FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DE LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia sólamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencias.

Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.

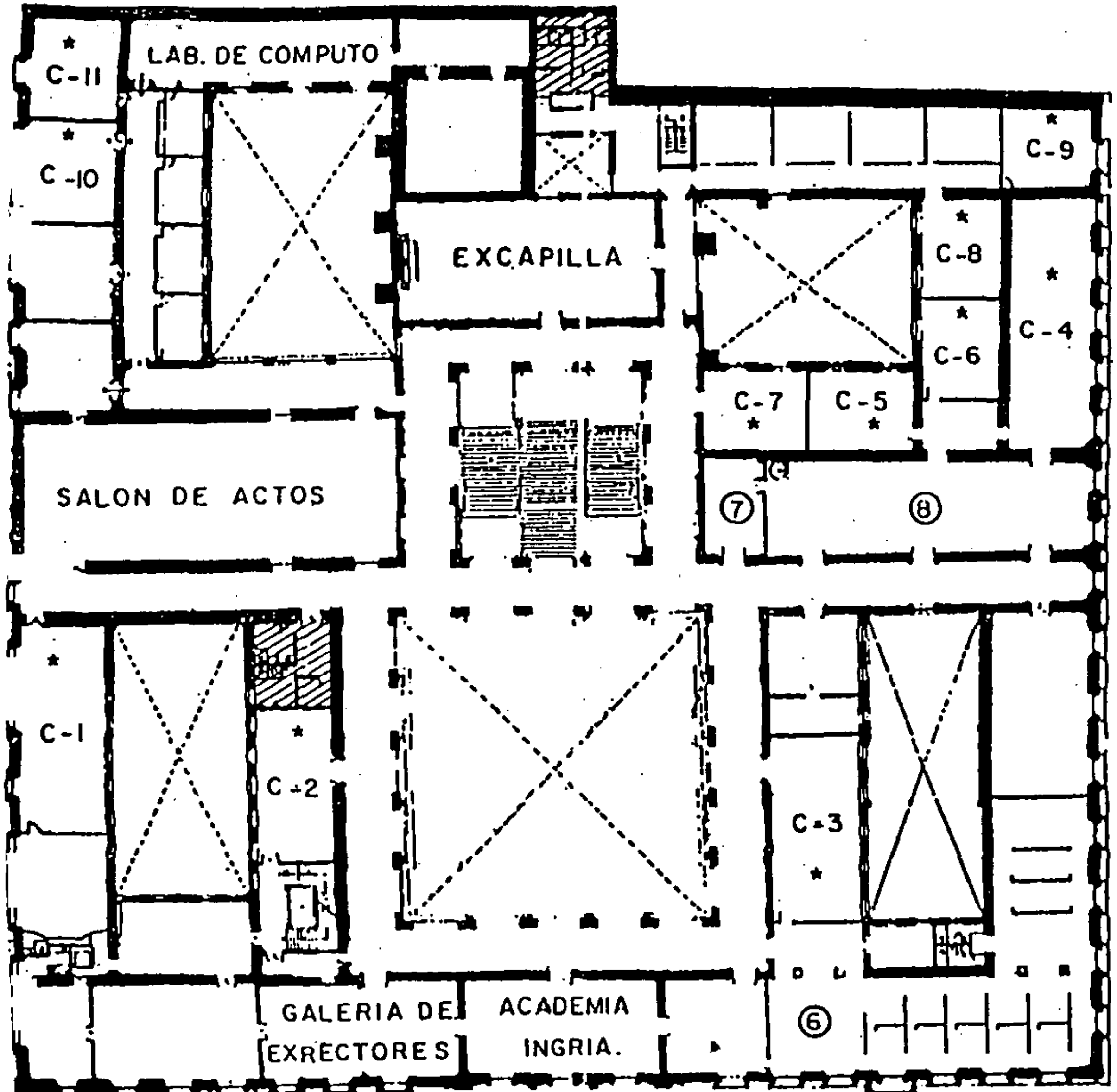
Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tésis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.

Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con ésto sean más fehacientes sus apreciaciones.

¡ G R A C I A S !



1er. PISO

GUIA DE LOCALIZACION

1 – ACCESO

2 – BIBLIOTECA HISTORICA

3 – LIBRERIA U N A M

4 – CENTRO DE INFORMACION Y DOCUMENTACION "ING. BRUNO MASCANZONI"

5 – PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACION

* AULAS

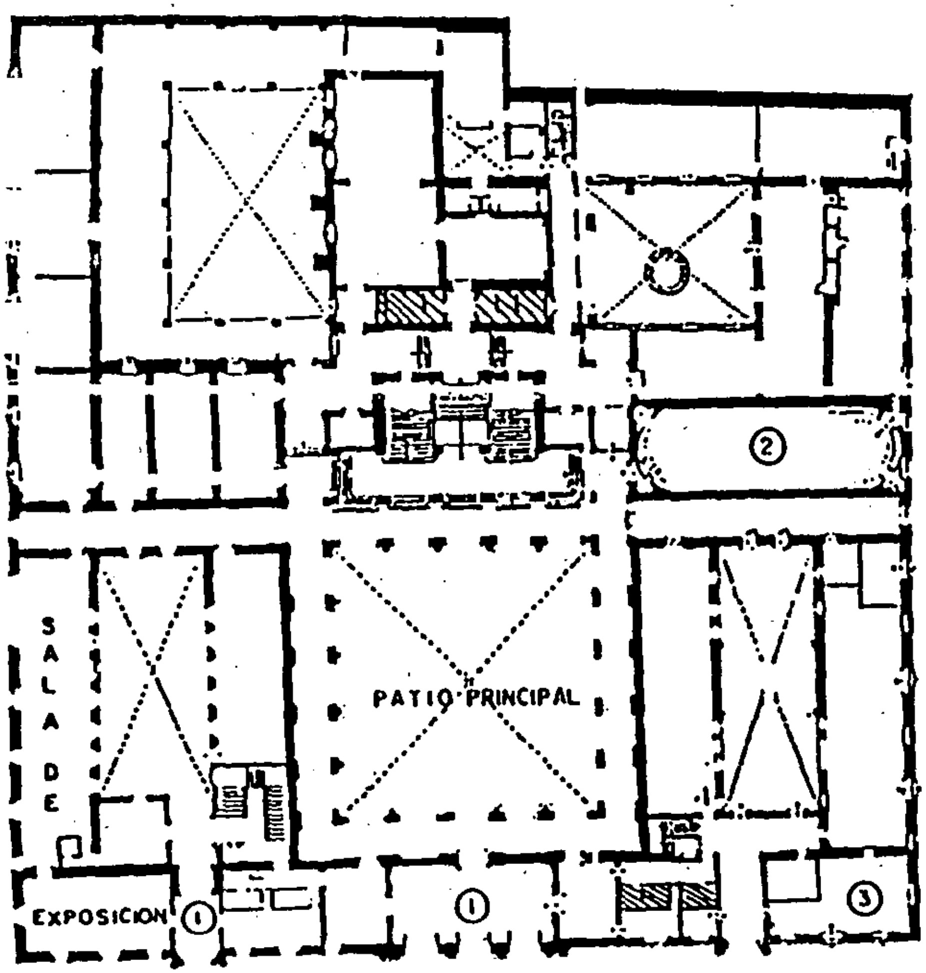
6 – OFICINAS GENERALES

7 – ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA.

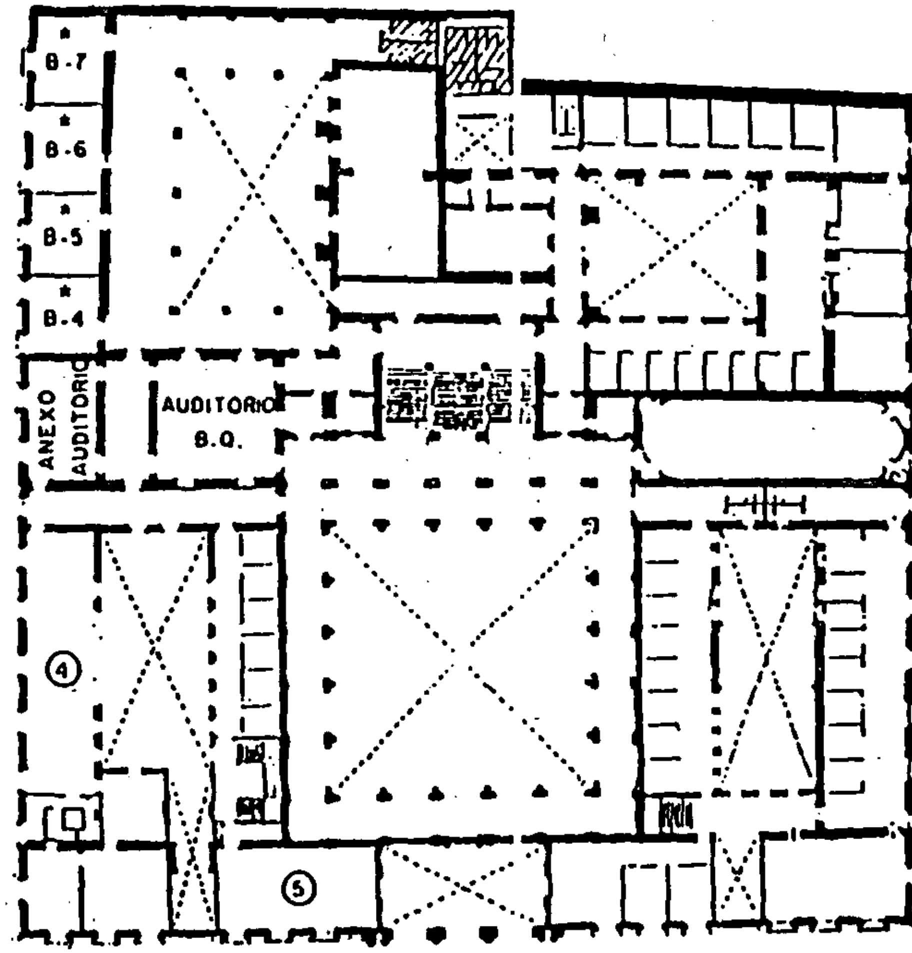
8 – SALA DE DESCANSO

▨ SANITARIOS

PALACIO DE MINERIA



PLANTA BAJA



MEZZANINNE

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
CURSOS ABIERTOS

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS DE ACTUALIZACION Y REGULARIZACION

EN MATEMATICAS

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

DEL 24 DE OCTUBRE AL 14 DE DICIEMBRE DE 1994

GUATEMALA # 90
1994

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

- **Objetivos específicos.** Se derivan del objetivo general de la unidad. Describen y delimitan la conducta específica que debe adquirirse en relación con un tema determinado; precisan las condiciones, el nivel y el criterio de ejecución aceptable como deberá manifestarse dicha conducta.

- **Cuadro sinóptico.** Presenta la síntesis del contenido en forma esquemática.

- **Ejemplos.** Elementos que explican o ilustran las características de un concepto o de un procedimiento; facilitan la comprensión y la generalización del contenido.

- **Ejercicios.** Actividades de aprendizaje, cuyo propósito es la aplicación de los elementos teóricos. Asimismo, permiten comprobar si se ha logrado la conducta indicada en los objetivos específicos.

Al final se encuentran:

- **Examen de autoevaluación.** Tiene como finalidad que el lector, por sí mismo, pueda valorar objetivamente en qué medida ha alcanzado un dominio aceptable de los conocimientos y habilidades considerados en los objetivos de aprendizaje.

- **Soluciones.** (De los ejercicios y del examen de autoevaluación.) Permiten la verificación de las respuestas.

- **Bibliografía básica.** Proporciona las fuentes de información a las que se puede recurrir para aclarar alguna duda o bien profundizar en ciertos temas.

- **Índice analítico.** Facilita la localización de los conceptos y términos técnicos definidos, y de los nombres propios citados.

Por último, es de justicia agradecer a todas las personas que de alguna manera colaboraron con los autores en la elaboración de este material, muy especialmente a las licenciadas Irma Hinojosa Félix y María Cuairán Ruidíaz quienes realizaron la estructuración didáctica.

RODOLFO SOLÍS UBALDO
ARNULFO ANDRADE DELGADO
FELIPE OREGEL SÁNCHEZ

ÍNDICE DE CONTENIDO

UNIDAD 1.
GEOMETRÍA ANALÍTICA

Objetivo general

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

- *Obtendrá los elementos necesarios para el manejo de representaciones geométricas de un conjunto de puntos en el plano cartesiano, así como el manejo de las ecuaciones que lo definen.*

Introducción

En el contenido de esta unidad están los elementos básicos de la geometría analítica plana. Se presentan desde el principio cartesiano y el sistema de coordenadas rectangulares, hasta los principales conceptos y características de la línea recta y las curvas cónicas.

La geometría analítica plana constituye una herramienta de suma importancia y utilidad en la solución de problemas de la ingeniería.

MÓDULO 1. CONCEPTOS GENERALES

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

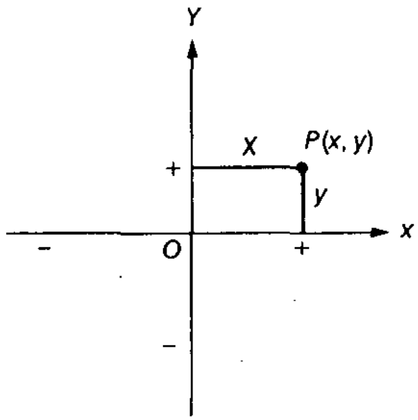
- *Trazará puntos en un sistema rectangular cartesiano a partir de sus coordenadas.*
- *Determinará las coordenadas de un punto, cuando se conoce la localización de éste en el sistema.*
- *Calculará la distancia entre dos puntos de coordenadas conocidas.*
- *Calculará las coordenadas del punto que divide a un segmento dado en una razón dada.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	Representación analítica
Un punto se define en el sistema de coordenadas rectangulares por medio de su localización con respecto a dicho sistema, la cual está dada por una pareja ordenada de números reales.	x, y; $P(x, y)$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
Localización de un punto en el sistema de coordenadas rectangulares mediante sus distancias a los ejes X y Y.	
Distancia (d) entre dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Un segmento es la porción de recta limitada por dos de sus puntos; P_1 y P_2.	$\overline{P_1P_2}$
Coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón dada $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}$	$x = x_1 + r(x_2 - x_1)$ $y = y_1 + r(y_2 - y_1)$

1.1. Principio cartesiano

Un sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia uno a uno entre cada punto del plano y una pareja ordenada de números reales.

Este principio implica que a cada punto en el plano le corresponde una y sólo una pareja ordenada de números reales y, recíprocamente, a cada pareja ordenada de números reales le corresponde uno y sólo un punto del plano.

1.2. Sistema de coordenadas rectangulares en el plano

Un sistema de coordenadas rectangulares en el plano está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto O al que se le llama *origen* . Se acostumbra representar una de las rectas en posición horizontal y se la denomina *eje X* o *eje de las abscisas* ; la otra recta, vertical, se denomina *eje Y* o *eje de las ordenadas*, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas rectangulares, los cuales dividen el plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes* (*véase* la figura 1.1).

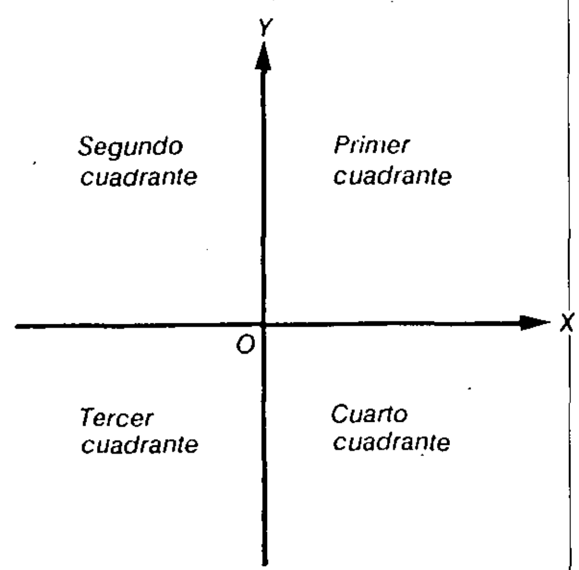


Figura 1.1

Al sistema anterior se le llama también *sistema cartesiano*, en honor del filósofo francés René Descartes (1596-1650), ya que fue él quien planteó formalmente la idea de resolver problemas geométricos por medio del álgebra, a partir de un sistema de coordenadas rectangulares.

La posición de un punto P en el plano queda definida por una pareja ordenada de números reales (x, y) de los cuales el primero (x) representa la distancia del punto al eje coordenado Y, y el segundo (y) representa la distancia del punto al eje X; esto lo expresamos como:

$$\boxed{P(x, y)}$$

La distancia de un punto al eje Y se llama *abscisa* del mismo; la distancia de un punto al eje X es la *ordenada*, y ambas constituyen las *coordenadas* del punto.

Las abscisas son positivas para los puntos situados a la derecha del origen y negativas para los que están situados a la izquierda.

Las ordenadas son positivas cuando los puntos están situados arriba del origen y negativas cuando están situados abajo.

Las abscisas y las ordenadas nulas corresponden a puntos contenidos en el eje Y o en eje X respectivamente.

Para representar puntos de coordenadas conocidas, hay que trazar los ejes coordenados y establecer una escala adecuada sobre cada uno de ellos. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas.

Ejemplo 1

Localizar en un sistema de coordenadas rectangulares los siguientes puntos:

$A\ (2, 1), B\ (-2, 3), C\ (-3, -6), D\ (7, -3)$

Solución

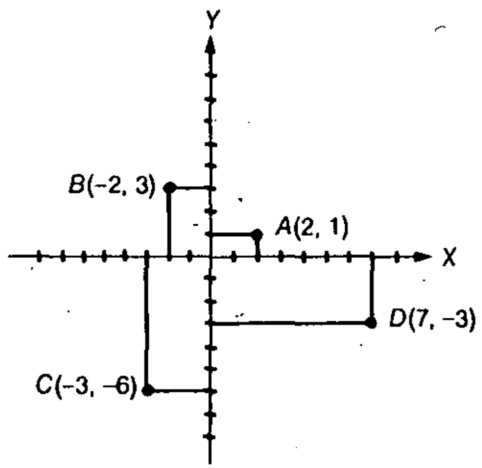


Figura 1.2

1.3. Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (*véase* la figura 1.3).

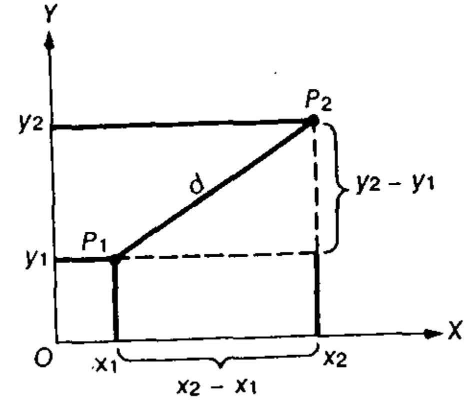


Figura 1.3

La distancia d entre los puntos P_1 y P_2 está dada por:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo 2

Calcular la distancia entre los puntos $P_1(4,-1)$ y $P_2(7,3)$.

Solución

Por la fórmula (1) se sabe que:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; al sustituir se tiene:

$d = \sqrt{(7-4)^2 + (3-(-(1))^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$

Así la distancia entre P_1 y P_2 es:

$d = 5$ unidades

Ejemplo 3

Calcular el perímetro del polígono cuyos vértices son los puntos $P_1(-3,-1)$, $P_2(0,3)$, $P_3(3,4)$ y $P_4(4,1)$.

Solución

Para determinar el perímetro del polígono, se encuentran primero las distancias entre los vértices y posteriormente se efectúa la suma de estas distancias.

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(0-(-3))^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{(3-0)^2+(4-3)^2} = \sqrt{10} = 3.16$$
$$\overline{P_3P_4} = \sqrt{(4-3)^2+(1-4)^2} = \sqrt{10} = 3.16$$
$$\overline{P_4P_1} = \sqrt{(-3-4)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{53} = 7.28$$

Por lo tanto el perímetro es:

$$P=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_4P_1}$$
$$P = 5 + 3.16 + 3.16 + 7.28$$
$$\text{Perímetro} = 18.6 \text{ unidades}$$

1.4. División de un segmento en una razón dada

Sea un segmento $\overline{P_1P_2}$ limitado por los puntos $\overline{P_1P_2}$ limitado por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (*véase* la figura 1.4).

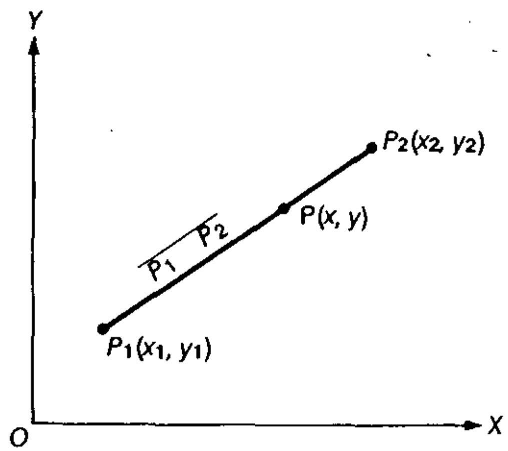


Figura 1.4

Las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón dada r, tal que:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}$$

están dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + r(y_2 - y_1) \end{aligned}}$$

En particular las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ son:

$$\boxed{\begin{aligned} x_m &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}}$$

Ejemplo 4

Sean $P_1(1,1)$ y $P_2(6,6)$ los puntos extremos de un segmento. Determinar las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento en la razón $r = 2/3$.

Solución

Por las expresiones $x=x_1 + r(x_2 - x_1)$; $y = y_1 + r(y_2 - y_1)$ se tiene:

$$x = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(6-1) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(5) = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$$

$$y = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(6-1) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)(5) = 1 + \frac{10}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{13}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

Ejemplo 5

Uno de los puntos extremos de un segmento es $P_1(7, 8)$ y el punto que lo divide en la razón $r = \frac{1}{5}$ es $P(15, 10)$. Determinar las coordenadas del otro extremo.

Solución

De las expresiones conocidas se obtiene:

$$x_2 = \frac{x - x_1}{r} + x_1 \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{y - y_1}{r} + y_1$$

$$\therefore x_2 = \frac{15-7}{\frac{1}{5}} + 7 = 47 \quad y \quad y_2 = \frac{10-8}{\frac{1}{5}} + 8 = 18$$

Ejercicios

Distancia entre dos puntos

1. Demostrar que los puntos $P_1(3, 3)$, $P_2(-3, -3)$ y $P_3(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero.
2. Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: $A(-3, -2)$, $B(5, 2)$, $C(9, 4)$

División de un segmento en una razón dada

3. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5, es el punto (3, -2). Si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada.
4. Los puntos medios de los lados de un triángulo son:
   (2, 5), (4, 2) y (1, 1)
   Determinar las coordenadas de los tres vértices.

MÓDULO 2. GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:
Dada la ecuación de una curva, determinará:

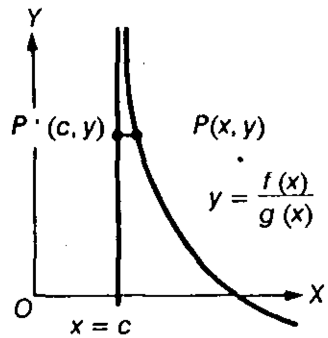
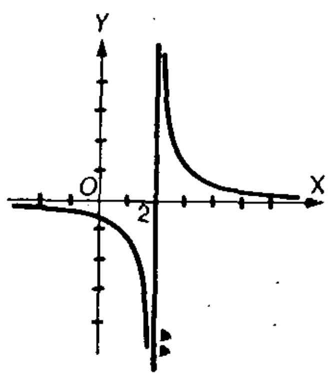
- *Simetría con los ejes coordenados y con el origen del sistema.*
- *Intersecciones con los ejes coordenados.*
- *Extensión de la curva.*
- *Ecuaciones de las asíntotas de la curva.*
- *Puntos de la curva.*
- *Gráfica de la ecuación.*

Cuadro sinóptico

Concepto	Condición geométrica	Representación analítica
• Simetría	° Simetría con el eje X.	$f(x, y) = f(x, -y)$
	° Simetría con el eje Y.	$f(x, y) = f(-x, y)$
	° Simetría con respecto al origen	$f(x, y) = f(-x, -y)$
	° Simetría con respecto a la recta $y = x$.	$f(x, y) = f(y, x)$

Cuadro sinóptico

Continuación

Concepto	Condición geométrica	Representación analítica
• Simetría	° Se obtienen intersecciones con el eje X.	$y = 0$
• Intersecciones	° Se obtienen intersecciones con el eje Y.	$x = 0$
• Extensión	° Se consideran sólo valores reales de x y y para determinar puntos que satisfagan la ecuación.	Ecuación dada $f(x)$
• Asíntotas	° Al tomar un punto de la curva cada vez más alejado del origen, la distancia entre este punto y la asíntota es cada vez menor y tiende a cero.	
• Obtención de algunos puntos que definen la curva	° Se dan valores a una de las variables y se calculan los valores correspondientes de la otra variable.	
• Trazado de la gráfica	° Se utiliza la información de los puntos anteriores para trazar la gráfica.	

y	−0.2	−0.33	−1	−2	−5	5	2	1	0.33	0.2
x	−3	−1	1	1.5	1.8	2.2	2.5	3	5	7

2.1. Gráfica de una ecuación (primer problema fundamental de la geometría analítica)

En la geometría analítica plana se plantean dos problemas fundamentales:

1. A partir de una ecuación dada, determinar las características de la curva que es la gráfica de la ecuación.
   Las coordenadas de todos los puntos que pertenecen a la curva satisfacen la ecuación; y recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, pertenece a la curva. A ésta se le llama lugar geométrico de la ecuación.
2. Dada una curva que es la gráfica de una ecuación, determinar dicha ecuación.

Para resolver el primer problema fundamental es necesario analizar las siguientes características del lugar geométrico.

2.1.1. Simetría

Si la ecuación de una curva no se altera cuando se reemplaza x por $-x$, esto es, si $f(x, y) = f(-x, y)$, entonces la curva es simétrica con respecto al eje Y. Si la ecuación de una curva no se altera cuando se reemplaza y por $-y$, esto es, si $f(x, y) = f(x, -y)$, entonces la curva es simétrica respecto al eje X. Si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en una ecuación, se tiene que $f(x, y) = f(-x, -y)$, entonces la curva es simétrica con respecto al origen.

2.1.2. Intersecciones

El punto o los puntos donde una curva cruza al eje X pueden ser encontrados haciendo $y = 0$ en la ecuación y resolviendo para x. Estos puntos son llamados puntos de intersección. Las intersecciones con el eje Y se obtienen de manera análoga; se hace $x = 0$ en la ecuación y se resuelve para y.

2.1.3. Extensión

El *lugar geométrico* es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación dada. Por definición, (x, y) es una pareja ordenada de números reales.

Analizar la extensión de una curva consiste precisamente en determinar para qué valores de cada una de las variables, la otra variable toma valores reales, lo cual nos indica los intervalos de valores de x y y para los cuales la curva está definida.

La extensión la podemos determinar despejando cada variable (cuando es posible) en función de la otra y determinando los valores reales de la variable no despejada, que originan valores reales en la variable despejada.

Cuando en una ecuación aparecen potencias pares de una variable, el despejarla puede involucrar raíces cuadradas u otras raíces pares. La extensión de la curva podrá entonces estar restringida por la condición de que números negativos no tienen raíces pares reales.

2.1.4. Asíntotas

Si para una curva existe una recta tal que, al tomar un punto de la curva cada vez más alejado del origen, la distancia entre este punto y la recta es cada vez menor y tiende a cero, dicha recta se llama asíntota de la curva.

Si la ecuación de la curva es del tipo

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios sin factores comunes, y si $x = c$ es una raíz de la ecuación $g(x) = 0$, entonces la coordenada x de la trayectoria del punto $P(x, y)$ se acerca al valor c, y suceden dos cosas:

1) $y \to \infty$, dado que la distancia $OP \to \infty$, y
2) $(x - c) \to 0$, esto es, la distancia horizontal $P'P$ entre la curva y la línea vertical $x = c$ tiende a cero (*véase* la figura 2.1).

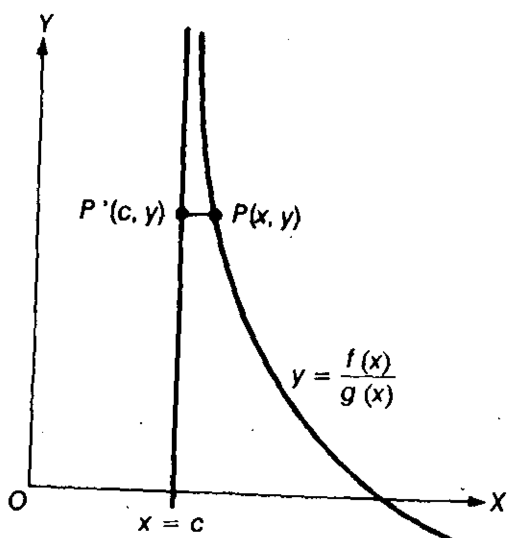


Figura 2.1

En otras palabras, la línea $x = c$ es una asíntota de la curva dada por la ecuación (1), si $x = c$ hace que el denominador $g(x)$ sea nulo. Tales asíntotas son obtenidas o determinadas haciendo la ecuación explícita para y en términos de x; si el resultado es una fracción, se iguala el denominador de la fracción a cero y se determina la solución numérica de x.

En forma similar, despejando x en función de y, el denominador de la expresión resultante muestra los valores de y que hacen al denominador nulo en la expresión

$$x = \frac{f(y)}{g(y)} \tag{2}$$

Esos valores determinarán las asíntotas horizontales de la curva. Una alternativa para determinarlas es hacer que $x \to \pm\infty$ (previendo que la extensión de la curva permita esto) en la ecuación (1) y encontrar los valores límite para y.

2.1.5. Obtención de algunos puntos de la curva

Se pueden obtener algunos puntos de la curva dando valores a una de las variables y calculando los valores correspondientes de la otra; es decir, obteniendo parejas ordenadas de números reales que satisfagan la ecuación de la curva.

2.1.6. Trazado de la gráfica

Con la información obtenida en los apartados anteriores se procede a trazar la gráfica del lugar geométrico correspondiente a la ecuación dada.

Analizar las características del lugar geométrico de una ecuación, como se ha descrito en los apartados 2.1.1 al 2.1.5, se conoce como la *discusión de la ecuación de una curva*.

Ejemplo 1

Hacer la discusión de la siguiente ecuación y trazar su gráfica.

$$y = \frac{1}{x - 2}$$

Solución

Se analizan los puntos anteriormente mencionados para el caso de la ecuación dada:

- Simetría

Respecto al eje Y, se reemplaza x por $-x$:

$$y = \frac{1}{-x-2}$$

Como puede observar, un cambio de signo en x altera la ecuación, por lo que la gráfica no es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al eje X se reemplaza y por $-y$:

$$-y = \frac{1}{x-2}$$

Como se observa, un cambio de signo en y altera la ecuación; por lo tanto la gráfica no es simétrica respecto al eje X.

Respecto al origen, se reemplaza x por $-x$ y y por $-y$:

$$-y = \frac{1}{-x-2} \quad \therefore \quad y = \frac{-1}{x+2}$$

Al cambiar el signo a ambas variables la ecuación se altera, por lo que la gráfica no es simétrica respecto al origen.

- Intersecciones

Con el eje X: $y = 0$; $\frac{1}{x-2} = 0$

Obviamente, no existe ningún valor real que satisfaga esta última expresión; por lo tanto no hay intersección con el eje X.

Con el eje Y: $x = 0$; $y = \frac{1}{-2}$

por lo tanto, la curva interseca al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

- Extensión

Dado que cualquier valor real de x determina un valor real de y, y todo valor real de y está definido por un valor real de x, a excepción de los valores $x = 2$ y $y = 0$, la curva es abierta y se extiende en ambos sentidos de los ejes coordenados.

- Asíntotas

Se tiene:

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Se iguala el denominador a cero y se obtiene la ecuación de la asíntota vertical; esto es:

$$x-2 = 0; \quad x = 2$$

Para la segunda asíntota, se despeja x en función de y y se iguala a cero el denominador de la expresión resultante.

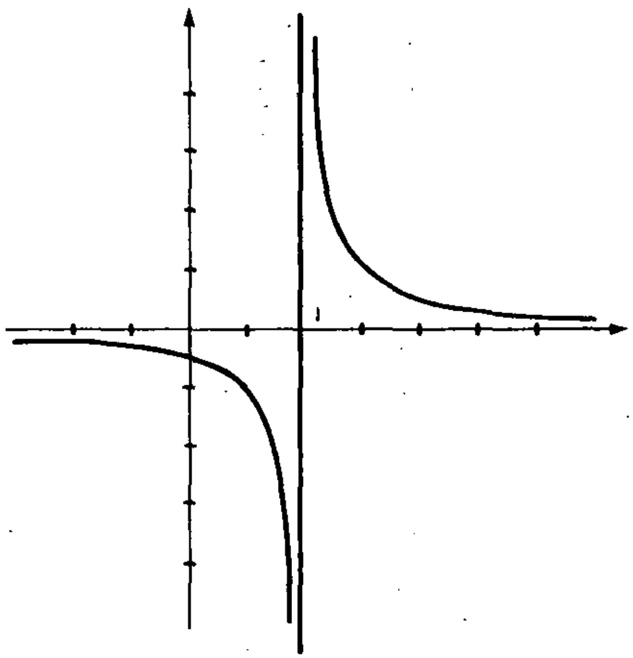
$$(x-2)\ y = 1; \quad x-2 = \frac{1}{y}; \quad x = \frac{1}{y} - 2$$

por lo tanto, la ecuación de la asíntota horizontal es:

$$y = 0$$

- Obtención de algunos puntos

x	y
-3	-0.2
-1	-0.33
1	-1
1.5	-2
1.8	-5
2.2	5
2.5	2
3	1
5	0.33
7	0.2



Ejemplo 2

Hacer la *discusión* de la ecuación:

$$x^2y - 4y + x = 0$$

Solución

- Simetría

Respecto al eje Y:

$$(-x)^2y - 4y - x = 0$$

$$x^2y - 4y - x = 0$$

Como se observa, un cambio de signo en x altera la ecuación; por lo tanto la gráfica no es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al eje X:

$$x^2(-y) - 4(-y) + x = 0 \rightarrow -x^2y + 4y + x = 0$$

Como se observa, un cambio de signo y altera la ecuación; por lo tanto la gráfica no es simétrica respecto al eje X.

Respecto al origen:

$$(-x)^2(-y) - 4(-y) + (-x) = 0 \rightarrow -x^2 + 4y - x = 0$$

$$x^2y - 4y + x = 0$$

Como se observa, se obtuvo la ecuación original; por lo tanto, la curva es simétrica respecto al origen.

- Intersecciones

Con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow x^2(0) - 4(0) + x = 0 \rightarrow x = 0$$

Con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow (0)^2y - 4y + (0) = 0 \rightarrow y = 0$$

Por lo que la curva interseca a los ejes coordenados en el origen.

- Extensión

Ninguna de las variables toma valores imaginarios para valores reales de la otra, por lo que la curva es abierta y se extiende a ambos sentidos de los ejes coordenados. La curva no está definida para $x = \pm 2$.

- Asíntotas

Se despeja y para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales:

$$x^2y - 4y + x = 0; \quad y(x^2 - 4) = -x; \quad y = -\frac{x}{x^2 - 4}; \quad y = \frac{x}{4 - x^2}$$

$$y = \frac{x}{(2 - x)(2 + x)} \qquad \begin{array}{l} 2 - x = 0; \quad x = 2 \\ 2 + x = 0; \quad x = -2 \end{array}$$

por lo que la curva tiene dos asíntotas verticales que son:

$$x = -2 \text{ y } x = 2$$

Se despeja x para obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales; resulta una ecuación de segundo grado en x que se resuelve aplicando la fórmula:

$$yx^2 + x - 4y = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(y)\ (-4y)}}{2y}$$

Así se obtiene:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16y^2}}{2y}$$

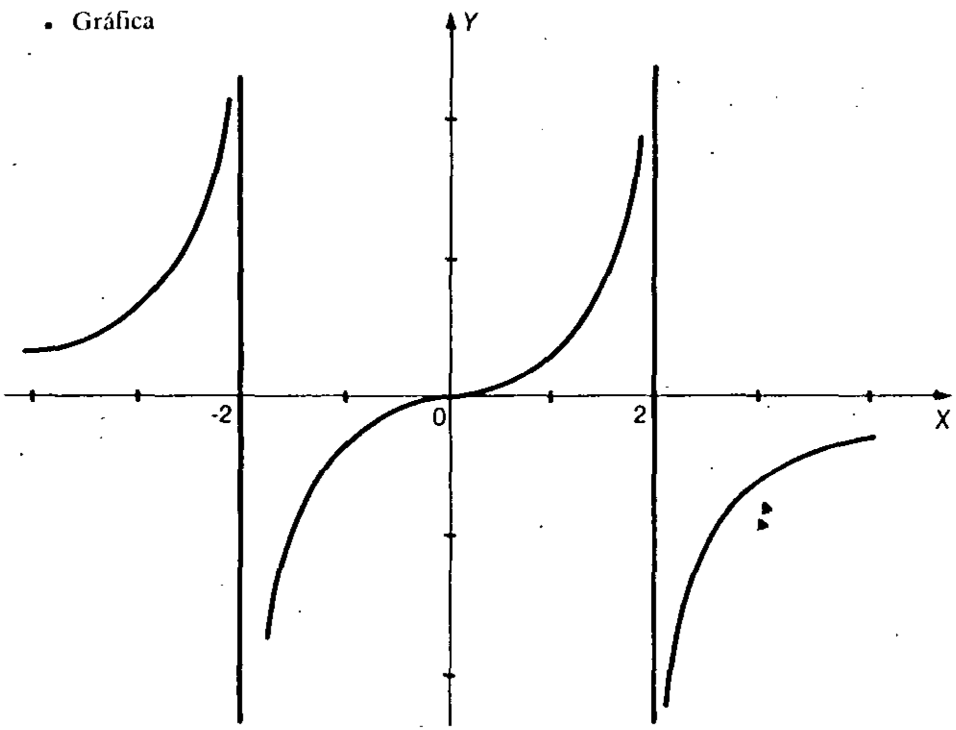
por lo que la ecuación de la asíntota horizontal es:

$$y = 0$$

- Obtención de algunos puntos

x	-3	-1	1	1.5	1.8	2.2	2.5	3	5	7
y	-0.2	-0.33	-1	-2	-5	5	2	1	0.33	0.2

- Gráfica



Ejemplo 3

Hacer la *discusión* de la siguiente ecuación:

$$x^2y - x^2 - y = 0$$

Solución

- Simetría

Respecto al eje Y:

$$(-x)^2y - (-x)^2 - y = 0 \rightarrow x^2y - x^2 - y = 0$$

El cambio de signo en x no altera la ecuación; por lo tanto la curva es simétrica respecto al eje Y.

Respecto al eje X:

$$x^2(-y) - x^2 - (-y) = 0 \rightarrow -x^2y - x^2 + y = 0$$

El cambio de signo en y altera la ecuación; por lo tanto la curva no es simétrica con respecto al eje X.

Respecto al origen:

$$(-x)^2(-y) - (-x)^2 - (-y) = 0 \rightarrow -x^2y - x^2 + y = 0$$

Según lo anterior, no se obtuvo la ecuación original, por tanto la curva no es simétrica respecto al origen.

- Intersecciones

Con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow -x^2 0 \rightarrow x = 0$$

Con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow -y = 0 \rightarrow y = 0$$

Por lo que la curva interseca a los ejes coordenados en el origen.

- Extensión

De la ecuación original, se despeja y en función de x:

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \qquad (1)$$

y no está definida para $x = \pm 1$

Ahora, se despeja x en función de y:

$$x = \pm \frac{y}{y-1} \qquad (2)$$

Como se observa, x no está definida para $y = 1$ y $0 < y < 1$.
De lo anterior se deduce que, a excepción de los valores anteriores, y es real para cualquier valor x y viceversa, por lo que la curva es abierta y se extiende a ambos sentidos de los ejes coordenados.

- Asíntotas

De la ecuación (1), se iguala a cero el denominador y se obtienen las ecuaciones de las asíntotas verticales:

$$x^2 - 1 = 0; \quad (x-1)(x+1) = 0 \quad \therefore \quad x = \pm 1$$

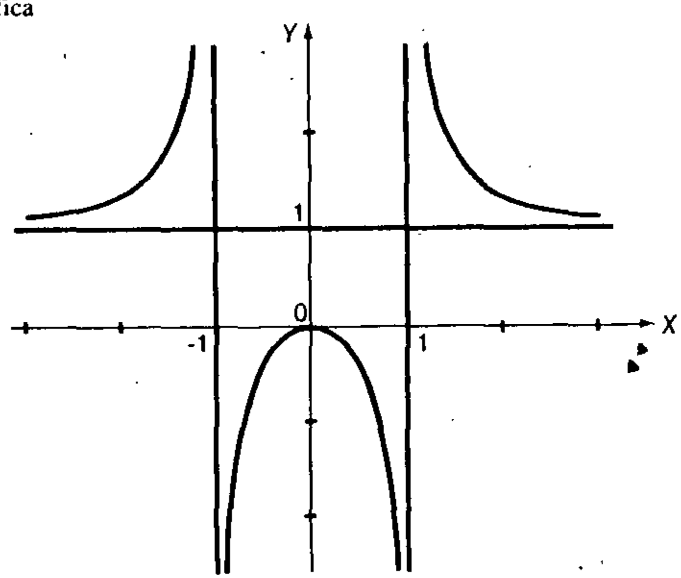
De la ecuación (2), se iguala a cero el denominador y se obtiene la ecuación de la asíntota horizontal:

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$$

- Obtención de algunos puntos

x	0	±0.5	±0.75	±1.5	±1.75	±2	±2.25
y	0	-0.33	-1.3	1.8	1.5	1.33	1.25

- Gráfica



Ejercicios

Gráfica de una ecuación y lugares geométricos
1. Para las siguientes ecuaciones, hacer la *discusión* y trazar la gráfica.

a) $x^2 + 2x - y + 3 = 0$
b) $xy - 2y - x = 0$
c) $x^2y + 4y - 8 = 0$
d) $xy^2 - 9x - y - 1 = 0$

MÓDULO 3. LÍNEA RECTA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Calculará la pendiente de una recta dada.*
- *Calculará el ángulo de inclinación de una recta dada.*
- *Determinará la ecuación de una recta, dados:*
  - *un punto y su pendiente*
  - *su pendiente y su ordenada al origen*
  - *dos de sus puntos*
- *Calculará la distancia de un punto a una recta, dadas las coordenadas del punto y la ecuación de la recta.*
- *Determinará si dos rectas son paralelas o perpendiculares.*
  Dadas las ecuaciones de dos rectas, calculará el ángulo *entre ellas.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	Representación analítica
Entre dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 la pendiente m es constante.	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{cte.}$
El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo θ que forma la parte positiva del eje X y la recta, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj.	$\theta = \text{ang tan } = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o $\tan\theta = m$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA	
Punto – pendiente:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Pendiente – ordenada al origen:	$y = mx + b$
Dos puntos:	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Ecuación general:	$Ax + By + C = 0$
Distancia entre un punto P_1 y una recta $Ax + By + C = 0$:	$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$
Condición para que dos rectas sean perpendiculares:	$(m_1)(m_2) = -1$ o $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
Condición para que dos rectas sean paralelas:	$m_1 = m_2$
Ángulo α formado por dos rectas dadas con pendientes m_1 y m_2:	$\alpha = \text{ang tan}\,\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

3.1. Generalidades

Definición: Se llama línea recta al lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que, tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.

En donde:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2$$

3.2. Ángulo de inclinación de una recta

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje coordenado X, y se mide desde el eje X a la recta en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (*véase* la figura 3.1).

En esta figura, θ representa al ángulo de inclinación de la recta, el cual está dado por la expresión:

$$\boxed{\theta = \text{ang tan}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}$$

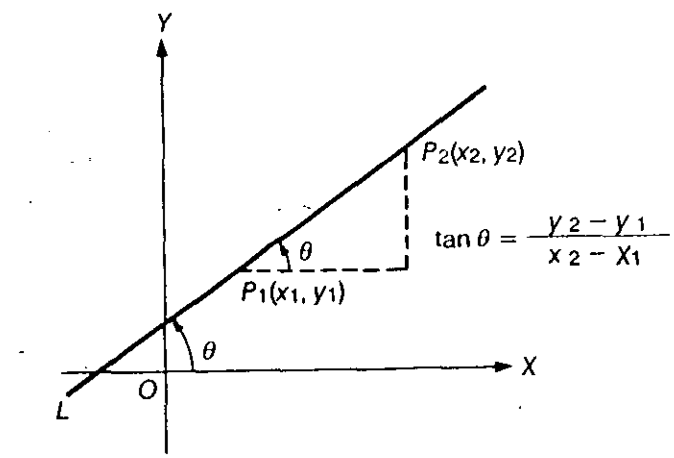


Figura 3.1

de donde:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

De acuerdo a la definición de línea recta dada anteriormente, tenemos que la pendiente de la recta es igual a:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es decir:

$$\boxed{m = \tan\theta}$$

La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación.

$$\boxed{m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Obsérvese que el ángulo de inclinación está restringido para

$$0 \leq \theta \leq 180°$$

Si el ángulo está entre $0 < \theta < 90°$ la pendiente es positiva y si está entre $90° < \theta < 180°$ la pendiente es negativa.

Ejemplo 1

Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que contiene a los puntos (1,6), (5, -2) (*véase* la figura 3.2).

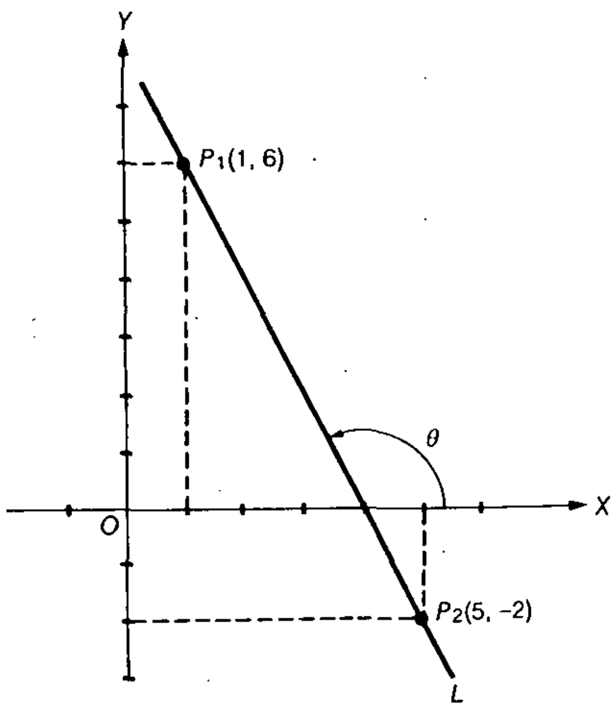


Figura 3.2

Solución

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 6}{5 - 1} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\theta = \text{ang}\tan(-2) = 116°\,34'$$

Ejemplo 2

Demostrar que los puntos $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$ y $C(6, 1)$ son colineales

Solución

$$\textit{Pendiente de } \overline{AB} = \frac{2 - 4}{3 + 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\textit{Pendiente de } \overline{AC} = \frac{1 - 4}{6 + 3} = -\frac{1}{3}$$

Como las pendientes de $\overline{AB}$ y de $\overline{AC}$ son las mismas, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

Analíticamente, una recta tiene una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una línea recta.

Una línea recta está completamente definida si se conocen dos de sus características; por ejemplo, dos puntos; un punto y su pendiente, etcétera.

3.3. Ecuación punto-pendiente

La ecuación de la recta que contiene al punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente es m, es:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es -2/3 y que contiene al $P(5, 7)$ (*véase* la figura 3.3).

Solución

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

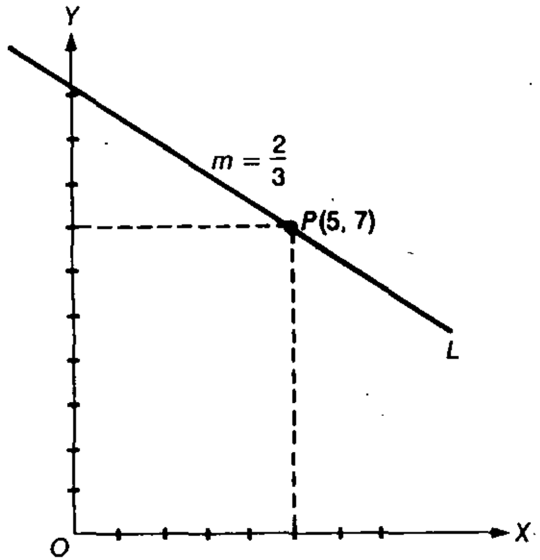


Figura 3.3

Al sustituir valores se tiene:

$$y - 7 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$3(y - 7) = -2x + 10$$

$$3y - 21 = -2x + 10$$

$$3y + 2x = 31$$

Por último, se ordena la ecuación:

$$2x + 3y - 31 = 0$$

Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto(4,–1) y tiene un ángulo de inclinación de 135° (*véase* la figura 3.4).

Solución

La pendiente de esta recta es $m = \tan 135°$

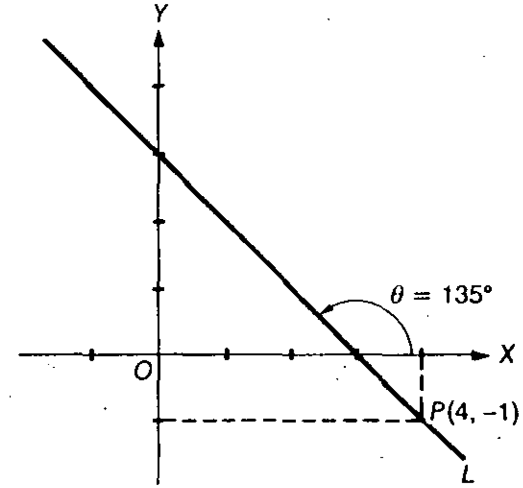


Figura 3.4

$$m = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Se sustituye y se obtiene:

$$y - (-1) = -1(x - 4)$$

$$y + 1 = -x + 4$$

$$\therefore x + y - 3 = 0$$

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto (2, –5/2) y tiene pendiente cero.

Solución

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - \left(-\frac{5}{2}\right) = 0(x - 2)$$

$$\therefore \quad y + \frac{5}{2} = 0$$

3.4. Ecuación pendiente-ordenada al origen

La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje coordenado Y en el punto $(0, b)$, siendo b la ordenada al origen, es:

$$\boxed{y = mx + b}$$

Una recta paralela al eje Y no tiene ordenada al origen y su ecuación será de la forma:

$$\boxed{x - k = 0 \quad k = \text{constante}}$$

Ejemplo 6

Determinar la pendiente m y la ordenada al origen (b) de la recta:

$$2y + 3x = 7$$

Solución

Se escribe la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$2y = -3x + 7; \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

Luego:

$$m = -\frac{3}{2} \text{ es la pendiente.}$$

$$b = \frac{7}{2} \text{ es la ordenada al origen.}$$

Ejemplo 7

Determinar la ecuación de la recta de pendiente -3 y cuya intersección con el eje Y es $\frac{1}{4}$.

Solución

Intersección con el eje Y = ordenada al origen = $\frac{1}{4}$.

$$y = mx + b; \quad y = -3x + \frac{1}{4}; \quad m = -3$$

3.5. Ecuación de la recta que contiene dos puntos conocidos

La ecuación de la recta que contiene los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ está dada por:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \qquad x_1 \neq x_2$$

Cuando $x_1 = x_2$, la recta es paralela al eje Y, y su ecuación está dada por:

$$\boxed{x = x_1}$$

Ejemplo 8

Determinar la ecuación de la recta que contiene los puntos $(-2, -3)$ y $(4, 2)$.

Solución

Se aplica la forma:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y se tiene que:

$$(y + 3) = \frac{2 + 3}{4 + 2}(x + 2)$$

Se realizan operaciones:

$$(y + 3) = \frac{5}{6}(x + 2)$$

$$6y + 18 = 5x + 10$$

$$\therefore \quad 5x - 6y - 8 = 0$$

Ejemplo 9

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto (–3, 1) y es paralela a la recta determinada por los puntos (0, –2) y (5, 2) (*véase* la figura 3.5).

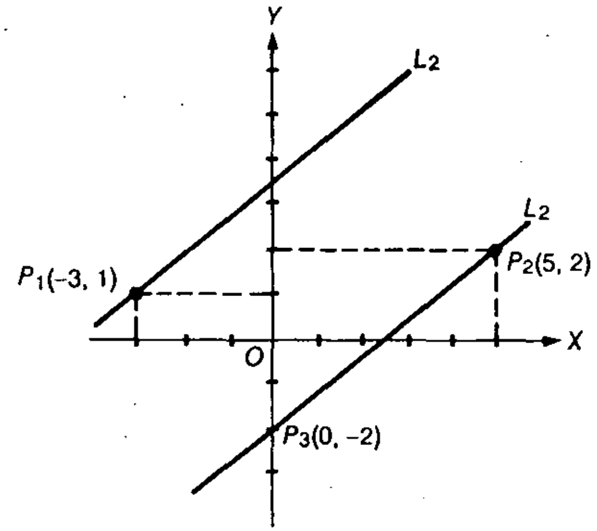


Figura 3.5

Solución

Como se conoce un punto de la recta pedida (L_1), solamente es necesario obtener su pendiente, la cual es la misma que la de la recta paralela (L_2).
La pendiente de L_2 es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se sustituye:

$$m = \frac{2 - (-2)}{5 - 0} = \frac{4}{5}$$

Se aplica la expresión:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{4}{5}(x + 3)$$

$$5y - 5 = 4x + 12$$

$$\therefore\ 4x - 5y + 17 = 0$$

3.6. Ecuación general de la recta

Sea una ecuación lineal o de primer grado en x, y, de la forma:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Esta ecuación representa una recta cuando $A \neq 0$ y/o $B \neq 0$. En la cual la pendiente de la recta y su ordenada al origen están dadas respectivamente por:

$$\boxed{m = -\frac{A}{B}} \qquad \boxed{b = -\frac{C}{B}}$$

Si en la ecuación general C = 0, entonces la recta contiene al origen.

Ejemplo 10

Hallar la pendiente m y la ordenada al origen de la recta $2y + 3x = 7$

Solución

Se escribe la ecuación en la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

y se obtiene:

$$3x + 2y - 7 = 0$$

La pendiente m es:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$$

y la ordenada al origen:

$$b = -\frac{C}{B} = -\left(\frac{-7}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\therefore\ b = \frac{7}{2}$$

3.7. Distancia de un punto a una recta

La distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ se obtiene como:

$$\boxed{d = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

en donde el signo del radical debe ser opuesto al signo de C.

En el caso de que el punto P_1 y el origen estén localizados a uno y otro lado de la recta, la distancia d se considera positiva; si se localizan en un mismo lado, d se considera negativa (*véase* la figura 3.6)

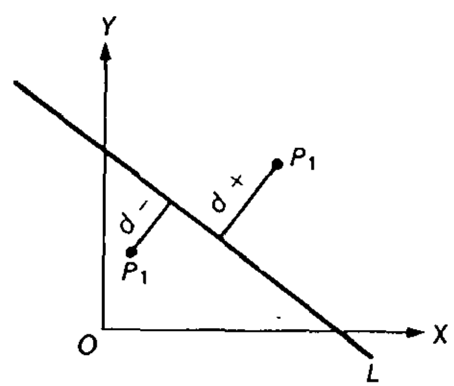


Figura 3.6

Si $C = 0$, entonces se puede escoger arbitrariamente el signo positivo o el negativo en el radical y no considerar interpretación geométrica al signo de la distancia.

Ejemplo 11

a) Calcular la distancia d del punto $P(-2, -3)$ a la recta

$$8x + 15y - 24 = 0$$

Solución

La expresión que nos permite obtener d es:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Se sustituyen los valores indicados:

$$A = 8; \quad B = 15; \quad C = -24$$

$$P(x_1, y_1) = P(-2, -3)$$

$$d = \frac{8(-2) + 15(-3) - 24}{+\sqrt{(8)^2 + (15)^2}} = \frac{-85}{17} = -5$$

$$\therefore\ d = -5$$

Como d es negativa, el punto $(-2, -3)$ y el origen están del mismo lado de la recta.

b) Calcular la distancia del punto $P(-1, 7)$ a la recta $6x - 8x + 5 = 0$

Solución

$$d = \frac{6(-1) - 8(7) + 5}{-\sqrt{(6)^2 + (-8)^2}} = \frac{-57}{-10} = 5.7$$

$$\therefore\ d = 5.7$$

Como d es positiva, el punto $(-1, 7)$ y el origen están en distintos lados de la recta.

Ejemplo 12

Determinar el valor de k para el cual la distancia d del punto $(2, 3)$ a la recta

$$8x + 15y + k = 0$$

es igual a 5 unidades

Solución

$$d = \frac{8(2) + 15(3) + k}{\pm\sqrt{(8)^2 + (15)^2}} = \pm 5$$

$$= \frac{16 + 45 + k}{\pm 17} = \pm 5$$

$$= \frac{61 + k}{\pm 17} = \pm 5$$

$$\therefore\ k = -(5)(17) - 61$$

$$\therefore k = -146$$

3.8. Rectas paralelas. Rectas perpendiculares

Sean dos rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente.

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales; o sea:

$$m_1 = m_2$$

Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario; es decir:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{o bien} \quad m_1 m_2 = -1$$

Ejemplo 13

Demostrar, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos $A(8, 6)$, $B(4, 8)$ y $C(2, 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución

$$\text{Pendiente de } \overline{AB} = \frac{8 - 6}{4 - 8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pendiente de } \overline{BC} = \frac{4 - 8}{2 - 4} = 2$$

Como la pendiente de $\overline{AB}$ es el recíproco con signo contrario de la pendiente de $\overline{BC}$, estos dos lados del triángulo son perpendiculares.

Ejemplo 14

Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto (–2, 3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

Solución

Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

La pendiente de $2x - 3y + 6 = 0$ que está escrita en la forma general $Ax + By + C = 0$ es:

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ la pendiente de la recta pedida es $= -\dfrac{3}{2}$

Por otro lado, sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por (–2, 3) y tiene de pendiente $-\dfrac{3}{2}$

Entonces, se sustituye en la ecuación de la forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

y se tiene:

$$y - 3 = \left(-\frac{3}{2}\right)(x + 2); \quad 2(y - 3) = -3(x + 2)$$

$$2y - 6 = -3x - 6; \quad 2y + 3x = 0$$

Al ordenar:

$$3x + 2y = 0$$

3.9. Ángulo entre dos rectas

Sean las rectas L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Sea el ángulo α medido en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, desde la recta L_1 hasta la recta L_2 (*véase* la figura 3.7).

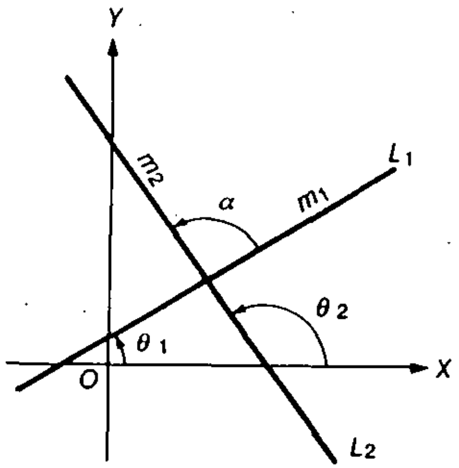


Figura 3.7

El ángulo α está dado por:

$$\boxed{\alpha = \text{ang tan } \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}}$$

Ejemplo 15

Si el ángulo formado por las rectas L_1 y L_2 es de 45°, y la pendiente m_1 de L_1 es 2/3, calcular la pendiente m_2 de L_2 (*véase* la figura 3.8)

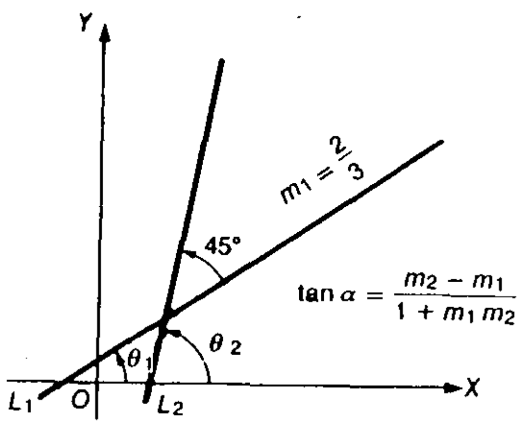


Figura 3.8

Solución

Se sustituye:

$$\tan 45° = 1 = \frac{m_2 - \frac{2}{3}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) m_2}$$

$$1 + \frac{2}{3} m_2 = -\frac{2}{3} + m_2$$

$$\frac{2}{3} m_2 - m_2 = -\frac{2}{3} - 1$$

$$m_2 \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{5}{3}$$

$$m_2 = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} = 5$$

$$\therefore \; m_2 = 5$$

Ejemplo 16

Calcular los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(-3, -2)$, $B(2, 5)$ y $C(4, 2)$ (*véase* la figura 3.9).

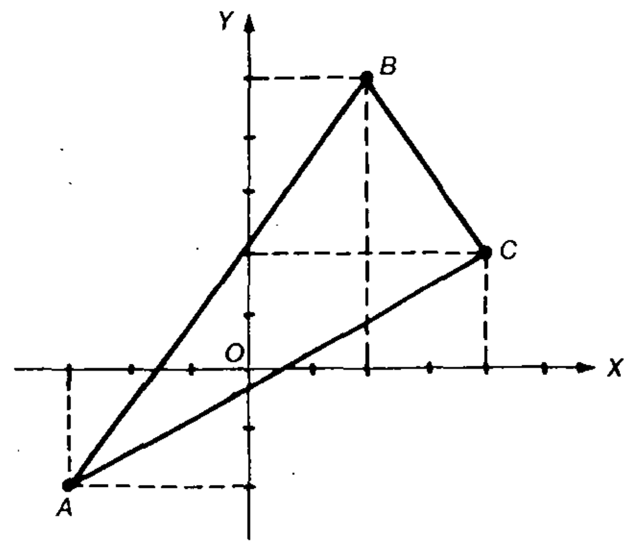


Figura 3.9

Solución

$$m_{AB} = \frac{5+2}{2+3} = \frac{7}{5}$$

$$m_{BC} = \frac{2-5}{4-2} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{CA} = \frac{-2-2}{-3-4} = \frac{4}{7}$$

$$\tan A = \frac{m_{AB} - m_{CA}}{1 + m_{AB}\, m_{CA}} = \frac{\frac{7}{5} - \frac{4}{7}}{1 + \frac{7}{5}\left(\frac{4}{7}\right)} = \frac{29}{63}$$

$$A = \text{ang tan } \frac{29}{63}$$

$$A = 24°\, 43.1'$$

$$\tan B = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{1 + m_{BC}\, m_{AB}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{5}\right)} = \frac{29}{11}$$

$$B = \text{ang tan } \frac{29}{11}$$

$$B = 69°\, 13.6'$$

$$\tan C = \frac{m_{CA} - m_{BC}}{1 + m_{CA}\, m_{BC}} = \frac{\frac{4}{7} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{29}{2}$$

$$C = \text{ang tan } \frac{29}{2}$$

$$C = 86°\, 3.3'$$

Comprobación:

$$A + B + C = 180°$$

$$24°\, 43.1' + 69°\, 13.6' + 86°\, 3.3' = 180°$$

$$180° = 180°$$

Ejemplo 17

Obtener la representación gráfica de las siguientes rectas:

a) $3x - 2y + 2 = 0$

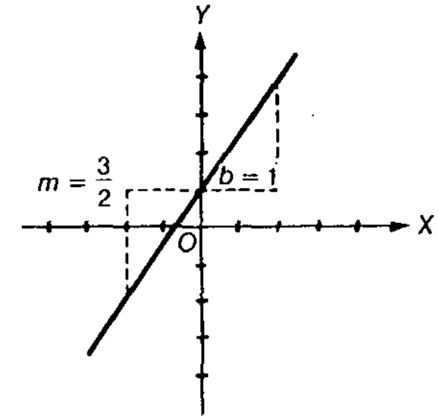
Solución

$2y = 3x + 2$

$y = \frac{3}{2}x + 1$

De donde

$$m = \frac{3}{2}\ ;\ b = 1$$



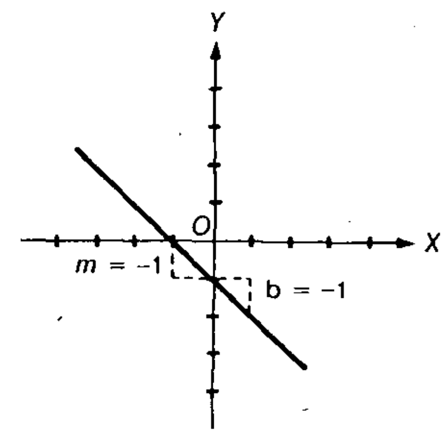
b) $x + y + 1 = 0$

Solución

Ahora se utiliza la ecuación general:

$$m = -\frac{A}{B};\quad m = -\frac{1}{1} = -1$$

$$b = -\frac{C}{B};\quad b = -\frac{1}{1} = -1$$

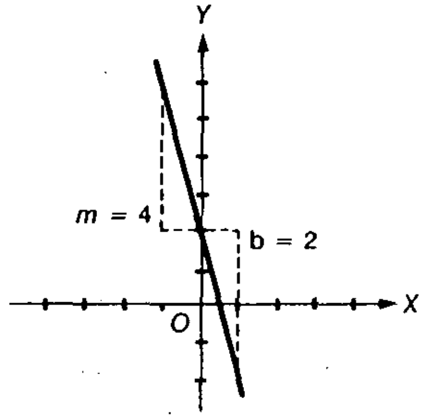


c) $y = 2 - 4x$

Solución

Directamente de la ecuación:

$$m = -4; \quad b = 2$$



d) $\frac{x}{3} - 2y = 1;$

Solución

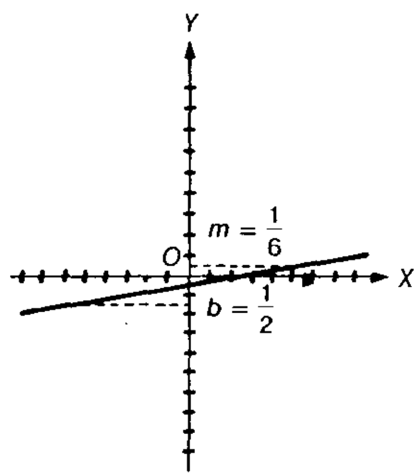
$$x - 6y = 3$$

$$6y = x - 3$$

$$y = \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$$

De donde

$$m = \frac{1}{6}\ ; \ b = -\frac{1}{2}$$



Ejercicios

Inclinación y pendiente de una recta

1. Calcular la pendiente m y el ángulo de inclinación θ de las rectas que contienen a los siguientes pares de puntos:
   a) (–8, –4), (5, 9)
   b) (–11, 4), (–11, 10)
   c) (8, 6), (14, 6)

Ecuación punto-pendiente

2. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $S(1/3, 2/3)$ y tiene una pendiente infinita.

3. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $A(-6, -3)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

Ecuación pendiente-ordenada al origen

4. Determinar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes:
   a) Pasa por (0, –1), $m = 0$
   b) Pasa por (0, 3), $m = -4/3$

Ecuación de la recta que contiene dos puntos conocidos

5. Los vértices de un cuadrilátero son : $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(6, 7)$, $D(8, 0)$. Determinar las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.

6. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $R(5, 3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $7x + 9y + 1 = 0$.

Ecuación general de la recta

7. Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos (7, 4) y (–1, –2).

8. Determinar el valor de k de forma que la recta $4x - ky - 7 = 0$ tenga pendiente 3.

Distancia de un punto a una recta

9. Calcular la distancia del punto (4, –1) a la recta $3x - 4y + 12 = 0$ e interpretar el signo de la distancia.

10. Calcular la distancia del punto (7, –4) a la recta $2x + 3y + 8 = 0$.

Rectas paralelas y perpendiculares

11. Demostrar que los puntos $P_1(9, 2)$, $P_2(11, 6)$, $P_3(3, 5)$, $P_4(1, 1)$ son vértices de un paralelogramo.

Ángulo entre dos rectas

12. Calcular el ángulo agudo del paralelogramo cuyos vértices son: $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(10, 7)$ y $D(7, 3)$.
El primer paso en este problema será indicar la dirección positiva del ángulo que se busca, o sea, el ángulo C; entonces el lado BC de pendiente inicial m_1 y el lado CD de pendiente final m_2 forman el ángulo buscado.

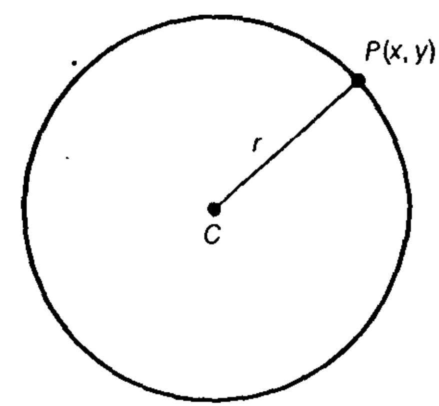
MÓDULO 4. CIRCUNFERENCIA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Obtendrá la ecuación de una circunferencia, dados el centro y el radio.*
- *Identificará la ecuación general de la circunferencia, obteniendo de ésta el radio, el centro y su gráfica.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	Representación analítica
Todos los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo C (centro).	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
Centro en el origen (0, 0):	$x^2 + y^2 = r^2$
Centro en (h, k):	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Ecuación general:	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
Circunferencia real:	si $D^2 + E^2 - 4F > 0$
Un punto:	si $D^2 + E^2 - 4F = 0$
Ningún lugar geométrico:	si $D^2 + E^2 - 4F < 0$

4.1. Generalidades

Definición: Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo C llamado *centro*.

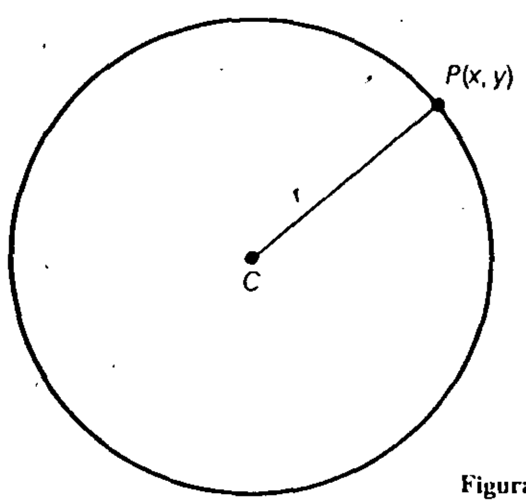


Figura 4.1

La distancia constante r entre el centro C y cualquier punto de la circunferencia se llama *radio* de la circunferencia.

4.2. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Sea una circunferencia con centro en el origen y radio r. La ecuación de esta circunferencia es:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

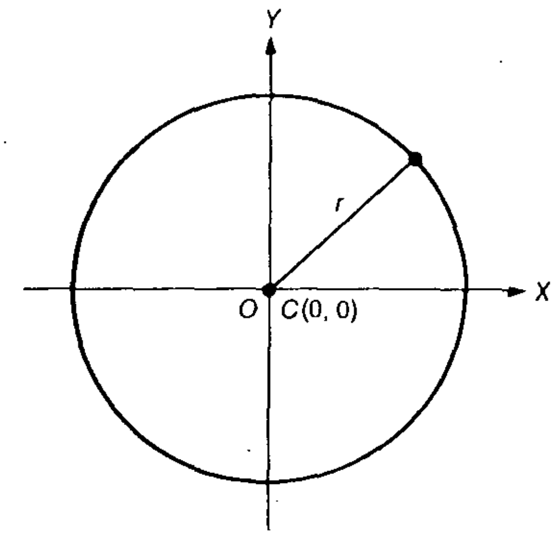


Figura 4.2

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la circunferencia de radio 3 y con centro en el origen.

Solución

La ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Entonces:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que contiene el punto (4, 3).

Solución

Las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Se sustituye:

$$(4)^2 + (3)^2 = r^2$$
$$16 + 9 = r^2$$

De donde:

$$r^2 = 25 \qquad r = 5$$
$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 25$$

4.3. Ecuación de la circunferencia con centro no coincidente con el origen

Sea una circunferencia con centro en el punto (h, k) y de radio r, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. La ecuación de esta circunferencia es:

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

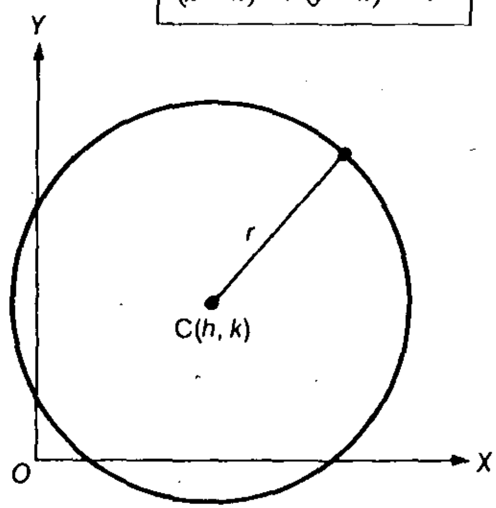


Figura 4.3

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la circunferencia para los siguientes casos:

a) Centro en el punto (0, 3) y radio 1

b) Centro en el punto (–5, –3) y radio 4

c) Centro en el punto (4, 0) y radio 2

Solución

Se sustituyen en cada caso los valores en la ecuación de la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

y se obtiene:

$$a)\ x^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$b)\ (x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

$$c)\ (x - 4)^2 + y^2 = 4$$

Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la circunferencia de centro (5, –2) y que contiene el punto (–1, 5).

Solución

Se procede a encontrar el radio de la circunferencia, que es el dato faltante.

El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia.

$$\therefore \ r = \sqrt{(5 + 2)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{85}$$

Así, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 85$$

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la circunferencia para la cual uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos (5, –1) y (–3, 7).

Solución

El centro de la circunferencia está en el punto medio del segmento que une los puntos dados; por lo tanto las coordenadas del centro son:

$$x_m = \frac{5-3}{2} = 1 \quad y_m = \frac{-1+7}{2} = 3$$

$$\therefore\ C = (1,3)$$

El radio se obtiene como sigue:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2; \quad r^2 = (5-1)^2 + (-1-3)^2; \quad r^2 = 16 + 16$$

$$r = \sqrt{32}; \quad r = 4\sqrt{2}$$

O también con el otro punto dado:

$$r^2 = (-3-1)^2 + (7-3)^2; \quad r^2 = 16 + 16$$

$$r = 4\sqrt{2}$$

Con los elementos obtenidos, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32$$

4.4. Ecuación general de la circunferencia

Sea una ecuación de segundo grado en x, y, del tipo:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Sea $N = D^2 + E^2 - 4F$

- Si $N > 0$, la ecuación representa una circunferencia cuyo centro es el punto

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

y radio:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

- Si $N = 0$, la ecuación representa un punto cuyas coordenadas son:

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

- Si $N < 0$, la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo 6

Dada la ecuación general de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

expresarla en la forma ordinaria

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

y determinar las coordenadas del centro y el radio.

Solución

Se agrupan términos y se completan cuadrados:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro son:

$$C(1,-2)$$

y el radio es:

$$r = 3$$

Se comprueba, aplicando las expresiones que se derivan de la ecuación general para la obtención del centro y el radio.

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right); \quad C\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right); \quad C(1,-2)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = \frac{1}{2}\sqrt{36} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) 6 = 3$$

$$\therefore\ r = 3$$

Ejemplo 7

Dadas las siguientes ecuaciones generales de la circunferencia, decir si representan o no una circunferencia, y obtener su centro y su radio, de ser posible.

a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 8 = 0$

b) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$

Solución

a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 8 = 0$

Se divide toda la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y + 4 = 0$$

Se puede observar que:

$$D = -3, \quad E = 5 \text{ y } \quad F = 4$$

Se analiza el término $D^2 + E^2 - 4F$ para determinar a cuál de los tres casos pertenece:

$$(-3)^2 + (5)^2 - 4(4) = 9 + 25 - 16 = 18 > 0$$

Por lo que la circunferencia es real con centro en el punto:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right); \quad C\left(-\frac{-3}{2}, -\frac{5}{2}\right); \quad C\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

y radio:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{18}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

b) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$

Se divide toda la ecuación entre 16:

$$x^2 + y^2 - 4x + \frac{y}{2} + \frac{177}{16} = 0$$

En este caso:

$$D = -4;$$

$$E = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad F = \frac{177}{16}$$

Se analiza el término $D^2 + E^2 - 4F$:

$$16 + \frac{1}{4} - 4\left(\frac{177}{16}\right) = 16 + \frac{1}{4} - \frac{177}{4} = \frac{64 + 1 - 177}{4} = 28 < 0$$

Por lo tanto la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo 8

Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos (5, 3), (6, 2) y (3, –1).

Solución

La ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta ecuación contiene tres constantes indeterminadas, por lo que serán necesarias tres condiciones para determinarlas. Como la circunferencia debe contener a los tres puntos dados, se pueden hallar los coeficientes sustituyendo las coordenadas de los puntos en lugar de las variables x y y, resolviendo a continuación las tres ecuaciones lineales en D, E y F.

$$25 + 9 + 5D + 3E + F = 0$$

$$36 + 4 + 6D + 2E + F = 0$$

$$9 + 1 + 3D - E + F = 0$$

Se simplifica:

$$5D + 3E + F + 34 = 0$$

$$6D + 2E + F + 40 = 0$$

$$3D - E + F + 10 = 0$$

Se resuelve el sistema y se obtiene:

$$D = -8, \quad E = -2 \text{ y } F = 12$$

Por lo que la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

Ejemplo 9

Obtener la representación gráfica de las siguientes circunferencias:

a) $(x-3)^2 + y^2 = 16$

b) $y = \pm\sqrt{25-(x+2)^2} + 1$

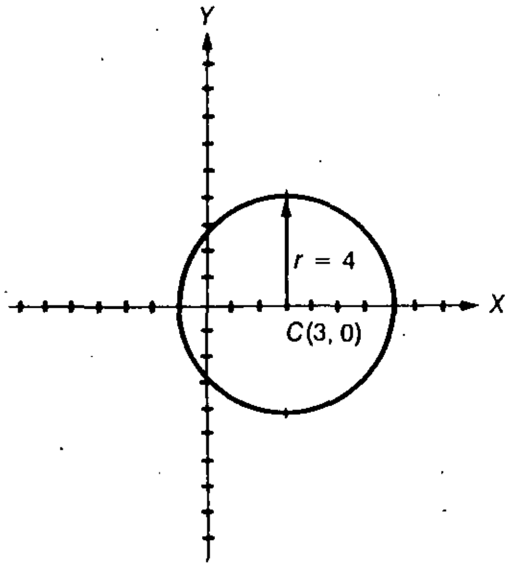
c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

Solución

a) Según la ecuación de la circunferencia:

$$C\,(3, 0) \qquad r = 4$$

Por lo tanto su gráfica es como se muestra a la derecha.



b) $y = \pm\sqrt{25-(x+2)^2} + 1$

Nótese que la ecuación dada puede escribirse en la siguiente forma:

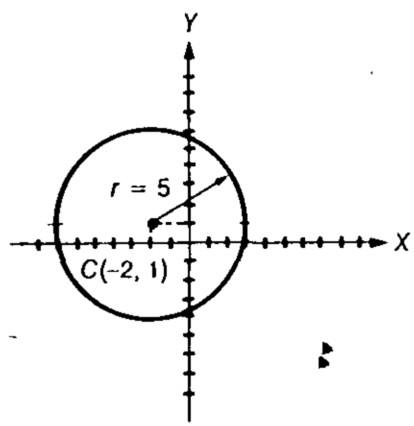
$$y - 1 = \pm\sqrt{25-(x+2)^2}$$

$$(y-1)^2 = 25 - (x+2)^2$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Por lo que se deduce que su centro está en $C\,(-2, 1)$ y su radio es $r = 5$.

La gráfica se muestra a la derecha.



c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

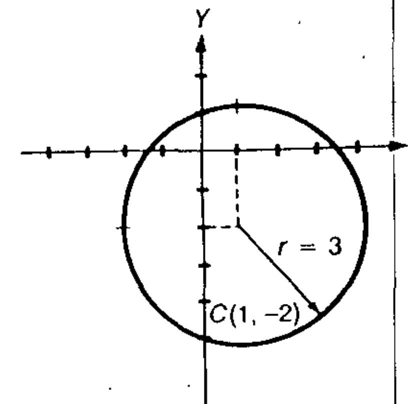
Según la transformación efectuada en el ejemplo 6, se llega a la ecuación:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

De la cual se obtiene:

$$C(1, -2) \qquad r = 3$$

La gráfica se muestra a la derecha.



Ejercicios

Ecuación de la circunferencia (centro, radio)

1. Determinar la ecuación de la circunferencia en cada caso:
   a) Centro en (0, 0) y radio 1
   b) Centro en (3, −1) y radio 5
   c) Centro en (0, − 4) y radio 9
   d) Centro en (1, 0) y radio 3
2. Determinar la ecuación de la circunferencia de centro (4, −1) y que contiene el punto (−1, 3).
3. Determinar la ecuación de la circunferencia para la cual uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos (−3, 5) y (7, −3).

Ecuación general de la circunferencia

4. Dadas las siguientes ecuaciones, decir si representan o no una circunferencia, y obtener su centro y su radio, de ser posible. Aplicar las fórmulas y comprobar completando cuadrados.
   a) $x^2 + y^2 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$
   d) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$
5. Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos: (4, 5), (3, −2) y (1, −4).

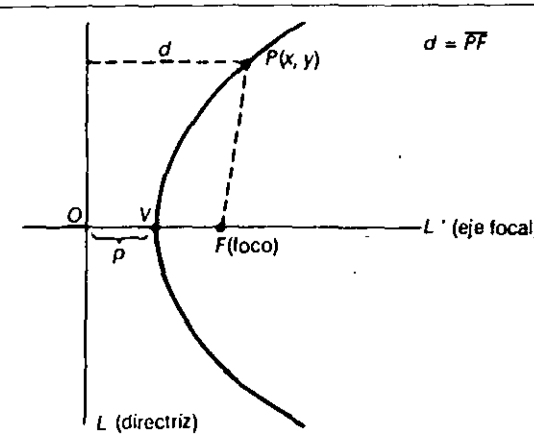
MÓDULO 5. PARÁBOLA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Obtendrá la ecuación de una parábola a partir de datos tales como: vértice, foco, directriz y valor del lado recto.*
- *Dada la ecuación de una parábola, obtendrá su gráfica y sus elementos tales como: vértice, foco, valor del lado recto y directriz.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	**Representación analítica**
• Todos los puntos de una parábola equidistan de un punto fijo F(foco) y una recta fija L (directriz).	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica		Representación analítica	
•Vértice en el origen (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$y^2 = 4px$	¤$p > 0$ abre hacia la derecha.
			¤$p < 0$ abre hacia la izquierda.
	° *Eje focal en el eje Y*	$x^2 = 4py$	¤$p > 0$ abre hacia arriba.
			¤$p < 0$ abre hacia abajo.
•Vértice en (h, k)	° Eje focal paralelo al eje X	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	¤$p > 0$ abre hacia la derecha.
			¤$p < 0$ abre hacia la izquierda.
	° *Eje focal paralelo al eje Y*	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	¤$p > 0$ abre hacia arriba.
			¤$p < 0$ abre hacia abajo.
•Longitud del lado recto:		$\lvert 4p \rvert$	
•*Ecuación general*		$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	
•Representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje X:		Si $A = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
•Representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje Y:	Si $A \neq 0,\ C = 0,\ E \neq 0$
•Representa dos rectas o ningún lugar geométrico:	Si $A = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$ o Si $A \neq 0,\ C = 0,\ E = 0$

5.1. Generalidades

> *Definición:* Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F llamado *foco* y una recta fija L llamada *directriz*.

El punto F no está contenido en L.

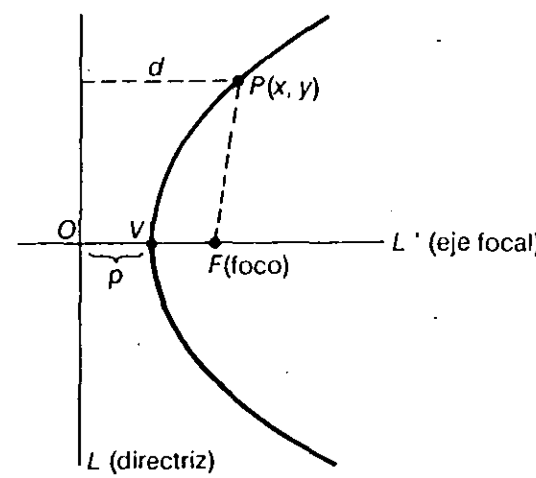


Figura 5.1

La recta L' perpendicular a L y que contiene a F se llama *eje focal* de la parábola.

Si Q es la intersección de L y L' entonces el punto medio V del segmento QF está en la parábola, ya que equidista de L y de F; a este punto V se le llama *vértice* de la parábola (*véase* la figura 5.1).

5.2. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente con un eje coordenado

Sea p la distancia dirigida $\overline{VF} = \overline{QV}$

Sea una parábola cuyo vértice coincide con el origen y cuyo eje focal coincide con el eje coordenado X. La ecuación de esta parábola es:

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

El foco tiene por coordenadas $(p, 0)$ y la directriz L es una recta de ecuación:

$$\boxed{x = -p}$$

p puede ser positiva o negativa, lo cual nos plantea dos casos:
si p es positiva, la parábola se abre hacia la derecha (*véase* la figura 5.2).
si p es negativa, la parábola se abre hacia la izquierda (*véase* la figura 5.3).

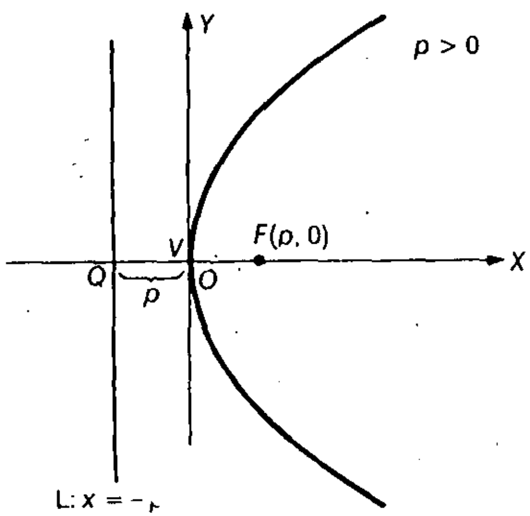


Figura 5.2

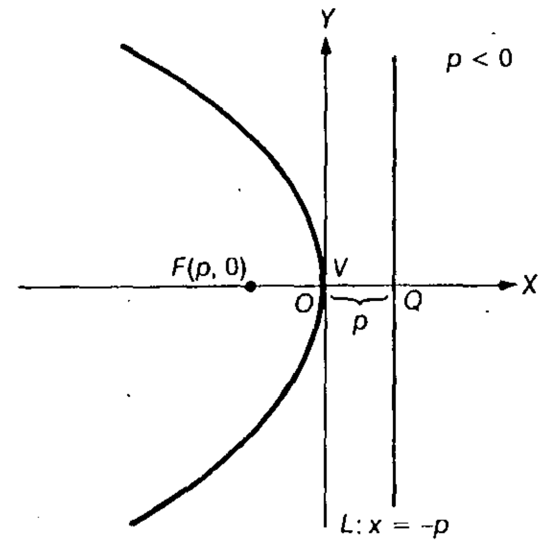


Figura 5.3

Consideremos ahora una parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente con el eje Y; su ecuación es:

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

El foco tiene por coordenadas $(0, p)$ y la ecuación de la directriz es:

$$\boxed{y = -p}$$

Si p es positiva, la parábola se abre hacia arriba (*véase* la figura 5.4).

Si p es negativa, la parábola se abre hacia abajo (*véase* la figura 5.5).

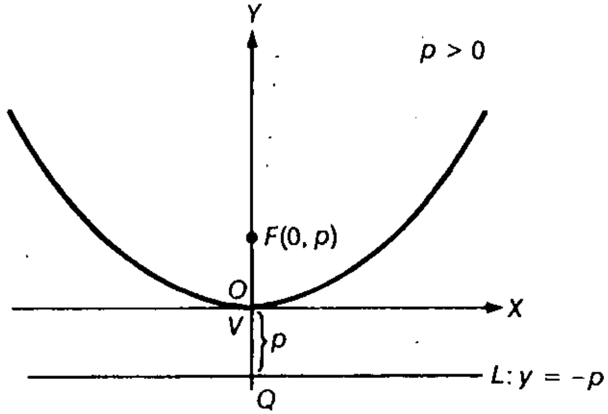


Figura 5.4

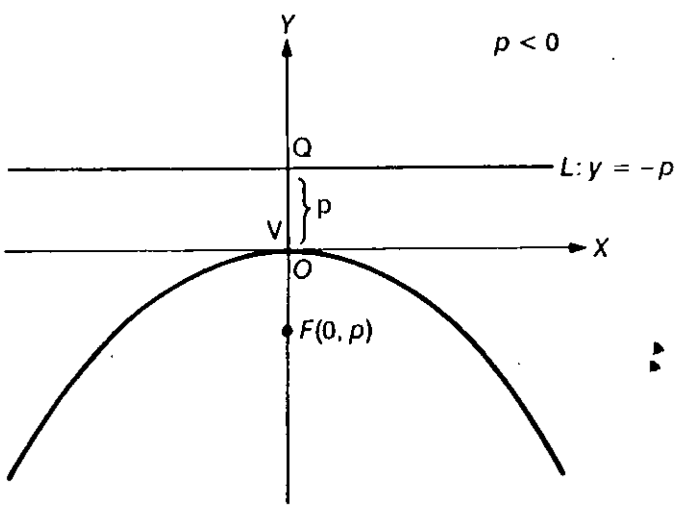


Figura 5.5

5.3. Lado recto de una parábola

Sea la siguiente gráfica de una parábola:

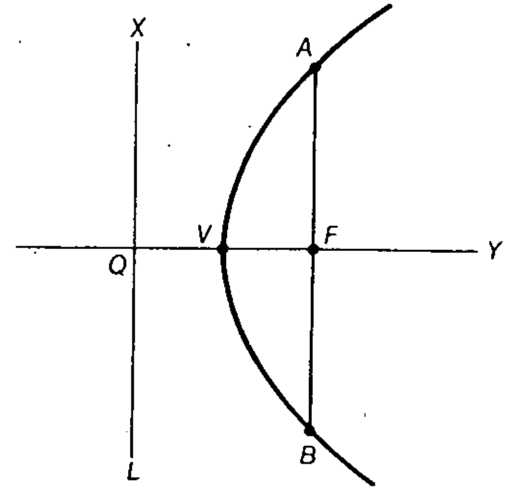


Figura 5.6

En esta gráfica se ha representado el segmento AB que es una cuerda perpendicular al eje focal y que contiene el foco; a esta cuerda se le llama *lado recto* (L. R.) de la parábola.

La principal característica del lado recto de una parábola es que su longitud es igual al valor absoluto de $4p$, esto es:

$$\boxed{\text{L.R.} = |\, 4p \,|}$$

Ejemplo 1

Sea una parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal coincide con el eje Y, y contiene el punto $(4, -2)$.

a) Determinar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

b) Trazar la gráfica correspondiente.

Solución

a) La ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

Como la parábola contiene el punto (4, −2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación $x^2 = 4py$.
Por lo tanto se tiene:

$$16 = 4p(-2); \qquad \frac{16}{-2} = 4p; \qquad p = -\frac{8}{4}; \quad \therefore \quad p = -2$$

y la ecuación buscada será:

$$x^2 = -8y$$

El foco es el punto $(0, p)$, o $(0, -2)$. La ecuación de la directriz es:

$$y = -p \qquad \text{o sea} \qquad y = 2$$

La longitud del lado recto es:

$$\text{L.R.} = 8$$

b) Con los datos obtenidos procedemos a trazar la gráfica correspondiente (*véase* la figura 5.7).

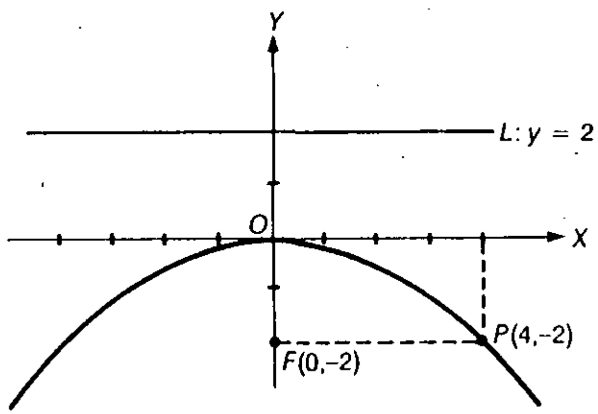


Figura 5.7

Ejemplo 2

Determinar el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de la parábola $3y^2 = 8x$

Solución

Se sabe que $y^2 = 4px$, de donde se deduce que $y^2 = \frac{8x}{3}$, por lo que:

$$4p = \frac{8}{3} \qquad p = \frac{2}{3}$$

El foco es el punto de coordenadas:

$$F\left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

La ecuación de la directriz es:

$$x = -\frac{2}{3} \qquad \text{ya que} \qquad x = -p$$

La longitud del lado recto se calcula así:

$$|4p| = \left|4\frac{2}{3}\right|$$

$$\text{L.R.} = \frac{8}{3}$$

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y directriz la recta $y - \frac{4}{3} = 0$. Calcular además la longitud del lado recto.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola; de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, se tiene:
Distancia del foco al punto:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se sustituye:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2}$$

Como esta distancia debe ser igual a la comprendida entre el punto $P(x, y)$ y la directriz de ecuación $y - \frac{4}{3}$, entonces:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{0x+y-\frac{4}{3}}{0^2+1^2}$$

(*Véase* el apartado 3.7)
De donde:

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2}=y-\frac{4}{3}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica:

$$x^2+y^2+\frac{8y}{3}+\frac{16}{9}=y^2-8\frac{y}{3}+\frac{16}{9}$$

O sea:

$$x^2+\frac{8y}{3}+\frac{8y}{3}=0$$

$$x^2+\frac{16y}{3}=0 \quad \therefore \quad x^2=-\frac{16y}{3}$$

La longitud del lado recto es: $|4p|=\left|-\frac{16}{3}\right|$

$$\therefore \quad \text{L.R.}=\frac{16}{3}$$

5.4. Ecuación de la parábola con vértice no coincidente con el origen y eje focal paralelo a un eje coordenado

Sea una parábola cuyo vértice tenga por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje X, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. La ecuación de esta parábola es:

$$\boxed{(y-k)^2=4p\,(x-h)}$$

El foco tiene por coordenada $(h+p, k)$ y la directriz L es una recta de la ecuación:

$$\boxed{x=h-p}$$

Si p es positiva la parábola se abre a la derecha; si p es negativa la parábola se abre a la izquierda (*véase* la figura 5.8).

Consideremos ahora los casos de una parábola cuyo vértice tiene por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje Y, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$.

La ecuación de esta parábola es:

$$\boxed{(x-h)^2=4p\,(y-k)}$$

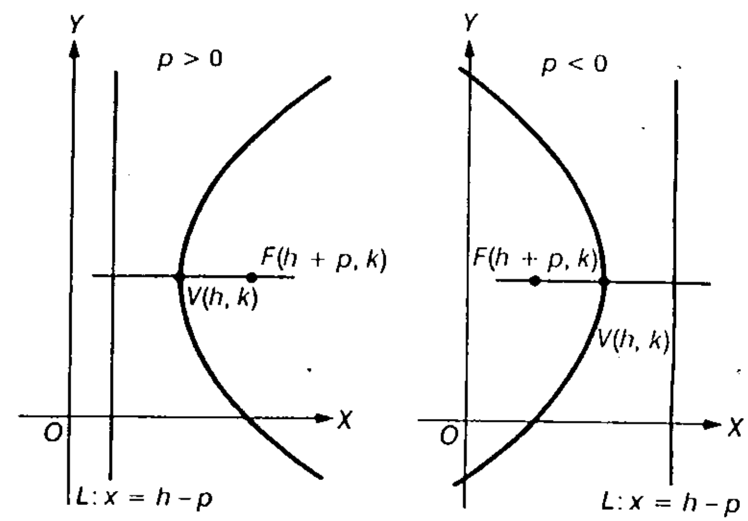


Figura 5.8

El foco tiene por coordenadas $(h, k+p)$ y la directriz L es una recta de ecuación:

$$\boxed{y=k-p}$$

Si p es positiva la parábola se abre hacia arriba; si p es negativa la parábola se abre hacia abajo (*véase* la figura 5.9). En estos casos la longitud del lado recto también es igual a $|4p|$.

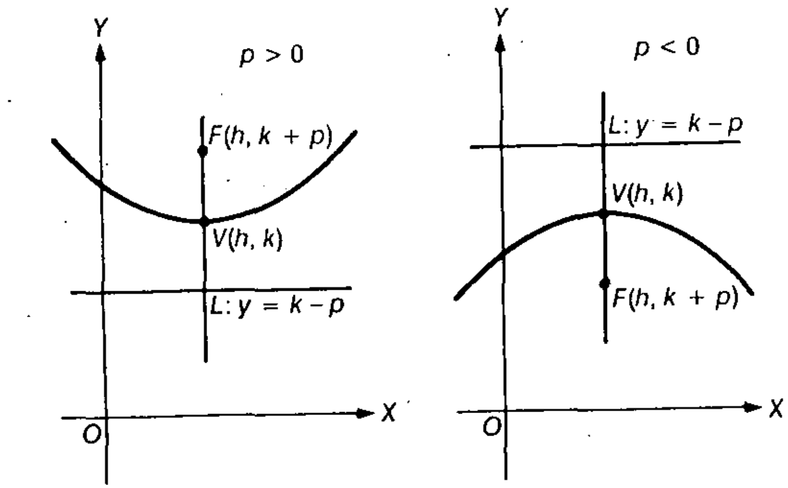


Figura 5.9

Ejemplo 4

Determinar la ecuación de la parábola con vértice $V(3, 4)$ y foco $F(3, 2)$. Determinar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución

Como el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje, y como cada uno de estos puntos, en este caso tiene la misma abscisa 3, se concluye que el eje de la parábola es paralelo al eje Y. Por lo tanto, la ecuación de esta parábola es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

Se sustituyen los valores de $V(3, 4)$ y se tiene:

$$(x - 3)^2 = 4p\,(y - 4)$$

Ahora bien:

$$|p| = |\overline{FV}|; \quad F = \text{foco}, \quad V = \text{vértice}$$

$$|p| = |4 - 2| = 2$$

Como el foco está abajo del vértice, la parábola se abre hacia abajo y p es negativa:

$$p = -2$$

Así, la ecuación de la parábola es:

$$(x - 3)^2 = -8\,(y - 4)$$

La longitud del lado recto es 8. Como el vértice $V(3, 4)$, es el punto medio del segmento comprendido entre el foco y la directriz, las coordenadas del punto A sobre la directriz (*véase* la figura 5.10) es $(3, 6)$ y por lo tanto la ecuación de la directriz es $y = 6$.

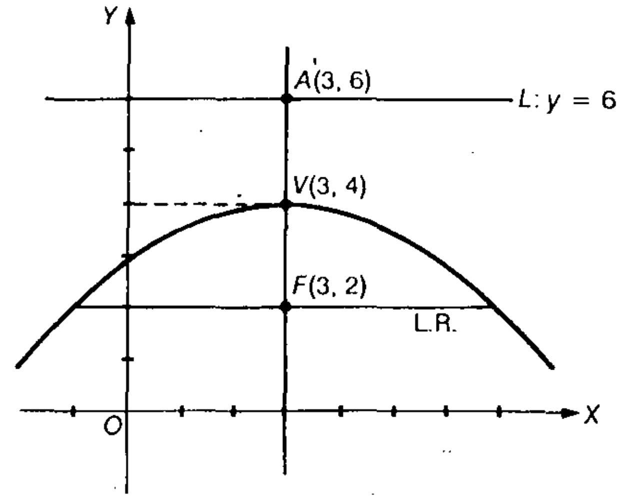


Figura 5.10

Ejemplo 5

Determinar la ecuación de la parábola de vértice $V(3, 2)$ y foco $F(5, 2)$.

Solución

Como el vértice es $V(3, 2)$ y el foco $F(5, 2)$, se tiene que $p = 2$ y la ecuación adquiere la forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

o sea

$$(y - 2)^2 = 8(x - 3)$$

Al desarrollar y simplificar:

$$y^2 - 4y - 8y + 28 = 0$$

Ejemplo 6

Hallar la ecuación de la parábola de vértice $V(2, 3)$, de eje paralelo al eje coordenado Y, y que contiene el punto $A(4, 5)$.

Solución

La ecuación que se ha de aplicar es:

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

es decir:

$$(x-2)^2 = 4p\,(y-3)$$

Como el punto $A(4, 5)$ pertenece a la curva, se tiene:

$$(4-2)^2 = 4p\,(5-3)$$

Al desarrollar y simplificar:

$$4 = 8p$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la ecuación pedida es:

$$(x-2)^2 = 2\,(y-3)$$

o bien:

$$x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$$

5.5. Ecuación general de la parábola

Sea una ecuación de segundo grado en x, y, del tipo:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Esta ecuación representará una parábola cuando cumpla con las siguientes condiciones:

- Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje X.

- Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje Y.
  En los casos anteriores, cuando D o E valen cero respectivamente, la ecuación de segundo grado deberá analizarse de la siguiente manera:

  Sea $M = Cy^2 + Ey + F = 0$

- Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D = 0$ cuando las raíces de M son reales y diferentes, la ecuación representa dos rectas no coincidentes paralelas al eje X; si las raíces de M son reales e iguales, la ecuación representa dos rectas coincidentes paralelas al eje X; si las raíces de M son complejas, la ecuación no corresponde a ningún lugar geométrico.

  Sea $M = Ax^2 + Dx + F = 0$

- Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E = 0$, cuando las raíces de M son reales y diferentes, la ecuación representa dos rectas no coincidentes paralelas al eje Y; si las raíces de M son reales e iguales, la ecuación representa dos rectas coincidentes paralelas al eje Y; si las raíces de M son complejas, la ecuación no corresponde a ningún lugar geométrico.

Ejemplo 7

Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola. Determinar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución

La ecuación general es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En este caso:

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$$

$$A \neq 0,\ C = 0,\ E \neq 0$$

Por lo tanto, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

Se reduce la ecuación:

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0\,; \quad x^2 - 5x - 6y + \frac{97}{4} = 0$$

Se completan cuadrados:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6y - \frac{97}{4} + \frac{25}{4}; \quad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6y - 18$$

y se obtiene:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3)$$

En esta ecuación se observa que las coordenadas del vértice son:

$$\left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

Como $4p = 6, p = 3/2$ y la parábola se abre hacia la parte positiva del eje Y, entonces el foco está sobre un eje paralelo al eje Y, por lo que sus coordenadas son:

$$\left(\frac{5}{2}, 3 + \frac{3}{2}\right)$$

o sea:

$$F\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

La ecuación de la directriz es:

$$y = 3 - \frac{3}{2}$$

o sea:

$$y = \frac{3}{2}$$

La longitud del lado recto es:

$$|4p| = \left|4\left(\frac{3}{2}\right)\right| = 6$$

$$\therefore \text{ L.R.} = 6$$

Ejemplo 8

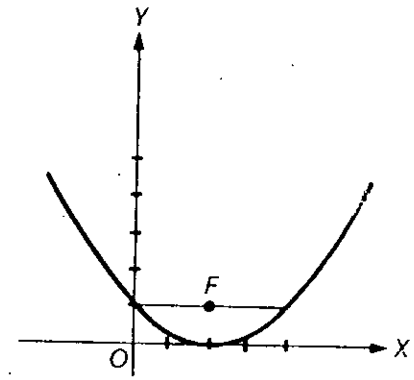
Obtener la representación gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

Solución

Multiplíquese la ecuación por 4 :

$4y = x^2 - 4x + 4$; la cual se puede escribir como: $4y = (x - 2)^2$ o bien: $(x - 2)^2 = 4y$; de lo cual se obtiene: eje focal paralelo al eje Y, $V(2, 0)$, $F(2, 1)$ y longitud del lado recto $= 4$. Como $p > 0$, se abre hacia arriba.



b) $y = -2x^2 + 8x - 4$

Solución

Factorizando -2 :

$$y = -2\,(x^2 - 4x + 2)$$

completando un trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis:

$$y = -2\,(x^2 - 4x + 4 - 2)$$

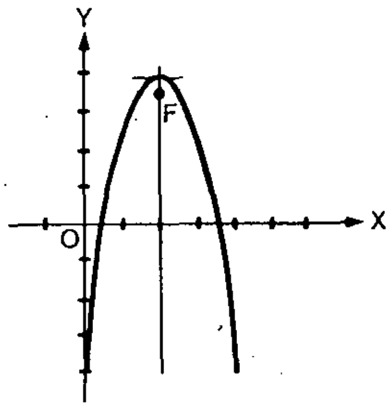
$$y = -2\,(x - 2)^2 + 4$$

$$y - 4 = -2\,(x - 2)^2$$

$$\text{o bien } (x - 2)^2 = -\frac{1}{2}(y - 4)$$

por lo que se obtiene: eje focal paralelo al eje Y, $V\,(2, 4)$, $F\,(2, 3.875)$.

Longitud del lado recto $= 1/2$. Como $p < 0$, se abre hacia abajo.



c) $y = \pm\sqrt{8x - 8} - 2$

Solución

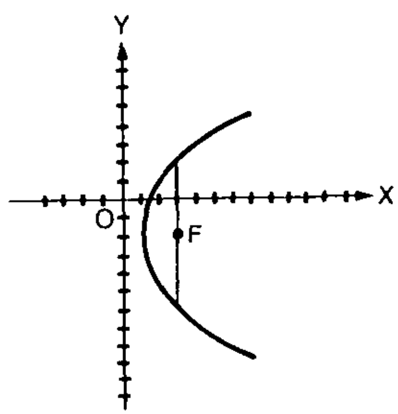
La ecuación dada se puede expresar como:

$y + 2 = \pm\sqrt{8x - 8}$

$(y + 2)^2 = 8(x - 1)$; de donde se obtiene: eje focal paralelo al eje X,

$V(1, -2), F(3, -2)$.

Longitud del lado recto $= |4p| = 8$. Como $p > 0$, se abre hacia la derecha.



Ejercicios

Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje focal sobre un eje coordenado

1. Determinar las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:

   a) $y^2 = 6x$

   b) $x^2 = 8y = 0$

2. Determinar la ecuación de la parábola con foco $F(3, 0)$ y directriz $x + 3 = 0$

Ecuación de la parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo a un eje coordenado

3. Determinar la ecuación de la parábola de vértice $V(-2, 3)$ y foco $F(1, 3)$.

4. Determinar la ecuación de la parábola con foco en el punto $F(-2, -1)$ y cuyo lado recto es el segmento entre los puntos $A(-2, 2)$ y $B(-2, -4)$.

Ecuación general de la parábola

5. Demostrar que la ecuación $y^2 + y - 3x + 1 = 0$ representa una parábola. Determinar las coordenadas del vértice y del foco y la ecuación de la directriz.

MÓDULO 6. ELIPSE

Objetivos específicos

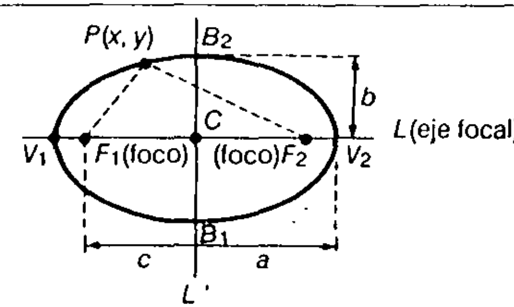
Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Obtendrá la ecuación de la elipse a partir de datos tales como: focos, centro, eje mayor, eje menor, lado recto.*
- *Dada una ecuación identificará si se trata de una elipse y obtendrá características tales como: focos, centro, eje mayor, eje menor, lado recto y la gráfica respectiva.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica | **Representación analítica**

- En una elipse, la suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante.



- Centro en el origen (0, 0)
- Eje focal en el eje X

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; ; \; a > b$$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica		Representación analítica
	° Eje focal en el eje Y	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$; $a > b$
• Centro en (h, k)	° Eje focal paralelo o coincidente al eje X	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; $a>b$
	° Eje focal paralelo o coincidente al eje Y	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$; $a>b$
• Longitud del lado recto:		$\frac{2b^2}{a}$
• Longitud del eje mayor:		$2a$
• Longitud del eje menor:		$2b$
• Distancia entre los focos:		$2c$; $c^2 = a^2 - b^2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
• Ecuación general:		$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
• Indicador:		$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$
• Elipse cuyo eje es paralelo al eje X o al eje Y:		$A \neq 0$, $C \neq 0$, A, C del mismo signo y $N>0$
• Un punto:		$N = 0$
• Ningún lugar geométrico:		$N < 0$

6.1. Generalidades

Definición: Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados *focos*, es constante.

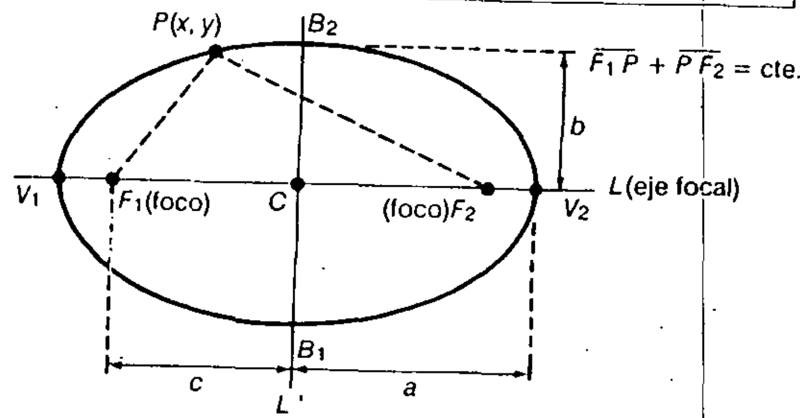


Figura 6.1

La recta L que contiene los focos de la elipse se llama *eje focal*.

Los puntos V_1 y V_2 en los cuales se interseca la elipse con su eje focal se llaman *vértices*.

El punto C está en el eje focal y es el punto medio del segmento $F_1 F_2$; este punto es el *centro* de la elipse.

La recta L' que contiene el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal, se llama *eje transversal*.

Al segmento del eje focal comprendido entre los vértices V_1 y V_2 se le llama *eje mayor* y su longitud es igual a $2a$, en donde a es llamada *semieje mayor*.

Al segmento del eje transversal comprendido entre los puntos B_1 y B_2 (intersecciones de la elipse con su eje transversal) se le llama *eje menor* y su longitud es igual a $2b$, en donde b es llamada *semieje menor*.

La distancia c que hay entre el centro de la elipse y cualquiera de sus dos focos se llama *distancia focal* y es igual a:

$$\sqrt{a^2 - b^2}$$

o sea que:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

6.2. Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con un eje coordenado

Sea una elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado X. La ecuación de esta elipse es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad a > b$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ y los vértices $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$ (*véase* la figura 6.2).

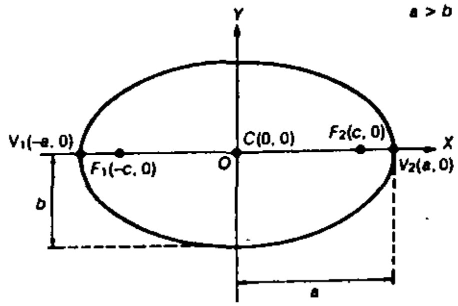


Figura 6.2

Ahora consideremos una elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje Y. Su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad a > b$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ y los vértices $V_1(0, -a)$ y $V_2(0, a)$ (*véase* la figura 6.3).

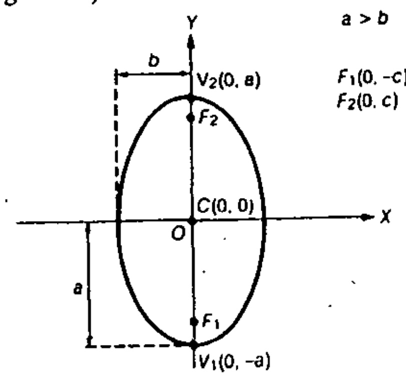


Figura 6.3

6.3. Lado recto de la elipse

Considérese la siguiente gráfica de una elipse.

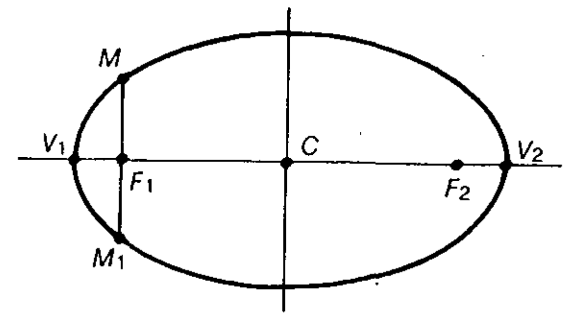


Figura 6.4

En la gráfica se ha representado el segmento $M M_1$, que es una cuerda perpendicular al eje focal y que contiene un foco de la elipse; a esta cuerda se le llama *lado recto* de la elipse y su longitud es igual a $2b^2/a$ o sea:

$$\boxed{L.R. = \frac{2b^2}{a}}$$

Ejemplo 1

Dada la elipse $9x^2 + 16y^2 = 576$, calcular las longitudes del semieje mayor y semieje menor, las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto.

Solución

La ecuación $9x^2 + 16y^2 = 576$ también se puede escribir como:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Por lo tanto:

Semieje mayor $a = 8$

Semieje menor $b = 6$

Como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{7}$ y el eje focal está en el eje X, las coordenadas de los focos son:

$$F_1(-2\sqrt{7}, 0) \quad \text{y} \quad F_2(2\sqrt{7}, 0)$$

La longitud del lado recto es:

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(6)^2}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

$$\therefore \quad \mathbf{L.R. = 9}$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la elipse con centro en el origen, uno de sus focos el punto (0, 3) y semieje mayor igual a 5.

Solución

Datos:

$$a = 5 \quad c = 3$$

Ahora bien:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Por lo tanto:

$$b = \sqrt{25 - 9} = 4 \quad b = 4$$

Como el eje focal se encuentra en el eje Y, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

6.4. Ecuación de la elipse con centro no coincidente con el origen y eje focal paralelo a un eje coordenado

Sea una elipse cuyo centro tiene por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje coordenado X, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. La ecuación de esta elipse es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad a > b}$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(h - c, k)$, $F_2(h + c, k)$ y los vértices $V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$ (*véase* la figura 6.5).

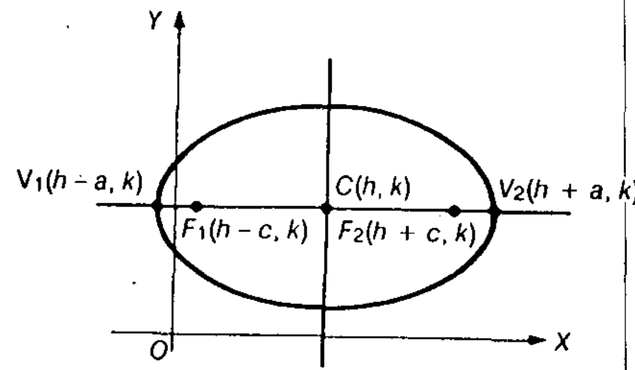


Figura 6.5

Si consideramos que la elipse tiene su centro con coordenadas (h, k) y que su eje focal es paralelo al eje coordenado Y, su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1} \quad a > b$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(h, k - c)$, $F_2(h, k + c)$ y los vértices $V_1(h, k - a)$ y $V_2(h, k + a)$ (*véase* la figura 6.6).

En estos casos la longitud del lado recto es también igual a $2b^2/a$

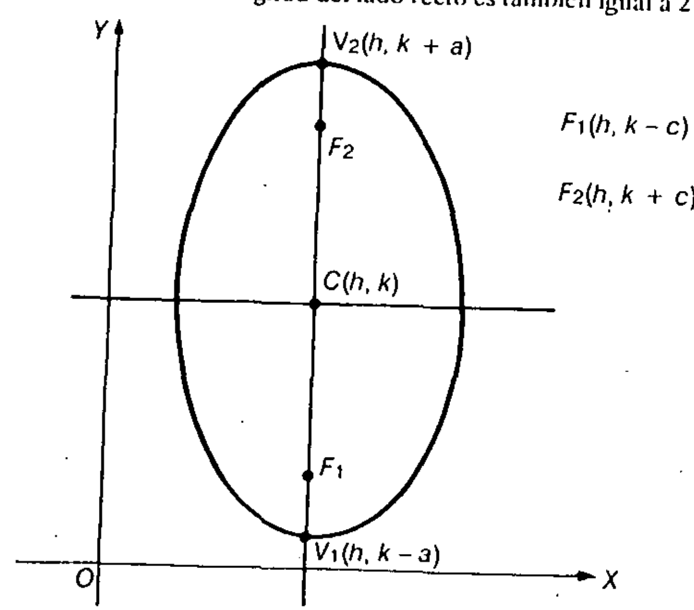


Figura 6.6

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la elipse con centro $C(2, -3)$, un foco $F(-1, -3)$ y semieje menor igual a 4.

Solución

$$b = 4 \quad c = 2 - (-1) = 3$$

si

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 + b^2}$$

o sea que:

$$a = \sqrt{9 + 16} = 5$$

El eje focal es paralelo al eje X, por lo que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

Calcular las longitudes del semieje mayor y el semieje menor, las coordenadas del centro y de los focos y la longitud del lado recto.

Solución

De la ecuación:

$$a = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Las coordenadas del centro son:

$$C(1, 2)$$

Se encuentra el valor de c para obtener las coordenadas de los focos:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{45 - 20} = \sqrt{25} = 5 \quad \therefore \quad c = 5$$

Como el eje mayor es paralelo al eje X, las coordenadas de los focos son:

$$F_1(6, 2), \quad F_2(-4, 2)$$

Lado recto:

$$L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(20)}{3\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$L.R. = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$

6.5. Ecuación general de la elipse

Sea una ecuación de segundo grado en x, y, del tipo:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Sea: $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$

- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $A < C$, $N > 0$ y A y C tienen el mismo signo, la ecuación representa una elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje X.
- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $A > C$, $N > 0$ y A y C tienen el mismo signo, la ecuación representa una elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje Y.
- Si $N = 0$, la ecuación representa un punto único comúnmente llamado punto elipse.
- Si $N < 0$, la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo 5

Dada la ecuación general:

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$$

a) Determinar si representa una elipse.
b) Deducir su ecuación en la forma ordinaria.
c) Obtener las coordenadas de su centro.
d) Obtener la longitud de los semiejes mayor y menor.
e) Obtener las coordenadas de los focos.
f) Obtener la longitud del lado recto.

Solución

a) De la ecuación general se obtiene:

$$A = 1, \; C = 4, \; D = -6, \; E = 16 \text{ y } F = 21$$

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF = 4(-6)^2 + (1)(16)^2 - 4(1)\,4\,(21)$$

$$N = 64 > 0$$

por lo cual la ecuación está definida para valores reales de x y y, o sea que sí representa una elipse.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

Se agrupan términos y se completan **cuadrados**:

$$x^2 - 6x + 9 + 4(y^2 + 4y + 4) + 21 - 9 - 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 4$$

O bien:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

De la ecuación anterior se deducen los incisos *c*) y *d*):

c) Centro:

$$C(3, -2)$$

d) Semieje mayor:

$$a = 2$$

Semieje menor:

$$b = 1$$

e) Las coordenadas de los focos se obtienen por medio de la expresión:

$$F(h \pm c, k)$$

Se calcula el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad F_1(3-\sqrt{3}, -2) \quad F_2(3+\sqrt{3}, -2)$$

f) Lado recto:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2}{2} \quad \therefore \quad L.R. = 1$$

Ejercicios

Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal sobre un eje coordenado

1. En cada una de las elipses siguientes, calcular la longitud del semieje mayor, la longitud del semieje menor, las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto.

   a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

   b) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

2. Determinar la ecuación de cada una de las siguientes elipses, de manera que satisfagan las condiciones que se indican.

   a) Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$
   b) $L.R. = 5$, vértices $(\pm 10, 0)$

Ecuación de la elipse con centro en cualquier punto (h, k) y eje focal paralelo a un eje coordenado

3. Determinar la ecuación de la elipse de centro $C(4, -1)$, uno de los focos $F(1, -1)$ y que contiene el punto $A(8, 0)$.

4. Dada la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

determinar las coordenadas del centro, el semieje mayor, el semieje menor, las coordenadas de los focos y la longitud del lado recto.

Ecuación general de la elipse

5. Dada la ecuación:

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$$

   a) Decir si la ecuación define una elipse.
   b) Deducir su ecuación en la forma ordinaria.
   c) Obtener las coordenadas de su centro.
   d) Obtener las longitudes de los semiejes mayor y menor.
   e) Obtener las coordenadas de los focos.
   f) Obtener la longitud del lado recto.

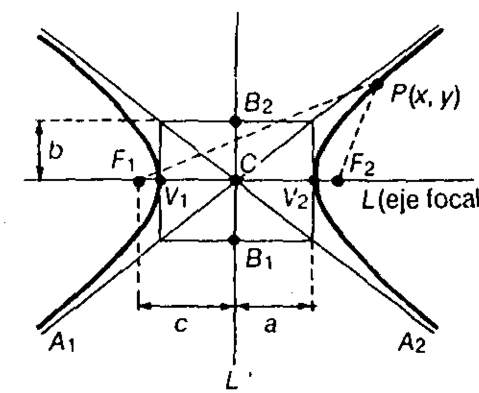
MÓDULO 7. HIPÉRBOLA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Obtendrá la ecuación y la gráfica de la hipérbola a partir de sus características, tales como: focos, centro, eje transverso, eje conjugado y lado recto.*
- *Dada una ecuación identificará si se trata de una hipérbola y determinará sus características, tales como: focos, centro, eje transverso, eje conjugado, lado recto y gráfica.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	Representación analítica
• En una hipérbola, la diferencia en valor absoluto de las distancias de cualesquiera de sus puntos a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es constante.	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica		Representación analítica
• Centro en el origen (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	° Eje focal en el eje Y	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
• Centro en (h, k)	° Eje focal paralelo o coincidente al eje X	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
	° Eje focal paralelo o coincidente al eje Y	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Equilátera		
• *Centro en el origen* (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$x^2 - y^2 = a^2;\ a = b$
	° Eje focal en el eje Y	$y^2 - x^2 = a^2;\ a = b$
	° Eje focal girado a 45° con respecto a los ejes coordenados	$xy = K;\quad K = \text{cte.} \neq 0$
Conjugada		
• *Centro en el origen* (0, 0)	° Eje focal en el eje X	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ conjugada: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
	° Eje focal en el eje Y	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica		Representación analítica
• Centro en el origen (0, 0)	° Eje focal en el eje Y	conjugada: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
• Longitud del lado recto:		$\frac{2b^2}{a}$
• Longitud del eje transverso:		$2a$
• Longitud del eje conjugado:		$2b$
• Longitud entre los focos:		$2c;\quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$
• *Ecuación general:*		$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
• Indicador:		$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$
• Hipérbola con eje focal paralelo o coincidente con el eje X o con el eje Y:		$A \neq 0,\ C \neq 0,\ N \neq 0,$ A y C, de signo contrario.
• Dos rectas que se intersecan en un punto:		$A \neq 0,\ C \neq 0,\ N = 0,$ A y C, de signo contrario.

7.1. Generalidades

> *Definición*: Una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la diferencia en valor absoluto de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados *focos*, es igual a una constante.

$$|\overline{F_1P} - \overline{PF_2}| = \text{cte.}$$

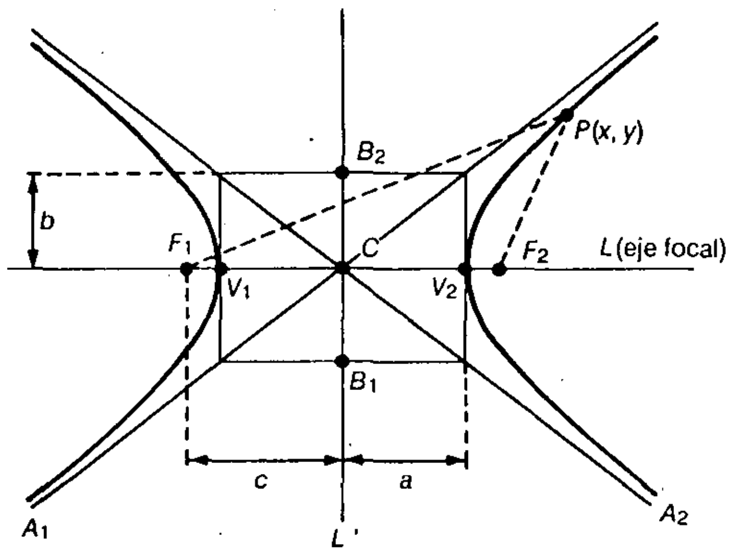


Figura 7.1

La recta L que contiene los focos de la hipérbola se llama *eje focal*.

Los puntos V_1 y V_2 en los cuales se interseca la hipérbola con su eje focal, se llaman *vértices*.

El punto C está en el eje focal y es el punto medio del segmento F_1F_2; este punto es el *centro* de la hipérbola.

La recta L' que contiene el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje focal se llama *eje normal*.

Al segmento del eje focal comprendido entre los vértices V_1 y V_2 se le llama eje transverso y su longitud es igual a $2a$, en donde a es llamada *semieje transverso*.

Las rectas A_1 y A_2 son las asíntotas de la hipérbola.

Al segmento del eje normal comprendido entre los puntos B_1 y B_2, los cuales se relacionan con las asíntotas y los focos, como se muestra en la figura

7.1, se le llama *eje conjugado* y su longitud es igual a $2b$, en donde b es el *semieje conjugado*.

La distancia que hay entre el centro de la hipérbola y cualquiera de sus dos focos se llama *distancia focal* y es igual a:

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

o sea:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

7.2. Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con un eje coordenado

Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado X. Su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ y los vértices $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$ (*véase* la figura 7.2).

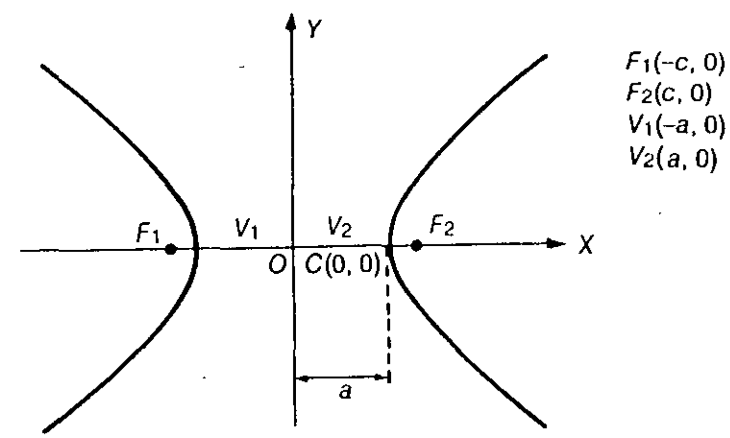


Figura 7.2

Si se tiene una hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje Y, su ecuación es:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Los focos tienen por coordenadas $F_1(0, c)$, $F_2(0, c)$ y los vértices $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$ (*véase* la figura 7.3).

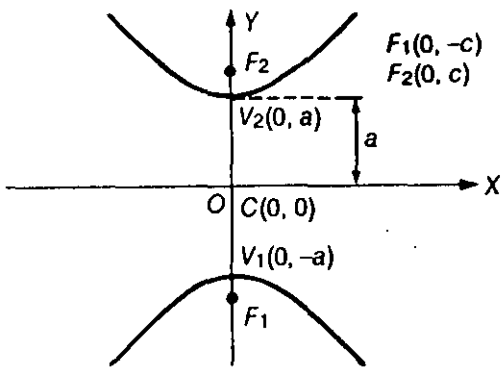


Figura 7.3

7.3. Lado recto de una hipérbola

Considérese la siguiente gráfica de una hipérbola.

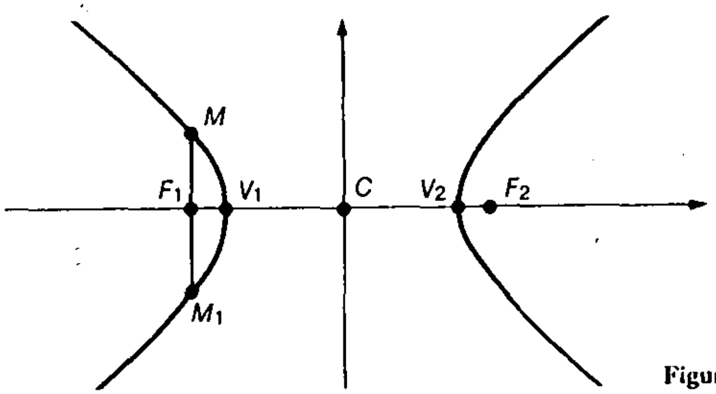


Figura 7.4

El segmento $M M_1$ representado en la gráfica corresponde a una cuerda perpendicular al eje focal y que contiene a un foco de la hipérbola; a esta cuerda se le llama *lado recto* de la hipérbola y su longitud es igual a $2\,b^2/a$

$$\boxed{L.R. = \frac{2\,b^2}{a}}$$

Ejemplo 1

Los vértices de una hipérbola son los puntos $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$ y sus focos los puntos $F_1(0, 5)$ y $F_2(0, -5)$. Determinar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, y la longitud de cada lado recto.

Solución

Como los vértices y los focos están sobre el eje Y, el eje focal coincide con el eje Y. Además, el punto medio del eje transverso está evidentemente en el origen. La ecuación de la hipérbola será de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

La distancia entre los vértices es: $2a = 2(3) = 6$ que es la longitud del eje transverso.

La distancia entre los focos es: $2c = 2(5) = 10$

Por lo tanto:

$$a = 3; \quad c = 5$$

Ahora se aplica la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

y se despeja b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\therefore \quad b = \sqrt{16} = 4$$

La longitud del eje conjugado es:

$$2\,b = 8$$

La ecuación de la hipérbola es entonces:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

La longitud de cada lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} \quad \therefore \quad L.R. = \frac{32}{3}$$

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje focal en el eje Y y que contiene los puntos A **(4, 6)** y B **(1, –3)**.

Solución

Se sustituyen x y y por las coordenadas de los puntos dados en la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

y resultan dos ecuaciones en a y b:

$$\frac{(6)^2}{a^2} - \frac{(4)^2}{b^2} = 1; \quad \frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones formado por las expresiones (1) y (2), se multiplica la expresión (2) por – 4 y se efectúa la suma.

$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$$

$$-\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = -4$$

$$\frac{-12}{b^2} = -3$$

$$\frac{-12}{-3} = b^2 \quad \therefore \quad b^2 = 4$$

Para obtener el valor de a^2 se sustituye $b^2 = 4$ en la expresión (2):

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} = \frac{5}{4} \quad \therefore \quad a^2 = \frac{36}{5}$$

Se sustituyen los valores de a^2 y b^2 en la ecuación original y se simplifica:

$$\frac{5y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$$

7.4. Ecuación de la hipérbola con centro no coincidente en el origen y eje focal paralelo a un eje coordenado

Sea una hipérbola cuyo centro tiene por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje coordenado X, tal que $h \neq 0$ y/o $k \neq 0$. Su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}}$$

Sus focos tienen por coordenadas $F_1(h - c, k)$; $F_2(h + c, k)$ y sus vértices son $V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$ (*véase* la figura 7.5).

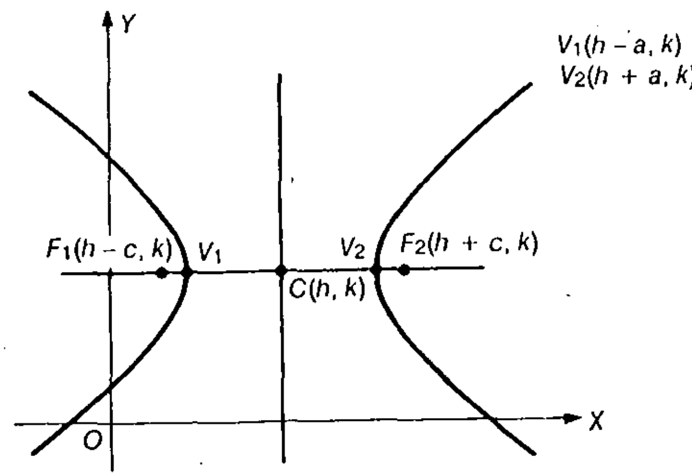


Figura 7.5

Si el centro de la hipérbola es $C\ (h, k)$ y su eje focal es paralelo al eje Y, entonces su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$

Los focos tienen por coordenadas:

$$F_1\,(h, k-c),\ \ F_2\,(h, k+c)$$

y los vértices:

$$V_1\,(h, k-a),\ \ V_2\,(h, k+a)$$

En estos casos la longitud del lado recto es también igual a $\dfrac{2b^2}{a}$

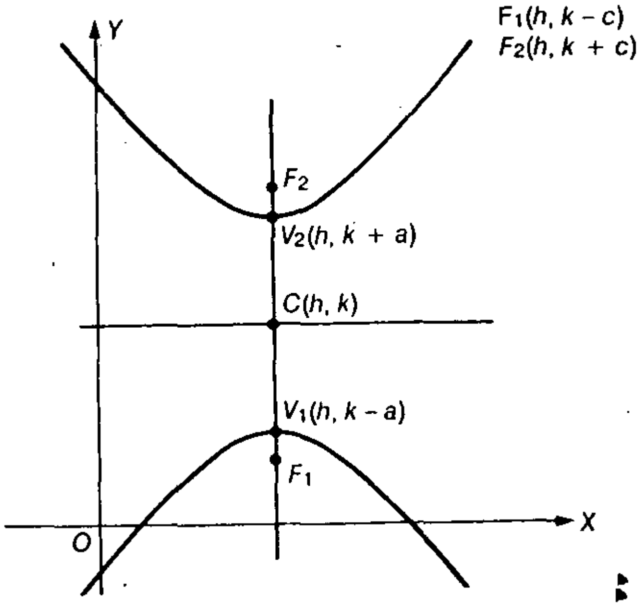


Figura 7.6

Ejemplo 3

Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en $C(-4, 1)$, un vértice en $V(2, 1)$ y semieje conjugado igual a 4.

Solución

La distancia entre el centro y el vértice es 6; luego $a = 6$
El semieje conjugado es 4; luego $b = 4$
Se sustituye en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

y se tiene:

$$\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

Ejemplo 4

Dada la hipérbola $9\,(x-1)^2 - 16\,(y+2)^2 = 144$, determinar su centro, vértices, focos y trazar su gráfica.

Solución

Se escribe la ecuación en la forma:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

De donde el centro es:

$$C\,(1, -2)$$

y los vértices son:

$$V_1\,(-3, -2)$$

$$V_2\,(5, -2)$$

Se calcula c:

$$c = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Por lo que los focos son:

$$F_1\,(-4, -2)\ ,\ F_2\,(6, -2)$$

La gráfica es:

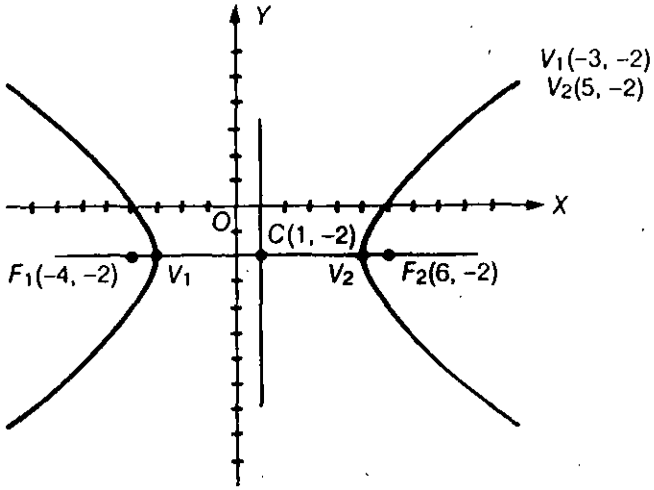


Figura 7.7

7.5. Asíntotas de la hipérbola

En el apartado 2.1.4 se definió qué es una asíntota. La hipérbola tiene dos asíntotas, como se muestra en la siguiente figura.

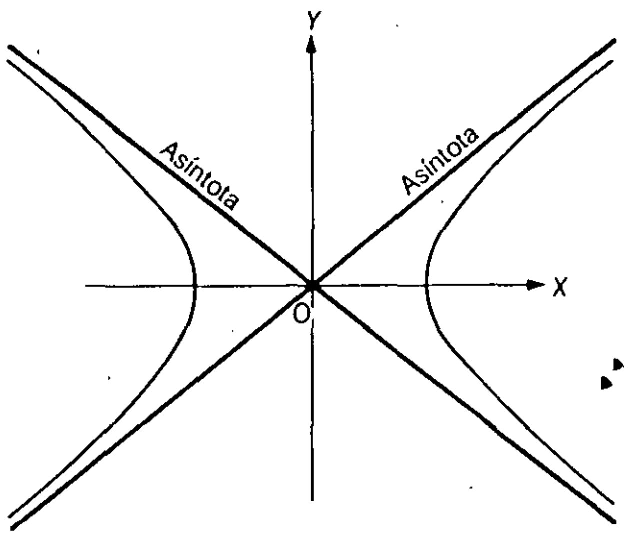


Figura 7.8

Para una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sus asíntotas tienen por ecuaciones:

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x} \quad \boxed{y = -\frac{b}{a}x}$$

Si una hipérbola tiene ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, las asíntotas tienen por ecuaciones:

$$\boxed{y = \frac{a}{b}x} \quad \boxed{y = -\frac{a}{b}x}$$

Si la ecuación de una hipérbola está en la forma $Ax^2 + By^2 + F = 0$, las ecuaciones de las asíntotas pueden obtenerse haciendo $F = 0$ y factorizando la expresión resultante; con cada uno de los factores igualado a cero obtenemos la ecuación de una asíntota.

Ejemplo 5

Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola de la ecuación:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Solución

Dado que el eje transverso coincide con el eje *Y*, las asíntotas tendrán por ecuaciones:

$$y = \frac{a}{b}x \quad y = -\frac{a}{b}x$$

$$a = 4 \quad b = 2$$

$$y = 2x \quad y = -2x$$

Ejemplo 6

Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Solución

Se hace $F = 0$:

$$9x^2 - 4y^2 = 0$$

Se factoriza la expresión anterior:

$$(3x + 2y)(3x + 2y) = 0$$

De donde:

$$3x + 2y = 0 \quad 3x - 2y = 0$$

Ejemplo 7

Determinar la ecuación de la hipérbola que contiene el punto $A(6, 2)$, tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje X y una de sus asíntotas es la recta $2x - 5y = 0$.

Solución

De acuerdo con las ecuaciones de las asíntotas, la otra asíntota es la recta $2x + 5y = 0$.

Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo $k = 0$ en la ecuación $(2x - 5y)(2x + 5y) = k$. O sea:

$$4x^2 - 25y^2 = k$$

Como la hipérbola buscada debe contener el punto $A(6, 2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por lo tanto:

Se sustituyen $x = 6$ y $y = 2$ en la ecuación anterior y se tiene que:

$$k = 44$$

La ecuación de la hipérbola que se busca es:

$$4x^2 - 25y^2 = 44$$

Ejemplo 8

Determinar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola:

$$4x^2 - 9y^2 = 11$$

Solución

Se iguala a cero:

$$4x^2 - 9y^2 = 0$$

Se factoriza:

$$(2x + 3y)(2x - 3y) = 0$$

De donde:

$$(2x + 3y) = 0 \quad \text{y} \quad (2x - 3y) = 0$$

O también:

$$y = -\frac{2}{3}x; \quad y = \frac{2}{3}x$$

Al sustituir estos valores de y en la ecuación de la recta se tiene:

- Para $y = \frac{2}{3}x$

$$2x - 9\left(\frac{2}{3}x\right) + 12 = 0$$

$$2x - \frac{18}{3}x + 12 = 0$$

$$x\left(\frac{6 - 18}{3}\right) + 12 = 0$$

$$x = \frac{-12}{-12}(3) = 3$$

$$\therefore \quad x = 3; \quad y = 2$$

- Para $y = -\frac{2}{3}x$

$$2x - 9\left(-\frac{2}{3}x\right) + 12 = 0$$

$$2x + \frac{18}{3}x + 12 = 0$$

$$x = -\frac{12(3)}{24} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{3}{2}; \; y = 1$$

Así, los puntos son:

$$P_1(3,2) \quad \text{y} \quad P_2\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

7.6. Hipérbola equilátera o rectangular

Un caso particular de la hipérbola se presenta cuando sus ejes conjugado y transverso son de igual longitud. A una hipérbola con esta característica se le llama *equilátera* o *rectangular*.

Si la hipérbola es del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y es equilátera, entonces $a = b$, por lo que su ecuación se puede expresar como $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$; o sea:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado X.

Si la hipérbola tiene centro en el origen y su eje focal coincide con el eje Y, su ecuación es:

$$\boxed{y^2 - x^2 = a^2}$$

Cuando el centro tiene coordenadas (h, k) y el eje focal es paralelo al eje X o al eje Y, las ecuaciones respectivas son:

$$\boxed{(x-h)^2 - (y-k)^2 = a^2}$$

$$\boxed{(y-k)^2 - (x-h)^2 = a^2}$$

Una forma particularmente simple y útil de la ecuación de la hipérbola equilátera es:

$$xy = K \qquad K = \text{constante, diferente de cero}$$

En este caso la hipérbola equilátera tiene su centro en el origen, pero sus ejes están girados 45° con respecto a los ejes coordenados, por lo que las asíntotas de la hipérbola resultan ser estos últimos (*véase* la figura 7.9).

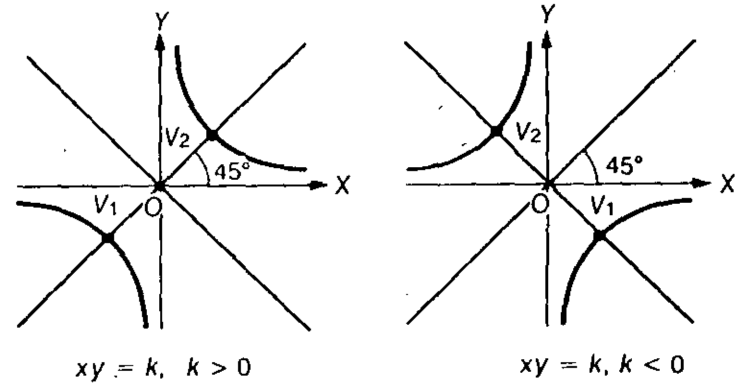


Figura 7.9

Cuando una hipérbola equilátera de este tipo tiene su centro en un punto de coordenadas (h, k), su ecuación queda expresada como:

$$\boxed{(x-h)(y-k) = K} \quad K = \text{constante, diferente de cero}$$

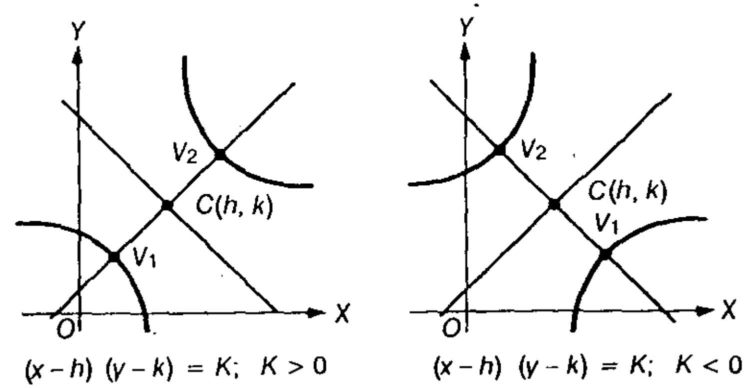


Figura 7.10

Las asíntotas están dadas por las ecuaciones:

$$\boxed{x - h = 0} \quad \boxed{y - k = 0}$$

Ejemplo 9

Determinar la ecuación de la **hipérbola equilátera** que contiene el punto $B(-1, -5)$, tiene por asíntotas los ejes coordenados y centro en el origen.

Solución

$xy = k$; al sustituir en esta ecuación las coordenadas del punto

$$B(-1, -5)$$

se tiene:

$$(-1)(-5) = K$$

$$(-1)(-5) = 5$$

$\therefore$ el valor de K es igual a 5

Y la ecuación de la hipérbola equilátera será:

$$xy = 5$$

Ejemplo 10

Obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación:

$$xy - 4y = 5$$

Solución

Al factorizar se tiene:

$$(x - 4)y = 5$$

de donde las ecuaciones de las asíntotas son:

$$x - 4 = 0; \;\; y = 0$$

7.7. Hipérbolas conjugadas

Sea la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ como se muestra con línea gruesa en la figura 7.11.

Las asíntotas de esta hipérbola son también asíntotas de la hipérbola dibujada con línea delgada y cuya ecuación es:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

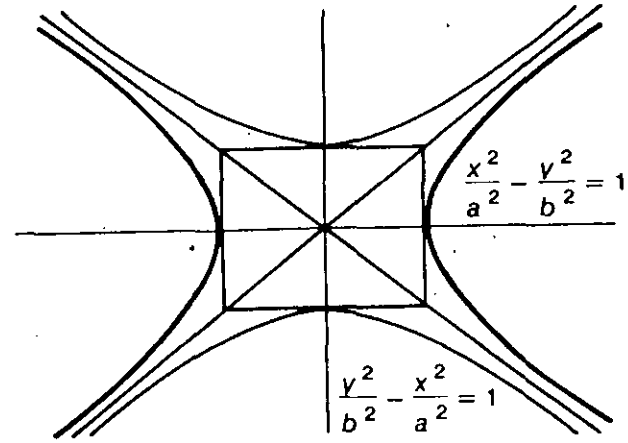


Figura 7.11

Además de tener las mismas asíntotas, entre estas dos hipérbolas se tiene que el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra. En este caso decimos que las hipérbolas son *conjugadas* o que cada hipérbola es la *conjugada* de la otra.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{su conjugada es: } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1; \quad \text{su conjugada es: } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo 11

Escribir la ecuación de la hipérbola conjugada de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Determinar además las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los focos de ambas hipérbolas.

Solución

La ecuación de la hipérbola conjugada es:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

En las dos hipérbolas:

$$c = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Las coordenadas de los focos de la hipérbola dada son:

$$\boxed{(\pm 5, 0)}$$

y los de la conjugada:

$$\boxed{(0, \pm 5)}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son las mismas para las dos hipérbolas:

$$y = \pm \frac{4}{3} x$$

7.8. Ecuación general de la hipérbola

Sea una ecuación de segundo grado en *x*, *y*, del tipo:

$$\boxed{A x^2 + C y^2 + D x + E y + F = 0}$$

Sea: $N = C D^2 + A E^2 - 4 A C F$.

- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $N \neq 0$, A y C son de signo contrario, la ecuación representa una hipérbola con eje focal paralelo o coincidente con el eje X o con el eje Y.
- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $N = 0$, A y C son de signo contrario, la ecuación representa dos rectas que se intersecan.

- Si A y C son de signo contrario y $N = 0$, la ecuación representa un par de rectas que se intersecan en un punto.

Ejemplo 12

Dada la ecuación general:

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

a) Determinar si representa una hipérbola.
b) Obtener su ecuación en la forma ordinaria.
c) Determinar las coordenadas de su centro, de sus focos y sus vértices.
d) Calcular la longitud de su lado recto.
e) Determinar las ecuaciones de sus asíntotas y su hipérbola conjugada.

Solución

a) De la ecuación general tenemos:

$$A = 9, \quad C = -16, \quad D = -18, \quad E = -64, \quad F = -199$$

$$N = C D^2 + A E^2 - 4 A C F = 82\,944 \neq 0$$

$\therefore$ La ecuación representa una hipérbola.

b) Se completan cuadrados y se agrupan términos:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) = 199 - 64 + 9$$

$$9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 = 144$$

$$\therefore \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

c) $C(1, -2)$, $F_1(-4, -2)$, $F_2(6, -2)$, $V_1(-3, -2)$, $V_1(5, -2)$

d) Lado recto $= \dfrac{2b^2}{a}$; L.R. $= \dfrac{9}{2}$

e) $y + 2 = \dfrac{3}{4}(x - 1)$; $\quad y + 2 = -\dfrac{3}{4}(x - 1)$

(asíntota) (asíntota)

Conjugada: $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{16} = 1$

Ejemplo 13

Obtener la representación gráfica de las siguientes hipérbolas:

a) $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad$ *b*) $y = \pm\sqrt{(9/4)(x-2)^2 + 9} - 1$

c) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$

Solución

a) Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$y^2 = x^2 - 4$$

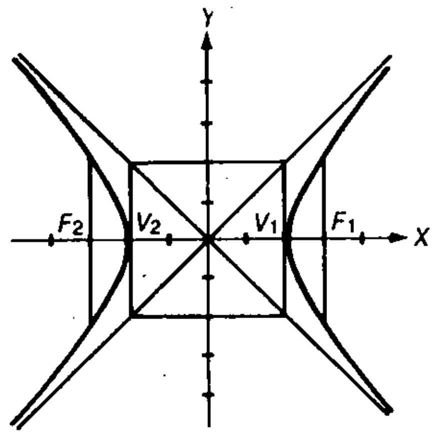
Por lo que la ecuación se puede escribir como:

$$x^2 - y^2 = 4$$

Lo cual resulta ser una hipérbola equilátera cuyos lados miden 2, con centro en el origen y eje focal el eje X, $V_1(2, 0)$, $V_2(-2, 0)$, $F_1(+\sqrt{8}, 0)$ $F_2(-\sqrt{8}, 0)$ y L.R. = 4.

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \pm x$$



b) La ecuación se puede escribir como

$$y + 1 = \pm\sqrt{(9/4)(x-2)^2 + 9}$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$(y+1)^2 = (9/4)(x-2)^2 + 9$$

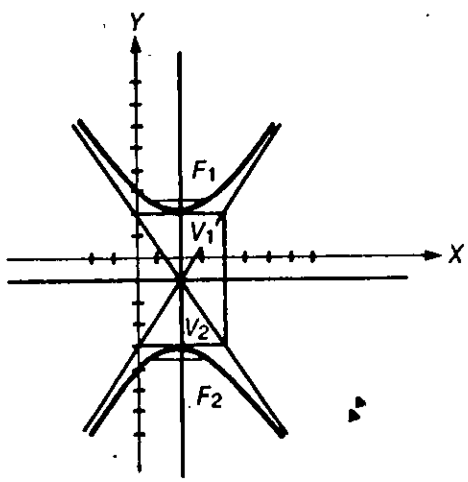
Se multiplica toda la ecuación por 4:

$$4(y+1)^2 = 9(x-2)^2 + 36$$

por lo que

$$4(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 36$$

Se divide toda la ecuación entre 36:



$$\frac{4(y+1)^2}{36} - \frac{9(x-2)^2}{36} = 1$$

por lo que

$$\frac{(4+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

de donde se obtiene:
Eje focal paralelo al eje Y
$V_1(2, 2)$, $V_2(2, -4)$, $F_1(2, -1 + \sqrt{13})$,

$F_2(2, -1 - \sqrt{3})$, L.R. $= \frac{8}{3}$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \frac{3}{2}x - 4; \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

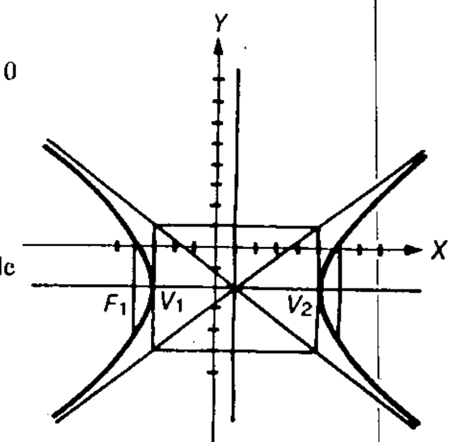
c) En el ejemplo 12, la hipérbola

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

se transformó en la ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)}{9} = 1$$

Con los datos anteriores se puede obtener la gráfica de la derecha.



Ejercicios

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre un eje coordenado.

1. Determinar la ecuación de la hipérbola de ejes coincidentes con los coordenados, de centro en el origen, si la longitud del lado recto es 18 y la distancia entre los focos es 12.

2. Determinar la ecuación de la hipérbola de centro en el origen, ejes coincidentes con los ejes coordenados y que contiene los puntos $A(3, 1)$ y $B(9, 5)$.

Ecuación de la hipérbola con centro en (h, k)

3. Dada la hipérbola $(x-2)^2 - 9(y-2)^2 = 9$

a) Encontrar las coordenadas de **su centro.**
b) Encontrar las coordenadas de **sus focos.**
c) Encontrar las coordenadas de **sus vértices.**
d) Calcular la longitud de su lado recto.
e) Trazar su gráfica.

4. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F_1(-6, -4)$ y $F_2(2, -4)$ es igual a 6.

Asíntotas de la hipérbola

5. Determinar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas, la longitud del lado recto y la representación gráfica de la hipérbola:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

6. Dada la hipérbola $(x-2)^2 - 9(y-2)^2 = 9$, obtener las ecuaciones de sus asíntotas.

7. Obtener la ecuación de la hipérbola que contiene el punto $A(4, 6)$ y cuyas asíntotas son:

$$y = \pm\sqrt{3}\,x$$

Hipérbola equilátera o rectangular

8. Obtener la ecuación de la hipérbola equilátera que contiene el punto $S(3, 1)$ y tiene por asíntotas la recta $x - 1 = 0$ y el eje de las X.

9. Obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $xy = 1$.

Hipérbolas conjugadas

10. Determinar las coordenadas de los vértices y de los focos de la hipérbola conjugada a la hipérbola de ecuación:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

Ecuación general de la hipérbola

11. Dada la ecuación general de la hipérbola:

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 113 = 0$$

Determinar:
a) Su ecuación en la forma ordinaria.
b) Las coordenadas de su centro, vértices y focos.
c) La longitud de su lado recto.
d) Las ecuaciones de sus asíntotas.
e) La ecuación de la hipérbola conjugada.

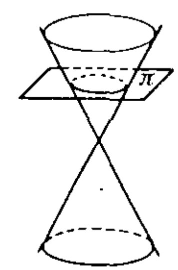
MÓDULO 8. SECCIONES PLANAS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

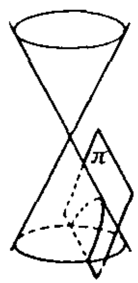
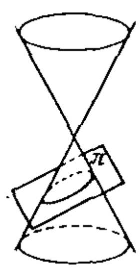
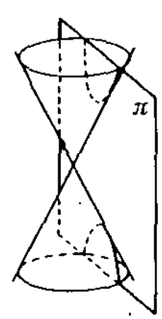
- *A partir de la ecuación general de segundo grado, identificará el tipo de cónica.*
- *Graficará el tipo de cónica a partir de la ecuación dada.*

Cuadro sinóptico

Condición geométrica	**Representación analítica**
• *Circunferencia*: Plano π perpendicular al eje del cono.	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
• *Parábola*: Plano π paralelo a una posición de la generatriz.	
• *Elipse*: Plano π forma un ángulo α con la horizontal y no paralelo a la generatriz.	
• *Hipérbola*: Plano π paralelo al eje del cono.	

Cuadro sinóptico

Continuación

Condición geométrica	Representación analítica
• Ecuación general de segundo grado:	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
° Indicador:	$I = B^2 - 4AC$
• Si $B = 0$	
° Circunferencia, un punto o ningún lugar geométrico.	$A = C$
° Parábola, dos rectas o ningún lugar geométrico.	$A = 0$ o $C = 0$
° Elipse, un punto o ningún lugar geométrico.	$A \neq 0$, $C \neq 0$, $A \neq C$ y de signos iguales.
° Hipérbola, o dos rectas que se intersecan en un punto.	$A \neq 0$, $C \neq 0$ y de signos contrarios.
• Si $B \neq 0$	
° Parábola, dos rectas o ningún lugar geométrico.	$I = 0$
° Elipse, un punto o ningún lugar geométrico.	$I < 0$
° Hipérbola o dos rectas que se intersecan en un punto.	$I > 0$

8.1. Secciones planas de un cono circular recto

El nombre de *secciones cónicas*, o de *cónicas* simplemente, con que se designan la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, tiene su origen en el hecho de que estas curvas se obtienen como secciones planas de un cono circular recto cortado por un plano.

Considérese un cono circular recto de vértice V, cortado por un plano π que no pase por el vértice. Las secciones cónicas se obtienen dependiendo de la posición que tome el plano π al cortar el cono.

Si el plano π es perpendicular al eje del cono, o sea, toma una posición horizontal, la sección obtenida será la circunferencia, como se puede observar en la figura 8.1.

Si el plano π forma un ángulo α con la horizontal, de tal manera que corte la base del cono, o sea que el plano sea paralelo a una posición de la generatriz del cono, la sección obtenida es la parábola, como se muestra en la figura 8.2.

Si el plano π forma un ángulo α con la horizontal de tal manera que éste no sea paralelo a una sola posición de la generatriz del cono, la sección que se obtiene es la elipse, como se observa en la figura 8.3.

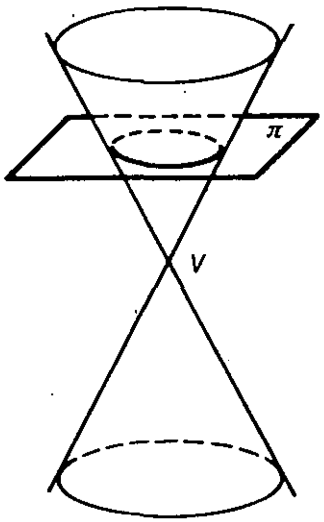


Figura 8.1

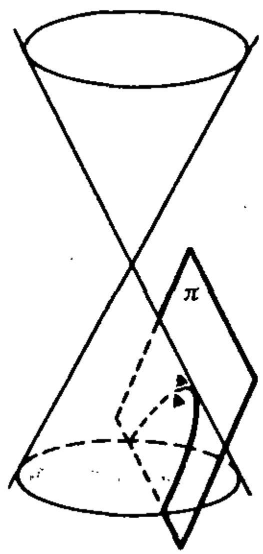


Figura 8.2

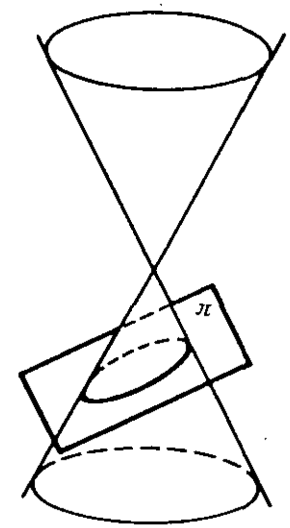


Figura 8.3

Si el plano π es perpendicular a la horizontal, o sea, es paralelo al eje del cono, la sección que se obtiene es la hipérbola, como se muestra en la figura 8.4.

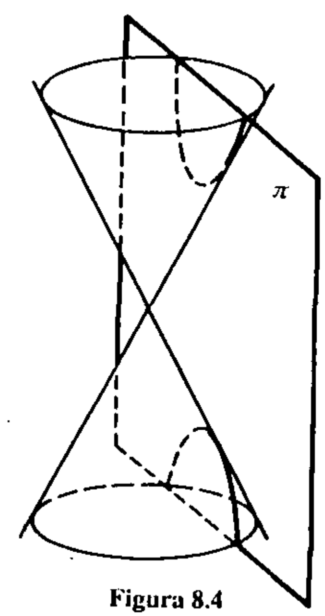


Figura 8.4

8.2. Ecuación general de segundo grado

A una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

se le llama ecuación general de **segundo grado**. Para el estudio de esta ecuación podemos considerar dos casos **básicos**:

1. No existe término en xy, es decir, $B = 0$. Para este caso la ecuación puede representar una cónica cuyos ejes son paralelos o coincidentes con los ejes coordenados, de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si $A = C$ la ecuación representa una circunferencia, un punto o ningún lugar geométrico.
- Si $A = 0$ o $C = 0$, representa una parábola, dos rectas coincidentes, dos rectas paralelas o ningún lugar geométrico.
- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $A \neq C$ y tienen el mismo signo, representa una elipse, un punto o ningún lugar geométrico.
- Si $A \neq 0$, $C \neq 0$ y tienen signo contrario, representa una hipérbola o dos rectas que se intersecan.

2. Si existe el término xy, es decir, $B \neq 0$, la ecuación puede representar una cónica cuyos ejes no son paralelos ni coincidentes con los ejes coordenados, conforme a las siguientes condiciones:

Sea $I = B^2 - 4AC$, llamado indicador o *discriminante*.

- Si $I = 0$ la ecuación representa una parábola, dos rectas paralelas, dos rectas coincidentes o ningún lugar geométrico.
- Si $I < 0$, representa una elipse, un punto o ningún lugar geométrico.
- Si $I > 0$, representa una hipérbola o dos rectas que se intersecan en un punto.

Ejemplo 1

Cada una de las siguientes ecuaciones representa una cónica; determinar de qué cónica se trata.

Solución

$a)$ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$
$A = 1$, $C = 1$, $\therefore\ A = C$
La ecuación representa una circunferencia.
$b)$ $x^2 + 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$
$A = 1$, $C = -9$, $\therefore\ A \neq C$ (con signos contrarios)
La ecuación representa una hipérbola.
$c)$ $y^2 + 4x \quad y + 9 = 0$

$A = 0$, $C = 1$
Por lo tanto, al ser cero el coeficiente de x^2, la ecuación representa una parábola.
$d)$ $x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - \sqrt{3}\,x + y = 0$
$A = 1$, $B = -2\sqrt{3}$, $C = 3$
Se calcula I:
$I = 12 - (4)(1)(3) = 0$
La ecuación representa una parábola.
$e)$ $4x^2 - 2xy + 3y^2 = 18$
$A = 4$, $B = -2$, $C = 3$
$I = B^2 - 4AC$; $I = 4 - (4)(4)(3) = -44 < 0$
Por lo tanto la ecuación representa una elipse.

Ejercicios

Forma de la ecuación general de segundo grado

1. Dadas las siguientes ecuaciones, decir qué cónica representan:

$a)$ $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$
$b)$ $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$
$c)$ $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$
$d)$ $8x^2 - 25xy + 18y^2 - 104x + 52y + 162 = 0$

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

A. *En cada inciso, escriba una* V *o una* F *dentro del paréntesis según la afirmación sea verdadera o falsa respectivamente.*

a) Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. ( )

b) Una recta queda determinada completamente si se conoce cuando menos una de sus condiciones. ( )

c) Dada la ecuación general de una circunferencia, su radio se puede conocer mediante la expresión: ( )

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

d) La ecuación de una parábola puede ser de la forma: ( )

$$y^2 = 4px$$

e) La ecuación general de una parábola puede ser de la forma: ( )

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

f) Una elipse queda completamente definida si se conocen al menos dos de sus condiciones. ( )

g) Hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. ( )

h) La ecuación general de segundo grado es de la forma: ( )

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

B. *Seleccione la respuesta correcta marcando una × en el paréntesis respectivo.*

1. El ángulo entre dos rectas está dado por la expresión:

   a) $\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 - m_2}$ ( )

   b) $\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ( )

   c) $\tan\alpha = \dfrac{(m_2 - m_1)^2}{1 + \sqrt{m_1 m_2}}$ ( )

2. La forma pendiente-ordenada al origen de la recta es:

   a) $y = mx + b$ ( )

   b) $y - y_1 = m(x - x_1)$ ( )

   c) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ( )

3. La ecuación de la recta que contiene dos puntos conocidos es:

   a) $y = mx + b$ ( )

   b) $y - y_1 = m(x - x_1)$ ( )

   c) $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ( )

4. La ecuación de la circunferencia de centro (h, k) y radio r es:

   a) $(x^2 - h) + (y^2 - k) = r^2$ ( )

   b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ( )

   c) $\dfrac{(x - h)^2}{a^2} + \dfrac{(y - k)^2}{b^2} = r^2$ ( )

5. Dada la ecuación general de la circunferencia:

   $$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   la coordenadas de su centro son:

   a) $\left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$ ( )

   b) $\left(-\dfrac{F}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$ ( )

   c) $\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{C}{2}\right)$ ( )

6. La ecuación de una parábola puede ser:

   a) $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ( )

   b) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ( )

   c) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ( )

7. Para determinar todas las características de una elipse al menos se deben conocer:

   a) Las coordenadas de dos puntos. ( )

   b) Las coordenadas de dos de sus puntos y de su centro. ( )

   c) Las coordenadas de un punto y de uno de los focos. ( )

8. La ecuación general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una hipérbola o dos rectas que se intersecan si:

   a) $A = C$ tienen el mismo signo. ( )

   b) A y C tienen signos contrarios y $A \neq 0, C \neq 0$ ( )

   c) $A = 0, C \neq 0$ ( )

9. Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola con centro en el origen y eje transverso el X, son:

   a) $y = \pm \dfrac{b}{a}x$ ( )

   b) $y = \pm \dfrac{a}{b}x$ ( )

   c) $y = \pm bx$ ( )

C. *Resuelva los siguientes problemas.*

1. Si el punto (9, 2) divide el segmento que determinan los puntos $P_1(6, 8)$ y $P_2(x, y)$ en la relación $r = 3/7$, determinar las coordenadas de P_2.

2. Dada la ecuación $x^2y^2 + 4x^2 - 9y^2 = 0$, trazar su gráfica.

3. Determinar la ecuación de la recta que contiene el punto A (2, 3) y cuya abscisa al origen es el doble de la ordenada al origen.

4. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje X y que contiene los puntos A (−2, 3) y B (4, 5).

5. Dada la ecuación de la parábola $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$, determinar:
   a) Las coordenadas del vértice.
   b) Las coordenadas del foco.
   c) La longitud del lado recto.

6. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos $(2, -3)$ y $(2, 7)$ es igual a 12.

7. Dada la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$, determinar:
   a) Su centro.
   b) Las coordenadas de sus vértices.
   c) Las coordenadas de los focos.
   d) Las ecuaciones de las asíntotas.
   e) Su gráfica.

8. *a*) Determinar la ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, un vértice en $(3, 0)$ y ecuación de una asíntota $2x - 3y = 0$.
   b) Determinar además la ecuación de la hipérbola conjugada del inciso *a*).

9. Dadas las siguientes ecuaciones, decir qué cónicas representan:
   a) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
   b) $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$
   c) $7x^2 + 7y^2 - 10x - 10y - 12 = 0$
   d) $3x^2 + 12xy + 12y^2 = 27$

10. Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 1)$ y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$.

SOLUCIONES

MÓDULO 1 (págs. 13 – 20)

1. Todos sus lados son de igual longitud $= 6\sqrt{2} = 8.485$
2. Como $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = 6\sqrt{5} = 13.416$, los puntos son colineales.
3. Dos soluciones: 2, – 6
4. (–1, 4), (5, 6), (3, 2)

MÓDULO 2 (págs. 21 – 33)

1. *a*) $x^2 + 2x - y + 3 = 0 \Rightarrow y - 2 = (x + 1)^2$

   Intersección con el eje Y: $y = 3$

   Intersección con el eje X: no existe.

x	y
–4	11
–3	6
–2	3
–1	2
0	3
1	6
2	11

b) $xy - 2y - x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x}{x-2}$

Intersección con el eje Y: $y = 0$

Intersección con el eje X: $x = 0$

Asíntotas en $x = 2$

Asíntotas en $y = 1$

x	y
−4	2/3
−3	3/5
−2	1/2
−1	1/3
0	0
1	−1
2	Asínt.
3	3
4	2

c) $x^2y + 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{8}{x^2+4}$

Continua para toda x real.

Asíntota en $y = 0$

x	y
−4	2/5
−3	8/13
−2	1
−1	8/5
0	2
1	8/5
2	1

d) $xy^2 - 9x - y - 1 = 0; x(y^2 - 9) - y - 1 = 0$

$x(y^2 - 9) = y + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{y^2-9}$

Intersección con el eje Y: $y = -1$

Intersección con el eje X: $x = -\dfrac{1}{9}$

Asíntota en $y = \pm 3$

x	y
0.2	−2
0	−1
−0.11	0
−0.25	1
−0.6	2
Asínt.	3

MÓDULO 3 (págs. 35 – 55)

1. a) $m = 1, \ \theta = 45°$

   b) $m = \infty, \ \theta = 90°$

   c) $m = 0, \ \theta = 0°$

2. $x - \dfrac{1}{3} = 0$

3. $x - y + 3 = 0$

4. a) $y + 1 = 0$

   b) $4x + 3y - 9 = 0$

5. $2x - y = 0, \ 3x - 4y + 10 = 0, \ 7x + 2y - 56 = 0, \ y = 0$

6. $9x - 7y - 24 = 0$

7. $4x + 3y - 15 = 0$

8. $k = \dfrac{4}{3}$

9. $d = -28/5$. La distancia es 28/5. El signo negativo indica que el punto y el origen están del mismo lado de la recta.

10. $d = -\dfrac{10}{\sqrt{13}}$

11. Para que los puntos dados sean los vértices de un paralelogramo necesita cumplirse que:

$m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4$, donde m_1 es la pendiente del segmento $\overline{P_1P_2}$; m_2 es la del segmento $\overline{P_3P_4}$, m_3 es la del $\overline{P_2P_3}$ y m_4 es la del $\overline{P_1P_4}$.

12. $C = 40° 36'$

MÓDULO 4 (págs. 57 – 67)

1. a) $x^2 + y^2 = 1$
   b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$
   c) $x^2 + (y+4)^2 = 81$
   d) $(x-1)^2 + y^2 = 9$
2. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 41$
3. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 41$
4. a) $c(0,0)$, $r = 0$ Representa un punto.
   b) $c(4,-5)$, $r = \sqrt{53}$
   c) $c\left(4, \frac{7}{2}\right)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{113}$
   d) No es real.
5. $x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0$

MÓDULO 5 (págs. 69 – 87)

1. a) Foco $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; L.R. = 6; directriz: $x + \frac{3}{2} = 0$
   b) Foco $(0, 2)$; L.R. = 8; directriz: $y + 2 = 0$
2. $y^2 - 12x = 0$
3. $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$
4. Dos soluciones:
   a) $y^2 + 2y - 6x - 36 = 0$
   b) $y^2 + 2y + 6x - 14 = 0$
5. Vértice $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, foco $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, directriz: $2x + 1 = 0$

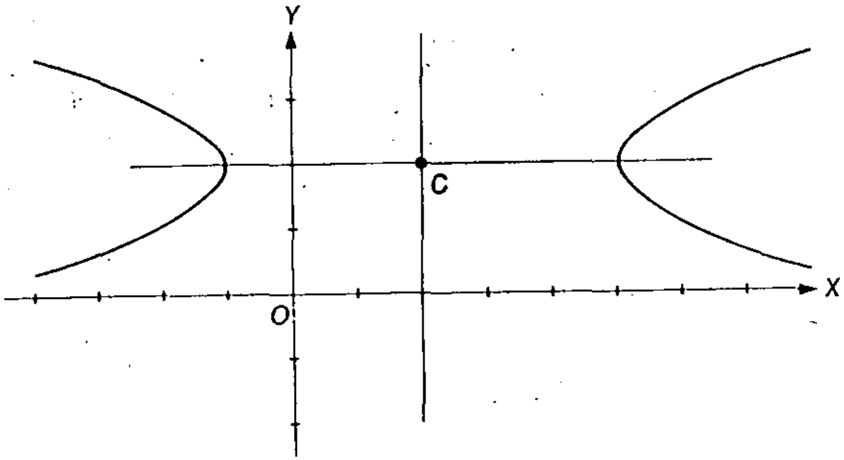
MÓDULO 6 (págs. 89 – 98)

1. a) $a = 13$, $b = 12$, $F(\pm 5,0)$, L.R. $= \frac{288}{13}$
   b) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $F(0, \pm 2)$, $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, L.R. $= \frac{8\sqrt{3}}{3}$
2. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
   b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$
3. $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
4. $c(2,-3)$, $a = 4$, $b = 3$, $F(2 \pm \sqrt{7}, -3)$, L.R. $= \frac{9}{2}$
5. a) Sí está definida.
   b) $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$
   c) $c(6, -4)$
   d) $a = 6$, $b = 4$
   e) $F(6 \pm 2\sqrt{5}, -4)$
   f) L.R. $= \frac{16}{3}$

MÓDULO 7 (págs. 101 – 123)

1. Dos soluciones:
   a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$
   b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$
2. $x^2 - 3y^2 = 6$
3. a) $C(2, 2)$
   b) $F_1(2 + \sqrt{10}, 2)$, $F(2 - \sqrt{10}, 2)$
   c) $V_1(5, 2)$, $V_2(-1, 2)$
   d) L.R. $= \frac{2}{3}$

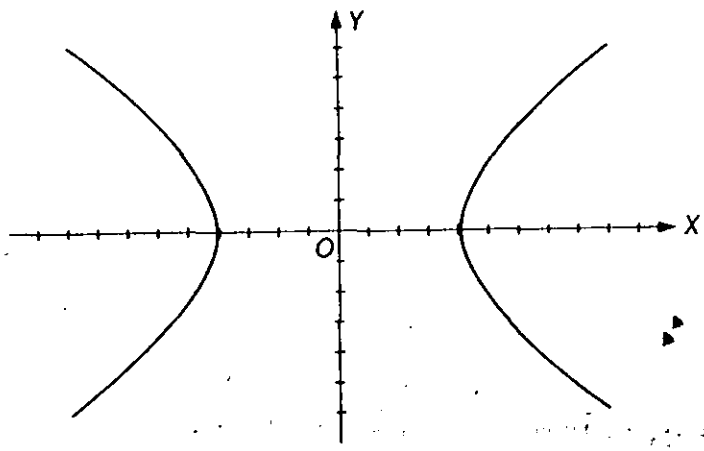
e) Gráfica:



4. $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{7} = 1$

5. $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$, $F_1(+5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ $y = \pm \dfrac{3}{4}x$

L.R. $= \dfrac{9}{2}$



6. $y - 2 = \pm \dfrac{1}{3}(x - 2)$

7. $3x^2 - y^2 = 12$

8. $y = \dfrac{2}{x - 1}$

9. $x = 0$; $y = 0$

10. $V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$, $F_1(0, \sqrt{13})$, $F_2(0, -\sqrt{13})$

11. *a*) $\dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$

b) $C(3, -1)$, $V_1(3, +2)$, $V_2(3, -4)$, $F_1(3, -1+\sqrt{13})$, $F_2(3, -1-\sqrt{13})$

c) L.R. $= \dfrac{8}{3}$

d) $3x - 2y - 11 = 0$, $3x + 2y - 11 = 0$

e) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

MÓDULO 8 (págs. 127 – 133)

Forma de la ecuación general de segundo grado

1. *a*) Elipse.
   b) Hipérbola.
   c) Parábola.
   d) Hipérbola.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN (págs. 135 – 138)

A

a) Verdadero
b) Falso
c) Verdadero
d) Verdadero
e) Verdadero
f) Falso
g) Falso
h) Verdadero

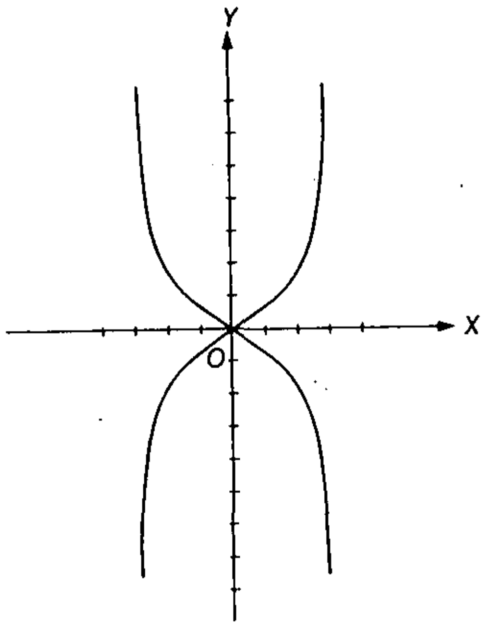
B

1. *b*
2. *a*
6. *b*
7. *b*

3. *c*
4. *b*
5. *a*
8. *b*
9. *a*

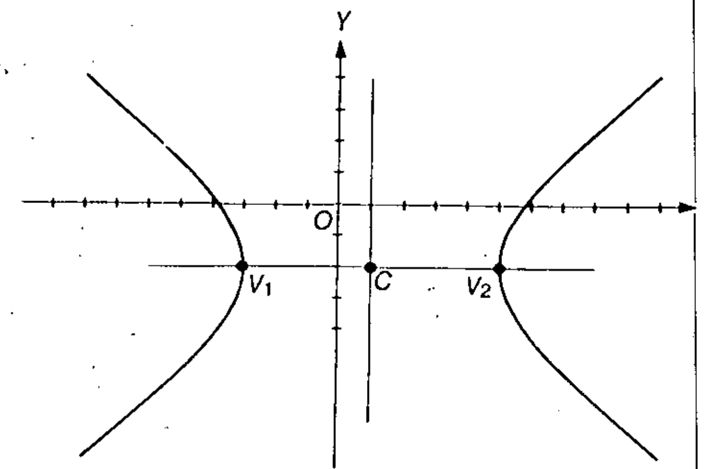
C

1. $P_2(13, -6)$
2. Gráfica:



3. $x + 2y - 8 = 0$
4. $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$
5. *a*) V(3/2, 2)
   b) F(3, 2)
   c) L.R. = 6
6. $36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$
7. *a*) $C(1, -2)$
   b) $V_1(-3, -2), V_2(5, -2)$
   c) $F_1(-4, -2), F_2(6, -2)$

   d) $y + 2 = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$
   e) Gráfica:



8. *a*) $4x^2 - 9y^2 = 36$
   b) $9y^2 - 4x^2 = 36$
9. *a*) Elipse
   b) Hipérbola
   c) Circunferencia
   d) Parábola
10. $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS DE ACTUALIZACION Y REGULARIZACION EN

MATEMATICAS

del 24 de octubre al 14 de diciembre de 1994.

DIRECTORIO DE ALUMNOS

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

1.- ARIAS GUZMAN CARLOS
C. Enrique Pordes Mangel # 4109
Col. Asturias, C.P. 06090
Tel: 530 73 35

2.- BERNAL FLORES Jesús Cuauhtémoc
Monte Alvan # 514
Col. Narvarte
Tel: 539 87 23

3.- BETTO ZAMORA Miguel
Emiliano Zapata # 3
San Jerónimo Aculco, Magdalena Contreras
C.P. 10400
Tel: 595 65 74

4.- CABALLERO CARDOSO Horacio Francisco
Plaza Madrid # 16, Col. Roma
C.P. 06700
Tel: 514 42 94

5.- CANO RAMIREZ Samuel
Telecomunicaciones de México.
Analista
Lázaro Cardenas 567, Col. Narvarte
Tel: 629 13 31

6.- CORTES CUEVAS Hector Omar
Elisa # 49, Col. Nativitas, Benito Juárez
C.P. 03500
Tel: 579 21 95

7.- DURAN MORA Arturo
Atizapán # 50, Col. Vergel de Coyoacán, Tlalpan
C.P. 14340
Tel: 677 36 96

Palacio de Mineria Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

CURSOS DE ACTUALIZACION Y REGULARIZACION EN

MATEMATICAS

del 24 de octubre al 14 de diciembre de 1994.

DIRECTORIO DE ALUMNOS

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

8.- FIGUEROA CAMPOS Silvia
Preparatoria No. 8, UNAM
Profesor
Esq. Centenario y F. de P. Miranda, Plateros
Tel: 593 38 19

9.- GARCIA RONQUILLO Rafael
Calz. de Guadalupe L-17, Mzana. 234
Ampl. San Lorenzo Tololingo, Naucalpan de Juárez

10.- GONZALEZ ROBLES Yuri Adrian
Cda. 1a. de Alberta Salinas 61, Col. Aviación Civil
C.P. 15740
Tel: 763 83 68

11.- LOPEZ RIVAS Gustavo
Trabajador Independiente
Dibujante
Novedades 30, Col. Clavería, C. P. 02080
Tel: 399 68 57

12.- LOREDO GUALITO Cesar Alejandro
Bosques de Bohemia Calle 16 # 14
Bosques del Lago, Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx.
C.P. 54766
Tel: 877 44 00

13.- MARTINEZ CARRANZA José Trinidad
Calle 1 # 255, Col. Esperanza, Nezahualcoyotl
C.P. 57800
Tel: 731 53 67

14.- MARTINEZ FLORES Juan Pablo Bricio
Retorno 105 # 86, Unidad Modelo, Iztapalapa
C.P. 09089
Tel: 581 49 87

CURSOS DE ACTUALIZACION Y REGULARIZACION EN

MATEMATICAS

del 24 de octubre al 14 de diciembre de 1994.

DIRECTORIO DE ALUMNOS

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

15.- MARTINEZ VERA Jorge
INDUSTRIAS UNIDAS S.A.
Obrero
Oriente 171 # 398, Col. Aragón
Tel: 760 60 00

16.- MORENO ISLAS Juana Beatríz
Nayarit 2 Bis, Depto. 4
Col. Roma Sur, Cuauhtémos
C.P. 06760
Tel: 584 74 91

17.- MUÑOZ GUTIERREZ Dolores

18.- PASTRANA DE LOS ANGELES Saúl
C. San Benjamín Mzana. 526, Lt. 10
Col. Santa Ursula Coapa, Coyoacán
C.P. 04850
Tel: 618 10 95

19.- PIÑA JAEN Israel
Edificio 70 entrada A, Dpto. 102
Unidad Lindavista Vallejo
C.P. 07720
Tel: 368 93 83

20.- PRINCE GASCA Joel
Colegio Nacional de Pentathletas
Auziliar de Instructor
Isabel la Catiolica 752, Col. Alamos
Tel: 590 09 70 y 590 03 40

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS DE ACTUALIZACION Y REGULARIZACION EN

MATEMATICAS

del 24 de octubre al 14 de diciembre de 1994.

DIRECTORIO DE ALUMNOS

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

21.- PRINCE GASCA Leticia
Colegio Nacional de Pentatletas
Auxiliar de Instructor
Isabel la Católica 752, Col. Alamos
Tel: 590 09 70 y 590 03 40

22.- QUINTANA CASTILLA Adriana Isela
Av. del Rosal 290 Edif. 24- 401
Molino de Rosas, Alvaro obregón
C.P. 01470
Tel: 651 88 77

23.- RANGEL RANGEL María Isabel
Unidad Sra. Cruz Meyehualco
Calle 53 # 151, Iztapalapa
Tel: 693 53 10

24.- RECILLA DEL RIO Guillermo
Esc. Sec. No. 6, Diurna
Profesor de Francés
San Idelfonso No. 6, Col. Centro
Tel: 681 07 07

25.- RODRIGUEZ REYES Renata I.
Valle de Bavispe No. 26-4, Valle de Aragón Nezahualcoyotl
C.P. 57100
Tel: 712 23 70

26.-RUIZ ORTIZ Ramiro
1a. Cda. Oriente 108, Lt. 30, Mz. 3
Col. Ramos Millán, Iztacalco
C.P. 08030
Tel: 649 69 52

27.- SANCHEZ ESTRADA Juan José
Oriente 20 # 333, Col. Reforma Nezahualcoyotl
C.P. 57840
Tel: 855 25 82

CURSOS DE ACTUALIZACION Y REGULARIZACION EN

MATEMATICAS

del 24 de octubre al 14 de diciembre de 1994.

CURSOS DE ALUMNOS

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

28.- SUAREZ PEREZ Alma Aidé
Av. Olivar No. 20, Col. El Olivar, Naucalpan
Tel: 576 85 02

29.- ZARATE OROZCO Julio
HDA. PEÑUELAS 45, Floresta Coyoacán, Tlalpan
C.P. 14310
Tel: 678 10 05

30.- TELLEZ BALLESTEROS Susana Casy
Rinconada Sta. Teresa 100
Insurgentes Cuicuilco, Tlalpan
C.P. 14010
Tel: 606 29 34