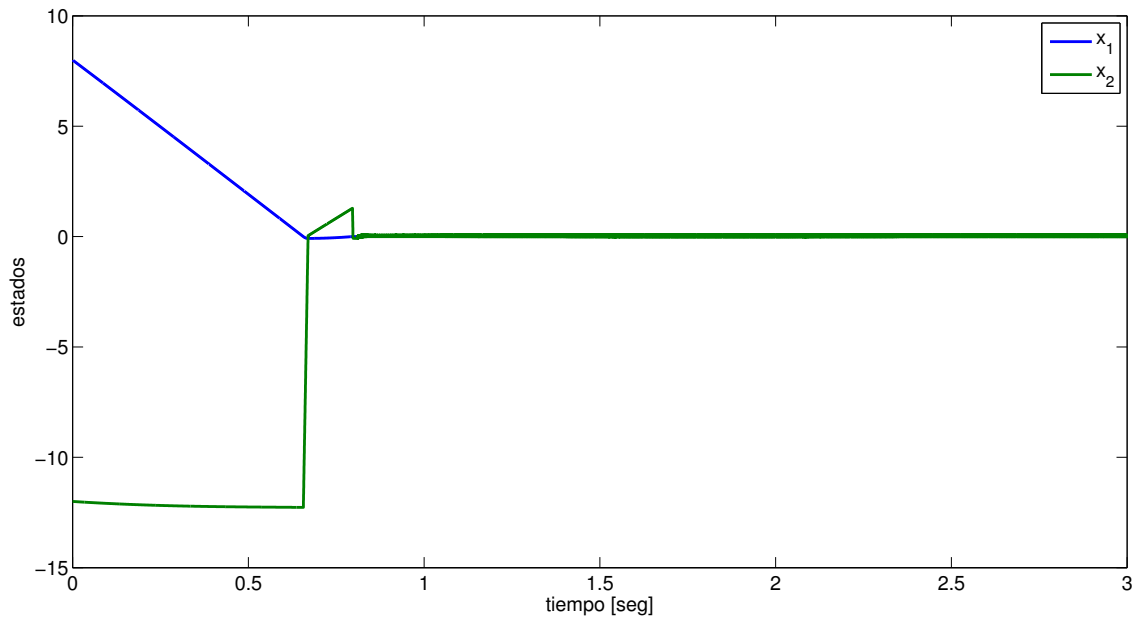


Figura 2.3: Convergencia a cero en tiempo finito de los estados  $x_1$  y  $x_2$  empleando el controlador Twisting.

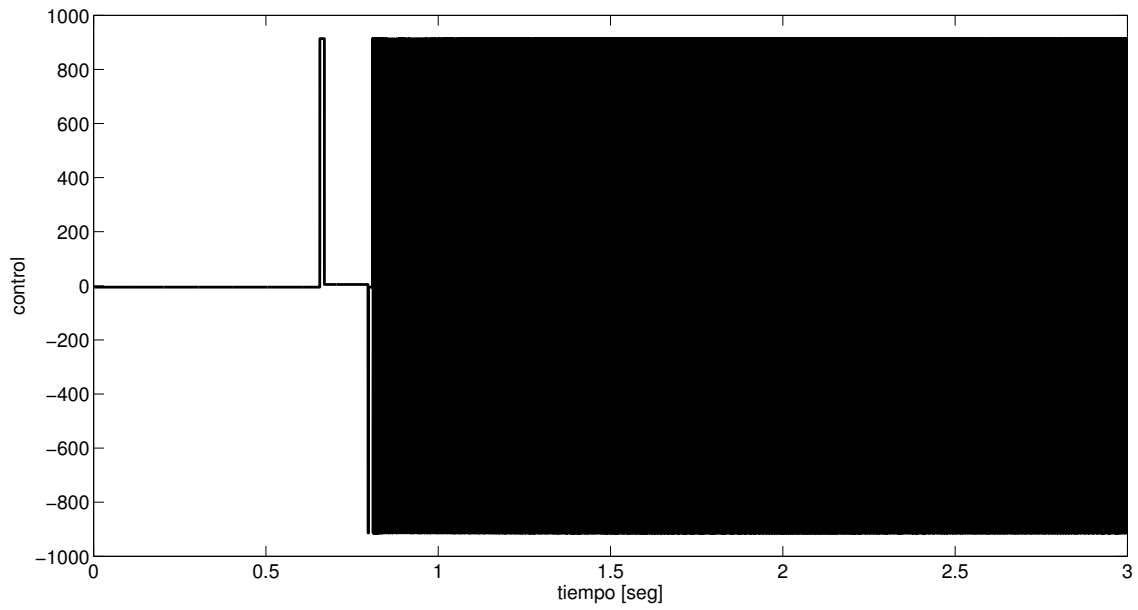


Figura 2.4: Acción discontinua del controlador Twisting.





## Capítulo 3

# Algoritmo Twisting Continuo

Para alcanzar el objetivo planteado se propone emplear el siguiente controlador por modos deslizantes de quinta generación

$$\begin{aligned} u &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2]^0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde las constantes  $k_i$  son ganancias para el controlador y  $\eta$  es una variable interna del controlador. Se debe notar que la segunda ecuación del algoritmo propuesto tiene la misma estructura que el controlador Twisting, es por esta razón que este controlador recibió el nombre de *Algoritmo Twisting Continuo* (CTA, por sus siglas en Inglés).

Al sustituir (3.1) en (1.1) y definiendo el estado virtual  $x_3 = \eta + \Delta(t)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2]^0 + \dot{\Delta}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Las ganancias del controlador (3.1) deben ser seleccionadas de manera adecuada con el fin que los estados del sistema (3.2) converjan a cero en tiempo finito. Es importante percatarse que, de lograrse la convergencia, la variable  $\eta$  compensa exactamente a la perturbación  $\Delta(t)$ .

Una de las formas de determinar las ganancias con las cuales el CTA asegurará la convergencia de los estados es mediante una función de Lyapunov.

### 3.1. Sistema Nominal

Se comenzará por analizar a (3.2) asumiendo que  $\dot{\Delta}(t) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2]^0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1.1. Función de Lyapunov para sistema nominal

Con el fin de determinar las ganancias que se requieren para asegurar la convergencia de los estados de (3.3) se construirá una función de Lyapunov suave y homogénea. Por tal motivo nuevamente será utilizada la metodología expuesta en Sánchez y Moreno (2014) la cual aprovecha el hecho que las funciones del campo vectorial de (3.3) son formas generalizadas.

Primero se deben de determinar los pesos de homogeneidad del campo vectorial de (3.3) para ello se realiza el siguiente análisis

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon^{r_n} x_n) &= \varepsilon^{r_2} x_2 = \varepsilon^{v+r_1} x_2 \\ f_2(\varepsilon^{r_n} x_n) &= -k_1[\varepsilon^{r_1} x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[\varepsilon^{r_2} x_2]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{r_3} x_3 = \varepsilon^{v+r_2} \left( -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \right) \\ f_3(\varepsilon^{r_n} x_n) &= -k_3[\varepsilon^{r_1} x_1]^0 - k_4[\varepsilon^{r_2} x_2]^0 = \varepsilon^{v+r_3} \left( -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2]^0 \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

De esta forma se verifica que (3.3) tiene grado de homogeneidad  $v = -1$  así como los pesos  $r = [3 \ 2 \ 1]$  para los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  respectivamente.

Empleando las propiedades de este tipo de funciones, se propone la estructura de la función candidata de Lyapunov como una forma generalizada

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{m}{3}} + \alpha_2 [x_1]^{\rho_1} [x_2]^{\rho_2} + \alpha_3 |x_2|^{\frac{m}{2}} + \alpha_4 [x_1]^{\rho_3} [x_3]^{\rho_4} + \bar{\alpha}_5 [x_2]^{\rho_5} [x_3]^{\rho_6} + \alpha_6 |x_3|^m, \quad (3.5)$$

donde  $m$  corresponde al grado de la función candidata, es importante señalar que la función candidata se propone de tal forma que contenga monomios con signos positivos bien definidos

Los términos cruzados se agregan para obtener condiciones necesarias para la negatividad definida de la derivada de la función candidata es decir, monomios de una sola variable con signo negativo bien definido.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{m}{3} \alpha_1 [x_1]^{\frac{m-3}{3}} [x_2] - \underbrace{\alpha_2 \rho_1 k_1 [x_1]^{\frac{3\rho_1+1}{3}} [x_2]^{\rho_2-1}}_A - \alpha_2 \rho_2 [x_1]^{\rho_1} [x_2]^{\frac{2\rho_1-1}{2}} + \underbrace{\alpha_2 \rho_1 [x_1]^{\rho_1-1} [x_2]^{\rho_2+1}}_B \\ &+ \alpha_2 \rho_1 [x_1]^{\rho_1} [x_2]^{\rho_2-1} [x_3] - \frac{m}{2} \alpha_3 k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{m-1}{2}} - \underbrace{\frac{m}{2} \alpha_3 k_2 [x_2]^{\frac{m-1}{2}}}_C + \frac{m}{2} \alpha_3 [x_2]^{\frac{m-2}{2}} [x_3] \\ &- \alpha_4 \rho_4 (k_3 [x_1]^0 + k_4 [x_2]) [x_1]^{\rho_3} [x_3]^{\rho_4-1} + \alpha_4 \rho_3 [x_1]^{\rho_3-1} [x_2] [x_3]^{\rho_4} \\ &- \bar{\alpha}_5 \rho_6 (k_3 [x_1]^0 + k_4 [x_2]^0) [x_2]^{\rho_5} [x_3]^{\rho_6-1} - \bar{\alpha}_5 \rho_5 k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\rho_5-1} [x_3]^{\rho_6} \\ &- \bar{\alpha}_5 \rho_5 k_2 [x_2]^{\frac{2\rho_5-1}{2}} [x_3]^{\rho_6} + \underbrace{\bar{\alpha}_5 \rho_5 [x_2]^{\rho_5-1} [x_3]^{\rho_6+1}}_D - m \alpha_6 [x_3]^{m-1} (k_3 [x_1]^0 + k_4 [x_2]^0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

De la inspección de (3.6) se aprecia que estos monomios pueden ser obtenidos de los términos señalados como  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y en conjunto con una selección adecuada de  $\rho_i$ . Estas constantes deben ser seleccionadas de manera adecuada tal que se satisfagan las siguientes condiciones

- Para garantizar que la función candidata sea diferenciable

$$m > \text{máx } r_i \quad (3.7)$$

- la homogeneidad de la función candidata se logra mediante

$$\begin{aligned} r_1\rho_1 + r_2\rho_2 &= m \\ r_1\rho_3 + r_3\rho_4 &= m \\ r_2\rho_5 + r_3\rho_6 &= m. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Al fijar el grado de la función candidata  $m = 5$  se deduce que  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ . De esta forma en los términos  $A$  y  $B$  se obtienen monomios necesarios para las variables  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente.

El término  $D$  en la expresión de la derivada muestra que la única posibilidad de obtener un monomio con una sola variable en  $x_3$  es seleccionando  $\rho_5 = 1$ , por lo tanto  $\rho_6 = 3$ . Con esto es posible percatarse que el coeficiente  $\bar{\alpha}_5$  debe ser negativo para satisfacer la condición necesaria planteada.

Para evitar monomios con productos de tres variables, se selecciona  $\rho_3 = 1$ . Lo cual permite visualizar la función candidata de Lyapunov como

$$V(x) = \alpha_1|x_1|^{\frac{5}{3}} + \alpha_2x_1x_2 + \alpha_3|x_3|^{\frac{5}{2}} + \alpha_4x_1[x_3]^2 - \alpha_5x_2x_3^3 + \alpha_6|x_3|^5. \quad (3.9)$$

Al igual que su derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\beta_1|x_1|^{\frac{4}{3}} - \beta_2x_1[x_2]^{\frac{1}{2}} + \beta_3[x_1]^{\frac{2}{3}}x_2 - \beta_4[x_1]^{\frac{1}{3}}[x_2]^{\frac{3}{2}} - \beta_5|x_2|^2 + \beta_6x_1x_3 \\ &+ \beta_7[x_2]^{\frac{3}{2}}x_3 + \beta_8x_2[x_3]^2 + \beta_9[x_1]^{\frac{1}{3}}[x_3]^3 + \beta_{10}[x_2]^{\frac{1}{2}}[x_3]^3 - \beta_{11}|x_3|^4, \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2k_1, \quad \beta_2 = \alpha_2k_2, \quad \beta_3 = \frac{5}{3}\alpha_1, \quad \beta_4 = \frac{5}{2}\alpha_3k_1, \\ \beta_5 &= \frac{5}{2}\alpha_3k_2 - \alpha_2, \quad \beta_7 = \frac{5}{2}\alpha_3, \quad \beta_9 = \alpha_5k_1, \quad \beta_{10} = \alpha_5k_2, \\ \beta_6 &= \alpha_2 - 2\alpha_4[x_3]^0 (k_3[x_1]^0 + k_4[x_2]^0), \\ \beta_8 &= \alpha_4 + 3\alpha_5[x_3]^0 (k_3[x_1]^0 + k_4[x_2]^0), \\ \beta_{11} &= \alpha_5 + 5\alpha_6[x_3]^0 (k_3[x_1]^0 + k_4[x_2]^0). \end{aligned} \quad (3.10b)$$

Es posible apreciar que tanto la positividad definida de  $V(x)$ , así como la negatividad definida de  $\dot{V}(x)$  será determinada por los  $\alpha_i$  coeficientes, así como por las  $k_i$  ganancias.

### 3.1.2. Positividad Definida de $V(x)$

Se utilizará el Teorema de Pólya para determinar condiciones necesarias para garantizar la positividad de  $V(x)$ . Sin embargo, este teorema solo puede ser aplicado a formas clásicas, por lo cual se requiere definir un método para representar una forma generalizada en la forma requerida.

Una forma generalizada puede ser transformada a un conjunto de formas clásicas mediante el cambio de variable

$$|x_i|^{r_i} = z_i. \quad (3.11)$$

Aplicando este cambio a la función candidata de Lyapunov (3.9)

$$V(z) = \alpha_1z_1^5 + \alpha_2z_1z_2[x_1]^0[x_2]^0 + \alpha_3z_2^{\frac{5}{2}} + \alpha_4z_1^3z_3^2[x_1]^0[x_3]^0 - \alpha_5z_2^2z_3^3[x_2]^0[x_3]^0 + \alpha_6z_3^5. \quad (3.12)$$

Se debe notar que este cambio de variable producirá  $2^n$  formas clásicas las cuales dependen del octante donde se evaluó la forma generalizada.

- Octante  $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < 0)$

$$V_1(z) = \alpha_1 z_1^5 + \alpha_2 z_1^3 z_2^2 + \alpha_3 z_2^5 + \alpha_4 z_1^3 z_3^2 - \alpha_5 z_2^2 z_3^3 + \alpha_6 z_3^5,$$

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > 0)$

$$V_2(z) = \alpha_1 z_1^5 - \alpha_2 z_1^3 z_2^2 + \alpha_3 z_2^5 - \alpha_4 z_1^3 z_3^2 + \alpha_5 z_2^2 z_3^3 + \alpha_6 z_3^5,$$

- Octante  $(x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$

$$V_3(z) = \alpha_1 z_1^5 - \alpha_2 z_1^3 z_2^2 + \alpha_3 z_2^5 + \alpha_4 z_1^3 z_3^2 + \alpha_5 z_2^2 z_3^3 + \alpha_6 z_3^5,$$

- Octante  $(x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$

$$V_4(z) = \alpha_1 z_1^5 + \alpha_2 z_1^3 z_2^2 + \alpha_3 z_2^5 - \alpha_4 z_1^3 z_3^2 - \alpha_5 z_2^2 z_3^3 + \alpha_6 z_3^5.$$

Se puede apreciar que existe simetría respecto al origen, por lo que solo será necesario aplicar el Teorema de Pólya en cuatro octantes no simétricos, de esta manera la positividad de la función candidata  $V(x)$  puede ser garantizada al obtener un conjunto de coeficientes que satisfagan cuatro sistemas de desigualdades lineales

$$A_v \alpha = \begin{bmatrix} A_{v1} \\ A_{v2} \\ A_{v3} \\ A_{v4} \end{bmatrix} \alpha > [0], \quad \alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6]^T. \quad (3.13)$$

Cada  $A_{vi}$  corresponde a un sistema de desigualdades lineales asociados a las formas resultantes  $\tilde{V}_i(z)$  producido al aplicar el Teorema de Pólya en cada uno de los octantes requeridos.

### 3.1.3. Negatividad Definida de $\dot{V}(x)$

El Teorema de Pólya se utiliza para evaluar la positividad de una forma por tal motivo se define  $W(x) = -\dot{V}(x)$ , no se debe perder de vista que la forma generalizada  $W(x)$  debe ser transformada a un conjunto de formas clásicas mediante (3.11).

$$\begin{aligned} W(z) = & \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^3 z_2 [x_1]^0 [x_2]^0 - \beta_3 z_1^2 z_2^2 [x_1]^0 [x_2]^0 + \beta_4 z_1 z_2^3 [x_1]^0 [x_2]^0 \\ & + \beta_5 z_2^4 - \beta_6 z_1 z_3 [x_1]^0 [x_3]^0 - \beta_7 z_2^3 z_3 [x_2]^0 [x_3]^0 - \beta_8 z_2^2 z_3^3 [x_2]^0 [x_3]^0 \\ & - \beta_9 z_1 z_3^3 [x_1]^0 [x_3]^0 - \beta_{10} z_2 z_3^3 [x_2]^0 [x_3]^0 + \beta_{11} z_3^4. \end{aligned} \quad (3.14)$$

La evaluación de esta función en los distintos octantes produce el siguiente conjunto de formas clásicas

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < 0)$

$$W_1(z) = \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^3 z_2 - \beta_3 z_1^2 z_2^2 + \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 - \beta_6 z_1^3 z_3 \\ - \beta_7 z_2^3 z_3 - \beta_8 z_2^2 z_3^2 - \beta_9 z_1 z_3^3 - \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4,$$

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > 0)$

$$W_2(z) = \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^3 z_2 - \beta_3 z_1^2 z_2^2 + \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 + \beta_6 z_1^3 z_3 \\ + \beta_7 z_2^3 z_3 + \beta_8 z_2^2 z_3^2 + \beta_9 z_1 z_3^3 + \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4,$$

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0, x_3 < 0)$

$$W_3(z) = \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^3 z_2 + \beta_3 z_1^2 z_2^2 - \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 - \beta_6 z_1^3 z_3 \\ + \beta_7 z_2^3 z_3 + \beta_8 z_2^2 z_3^2 - \beta_9 z_1 z_3^3 + \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4,$$

- Octante  $(x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$

$$W_4(z) = \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^3 z_2 + \beta_3 z_1^2 z_2^2 - \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 + \beta_6 z_1^3 z_3 \\ - \beta_7 z_2^3 z_3 - \beta_8 z_2^2 z_3^2 + \beta_9 z_1 z_3^3 - \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4.$$

$W(x)$  es simétrica respecto al origen por lo que solo debe ser evaluada en cuatro octantes no simétricos.

Es importante notar que los  $\beta_i$  coeficientes son lineales en los coeficientes  $\alpha_i$  de la función candidata y afines en las ganancias  $k_i$ , por lo cual tal y como en el Capítulo anterior se tomará ventaja de la afinidad.

### Afinidad de $k_i$

El conjunto de formas resultantes  $\bar{W}_i$  puede ser representada mediante

$$A_w C(\alpha^*) \mathbf{K} = \begin{bmatrix} A_{w1} C_1(\alpha^*) \\ A_{w2} C_2(\alpha^*) \\ A_{w3} C_3(\alpha^*) \\ A_{w4} C_4(\alpha^*) \end{bmatrix} \mathbf{K} > [0], \quad \mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad 1]^T, \quad (3.15a)$$

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}\alpha_1 \\ \frac{5}{2}\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\alpha_3 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & -2\alpha_4[x_1]^0[x_3]^0 & -2\alpha_4[x_2]^0[x_3]^0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}\alpha_3 \\ 0 & 0 & 3\alpha_5[x_1]^0[x_3]^0 & 3\alpha_5[x_2]^0[x_3]^0 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5\alpha_6[x_1]^0[x_3]^0 & 5\alpha_6[x_2]^0[x_3]^0 & \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (3.15b)$$

$\alpha^*$  es un vector de coeficientes para la función candidata que satisface el sistema de desigualdades (3.13).  $C(\alpha)$  es una matriz que expresa la relación de las constantes  $\alpha_i$  y  $k_i$  en los coeficientes  $\beta_i$  de  $W(x)$ .

La aplicación de este enfoque de solución consiste en dos pasos. Primero se debe de obtener un conjunto  $\alpha$  que garantice la positividad definida de  $V(x)$ , y posteriormente emplear esta información para obtener las ganancias que aseguran la negatividad definida de  $W(x)$ .

### 3.1.4. Determinación de resultados

Empleando este enfoque de solución se obtienen los siguientes coeficientes que satisfacen el sistema de desigualdades (3.13),

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \alpha_2 &= 0.36913, & \alpha_3 &= 0.782483, \\ \alpha_4 &= -0.907063, & \alpha_5 &= 0.904313, & \alpha_6 &= 8.187983. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Estos valores son aprovechados para obtener un conjunto de ganancias que satisfacen el sistema de desigualdades (3.15a). Un conjunto solución posible es

$$k_1 = 0.982223 \quad k_2 = 1.320462 \quad k_3 = 0.013756 \quad k_4 = 0.0071928. \quad (3.17)$$

### Ilustración visual de los resultados

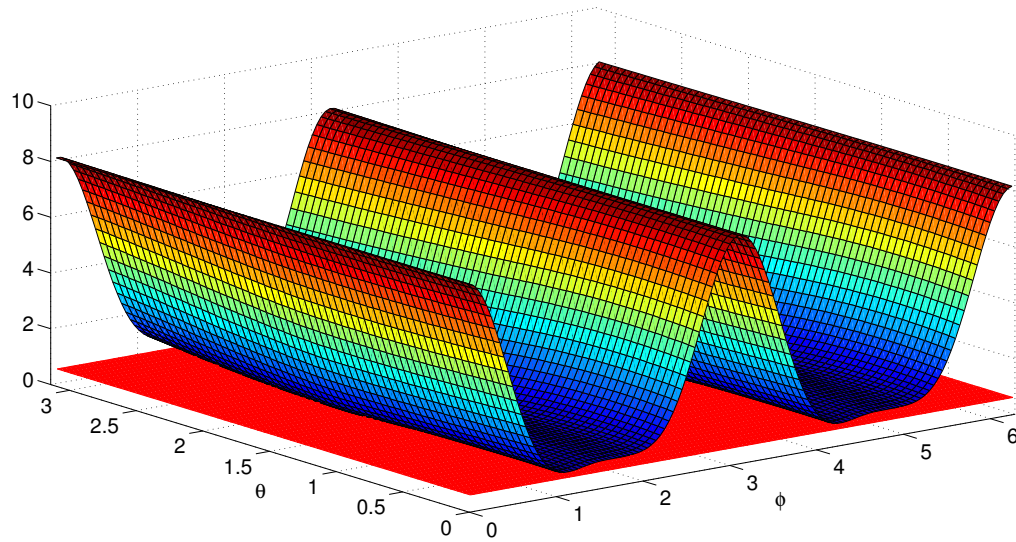
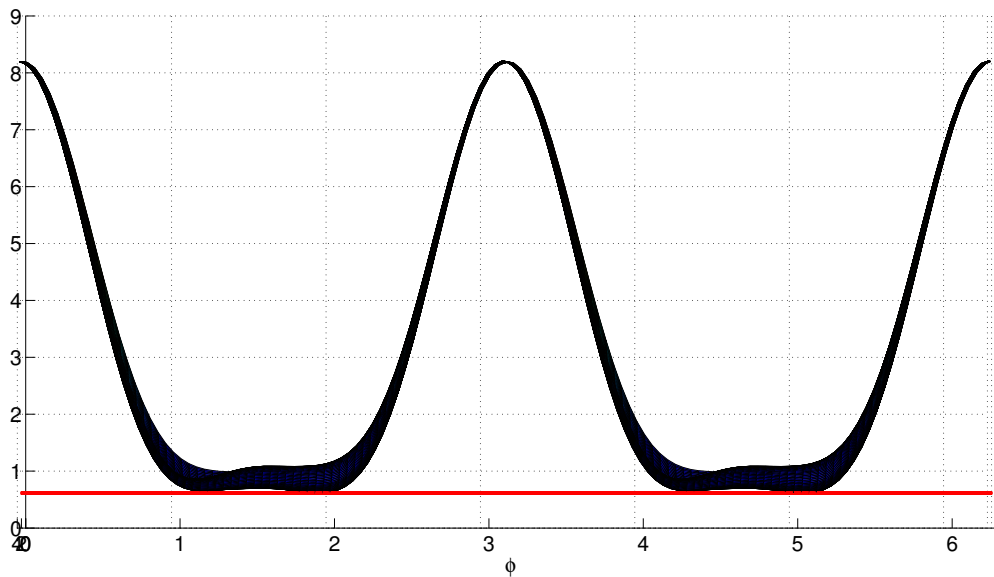
$V(x)$  y  $W(x) = -\dot{V}(x)$  son funciones homogéneas, debido a esto, si su positividad se asegura en una vecindad del origen entonces, esta será garantizada de forma global.

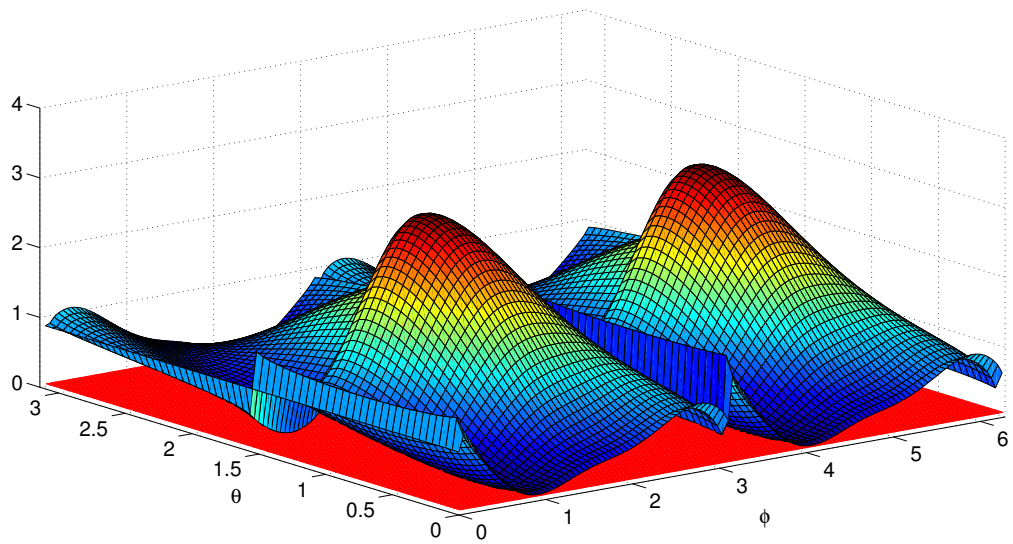
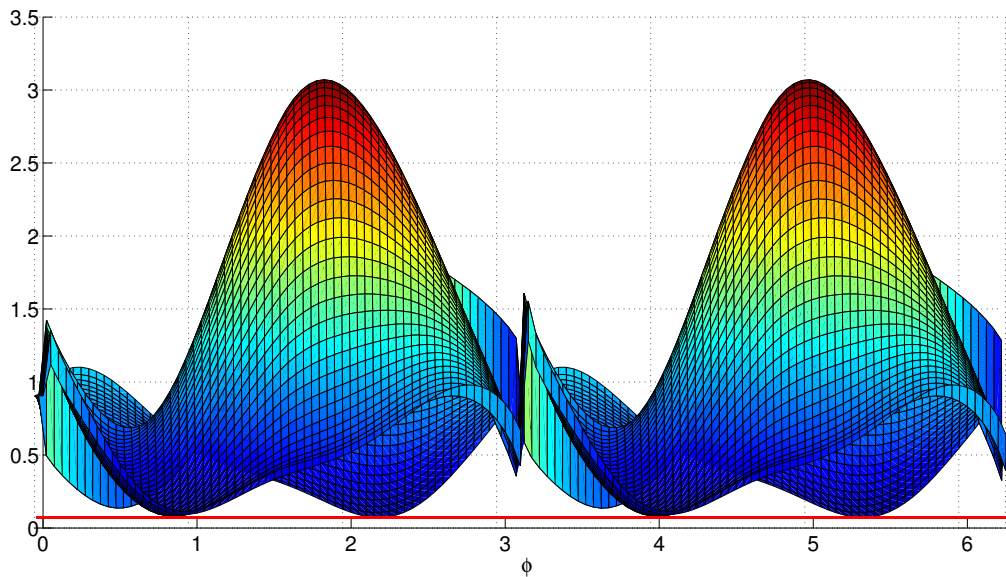
Una manera visual de comprobar esta positividad es graficar estas funciones en una esfera unitaria, por tal motivo se realiza el siguiente cambio de variables para representar a  $V(x)$  y  $W(x)$  en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ x_2 &= \varrho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ x_3 &= \varrho \cos(\theta). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Utilizando los resultados (3.16), (3.17), fijando  $\varrho = 1$  y al variar  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  y  $0 \leq \theta \leq \pi$ , se obtienen las representaciones de  $V(x)$  y  $W(x)$  las cuales pueden ser apreciadas en las Figuras 3.1 a 3.4. El valor mínimo de la representación de  $V(x)$  es 0.06155, y 0.0718 para el caso de  $W(x)$ .

Es importante notar que la representación de  $V(x)$  es una función suave y positiva para todo valor sobre la esfera con radio unitario. Por otra parte  $W(x)$  contiene discontinuidades, sin embargo es positiva en toda la esfera, con esto se concluye que la función (3.9) con los coeficientes (3.16) es una función de Lyapunov para el sistema nominal empleando las ganancias (3.17).

Figura 3.1:  $V(x)$  en esfera unitaria.Figura 3.2:  $V(x)$  en esfera unitaria.

Figura 3.3:  $W(x)$  en esfera unitaria.Figura 3.4:  $W(x)$  en esfera unitaria.



## 3.2. Sistema perturbado

Debido a que la perturbación  $\Delta(t)$  es Lipschitz su derivada existe casi en todas partes y además se asume que

$$|\dot{\Delta}(t)| \leq \mu_c \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

De esta forma el sistema que se analizará en esta ocasión es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1|x_1|^{\frac{1}{3}} - k_2|x_2|^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3|x_1|^0 - k_2|x_2|^0 + \mu_c. \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.2.1. Función de Lyapunov para el sistema perturbado

Es posible emplear la función de Lyapunov obtenida en el caso nominal y emplearla en el sistema perturbado

$$V_p(x) = \alpha_1|x_1|^{\frac{5}{3}} + \alpha_2x_1x_2 + \alpha_3|x_3|^{\frac{5}{2}} + \alpha_4x_1|x_3|^2 - \alpha_5x_2x_3^3 + \alpha_6|x_3|^5.$$

La derivada a lo largo de (3.20) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_p(x) &= -\beta_1|x_1|^{\frac{4}{3}} - \beta_2x_1|x_2|^{\frac{1}{2}} + \beta_3|x_1|^{\frac{2}{3}}x_2 - \beta_4|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_2|^{\frac{3}{2}} - \beta_5|x_2|^2 + \beta_6x_1x_3 \\ &+ \beta_7|x_2|^{\frac{3}{2}}x_3 + \beta_8x_2|x_3|^2 + \beta_9|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^3 + \beta_{10}|x_2|^{\frac{1}{2}}|x_3|^3 - \beta_{11}|x_3|^4 \\ &+ \beta_{12}|x_1||x_3| - \beta_{13}|x_2||x_3|^2 + \beta_{14}|x_3|^4, \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\beta_{12} = 2\alpha_4\mu_c, \quad \beta_{13} = 3\alpha_5\mu_c, \quad \beta_{14} = 5\alpha_6\mu_c. \quad (3.21b)$$

El objetivo ahora es dado algún conjunto  $\alpha$  y  $\mathbf{K}$  que satisfacen los sistemas de desigualdades (3.13) y (3.15a) y que aseguran la negatividad definida de  $\dot{V}(x)$ , determinar el valor máximo que  $\mu_c$  puede alcanzar de tal forma que  $\dot{V}_p(x)$  sea negativa definida.

### 3.2.2. Determinación de cota máxima de la perturbación admisible

El Teorema de Pólya será empleado en la determinación de  $\mu_c$  de forma similar al enfoque empleado para determinar las ganancias  $k_i$  dados los coeficientes  $\alpha_j$  por tal motivo esta forma generalizada debe ser representada por un conjunto de formas clásicas, para lo cual se emplea (3.11) y se define  $W_p(x) = -\dot{V}_p(x)$

$$\begin{aligned} W_p(z) &= \beta_1z_1^4 + \beta_2z_1^3z_2[x_1]^0[x_2]^0 - \beta_3z_1^2z_2^2[x_1]^0[x_2]^0 + \beta_4z_1z_2^3[x_1]^0[x_2]^0 \\ &+ \beta_5z_2^4 - \beta_6z_1^3z_3[x_1]^0[x_3]^0 - \beta_7z_2^3z_3[x_2]^0[x_3]^0 - \beta_8z_2^2z_3^2[x_2]^0[x_3]^0 \\ &- \beta_9z_1z_3^3[x_1]^0[x_3]^0 - \beta_{10}z_2z_3^3[x_2]^0[x_3]^0 + \beta_{11}z_3^4 \\ &- \beta_{12}z_1^3z_3[x_1]^0 + \beta_{13}z_2^2z_3^2[x_2]^0 - \beta_{14}z_3^4[x_3]^0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

El conjunto de formas clásicas que representa a  $W_p(x)$  es

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < 0)$

$$W_p(z) = \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^3 z_2 - \beta_3 x_1^2 x_2^2 + \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 - \beta_6 z_1^3 z_3 - \beta_7 z_2^3 z_3 \\ - \beta_8 z_2^2 z_3^2 - \beta_9 z_1 z_3^3 - \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4 - \beta_{12} z_1^3 z_3 + \beta_{13} z_2^2 z_3 - \beta_{14} z_3^4,$$

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > 0)$

$$W_p(z) = \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^3 z_2 - \beta_3 x_1^2 x_2^2 + \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 + \beta_6 z_1^3 z_3 + \beta_7 z_2^3 z_3 \\ + \beta_8 z_2^2 z_3^2 + \beta_9 z_1 z_3^3 + \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4 - \beta_{12} z_1^3 z_3 - \beta_{13} z_2^2 z_3 - \beta_{14} z_3^4,$$

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 > 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0, x_3 < 0)$

$$W_p(z) = \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^3 z_2 + \beta_3 x_1^2 x_2^2 - \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 - \beta_6 z_1^3 z_3 + \beta_7 z_2^3 z_3 \\ + \beta_8 z_2^2 z_3^2 - \beta_9 z_1 z_3^3 + \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4 - \beta_{12} z_1^3 z_3 + \beta_{13} z_2^2 z_3 + \beta_{14} z_3^4,$$

- Octantes  $(x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 < 0)$  y  $(x_1 < 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$

$$W_p(z) = \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^3 z_2 + \beta_3 z_1^2 z_2^2 - \beta_4 z_1 z_2^3 + \beta_5 z_2^4 + \beta_6 z_1^3 z_3 - \beta_7 z_2^3 z_3 \\ - \beta_8 z_2^2 z_3^2 + \beta_9 z_1 z_3^3 - \beta_{10} z_2 z_3^3 + \beta_{11} z_3^4 - \beta_{12} z_1^3 z_3 - \beta_{13} z_2^2 z_3 + \beta_{14} z_3^4.$$

La inspección de estas formas clásicas demuestran que  $W_p(x)$  es simétrica respecto al origen, por lo que solo se debe de efectuar un análisis sobre los primeros cuatro octantes.

Al analizar los  $\beta_i$  coeficientes de (3.21a) es posible apreciar que  $\mu_c$  es afín en estos, por lo cual se puede aprovechar esta propiedad y utilizar el mismo procedimiento que se utilizó para determinar las  $k_i$  ganancias dado un conjunto  $\alpha$ .

Empleando los resultados (3.16) y (3.17) se obtiene el valor máximo de  $\mu_c$  que satisface el sistema de desigualdades

$$A_w D(\alpha^*, k^*) P, \quad P = [\mu_c \quad 1]^T, \quad (3.23a)$$

$$D(\alpha, k) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 k_1 \\ 0 & \alpha_2 k_2 \\ 0 & \frac{5}{3} \alpha_1 \\ 0 & \frac{5}{2} \alpha_3 k_1 \\ 0 & \frac{5}{2} \alpha_3 k_2 - \alpha_2 \\ 2\alpha_4 [x_3]^0 & \alpha_2 - 2\alpha_4 (k_3 [x_1]^0 [x_3]^0 + k_4 [x_2]^0 [x_3]^0) \\ 0 & \frac{5}{2} \alpha_3 \\ -3\alpha_5 [x_3]^0 & \alpha_4 + 3\alpha_5 (k_3 [x_1]^0 [x_3]^0 + k_4 [x_2]^0 [x_3]^0) \\ 0 & \alpha_5 k_1 \\ 0 & \alpha_5 k_2 \\ -5\alpha_6 [x_3]^0 & \alpha_5 + 5\alpha_6 (k_3 [x_1]^0 [x_3]^0 + k_4 [x_2]^0 [x_3]^0) \end{bmatrix} \quad (3.23b)$$

El producto de  $D(\alpha, k)$  y  $P$  proporciona el vector de coeficientes  $\beta_i$  de la derivada de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado.

Al sustituir los resultados obtenidos y evaluar la forma resultante en el segundo octante se aprecia que esta contiene todos sus coeficientes positivos por lo que el sistema de desigualdades

a satisfacer es

$$\begin{bmatrix} A_{w1}D_1(\alpha^*, k^*) \\ A_{w3}D_3(\alpha^*, k^*) \\ A_{w4}D_4(\alpha^*, k^*) \end{bmatrix} P > [0]. \quad (3.24)$$

Con esto se concluye que la cota de la derivada de la perturbación máxima admisible dadas las ganancias (3.17) es  $\mu_c = 0.0024$ .

Esta información permite proponer el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.** Con las ganancias mostradas en (3.17) dada una perturbación Lipschitz tal que  $|\dot{\Delta}(t)| \leq \mu_c = 0.0024$  los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  en (3.2) convergen a cero en tiempo finito. La variable  $\eta$  en (3.1) converge también en tiempo finito a  $-\Delta(t)$ .

*Observación.* Las ganancias presentadas están sobreestimadas, mediante simulaciones se puede comprobar que estas ganancias pueden ser reducidas y se sigue logrando la convergencia de los estados a pesar de la perturbación con la cota establecida. Sin embargo la intención de este trabajo es probar la convergencia de los estados de (3.20) por medio de la función de Lyapunov (3.9). Usando otra función candidata, o bien, otro método para determinar  $\alpha_i$  y  $k_i$  es posible demostrar la convergencia en tiempo finito empleando ganancias menores.

### 3.3. CTA para cota arbitraria de perturbación

Empleando la función de Lyapunov (3.9) se determinaron ganancias que aseguran la convergencia de los estados del sistema (3.2) y que son capaces de permitir una cierta cota de la derivada de la perturbación  $\mu_c$ . Sin embargo al presentarse una cota diferente a la determinada, las ganancias obtenidas pueden no ser adecuadas para lograr el objetivo planteado.

La solución inmediata sería repetir el procedimiento anterior y obtener una función de Lyapunov que permita determinar las ganancias adecuadas para una perturbación con una cota superior distinta, sin embargo esto no es una buena solución ya que dicho análisis no es simple.

Por otra parte se puede tomar ventaja de la propiedad de homogeneidad del sistema analizado así como de la función de Lyapunov y aprovechar los resultados obtenidos previamente, por lo cual se propone analizar un nuevo sistema homogéneo que se deduce a partir de un nuevo cambio de variable

$$\bar{x}_1 = Lx_1, \quad \bar{x}_2 = Lx_2, \quad \bar{x}_3 = Lx_3, \quad (3.25)$$

$0 < L \in \mathbb{R}$  es un factor de escalamiento que permitirá ajustar las ganancias obtenidas previamente.

Al evaluar la derivada de los nuevos estados  $\bar{x}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -k_{p1}[\bar{x}_1]^{\frac{1}{3}} - k_{p2}[\bar{x}_2]^{\frac{1}{2}} + \bar{x}_3 \\ \dot{\bar{x}}_3 &= -k_{p3}[\bar{x}_1]^0 - k_{p4}[\bar{x}_2]^0 + \dot{\Delta}_p(t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

en donde

$$k_{p1} = L^{\frac{2}{3}}k_1, \quad k_{p2} = L^{\frac{1}{2}}k_2, \quad k_{p3} = Lk_3, \quad k_{p4} = Lk_4, \quad (3.27)$$

$$\dot{\Delta}_p(t) = L\dot{\Delta}(t). \quad (3.28)$$

Es importante notar que (3.26) tiene la misma estructura que (3.2), y al igual que en el caso anterior, posee grado de homogeneidad  $v = -1$ , y pesos de homogeneidad  $r = [3 \ 2 \ 1]$  para los estados  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  y  $\bar{x}_3$  respectivamente.

### 3.3.1. Escalamiento de las ganancias

De acuerdo a la ecuación (3.27), las ganancias de (3.26) pueden ser ajustadas con el conocimiento de las  $k_i$  ganancias para (3.2) y del factor de escalamiento  $L$ . Para ello nuevamente se asume que la perturbación  $\Delta_p(t)$  es Lipschitz y además

$$|\dot{\Delta}_p| \leq \delta \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

Empleando las ecuaciones (3.19) y (3.28) se puede deducir que

$$L\mu_c = \delta. \quad (3.30)$$

Por lo tanto, el factor de escalamiento  $L$  puede ser determinado con el conocimiento de  $\mu_c$  y de la cota de la derivada de la perturbación del sistema a controlar  $\delta$ .

**Ejemplo 3.1.** *Se considera el sistema (1.1) y para efectos de simulación se asume la perturbación*

$$\Delta_p(t) = 35 + 0.6 \sin(2t) + 0.4 \sin(\sqrt{10}t).$$

*Por lo tanto*

$$\dot{\Delta}_p(t) = 1.2 \cos(2t) + 0.4\sqrt{10} \cos(\sqrt{10}t) \quad \Rightarrow \quad |\dot{\Delta}_p(t)| \leq 2.5 = \delta.$$

*Utilizando el conjunto de ganancias (3.17) se ha determinado  $\mu_c = 0.0024$  de esta manera se determina el factor de escalamiento  $L$*

$$L = \frac{\delta}{\mu_c} = 1042. \quad (3.31)$$

*Aplicando la ecuación (3.27) se obtienen los valores de las ganancias necesarias para el CTA que aseguran la convergencia de los estados*

$$k_{p1} = 99.7877, \quad k_{p2} = 42.2548, \quad k_{p3} = 14.0863, \quad k_{p4} = 7.3655. \quad (3.32)$$

*La respuesta de los estados puede ser visualizada en la Figura 3.5. La señal de control continua se muestra en la Figura 3.6. Finalmente el estado  $\eta$  y su convergencia a  $-\Delta(t)$  se visualiza en la Figura 3.7.*

*Es importante notar que tanto los estados  $x$  y  $\eta$  convergen a su objetivo en el mismo tiempo.*

### 3.3.2. Escalamiento de la función de Lyapunov

La convergencia de los estados  $\bar{x}$  en (3.26) puede ser demostrada mediante la función de Lyapunov previamente determinada y aplicando el cambio de variable (3.25), esto se debe a que la función de Lyapunov determinada es homogénea.

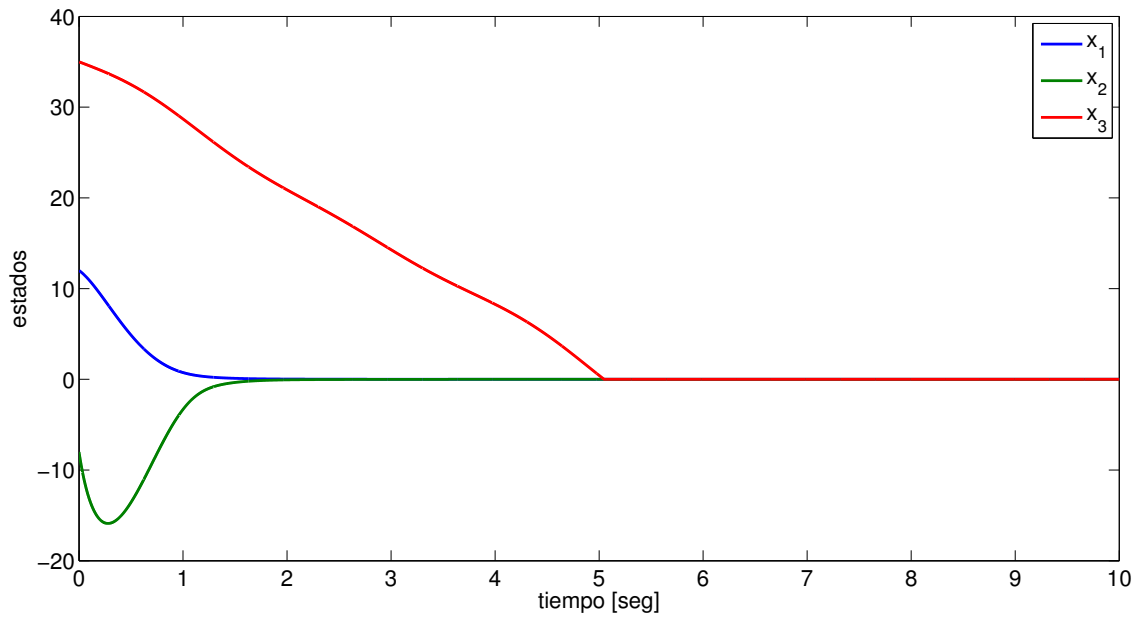


Figura 3.5: Convergencia de los estados  $x$  empleando el Algoritmo Twisting Continuo.

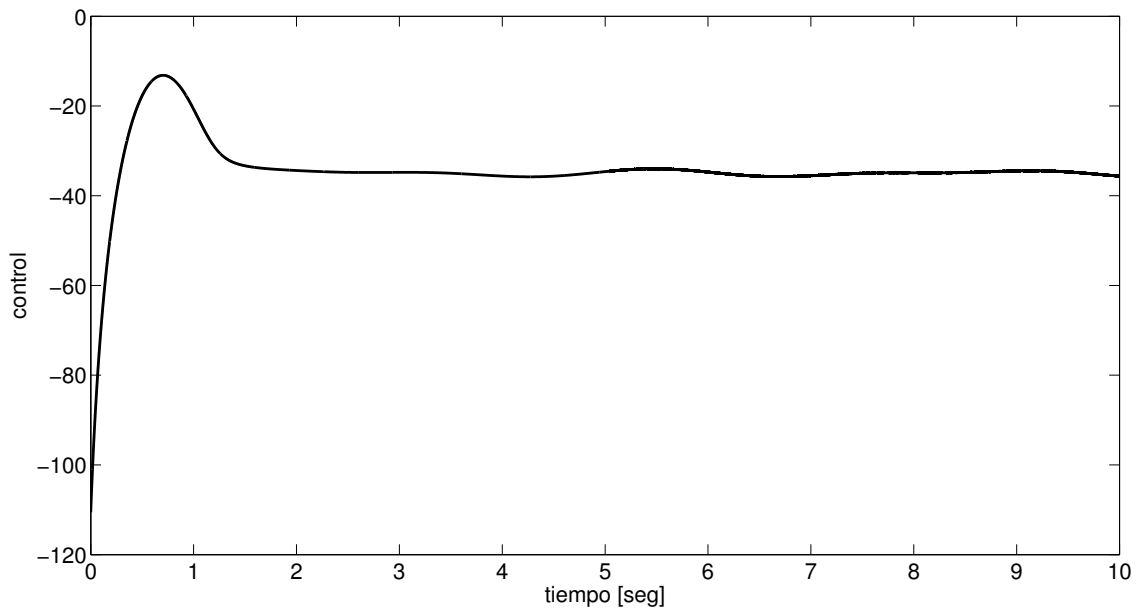


Figura 3.6: Señal de control continua del CTA.

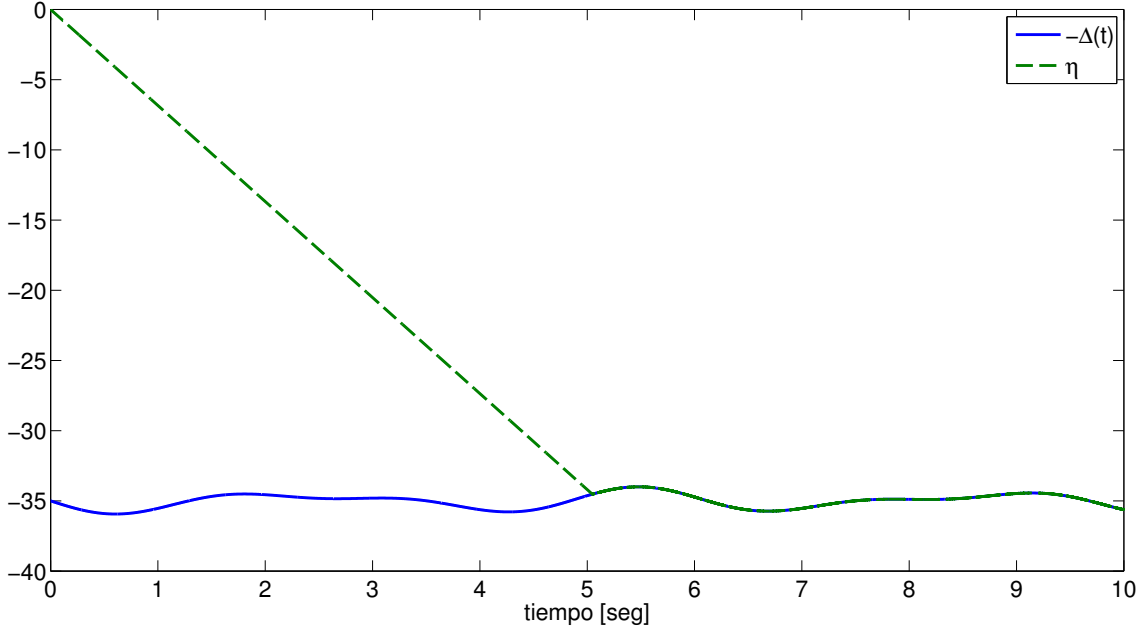


Figura 3.7: Compensación de la perturbación  $\Delta(t)$  mediante  $\eta$ .

$$V(\bar{x}) = \alpha_{p1} |\bar{x}_1|^{\frac{5}{3}} + \alpha_{p2} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \alpha_{p3} |\bar{x}_3|^{\frac{5}{2}} + \alpha_{p4} \bar{x}_1 [\bar{x}_3]^2 - \alpha_{p5} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \alpha_{p6} |\bar{x}_3|^5, \quad (3.33a)$$

donde

$$\alpha_{p1} = \frac{\alpha_1}{L^{\frac{5}{3}}}, \quad \alpha_{p2} = \frac{\alpha_2}{L^2}, \quad \alpha_{p3} = \frac{\alpha_3}{L^{\frac{5}{2}}}, \quad \alpha_{p4} = \frac{\alpha_4}{L^3}, \quad \alpha_{p5} = \frac{\alpha_5}{L^4}, \quad \alpha_{p6} = \frac{\alpha_6}{L^5}. \quad (3.33b)$$

Debido al escalamiento realizado es claro que la derivada de (3.33a) a lo largo de las trayectorias de (3.26) es una función negativa definida.

De nuevo se emplea la representación gráfica para demostrar la positividad de la función de Lyapunov  $V(\bar{x})$  y de  $W(\bar{x}) = -\dot{V}(\bar{x})$  derivada.

Las representaciones de estas funciones homogéneas sobre la esfera unitaria se muestran en las Figuras 3.8 y 3.9, respectivamente.

Se debe notar que tanto  $V(\bar{x})$  y  $W(\bar{x}) = -\dot{V}(\bar{x})$  son funciones positivas definidas lo cual asegura la convergencia de los estados  $\bar{x}$  a cero en tiempo finito.

### 3.4. Precisión del CTA

De acuerdo a los pesos de homogeneidad del CTA, se espera que los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  presenten precisión respecto al tiempo de muestreo  $\tau$  cúbica, cuadrática y lineal respectivamente (Levant, 2005), es decir, se espera que la precisión alcanzada por cada uno de los estados se encuentre determinada por

$$|x_1| \leq \xi_1 \tau^3, \quad |x_2| \leq \xi_2 \tau^2, \quad |x_3| \leq \xi_3 \tau, \quad (3.34)$$

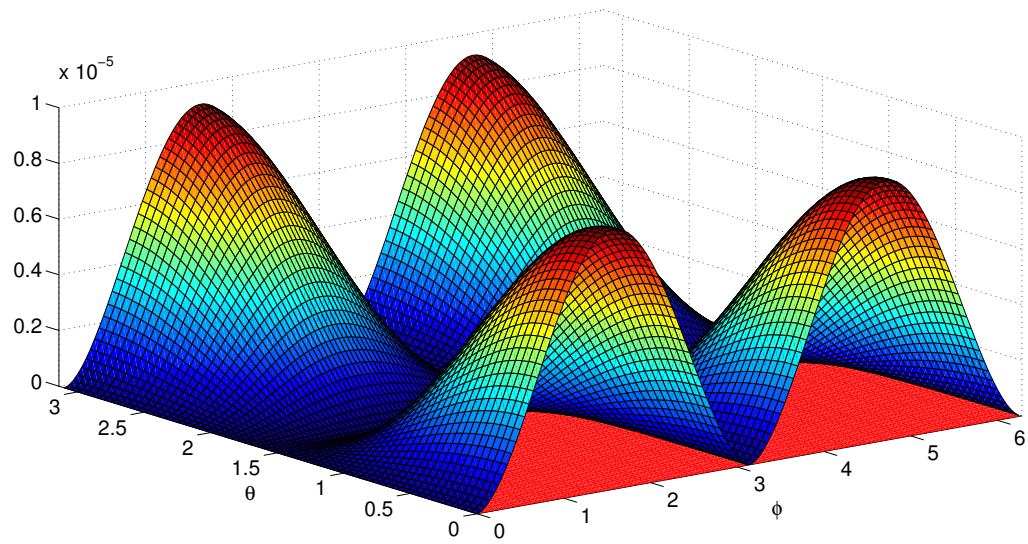


Figura 3.8: Función de Lyapunov escalada  $V(\bar{x})$  representada sobre la esfera unitaria.

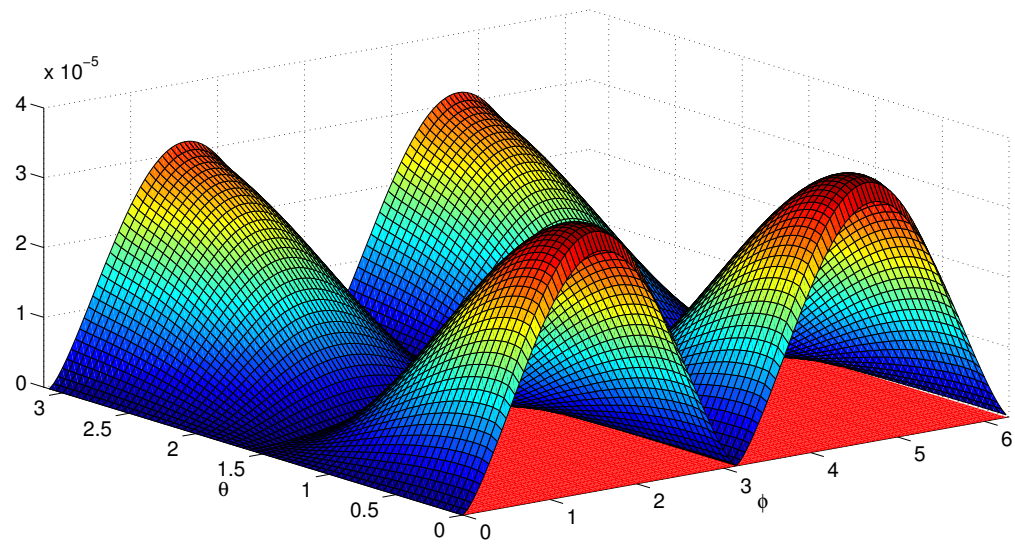


Figura 3.9:  $W(\bar{x})$  representada sobre la esfera unitaria.

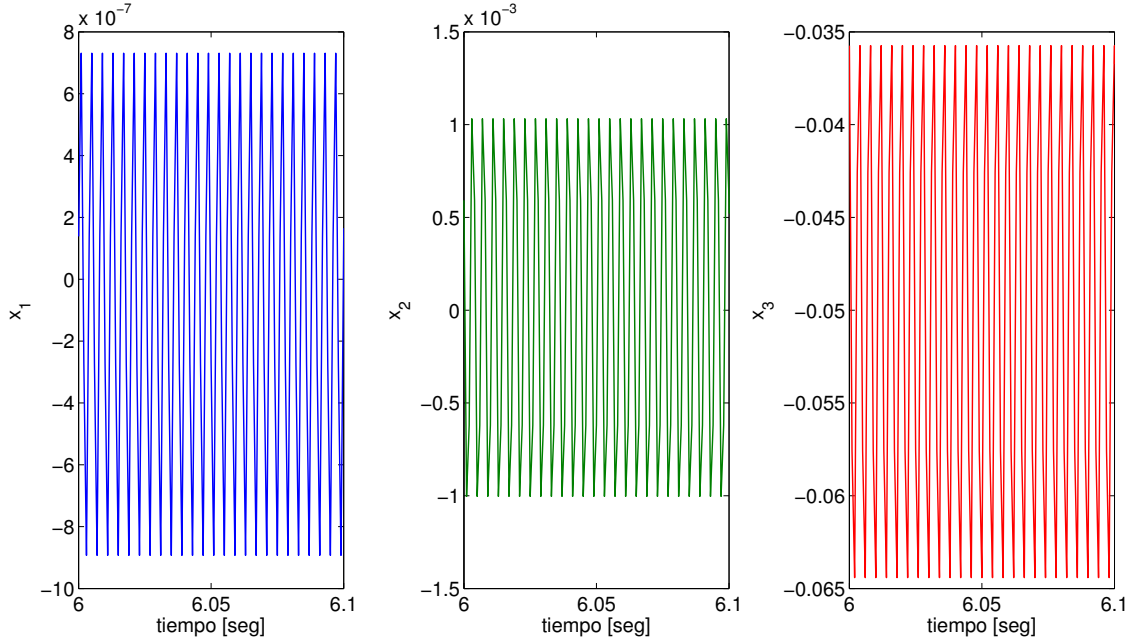


Figura 3.10: Precisión de las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  con  $\tau = 0.001$  seg.

donde  $\xi_i$  corresponde a los coeficientes de precisión. Para verificar este hecho se realizan simulaciones empleando el método de integración de Euler con paso de muestreo  $\tau = 10^{-3}$ ; esta simulación se muestra en la Figura 3.10. De su inspección se aprecia que

$$|x_1| \leq 8 \times 10^{-7}, \quad |x_2| \leq 1.1 \times 10^{-3}, \quad |x_3| \leq 0.3 \times 10^{-1}. \quad (3.35)$$

Empleando la ecuación (3.34) se concluye que los coeficientes de precisión son

$$\xi_1 = 800, \quad \xi_2 = 110, \quad \xi_3 = 30. \quad (3.36)$$

Estas constantes también pueden ser obtenidas al examinar los resultados de simulación con  $\tau = 10^{-4}$  y  $10^{-5}$ . En las Figuras 3.11 y 3.12 se muestran los resultados de simulación cuando el método de Euler se fija en  $\tau = 10^{-4}$  y  $\tau = 10^{-5}$  respectivamente.



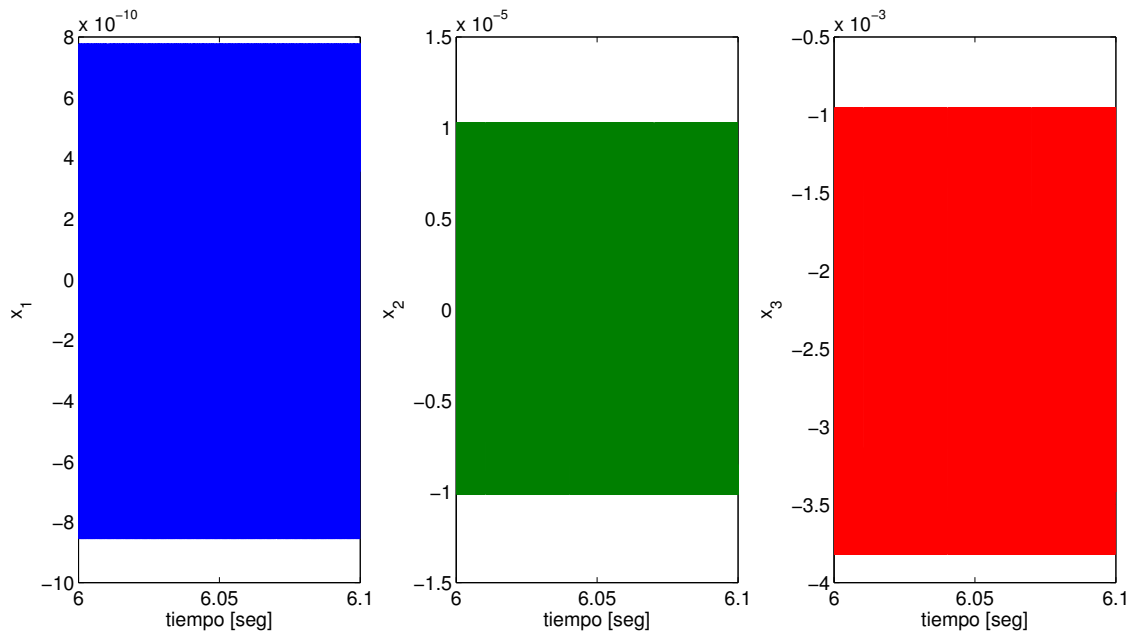


Figura 3.11: Precisión de las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  con  $\tau = 0.0001$  seg.

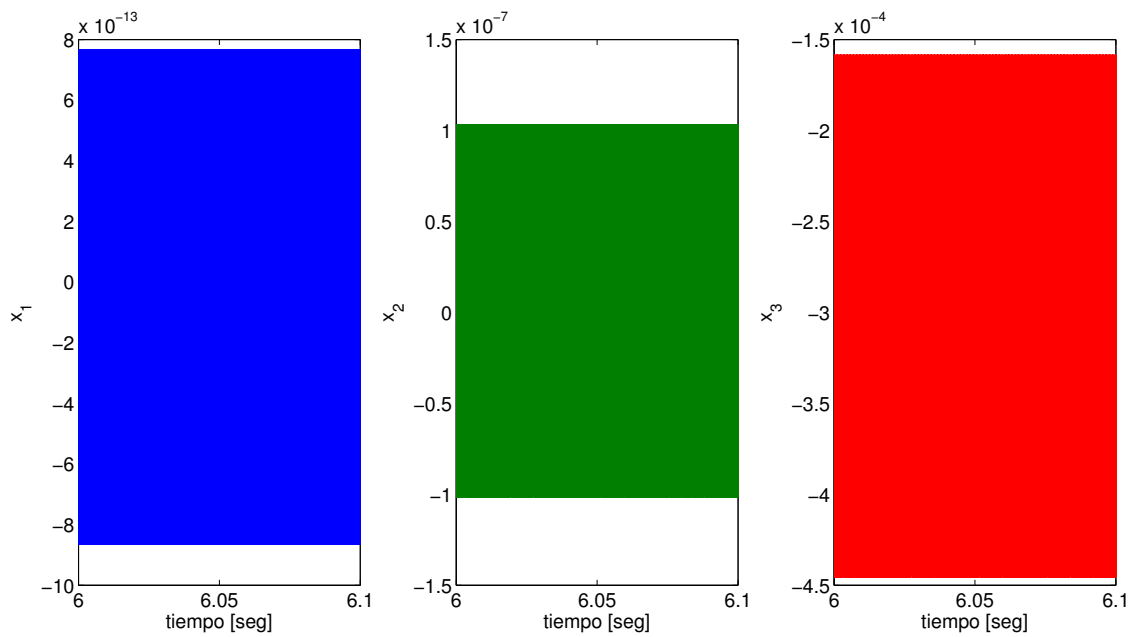


Figura 3.12: Precisión de las variables de estado  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  con  $\tau = 0.00001$  seg.



## Capítulo 4

# Algoritmo Twisting Continuo mediante retroalimentación de salida

Se ha demostrado que el CTA es un controlador por modos deslizantes de quinta generación que asegura la convergencia en tiempo finito de los estados del sistema (1.1) aun en presencia de perturbaciones Lipschitz. Sin embargo como la mayoría de controladores para sistemas de segundo orden requiere la información de ambos estados, lo cual puede dificultar su aplicación.

En este capítulo se asumirá que solo se dispone del estado  $x_1$  para ser medido, por lo cual se analizará el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \Delta(t) + u \\ y &= x_1.\end{aligned}\tag{4.1}$$

El objetivo es utilizar la información de la salida  $y$  y con ella obtener un estimado de  $x_2$  con el fin de emplearlo en el CTA. Para ello se analizarán dos enfoques diferentes.

### 4.1. Control mediante retroalimentación de salida usando derivadores de orden superior por modos deslizantes

Los controladores por modos deslizantes de orden superior (HOSMC) tienen como objetivo lograr la convergencia en tiempo finito de una variable de interés  $\sigma$ , la cual se asume derivable y tiene grado relativo  $r$  respecto a la señal de control. Para su ejecución estos algoritmos requieren la información de las  $r - 1$  derivadas de la variable  $\sigma$ , lo cual se logra empleando derivadores por modos deslizantes de orden arbitrario (Levant, 2003) cuya estructura está dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= v_0 = -\lambda_r [z_0 - f(t)]^{\frac{r}{r+1}} + z_1 \\ \dot{z}_1 &= v_1 = -\lambda_{r-1} [z_1 - v_0]^{\frac{r-1}{r}} + z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= v_{r-1} = -\lambda_1 [z_{r-1} - v_{r-2}]^{\frac{1}{2}} + z_r \\ \dot{z}_r &= -\lambda_0 [z_r - v_{r-1}]^0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

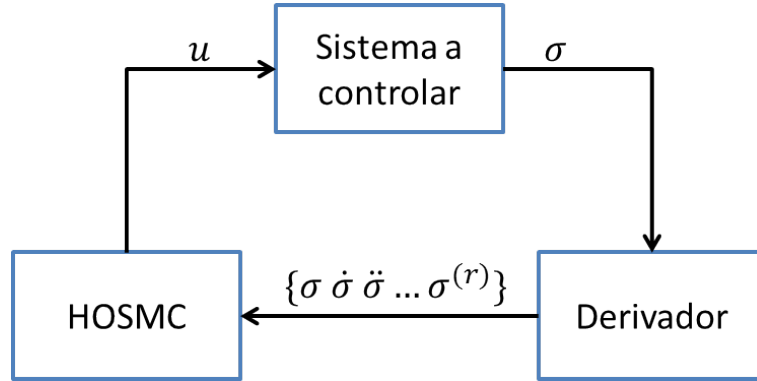


Figura 4.1: Esquema de control por retroalimentación de salida empleando HOSMC y derivadores por modos deslizantes de orden superior.

donde  $f(t)$  es la señal que se desea derivar y las constantes  $\lambda_i$  son ganancias del derivador que deben ser elegidas de manera adecuada para lograr la convergencia en tiempo finito de los estados  $z_r$  a las  $r$ -ésimas derivadas. El ajuste de las constantes  $\lambda_i$  se realiza con el conocimiento de la constante de Lipschitz de la  $r$ -ésima derivada de  $f(t)$ .

Es importante notar que las ecuaciones del campo vectorial de (4.2) son continuas con excepción de la  $r$ -ésima ecuación, esto implica que la  $r$ -ésima derivada se obtiene mediante la integración de una función discontinua, por lo que esta derivada se podría nombrar en términos cualitativos como ruidosa, por lo tanto emplear esta derivada afectaría el desempeño del controlador que sea utilizado. Razón por la cual, en la práctica si se requiere estimar las  $r - 1$  derivadas de  $f(t)$ , generalmente se implementa (4.2) para obtener  $r$  derivadas, de esta forma para ajustar el derivador (4.2) se requiere la constante de Lipschitz de la  $r + 1$  ésima derivada. El enfoque de este esquema de control por retroalimentación de salida se muestra en la Figura 4.1.

Sin embargo, esta estrategia de control mediante retroalimentación de salida no es aplicable en el CTA debido a que la tercera derivada de  $x_1$  no es Lipschitz, por lo cual no es posible ajustar (4.2) para así obtener una buena aproximación de  $x_2$ .

## 4.2. Control mediante retroalimentación de salida usando observador de estados por modos deslizantes

Tal y como se presenta en Moreno (2012) una opción para realizar control por retroalimentación de salida para controladores basados en modos deslizantes es obtener los estimados de los estados requeridos mediante un observador para el sistema controlado y posteriormente utilizar esta información en el controlador que será empleado.

La idea de este enfoque es aprovechada, por lo cual se propone utilizar un observador de estados para el sistema (4.1). Este observador debe ser capaz de proporcionar en tiempo finito el estimado de  $x_2$  pese a la perturbación  $\Delta(t)$ . En Chalanga *et al.* (2014) se analiza esta idea para realizar el objetivo de control.

El observador de estados que será utilizado se propone como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -l_1[\hat{x}_1 - y]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -l_2[\hat{x}_1 - y]^{\frac{1}{3}} + \epsilon + u \\ \dot{\epsilon} &= -l_3[\hat{x}_1 - y]^0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Las constantes  $l_i$  corresponden a las ganancias del observador y deben ser seleccionadas de manera adecuada para lograr la convergencia de los estados estimados.  $\epsilon$  es un estado interno del observador.

Al definir los errores de estimación

$$e_1 = \hat{x}_1 - x_1, \quad e_2 = \hat{x}_2 - x_2, \quad e_3 = \epsilon - \Delta(t),\tag{4.4}$$

es posible expresar la dinámica del error en lazo cerrado mediante

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -l_1|e_1|^{\frac{2}{3}} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -l_2|e_1|^{\frac{1}{3}} + e_3 \\ \dot{e}_3 &= -l_3|e_1|^0 - \dot{\Delta}(t).\end{aligned}\tag{4.5}$$

El sistema (4.5) posee un campo vectorial con grado de homogeneidad  $v = -1$  y pesos  $r = [3 \ 2 \ 1]$  para las variables  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  respectivamente.

Cuando los errores de estimación convergen a cero, la variable  $\epsilon$  converge a  $\Delta(t)$ , lo cual permite observar esta perturbación.

En (Ortiz-Ricardez *et al.*, 2015) se han analizado, a través de una función de Lyapunov suave y homogénea, las condiciones de convergencia de un derivador de segundo orden. Este análisis se realiza a través de la dinámica de los errores de derivación, la cual coincide con la dinámica de error (4.5) por tal motivo se emplea dicha función de Lyapunov

$$V(e) = \gamma_1|e_1|^{\frac{5}{3}} - \gamma_2e_1e_2 + \gamma_3|e_2|^{\frac{5}{2}} - \gamma_4e_2e_3^3 + \gamma_5|e_3|^5.\tag{4.6}$$

Dado que  $\Delta(t)$  es Lipschitz se asume entonces

$$|\dot{\Delta}(t)| \leq \mu_o.\tag{4.7}$$

Por lo tanto la derivada de (4.6) a lo largo de las trayectorias de (4.5) considerando la restricción (4.7)

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= -\lambda_1|e_1|^{\frac{4}{3}} + \lambda_2|e_1|^2|e_2|^2 - \lambda_3|e_1|^{\frac{1}{3}}|e_2|^{\frac{3}{2}} - \lambda_4|e_2|^2 \\ &\quad - \lambda_4e_1e_3 + \lambda_5|e_2|^{\frac{3}{2}}e_3 + \lambda_6e_2|e_3|^2 + \lambda_7|e_1|^{\frac{1}{3}}e_3^3 - \lambda_8|e_3|^4,\end{aligned}\tag{4.8a}$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{5}{3}\gamma_1l_1 - \gamma_2l_2, & \lambda_2 &= \frac{5}{3}\gamma_1 + \gamma_2l_1, & \lambda_3 &= \frac{5}{2}\gamma_3l_2 \\ \lambda_4 &= \gamma_2, & \lambda_5 &= \frac{5}{2}\gamma_3, & \lambda_6 &= 3\gamma_4(l_3|e_1|^0|e_3|^0 + \mu_o|e_3|^0), \\ \lambda_7 &= \gamma_4l_2, & \lambda_8 &= (\gamma_4 + 5\gamma_5l_3|e_1|^0|e_3|^0 + 5\gamma_5\mu_o|e_3|^0).\end{aligned}\tag{4.8b}$$

Es claro que para garantizar la positividad definida de (4.6) y la negatividad definida de su derivada, los coeficientes  $\lambda$  y las ganancias  $l$  deben ser fijados de forma adecuada.

**Teorema 4.1.** (Ortiz-Ricardez *et al.*, 2015) Considere  $|\dot{\Delta}(t)| \leq \mu_o = 0.0021$ . La función homogénea (4.6) es una función de Lyapunov para (4.5) con los coeficientes

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 102.01, & \gamma_2 &= 13.9955, & \gamma_3 &= 3.9831, \\ \gamma_4 &= 2.0066, & \gamma_5 &= 13.3625, \end{aligned} \quad (4.9)$$

y las ganancias

$$l_1 = 9.343561, \quad l_2 = 6.858970, \quad l_3 = 0.021809. \quad (4.10)$$

□

Las condiciones del Teorema anterior aseguran la convergencia de los errores de estimación para una perturbación cuya derivada tenga una cota definida, si esta cota es mayor a lo establecido, las ganancias pueden no ser adecuadas para lograr el objetivo de observación. Para solucionar este inconveniente se analiza un nuevo sistema homogéneo auxiliar deducido mediante el cambio de variable

$$\bar{e}_1 = He_1, \quad \bar{e}_2 = He_2, \quad \bar{e}_3 = He_3, \quad (4.11)$$

donde  $0 < H \in \mathbb{R}$  es un factor de escalamiento que permitirá ajustar las ganancias obtenidas previamente.

La dinámica de los estados  $\bar{e}$  es

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_1 &= -l_{p1}[\bar{e}_1]^{\frac{2}{3}} + \bar{e}_2 \\ \dot{\bar{e}}_2 &= -l_{p2}[\bar{e}_1]^{\frac{1}{3}} + \bar{e}_3 \\ \dot{\bar{e}}_3 &= -l_{p3}[\bar{e}_1]^0 - \dot{\Delta}_p(t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde

$$\dot{\Delta}_p(t) = H\dot{\Delta}(t), \quad |\dot{\Delta}_p(t)| \leq \delta \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

**Teorema 4.2.** (Ortiz-Ricardez *et al.*, 2015) Considerando los resultados del Teorema 4.1, el origen de (4.12) es estable en tiempo finito con

$$l_{p1} = H^{\frac{1}{3}}l_1, \quad l_{p2} = H^{\frac{2}{3}}l_2, \quad l_{p3} = Hl_3, \quad (4.14)$$

donde  $H = \delta/\mu_o$ ;  $\mu_o = 0.0021$ . Más aun, la función

$$V(\bar{e}) = \gamma_{p1}|\bar{e}_1|^{\frac{5}{3}} - \gamma_{p2}\bar{e}_1\bar{e}_2 + \gamma_{p3}|\bar{e}_2|^{\frac{5}{2}} - \gamma_{p4}\bar{e}_2\bar{e}_3^3 + \gamma_{p5}|\bar{e}_3|^5 \quad (4.15)$$

es una función de Lyapunov para (4.12) con los coeficientes escalados

$$\gamma_{p1} = \frac{\gamma_1}{H^{\frac{5}{3}}}, \quad \gamma_{p2} = \frac{\gamma_2}{H^2}, \quad \gamma_{p3} = \frac{\gamma_3}{H^{\frac{5}{2}}}, \quad \gamma_{p4} = \frac{\gamma_4}{H^4}, \quad \gamma_{p5} = \frac{\gamma_5}{H^5}. \quad (4.16)$$

□

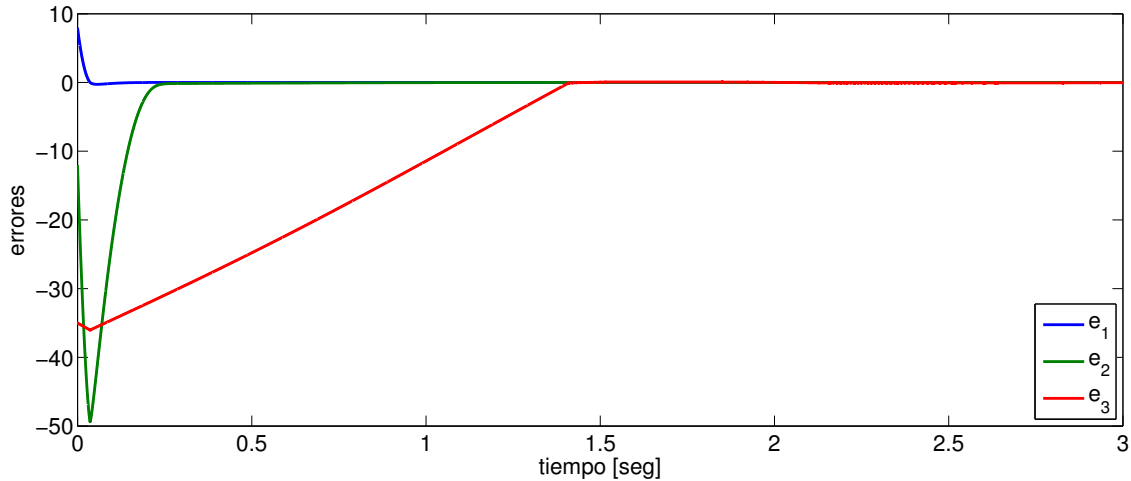


Figura 4.2: Errores de observación.

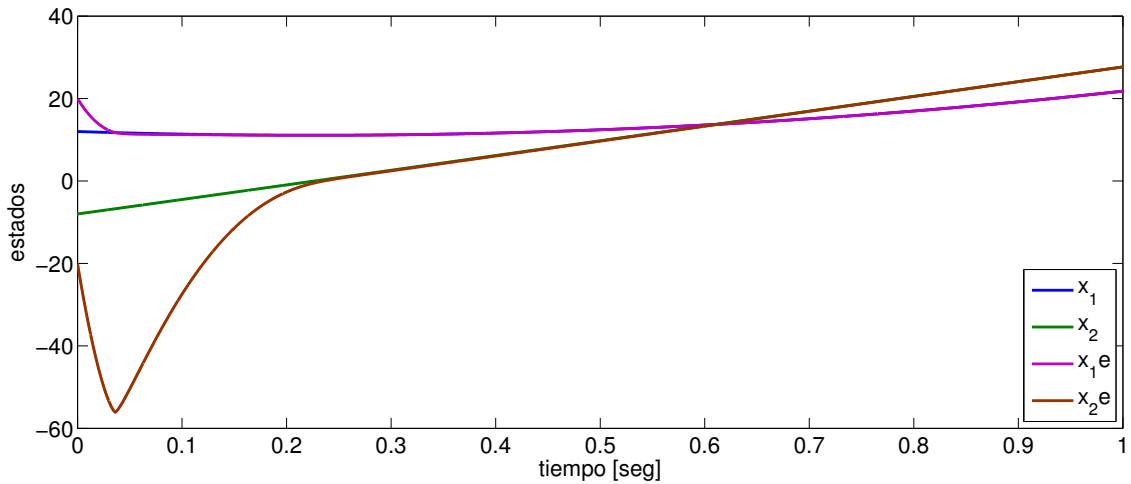


Figura 4.3: Estados del sistema y sus estimados correspondientes.

**Ejemplo 4.1.** Considere el sistema (4.1) con  $\Delta_p(t) = 35 + 0.6 \sin(2t) + 0.4 \sin(\sqrt{10}t)$  por lo tanto  $|\dot{\Delta}_p(t)| \leq 2.5 = \delta$ . El sistema está libre de acción de control  $u = 0$ . Con los resultados obtenidos se calcula el factor de escalamiento  $H$

$$H = \frac{\delta}{\mu_o} = 1191, \quad (4.17)$$

empleando (4.14) se obtiene

$$l_{p1} = 99.0413, \quad l_{p2} = 770.6670, \quad l_{p3} = 25.9750.$$

Los errores de estimación se muestran en la Figura 4.2, en la Figura 4.3 se muestran los estados reales y estimados. La convergencia del estado  $\epsilon$  se muestra en la Figura 4.4.

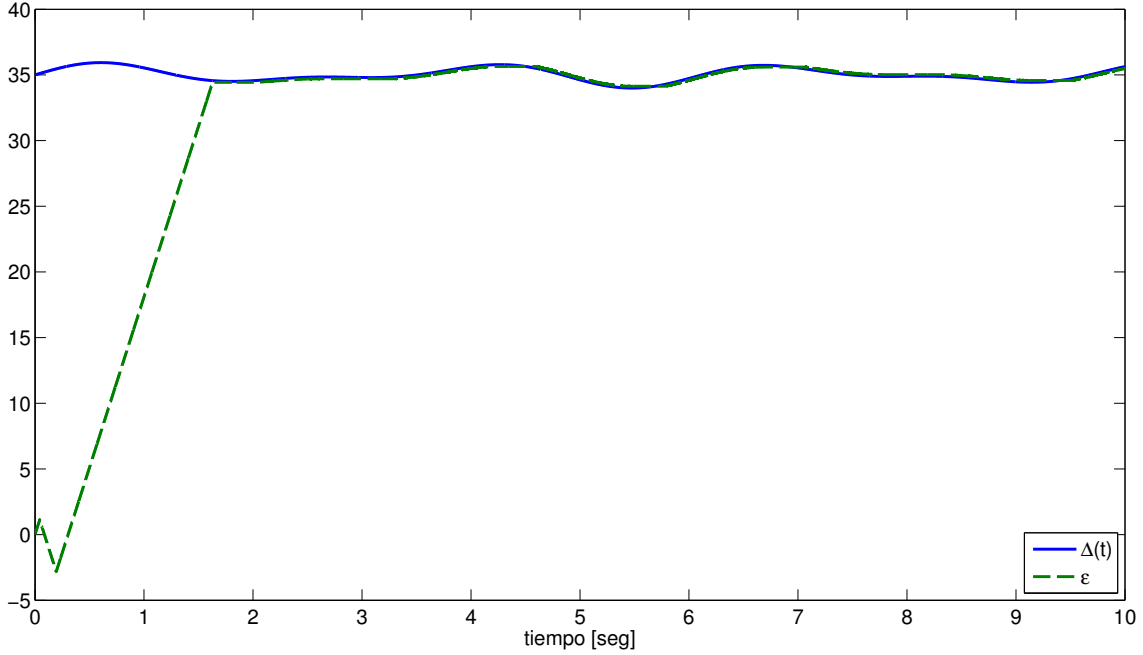


Figura 4.4: Convergencia de la variable  $\epsilon$  a  $\Delta(t)$ .

### 4.3. Conexión observador-controlador

Al combinar la estructura del controlador (3.1) y el observador (4.3), se puede definir una versión del CTA mediante retroalimentación de salida

$$\begin{aligned}
 u &= -k_1[y]^{\frac{1}{3}} - k_2[\hat{x}_2]^{\frac{1}{2}} + \eta \\
 \dot{\eta} &= -k_3[y]^0 - k_4[\hat{x}_2]^0 \\
 \dot{\hat{x}}_1 &= -l_1[\hat{x}_1 - y]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\
 \dot{\hat{x}}_2 &= -l_2[\hat{x}_1 - y]^{\frac{1}{3}} + \epsilon - k_1[y]^{\frac{1}{3}} - k_2[\hat{x}_2]^{\frac{1}{2}} + \eta \\
 \dot{\epsilon} &= -l_3[\hat{x}_1 - y]^0.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Al sustituir (4.18) en (4.1), nuevamente definiendo el estado virtual  $x_3 = \eta + \Delta(t)$  y empleando (4.4) se expresa la dinámica del sistema controlador-observador.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2 + e_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2 + e_2]^0 + \dot{\Delta}(t) \\
 \dot{e}_1 &= -l_1[e_1]^{\frac{2}{3}} + e_2 \\
 \dot{e}_2 &= -l_2[e_1]^{\frac{1}{3}} + e_3 \\
 \dot{e}_3 &= -l_3[e_1]^0 - \dot{\Delta}(t).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$



### 4.3.1. Sistema nominal

Al igual que en el Capítulo 3 primero se considera el caso cuando (4.19) no contiene perturbaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2 + e_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2 + e_2]^0 \\
 \dot{e}_1 &= -l_1[e_1]^{\frac{2}{3}} + e_2 \\
 \dot{e}_2 &= -l_2[e_1]^{\frac{1}{3}} + e_3 \\
 \dot{e}_3 &= -l_3[e_1]^0.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

### Estabilidad sistema conectado

Es posible apreciar que el sistema conectado (4.20) puede ser visualizado como

$$\Sigma: \quad \dot{x} = f(x, e), \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \tag{4.21}$$

$$\Xi: \quad \dot{e} = g(e), \quad e = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]^T, \tag{4.22}$$

es decir la conexión en cascada de dos sistemas. Esta propiedad será aprovechada para determinar condiciones que determinen la estabilidad del sistema (4.20).

**Lema 4.1.** (Khalil, 2002) Se asume que el origen de (4.21) con  $e = 0$  es global y asintóticamente estable. Si (4.21), con  $e$  como entrada es entrada-estado estable (ISS por sus siglas en inglés) y el origen de (4.22) es global y asintóticamente estable, entonces el origen del sistema en cascada (4.21) y (4.22) es global, y asintóticamente estable.  $\square$

De acuerdo al Lema 4.1, una condición para garantizar la estabilidad de (4.20) radica en que el subsistema  $\Sigma$  sea ISS, esta condición puede verificarse utilizando la función de Lyapunov del sistema conectado con el controlador determinada en el Capítulo 3.

En Bernuau *et al.* (2013) se presenta un método que permite verificar de forma simple las propiedades ISS e iISS de sistemas homogéneos, de la forma

$$\dot{\xi} = h(\xi, d), \tag{4.23}$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^m$  y  $d \in \mathcal{L}_\infty$ .

La verificación de dichas propiedades se realiza a través del denominado *campo vectorial extendido auxiliar*

$$\tilde{h}(\xi, d) = [h(\xi, d)^T \quad 0_m^T]^T, \tag{4.24}$$

$0_m \in \mathbb{R}^m$  es el vector nulo de dimensión  $m$ .

**Teorema 4.3.** (Bernuau *et al.*, 2013). Sea el campo vectorial  $\tilde{h}$  homogéneo con pesos  $r = [r_1, \dots, r_n] > 0$ ,  $\tilde{r} = [\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_m] \geq 0$  con grado de homogeneidad  $v \geq -\text{mín } r$ . Se asume que el origen del sistema (4.23) es global y asintóticamente estable para  $d = 0$ , entonces el sistema es

- ISS si  $\text{mín } \tilde{r} > 0$ ;

- iISS si mín  $\tilde{r} = 0$  y  $v \leq 0$ .

□

Al analizar los pesos de homogeneidad del campo vectorial extendido del subsistema  $\Sigma$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{r_2} x_2 &= \varepsilon^{r_1+v} (x_2) \\
-k_1[\varepsilon^{r_1} x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[\varepsilon^{r_2} x_2 + \varepsilon^{\tilde{r}} e_2]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{r_3} x_3 &= \varepsilon^{r_2+v} \left( -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2 + e_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \right) \\
-k_3[\varepsilon^{r_1} x_1]^0 - k_4[\varepsilon^{r_2} x_2 + \varepsilon^{\tilde{r}} e_2]^0 &= \varepsilon^{r_3+v} \left( -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2 + e_2]^0 \right) \\
0 &= \varepsilon^{\tilde{r}+v}(0),
\end{aligned} \tag{4.25}$$

se aprecia que el campo vectorial extendido tiene grado de homogeneidad  $v = -1$  y los pesos  $r = [3 \ 2 \ 1]$  para  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  respectivamente, además  $\tilde{r} = [2]$  para  $e_2$ . De acuerdo al Teorema 4.3 el subsistema  $\Sigma$  es ISS con  $e_2$  como entrada.

Por otra parte si las ganancias de (4.5) se diseñan adecuadamente los estados  $e$  convergen a cero. Y por lo tanto de acuerdo al Lema 4.1 los estados de (4.20) convergerán a cero.

### 4.3.2. Sistema perturbado

Ahora se debe analizar el efecto de la perturbación  $\Delta(t)$  en el sistema (4.19) para ello se considera la cota de la derivada de la perturbación

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2 + e_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\
\dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2 + e_2]^0 + \mu \\
\dot{e}_1 &= -l_1[e_1]^{\frac{2}{3}} + e_2 \\
\dot{e}_2 &= -l_2[e_1]^{\frac{1}{3}} + e_3 \\
\dot{e}_3 &= -l_3[e_1]^0 - \mu,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

donde  $\mu$  es la cota de la derivada de la perturbación  $\Delta(t)$ . Es importante observar que el sistema (4.26) se puede visualizar como

$$\dot{z} = \varphi(z, \mu), \quad z = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ e_1 \ e_2 \ e_3]^T. \tag{4.27}$$

Este sistema debe ser analizado con el fin de determinar condiciones para las cuales se mantenga la convergencia de  $z$  a pesar de la perturbación  $\Delta(t)$ . Para ello nuevamente se opta por emplear el Teorema 4.3.

La verificación de los pesos de homogeneidad del campo vectorial extendido  $\tilde{\varphi}$  se lleva a cabo mediante

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{r_2} x_2 &= \varepsilon^{r_1+v} (x_2) \\
-k_1[\varepsilon^{r_1} x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[\varepsilon^{r_2} x_2 + \varepsilon^{\tilde{r}} e_2]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{r_3} x_3 &= \varepsilon^{r_2+v} \left( -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2 + e_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \right) \\
-k_3[\varepsilon^{r_1} x_1]^0 - k_4[\varepsilon^{r_2} x_2 + \varepsilon^{\tilde{r}} e_2]^0 + \varepsilon^{\tilde{r}} \mu &= \varepsilon^{r_3+v} \left( -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2 + e_2]^0 + \mu \right) \\
-l_1[\varepsilon^{r_4} e_1]^{\frac{2}{3}} + \varepsilon^{r_5} e_2 &= \varepsilon^{r_4+v} \left( -l_1[e_1]^{\frac{2}{3}} + e_2 \right) \\
-l_2[\varepsilon^{r_4} e_1]^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^{r_6} e_3 &= \varepsilon^{r_5+v} \left( -l_2[e_1]^{\frac{1}{3}} + e_3 \right) \\
-l_3[\varepsilon^{r_4} e_1]^0 - \varepsilon^{\tilde{r}} \mu &= \varepsilon^{r_6+v} \left( -l_3[e_1]^0 - \mu \right) \\
0 &= \varepsilon^{\tilde{r}+v}(0),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

De este análisis se aprecia que los pesos de homogeneidad son

$$r = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1], \quad \tilde{r} = [0]. \tag{4.29}$$

Dado que el grado de homogeneidad del campo vectorial  $\varphi$  es  $v = -1$  entonces se concluye que (4.26) es iISS respecto a la derivada de la perturbación  $\Delta(t)$ , esto implica que los estados  $x$  y  $e$  seguirán convergiendo al origen aun con perturbaciones con una cota  $\mu$  suficientemente pequeña, por lo tanto, al ajustar el controlador y el observador de tal forma que se asegure la convergencia de los estados  $x$  y  $e$  respectivamente en presencia de la perturbación  $\Delta(t)$  garantiza la convergencia de los estados del sistema (4.19).

**Teorema 4.4.** Los estados de (4.19) convergen a cero si los conjuntos de ganancias  $k$  y  $l$  son elegidos de tal forma que se logre la convergencia de los estados de los sistemas (3.2) y (4.5).  $\square$

La idea principal del Teorema 4.4 es que tanto el controlador y el observador pueden ser ajustados de forma independiente, y si ambos son capaces de realizar sus objetivos, entonces se garantiza que la conexión de ambos seguirá logrando el objetivo planteado.

**Ejemplo 4.2.** *Nuevamente se considera la perturbación  $\Delta(t) = 35 + 0.6 \sin(2t) + 0.4 \sin(\sqrt{10}t)$  por lo tanto  $|\dot{\Delta}(t)| \leq 2.5$ , con esta información se determina que los factores de escalamiento  $L$  y  $H$  son 1042 y 1191 respectivamente. De esta manera las ganancias que requiere el controlador son*

$$\begin{aligned}
k_1 &= 99.7877, & k_2 &= 42.2548, \\
k_3 &= 14.0863, & k_4 &= 7.3655.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Por otra parte las ganancias que aseguran la convergencia de los errores de estimación son

$$l_1 = 99.0413 \quad l_2 = 770.6670 \quad l_3 = 25.9750. \tag{4.31}$$

En la Figura 4.5 se puede apreciar la convergencia de los estados empleando CTA con retroalimentación de salida. Los errores de estimación se muestran en la Figura 4.6 y finalmente en la Figura 4.7 se muestra la señal de control continua.

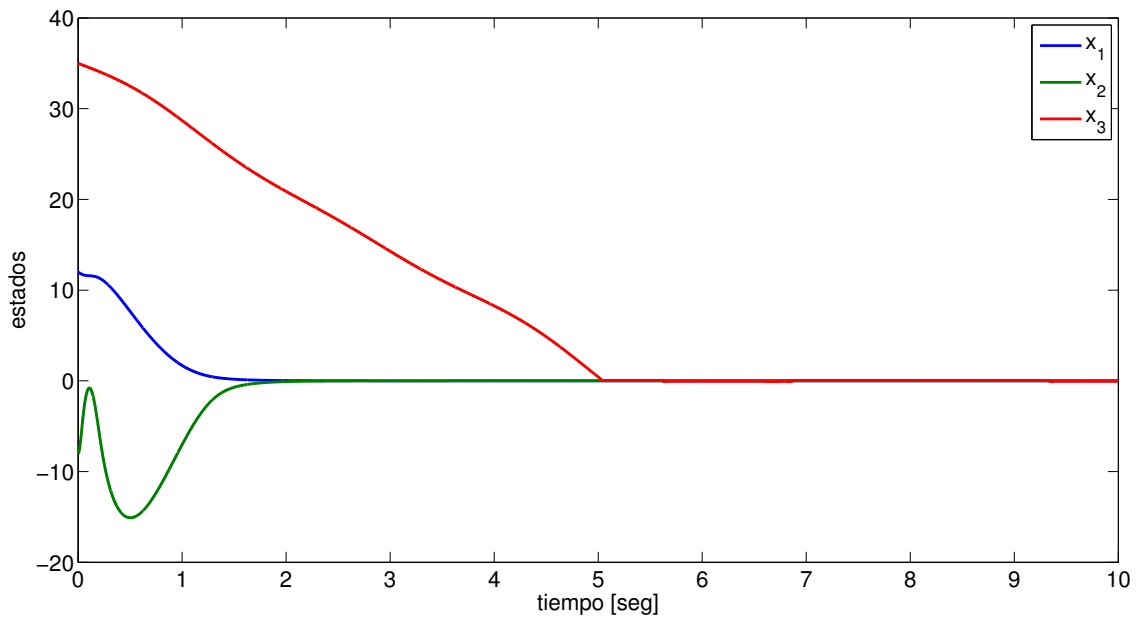


Figura 4.5: Estados del sistema controlado con CTA por retroalimentación de salida.

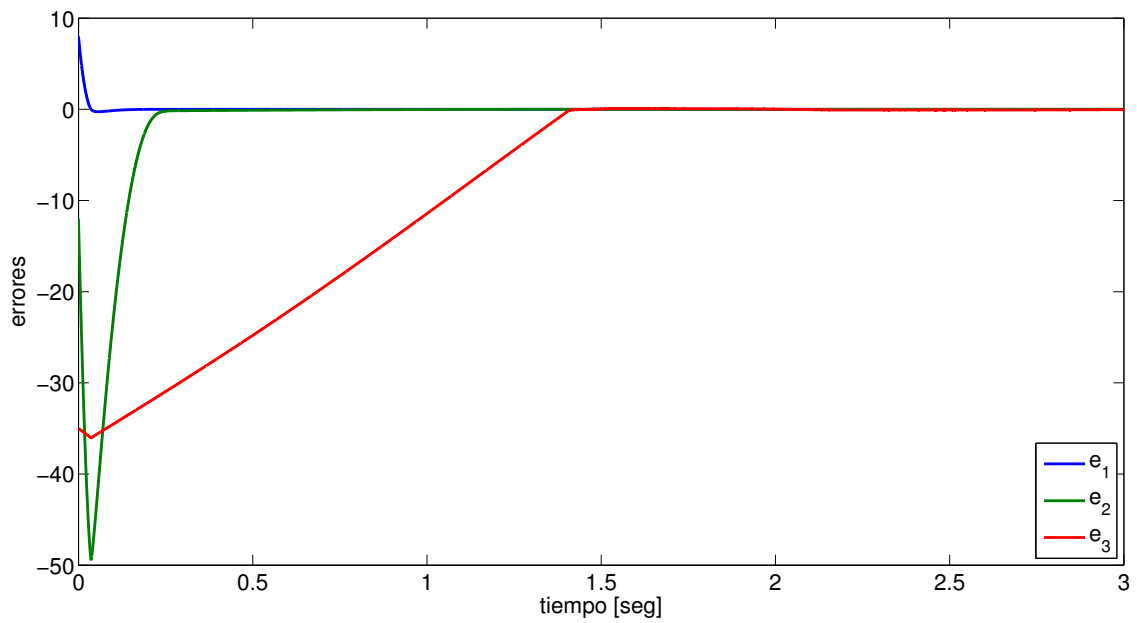


Figura 4.6: Errores de estimación del observador propuesto en conjunto con el CTA.

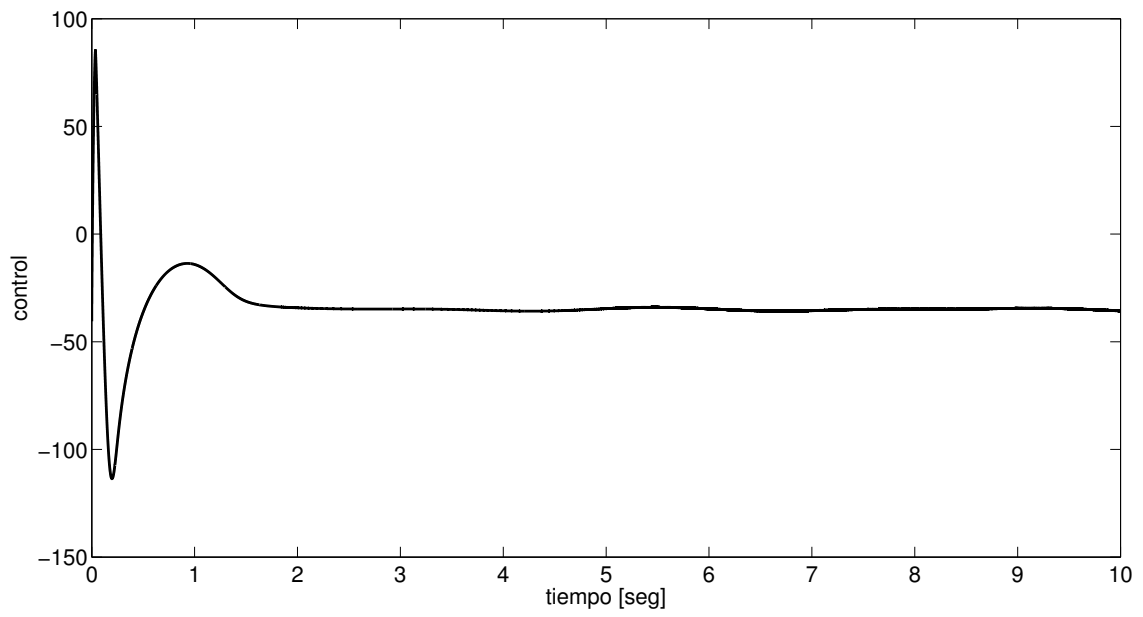


Figura 4.7: Señal de control continua del CTA mediante retroalimentación de salida.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Se construyó una función de Lyapunov suave y homogénea para el algoritmo Twisting utilizando el Teorema de Pólya. Además se propuso un método con el cual es posible determinar la cota máxima de la perturbación admisible.

En esta tesis se presentó el Algoritmo Twisting Continuo, el cual es un controlador por modos deslizantes de quinta generación basado en el controlador Super-Twisting. Se realizó el análisis de las condiciones que aseguran la convergencia de los estados en el sistema en el que es aplicado mediante una función de Lyapunov suave y homogénea, la cual fue construida empleando el Teorema de Pólya. Esta función de Lyapunov permite el análisis del sistema perturbado y nuevamente empleando el Teorema de Pólya se realizó un análisis de la cota máxima admisible.

Con la finalidad de realizar control mediante retroalimentación de salida, se propuso un observador de estados robusto ante perturbaciones Lipschitz, de igual forma se presentó un análisis de las condiciones de convergencia de los errores de estimación mediante una función de Lyapunov suave y homogénea.

Posteriormente se analizó la conexión del sistema controlador-observador y se demostró que el controlador y el observador pueden ser ajustados de manera independiente y, si ambos son capaces de realizar su objetivo, entonces la conexión de ambos seguirá cumpliendo el objetivo planteado. Debido a que la prueba de la conexión del observador-controlador se realiza mediante los pesos de sistemas homogéneos, el observador propuesto, así como el método de análisis puede ser empleado en diversos controladores homogéneos basados en modos deslizantes.

### 5.1. Trabajo futuro

Con el uso del Teorema de Pólya fue posible construir la función de Lyapunov con la que se deducen las ganancias que aseguran la convergencia del sistema controlado. Esta técnica consiste en obtener conjuntos adecuados que satisfacen sistemas de desigualdades lineales, una tarea pendiente es desarrollar un método que permita obtener nuevos conjuntos de ganancias que satisfagan los sistemas de desigualdades obtenidos.

Con el fin de determinar nuevas ganancias para este controlador también se pueden emplear métodos distintos para la construcción de funciones de Lyapunov suaves y no suaves.

En esta tesis se abordó el caso cuando el coeficiente de control es idéntico a uno, si este coeficiente se tratase de una constante distinta no existe mayor inconveniente puesto que las

ganancias obtenidas se escalan de forma inversamente proporcional a dicho coeficiente. Por lo cual una dirección natural a trabajar es el caso de coeficiente de control incierto. Por otra parte se realizó el análisis del controlador suponiendo que la perturbación solo es dependiente del tiempo, por lo que es necesario realizar dicho análisis asumiendo que dicha perturbación puede ser función del estado.

Con el fin de extender la cantidad de sistemas a los cuales el algoritmo puede ser aplicado, es posible extender el CTA para ser empleado en sistemas de mayor orden, esto requiere un análisis similar al presentado en esta tesis para definir condiciones que aseguren la convergencia de los estados involucrados.

El CTA por retroalimentación de salida presentado consiste en obtener mediante un observador de estados robusto la información de uno de los estados que no puede ser medido directamente, de esta manera el análisis de estabilidad se lleva a cabo mediante la conexión en cascada de dos sistemas. Un enfoque adicional que debe ser considerado es el análisis de una versión del CTA mediante retroalimentación de salida la cual incluye un observador de estados no robusto, es decir el lazo cerrado del sistema debe analizarse como la interconexión entre el observador y el controlador.

El ajuste de las ganancias del algoritmo presentado exige el conocimiento de la cota de la derivada de la perturbación que actúa sobre el sistema a controlar, sin embargo en la mayoría de las aplicaciones esta cota es desconocida. Para solucionar esto, es posible desarrollar una versión del CTA con ganancias adaptables. Esta misma estrategia puede ser aplicada para los controladores por modos deslizantes de quinta generación basados en retroalimentación de salida.

Finalmente se debe estudiar el caso de la aplicación del CTA a sistemas multivariables.



# Bibliografía

- Bacciotti, Andrea y Rosier, Lionel (2006). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media.
- Basin, Michael V. y Rodríguez Ramírez, Pablo Cesar (2014). A supertwisting algorithm for systems of dimension more than one. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, **61(11)**, pp. 6472–6480.
- Bernaui, Emmanuel; Polyakov, Andrey; Efimov, Denis y Perruquetti, Wilfrid (2013). Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity. *Systems & Control Letters*, **62(12)**, pp. 1159–1167.
- Boiko, Igor; Fridman, L. y Castellanos, M. I. (2004). Analysis of second-order sliding-mode algorithms in the frequency domain. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **49(6)**, pp. 946–950.
- Chalanga, A.; Kamal, S.; Fridman, L.; Bandyopadhyay, B. y Moreno, Jaime A. (2014). How to implement Super-Twisting Controller based on sliding mode observer? En: *Variable Structure Systems (VSS), 2014 13th International Workshop on*, pp. 1–6. IEEE.
- Edwards, Christopher y Spurgeon, Sarah (1998). *Sliding mode control: theory and applications*. CRC Press.
- Emel'Yanov, S. V.; Korovin, S. K. y Levantovskii, L. V. (1986). Higher-order sliding modes in binary control systems. En: *Soviet Physics Doklady*, volumen 31, p. 291.
- Fridman, Leonid; Moreno, Jaime A.; Bandyopadhyay, Bijan; Kamal, Shyam y Chalanga, Asif (2015). Continuous Nested Algorithms: The Fifth Generation of Sliding Mode Controllers. En: *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, pp. 5–35. Springer.
- Kamal, Shyam; Chalanga, Asif; Moreno, Jaime A.; Fridman, L. y Bandyopadhyay, Bitan (2014). Higher order super-twisting algorithm. En: *Variable Structure Systems (VSS), 2014 13th International Workshop on*, pp. 1–5. IEEE.
- Khalil, Hassan (2002). *Nonlinear systems, 3rd*. New Jersey, Prentice Hall.
- Levant, Arie (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, **76(9-10)**, pp. 924–941.
- Levant, Arie (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, **41(5)**, pp. 823–830.
- Moreno, Jaime A. (2012). A Lyapunov approach to output feedback control using second-order sliding modes. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*.
- Ortiz-Ricardez, Fernando; Sánchez, Tonámethyl y Moreno, Jaime A. (2015). Smooth Lyapunov Function and Gain Design for Second Order Differentiator. En: *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54rd Annual Conference on*, .

- Pólya, George (1928). Über positive Darstellung von Polynomen. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, **73**, pp. 141–145.
- Sánchez, Tonámetl y Moreno, Jaime A. (2014). A Constructive Lyapunov function design method for a class of homogeneous systems. En: *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*, pp. 5500–5505. IEEE.
- Shtessel, Yuri; Edwards, Christopher; Fridman, Leonid y Levant, Arie (2014). *Sliding mode control and observation*. Springer.
- Utkin, Vadim; Guldner, Jürgen y Shi, Jingxin (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. volumen 34. CRC press.
- Zamora, César A.; Moreno, Jaime A. y Kamal, Shyam (2013). Control Integral Discontinuo para Sistemas Mecánicos.
- Zolotykh, N. Yu (2012). New modification of the double description method for constructing the skeleton of a polyhedral cone. *Computational mathematics and mathematical physics*, **52(1)**, pp. 146–156.