

Capítulo 3

Modelo Matemático de un láser de semiconductor

En este capítulo se buscará comprender la dinámica de un láser de semiconductor representado por un sistema de ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo conocidas como ecuaciones de estado de un láser de semiconductor (*Laser rate equations*). Dichas ecuaciones describen las relaciones entre la densidad de portadores N y la densidad de fotones S en el proceso de amplificación y una ecuación que nos indica el cambio de fase que se presenta en la señal de salida.

3.1. Ecuación de estado de densidad de portadores

Para el estudio de un láser de semiconductor es recomendable aproximar las distribuciones de energía en el semiconductor en dos niveles de energía, uno representando la banda de conducción y otro la banda de valencia. A partir de dicha idea se hace un análisis mediante el estudio de la Matriz de densidades (*Density Matrix Theory*), dicho método permite hacer análisis estadístico de un sistema de varios electrones haciendo uso de la teoría cuántica, el procedimiento consiste en tomar en cuenta a un estado mixto como un conjunto de diferentes estados cuánticos que pueden tomar los electrones y definir los diferentes estados que generan cada fenómeno físico. Tal método requiere un conocimiento amplio de la teoría de la mecánica cuántica, por lo que el análisis se realizará partiendo del conjunto de ecuaciones estándar de un láser de semiconductor. Resulta importante recalcar que este conjunto de ecuaciones es que se manejan resulta válido para niveles de corriente cercanas al umbral de ganancia del láser. Es significativo hacer notar que cada modo electromagnético tiene su propio conjunto de ecuaciones. En este trabajo se tomará en consideración que se trata de un láser de semiconductor de doble heteroestructura DFB (*distributed*

feedback), donde se genera un sólo modo electromagnético.

La ecuación 3.1 muestra la ecuación de estado de densidad de portadores de un láser de semiconductor [44].

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{qV} - \frac{N}{\tau_c} - \frac{g_0(N - N_T)S}{(1 + \epsilon S)} \quad (3.1)$$

Los términos de la ecuación nos representan la inyección de portadores, las recombinaciones de portadores y las recombinaciones de emisión estimulada respectivamente [21].

3.1.1. Inyección de portadores

Este término de la ecuación de estado de la densidad de portadores nos muestra el cambio entre la corriente suministrada al láser por medio de una fuente de voltaje y la conversión de ésta a número de portadores. La ecuación 3.2 nos expone este fenómeno.

$$\text{Inyeccion de portadores} = \frac{I}{qV} \quad (3.2)$$

Donde

I es la corriente inyectada al dispositivo y que fluye por la zona activa [$I = C/s$]
 q es la carga unitaria del electrón ($q = 1,602 \times 10^{-19}[C]$)
 V es el volumen de la zona activa [m^3]

Si analizamos esta expresión, el cociente I/qV nos proporciona la densidad de electrones que fluyen por la región activa, donde cada electrón que pasa significa que va a realizar una recombinación, aunque no se sabe de que tipo se trate, si de emisión estimulada, de emisión espontánea o de recombinación no radiativa. La absorción no está representada en este término, ya que el flujo de electrones va de la banda de conducción a la banda de valencia y la absorción es un movimiento de electrones en sentido contrario. Este término tiene signo positivo ya que es el que bombea energía al sistema y por lo tanto, el que aumenta la población de los portadores.

Resulta primordial saber que la corriente considerada en la inyección de portadores, originada en un circuito fuente, es aquella que pasa por la región activa, por lo que para tener una inyección de corriente óptima, el cociente de la corriente que transita por la región activa del láser y la corriente que circula en todo el dispositivo láser debe ser cercana a 1. El parámetro que nos indica este cociente es la eficiencia de inyección n_{inj} . Los láseres con $n_{inj} \approx 1$ son los que cuentan con un diseño de heteroestructuras enterrada con buen bloqueo de corriente [21].

3.1.2. Recombinación de portadores: Emisión espontánea y no radiativa

Estas recombinaciones quedan expresadas en el segundo término de la ecuación 3.1.

$$\text{Recombinaciones de portadores} = \frac{N}{\tau_c} \quad (3.3)$$

Donde

N es la densidad de portadores

τ_c tiempo de vida de portadores

Esta expresión es la obtenida en la ecuación 2.10, recordando que este término no engloba tanto las radiaciones no radiativas, como las que producen emisión espontánea. Es primordial recalcar que el fenómeno de absorción no viene incluido en esta fórmula, ya que sólo nos indica las recombinaciones de portadores o electrones en estado excitado, excluyendo la emisión estimulada. El signo negativo significa que por cada recombinación de portadores de este tipo se pierde un electrón capaz de producir emisión estimulada, dichas radiaciones son la que reducen el nivel de coherencia del haz emitido.

3.1.3. Emisión estimulada

En la ecuación de estado de la densidad de portadores, la emisión estimulada, que es de vital importancia para el fenómeno de láser, está determinada por la ecuación 3.4.

$$\text{Emisión estimulada} = -\frac{g_0(N - N_T)}{(1 + \epsilon S)} S \quad (3.4)$$

Donde

g_0 es el gradiente de ganancia

N Es la densidad de portadores

N_T es la densidad de portadores de transparencia

S es la densidad de fotones

ϵ es el factor no lineal de confinamiento de ganancia

En esta expresión, como se observó en la fórmula 2.18, la ganancia se encuentra determinada por un gradiente de ganancia propio de cada material y se multiplica por la diferencia entre la densidad de portadores N y el valor de la densidad de portadores de transparencia N_T , lo anterior significa que si partimos de la definición de N_T donde no se tiene ganancia de la señal; ésta se presentará a partir de que se supera el umbral de densidad de portadores. El resultado de la ganancia total G depende principalmente del gradiente de ganancia g_0 [13]¹.

¹Es importante advertir que este parámetro depende del modelo de la ganancia, principalmente de que la longitud de onda a la que trabaja el láser es fija y su ubicación respecto al pico máximo de ganancia en el modelo de ganancia [22]

Hay que considerar que en este parámetro vienen incluidas las pérdidas internas del material del que está constituido el láser. La aparición del término de densidad de fotones es debido a que la expresión $(g_0(N - N_T)/(1 + \epsilon S))$ representa los portadores que pueden generar una emisión estimulada, pero si no existe algún fotón que estimule a un portador, nunca se presentará este fenómeno. Por dicha razón, la emisión estimulada depende de la cantidad de fotones que están pasando por el medio activo. Es importante indicar que el signo es negativo debido a que cada fotón generado por emisión estimulada es un portador que se pierde. Otro parámetro que aparece es el factor no lineal de ganancia, el cual afecta cuando hay transiciones de apagado de un láser, el fenómeno en estas transiciones se presenta por efectos no lineales ultra-rápidos (del orden de femtosegundos) como *spectral hole-burning*, *carrier heating*, ondas estacionarias y efectos estructurales del láser. Tal parámetro lo que nos indica es la reducción de la ganancia óptica respecto la densidad de fotones. Entre mayor densidad de fotones exista, la ganancia se reduce.

Los valores típicos de ϵ varían entre $0,42 \times 10^{-23}[m^3]$ y $16 \times 10^{-23}[m^3]$ [33]. Es válido también considerar la ecuación como una aproximación $G = \Gamma g_0(N - N_T)S(1 - \epsilon S)$ [21]. El parámetro ϵ es de gran importancia para la generación del *chirp* transitorio, efecto que se profundizará en la parte final de este capítulo.

3.2. Ecuación de estado de densidad de fotones

La segunda ecuación de estado de un láser es la de densidad de fotones² la cual nos indica como va cambiando la densidad de fotones con respecto al tiempo, varios de los parámetros que contiene esta ecuación vienen incluidos en la ecuación de estado de densidad de portadores, con algunos cambios que se verán a continuación.

La ecuación 3.5 es la forma general [44].

$$\frac{dS}{dt} = \Gamma B \frac{N}{\tau_c} - \frac{S}{\tau_P} + \frac{\Gamma g_0(N - N_T)S}{(1 + \epsilon S)} \quad (3.5)$$

Como en el caso de la fórmula 3.1, se pueden observar los diferentes tipos de recombinaciones que se representan en los diferentes términos en orden de aparición: las recombinaciones que producen emisión espontánea, la pérdidas y la emisión estimulada. En las próximas subsecciones se analizará las variaciones con respecto a la ecuación de estado de la densidad de portadores.

3.2.1. Emisión espontánea

Como se vió en el segundo término de la ecuación 3.1, así como en la fórmula 2.10 del capítulo anterior, que nos indicaba las recombinaciones no radiativas y las recombinaciones radiativas que producen emisión espontánea. En esta

²La densidad de fotones es el número de fotones por unidad de volumen

fórmula sólo se analizará la emisión espontánea, ésta queda representada en la ecuación 3.6.

$$R_{sp} = \Gamma B \frac{N}{\tau_N} \quad (3.6)$$

Donde

Γ es el coeficiente de confinamiento óptico

B Factor de acoplamiento de emisión espontánea

N Densidad de portadores

τ_N tiempo de vida de portadores

Cuando se observa la emisión de fotones, hay que considerar que no todos éstos fueron producidos por emisión estimulada, es cierto que el número de fotones que se producen por emisión espontánea y que cumplen con las condiciones para salir por el oscilador no es grande, pero aún siendo pequeño, es un valor importante. Su relevancia radica en que para que un láser comience a radiar es necesario que un fotón sea generado para que comience a oscilar y genere otros fotones por emisión estimulada, este fotón tiene su origen en una emisión espontánea que cumplió con las características de radiación del láser. La primera condición que deben cumplir estos fotones corresponde el haber pasado por la zona activa para poder inducir la creación de algún otro fotón por emisión estimulada, esta condición nos la proporciona el coeficiente de confinamiento óptico Γ . La segunda condición es que el fotón debe cumplir con la condición del oscilador, para esto se requiere otro parámetro que es el factor de acoplamiento de emisión espontánea B . Este parámetro nos indica la proporción de recombinaciones que genera un fotón con las características espectrales para acoplarse al modo electromagnético del funcionamiento del láser, esto quiere decir, en el rango de frecuencia de la cavidad láser. Es importante mencionar que este parámetro excluye las recombinaciones no radiativas ni las recombinaciones radiativas espontáneas que no cumplen con las condiciones antes dichas, sólo permite aquellos fotones que son útiles para la radiación del láser, este parámetro tiene pequeñas efectos sobre las características de transición del láser [23]. El signo positivo indica que contribuye al aumento de la densidad de fotones.

3.2.2. Pérdidas

El segundo término de la ecuación de densidad de fotones esta representado por la ecuación 3.7:

$$Perdidas = \frac{S}{\tau_P} \quad (3.7)$$

Donde

S es la densidad de fotones

τ_P es el tiempo de vida del fotón dentro de la cavidad

El tiempo de vida del fotón (*photon lifetime*) nos indica las pérdidas de fotones dentro de la cavidad láser, este parámetro está muy ligado a las pérdidas de la cavidad α_{cav} que se definen en la ecuación 3.8.

$$\alpha_{cav} = \alpha_{esp} + \alpha_{int} \quad (3.8)$$

Donde

α_{cav} son las pérdidas totales de fotones en la cavidad
 α_{esp} son las pérdidas de fotones producidas por los espejos
 α_{int} son las pérdidas internas de fotones en la cavidad

Como se observa, las pérdidas de fotones son generadas tanto en la cavidad como por los espejos, siendo éstos últimos los que más afectan en las pérdidas.

Las pérdidas internas en la cavidad abarcan diferentes fenómenos, principalmente de *scattering*.

3.2.3. Emisión estimulada

La fórmula es muy similar a la ecuación 3.4, pero en este caso es primordial que los fotones cumplan ciertas características para producir la emisión estimulada las cuales no son necesarias en la ecuación de estado de densidad de portadores, dichas características vienen dadas por parámetros ya conocidos. La ecuación 3.9 representa este fenómeno.

$$Emisión\ estimulada = + \frac{\Gamma g_0 (N - N_T) S}{(1 + \epsilon S)} \quad (3.9)$$

En este caso se puede ver que la ecuación 3.9 es casi idéntica a la de la ecuación 3.4, el único cambio consiste en la presencia del factor de confinamiento óptico Γ y nos indica que los fotones deben de pasar por el medio activo para poder producir la emisión estimulada, si pasan por algun otro lado, no es posible que produzcan emisión estimulada y se consideran dentro de las pérdidas, por lo demás representan el mismo comportamiento que el explicado para la ecuación 3.4. El signo es positivo debido a que los fotones generados por emisión estimulada incrementan el valor de la densidad de fotones.

3.3. Ecuación de estado de la fase

La ecuación de estado de fase nos indica los cambios que se presentan en el espectro de la señal, el fenómeno más importante que se obtiene de esta ecuación es el *laser chirp* que se explicará en el subcapítulo siguiente. La ecuación 3.10 nos muestra la ecuación de estado de fase [44].

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[\Gamma g_0 (N - N_T) - \frac{1}{\tau_P} \right] \quad (3.10)$$

Donde

α es el factor de incremento de ancho de línea espectral del material (*Material*

Linewidth Enhancement Factor)

Γ Factor de confinamiento óptico

N es la densidad de portadores

N_T es la densidad de portadores en transparencia

τ_P es el tiempo de vida de fotón

En esta fórmula se observa cómo la fase de la onda electromagnética viene variando con respecto a la ganancia que se tiene en la cavidad, esta variación se ve afectada en mayor medida por el factor α o factor de Henry³. Dicho parámetro afecta las características del láser cuando se tiene una modulación por corriente, el efecto se observa en el *chirp* de la frecuencia de la señal del láser. El factor α representa los cambios del índice de refracción en la región activa con respecto a los cambios de la ganancia del material y por lo tanto la densidad de portadores varía, por esta razón el citado parámetro también es conocido como Factor de acoplamiento Fase-amplitud (*phase-amplitude coupling factor*), la fórmula 3.11 describe su comportamiento [34]⁴.

$$\alpha = -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{\frac{dn}{dN}}{\frac{dg}{dN}} \quad (3.11)$$

Donde

n es el índice de refracción

λ es la longitud de onda

g es la ganancia

N es la densidad de portadores

La forma en que se comportan los cambios del índice de refracción y la ganancia del material se observa en la figura 3.1. Valores típicos de este parámetro para láseres DFB se encuentran entre 2.5 y 12 [23].

³C. H. Henry fue el primero en realizar una descripción del ensanchamiento del ancho de banda del haz de un láser cuando se tiene una fluctuación de fase causada por eventos ligados a la emisión espontánea [34]

⁴Este fenómeno es propio de los láseres de semiconductor por lo que no se puede observar en otro tipo de láseres. Es por eso que la desintonización entre el pico de frecuencia de la ganancia y la frecuencia del modo de radiación del láser es un parámetro importante de cuidar en este tipo de láseres.

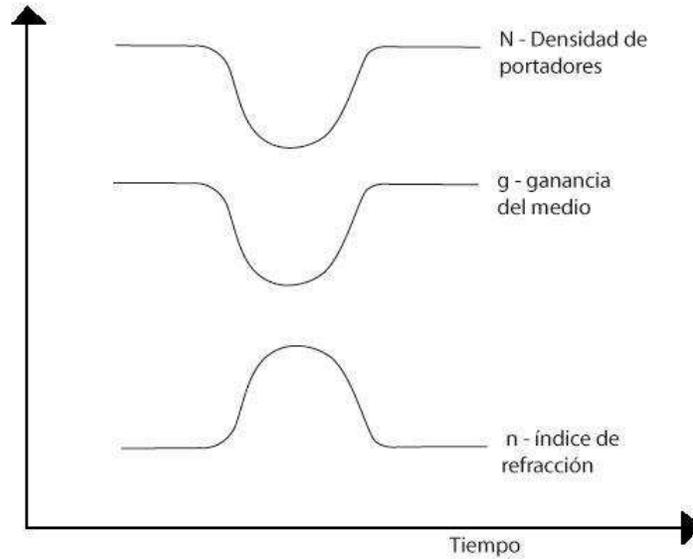


Figura 3.1: Relación del cambio del índice de refracción, ganancia del material y densidad de portadores [26]

En la figura 3.1 se observa que mientras que la densidad de portadores disminuye, la ganancia del material también sigue ese comportamiento, mientras que el índice de refracción aumenta [26], esta variación del índice de refracción cambia las características de resonancia del láser por lo que si variamos constantemente este índice, la radiación láser tiene que cambiar su fase para poder cumplir con la frecuencia de resonancia lo que al final lo vemos como fluctuaciones en el espectro de la señal.

3.4. Potencia de salida

Teniendo la ecuación de densidad de fotones, es importante considerar que la potencia de salida tiene algunas modificaciones, la ecuación que nos indica la potencia de salida está expresada en la fórmula 3.12[44]:

$$P = \frac{V\eta h\nu}{2\Gamma\tau_P} S[\text{Watts}] \quad (3.12)$$

Donde

V es el volumen de la región activa

η es la eficiencia cuántica

h es la constante de Planck
 ν es la frecuencia

Esta fórmula es la que nos indica el cambio entre los fotones que existen dentro de la cavidad láser y los que ya se encuentran en el exterior, y también nos indica la medida en términos de potencia óptica [*Watts*].

3.5. Características de modulación

La potencia óptica de un láser de semiconductor se puede modular directamente al tener una señal que controle la densidad de la corriente de inyección. En los láseres de semiconductor, la forma de tener una modulación simple y eficiente es como se muestra en la figura 3.2, donde se observa la relación entre la densidad de corriente y la potencia óptica de salida, esta gráfica es conocida como la de respuesta de un láser de semiconductor a la modulación directa de corriente, es importante hacer notar que en esta figura se observa la gráfica típica de potencia contra corriente (P-I) de un diodo como la que se observó en la figura 2.8.

entre los estados de radiación antes y después de la corriente umbral ocasionarían comportamientos en la señal óptica que degradarían la señal.

Algo esencial de la modulación directa de un láser es que permite la modulación a altas frecuencias y una gran variedad de aplicaciones, pero también implica un comportamiento más complicado comparado con el comportamiento en estado estático (*steady-state*), éste es originado por la interacción entre los cambios temporales en las densidades de portadores y fotones.

3.6. *Chirp* del láser

En el estudio de los láseres de semiconductor se tienen dos formas de modulación como se explicó en secciones anteriores, las cuales son: modulación externa que consiste en un láser radiando en forma continua (*steady state o continuous wave*) y se pone un modulador externo. El análisis del comportamiento del láser de semiconductor se simplifica bastante ya que el conjunto de ecuaciones diferenciales de estado se igualan a 0 y se obtiene un conjunto de ecuaciones con dos incógnitas que son fáciles de resolver; la figura 3.3 muestra dicho comportamiento. En esa figura se observa que el láser siempre se encuentra radiando a 2 [mW] de potencia óptica, aunque al principio se presentan unas oscilaciones por la transición de encendido del láser; el otro medio de modulación es el estudiado en esta tesis y consiste en la modulación directa por corriente (*Direct Modulation*). Como se ha mencionado en secciones anteriores, este tipo de modulación conviene desde el punto de vista económico ya que se elimina un elemento óptico, pero agrega un efecto no lineal en el láser el cual consiste en variaciones de la frecuencia de la señal óptica conforme a las variaciones de la corriente de inyección, dicho fenómeno es conocido como *Frecuency Chirp*. La existencia de este comportamiento se sabe que afecta la propagación de pulsos debido a que los bordes de los mismos tienen diferente frecuencia y aunados a los efectos dispersivos, se obtienen penalizaciones de potencia importantes para todo el sistema óptico ⁵.

⁵Las siguientes gráficas que se muestran en este capítulo fueron obtenidas usando el simulador desarrollado en esta tesis.

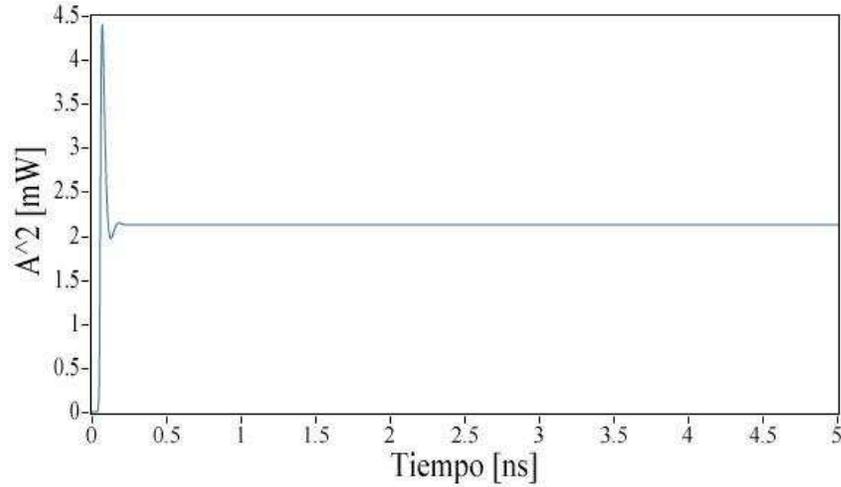


Figura 3.3: Gráfica de la simulación de un láser trabajando en onda continua

La forma en que se define el *chirp* teóricamente se expresa en la fórmula 3.13 [16].

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.13)$$

Donde

$\Delta\nu$ es el chirp

$\frac{\partial\phi}{\partial t}$ es el cambio de la fase de la señal respecto al tiempo

Esta expresión nos proporciona un forma de determinar el *chirp* de una manera muy práctica ya que podemos sustituir la ecuación 3.10 de cambio de fase en la ecuación 3.13 quedándonos la expresión 3.14, que será la que implementemos en nuestro simulador.

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{2} \left[\Gamma g_0 (N - N_T) - \frac{1}{\tau_P} \right] [Hz] \quad (3.14)$$

La ecuación 3.15 es otra expresión que nos permite relacionar el *chirp* con la potencia óptica de salida, esta fórmula nos sirve para realizar el análisis de los dos tipos de *chirp* que se presentan: *chirp* adiabático y *chirp* transitorio.

$$\Delta\nu = \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{d}{dt} [\ln(P)] + \kappa P \right) \quad (3.15)$$

Donde

κ es el coeficiente de *chirp* adiabático

El parámetro κ se encuentra directamente relacionado con el factor no lineal de confinamiento de ganancia como se puede observar en la fórmula 3.16 [44].

$$\kappa = \frac{2\Gamma}{\eta h\nu V} \epsilon \quad (3.16)$$

3.6.1. *Chirp* Transitorio

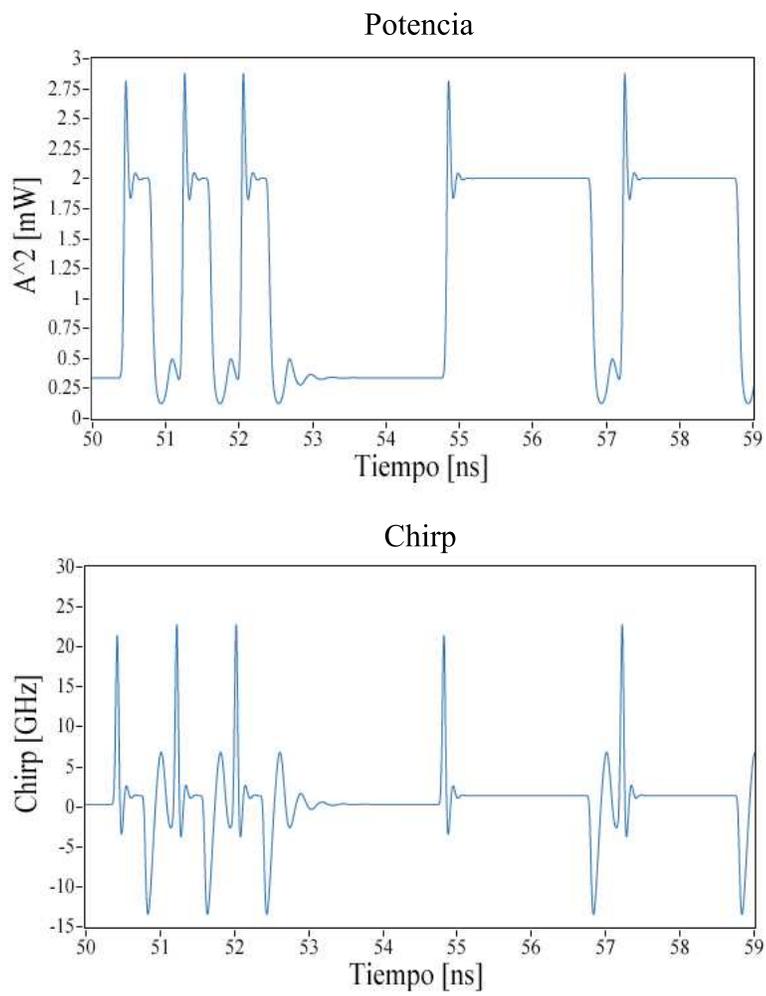


Figura 3.4: Gráficas de potencia óptica y *chirp* de un láser con *chirp* transitorio

De la fórmula 3.15, se tiene que el primer término corresponde a un *chirp* transitorio. Este tipo de *chirp* se presenta, como su nombre lo indica, en las transiciones de bit. Usualmente los láseres de estructura DFB tienen el *chirp* de transición de forma dominante. Una manera de reducir este tipo de *chirp* es en configurar que la corriente de polarización esté lo más cercana a la corriente umbral del diodo láser. En la figura 3.4 se observa la potencia óptica y *chirp* de un láser predominantemente transitorio.

Los cambios de frecuencia que se presentan en la transición de subida (de 0 a 1) es de aumento de frecuencia o *blue shifted*; mientras que en las transiciones de bajada (de 1 a 0) existe una disminución de frecuencia o *red shifted*. Dichos cambios, en un análisis superficial, afectan el desempeño de nuestro sistema de comunicaciones debido a que son cambios de frecuencia no deseados que ensanchan el espectro y que interactuando con la dispersión, provoca que este fenómeno se convierta en fluctuaciones de potencia; pero mediante un estudio cuidadoso como el que se presenta en el capítulo siguiente, es posible encontrar combinaciones de parámetros del láser que tengan como resultado el aprovechamiento del comportamiento del *chirp* para mejorar el desempeño del sistema, principalmente con la interacción de la dispersión negativa.

3.6.2. *Chirp* Adiabático

Este tipo de *chirp* está representado en el segundo término de la fórmula 3.15. Su origen directamente proporcional al factor de compresión no lineal (α), es posible tratar de controlar en cierta medida su valor para evitar que se presente de una manera relevante. La figura 3.5 muestra la potencia óptica y el *chirp* de un láser predominantemente adiabático.

Es interesante observar como el *chirp* en un láser predominantemente adiabático resulta muy similar a su comportamiento en la potencia óptica, esto es presentando cambios menos bruscos que un láser predominantemente transitorio. La frecuencia para un '1' es mayor a la de un '0', hecho que no se presenta en el *chirp* transitorio. El espectro mostraría dos regiones separadas donde la de mayor frecuencia representaría a los bits en '1' y la otra a los bits en '0'.

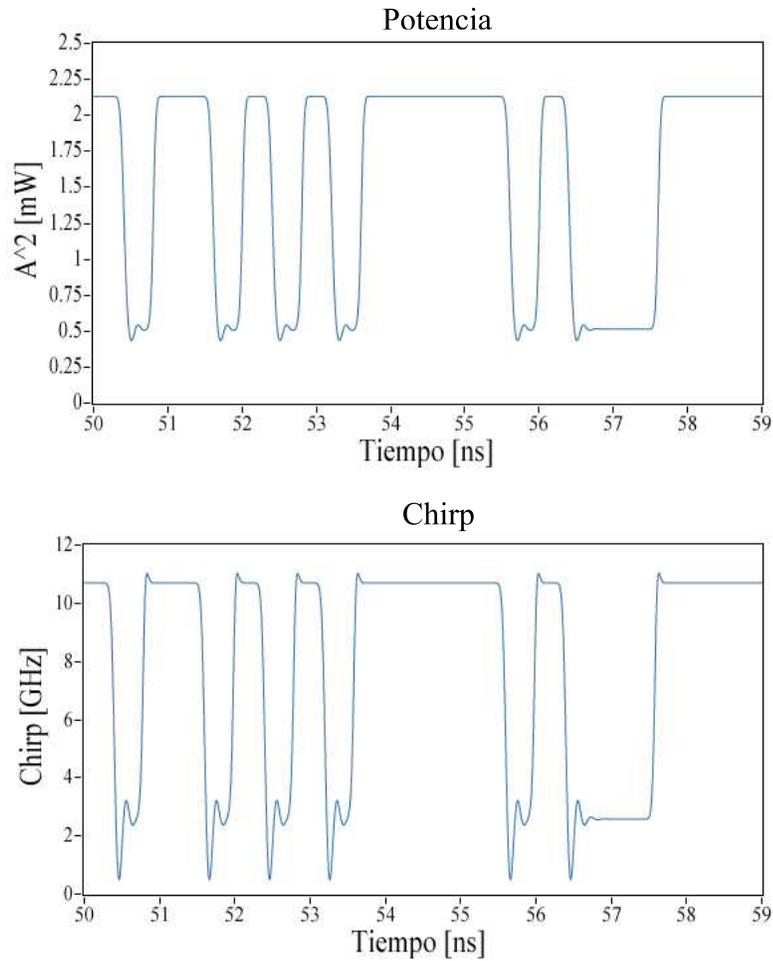


Figura 3.5: Gráficas de potencia óptica y *chirp* de un láser con *chirp* adiabático

Respecto a las técnicas de fabricación de los láseres de semiconductor, es importante mencionar que el factor κ es un parámetro de diseño, por lo que se puede controlar el tipo de *chirp* que predominará en el láser. El parámetro α aunque es más difícil de controlar, existen estructuras conocidas como *quantum dots* las cuales reducen mucho su valor, pero es necesaria una tecnología más sofisticada para su elaboración. Teniendo en cuenta la capacidad de controlar los dos parámetros que causan el *chirp* en la señal, es posible dar pautas de diseño para obtener un láser con las características de *chirp* que convengan a nuestros sistemas de comunicaciones.

