UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

CUADERNO DE TRABAJO DE
ALGEBRA LINEAL

HECTOR FEDERICO GODINEZ C.
HECTOR CARLOS HERNANDEZ G.
ABEL HERRERA C.
GUILLERMO MONSIVAIS G.

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS

FI/DCB/85-046

CUADERNO DE TRABAJO DE ALGEBRA LINEAL

2345678901 POL-82 8012456793

Impreso en México Printed in Mexico

Indice

Prólogo

Este Cuaderno de Trabajo tiene como propósitos fundamentales constituir un complemento a la clase de Algebra Lineal para los alumnos que cursan esta asignatura en la Facultad de Ingeniería y un material auxiliar de la enseñanza para el profesor que la imparte.

Cada uno de los capítulos consta de las siguientes partes:

Un examen de diagnóstico con preguntas y ejercicios que involucran antecedentes indispensables para estudiar el capítulo respectivo.

Se presenta luego, una lista de los objetivos de aprendizaje más importantes que debe alcanzar el estudiante al finalizar el capítulo y una introducción del mismo.

Después, uno o más "bloques de capítulo". Cada "bloque" consiste en la explicación de algún tema importante del capítulo, con lecturas, actividades complementarias y ejercicios propuestos que induzcan a la comprensión y análisis de ese tema. Conviene aclarar que en este Cuaderno no se presentan todos los conceptos de cada capítulo, sin embargo, se ha tratado que los ejercicios propuestos sí incluyan a todos.

Posteriormente, una miscelánea de ejercicios de todo el capítulo, de un grado de dificultad mayor a los ejercicios de bloque propuestos.

Para finalizar se propone al estudiante un examen del capítulo correspondiente, a modo de autoevaluación.

Al final del Cuaderno se presentan las respuestas de los exámenes de diagnóstico, de los ejercicios de bloque, de los ejercicios de miscelánea y de los exámenes de capítulo.

Se sugiere usar el cuaderno de la siguiente manera para cada uno de los capítulos:

1) Resolver el examen de diagnóstico. Si existen dudas de concepto, leer la bibliografía que ahí mismo se recomienda antes de seguir adelante.

2) Leer los productos de aprendizaje y tratar de alcanzarlos mediante el estudio del capítulo.

3) Leer la introducción y estudiar los bloques del capítulo. Se sugiere realizar las diversas actividades que ahí se señalan y resolver los ejercicios propuestos. Si el estudiante no resuelve correctamente estos ejercicios, sería adecuado que volviera a estudiar el tema.

4) Resolver la miscelánea de ejercicios, la cual se propone para cuando se quiera profundizar en el uso y aplicación de los conceptos del capítulo.

5) Resolver el examen de capítulo, el cual tiene una cierta puntuación y un tiempo máximo de solución que permitirán al estudiante darse cuenta de su nivel de preparación en el tema. Se considera que una calificación de 80 o mayor significa un buen conocimiento del capítulo, si la calificación es menor de 80 y mayor que 60 sería conveniente reforzar los conocimientos del tema, y para una calificación menor que 60 sería recomendable volver a estudiar el capítulo.

La presente obra es la culminación del trabajo iniciado por los profesores ING. HECTOR FEDERICO GODINEZ CABRERA, ING. FRANCISCO JAVIER GONZALEZ TERAN, M. I. VICTOR PALENCIA GOMEZ, M. I. FRANCISCO SANCHEZ ARREDONDO, ING. EDUARDO SOLAR GONZALEZ, para la elaboración de un Cuaderno de Trabajo de la asignatura de Algebra.

Al modificarse los programas de las asignaturas surgió la que ahora se llama Algebra Lineal, por lo que fue necesario adaptar el material existente a los nuevos temas.

La elaboración de este Cuaderno de Trabajo se debe a los profesores:

ING. HECTOR FEDERICO GODINEZ CABRERA
ING. HECTOR CARLOS HERNANDEZ GARCIA
ING. ABEL HERRERA CAMACHO
DR. GUILLERMO MONSIVAIS GALINDO

A todos los profesores citados se agradece su colaboración y dedicación entusiasta, así como al profesor ING. CARLOS GABRIEL VENEGAS ESPINOZA por la solución de los ejercicios y a la Srita. ESTELA NORA RUEDAS BAÑUELOS por su dedicación al mecanografiar el manuscrito.

Conscientes de que este Cuaderno puede tener fallas, agradeceremos los comentarios y sugerencias que nos hagan llegar profesores y alumnos.

Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas Básicas

1 9 8 5

CAPITULO I

Sistemas de Ecuaciones Lineales

"¿Cuál es la diferencia entre la solución de un sistema de ecuaciones lineales y la solución de un caso de Sherlock Holmes?"

Examen Diagnóstico

1.- Sea la ecuación lineal: $3x - 4y + z = 0$. Escribe en el paréntesis siguiente la letra que corresponda a una solución de esta ecuación _____ ( )

a)	b)	c)	d)
$x = 1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 3$
$y = 0$	$y = 2$	$y = 1$	$y = -4$
$z = 0$	$z = 1$	$z = 1$	$z = 1$

2.- Resuelve por sustitución el siguiente sistema de ecuaciones y marca con una "X" el paréntesis correspondiente al resultado correcto.

$$2x + 2y = 10$$
$$x - 2y = -1$$

( ) $x = 6$, $y = -1$ ( ) $x = 3$, $y = 2$ ( ) $x = 4$, $y = 3/2$

3.- Resuelve por igualación el siguiente sistema de ecuaciones lineales y marca con una "X" el paréntesis correspondiente al resultado correcto.

$$x - 4y = 3$$
$$3x + 4y = 1$$

( ) $x = 2$, $y = 5/4$ ( ) $x = 1$, $y = -1/2$ ( ) $x = -1$, $y = -1$

4.- Completa correctamente la siguiente expresión. Si tengo once monedas repartidas en valores de uno y cinco pesos, cuya suma da un total de 39 pesos, entonces el número de monedas de \$ 1 es ______ y de \$ 5 es ______.

5.- Un bote navegando a velocidad constante en favor de la corriente recorre 12 km en 3 horas y navegando en contra de la corriente recorre la misma distancia en 6 horas. ¿Cuál es la velocidad del bote y cuál la de la corriente?

Si tienes alguna duda en la resolución de estos problemas, te recomendamos consultar los libros siguientes:

- *Algebra Moderna y Trigonometría*
  Dolciani P., Mary; Berman L., Simón y Wooton, William.
  Edit. Publicaciones Culturales S.A.
  Pags. 97 a 102, 104, 105

- *Algebra Superior*
  Spiegel, B. Murray
  Edit. Mc. Graw-Hill, Serie Schaum.
  Pags. 100 a 109

Productos de Aprendizaje

A continuación te presentamos los objetivos más importantes que debes alcanzar al terminar este tema:

1.1 Modelar y reconocer problemas reales cuya solución impliquen sistemas de ecuaciones lineales.

1.2 Clasificar un sistema de ecuaciones lineales de acuerdo a su tipo de solución.

1.3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss cuando el sistema tiene solución.

Introducción

Nuestro curso de Algebra Lineal lo empezaremos con un breve estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. En este tema nos avocaremos a la resolución de estos sistemas por el método de eliminación de Gauss [1], que por su sencillez de aplicación a sistemas con más de dos ecuaciones y más de dos incógnitas, es el más usado.

El dominio de este tema es indispensable para poder estudiar los siguientes temas del curso de Algebra Lineal, y al mismo tiempo en algunos de estos temas se desarrollarán otros métodos que ayudarán a completar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Existen diversos problemas físicos, económicos, geométricos, etc., que pueden expresarse en términos de sistemas de ecuaciones lineales, como por ejemplo:

El equilibrio de sistemas de fuerzas (útiles en problemas de construcción), análisis de circuitos eléctricos, análisis simples de tráfico de vehículos en una ciudad o encontrar el punto de intersección entre dos rectas que se cortan.

Iniciaremos el tema en este cuaderno de trabajo planteando un sistema de ecuaciones lineales a partir de un sencillo problema de aplicación y relacionándolo posteriormente, con su interpretación geométrica; más adelante, te propondremos una serie de problemas de diferente grado de dificultad, así como lecturas adicionales que te ayudarán a complementar tu estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

---

[1] En algunos textos a este método se le llama método de Gauss-Jordán o método de reducción.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Con el fin de ilustrar el concepto y aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales, consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos que una fábrica compra X número de tractores y Y número de camiones, por los que pagó un total de 11 millones de pesos. Si el precio de los tractores es de tres millones de pesos, el de los camiones es de dos millones, y el número total de objetos comprados fue de cinco, deseamos determinar cuantos camiones y cuantos tractores compró.

Al igual que muchos otros problemas, el primer paso para resolverlo consiste en escribir el problema en lenguaje matemático.

Según los datos del problema, sabemos que el número total de objetos comprados es 5 y es la suma de X más Y. Por lo tanto, escribimos:

$$X + Y = 5 \qquad (1)$$

Además, como el precio pagado por los tractores fue de 3X y el pagado por los camiones fue de 2Y, podemos escribir:

$$3X + 2Y = 11 \qquad (2)$$

El problema se ha reducido a obtener los valores de X y Y que satisfagan simultáneamente las ecuaciones (1) y (2). Por lo tanto, el segundo paso consiste en hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, el que constituye el modelo matemático del problema original.

$$\begin{aligned} X + Y &= 5 \\ 3X + 2Y &= 11 \end{aligned} \qquad (3)$$

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este tema es el de estudiar un método general para resolver sistemas de ecuaciones lineales como el sistema (3), o aún sistemas con mayor número de variables y ecuaciones.

Sin embargo, antes de aplicar el método a nuestro ejemplo, conviene mencionar que en general la primera parte del problema que consiste en traducir el problema del lenguaje usual al lenguaje matemático no se estudiará en este curso, pero en la medida que avances en tu carrera tendrás la oportunidad de ir desarrollando esa capacidad.

Procedamos ahora a resolver el sistema (3) por el método de eliminación de Gauss.

Para eliminar el término 3X de la segunda ecuación, debemos sumarle la primera ecuación multiplicada por - 3.

La primera ecuación multiplicada por -3 es:

$$-3X - 3Y = -15$$

y al sumarla con la segunda, tenemos:

$$-Y = -4$$

Por lo tanto, el nuevo sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} X + Y &= 5 \qquad (4) \\ -Y &= -4 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación del sistema (4) se ve inmediatamente que $Y = 4$, y al sustituir en la primera ecuación se obtiene:

$$X + 4 = 5$$

de donde, $X = 1$

Por lo tanto, la solución de los sistemas (3) y (4) es $X = 1$ y $Y = 4$ como puede verificarse explícitamente.

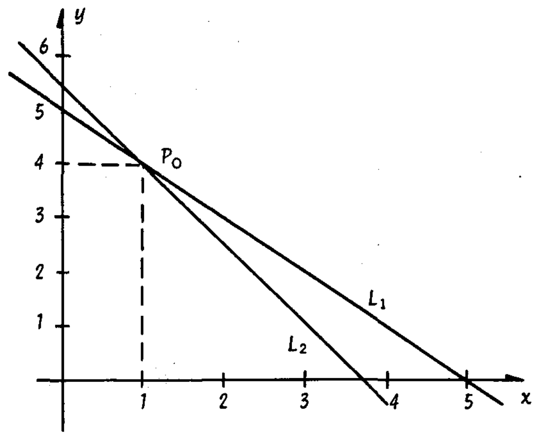
Aunque el problema ya ha sido resuelto completamente, tal vez sea de utilidad hacer algunos comentarios adicionales. En primer lugar, notamos que un mismo modelo matemático puede representar distintos problemas. Por ejemplo, el sistema (3) que hemos resuelto puede representar un conjunto de dos rectas L_1 y L_2, de ecuaciones $X + Y = 5$ y $3X + 2Y = 11$ respectivamente. Su punto de intersección $P(X_o, Y_o)$, es aquel cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las ecuaciones de ambas rectas, es decir:

$$X_o + Y_o = 5$$

$$3X_o + 2Y_o = 11$$

y ya sabemos que los valores de X_o y Y_o son 1 y 4 respectivamente. Por lo tanto, el punto de intersección es $P_o(1,4)$

Las gráficas de estas rectas son:



En donde observamos que efectivamente el punto de intersección es Po (1,4).

Puesto que en este ejemplo el punto de intersección es único, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas compatible determinado.

Si el sistema formado por las ecuaciones de dos rectas resultara incompatible, significaría que las rectas son dos paralelas no coincidentes; por lo tanto, no hay punto de intersección . En cambio, si el sistema resultara compatible indeterminado significaría que las dos rectas son coincidentes; por lo tanto, hay un número infinito de puntos de intersección.

Para ampliar tu conocimiento sobre este tema, te sugerimos leer las páginas 18 a 24 del libro "Algebra Lineal" de Seymour Lipschutz, edit. Mc.Graw-Hill serie Schaum y las páginas 9 a 17 del libro "Curso de Algebra Superior" de A.G. Kurosch, edit. MIR.

A continuación aparecen algunos ejercicios que, al resolverlos, te ayudarán a mejorar tus conocimientos sobre sistemas de ecuaciones lineales.

1.- Obtén la solución general y dos particulares de la ecuación lineal:

$$4x - 3y + 2z - w = 0$$

2.- Obtén la solución, si existe, de los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad &= 1 \\ 2x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 10x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 10x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3.- Determina para que valor(es) de "a", el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 2ay &= 2 \\ ax + 2ay &= a-1 \end{aligned}$$

no tiene solución.

4.- Encuentra el valor de "m" necesario para que el siguiente sistema homogéneo tenga solución distinta de la trivial. Obtén entonces, la solución general y una particular.

$$\begin{aligned} mr - 5s + 2t &= 0 \\ r - s + 3t &= 0 \\ 3r - 7s - 5t &= 0 \end{aligned}$$

5.- Obtén el punto de intersección de la recta:

$$L: \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

con el plano $2x + 3y + z - 1 = 0$; para ello plantea, primeramente, el sistema de ecuaciones y resuélvelo por el método que consideres más conveniente.

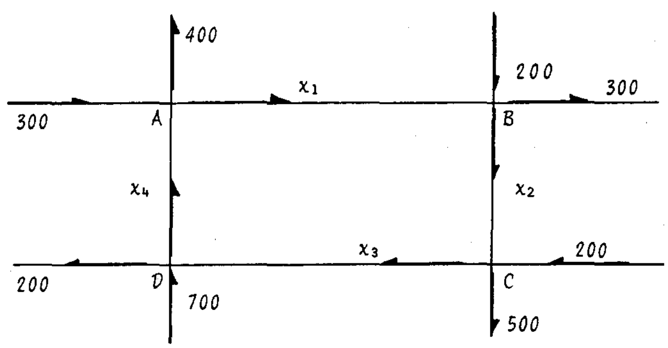
6.- Una compañía recibió de cuatro proveedores, los siguientes presupuestos:

A R T I C U L O	PROVEEDORES			
	A	B	C	D
No. de compresores	2	0	1	1
No. de medidores	0	4	2	2
No. de válvulas	4	4	0	4
No. de reguladores	1	2	2	0
COSTO TOTAL (millones de pesos)	6	5	5	4

Si los proveedores tienen los mismos precios para cada artículo, ¿cuántos millones de pesos cuesta cada uno de los artículos?

7.- Se desea analizar el flujo de tránsito en calles de un sólo sentido, en la ciudad de México.

En varios lugares se han colocado contadores, y el número de carros por hora promedio aparece en la siguiente gráfica, que muestra dicha red de calles y el sentido de cada una de ellas con las flechas respectivas.



Las intersecciones de las calles están señaladas por los puntos A,B,C y D. El número de carros que llegan a las intersecciones es igual al número de carros que salen de ellas.

Si la calle que va de D a A estuviera en reparación, ¿cuál sería el mínimo permisible de tránsito de vehículos, que circularía por DA, para no cerrar las calles de esta red, y sin cambiar el sentido de la circulación?

Te sugerimos leas otros ejemplos de problemas físicos cuyo modelo es un sistema de ecuaciones, especialmente:

- El problema del circuito eléctrico en el libro "Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones" de Francis G. Florey, editorial Prentice Hall Internacional, pags. 85 y 86.
- El problema del modelo económico cerrado de Leontief, mismo libro, pags. 88, 89 y 90.

Miscelánea

1.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones, elige el valor de λ de modo tal que el sistema sea compatible.

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2$$
$$x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda$$

2.- Determina si el sistema:

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$
$$4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0$$
$$7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

tiene soluciones diferentes de la trivial, y en caso afirmativo obtén la solución general.

3.- Obtén para qué valores de K tiene solución única el sistema

$$x + Ky = 3$$
$$Kx + 4y = 6$$

que satisface la desigualdad $x > 0$

4.- Determina el punto de intersección de las rectas:

$$L_1: \quad x - 3 = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{4} \qquad y \qquad L_2: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

5.- Un estudiante gastó cierta cantidad de dinero para comprar una carpeta, una caja de plumas y un libro. Si la carpeta y la caja hubieran costado 3 y 2 veces más baratos, respectivamente, y el libro el mismo precio, el costo de esta compra hubiera sido de 160 pesos. Asimismo, si el estudiante hubiera comprado 4 carpetas y 3 cajas de plumas, el costo hubiera sido 720 pesos. Determina el costo total de la compra de los tres artículos.

6.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales, suponiendo que x, y, z y w son reales.

$$(1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)w = 1+5i$$

$$(3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + (4i)w = 2-i$$

7.- En muchas ocasiones, el modelo de un problema es un sistema de ecuaciones no lineales, tal es el caso del siguiente ejercicio. Escribe el sistema de ecuaciones correspondiente a este ejercicio y resuélvelo.

Cada uno de tres obreros necesita un cierto tiempo para embobinar un motor tipo serie HP 300. Si el segundo obrero trabajara durante dos horas embobinando un motor del tipo antes mencionado y después el primer obrero continuara este trabajo por una hora, acabarían de embobinar todo el motor.

Por otro lado, el tercer obrero necesita dos horas más que el primero para embobinar un motor del tipo anterior. Y laborando juntos embobinarían un motor de este tipo en una hora.

¿En cuántas horas embobina cada obrero un motor del tipo serie HP 300?.

Examen de Capítulo

1.- Obtén la solución general y dos soluciones particulares del sistema de ecuaciones:

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 1$$

$$-3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 5$$

20 PTS.

2.- Dado el sistema de ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3K$$

$$x_1 + x_2 + Kx_3 = 0$$

30 PTS.

determina, si existe, algún valor de K para que:

a) El sistema sea incompatible.

b) El sistema sea compatible indeterminado.

c) El sistema sea compatible determinado.

3.- Obtén la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0$$

20 PTS.

4.- *Una empresa tiene tres máquinas que son usadas para fabricar 4 productos distintos. El número de horas que requiere cada máquina en la producción de una unidad de cada uno de los cuatro productos está dada por:*

MAQUINA	PRODUCTO			
	A	B	C	D
1	1	2	1	2
2	2	0	1	1
3	1	2	3	0

30 PTS.

Determina el número de unidades que se deben producir para cada uno de los cuatro productos en un día de trabajo de ocho horas continuas, si por lo menos debe producirse un producto de cada tipo.

Tiempo máximo de solución: 2 horas.

CAPITULO II

Matrices y Determinantes

"Whitehead hizo notar entonces que si bien toda la física conocida hasta entonces (1900) podía ser tratada por los métodos del álgebra ordinaria, era posible que pudieran aparecer algún día nuevos campos en la física para los cuales el álgebra no conmutativa sería la única representación natural. En aquel mismo año comenzó el camino hacia la realización de esta conjetura".

Sir Edmund Whittaker.

Examen Diagnóstico

1.- Sean los números complejos

$$Z_1 = 1 + 4i, \quad Z_2 = -6i, \quad Z_3 = i, \quad Z_4 = 3$$

Obtén el resultado de las siguientes operaciones:

a) $(Z_1 + Z_2)(Z_3)^4$

b) $\overline{Z}_1 \div \overline{\left(\frac{Z_2}{Z_3}\right)}$

c) $\overline{Z}_4 \div 8\left(\frac{Z_4}{Z_2}\right)^3 - (\overline{Z_1 Z_4})$

2.- Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

Si tienes alguna duda en la resolución de estos ejercicios, te recomendamos consultar los libros siguientes:

- Algebra
  Lovaglia - Elmore - Conway
  Edit. Harla
  Páginas 225 a 243 y 288 a 292

- Algebra Superior
  Spiegel Murray
  Edit. Mc. Graw-Hill, serie Schaum
  Páginas 172 a 181 y 252 a 259

Productos de Aprendizaje

A continuación te presentamos los objetivos más importantes que debes alcanzar al terminar este tema:

II.1 Dada una expresión matricial, calcular, de ser posible, la matriz resultante empleando las operaciones de adición, multiplicación por un escalar y multiplicación de matrices.

II.2 Dada una matriz, identificar el tipo de ésta.

II.3 Dada una matriz cuadrada, calcular su determinante por el método más adecuado.

II.4 Dada una ecuación matricial, resolverla cuando la incógnita pueda despejarse.

II.5 Representar mediante una ecuación matricial un sistema de ecuaciones lineales.

II.6 A partir de un sistema de ecuaciones lineales compatible no homogéneo de igual número de ecuaciones que de incógnitas, resolverlo por la regla de Cramer.

Introducción

En este tema se estudiarán los conceptos de matriz y de determinante. En la primera parte presentaremos el concepto de matriz y en la segunda el de determinante.

Una matriz es un arreglo o tabla de números en forma rectangular. La razón por la que a estos arreglos se les llama matrices es porque a partir de ellos se pueden originar o desarrollar diversos resultados. Las matrices aparecieron en 1850 y su nombre se debe al matemático inglés JAMES - JOSEPH SYLVESTER. Posteriormente WILLIAM ROWAN HAMILTON en 1853 y ARTHUR CAYLEY en 1858 hicieron contribuciones importantes; no pasó mucho tiempo para que los matemáticos reconocieran que estos arreglos rectangulares son medios convenientes para ampliar las nociones comunes de números.

Aunque la idea de matriz precede a la de determinante, como lo hizo notar Cayley, históricamente el orden fue al revés. Los determinantes fueron estudiados a mediados del siglo XVIII y en este sentido se podría decir que el tema de las matrices fue desarrollado antes de 1850, año en que aparecieron formalmente; algunas de las propiedades básicas de las matrices fueron también establecidas en el desarrollo de los determinantes.

La teoría de las matrices ha tenido una gran evolución extendiéndose más allá del dominio del álgebra y de otros campos de la matemática pura, y han demostrado ser una herramienta muy poderosa en las matemáticas aplicadas, economía, física, etc.

Por ejemplo en el año de 1925 el físico alemán W. Heisenberg las introdujo en su formulación de la mecánica cuántica y desde entonces son indispensables en esta rama de la física.

Sin embargo, en este curso sólo veremos su aplicación en el Algebra Lineal.

Matrices

En forma general se puede definir una matriz como un arreglo rectangular de elementos, donde cada uno de éstos puede ser un número real, un número complejo, un polinomio, una función, un operador, etc.

Por ejemplo, una matriz cuyos elementos son números reales es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y una matriz cuyos elementos son funciones es

$$\begin{bmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

Para cada matriz particular la colocación de sus elementos es única, de tal forma que si dos matrices tienen los mismos elementos, pero colocados en distintos lugares, serán consideradas como dos matrices distintas.

Al conjunto completo de elementos que forman una matriz se le considera como un único objeto o ente matemático, el cual puede manipularse de acuerdo a ciertas reglas. Algunas de éstas serán estudiadas en este curso.

Por ejemplo, al definir las operaciones de adición y multiplicación entre matrices se encuentra que estas nuevas operaciones tienen muchas propiedades semejantes a las de adición y multiplicación usuales entre números reales. Entre ellas podemos mencionar, la existencia de matrices análogas a los números cero y uno. Estas matrices fueron introducidas por Cayley y son:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

llamadas matriz cero y matriz identidad, respectivamente.

El mismo Cayley fue quien definió la multiplicación de matrices. Para esto tomó la expresión matemática que representa a dos transformaciones sucesivas. Para ilustrar esto, consideremos por brevedad un ejemplo con matrices de orden 2. Supongamos que las variables X, Y son transformadas en las variables X' y Y' y que la expresión matemática que representa esta transformación, es:

$$\begin{aligned} X' &= a_{11} X + a_{12} Y \\ Y' &= a_{21} X + a_{22} Y \end{aligned} \qquad \text{———— (1)}$$

si ahora las variables X' y Y' son a su vez transformadas en X" y Y" mediante una segunda transformación representada por:

$$\begin{aligned} X'' &= b_{11} X' + b_{12} Y' \\ Y'' &= b_{21} X' + b_{22} Y' \end{aligned} \qquad \text{———— (2)}$$

entonces la expresión matemática que representa las dos transformaciones sucesivas está dada por (sustituyendo en (2) los valores de X' y Y' dados en (1))

$$\begin{aligned} X'' &= (b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21}) X + (b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22}) Y \\ Y'' &= (b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21}) X + (b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22}) Y \end{aligned} \qquad \text{———— (3)}$$

Arreglando en forma de matrices los coeficientes de las transformaciones (1), (2) y (3) tendremos:

para (1) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

para (2) $$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

para (3) $$C = \begin{bmatrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} & b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} & b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} \end{bmatrix}$$

de aquí, Cayley definió el producto de matrices como:

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix} = C \quad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

Es decir, el elemento c_{ij} de la matriz producto C es igual a:

$$c_{ij} = b_{i1}\, a_{1j} + b_{i2}\, a_{2j}$$

o sea, el elemento c_{ij} es la suma de los productos de los elementos del i-ésimo renglón de B con los correspondientes elementos de la j-ésima columna de A.

Como hemos mencionado, muchas de las propiedades de la adición y multiplicación entre números también se mantienen en el caso de las matrices, sin embargo existen algunas otras propiedades que ya no se mantienen.

Por ejemplo, si efectuamos el producto AB obtenemos :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

que al comparar con el producto $BA = C$, dado en la ecuación (4), vemos que AB es distinto de BA y, por lo tanto, la multiplicación no es conmutativa.

Esta situación hace ver que es necesario indicar con todo cuidado el orden en que se efectúa la multiplicación de dos matrices. Así, en la expresión:

$$BA = C$$

a B se le llama prefactor y a A postfactor. También se acostumbra decir que B premultiplica y que A postmultiplica.

El hecho de que la multiplicación de matrices no sea conmutativa ha significado una ruptura tremenda con la matemática tradicional y ha tenido una infinidad de aplicaciones en muchas ramas de la ciencia.

Otras diferencias entre el álgebra de matrices y el álgebra ordinaria son las siguientes.

a) El producto de dos números diferentes de cero siempre es diferente de cero, mientras que el producto de dos matrices diferentes de la matriz cero puede ser igual a la matriz cero. Por ejemplo,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) *La ley de la cancelación en la multiplicación vale para los números, pero no vale para las matrices. Es decir, si* a,b,c *son números y* $c \neq 0$, *enton-- ces:*

$$ac = bc \quad \textit{implica } a = b$$

mientras que si A,B,C *son matrices*

$$AC = BC \quad \textit{no implica que } A = B$$

c) *La ecuación algebraica* $x^2 = 0$ *tiene una única solución* $x = 0$, *mientras que la ecuación matricial* $X^2 = 0$, *donde 0 es la matriz cero, tiene un número infinito de soluciones.*

d) *La ecuación algebraica* $x^2 = -1$, *no tiene solución en el conjunto de los números reales, mientras que la ecuación matricial* $X^2 = -I$, *donde I es la matriz identidad, puede tener solución con elementos reales. Por ejemplo,*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) *En el conjunto de los números reales no se cumple la igualdad*

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2$$

excepto si $a = 0$ *ó* $b = 0$ *ó* $a = b = 0$

Sin embargo, considerando el conjunto de las matrices de orden 2 x 2, *tal igualdad puede tener sentido para matrices diferentes de la matriz cero, por ejemplo:*

$$si \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces se cumple que $A^2 + B^2 = (A+B)^2$. *En efecto, pues por un lado tenemos que*

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y por otro

$$(A+B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$A^2 + B^2 = (A+B)^2$$

Podríamos preguntarnos ahora si existe una matriz diferente de la matriz A, *que junto con la matriz* B, *satisfaga la expresión anterior.*

Para contestar esta pregunta, consideramos la matriz

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \in R$$

e investiguemos que valores deben tomar las variables X_1, X_2, X_3 *y* X_4 *para que se satisfaga la expresión,*

$$X^2 + B^2 = (X+B)^2$$

Sustituyendo las matrices X *y* B *en dicha expresión tenemos*

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^2 = \left(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right)^2$$

efectuando operaciones e intercambiando ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} X_1^2 + 2X_1 + X_2X_3 + 4X_2 + X_3 + 5 & X_1X_2 + X_1 + X_2X_4 + X_4 \\ X_3X_1 + 4X_1 + X_4X_3 + 4X_4 & X_3X_2 + X_3 + 4X_2 + X_4^2 - 2X_4 + 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^2 + X_2X_3 + 5 & X_1X_2 + X_2X_4 \\ X_3X_1 + X_4X_3 & X_3X_2 + X_4^2 + 5 \end{bmatrix}$$

Como la matriz del miembro izquierdo es igual a la matriz del miembro derecho se deben cumplir las siguientes cuatro igualdades.

$$\begin{aligned}
X_1^2 + 2X_1 + X_2X_3 + 4X_4 + X_3 + 5 &= X_1^2 + X_2X_3 + 5 \\
X_1X_2 + X_1 + X_2X_4 + X_4 &= X_1X_2 + X_2X_4 \\
X_3X_1 + 4X_1 + X_4X_3 + 4X_4 &= X_3X_1 + X_4X_3 \\
X_3X_2 + X_3 + 4X_2 + X_4^2 - 2X_4 + 5 &= X_3X_2 + X_4^2 + 5
\end{aligned}$$

simplificando llegamos al siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
2X_1 + 4X_2 + X_3 &= 0 \\
X_1 + X_4 &= 0 \\
4X_1 + 4X_4 &= 0 \\
4X_2 + X_3 - 2X_4 &= 0
\end{aligned} \qquad \text{———— (5)}$$

Para resolver este sistema es conveniente transformar el sistema en una ecuación matricial. Para esto, de la definición de igualdad de matrices se tiene que

$$\begin{bmatrix} 2X_1 + 4X_2 + X_3 \\ X_1 + X_4 \\ 4X_1 + 4X_4 \\ 4X_2 + X_3 - 2X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y aplicando el concepto de multiplicación de matrices tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{———— (6)}$$

La conveniencia de usar matrices en la solución del sistema de ecuaciones lineales (5), es que para resolver la ecuación (6) sólo necesitamos trabajar con los coeficientes del sistema.

Las matrices que aparecen en la ecuación (6) no deben confundirse con las matrices X y B de nuestro problema original, y sólo deben considerarse como una herramienta útil para resolver nuestro problema inicial. Este ejemplo muestra claramente que un mismo concepto matemático puede aparecer en dos contextos diferentes.

Continuemos ahora con nuestro problema. Para esto escalonemos la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de acuerdo a esto, podemos volver a plantear un sistema de ecuaciones, pero ahora con la matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1 + X_4 \\ 4X_2 + X_3 - 2X_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de la definición de igualdad de matrices se tiene:

$$X_1 + X_4 = 0$$

$$4X_2 + X_3 - 2X_4 = 0$$

que como sabemos del tema I corresponde a un sistema compatible indeterminado, y por lo tanto, existen una infinidad de matrices que, junto con la matriz B, satisfacen la expresión:

$$X^2 + B^2 = (X + B)^2$$

Para ampliar tus conocimientos sobre el concepto de matrices, sus operaciones y sus aplicaciones, te recomendamos que leas "Algebra lineal y aplicaciones" de Francis Florey, editorial Prentice-Hall, páginas 94 a 108 y el capítulo VII del libro "Matrices" de Frank Ayres de la serie Schaum. Además te sugerimos que resuelvas los siguientes ejercicios.

1.- *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & -1 \\ -2 & 1 & y \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcula los valores de x, y, z *para que se verifique la siguiente igualdad:*

$$A + B\,C = D$$

2.- *Sean las matrices*

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 8 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con la partición indicada en la matriz A, obtén el producto AB indicando la partición en la matriz B.

3.- *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

obtén:

a) AB

b) BA

4.- *Demuestra que si A es una matriz cuadrada, la matriz* $A + A^T$ *es simétrica.*

5.- *Demuestra que si A y B son dos matrices cuadradas simétricas, la condición necesaria y suficiente para que AB sea simétrica es que AB sea conmutativo.*

6.- *Dadas las matrices*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

determina cual es hermitiana y cual antihermitiana.

7.- *Demuestra que toda matriz cuadrada A cuyos elementos son números complejos se puede descomponer en la suma de una matriz hermitiana* $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ *y otra antihermitiana* $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

8.- *Si*

$$H = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \operatorname{sen}\Theta \\ -\operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

a) *Comprueba que*

$$H^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\Theta & \operatorname{sen} 2\Theta \\ -\operatorname{sen} 2\Theta & \cos 2\Theta \end{bmatrix}$$

b) *Comprueba que*

$$H^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\Theta & \operatorname{sen} 3\Theta \\ -\operatorname{sen} 3\Theta & \cos 3\Theta \end{bmatrix}$$

c) *Sugiere una fórmula para* $H^n, \forall n \in N$ *y demuestra su validez.*

9.- La matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

es una matriz nilpotente.

Obtén el índice de la matriz nilpotente B.

10.- Si

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

obtén A empleando transformaciones elementales.

11.- Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtén la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$B(XA - B) = C^T + 2XA$$

12.- Determina si las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

son ortogonales.

13.- Determina si las matrices

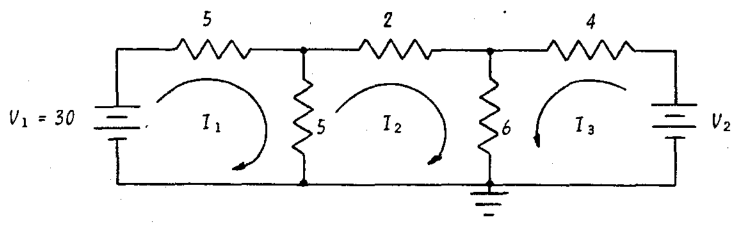
$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}}(2+i) & \frac{1}{\sqrt{15}}(3+i) \\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-3+i) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2-i) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\,i & \frac{-1}{\sqrt{2}}\,i \\ \frac{2}{\sqrt{2}}\,i & \frac{-2}{\sqrt{2}}\,i \end{bmatrix}$$

son unitarias.

14.- Obtén la solución del sistema de ecuaciones lineales cuya representación matricial está dada por: $A\overline{X} = \overline{b}$

$$\text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

15.- Para el circuito eléctrico de la figura



su modelo matemático en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 13 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Si se sabe que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, obtén los valores de I_1, I_2, I_3 y V_2.

Determinantes

Es frecuente describir algunas características que distinguen a una matriz por medio de algunos números que se asocian a ésta. La regla que asocia a cada matriz un número concreto, define una función de valores numéricos de las matrices. Una de las funciones con valores numéricos más importante entre las que se definen para las matrices cuadradas es la función determinante, es decir, la función determinante es una regla que asigna a cada matriz cuadrada A un cierto número.

A este número se le llama también determinante y se representa por det(A) ó |A|.

El determinante de una matriz se puede representar también mediante una tabla o arreglo rectangular de números.

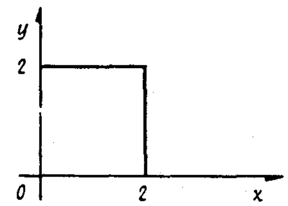
Por ejemplo, el arreglo $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$

representa el determinante de la matriz: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

La notación de las líneas rectas vecticales para identificar el determinante fue usada por los primeros que trataron el tema, tales como Jacobi, Cauchy y Cayley.

Es conveniente tener presente que una matriz es un arreglo rectangular de números, mientras que el determinante es un número.

Para comprender mejor el concepto de determinante consideramos el cuadrado mostrado en la siguiente figura.



Como las coordenadas de sus vértices son $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$, *representemos los segmentos que parten del origen y llegan a los puntos* $(2,0)$ *y* $(0,2)$ *como* $A = (2,0)$ *y* $B = (0,2)$

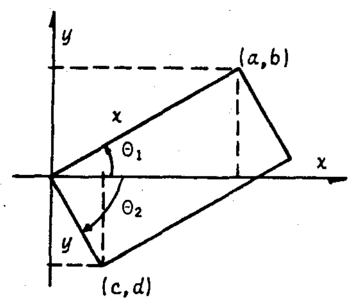
Escribamos estos segmentos en la forma:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

es decir, en forma de un determinante, donde el primer renglón es el segmento A *y el segmento* B *es el segundo renglón.*

El valor del determinante es cuatro.

Como se puede observar, este valor es igual al área de nuestro cuadrado. Podríamos preguntarnos ahora si mediante determinantes podemos calcular áreas de rectángulos cualesquiera. Para responder a esta pregunta consideremos el rectángulo indicado en la figura:



los segmentos correspondientes son:

$A = (a,b)$, $\quad B = (c,d)$

representando nuevamente estos segmentos en forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

de acuerdo al ejemplo anterior, el área del rectángulo sería:

$$\text{Area} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Para verificar que efectivamente ad - bc es el área del rectángulo sustituyamos el valor de a,b,c y d en función de x e y. De acuerdo a la figura anterior se tendrá que:

$$A = -x\cos\Theta_1\, y \,\mathrm{sen}\, \Theta_2 - y \cos \Theta_2\, x\, \mathrm{sen}\,\Theta_1$$

es decir,

$$A = -xy\,(\cos \Theta_1 \,\mathrm{sen}\, \Theta_2 + \cos \Theta_2 \,\mathrm{sen}\, \Theta_1)$$
$$A = -xy\,\mathrm{sen}\,(\Theta_1 + \Theta_2) = -xy$$

tomando el valor absoluto

$$\text{Area} = |-xy| = xy$$

que corresponde al área del rectángulo indicado en la figura:

$$A = (\text{base})\,(\text{altura}) = x\,y$$

Podemos concluir pues que el área del cuadrado o del rectángulo es el valor absoluto del valor del determinante.

De igual manera, así como el valor absoluto de un determinante de orden dos representa geométricamente un área, el valor absoluto de un determinante de orden tres representa geométricamente un volumen.

Veamos ahora la interpretación geométrica de algunas propiedades de los determinantes.

Consideremos el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

entonces:

$$\alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix}$$

geométricamente quiere decir que si multiplicamos las componentes de uno de los segmentos por una constante, estamos también multiplicando el área del paralelogramo correspondiente por tal constante.

Consideremos ahora la propiedad:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

geométricamente quiere decir que el paralelepípedo formado por los segmentos $A = (a_1, b_1, c_1)$, $B = (a_2, b_2, c_2)$ *y* $C = (a_3, b_3, c_3)$ *tiene el mismo volumen que el formado por los segmentos.* $D = (a_1, b_1+a_1, c_1)$, $E = (a_2, b_2+a_2, c_2)$ *y* $F = (a_3, b_3+a_3, c_3)$.

Para continuar el estudio sobre este tema te sugerimos que leas las páginas 87 a 97 del libro "Calculus" de Tom M. Apostol, volumen 2, y que trates de resolver los siguientes ejercicios.

16.- *Sean las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

calcula:

a) $\det(A)$ $\det(B)$ b) $\det(AB)$ c) $\det(B^T A^T)$

17. - *Calcula el determinante de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a) *Por el método de condensación pivotal.*

b) *Por el método de la matriz triangular.*

18.- Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = A - \lambda I_3$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y λ un escalar, calcula todos los valores de λ que hacen que la matriz B sea singular.

19.- Obtén la inversa de la matriz:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por el método de la adjunta.

20.- Demuestra que para una matriz cuadrada A no singular.

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

21.- Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

obtén el valor de x_2 empleando la regla de Cramer.

Miscelánea

1.- Obtén el resultado de las siguientes operaciones:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

2.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -3 & 4 \\ \hline 5 & -7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Obtén, por particiones, el producto AB respetando la partición indicada para B.

3.- Determina si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \textit{es una matriz idempotente.}$$

4.- *Para las siguientes afirmaciones, escribe en el paréntesis correspondiente una V si la afirmación es verdadera y una F si es falsa.*

Sean A,B *y* C *matrices cuadradas del mismo orden.*

( ) *Si* A *es nilpotente de índice 2, entonces,* $A = A^2 + A$

( ) $(A(B+C))^* = A^*B^* + A^*C^*$

( ) *Si* A *es una matriz unitaria, entonces,* $A = A^*A^2$

( ) *Si* A *es una matriz no nula y* B *una matriz ortogonal, entonces,* $BB^TA = A$

5.- *La ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos* $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ *y* $P_3(x_3, y_3)$ *puede escribirse en la forma:*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a) *Comprueba que las coordenadas de cada uno de los puntos* P_1, P_2 *y* P_3 *satisfacen esta ecuación.*

b) *Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* (0,0), (3,6), (7,0).

6.- *Demuestra que el determinante de una matriz idempotente es cero ó uno.*

7.- *Si* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, *obtén una matriz* P *no singular tal que* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

8.- *Sea*

$$H = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si $\det(H) = 1$, *calcula el determinante de cada una de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{bmatrix} 4x & 4y & 4z \\ 3/4 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9.- *Si A es una matriz no singular y K es una constante diferente de cero, demuestra que:*

$$(K\ A)^{-1} = \frac{1}{K} A^{-1}$$

10.- *Obtén la matriz X que satisface la siguiente ecuación*

$$A(PX - XA^T C) = P^T$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \qquad C = \frac{1}{2}\bar{A}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

11.- *Obtén una matriz X que satisfaga la ecuación matricial*

$$D + AX = 3\ C^T + B^T X$$

donde:

$$D = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -6 & -15 \end{bmatrix}$$

12.- *Demuestra que si AB = BA, entonces:*

$$(AB)^n = A^n B^n \ , \quad \forall n \in N$$

13.- *Demuestra que el determinante de una matriz ortogonal es igual a ± 1.*

14.- *Calcula el determinante de la siguiente matriz:*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15.- *Al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incognitas* x_1, x_2, x_3, *mediante la regla de Cramer, se tiene que:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det (A)} \qquad\qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\det (A)} = 1$$

Obtén :

a) *El valor de* a

b) *El valor de* x_2

16.- *Obtén la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 3z &= 4 \\ -x + 3y - 4z &= -3 \\ 3x - 5y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss empleando la notación matricial.

Examen de Capítulo

1.- *Dadas las siguientes afirmaciones, escribe en el paréntesis correspondiente, una V si la afirmación es verdadera y una F si es falsa.*

Sean A y B dos matrices cuadradas, $A \neq B$; siempre se cumple que:

a) $ABAB^2 = A^2B^3$ ______________________ ( )

b) $ABA^2AA^4B^2A = ABA^7B^2A$ ______________ ( )

c) $(AB)^T = A^TB^T$ ______________________ ( )

d) *si* $B = A - A^T$, B *es antisimétrica* ____________ ( ) 10 PTS.

2.- *Dada la matriz adjunta de la matriz A y una columna de la matriz transpuesta de A.*

$$adj\ (A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & & \\ 3 & & \end{bmatrix}$$

obtén:

a) $det(A)$

b) A 20 PTS.

3.- *Obtén todos los valores de* α *y* β *para los cuales la matriz* A *tiene inversa.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

15 PTS.

4.- *Dadas las siguientes afirmaciones, escribe en el paréntesis correspondiente, una V si la afirmación es verdadera y una F si es falsa:*

a) *El determinante de una matriz hermitiana es un número complejo* _ _ ( )

b) *Si* A *es una matriz de orden* n *y* α *es un escalar, entonces:*

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ( )

c) *Si* A *es una matriz cuadrada con números complejos, entonces:*

$$\det(A^*) = \det(\overline{A})$$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ( )

d) *Si* A *es una matriz cuadrada, no singular, entonces* $\det(A) = \det(A^{-1})$ _ ( )

e) *Si dos filas paralelas de una matriz cuadrada* A *son proporcionales entre sí, entonces* $\det(A) \neq 0$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ( )

15 PTS.

5.- *Dadas las matrices*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y sabiendo que $A - B = D^{-1}$, *obtén la matriz* X *tal que:*

$$AXD - C = BXD$$

20 PTS.

6.- *Compara los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

$$A: \begin{cases} 2q + 4r + 2s + 2\alpha t = 4 \\ 2q + r + 2s + t = 0 \\ 2q - r + 3s - 3\beta t = -1 \\ -q - r + 2s - t = -3 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x + 2y + z + \alpha w = 2 \\ 2x + y + 2z + w = 0 \\ 2x - y + 3z - 3\beta w = -1 \\ -x - y + 2z - w = -3 \end{cases}$$

donde α *y* β *son constantes.*

Sabiendo que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema A *vale* -22, *calcula el valor de* w *del sistema* B *empleando la regla de Cramer.*

20 PTS.

Tiempo máximo de solución 1:45 horas.

CAPITULO III

Estructuras Algebraicas

"Las matemáticas no estudian los objetos sino las relaciones entre los objetos; por tanto, les es indiferente reemplazar estos objetos por otros, con tal que no cambien las relaciones".

H. Poincaré

Examen Diagnóstico

1.- Escribe el conjunto resultante de cada una de las siguientes operaciones si el conjunto de los reales R es el conjunto universo.

a) $(I \cup Q)' - R$

b) $(N \cap Q) \cup (I - R')$

2.- Completa correctamente cada una de las siguientes proposiciones.

a) La ley cancelativa para la adición de números naturales dice: $\forall a,b,c \in N$ si ______________________________.

b) El conjunto de los números enteros cumple las siguientes propiedades básicas para la adición: ______________________________ ______________________________.

c) La ley asociativa para la multiplicación de números racionales dice: $\forall x,y,z \in Q$ ______________________________.

d) El elemento idéntico para la multiplicación de números complejos es: ______________.

3.- Algunos tipos de funciones reciben dos o más nombres. A continuación te presentamos en la columna izquierda algunas funciones; escribe en los paréntesis de la columna derecha a que tipo de función equivalen.

A.- Función unívoca	( ) Función biyectiva
B.- Función biunívoca	( ) Función inyectiva
C.- Función uno a uno y "sobre"	( ) Función suprayectiva
D.- Función "sobre"	

4.- Determina que tipo de función es la definida en cada uno de los siguientes incisos, si $f: R \rightarrow R$.

a) $f(x) = 5x + 2$

b) $f(t) = 2^t$

c) $f(x) = x^2 - 1$

5.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3e^{2x} + 6$

b) $g(t) = \log_{10}(1 + t) + 7t^3$

c) $f(x) = \tan x - 8x^2$

Compara tus resultados con los escritos al final de este cuaderno, si cometiste algún error te sugerimos consultar la siguiente bibliografía.

- Calculus, tomo I
  Aposto M., Tom.
  Edit. Reverté S.A., 2a. edición

- El Cálculo con Geometría Analítica
  Leithold, Luis
  Edit. Harla, 2a. edición

Productos de Aprendizaje

A continuación te presentamos los objetivos más importantes que debes alcanzar al terminar este tema:

III.1 Dado un conjunto con una o dos operaciones binarias, determinar que estructura algebraica forman.

III.2 Dados dos grupos o dos anillos y una función, determinar si -- está es un homomorfismo o un isomorfismo.

Introducción

El objetivo de este tercer capítulo es estudiar el concepto de estructura algebraica.

En forma general se define una estructura algebraica como un conjunto en el que están definidas una o más operaciones. Las estructuras algebraicas más importantes son: grupo, anillo y campo o cuerpo. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros con las operaciones de adición y multiplicación es un anillo y el conjunto de las rotaciones que puedan efectuarse sobre un objeto con la operación de composición es un grupo.

Las estructuras algebraicas desempeñan un papel muy importante en muchas ramas de la ciencia como por ejemplo: La teoría de la relatividad, física nuclear, mecánica cuántica, cristalografía, etc. Sin embargo, en este curso sólo estudiaremos las nociones básicas del tema.

Esta poderosa herramienta matemática fue creada a principios del siglo XIX, y entre algunos de los matemáticos más importantes a quienes debemos su creación, podemos citar a Evariste Galois, brillante matemático francés muerto en 1830 a la edad de 21 años, en un duelo; Galois fue el principal promotor de la teoría de grupos. Otros célebres matemáticos que también hicieron contribuciones en esta rama de las matemáticas fueron Augustin Louis Cauchy, Sir Arthur Cayley y Niels Henrik Abel.

A continuación daremos un panorama general de la distibución de este capítulo con el objetivo de ubicar al lector.

En primer término, se presentará el concepto de operación binaria que es esencial en el análisis de las estructuras algebráicas. Posteriormente, se analizarán algunos conjuntos y las operaciones binarias que se han definido en ellos y, de acuerdo a las propiedades que dichas operaciones posean, se determinará a que tipo de estructura algebraica pertenecen.

Finalmente, en la última parte del capítulo se estudiarán dos conceptos de singular importancia: isomorfismos y homomorfismos entre grupos y anillos.

Operación Binaria

Introduciremos el concepto de operacion binaria mediante la si-- guiente situación hipotética.

Era el primer día de clases en un grupo de matemáticas. Los alumnos, después de una breve plática, solicitaron al profesor que les indicara la forma en que los calificaría. Las condiciones quedaron establecidas de - la siguiente manera:

a) Durante el curso se harán tres exámenes parciales.
b) Se calculará el promedio P de las tres calificaciones parciales.
c) Al terminar el curso se hará un examen final el cual proporcionará otra calificación E_F
d) La calificación final C_F de la materia se obtendrá de la suma - del doble del promedio P más el examen final E_F, y dividiendo- el resultado entre 3, es decir

$$C_F = \frac{2P + E_F}{3}$$

e) Todas las calificaciones parciales así como P y E_F quedarán - comprendidas en una escala de 0 a 100.
f) En las calificaciones P, E_F y C_F se omitirán las cifras decimales.

Con el objeto de que estas condiciones queden claras para todos -- los alumnos, y evitar reclamaciones posteriores, el profesor expuso el siguiente ejemplo.

Alumno: Manuel Sánchez Hernández

1er. examen parcial = 75
2o. examen parcial = 30
3er. examen parcial = 68

Por lo tanto, $P = 57$
$E_F = 72$

y la calificación final C_F es:

$$C_F = \frac{2(57) + 72}{3} = 62$$

Analicemos ahora cómo las condiciones establecidas en este ejemplo involucran, en toda su extensión, el concepto de operación binaria.

Según la definición de operación binaria, ésta es una regla que -- asocia a cada par de elementos de un conjunto S, un tercer elemento unívoco llamado resultado de la operación. Ahora bien, en nuestro ejemplo anterior- tenemos una regla que asocia a cada par de valores P y E_F un tercer valor, - que de acuerdo con la condición "d" es igual a $\frac{2P + E_F}{3}$.

Además esta regla de asociación está definida sobre el conjunto:

$$S = \{x \mid x \in I,\ 0 \leq x \leq 100\}$$

puesto que tanto P como E_F sólo pueden tomar valores dentro de S (ver condiciones e y f).

Por lo tanto, en este ejemplo están presentes todos los elementos- que definen a una operación binaria.

Si denotamos con el símbolo Θ a las operaciones que se deban -- efectuar con P y E_F para obtener la calificación final C_F tendremos que

$$C_F = P \ \Theta \ E_F \quad \text{———————} \quad (1)$$

donde la expresión $P \ \Theta \ E_F$ significa

$$P \ \Theta \ E_F = \frac{2P + E_F}{3} \quad \text{—————} \quad (2)$$

La ecuación (1) nos indica que a la pareja de números P y E_F se les asocia el número C_F de acuerdo a la regla Θ . Es decir, Θ representa- a la operación binaria.

La ecuación (2) define a la operación Θ mediante una expresión - algebraica usual.

En general, el resultado de una operación binaria depende del orden en que se tomen los elementos. Esto se hace patente en el caso de nuestro - ejemplo, ya que en términos generales

$$P \ \Theta \ E_F \neq E_F \ \Theta \ P$$

$$\text{o bien} \quad \frac{2P + E_F}{3} \neq \frac{2\,E_F + P}{3}$$

Por ejemplo si $P = 57$ y $E_F = 72$ tenemos que

$$\frac{2(57) + 72}{3} \neq \frac{2(72) + 57}{3}$$

Por lo tanto la operación binaria Θ no es conmutativa.

Analicemos ahora si la operación Θ es cerrada en el conjunto S.

Para que la operación sea cerrada debe cumplirse que:

$$(P \ \Theta \ E_F) \in S \quad \forall \ P, \ E_F \in S$$

En otras palabras, para que Θ sea cerrada, debe cumplirse que la calificación final C_F esté comprendida entre 0 y 100 y que sea un número entero, para cualquiera P y $E_F \in S$.

Debido a la condición (f), la calificación C_F siempre será un número entero. Por lo tanto sólo resta investigar si C_F está comprendida entre 0 y 100.

Sustituyendo en la expresión

$$P \ \Theta \ E_F = \frac{2P + E_F}{3}$$

los valores máximos que pueden tomar P y E_F tendremos:

$$100 \ \Theta \ 100 = \frac{2(100) + 100}{3} = 100 \in S$$

Lo cual indica que aún para los valores máximos de P y E_F el resultado es menor ó igual a 100.

Procediendo de igual forma para los valores mínimos que pueden tomar P y E_F tenemos:

$$0 \ \Theta \ 0 = \frac{2(0) + 0}{3} = 0 \in S$$

Por tanto aún para los valores mínimos de P y E_F el resultado es - mayor o igual a cero.

Tomando en cuenta el razonamiento anterior y la condición (f), podemos concluir que C_F siempre será un número entero x tal que $0 \leq x \leq 100$, de lo cual concluimos que la operación Θ es cerrada en el conjunto S.

Conviene hacer ahora algunas reflexiones y proponer algunas actividades alrededor del concepto de operación binaria.

a) Diseña tres operaciones binarias, definidas sobre el conjunto de los números enteros, en las que el orden en que se tomen los elementos no altere el resultado.

b) Diseña una regla de asociación, sobre el conjunto de números que tú elijas, tal que no constituya una operación binaria.

c) Analiza las definiciones de operación binaria que aparecen en los libros: "Algebra Moderna" de Frank Ayres Jr. de edit. Mc. Graw Hill, serie Schaum, e "Introducción a la Matemática Moderna" de Elbridge P. Vance, edit. Addison-Wesley, y compáralas entre sí y con la definición dada en los Apuntes de Algebra (pag. I-23)[1]. A continuación elabora una lista con todas las características comunes que encuentres en las tres definiciones y redacta una frase en la que expreses el concepto de operación binaria.

d) Ahora trata de resolver los siguientes ejercicios, si no te es posible regresa al ejemplo anterior, estúdialo con cuidado y vuelve a intentar resolver estos ejercicios.

1.- Consideremos la siguiente operación:

$$a * b = 3(a+b) \quad \forall\, a,\ b \in N$$

a) ¿Es $*$ una operación binaria? Justifica tu respuesta, verificando si satisface la definición de operación binaria.

b) Calcula el resultado de: $1 * (1 * (2 * (3 * 4)))$

c) Determina si $a * (b * c) = (a * b) * c\ ;\ \forall a, b, c \in N$

2.- Sea el conjunto $T = \{\, t \mid t = 3\,n,\ \forall\, n \in N \,\}$ y la operación binaria Ⓟ definida por:

$$x \text{ Ⓟ } y = 2x + 2y + 6 \qquad \forall\, x,\ y \in T$$

a) Calcula las operaciones: $9 \text{ Ⓟ } 6$, $1 \text{ Ⓟ } 6$, $3 \text{ Ⓟ } 3$, cuando estén definidas.

b) Demuestra que la operación Ⓟ es cerrada en T.

c) ¿Es conmutativa la operación Ⓟ en T?

d) ¿Es asociativa la operación Ⓟ en T?

[1] Editados por la Facultad de Ingeniería, en 1975.

Estructuras Algebraicas

Cuando en un conjunto S se han definido una o varias operaciones binarias $*$, Δ, . . . se acostumbra denotarlo como $(S, *, \Delta, \ldots)$ y se dice que las operaciones $*$, Δ, . . . determinan en S una estructura algebraica y que $(S, *, \Delta, \ldots)$ es un sistema algebráico.

A continuación te presentamos un ejemplo en el que trataremos de ilustrar el concepto de estructura algebraica.

Sea el conjunto M de matrices cuadradas de orden 2 de la forma

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \; / \; a, b \in I \right\}$$

y la siguiente operación binaria que relaciona los elementos de este conjunto.

$$A \; \Phi \; B = A + I + B^T$$

donde A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto M.

Entre las estructuras que puede formar el sistema (M, Φ) las más importantes son la de grupo y grupo abeliano. Analizaremos en base a sus propiedades si Φ determina en M alguna de estas estructuras.

a) En primer término, probaremos que la operación Φ es cerrada en el conjunto M.

Para esto, definamos dos matrices no particulares del conjunto.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad A_1, \; A_2 \in M$$

y operemos con ellas de acuerdo a Φ

$$A_1 \Phi A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 + 1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + 1 + b_2 \end{bmatrix}$$

podemos observar que el resultado es una matriz que pertenece al conjunto M ya que es una matriz diagonal con elementos enteros. Este resultado se puede expresar como: $(A_1 \; \Phi \; A_2) \in M \quad \forall \, A_1, \, A_2 \in M$

b) *Investiguemos ahora si*

$$A_1 \ \Phi \ (A_2 \ \Phi \ A_3) = (A_1 \ \Phi \ A_2) \ \Phi \ A_3 \qquad \forall A_1, A_2, A_3 \in M$$

es decir, si Φ *es asociativa en* M.

Consideremos nuevamente tres matrices no particulares de M.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \ y \ A_3 = \begin{bmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

Operemos con el primer miembro de la ecuación anterior

$$A_1 \ \Phi \ (A_2 \ \Phi \ A_3) = A_1 \ \Phi \begin{bmatrix} a_2 + 1 + a_3 & 0 \\ 0 & b_2 + 1 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 1 + (a_2 + 1 + a_3) & 0 \\ 0 & b_1 + 1 + (b_2 + 1 + b_3) \end{bmatrix}$$

reagrupando, obtenemos

$$A_1 \ \Phi \ (A_2 \ \Phi \ A_3) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + 2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 + b_3 + 2 \end{bmatrix} \text{———} \ (1)$$

Operemos ahora con el lado derecho.

$$(A_1 \ \Phi \ A_2) \ \Phi \ A_3 = \begin{bmatrix} a_1 + 1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + 1 + b_2 \end{bmatrix} \Phi \ A_3 = \begin{bmatrix} (a_1 + 1 + a_2) + 1 + a_3 & 0 \\ 0 & (b_1 + 1 + b_2) + 1 + b_3 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$(A_1 \ \Phi \ A_2) \ \Phi \ A_3 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + 2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 + b_3 + 2 \end{bmatrix} \text{———} \ (2)$$

como las expresiones (1) y (2) son iguales, se cumple esta propiedad.

c) *Comprobemos en este inciso la existencia del elemento idéntico, es decir la existencia de una matriz única.*

$$U = \begin{bmatrix} a_u & 0 \\ 0 & b_u \end{bmatrix} \in M; \ a_u, \ b_u \in I$$

tal que

$$A \ \Phi \ U = U \ \Phi \ A = A \qquad \forall A \in M$$

para esto consideremos a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

que representa a cualquier matriz de M.

$$A \Phi U = \begin{bmatrix} a+1+a_u & 0 \\ 0 & b+1+b_u \end{bmatrix}$$ lo cual, como puedes comprobar, es igual a $U \Phi A$.

De acuerdo a la definición de idéntico, se debe cumplir que - -- $A \Phi U = U \Phi A = A$, es decir,

$$\begin{bmatrix} a+1+a_u & 0 \\ 0 & b+1+b_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad a_u = b_u = -1$$

$$\therefore U = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ que pertenece a M, por tanto, existe elemento idéntico.

d) Existencia de elementos inversos.

De acuerdo a su definición, esta propiedad se cumple si:

$$\forall A \in M \ \exists \ A^{\urcorner} \in M \text{ tal que } A \Phi A^{\urcorner} = A^{\urcorner} \Phi A = U$$

supongamos que:

$$A^{\urcorner} = \begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_i \end{bmatrix} ; \text{ entonces}$$

$$A \Phi A^{\urcorner} = \begin{bmatrix} a+1+a_i & 0 \\ 0 & b+1+b_i \end{bmatrix}$$ lo cual, como puedes comprobar, es igual a $A^{\urcorner} \Phi A$.

De acuerdo a la definición de elementos inversos $A \Phi A^{\urcorner} = A^{\urcorner} \Phi A = U$

$$\begin{bmatrix} a+1+a_i & 0 \\ 0 & b+1+b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ de donde: } \begin{matrix} a_i = -2-a \\ b_i = -2-b \end{matrix}$$

$$\therefore A^{\urcorner} = \begin{bmatrix} -(2+a) & 0 \\ 0 & -(2+b) \end{bmatrix}$$ de esta expresión podemos observar que $A^{\urcorner}$ existe y es única para cada matriz de M y que $A^{\urcorner}$ pertenece a M.

Así, por ejemplo, si:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{\urcorner} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se cumple que:

$$A \oplus A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

Hemos demostrado que el sistema (M, Φ) *cumple las propiedades de*

- *Cerradura*
- *Asociatividad*
- *Existencia de elemento idéntico*
- *Existencia de elementos inversos*

por lo que (M, Φ) *es, al menos, un grupo.*

Por otro lado, se cumple la propiedad conmutativa, es decir:

$$A_1 \Phi A_2 = A_2 \Phi A_1 \qquad \forall A_1, A_2 \in M$$

ya que:

$$A_1 \Phi A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 1 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 \Phi A_1 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 + 1 & 0 \\ 0 & b_2 + b_1 + 1 \end{bmatrix}$$

donde podemos observar que efectivamente, $A_1 \Phi A_2 = A_2 \Phi A_1$

Al cumplirse la conmutatividad adicionalmente a las 4 propiedades anteriores, podemos concluir que (M, Φ) *es un grupo conmutativo (ó grupo -- abeliano).*

Ahora te exortamos a realizar las siguientes actividades que te -- ayudarán a mejorar tus conocimientos sobre estructuras algebraicas.

a) Investiga que se entiende por "ley cancelativa" y que relación tiene con las propiedades de grupo. Te aconsejamos que consultes el libro "Algebra - Moderna" de Frank Ayres Jr. de la serie de compendios Schaum, edit. Mc.Graw Hill.

b) ¿Tiene solución la ecuación:

$$A_0 \Phi X \Phi A_1 \Phi X \Phi A_2 = A_1 \Phi A_0 \Phi X$$

definida en el grupo conmutativo (M, Φ)*?*

Justifica cada paso de tu respuesta de acuerdo a las propiedades - del grupo conmutativo.

c) Describe las estructuras algebraicas que conozcas en función de las propiedades inherentes a cada una de ellas.

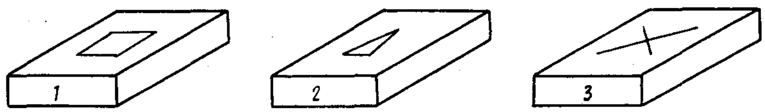
A continuación te proponemos algunos ejercicios, si tropezaras con alguna dificultad acude al asesor de la materia.

3.- Sea el conjunto A definido por:

$$A = \{x \mid x = \frac{r}{4}\ ,\ r \in Q\}$$

Determina si el sistema $(A,+)$, donde $+$ es la adición, es un grupo abeliano.

4.- Se tienen tres cajas numeradas que contienen tres objetos diferentes como se muestra en la siguiente figura.



Se pueden efectuar cambios de posición de acuerdo a las siguientes tres acciones:

Acción 1.- Consiste en dejar los objetos que se encuentren en ese momento en las cajas 1,2 y 3 en su lugar.

Acción 2.- El objeto que se encuentra en la caja 1 pasa a la 2, el de la 2 a la 3 y el de la 3 a la 1.

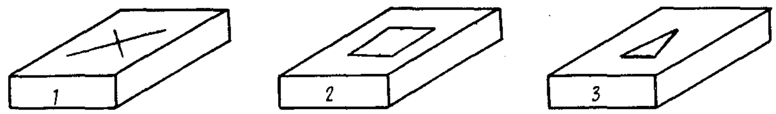
Acción 3.- El objeto que se encuentra en la caja 1 pasa a la 3, el de la 3 a la 2 y el de la 2 a la 1.

La operación binaria que se define a continuación consiste en aplicar una acción A_j en seguida de una acción A_i a la posición de la figura anterior y el resultado es equivalente a una sola acción A_k, lo cual se escribirá A_i (y) $A_j = A_k$

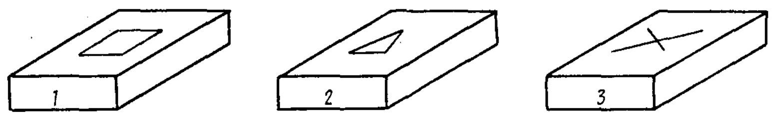
Por ejemplo, si tomamos como punto de partida la posición en la -- que se encuentran los objetos en la figura anterior ¿Qué posición se obtiene si después de la acción 2, se aplica la acción 3?

Veamos:

Después de la acción 2 tenemos:



aplicando la acción 3, queda

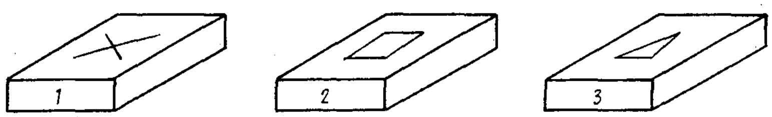


Que es equivalente a aplicar la acción 1 a la posición inicial. Es decir,

$$A_2 \; y \; A_3 = A_1$$

¿Qué posición se obtiene si después de aplicar la acción 2 se apli ca la acción 1? Observemos.

Después de la acción 2:



Aplicando la acción 1 los objetos quedan en la misma posición 2,-- por lo tanto

$$A_2 \; y \; A_1 = A_2$$

Se puede entonces construir la siguiente tabla de la operación binaria (y) entre acciones.

(y)	A_1	A_2	A_3
A_1			
A_2	A_2		A_1
A_3			

Donde se observa que han sido anotados los resultados de A_2 (y) A_3, así como también de A_2 (y) A_1

Completa la tabla de la operación y determina que estructura algebraica forman el conjunto de las acciones y la operación binaria.

5.- Sea A un conjunto no vacío, determina si el conjunto de todos los subconjuntos de A con la operación intersección forman un grupo.

6.- Demuestra que el elemento neutro de un grupo, si existe, es único.

7.- Dado el conjunto $L = \{y \,/\, y = \log x, \quad x > 0, \ x \in R\}$ y la operación binaria

$$\log x_1 \ \square \ \log x_2 = \log (x_1 x_2) \quad \forall x_1 x_2 \in R$$

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$, sabiendo que el conjunto L es cerrado con respecto a $\square$ y que esta operación es asociativa y conmutativa, demuestra que el sistema $(L, \square)$ es un grupo abeliano.

8.- Sea $(G, *)$ un grupo, demuestra que la ecuación $x * a = b$; $a, b \in G$ tiene solución única.

9.- Sea el grupo $(P, *)$, donde $P = \{3p \,/\, p \in I\}$ y la operación $*$ está definida como:

$$a * b = a + b \qquad \forall a, b \in P$$

Determina si el sistema $(U, *)$ es un subgrupo de $(P, *)$, donde $U = \{6p \,/\, p \in I\}$.

10.- Sea el sistema $(B, *, \Theta)$, donde $B = \{4m \,/\, m \in I\}$, y las operaciones -- $*$ y Θ están definidas por:

$$a * b = b + a$$

$$a \,\Theta\, b = \frac{ab}{2} \qquad \forall a, b \in B$$

si $(B, *)$ es un grupo abeliano, determina si $(B, *, \Theta)$ es un anillo.

11.- Sea el sistema $(I, +)$ cuya estructura es de grupo abeliano. Si definimos una operación $*$ tal que:

$$a * b = Kab \quad \forall a, b \in I \quad \text{(donde } K \text{ es cualquier entero)}$$

a) Demuestra que el sistema $(I, +, *)$ tiene estructura de anillo conmutativo.

b) Si $K = 1$ ¿Qué estructura tiene el sistema $(I, +, *)$?

c) Si $K = 0$, determina porque el sistema $(I, +, *)$ no es un dominio entero.

12.- Demuestra que el conjunto $D = \{(a + \sqrt{2}\, b) \,/\, a, b \in Q\}$ forma un campo para las operaciones de adición y multiplicación definidas en R.

Isomorfismos y Homomorfismos

Sean dos grupos $(T, \oplus)$, $(S, \odot)$, donde $T = \{x / x \in R\}$, - - -- $S = \{(x, 2x, 3x) / x \in R\}$ y las operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ se definen por:

$$x \oplus y = x + y, \quad \forall x, y \in R$$

$$(x, 2x, 3x) \odot (y, 2y, 3y) = (x + y,\ 2(x + y),\ 3(x + y)), \quad \forall x, y \in R$$

Definamos la función biyectiva

$$f(T, \oplus) \to (S, \odot) \quad \text{tal que}$$

$$f(x) = (x, 2x, 3x).$$

Así por ejemplo, $f(1) = (1,2,3)$

$f(-4) = (-4, -8, -12)$

Calculemos por un lado

$$1 \oplus (-4) = -3 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)$$

y por otro lado, calculemos $f(1) \odot f(-4)$, es decir,

$$f(1) \odot f(-4) = (1,2,3) \odot (-4, -8, -12) = (-3, -6, -9) \_\_\_\_\_\_\_ (2).$$

Observamos que los resultados mantienen la relación biyectiva establecida puesto que aplicando la función f al resultado de la expresión (1), obtenemos el resultado de la expresión (2), o sea $f(-3) = (-3, -6, -9)$.

Lo anterior lo podemos escribir por tanto de la siguiente manera:

$$f(-3) = f(1 \oplus -4) = f(1) \odot f(-4) = (-3, -6, -9),$$

y en general, se puede probar que:

$$f(x \oplus y) = f(x) \odot f(y), \quad \forall x, y \in T \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)$$

Probémoslo:

$$f(x \oplus y) = f(x + y) = (x + y,\ 2(x + y),\ 3(x + y)) \_\_\_\_\_\_\_\_ (4)$$

$$f(x) \odot f(y) = (x, 2x, 3x) \odot (y, 2y, 3y) = (x + y, 2(x + y),\ 3(x + y)) \_\_\_ (5)$$

como las expresiones (4) y (5) son iguales, entonces (3) es cierta.

Si ahora deseáramos obtener el resultado de operar con más de dos-elementos de S, por ejemplo

$$(-3, -6, -9) \odot (5, 10, 15) \odot (2,4,6) \odot (1,2,3) \quad \_\_\_\_ (6)$$

en virtud de que la función es biyectiva el resultado se podría obtener en -forma equivalente a partir de:

$$-3 \oplus 5 \oplus 2 \oplus 1 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (7)$$

puesto que:

$$f(-3) = (-3, -6, -9)$$
$$f(5) = (5, 10, 15)$$
$$f(2) = (2, 4, 6)$$
$$f(1) = (1, 2, 3)$$

Entonces, $(-3 \oplus 5) \oplus (2 \oplus 1) = 2 \oplus 3 = 5$

y, como $f(5) = (5, 10, 15)$, podemos asegurar que el resultado de la expresión-(6) es $(5, 10, 15)$, o sea,

$$(-3, -6, -9) \odot (5, 10, 15) \odot (2, 4, 6) \odot (1,2,3) = (5, 10, 15)$$

Como puedes observar, $\oplus$ es la adición ordinaria de números reales, por lo que resultó más sencillo obtener el resultado de (6) a partir del resultado de (7).

Las funciones biyectivas que cumplen la ecuación (3) se llaman -- Isomorfismos y como pudiste observar, una de sus aplicaciones fundamentales-es la de poder manejar indistintamente dos estructuras algebraicas siendo - equivalentes los resultados.

En resumen, las condiciones que se deben cumplir para la existencia de un isomorfismo entre grupos, son las siguientes:

Dados dos grupos $(A,*)$ y (B,Δ), exista una función f, $f:A \to B$, tal que:

a) f sea biyectiva, y

b) $f(a * b) = f(a) \Delta f(b)$, $\forall a,b \in A$.

Condiciones semejantes se establecen para otras estructuras algebraicas. En este capítulo nos ocuparemos, además, de Isomorfismos entre anillos.

En muchas ocasiones la relación establecida entre dos estructuras no es biyectiva, sino inyectiva y sin embargo, cumple la condición

$$f(a * b) = f(a) \Delta f(b), \quad \forall a, b \in A \quad y \quad f(a), f(b) \in B.$$

Se dice entonces que f es un "Homomorfismo".

A continuación te presentamos algunos ejemplos que al resolverlos, te ayudarán en la mejor comprensión de este concepto.

13.- Sean $(I, *)$ e (I, Δ) dos grupos, donde las operaciones $*$ y Δ están definidas por:

$$a * b = a + b + 1$$
$$y \quad a \Delta b = a + b, \quad \forall a, b \in I$$

Determina si la función biyectiva $f: I \rightarrow I$, definida por $f(a) = a + 1$, $\forall a \in I$, es un Isomorfismo.

14.- Demuestra que si f es un Isomorfismo entre los grupos $(G, *)$ y (G', Δ), y u es el idéntico de G; entonces, $f(u)$ es el idéntico de G'.

15.- Sean $(Q, +, \cdot)$ y $(R, +, \otimes)$ dos anillos, la operación $(+)$ es la adición usual, $(\cdot)$ es la multiplicación común y $\otimes$ esta definida como:

$$a \otimes b = 3\,a\,b \quad \forall a, b \in R$$

Determina si la función $f(x) = 3x$, $\forall x \in Q$ es un Homomorfismo.

Miscelánea

1.- Considera el conjunto: $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ y la operación binaria $\oplus$ definida por:

$$a_i \oplus a_j = a_{i+j} \qquad si \quad i + j < 3$$

$$a_i \oplus a_j = a_{i+j-3} \qquad si \quad i + j \geq 3$$

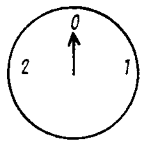
donde a_j y a_i son elementos cualesquiera de A. Demuestra que $(A, \oplus)$ es un grupo abeliano.

2.- Sea el conjunto $M = \{x \,/\, x = \sqrt{3}\, p,\ p \in I\}$ y la operación $a \lozenge b = a + b + \sqrt{3}$, $\forall\, a, b \in M$. Determina si el sistema $(M, \lozenge)$ es un grupo.

3.- Demuestra que si a y b son dos elementos del grupo $(A,*)$, entonces: - - $(a * b)^7 = b^7 * a^7$, donde x^7 es el inverso de x, $\forall x \in A$.

4.- Considera el reloj mostrado en la figura cuya única manecilla tarda unahora en desplazarse de un número al siguiente; así, si la manecilla está en la posición 1, después de dos horas estará en la posición cero, pudiendo representar esto como 1 ⓓ 2 = 0

Obtén que estructura algebraica con respecto a la operación ⓓ - forma el conjunto cuyos elementos son las tres posiciones siendo ⓓ el desplazamiento por hora de las manecillas.



5.- Considera las parejas de números (a,b) y (c,d) donde $a,b,c,d \in R$; - - - $a,c \neq 0$. Sea la operación # definida como:

$$(a,b) \# (c,d) = (a\,c,\ b\,c + d)$$

¿Qué estructura forma el conjunto de estas parejas y la operación # ?

6.- *Demuestra que la intersección de dos subgrupos es también un subgrupo y que su unión en general, no es un subgrupo.*

7.- *Sea el conjunto de puntos del plano xy y las operaciones* $\circ$ *y* ∇ *definidas como sigue:*

$Q \circ R$ = *el punto medio de la recta* $\overline{QR}$: *y*

$P \nabla Q$ = *el punto sobre la prolongación de la recta* $\overline{PQ}$.

La distancia de dicha prolongación es igual a la distancia de P *a* Q *y se encuentra del lado del punto* Q $\forall P, Q, R \in$ *al plano* XY

a) *¿Son* $\circ$ *y* ∇ *operaciones binarias?*

b) *¿Es cierto que* $P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$?

c) *¿Se cumple la distributividad de* ∇ *sobre* $\circ$ *por la izquierda?*

d) *¿Se cumple la distributividad de* ∇ *sobre* $\circ$ *por la derecha?*

8.- *Sea el conjunto* $S = \{x \,/\, x \in I,\ x > -3\}$ *y las operaciones* $\square$ *y* Δ. *La operación* Δ *es cerrada, asociativa, conmutativa sobre la operación* $\square$, *y la operación* $\square$ *está definida como:*

$a \square b = a + b + 2 \quad \forall\, a, b \in S.$

¿Qué estructura algebraica tiene el sistema $(S, \square, \Delta)$?

9.- *El sistema* $(A, +)$ *es un grupo abeliano, determina si* $(A, +, \Delta)$ *es un dominio entero, donde:*

$$A = \{2n \,/\, n \in I\} \quad y \quad a \,\Delta\, b = \frac{1}{2}\, ab \quad \forall a, b \in A$$

10.- *Demuestra que el conjunto* $H = \{x \,/\, x = \frac{a}{2b},\ a, b \in I,\ b \neq 0\}$ *es un campo respecto a las operaciones* $*$ *y* Δ *definidas de la siguiente forma:*

$$x * y = x + y$$

$$x \,\Delta\, y = \frac{1}{2}\, xy \qquad \forall x, y \in H$$

11.- *Demuestra que si la función* $f : G \to H$ *es un Isomorfismo entre los grupos* $(G, *)$ *y* (H, Δ), *la función inversa* $f^{-1} : H \to G$ *también es un Isomorfismo*

12.- Sean $(Q, *)$ y $(R, *)$ dos grupos, donde:

$$a * b = a + b + ab \quad \forall a, b \in Q, \quad ó \quad \forall a, b \in R$$

determina si la función inyectiva $f: Q \to R$ definida por $f(a) = -a \quad \forall a \in Q$ es un Homomorfismo.

13.- Sea $(G, +, \odot)$ un anillo, donde $G = \{Ae^x / A \in R,\ x \in (-\infty, \infty)\}$ y las operaciones $+$, $\odot$ están definidas por:

$$A_1 e^x + A_2 e^x = (A_1 + A_2) e^x$$

$$A_1 e^x \odot A_2 e^x = A_1 A_2 e^x \qquad \forall A_1 e^x,\ A_2 e^x \in G$$

determina si la función biyectiva $f: (G, +, \odot) \to (G, +, \odot)$ definida por -- $f(g) = \frac{d}{dx} g \quad \forall g \in G$ es un Isomorfismo.

Examen de Capítulo

1.- Sean $*$ y $\circ$ dos operaciones binarias definidas en el conjunto A, para los cuales $(A, *)$ es un grupo abeliano y $(A, \circ)$ es un grupo no abeliano.

a) Demuestra que la operación Δ definida como:

$$x \Delta y = (x * y) \circ x \quad \forall x, y \in A$$

es cerrada y no es conmutativa.

b) Establece una condición suficiente para que el conjunto A tenga idéntico por la izquierda para la operación Δ.

20 PTS.

2.- Determina si el conjunto $F = \{x + \sqrt{2} \mid x \in I\}$ y la operación $*$ definida por:

$$a * b = a + b - \sqrt{2} \quad \forall a, b \in F$$

forman un grupo.

20 PTS.

3.- Demuestra que si a^{-1} es el inverso del elemento a de un grupo, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

15 PTS.

4.- Sea $(G, +)$ un grupo abeliano cuyo elemento neutro denotaremos mediante z. Si definimos la multiplicación en G como $a \cdot b = z$, $\forall a, b \in G$. Determina si $(G, +, \cdot)$ es un anillo.

25 PTS.

5.- Sea $(S, \otimes, \odot)$ un anillo, donde $S = \{(a,b) / a, b \in Q\}$

$$\text{y} \quad (a,b) \otimes (c,d) = (a + c,\ b + d) \quad \forall (a,b), (c,d) \in S$$

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac,\ bd)$$

y sea $(E, +, \cdot)$ otro anillo, donde $E = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$, $(+)$ y $(\cdot)$ son la adición y multiplicación comunes para números reales, respectivamente. Determina si la función biyectiva $f : S \to E$ definida por $f(a,b) = b + a\sqrt{2}$ $\forall (a,b) \in S$ es un Isomorfismo.

20 PTS.

Tiempo máximo de solución 2:00 horas.

CAPITULO IV

Espacios Vectoriales

"¿Cómo se pueden sumar cosas que no son números? La explicación consiste en que en álgebra moderna el signo + no significa que se realiza una suma en ningún sentido real. Significa meramente que se está realizando alguna operación que de alguna manera le hace al matemático recordar las reglas de la adición. El parecido es de esquema, no de contenido".

W. Sawyer.

Examen Diagnóstico

1.- Dados los vectores de R^5,

$\bar{v}_1 = (1,0,3,-1,4)$, $\bar{v}_2 = (-1,0,-3,1,-4)$, $\bar{v}_3 = (3,0,1,4,-1)$,

$\bar{v}_4 = (1,0,3,-1,4)$, $\bar{v}_5 = (4,-1,3,0,1)$

¿Cuáles de ellos son iguales?

2.- Sea el polinomio $p(x) = x^4 + 3x - 6$

¿Qué valores deben tomar a,b,c,d y e para que el polinomio

$$q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

sea igual al polinomio $p(x)$?

3.- Tabula la función

$$f(S) = \begin{cases} 3S + S^2, & S \leq 0 \\ 3S - S^2, & S > 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[-2, 2]$ para $S \in I$

4.- Calcula la primera y la segunda derivada de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + x$

b) $f_2(x) = 3e^{4x} + 3x \cos x$

c) $f_3(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x \neq 0$

Si tienes alguna duda en la resolución de estos ejercicios te sugerimos consultes los siguientes libros.

- Apuntes de Geometría Analítica
  Facultad de Ingeniería, UNAM
  Página 14

- Algebra, 1a. parte
  Facultad de Ingeniería, UNAM
  Página 129

- Cálculo Diferencial e Integral
  Frank Ayres Jr.
  Edit. Mc. Graw-Hill, serie Schaum
  Páginas 28 a 34

Productos de Aprendizaje

A continuación te presentamos los objetivos más importantes que debes alcanzar al terminar este tema:

IV.1 Dada una estructura algebraica determinar si se trata de un espacio vectorial.

IV.2 Dado un conjunto de vectores, obtener el espacio vectorial que generan; una base y la dimensión del mismo.

IV.3 Dada una matriz, obtener el espacio vectorial generado por los renglones o columnas de la misma y el rango de esa matriz.

IV.4 Dado un sistema de ecuaciones lineales, expresar su solución como una variedad lineal.

IV.5 Dado un conjunto de funciones definidas en un intervalo, obtener el espacio vectorial que generan, una base y la dimensión del mismo.

Introducción

El álgebra lineal es la parte de las matemáticas que estudia los espacios vectoriales y algunos conceptos relacionados con ellos. Por lo tanto, el tema fundamental de cualquier curso de álgebra lineal es precisamente el de espacio vectorial y será estudiado en este capítulo.

A los espacios vectoriales también se les llama espacios vectoriales lineales o simplemente espacios lineales.

Un espacio vectorial es un conjunto de elementos que satisfacen ciertas propiedades [1] y a los elementos del espacio vectorial se les llama vectores.

Generalmente, los alumnos que inician el estudio del álgebra lineal ya han tenido contacto con el concepto de vector y están familiarizados con una serie de propiedades interesantes que tienen estos objetos. Pero, generalmente, sólo han visto casos particulares de vectores.

Uno de los objetivos de este capítulo, es mostrar al estudiante que existe una gran cantidad de vectores distintos a los que habitualmente conoce.

Así, por ejemplo, al terminar este capítulo deberá haber aprendido que la función $\operatorname{sen} x$ o cualquier otra función continua es un vector, y que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

y la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

son también vectores, etc.

---

[1] Por el momento, no mencionaremos cuales son dichas propiedades; pero el lector interesado puede consultar, por ejemplo, la página 63 del Algebra Lineal de Seymour Lipschutz edit. Mc Graw-Hill o las páginas 163 y 164 del Algebra Lineal y Aplicaciones de Francis G. Florey edit. Prentice-Hall.

En todos los casos el estudiante deberá saber explicar por qué cada uno de los objetos mencionados son vectores. La explicación siempre es muy sencilla y está basada en el hecho de que cualquier conjunto, por arbitrario que parezca, pero tal que satisfaga ciertas propiedades, se le llama espacio vectorial y a sus elementos vectores.

Todos los espacios vectoriales tienen propiedades comunes que es conveniente estudiar en general y sin hacer referencia a ningún caso especial lo cual podría obscurecer u ocultar lo más esencial del concepto. Una de las ventajas de esta abstracción es que las conclusiones que se deriven serán válidas para todos los espacios vectoriales.

Cuando en matemáticas se estudian los conceptos en forma abstracta, en un principio las cosas pueden parecer más complicadas, pero una vez que se ha comprendido el proceso de abstracción todo lo demás resulta más sencillo.

Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto V que satisface determinados axiomas con respecto a la adición de vectores y a la multiplicación de un vector por un escalar. Antes de continuar te sugerimos leas estos axiomas en la bibliografía indicada en la introducción de este capítulo.

Veamos ahora un ejemplo. Sea V el conjunto definido en la siguiente forma:

$$V = \{b\sqrt{2} \mid b \in Q\} \qquad (1)$$

es decir, V es el conjunto de todos los números que se obtienen al multiplicar el número irracional $\sqrt{2}$ por los números racionales.

Consideremos además la operación de adición usual entre elementos de V, esto es,

$$b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2} = (b_1 + b_2)\sqrt{2} \in V$$

y la operación de multiplicación entre elementos de V y elementos del campo de los números racionales Q, esto es,

$$\alpha (b\sqrt{2}) = (\alpha b)\sqrt{2} \in V, \text{ donde } \alpha \in Q.$$

A los elementos de Q los llamamos escalares.

Determinemos ahora si V es un espacio vectorial sobre el campo de los racionales. Para esto, investiguemos si se satisfacen todas las propiedades que definen a los espacios vectoriales.

Analicemos primero si se satisfacen las propiedades relacionadas con la adición.

- Asociatividad de la adición

  Debemos investigar si se cumple que

  $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$ para cualesquiera elementos $\overline{u}, \overline{v}$ y $\overline{w}$ de V.

Como $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$ son elementos de V serán de la forma

$$\overline{u} = b_1\sqrt{2}\,, \quad \overline{v} = b_2\sqrt{2}\,, \quad \overline{w} = b_3\sqrt{2}$$

donde b_1, b_2, b_3 son números racionales.

Entonces, por un lado tenemos:

$$\begin{aligned}(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w} &= (b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2}\,) + b_3\sqrt{2}\\ &= (b_1+b_2)\sqrt{2} + b_3\sqrt{2}\\ &= \left[(b_1+b_2)+b_3\right]\sqrt{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w}) &= b_1\sqrt{2} + (b_2\sqrt{2} + b_3\sqrt{2}\,)\\ &= b_1\sqrt{2} + (b_2+b_3)\sqrt{2}\\ &= \left[b_1+(b_2+b_3)\right]\sqrt{2}\\ &= \left[(b_1+b_2)+b_3\right]\sqrt{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)}\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que b_1, b_2 y b_3 son números racionales y por lo tanto,

$$(b_1+b_2)+b_3 = b_1+(b_2+b_3)$$

Comparando (2) y (3) tenemos que se cumple

$$\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w}) = (\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$$

- Existencia del vector cero.

Debemos investigar ahora si existe $\overline{0} \in V$ tal que $\overline{v}+\overline{0} = \overline{0}+\overline{v} = \overline{v}$, $\forall\, \overline{v} \in V$ es decir, debemos buscar un número que sumado con $\overline{v}$ dé como resultado $\overline{v}$. Obviamente, el número buscado es el número cero, pero tenemos que asegurarnos que es un elemento de V, lo cual es fácil verificar. En efecto, si hacemos $b = 0$ en la expresión (1) obtenemos el número cero. Por lo tanto, sí existe el vector cero en el conjunto V.

- Existencia de elementos inversos.

Investiguemos ahora si a cada vector $\overline{v}$ de V le corresponde un vector $(-\overline{v})$ tal que $(-\overline{v})+\overline{v} = \overline{v}+(-\overline{v}) = \overline{0}$ $\forall\, \overline{v} \in V$. Es decir, debemos buscar un número que sumado con $\overline{v}$ de como resultado el cero.

Sea $\overline{v} \in V$, es decir, $\overline{v}$ es de la forma $\overline{v} = b\sqrt{2}$

Si hacemos $(-\overline{v}) = (-b)\sqrt{2}$ vemos que tiene la propiedad requerida.

En efecto,
$$\begin{aligned}\overline{v}+(-\overline{v}) &= b\sqrt{2} + (-b)\sqrt{2}\\ &= (b+(-b))\sqrt{2}\\ &= (b-b)\sqrt{2}\\ &= 0\\ &= (-\overline{v})+\overline{v}\end{aligned}$$

Además como $(-b)\sqrt{2}$ es un elemento de V, entonces hemos demostrado que $\forall\, \overline{v} \in V$, existe $-\overline{v} \in V$ que tiene la propiedad requerida.

- Conmutatividad de la adición

Investiguemos si se cumple que $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$

Sean $\overline{u}$, $\overline{v} \in V$, es decir, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son de la forma $\overline{u}=b_1\sqrt{2}$ y $\overline{v}=b_2\sqrt{2}$

Entonces, por un lado,
$$\overline{u}+\overline{v} = b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2} = (b_1+b_2)\sqrt{2} \qquad (4)$$

y por otro lado,
$$\begin{aligned}\overline{v}+\overline{u} &= b_2\sqrt{2} + b_1\sqrt{2} = (b_2+b_1)\sqrt{2}\\ &= (b_1+b_2)\sqrt{2} \qquad (5)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que b_1 y b_2 son números racionales y por lo tanto $b_1+b_2=b_2+b_1$.

Comparando, pues, (4) y (5) vemos que sí se cumple la conmutatividad.

Ahora analicemos las propiedades relacionadas con la multiplicación de un vector por un escalar.

- Investiguemos si se cumple que
$$\alpha(\overline{u}+\overline{v}) = \alpha\overline{u} + \alpha\overline{v}, \quad \forall\, \overline{u},\overline{v} \in V \quad y \ \forall\, \alpha \in Q$$

Sean $\overline{u}=b_1\sqrt{2}$ y $\overline{v}=b_2\sqrt{2}$ con b_1, $b_2 \in Q$

Desarrollando el lado izquierdo tenemos:
$$\begin{aligned}\alpha(\overline{u}+\overline{v}) &= \alpha(b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2})\\ &= \alpha\left[(b_1+b_2)\sqrt{2}\right]\\ &= \left[\alpha(b_1+b_2)\ \sqrt{2}\right]\\ &= (\alpha b_1 + \alpha b_2)\sqrt{2} \qquad (6)\end{aligned}$$

Desarrollando ahora el lado derecho:

$$\alpha\overline{u}+\alpha\overline{v} = \alpha(b_1\sqrt{2}) + \alpha(b_2\sqrt{2})$$
$$= (\alpha b_1)\sqrt{2} + (\alpha b_2)\sqrt{2}$$
$$= (\alpha b_1 + \alpha b_2)\sqrt{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (7)$$

como (6) y (7) son iguales, se cumple la propiedad $\alpha(\overline{u}+\overline{v}) = \alpha\overline{u}+\alpha\overline{v}$.

- *Ahora veamos si se cumple que:*

$$(\alpha+\beta)\overline{u} = \alpha\overline{u}+\beta\overline{u}, \ \forall\, \overline{u}\in V \ \ y \ \ \forall\, \alpha,\beta \in Q$$

Sea $\overline{u} = b\sqrt{2}$. *Entonces, desarrollando el lado izquierdo*

$$(\alpha+\beta)\,\overline{u} = (\alpha+\beta)(b\sqrt{2}) = \alpha(b\sqrt{2}) + \beta(b\sqrt{2})$$
$$= (\alpha b)\sqrt{2} + (\beta b)\sqrt{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (8)$$

Ahora, con el lado derecho:

$$\alpha\overline{u}+\beta\overline{u} = \alpha(b\sqrt{2}) + \beta(b\sqrt{2}) = (\alpha b)\sqrt{2} + (\beta b)\sqrt{2} \text{\_\_\_\_\_} (9)$$

comparando (8) y (9), vemos que se cumple la propiedad $(\alpha+\beta)\overline{u} = \alpha\overline{u}+\beta\overline{u}$

- *La siguiente propiedad que debemos verificar si se cumple es* $\alpha(\beta\overline{u}) = (\alpha\beta)\overline{u}, \ \forall\, \overline{u}\in V, \ \alpha,\beta\in Q$

Sea, $\overline{u} = b\sqrt{2}$

Entonces, por un lado,

$$\alpha(\beta\overline{u}) = \alpha\left[\beta(b\sqrt{2})\right] = (\alpha\beta)(b\sqrt{2}) = (\alpha\beta b)\sqrt{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (10)$$

y por otro,

$$(\alpha\beta)\overline{u} = (\alpha\beta)(b\sqrt{2}) = (\alpha\beta b)\sqrt{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (11)$$

Por tanto, también se cumple esta propiedad.

- *Finalmente investiguemos si se cumple que* $1\,\overline{u} = \overline{u}$, *donde 1 es el elemento unidad de los números racionales.*

Sea $\overline{u} = \alpha\sqrt{2}$

Entonces, $1\,\overline{u} = 1(\alpha\sqrt{2})$
$$= (1\,\alpha)\sqrt{2}$$
$$= \alpha\sqrt{2}$$
$$= \overline{u}$$

En virtud de que también se satisface esta propiedad, concluimos que el conjunto V es un espacio vectorial y por lo tanto, sus elementos son vectores.

Para reafirmar más estos conceptos te sugerimos consultes:

Algebra Lineal
Seymour Lipschutz
Edit. Mc Graw-Hill, serie Schaum
Páginas 63 a 71

Calculus, Vol. II
Tom M. Apostol
Edit. Reverté
Páginas 3 a 9

Algebra Lineal y Aplicaciones
Francis Florey
Edit. Prentice Holl
Páginas 163 a 168

También, te sugerimos resuelvas los siguientes ejercicios:

1.- Determina si el conjunto $T = \{t \mid t \in R,\ t > 0\}$ *en el que se definen las operaciones de "adición" y "multiplicación por un escalar" de la siguiente manera:*

$$x + y = xy, \quad \forall\, x, y \in T$$
$$\alpha x = x^{\alpha}, \quad \forall\, x \in T,\ \alpha \in R$$

forma un espacio vectorial sobre R.

2.- Determina si el conjunto $A = \{(1, y) \mid y \in R\}$ *es un subespacio del espacio vectorial* R^2

3.- Determina si el conjunto $P = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0,\ x, y \in R\}$ *es un subespacio del espacio vectorial* R^2.

4.- Considera el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a + b = 1,\ a, b \in R \right\}$

Determina si el conjunto A es un subespacio del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos sobre el campo de los números reales.

Combinación Lineal, Dependencia Lineal y Base

Sean m vectores de un espacio vectorial, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_m$

A la expresión $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{v}_i = \alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \ldots + \alpha_m \overline{v}_m$ se le llama combinación lineal de los vectores $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_m$ donde los α_i son escalares cualesquiera.

Para comprender mejor este importante concepto consideremos los siguientes ejemplos.

Sea el conjunto $A = \{(2,4,1,2),\ (1,2,0,1)\}$ subconjunto del espacio vectorial $V = \{(x,2x,x-y,z) \mid x,y,z \in R\}$ definido sobre el campo de los números reales.

La combinación lineal general de los vectores de A es,

$$\alpha_1(2,4,1,2) + \alpha_2(1,2,0,1)$$

Si ahora damos los valores de -1 y 2 a los escalares α_1 y α_2 respectivamente, obtendremos $-1(2,4,1,2) + 2(1,2,0,1) = (0,0,-1,0)$, o sea, el vector $(0,0,-1,0)$ es igual a una combinación lineal de los vectores de A y se dice que al vector $(0,0,-1,0)$ lo generan los vectores de A.

Como se puede observar, si damos valores diferentes a α_1 y α_2 de los dados anteriormente podremos generar una infinidad de vectores.

Podríamos ahora preguntarnos si cualquier vector de V es igual a alguna combinación lineal de los vectores de A (es decir, si cualquier vector de V se puede generar con los vectores de A).

Para responder a esta pregunta consideremos los vectores $\overline{v}_1 = (7,14,5,7)$ y $\overline{v}_2 = (0,0,0,-1)$ del espacio V.

Investiguemos si estos vectores son iguales a alguna combinación lineal de los vectores de A.

Si $\overline{v}_1$ fuera igual a una combinación lineal de A se tendría

$$\overline{v}_1 = (7,14,5,7) = \alpha_1(2,4,1,2) + \alpha_2(1,2,0,1)$$

para algún α_1 y algún α_2.

Desarrollando: $(2\alpha_1 + \alpha_2, 4\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (7,14,5,7)$
igualando:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 7 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 14 \\ \alpha_1 &= 5 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 7 \end{aligned}$$

de donde, $\alpha_1 = 5$ y $\alpha_2 = -3$

De esto se concluye que $\overline{v}_1$ sí es una combinación lineal de los vectores de A.

Veamos ahora para $\overline{v}_2$.

Nuevamente, si $\overline{v}_2$ fuera igual a una combinación lineal de A se tendría:

$\overline{v}_2 = (0,0,0,-1) = \alpha_1(2,4,1,2) + \alpha_2(1,2,0,1)$.

Desarrollando llegamos a

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &= -1 \end{aligned}$$

Fácilmente puedes determinar que el sistema de ecuaciones es incompatible por lo que el vector $\overline{v}_2$ no es una combinación lineal de los vectores de A.

De lo anterior, se concluye que combinando linealmente los vectores de A podemos generar una infinidad de vectores de V. Sin embargo, no todos los vectores de V se pueden generar combinando linealmente los vectores de A.

Debemos hacer notar que en otros casos, como veremos más adelante, si existen subconjuntos de un espacio vectorial cuyos vectores al combinarse linealmente generan todos los vectores del espacio vectorial.

Pasemos a estudiar ahora los conceptos de dependencia lineal y base de un espacio vectorial.

Un conjunto $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ de vectores de un espacio vectorial V sobre un campo K, es linealmente dependiente si existen escalares α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, no todos nulos, que satisfacen la ecuación.

$$\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{v}_n = \overline{0}$$

En caso contrario, si la ecuación sólo admite la solución trivial $(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0)$, diremos que S es linealmente independiente.

Se llama base de un espacio vectorial V a cualquier conjunto B de vectores de V tal que:

1.- B es linealmente independiente.
2.- Cualquier vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de B.

Para comprender bien estas definiciones veamos el siguiente ejemplo.

Como sabemos, a cada punto (a,b) del plano XY le podemos asignar un vector de posición de la forma.

$$\bar{u} = (a,b) = a\,i + b\,j$$

Sea el vector $\bar{v} = (3,2) = 3i + 2j$.

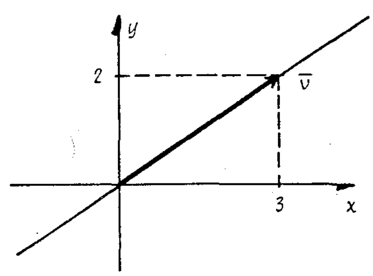
Si $\bar{u} = (a,b) = a\,i + b\,j$ es cualquier vector del plano XY, es decir, cualquier vector de R^2, ¿podríamos expresar a $\bar{u}$ mediante una combinación lineal de $\bar{v}$?, es decir, ¿es posible tener $\bar{u} = \alpha\bar{v}$ para algún $\alpha \in R$? Veamos:

Si $\bar{u} = (a,b) = \alpha(3,2)$

se tiene que

$$3\alpha = a$$
$$2\alpha = b$$

El sistema de ecuaciones anterior no siempre tiene solución ya que para cualesquiera valores de a y b no es posible determinar α excepto cuando $a = \frac{3}{2}b$, que es el caso en el que $\bar{u}$ es múltiplo de $\bar{v}$. Gráficamente podemos representar esto de la siguiente manera:



Podemos decir que $\overline{v}$ genera una recta que contiene a todos los vectores múltiplos de $\overline{v}$.

De lo anterior, concluimos que no cualquier vector de R^2 se puede expresar como una combinación lineal de $\overline{v}$ sino solamente los vectores que están sobre la recta en la que está contenido dicho vector $\overline{v} = (3,2)$

Consideremos ahora los vectores $\overline{v} = (3,2)$ y $\overline{w} = (-1,3)$

Determinemos si es posible que cualquier vector de R^2, $\bar{x} = (a,b)$ se puede expresar como una combinación lineal de $\overline{v}$ y $\overline{w}$:

$$\begin{aligned}(a,b) &= \alpha_1(3,2) + \alpha_2(-1,3)\\ &= (3\alpha_1 - \alpha_2,\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2)\end{aligned}$$

de donde

$$3\alpha_1 - \alpha_2 = a$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = b$$

obteniéndose

$$\alpha_1 = \frac{3a+b}{11}$$

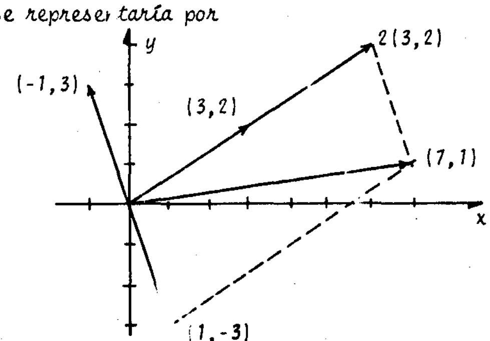
$$\alpha_2 = \frac{3b-2a}{11}$$

Como puede observarse, dados cualesquiera valores de a y b siempre es posible determinar los valores de α_1 y α_2 y por lo tanto cualquier vector de R^2 se puede expresar como una combinación lineal de $\overline{v}$ y $\overline{w}$ o en otras palabras, $\overline{v}$ y $\overline{w}$ generan R^2.

Por ejemplo, el vector $(7,1)$ se expresaría como

$$(7,1) = 2(3,2) + (-1)(-1,3)$$

y gráficamente se representaría por



esto último se obtiene por el conocido "método del paralelogramo".

Consideremos ahora los vectores $\overline{v}=(3,2)$, $\overline{w}=(-1,3)$ y $\overline{u}=(2,-6)$. Haciendo el mismo análisis vemos que cualquier vector de R^2 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $\overline{v}$, $\overline{w}$ y $\overline{u}$.

Por ejemplo, el vector $(8,20)$ se puede expresar como

$$(8,20) = 4\overline{v} + 0\,\overline{w} + (-2)\,\overline{u}$$

Como podemos observar, tanto el conjunto $\{\overline{v},\overline{w}\}$ como el conjunto $\{\overline{v},\overline{w},\overline{u}\}$ generan R^2.

Sin embargo, el conjunto $\{\overline{v},\overline{w}\}$ es linealmente independiente, mientras que el conjunto $\{\overline{v},\overline{w},\overline{u}\}$ es linealmente dependiente ya que $\overline{u} = -\ 2\overline{w}$.

Por tanto, el conjunto $\{\overline{v},\overline{w}\}$ **es una base** de R^2 mientras que $\{\overline{v},\overline{w},\overline{u}\}$ no lo es.

De todo lo anterior, podemos obtener las siguientes conclusiones:

1.- El vector $\overline{v}=(3,2)$ no puede generar R^2, es decir, no puede generar el plano XY. Sin embargo, si genera R^1, que geométricamente es una recta que pasa por el origen.

2.- Los vectores $\overline{v}=(3,2)$ y $\overline{w}=(-1,3)$, generan R^2 y forman una base.

3.- Los vectores $\overline{v}=(3,2)$, $\overline{w}=(-1,3)$ y $\overline{u}=(2,-6)$ generan R^2 y no forman una base.

4.- No todo conjunto generador de un espacio vectorial es una base.

Ahora, trata de contestar las siguientes preguntas.

a) Si una recta no pasa por el origen, ¿podría considerarse ésta como un espacio vectorial? ¿Por qué?

b) Si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son dos vectores linealmente independientes de R^3, ¿qué espacio vectorial generan?, ¿qué interpretación geométrica tiene dicho espacio vectorial?

c) Si $\overline{v}$ es un vector de R^3, ¿que espacio vectorial genera? ¿Qué interpretación geométrica tiene dicho espacio vectorial?

Todo lo referente a los conceptos mencionados (dependencia lineal, base, etc.) se aplica a cualquier espacio vectorial, sólo que en la mayoría de éstos se carece de una interpretación geométrica.

Para reforzar tus conocimientos sobre estos conceptos te sugerimos que consultes los siguientes libros:

- Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones
  Francis G Florey
  Editorial Prentice-Hall
  Páginas 117 a 193

- Calculus, Vol. II
  Tom M. Apostol,
  Editorial Reverté
  Páginas 3 a 4

- Algebra Lineal
  Paul Shields
  Editorial Interamericana
  Páginas 63 a 87

También te invitamos a resolver los siguientes ejercicios.

5.- ¿Para qué valor de k el vector $\overline{u} = (1, k, 5)$ de R^3 será una combinación lineal de los vectores $\overline{v} = (1, -3, 2)$ y $\overline{w} = (2, -1, 1)$?

6.- Demuestra que si el sistema

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$$
$$\gamma x_1 + \delta x_2 = 0 \,, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$$

tiene una solución diferente de la trivial, entonces, los vectores $\overline{v} = (\alpha, \beta)$ y $\overline{w} = (\gamma, \delta)$ en R^2 deben ser linealmente dependientes.

7.- *Si el conjunto de vectores* $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ *es linealmente independiente, demuestra que si*

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n = \beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2 + \ldots + \beta_n \bar{v}_n$$

entonces

$$\alpha_1 = \beta_1 \ , \quad \alpha_2 = \beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n = \beta_n$$

8.- *Sea* $S = \{ax^3 + 2ax^2 + 3bx + b \mid a, b \in R\}$ *un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Obtén una base y la dimensión de dicho espacio vectorial.*

9.- *Del siguiente conjunto*

$$A = \{(1, -3, 2), \ (2, 4, 1), \ (3, 1, 3), \ (1, 1, 1)\}$$

a) *Elige una base de* R^3

b) *Expresa los vectores de la base canónica de* R^3 *como combinaciones lineales de los vectores de la base elegida en* (a).

10.- *Considera a* $G = \{1, t^2, t\}$ *como una base del espacio vectorial* $P = \{at^2 + bt + c \mid a, b, c \in R\}$ *definido sobre* R.

Obtén el vector de coordenadas de

$p(t) = 3t^2 + 2$ *en la base* G.

11.- *Sea* V *un espacio vectorial sobre* R, *y* $B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ *una de sus bases. Si* $(\bar{v})_{B_1} = (2, -1, 3)$, *determina las coordenadas de* $\bar{v}$ *en la base* $B_2 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ *donde,*

$$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$$
$$\bar{w}_2 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3$$
$$\bar{w}_3 = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 3\bar{v}_3$$

12.- Sea el espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & -a \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in R \right\}$$

definido sobre el campo de los reales.

a) Escribe una base de M.

b) ¿Cuál es la dimensión de M?

c) Escribe el vector $\bar{v} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores de la base dada en (a).

13.- Completa correctamente las siguientes expresiones, escribiendo en las líneas las palabras correspondientes.

Sea el conjunto $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ una base del espacio vectorial V definido sobre un campo K, entonces:

a) La ecuación

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3 + \alpha_4 \bar{v}_4 = \bar{0}$$

se satisface si, y sólo si, ______________________

b) Todo conjunto con más de cuatro vectores de V es linealmente

____

c) El conjunto $\{\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es linealmente ______________________

d) Si las coordenadas del vector $\bar{w} \in V$ en la base B son $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, entonces, $\bar{w} =$ ______________________

e) El conjunto $\{\bar{v}_2, \bar{v}_4, \bar{0}\}$, donde $\bar{0}$ es el vector cero de V, es linealmente

____

14.- Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los números reales; si

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad y \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

son dos bases de V, obtén la matriz de transición de la base A a la base B.

Isomorfismos entre R^n y otros espacios vectoriales. Aplicaciones

Como vimos en el capítulo III, los isomorfismos nos permiten trabajar con los elementos de un conjunto A e interpretar los resultados en términos de los elementos de otro conjunto B.

En este bloque, estableceremos un isomorfismo entre el espacio R^n y un espacio vectorial V. Trabajaremos con vectores columna de R^n o vectores renglón de R^n y el resultado lo aplicaremos al espacio V.

Esto obedece a que en general resulta más sencillo trabajar con los vectores renglón o columna que con los vectores de otro espacio vectorial arbitrario.

Por ejemplo, a los vectores de la forma $ai + bj + ck$, se les puede hacer corresponder el vector renglón (a,b,c), o bien, el vector columna

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

De tal manera, que la suma de vectores

$$(a_1 i + b_1 j + c_1 k) + (a_2 i + b_2 j + c_2 k) = (a_1 + a_2) i + (b_1 + b_2) j + (c_1 + c_2) k$$

se puede expresar como:

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

o

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora el conjunto de todos los polinomios de la forma

$$P = \{p(x) \;/\; p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\; a,b,c,d \in R\}$$

El polinomio $p(x)$ se puede representar mediante los cuatro coeficientes bajo la forma

$$(a,b,c,d) \qquad o \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

y así, la suma de dos polinomios

$$p_1(x) + p_2(x) = (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)$$

se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

o bien, como

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1 + c_2,\ d_1 + d_2)$$

Determinemos ahora si el subconjunto de P,

$$S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{x^3 + 2x^2 - x + 1,\ 4x^2 - 2,\ 3x^3 + 6x^2 - 3x + 3,\ x^3 - x^2\}$$

es linealmente dependiente o independiente.

Como el espacio P es isomorfo a R^4, cada uno de estos polinomios los podemos expresar como

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{(1,2,-1,1),\ (0,4,0,-2),\ (3,6,-3,3),\ (1,-1,0,0)\}$$

y, para determinar si es linealmente dependiente o independiente este conjunto, emplearemos el concepto del espacio vectorial generado por los renglones de una matriz.

Así, con los cuatro vectores se puede establecer el siguiente arreglo matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde, calculando el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se concluye que el conjunto S es linealmente dependiente. Y entonces, el espacio que genera S es

$$V = \{a(1,2,-1,1) + b(0,1,0,-\tfrac{1}{2}) + c(0,0,1,-7) \mid a,b,c \in R\}$$

$$o, \quad V = \{(a, 2a + b, -a + c, a - \tfrac{1}{2} b - 7c) \mid a,b,c \in R\}$$

siendo una de sus bases el conjunto

$$\{(1,2,-1,1), (0,1,0,-\tfrac{1}{2}), (0,0,1,-7)\}$$

y en forma de polinomios:

$$W = \{p(x) \mid p(x) = ax_3 + (2a + b)x_2 + (-a + c)x + (a - \tfrac{1}{2} b - 7c\}$$

siendo una de sus bases

$$B = \{x^3 + 2x^2 - x + 1, \quad x^2 - \tfrac{1}{2}, \quad x - 7\}$$

Si hubiésemos trabajado directamente con los vectores de S sin hacer uso del isomorfismo, la obtención de W y B hubiera resultado más laboriosa.

Otra aplicación de los espacios R^n la podemos ver para el siguiente caso:

Sea un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Podemos considerar a cada renglón de la matriz de coeficientes como un vector de R^n y a cada columna de la matriz como un vector de R^m.

Si denotamos a las columnas por

$$\bar{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad y \quad a \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix},$$

entonces, el sistema de ecuaciones lo podemos expresar como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

es decir,

$$x_1\bar{c}_1 + x_2\bar{c}_2 + \ldots + x_n\bar{c}_n = \bar{b}$$

lo cual quiere decir que el sistema de ecuaciones tendrá solución si y sólo si el vector $\bar{b}$ *es una combinación lineal de los vectores* $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$ *; o en otras palabras, el sistema de ecuaciones tiene solución si y sólo si el vector*

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

en R^m *pertenece al espacio generado por los vectores* $\bar{c}_j$

Para conocer otros enfoques relacionados con estos temas, te sugerimos consultes la siguiente bibliografía:

- Cálculo de Varias Variables con Algebra Lineal
  Phillip C. Curtis
  Edit. Limusa
  páginas 89 a 100

- Introducción al Algebra Lineal
  Howard Anton
  Edit. Limusa
  páginas 169 a 176 y 215 a 219

- Elementos de Algebra Lineal
  M. Marcus y H. Minc
  Edit. Limusa
  páginas 87 a 94

Te invitamos también a resolver los siguientes ejercicios.

15.- Si S representa al conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtén una base del espacio vectorial sobre R formado por los elementos de S y determina la dimensión de dicho espacio.

16.- a) Demuestra que el subespacio de R^3

$$E = \{(x, y, -2x + y) \mid x, y \in R\}$$

es generado por los vectores renglón de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

b) ¿Es el conjunto $B = \{(-2, 0, 4), (o, 1/2, 1/2)\}$ una base de E? Justifica tu respuesta.

17.- Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 3y - 2w + z &= 5 \\ 3x + 2y + w - z &= 3 \\ -3x + 5y - 8w + 5z &= 9 \\ 2x - y + 3w - 2z &= -2 \end{aligned}$$

expresa su solución como una variedad lineal.

18.- Determina cuales de los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes o independientes

a) $\{e^x, e^{-x}\}$

b) $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x + 1), \cos x\}$

c) $\{\log_{10} x, \log_e x\}$

19.- Considera el conjunto de funciones

$$G = \{3x^2, 2x - 1, x^2 + 1, 1\}$$

definidas en $-\infty < x < +\infty$, $x \in R$

a) Calcula el wronskiano de G.

b) Determina si G es un conjunto linealmente dependiente o independiente.

20.- Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0] \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

a) Grafica las funciones $f(x)$ y $g(x)$

b) Obtén el wronskiano del sistema de funciones en el intervalo $[-1, 1]$

c) Las funciones $f(x)$ y $g(x)$, ¿son linealmente dependientes o independien-- tes en $[-1, 1]$?

Miscelánea

1.- Sea $V = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$ el conjunto en el cual se definen las operaciones de adición y multiplicación por un escalar de la siguiente manera:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall\, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$$

$$\alpha \bar{v} = \alpha(x,y) = (\alpha x,\ 0), \quad \forall\, \bar{v} \in V, \quad \alpha \in R.$$

Determina cuál es la propiedad que al no satisfacerse impide que V sea un espacio vectorial sobre R.

2.- Determina si el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in R \right\}$ es un espacio vectorial sobre R, estando las operaciones de adición y multiplicación definidas como

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + 2 \\ b_1 + b_2 + 2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \quad \forall\, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in A$$

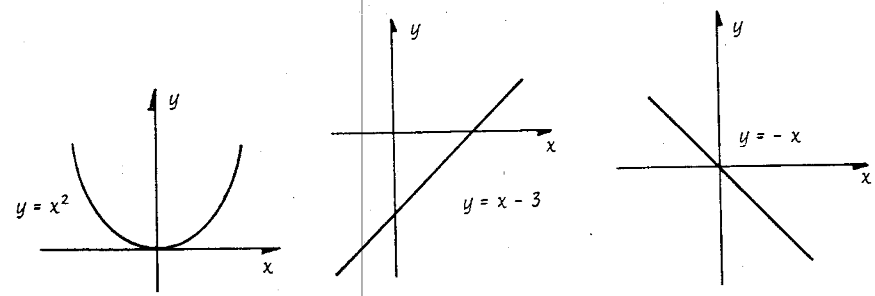
$$\alpha \bar{v} = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & b \\ b & \alpha c \end{bmatrix}, \quad \forall\, \bar{v} \in A \quad y \quad \forall\, \alpha \in R$$

3.- Sean $\bar{u}, \bar{v} \in R^n$. Demuestra que $W = \{\alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \mid \alpha, \beta \in R\}$ es un subespacio de R^n.

4.- La siguiente expresión es una ecuación diferencial $f'' - f = 0$

Demuestra que el conjunto de todas las funciones que satisfacen dicha ecuación es un subespacio sobre R.

5.- Sean las siguientes curvas



(a) (b) (c)

Determina cuales de los conjuntos de puntos contenidos en las curvas, constituyen un subespacio de R^2.

6.- Demuestra que dos vectores cualesquiera $\overline{u} = (a,b,c)$, $\overline{v} = (p,q,r)$, $\overline{u},\overline{v} \in R^3$ son linealmente dependientes si y sólo si, su producto vectorial $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$.

7.- Se tienen tres vectores $\overline{v}_1 = 1$, $\overline{v}_2 = t - 1$, $\overline{v}_3 = (t-1)^2$

a) Demuestra que $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es una base del espacio vectorial de los polinomios de la forma $\{at^2 + bt + c \mid a,b,c \in R\}$ sobre R.

b) Obtén las coordenadas del vector $\overline{w} = 2t^2 - 5t + 6$ con respecto a dicha base.

8.- Sean $\overline{u} = (x_1, x_2)$ y $\overline{v} = (y_1, y_2)$ dos vectores de R^2 tales que

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$$

a) Demuestra que $B = \{\overline{u}, \overline{v}\}$ es una base de R^2

b) Obtén las coordenadas del vector (a,b) en la base ordenada B.

9.- *Sea* $A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ *una base de* R^2*; demuestra que cualquier conjunto* $B = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$, $B \subset R^2$, *es también una base de* R^2 *si y sólo si el producto escalar entre los elementos de A y B queda definido por la siguiente regla:*

$$\bar{v}_i \cdot \bar{w}_j = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

10.- *Sean los espacios A y B generados por los conjuntos de vectores* $\{(1,-1,0),\ (2,1,3),\ (-1,-2,-3)\}$ *y* $\{(1,2,1),\ (2,3,3),\ (3,5,4)\}$, *respectivamente.*

a) *Determina el espacio intersección* $A \cap B$.

b) *Obtén una base y la dimensión del espacio* $A \cap B$.

11.- *Sea el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{aligned} x + y + 2z + w &= 0 \\ x - 2y - z - 2w &= 0 \\ x + 4y + 5z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

Si E es el espacio solución de este sistema, demuestra que el conjunto $B = \{(-1,-1,1,0),\ (-2,-1,2,-1)\}$ *de E, es una base de dicho espacio.*

12.- a) *Obtén el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -9 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Completa correctamente las siguientes afirmaciones:

b) *El rango de la matriz,* $R(A) =$ ________

c) *La dimensión del espacio vectorial generado por los renglones de la matriz A es igual a* ________

13.- *Determina si el conjunto de funciones*

$$\{\log 6x,\ \log 18x^2,\ \log x,\ \log 3x\}$$

es linealmente dependiente o independiente.

14.- *Sea el espacio vectorial de funciones de la forma*

$$A = \{c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \mid c_1, c_2 \in R\}$$

definidas en el intervalo $-\infty < x < +\infty$

a) *Demuestra que el conjunto*

$$B = \{3e^{x},\ e^{-x}\}$$

es una base de A.

b) *Obtén el vector de coordenadas de* $f(x) = 6e^{x} + 7e^{-x}$ *en la base B.*

15.- *Sea F el espacio vectorial de funciones*

$$F = \{f(x) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \in R,\ f(x) \in R\}$$

definido sobre R.

Determina cuales de los siguientes subconjuntos de F son subespacios:

a) $F_1 = \{f(x) \mid f(x) > 0, \forall\ x \in R\}$

b) $F_2 = \{f(x) \mid f(x) = f(1-x), \forall\ x \in R\}$

c) $F_3 = \{f(x) \mid 2f(0) = f(1)\}$

d) $F_4 = \{f(x) \mid f(1) = f(0) + 1\}$

16.- *Sean las funciones* $f_1 : R \to R$ *y* $f_2 : R \to R$ *definidas por:*

$$f_1(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ \ln x & si \quad x > 0 \end{cases} \quad y \quad f_2(x) = 2x^3, \ \forall \ x \in R$$

demuestra que dichas funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Examen de Capítulo

1.- Demuestra que el conjunto $Q^2 = \{(x,y) \mid x,y \in Q\}$ no es un espacio vectorial sobre R, donde Q es el conjunto de los racionales.

15 PTS.

2.- Escribe una V o una F en el paréntesis correspondiente a cada proposición según esta sea verdadera o falsa, respectivamente, de acuerdo con el siguiente enunciado:

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y sea $A=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4\}$ una base de V.

( ) Existen vectores de V que se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores de A.

( ) $\overline{v}_1$ se puede expresar como una combinación lineal de $\overline{v}_2, \overline{v}_3$ y $\overline{v}_4$

( ) El conjunto $B = \{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4,\overline{v}_5\}$ donde $\overline{v}_5 \in V$ es generador de V.

( ) Cualquier subconjunto de A es linealmente independiente.

( ) Cualquier conjunto de cinco vectores de V es linealmente dependiente.

10 PTS.

3.- *Sea el espacio vectorial*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a - b & b + 2c \\ c & a - 2c \\ 2a - 2b + c & a + b - 3c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in R \right\}$$

sobre R.

Obtén una base y la dimensión de dicho espacio vectorial.

10 PTS.

4.- *Sea el conjunto* $B = \{3 - x^2,\ 1,\ x + 2,\ 3x^2 + x\}$ *una base del espacio vectorial de polinomios* $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in R\}$, *sobre el campo* R. *Obtén las coordenadas del vector*

$$p(x) = 6x^3 + 3x - 1$$

en dicha base.

15 PTS.

5.- *Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:*

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

que se puede representar como:

$$x_1\bar{c}_1 + x_2\bar{c}_2 + x_3\bar{c}_3 = \bar{0}$$

a) *Completa correctamente la siguiente expresión:*
El sistema (1) *tiene solución única* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, *si, y sólo si, los vectores* $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ *son linealmente* ____________________

b) *Si* $\bar{c}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0]^T$, $\bar{c}_2 = [0 \ \ 1 \ \ 0]^T$, $\bar{c}_3 = [2 \ \ 1 \ \ 0]^T$, *obtén una base y la dimensión del espacio solución del sistema de ecuaciones.*

20 PTS.

6.- Obtén el wronskiano del conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ *para* $n > 1$, *y determina si dicho conjunto es linealmente dependiente o independiente en* $(-\infty, \infty)$ *15 PTS.*
7.- Expresa al conjunto $\{(x,y) \mid 2x + y = 5\}$ *como una variedad lineal.* *15 PTS.*

Duración del examen 1 hora 30 minutos.

CAPITULO V

Transformaciones Lineales

David Hilbert (refiriéndose a un antiguo alumno):

"... dejó mis cursos y se hizo poeta. Evidentemente no poseía suficiente imaginación para dedicarse a las matemáticas".

Examen Diagnóstico

1.- *Sea la ecuación vectorial*

$$(2x - y,\ -x - 3y + z,\ 3x + 2y - z) = (0,0,0)$$

a) *Escríbela como una ecuación matricial donde la matriz de incógnitas es*

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b) *Obtén los valores de* x, y, z

2.- *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Obtén la matriz* X *tal que* $X = AB - 2C$

b) *Determina si existen* B^{-1} *y* C^{-1}, *y en caso afirmativo obtenlas.*

3.- *Sea el polinomio*

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7 + 6$$

a) *Comprueba que* $x = 1/2$ *es una raíz de este polinomio.*

b) *Obtén las demás raíces de* $P(x)$.

Compara tus resultados con los propuestos al final de este cuaderno; si tienes algún error conceptual, te sugerimos revisar el tema correspondiente en los libros:

- (*Para matrices*)
  "*Algebra Lineal*" de *Seymour Lipschutz. Edit. Mc. Graw-Hill Serie Schaum*
- (*Para polinomios*)
  "*Algebra*" *Facultad de Ingeniería*, UNAM, 1975.

Productos de Aprendizaje

A continuación te presentamos los objetivos más importantes que debes alcanzar al terminar tu estudio de este capítulo.

V.1 Dada una transformación, determinar si es lineal; en tal caso, obtener el dominio, el recorrido, el núcleo y la matriz asociada a la transformación.

V.2 Dada una o más transformaciones lineales, efectuar de ser posible cualquiera de las siguientes operaciones entre ellas: adición, multiplicación por un escalar, composición o inversión.

V.3 Dado un operador lineal, obtener sus valores y vectores característicos.

V.4 Dado un operador lineal, diagonizarlo[1] de ser posible.

[1] La palabra diagonalizar no esta aceptada por la Real Academia de la Lengua Española, sin embargo, en este cuaderno la usaremos ya que en las matemáticas tiene un significado preciso. Se encuentran en el mismo caso otras palabras como: ortogonalizar y ortonormalizar.

Introducción

En este capítulo estudiaremos las transformaciones lineales y algunos conceptos básicos relacionados con ellas.

Las transformaciones lineales son casos particulares de funciones en donde el dominio y el codominio son espacios vectoriales. Es decir, una transformación[2] es una regla que asocia con cada vector de un espacio vectorial V un vector de otro espacio vectorial W.

En este curso nos restringiremos a un tipo especial de transformaciones llamadas transformaciones lineales y, aunque son un caso muy particular, juegan un papel sumamente importante en muchas ramas de la ciencia. Además, tienen la ventaja de que son más sencillas de trabajar que las transformaciones no lineales.

En matemáticas existe una gran cantidad de problemas que es posible expresar mediante transformaciones lineales. También en física existen fenómenos que pueden describirse con este tipo de transformaciones, sobre todo aquellos fenómenos en donde es válido el llamado principio de superposición.

De manera semejante a cualquier función, las transformaciones lineales tienen asociados conceptos tales como dominio, codominio, núcleo y recorrido. El primer bloque de este capítulo estará dedicado a estos conceptos.

En el segundo bloque se estudiarán algunas de las operaciones que pueden definirse entre las transformaciones lineales, lo cual de lugar al Algebra de Transformaciones.

---

[2] Algunos autores prefieren usar los nombres de aplicación, mapeo u operador en vez de transformación. Nosotros usaremos el nombre de operador sólo cuando $V = W$.

Finalmente, en el tercer y último bloque del capítulo estudiaremos el tema de valores y vectores característicos y su relación con las formas cuadráticas. Los conceptos de valores y vectores característicos son de gran aplicación en diversos campos de la Ingeniería (Mecánica de los medios continuos, dinámica de sistemas lineales, etc.).

Para el segundo y tercer bloque será de primordial ayuda el uso de matrices. Se mostrará que una forma de describir la acción de una transformación lineal definida entre espacios vectoriales de dimensión finita es precisamente mediante una matriz. La representación de una transformación lineal mediante una matriz es en muchas ocasiones más conveniente que cualquier otra representación.

Transformación Lineal, Núcleo y Recorrido

Una transformación T es, por definición, una función que asocia a cada elemento de un espacio vectorial V uno y sólo un vector de otro espacio vectorial W, lo que se expresa como $T : V \rightarrow W$.

En ocasiones $V = W$ y entonces a la transformación le llamaremos operador.

Cuando la transformación T asocia al vector $\bar{v}$ el vector $\bar{w}$, se escribe como

$$T(\bar{v}) = \bar{w} \qquad \bar{v} \in V \, , \quad \bar{w} \in W$$

que puede expresarse también diciendo que la transformación de $\bar{v}$ es $\bar{w}$ ó que T valuada en $\bar{v}$ es igual a $\bar{w}$ ó que la imagen de $\bar{v}$ bajo T es $\bar{w}$.

Si una transformación $T : V \rightarrow W$, donde V y W están definidos sobre el campo K, tiene además las dos propiedades siguientes:

$$T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

$$T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u}) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$ [3]

$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\forall \alpha \in K$, entonces se le llama transformación lineal.

La propiedad (1) es equivalente a decir que la transformación de una suma es igual a la suma de las transformaciones. Te exortamos a que expreses con palabras la propiedad (2).

Observa que una transformación lineal es un homomorfismo entre los espacios vectoriales V y W.

Presentaremos los conceptos de transformación lineal, dominio, codominio, núcleo y recorrido a través del siguiente ejemplo.

---

[3] Las propiedades (1) y (2) es posible reemplazarlas por una sola:

$$T(\alpha \bar{u} + \bar{v}) = \alpha T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

Sea V el siguiente espacio vectorial de polinomios

$$V = \{ax^2 + bx + c \mid a = b;\ a, c \in R\}$$

y apliquemos el operador derivada $\frac{d}{dx}$ sobre los elementos de V.

En primer término, observamos que al derivar cualquier elemento de V siempre obtendremos un polinomio de grado menor o igual a uno. Por lo tanto, dicho operador es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de V un y sólo un elemento de W, siendo W el espacio vectorial formado por el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a uno, $W = \{ex + f \mid e, f \in R\}$.

En consecuencia, el operador derivada es una transformación de dominio V y codominio W, lo que se expresa $\frac{d}{dx} : V \to W$ o bien si $T = \frac{d}{dx}$, $T : V \to W$.

Notamos también que al derivar todos los elementos de V no cubrimos todo el espacio W, pues al derivar cualquier vector de V obtendremos un vector de la forma

$$\frac{d}{dx}\,(ax^2 + ax + c) = 2ax + a$$

que es sólo un caso particular de los elementos de W. Por lo tanto, el recorrido de la transformación[4], $T(V)$, es el conjunto de polinomios

$$T(V) = \{2ax + a \mid a \in R\}$$

que es un subespacio vectorial de W.

Para investigar si $\frac{d}{dx} : V \to W$ es una transformación lineal necesitamos comprobar que se cumple la siguiente propiedad

$$\frac{d}{dx}\,(\alpha\,\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \alpha \frac{d}{dx}\,\bar{v}_1 + \frac{d}{dx}\,\bar{v}_2 \qquad \text{———} \quad (4)$$

$$\forall\, v_1, v_2 \in V, \quad \alpha \in R.$$

Para ello sean: $\bar{v}_1 = a_1 x^2 + a_1 x + c_1$

$\bar{v}_2 = a_2 x^2 + a_2 x + c_2$

---

[4] El recorrido de una transformación es el conjunto de vectores del codominio que son imagen de al menos un vector del dominio.

Operando con el lado izquierdo de (4):

$$\frac{d}{dx}(\alpha\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \frac{d}{dx}\left[(\alpha a_1 + a_2)x^2 + (\alpha a_1 + a_2)x + (\alpha c_1 + c_2)\right]$$

$$= 2(\alpha a_1 + a_2)x + (\alpha a_1 + a_2) \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (5)$$

Operando con el lado derecho de (4)

$$\alpha\frac{d}{dx}\bar{v}_1 = 2\alpha a_1 x + \alpha a_1 \quad , \qquad \frac{d}{dx}\bar{v}_2 = 2a_2 x + a_2$$

$$\alpha\frac{d}{dx}\bar{v}_1 + \frac{d}{dx}\bar{v}_2 = 2(\alpha a_1 + a_2)x + (\alpha a_1 + a_2) \quad \_\_\_\_\_\_ \quad (6)$$

los miembros derechos de las ecuaciones (5) y (6) son iguales, por lo tanto, la transformación $\frac{d}{dx} : V \to W$ es lineal.

Determinemos ahora el núcleo de la transformación, así como las dimensiones del dominio, recorrido y núcleo.

El núcleo esta formado por todos aquellos elementos del dominio cuya imagen es el vector cero del codominio, o sea:

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + ax + c) = 0x + 0$$

obviamente para que la derivada sea cero, el elemento de V debe ser de la forma

$$\bar{v} = 0x^2 + 0x + c = c$$

Entonces el núcleo de la transformación es el conjunto

$$N\left(\frac{d}{dx}\right) = \{\, c \mid c \in R \}$$

que es siempre un subespacio vectorial del dominio.

Mediante las técnicas estudiadas en el capítulo IV se puede comprobar fácilmente que las dimensiones del núcleo, dim N(T) y del dominio, dim V son uno y dos respectivamente, y para determinar la dimensión del recorrido, dim T(V), podemos hacer uso de la siguiente relación que es válida para cualquier transformación lineal definida sobre cualquier espacio vectorial V de dimensión finita

$$\dim V = \dim N(T) + \dim T(V)$$

Sustituyendo los valores dim V y dim N(T) obtenemos que

$$\dim T(V) = 1$$

Si en lugar de aplicar el operador derivación a los elementos del espacio vectorial V, aplicamos el operador integración $\int_0^x f(x)dx$, $f(x) \in V$, ¿también sería una transformación lineal? En caso afirmativo, determina el núcleo, el recorrido y sus respectivas dimensiones.

Te recomendamos resolver los siguientes ejercicios.

1.- Sean las siguientes transformaciones:

a) $T : R^2 \to R^2$ definida por $T(x,y) = (|x|, y)$
b) $T : R^3 \to R^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x, y + z, 0)$
c) $S : R^2 \to R^2$ definida por $S(x,y) = (y, x^2)$
d) $S : R^3 \to R^3$ definida por $S(x,y,z) = (-x, y, 1)$
e) $S : R^3 \to R^3$ definida por $S(x,y,z) = (x + 2y - z, y + 3z, - x - y + 4z)$

Determina para cada caso si la transformación es lineal; en caso afirmativo, determina el núcleo, el recorrido y sus dimensiones correspondientes.

2.- Demuestra que cualquier rotación del plano cartesiano alrededor del origen es una transformación lineal.

3.- Sea $T : R^2 \to R^2$ una transformación lineal tal que $T(1,0) = (5,0)$ y $T(0,1) = (0, -3)$. Obtén la regla de correspondencia de T.

4.- Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $N(T) = \{\overline{0}_V\}$. Demuestra que si $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\} \subset V$ es linealmente independiente, entonces: $\{T(\overline{v}_1), T(\overline{v}_2), \ldots, T(\overline{v}_n)\} \subset W$ también es linealmente independiente.

5.- Para la transformación lineal $T : M \to D$ donde

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in R \right\} \quad y \quad D = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in R \right\}$$

definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a+b & a+c \\ 0 & c-b \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$$

a) Determina el codominio, el recorrido y el núcleo de la transformación.

b) Comprueba que el núcleo de la transformación es un subespacio vectorial del dominio.

c) Encuentra una base y la dimensión del núcleo.

Algebra de Transformaciones Lineales

Como mencionamos en la introducción, las transformaciones lineales son funciones entre espacios vectoriales. Cuando mencionamos la palabra función algunas ideas sobre este tema empezamos a recordar; dentro de estas ideas podemos mencionar operaciones fundamentales como la adición y composición. En las transformaciones lineales también se definen operaciones cuyo manejo constituye el álgebra de las transformaciones lineales; iniciaremos nuestro estudio con las operaciones de adición, multiplicación por un escalar y composición.

Consideremos el problema de resolver la siguiente ecuación matricial

$$2BAX - 2CX = D$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y X es la matriz incógnita. Esta matriz la podemos obtener de acuerdo a lo estudiado en el capítulo II, sin embargo, obtendremos la matriz empleando operaciones con transformaciones lineales.

Sean las transformaciones lineales $T : R^2 \rightarrow R$, $S : R \rightarrow R^2$ y $P : R^2 \rightarrow R^2$ definidas por las siguientes reglas de correspondencia

$$T(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \quad , \quad S(x_1) = (2x_1, x_1) \quad y \quad P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$

puedes verificar que las matrices A,B y C definidas anteriormente son las matrices asociadas a las transformaciones T, S y P respectivamente, con respecto a las bases canónicas.

La ecuación matricial anterior la podemos llevar a su equivalente en transformaciones lineales, quedando

$$2(S \circ T)(x_1, x_2) - 2P(x_1, x_2) = (-1, -1)$$

Para llegar a estas equivalencias debemos recordar que la multiplicación de las matrices asociadas[5] *a dos transformaciones lineales equivale a la composición de esas transformaciones, que la adición de las matrices equivale a la adición de las transformaciones y que la multiplicación de un escalar por la matriz asociada a una transformación*[6] *equivale a la multiplicación de un escalar por esa transformación.*

Desarrollando la última expresión, tendremos:

$$2S(T(x_1,x_2)) - 2\ P(x_1,x_2) = (-1,-1)$$

Aplicando T *a la pareja* (x_1,x_2)

$$2S(x_1 - x_2) - 2\ P(x_1,x_2) = (-1,-1)$$

Aplicando S *a la diferencia* $x_1 - x_2$ *(vector de* R^1*) y* P *a la pareja* (x_1,x_2) *(vector de* R^2*)*

$$2(2x_1 - 2x_2, x_1 - x_2) - 2\ (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2) = (-1,-1)$$

operando con estos vectores tendremos:

$$2(x_1 - x_2, -2x_2) = (-1,\ -1)$$

Esta última igualdad vectorial, la podemos llevar al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -4x_2 &= -1 \end{aligned}$$

de donde $x_2 = \frac{1}{4}$ *y* $x_1 = -\frac{1}{4}$

Entonces la matriz buscada es:

$$x = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

---

[5] *Cuando hablemos de la matriz asociada a una transformación lineal sin especificar a que bases esta referida, se sobreentenderá que son las bases canónicas.*

[6] *En este cuaderno usaremos indistintamente las expresiones "multiplicación de una matriz por un escalar" o "multiplicación de un escalar por una matriz".*

Te sugerimos que compruebes este resultado resolviendo la ecuación matricial planteada, utilizando el método del capítulo II. Al hacerlo te podrás dar cuenta que es más simple que el desarrollado aquí. Sin embargo, lo hemos hecho de esta forma para ilustrar las operaciones entre transformaciones lineales.

Además de las operaciones de adición, multiplicación por un escalar y composición, otra operación importante de las transformaciones lineales es la inversión de una transformación lineal.

La transformación inversa, denota T^{-1} de una transformación lineal $T : V \to W$ es la transformación lineal única $T^{-1} : W \to V$ tal que

$$(T \circ T^{-1}) \; (\overline{w}) = \overline{w} \qquad \forall\; \overline{w} \in W$$

$$(T^{-1} \circ T) \; (\overline{v}) = \overline{v} \qquad \forall\; \overline{v} \in V$$

Para que exista la transformación inversa de una transformación lineal $T : V \to W$, ésta debe ser biyectiva, que es equivalente a:

a) $\dim V = \dim W$

b) $N(T) = \{ \overline{0}_V \}$

Para el estudio de este concepto consideremos el siguiente ejemplo.

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \text{———————} \quad (7)$$

La representación matricial, de la forma $A\overline{x} = \overline{b}$, de este sistema es:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz A puede definir una transformación lineal $T : R^3 \to R^3$ de regla de correspondencia:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, \; x_1 - x_2 + x_3, \; x_1 + x_2 + x_3)$$

Averiguemos si A tiene inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

de donde

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si A representa la transformación lineal $T: R^3 \to R^3$, A^{-1} *representa matricialmente la transformación lineal* $T^{-1}: R^3 \to R^3$ *definida por*

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}\,(y_1 - y_2,\ -y_2 + y_3\ ,\ -y_1 + 2y_2 + y_3)$$

En general, si A es la representación matricial de una transformación lineal T, A^{-1}*, si existe, es la representación matricial de la transformación inversa de T. Si* A^{-1} *no existe, T no tiene transformación inversa.*

Volviendo al sistema de ecuaciones inicialmente planteado, su solución es única porque A^{-1} *existe; entonces, hay un vector único de* R^3 *cuya imagen es el vector (1,0,-1) bajo la transformación T.*

Si el sistema de ecuaciones (7) hubiera sido compatible indeterminado o incompatible, ¿qué implicaciones hubiera tenido para la transformación T definida en el ejemplo? Desde el punto de vista de las transformaciones lineales, ¿qué representa el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Trata de contestar a estas preguntas y consulta tus respuestas con tu profesor o un asesor de la materia.

Te invitamos a resolver los siguientes ejercicios:

6.- *Sean* $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ *y* $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ *dos bases de* R^2*, relacionadas por:*

$$\bar{b}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$$

$$\bar{b}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

y sea la transformación lineal $S: R^2 \to R^2$ *tal que* $S(\bar{e}_1) = \bar{b}_1$ *y* $S(\bar{e}_2) = \bar{b}_2$

Encuentra las matrices $M_B^E(S)$ y $M_E^B(S)$

7.- La matriz asociada a una transformación lineal $T:R^3 \to R^4$ es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Encuentra la regla de correspondencia de dicha transformación y determina las dimensiones del recorrido y del núcleo de T usando el rango de M.

8.- Sea $T: R^2 \to R^2$ una transformación lineal y sean $A = \{(2,0),\ (0,2)\}$ y $B = \{(0,3),\ (3,0)\}$ dos bases de R^2.

Si se conoce que

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

y $(\bar{v})_B = (2,1)$, obtén $[T(\bar{v})]_A$

9.- Para las transformaciones lineales:

$$R(x,y,z) = (2x + y,\ x,\ z - y)$$
$$S(x,y,z) = (x, 2y, x - y)$$
$$T(x,y,z) = (0, x + y + z,\ x - 2y - 2z)$$

a) Obtén las matrices asociadas a cada transformación lineal referidas a las bases canónicas.

b) Si $\bar{v} = (1,-1,-1)$, obtén empleando las matrices asociadas:

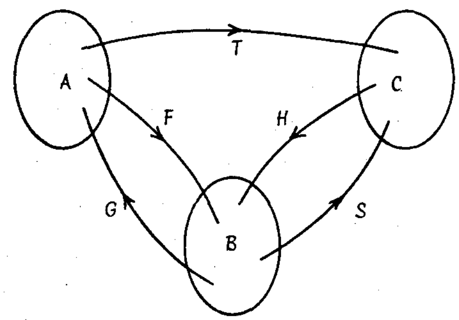
$$(R + S + T)(\bar{v}) \quad y \quad ((R \circ S) + T)(\bar{v}).$$

10.- *Las transformaciones lineales*

$F: A \to B$ $\quad$ $H: C \to B$ $\quad$ $T: A \to C$

$G: B \to A$ $\quad$ $S: B \to C$

se ilustran en el siguiente diagrama:



De las siguientes operaciones, determina cuales se pueden efectuar y, en caso afirmativo, determina el dominio y recorrido de las transformaciones resultado:

I) $G \circ F$ $\quad$ III) $H \circ F$ $\quad$ V) $T \circ F$

II) $G \circ H$ $\quad$ IV) $S \circ F$ $\quad$ VI) $H \circ T \circ G$

11.- *Sea T una transformación lineal que consiste en una rotación de 90° del plano cartesiano alrededor del origen en sentido contrario a las manecillas del reloj, y sea S una transformación lineal que consiste en asignar a cada punto del plano su simétrico respecto al eje X. Calcula:*

a) $(T+S)\ (1,1)$

b) $(T+S)\ (x,y)$ *para* $x \geq 0$, $y \geq 0$

c) $(T - (3T \circ S) + I_{R^2} - 4(S \circ T))\ (x,y)$

donde I_{R^2} *es la transformación identidad en* R^2.

12.- *Considera la transformación lineal* $T: R^3 \to R^3$ *definida por*

$$T(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$$

Demuestra que la transformación T tiene inversa y verifica que la transformación inversa también es lineal.

13.- *Determina si la transformación lineal* $T: P_1 \to D$, *donde*

$$P_1 = \{ax + b \mid a, b \in R\} \quad y \quad D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\} \quad \textit{definida por}$$

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & f(1) \end{bmatrix} \qquad \forall f \in P_1$$

tiene inversa y en caso afirmativo, obtenla.

Valores y Vectores Característicos

Dos de los conceptos de mayor importancia y aplicación dentro de las transformaciones lineales son los de valor y vector característico.

A continuación te presentamos una de sus aplicaciones más interesantes: las formas cuadráticas.

A una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (8)$$

donde $a,b,\dots,f$ son números reales, se le llama ecuación cuadrática de dos variables x,y[7]

Si al menos alguno de los coeficientes de los términos de segundo grado a,b ó c es distinto de cero, entonces la ecuación anterior representa el lugar geométrico de una cónica, o bien casos excepcionales como un punto o un par de rectas.

Cuando b es distinto de cero (independientemente de los valores de a y c), la ecuación representa una cónica cuyo eje focal no es paralelo a algún eje coordenado. Si además, los coeficientes asociados a la variable x, a y d (ó los asociados a "y", c y e) son distintos de cero, significa que la cónica no tiene su centro (o su vértice en el caso de la parábola) en el origen.

El problema que deseamos resolver ahora, es el de hacer un cambio de variables de tal forma que la ecuación (8) se reduzca a la forma:

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 + \gamma = 0 \qquad (9)$$

que representa una cónica con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes coordenados.

---

[7] A la suma de los tres primeros términos de la ecuación (8) $ax^2 + bxy + cy^2$ se le llama forma cuadrática de los valores x,y.

Obviamente la ecuación (9) es mucho más fácil de identificar que la ecuación (8).

Primero haremos un cambio de variable para girar los ejes de la cónica y hacerlos paralelos a los ejes coordenados (rotación de ejes) y luego haremos otro cambio de variable para colocar su centro en el origen de coordenadas (traslación de ejes).

Para efectuar el primer cambio de variable y girar los ejes, se podría aplicar el resultado bien conocido de la geometría analítica que indica que para eliminar el término en xy el cambio de variable apropiado está dado por la expresión:

$$x = x' \cos\Theta - y' \operatorname{sen}\Theta$$
$$y = x' \operatorname{sen}\Theta + y' \cos\Theta$$

donde $\tan 2\Theta = \dfrac{b}{a-c}$

Sin embargo, nosotros procederemos en otra forma aplicando los resultados del Algebra Lineal.

En primer término, podemos observar que la ecuación (8) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0 \quad \text{\_\_\_\_\_\_ (10)}$$

o bien:

$$\overline{x}^{T} A \overline{x} + B \overline{x} + f = 0 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (11)}$$ [8]

donde

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} d & c \end{bmatrix}$$

---

[8] El primer término de la ecuación (11) es igual a $\overline{x}^{T} A \overline{x} = ax^2 + bxy + cy^2$ y es lo que hemos llamado forma cuadrática.

Notamos que la aparición del término en xy de la ecuación (8) se debe a los elementos fuera de la diagonal de la matriz A. En cambio, si A fuera diagonal este término no aparecería. Por ejemplo, si A fuera de la forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

el primer término de la ecuación (11) sería:

$$\bar{x}^T A \bar{x} = [x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha x^2 + \beta y^2 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (12)$$ [9]

Por lo tanto, lo que tenemos que hacer es efectuar un cambio de variable que "diagonalice" a la matriz A.

Se puede demostrar que la matriz A, por ser simétrica se puede diagonalizar mediante un producto

$$P^{-1} A P$$

siendo P la matriz formada con los vectores característicos unitarios de A[10] *Este producto es igual a una matriz diagonal A' cuyos elementos son los valores característicos* α *y* β *de A.*

$$P^{-1} A P = A' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

además la matriz P es ortogonal y por lo tanto, $P^T = P^{-1}$*, es decir,*

$$P^T P = P P^T = I$$

Entonces, la ecuación (11) se puede escribir como (introduciendo el operador identidad I entre cada producto de matrices y luego sustituyéndolo por $P^T P$ *ó* PP^T*):*

$$\bar{x}^T P P^T A \, P P^T \bar{x} + B P P^T \bar{x} + f = 0$$

$$(P^T \bar{x})^T A' (P^T \bar{x}) + B P (P^T \bar{x}) + f = 0 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (13)$$

---

[9] *A la expresión (12) se le llama forma cuadrática diagonalizada.*

[10] *La matriz P se puede formar con vectores característicos no unitarios, sin embargo, es preferible usar vectores unitarios.*

Definamos un nuevo sistema de coordenadas x', y' mediante la expresión

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \overline{x}' = P^T \, \overline{x} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

y sea $B' = B P = [\varepsilon \quad w]$. Entonces, la ecuación (13) se puede escribir:

$$\overline{x}'^T A' \, \overline{x}' + B' \, \overline{x}' + \delta = 0 \qquad (14)$$

ó

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [\varepsilon \quad w] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \delta = 0$$

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \varepsilon x' + w y' + \delta = 0 \qquad (15)$$

En esta ecuación el eje focal es paralelo a algún eje coordenado, es decir, se ha efectuado la rotación buscada.

Ahora efectuamos el segundo cambio de variable. Si α y β son distintos de cero, podemos tomar

$$\alpha\left(x'^2 + \frac{\varepsilon}{\alpha} x'\right) \quad y \quad \beta\left(y'^2 + \frac{w}{\beta} y'\right)$$

y completar cuadrados. Entonces la ecuacuón (15) se escribe:

$$\alpha\left(x' + \frac{\varepsilon}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(y' + \frac{w}{2\beta}\right)^2 + \delta - \frac{\varepsilon^2}{4\alpha} - \frac{w^2}{4\beta} = 0 \qquad (16)$$

efectuando la traslación de ejes

$$x'' = x' + \frac{\varepsilon}{2\alpha} \qquad y'' = y' + \frac{w}{2\beta}$$

y definiendo $\quad \gamma = \delta - \dfrac{\varepsilon^2}{4\alpha} - \dfrac{w^2}{4\beta}$

se llega a la ecuación buscada (ecuación 9):

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 + \gamma = 0$$

Sea por ejemplo, la cónica de ecuación

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2\sqrt{2}\, x + 6\sqrt{2}\, y + 2 = 0$$

que se puede escribir como:

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-2\sqrt{2} \quad 6\sqrt{2}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2 = 0$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = [-2\sqrt{2} \quad 6\sqrt{2}] \quad y \quad f = 2$$

como el coeficiente de xy es distinto de cero, el eje focal de esta cónica no es paralelo a algún eje coordenado.

Hagamos el cambio de variables a $x' - y'$ para que el eje focal sea paralelo a algún eje coordenado. Para ello obtengamos los valores y vectores característicos de A:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

por tanto, los valores característicos asociados de A son: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

Para $\lambda_1 = 4$, sus vectores característicos son:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = -y, \text{ el conjunto de la forma } \{(k, -k) \mid k \in R,\ k \neq 0\}$$

Para $\lambda_2 = 2$, sus vectores característicos asociados son:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = y, \text{ el conjunto de la forma } \{(k, k) \mid k \in R,\ k \neq 0\}$$

tomemos un vector característico de cada conjunto, y formemos con éstos el conjunto $\{(1, -1), (1,1)\}$. Haciéndolos unitarios se tiene:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}$$

entonces la matriz P, que diagonaliza a A, buscada es:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

la ecuación de la cónica en función de las variables $x'y'$ es:

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-2\sqrt{2} \qquad 6\sqrt{2}] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2 = 0$$

haciendo operaciones, se obtiene:

$$4x'^2 + 2y'^2 - 8x' + 4y' + 2 = 0$$

completando cuadrados, se tiene que:

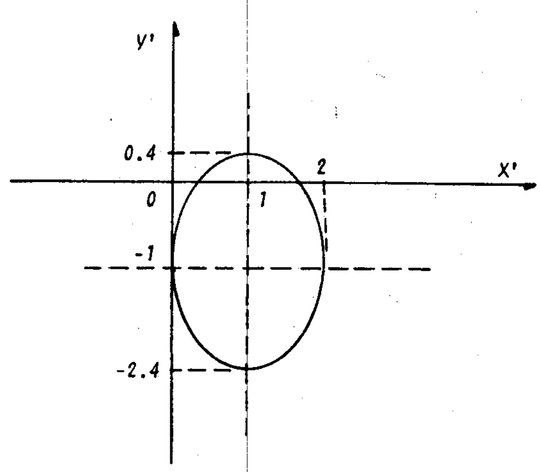
$$(4x'^2 - 8x' + 4) + (2y'^2 + 4y' + 2) - (4 + 2) + 2 = 0$$

haciendo operaciones se llega a la ecuación:

$$4(x' - 1)^2 + 2(y' + 1)^2 = 4$$

$$(x' - 1)^2 + \frac{(y' + 1)^2}{2} = 1$$

la cual puedes reconocer facilmente, es una elipse con centro en (1,-1) del sistema X'Y'



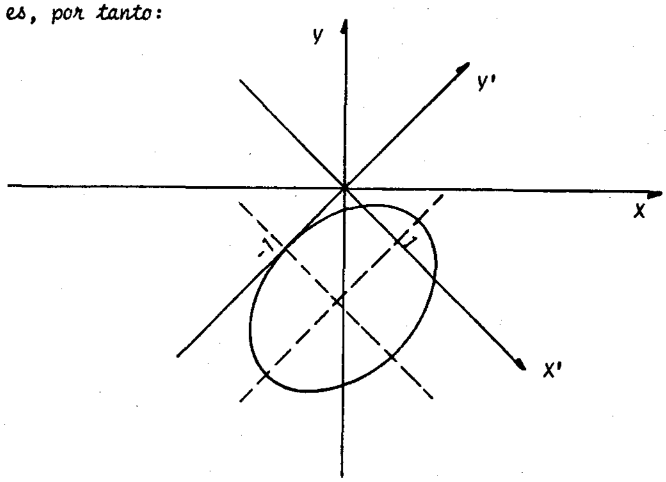
para referirla al sistema XY recurramos a la ecuación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

como puedes comprobar

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{array}$$

es decir, el eje X' está localizado (haciendo $y' = 0$) a lo largo del vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ y Y' a lo largo del vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ haciendo $x' = 0$. Su gráfica es, por tanto:



con lo que queda identificada y graficada la cónica de este ejemplo.

Te sugerimos ahora, que tu trates de identificar y graficar la cónica de ecuación $-3x^2 + 8xy + 12y^2 + 30x + 64y = 0$ por el método estudiado anteriormente.

A continuación te invitamos a resolver los siguientes ejercicios sobre valores y vectores característicos y otros conceptos que completan el estudio de este capítulo.

14.- Sea la matriz

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

la representación matricial de la transformación lineal $T:R^3 \to R^3$

a) Determina los valores característicos de T y los vectores característicos asociados a ellos.

b) Demuestra que un conjunto formado por tres vectores característicos asociados a valores característicos de T diferentes, es una base de R^3

15.- Sea λ un valor característico de una transformación lineal T. Si la transformación T tiene inversa, T^{-1}, demuestra que λ^{-1} es un valor característico de T^{-1}

16.- Encuentra todos los valores característicos, una base y la dimensión de cada espacio característico de la transformación lineal $T:R^3 \to R^3$ definida por:

$$T(x,y,z) = (2x + y,\ y - z,\ 2y + 4z)$$

17.- Demuestra que un espacio característico de un operador lineal T, es un subespacio invariante de T.

18.- Verifica el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

19.- *Demuestra que si la matriz* A *es similar a la matriz* B, *entonces sus trazas son iguales.*

20.- *Para cada uno de los siguientes operadores lineales*

a) $T:R^2 \to R^2$ *tal que* $T(x,y) = (2x+y,\ 3x)$

b) $T:R^3 \to R^3$ *tal que* $T(x,y,z) = (y-z,\ x+4z,\ x+4y)$

Obtén una matriz diagonal D *asociada a* T *y una matriz "diagonalizadora"* P. *Comprueba, para cada inciso, que* $D = P^{-1}AP$ *donde* A *es la matriz asociada a* T *referida a las bases canónicas.*

Miscelánea

1.- *Considera el espacio vectorial* V *sobre* R *formado por las matrices de orden 3.*

Si se define la transformación $T:V \rightarrow R$

$$T(A) = det(A) \qquad \forall A \in V$$

investiga si T *es lineal.*

2.- *Dada la transformación* $T:C \rightarrow C$ *definida por*

$$T(a+bi) = (b+ai) \qquad \forall a,b \in R$$

a) *Demuestra que* T *es lineal si el espacio vectorial* C *está definida sobre el campo de los reales.*

b) *Verifica que si el espacio* C *está definido sobre el campo de los complejos; se cumple que:*

$$T(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = T(\bar{z}_1) + T(\bar{z}_2) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (I)$$

$$T(\bar{z}_1) = \bar{\alpha}\ T(\bar{z}_1) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (II)$$

$z_1, z_2 \in C$ *para toda escalar* $\alpha \in C$, *donde* $\bar{\alpha}$ *es el conjugado de* α.

Como $\alpha T(\bar{z}_1) \neq T(\alpha \bar{z}_1)$ T *no es lineal, sin embargo, al cumplir* (I) *y* (II) *se llama semilineal.*

3.- *Se define en el espacio vectorial de funciones reales de variable real una transformación sobre sí mismo de la siguiente manera:*

$$T(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x) - a\, f(x) \qquad a \in R$$

a) *Demuestra que* T *es una transformación lineal.*

b) *Demuestra que* $N(T) = \{e^{ax} | a \in R\}$

c) *Determina la dimensión de* $N(T)$

4.- *Sea la transformación lineal* $T: R^3 \to R^3$ *definida por*

$$T(x,y,z) = (2x - y + z \;,\; 3x + z,\; x + y)$$

a) *Determina el recorrido y el núcleo de* T.

b) *Obtén una base y la dimensión del recorrido y del núcleo.*

5.- *Para la transformación lineal* $T: V \to V$, *donde* $V = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in R\}$ *se conoce que*

$$T(2x^2 + 5x) = 3x^2$$

$$T(x^2 - 1) = -x^2 - 1$$

$$T(4) = 4$$

Determina si es posible obtener la regla de asociación de T *y, en caso afirmativo, obtenla.*

6.- *Encuentra una base y la dimensión del espacio vectorial,* $L(R^2, R^3)$, *formado por el conjunto de todas las transformaciones lineales de* R^2 *en* R^3.

7.- *Sean las transformaciones lineales*

$$S: R^2 \to R^2 \quad \textit{tal que} \quad S(x,y) = (2x - y,\; y + x)$$

$$T: R^2 \to R^2 \quad \textit{tal que} \quad T(x,y) = (3x + 2y,\; x)$$

$$[(T \circ H) + S]: R^2 \to R^2 \quad \textit{tal que} \quad [(T \circ H) + S]\,(x,y) = (2x - 3y,\; y - x)$$

Obtén la regla de asociación de la transformación lineal $H: R^2 \to R^2$

8.- *Dadas las transformaciones lineales* $T:V \to V$ *y* $S:V \to V$, *donde*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y,z,w \in R \right\} \quad \text{definidas como}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x & x+y \\ x+y+z & x+y+z+w \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} w & z \\ y & x \end{bmatrix}$$

encuentra, de ser posible, las reglas de asignación de :

a) S^{-1}

b) T^{-1}

c) $(S \circ T)^{-1}$

9.- *Para la transformación lineal* $T:P \to P$, *donde* $P = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in R\}$, *definida por*

$$T(f) = f' + f \qquad \forall f \in P$$

Obtén, de ser posible, la transformación inversa T^{-1}

10.- *Determina los valores y vectores característicos de la transformación lineal* $S:M \to M$, *donde*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in R \right\} \quad y\ S \text{ está definida por}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x+2y & y+2z \\ 0 & 2z \end{bmatrix}$$

11.- Sea A la matriz asociada, referida a las bases canónicas, de un operador lineal T, λ un valor característico de T y $\bar{v}$ su vector característico asociado.

Demuestra que para la transformación lineal T^k, $k \in N$, cuya matriz asociada referida a las bases canónicas es A^k, λ^k es un valor característico de T^k y $\bar{v}$ es su vector característico asociado.

Verifica lo anterior para el operador lineal $T: R^2 \to R^2$, definido por $T(x, y) = (x - 3y,\ y)$ y $k = 2$.

12.- Para el operador lineal $T: R^3 \to R^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x,\ 2y,\ x - 2y)$$

determina cuales de los siguientes subespacios de R^3 son invariantes bajo T:

a) $M = \{(0, 0, k) \ / \ k \in R\}$
b) $N = \{(k, -2k, 0) \ / \ k \in R\}$
c) $P = \{(0, k, -k) \ / \ k \in R\}$

13.- La matriz asociada a la transformación lineal T, referida a la base $A = \{(2, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (0, 0, 1)\}$ es

$$M_A^A(T) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtén la matriz asociada a T referida a la base $B = \{(2, 3, 1),\ (0, 2, 1),\ (0, 1, 1)\}$

14.- Demuestra que dos matrices semejantes tienen los mismos valores característicos.

15.- *Para cada una de las siguientes transformaciones lineales*

I) $T:R^3 \to R^3$ *definida por* $T(x,y,z) = (x + 2y + 4z,\ 3y,\ x + 7y - 2z)$

II) $T:R^3 \to R^3$ *definida por* $T(x,y,z) = (4x + y - 2z,\ -x + 2y + 2z,\ x + y + z)$

III) $T:R^3 \to R^3$ *definida por* $T(x,y,z) = (x + 2y,\ -y + z,\ 2x - y)$

a) *Obtén sus valores característicos.*

b) *Determina si T es diagonalizable; en caso afirmativo, obtén una matriz diagonal asociada a T y la base a la cual está referida.*

Examen de Capítulo

1.- *Sea M el espacio de matrices cuadradas de ordn 2.*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in R \right\}$$

y la transformación lineal $T: M \to R$ *definida por*

$$T(A) = tr(A) \qquad \forall\, A \in M$$

a) *Demuestra que T es lineal.*

b) *Determina el núcleo de la transformación, una base y su dimensión.*

20 PTS.

2.- *Considera el espacio vectorial* $C^2 = \{(x,y) \mid x, y \in C\}$ *definido sobre el campo de los números reales, y la transformación lineal* $T: C^2 \to C^2$ *definida por*

$$T(a + bi,\; c + di) = (a + di,\; c + bi) \qquad \forall\, a,b,c,d \in R$$

Determina la matriz asociada a la transformación T referida a la base $B = \{(2,0),\; (1 - i, 0),\; (i, -2),\; (1, 2i + 4)\}$

20 PTS.

3.- *Dadas las transformaciones lineales*

$H: R^2 \to R^2$ *tal que* $H(x,y) = (x - y,\; x + y)$

$P: R^3 \to R^2$ *tal que* $P(x,y,z) = (-x,\; 2z)$

$S: R^2 \to R^3$ *tal que* $S(x,y) = (y,\; x + y,\; x)$

Obtén la regla de la transformación M, si:

$$M = (2H \circ H^{-1}) - (2P \circ S)$$

20 PTS.

4.- *Para la transformación lineal* $S: M \to P$ *donde*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in R \right\} \quad y \quad P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$$

definida por

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = (a + c)x^2 + (b + c)x + (a - c)$$

a) *Demuestra que existe la transformación inversa.*

b) *Determina la regla de la transformación inversa.*

20 PTS.

5.- *Sea el operador lineal* $T: P \to P$, *donde* $P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ *y* T *está definida como*

$$T(ax^2 + bx + c) = (2a + b)x^2 + (2b - c)x + 4c$$

a) *Obtén los valores y vectores característicos de* T.

b) *Determina, si es posible, una matriz diagonal asociada a* T *y la base a la cual está referida.*

20 PTS.

Tiempo máximo de solución: 2 *horas* 15 *minutos.*

CAPITULO VI

Operadores Lineales sobre Espacios Euclidianos

"La matemática no es un cuerpo aislado y autosuficiente de conocimientos. Existe sobre todo para ayudar al hombre a comprender y dominar el mundo físico y también, en alguna medida, los mundos económico y social. La matemática está al servicio de determinados fines y propósitos. Si no fuese así, no habría lugar para ella en los programas de enseñanza. Si las matemáticas son objeto de gran demanda y se les concede tanta importancia, la razón es que son un instrumento de gran ayuda".

MORRIS KLINE.

Examen Diagnóstico

1.- Obtén el módulo de los siguientes vectores

a) $\overline{v} = (1,6)$ b) $\overline{w} = (-3,2,\sqrt{12})$

2.- Dados los siguientes vectores, determina cuales de ellos son ortogonales entre sí:

$\overline{u} = (1, -3, 2)$, $\overline{v} = (-1, 3, 5)$, $\overline{w} = (9, 8, -3)$

3.- Obtén un vector unitario en la dirección del vector

$\overline{a} = (3, -6, 6)$

4.- Calcula el valor de la siguiente integral definida

$$\int_0^1 (t^3 - 3t^2 + \frac{3}{4})\, dt$$

5.- Calcula el resultado de la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

6.- Calcula la traza de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

7.- a) Para que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & c & -3+3i & 4i \\ 8-i & -5 & 6 & -i \\ a & d & 0 & f \\ b & e & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

sea una matriz hermitiana se requiere que

$a =$ ________, $b =$ ________, $c =$ ________, $d =$ ________, $e =$ ________

$f =$ ________

b) Para que la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -i & 1-i & z \\ x & 0 & 13 \\ -8+4i & y & w+3i \end{bmatrix}$$

sea una matriz antihermitiana se requiere que

$x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________, $w =$ ________

c) Determina si la matriz

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal.

Si tienes dudas en la solución de los tres primeros ejercicios de este examen, te sugerimos estudies estos conceptos en las páginas 12, 17 y 21 de

- Apuntes de Geometría Analítica
  Facultad de Ingeniería, UNAM

Si tuviste dudas en la solución del ejercicio 4, te sugerimos estudies estos conceptos en el capítulo VI de

- Apuntes de Cálculo Diferencial e Integral
  Facultad de Ingeniería, UNAM

Y, si las dificultades se te presentaron en la solución de los ejercicios 5, 6 y 7, te sugerimos repases estos conceptos que estudiaste en el capítulo II de esta asignatura.

Productos de Aprendizaje

A continuación te presentamos los objetivos más importantes que debes alcanzar al terminar este capítulo:

VI.1 Determinar si un espacio vectorial y una función forman un espacio euclidiano.

VI.2 Obtener una base ortonormal a partir de una base cualquiera de un espacio euclidiano.

VI.3 Obtener los valores y vectores característicos de un operador hermitiano o antihermitiano, e indicar sus propiedades.

VI.4 Obtener la representación matricial de un operador unitario u ortogonal, e indicar sus propiedades.

Introducción

El concepto de vector que se ha estudiado hasta antes de iniciar el curso de Algebra Lineal ha sido el de una cantidad que tiene magnitud y dirección. Esta noción de vector se estudió en el curso de Algebra y Geometría Analítica, particularmente en los espacios R^1, R^2 y R^3; en estos espacios, los vectores siempre tienen una interpretación geométrica. En ese curso se estudió también que aunque en los espacios R^n (con $n > 3$) no existe interpretación geométrica, se pueden generalizar directamente las operaciones de adición y multiplicación por un escalar independientemente del valor de n, y que por lo tanto los elementos de R^n también son vectores.

En el capítulo IV de esta asignatura se estudió la estructura algebraica de espacio vectorial que es un concepto más general que los espacios R^n. Se estudió también que ésta estructura incluye como casos particulares a los espacios R^n, C^n, y a los conjuntos de polinomios, matrices y funciones. Por esta razón, a los polinomios, matrices y funciones se les llama también vectores aunque carezcan de interpretación geométrica en lo referente a magnitud y dirección.

Cuando se estudió la estructura de espacio vectorial no se definieron los conceptos de magnitud y ángulo entre vectores. Uno de los objetivos de este capítulo será precisamente generalizar las nociones de magnitud y ángulo entre vectores de un espacio vectorial cualquiera. Dicho espacio lo consideraremos tan arbitrario como se desee, con tal de que esté definido sobre el campo de los números reales o los complejos.

Como los axiomas que definen a los espacios vectoriales no dan elementos suficientes para generalizar las definiciones de longitud y ángulo, vamos a recurrir al concepto de producto interno, que nos permitirá definirlos de una manera muy conveniente. El producto interno es una generalización del producto escalar usual (producto punto); sin embargo, en los espacios vectoriales abstractos, la interpretación del producto interno dista mucho de nuestra noción geométrica del producto escalar usual.

A un espacio vectorial donde se ha definido un producto interno le llamaremos Espacio Euclidiano; de éste y otros conceptos trataremos en el primer bloque.

En el segundo bloque hablaremos de los operadores hermitianos. Una de las razones por la cual estos operadores son importantes es que siempre se pueden diagonalizar mediante un cambio de base apropiado, lo cual permite simplificar considerablemente todos los cálculos y apreciar más fácilmente sus propiedades.

En este punto debemos recordar que, el que un operador se pueda diagonalizar, significa que existe una base respecto a la cual la matriz asociada al operador es una matriz diagonal.

En general, puede resultar bastante complicado determinar si un operador arbitrario se puede diagonalizar, pero si nos restringimos a operadores hermitianos o unitarios entonces es fácil demostrar que siempre se pueden diagonalizar.

Los operadores hermitianos tienen además la importante propiedad de que todos sus valores característicos son números reales aunque el espacio vectorial esté definido sobre los complejos. Esta propiedad ha sido extensamente utilizada en una de las ramas de la física moderna más fascinante, la mecánica cuántica. Esto se debe a que los valores de cualquier magnitud física medible son simpre números reales y por lo tanto pueden representarse mediante valores característicos de operadores hermitianos.

Espacios Euclidianos

Para cualquier espacio vectorial V definido sobre un campo K, se puede definir una función

$$f : V \times V \to K \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

es decir, una función que asocia a cada pareja ordenada de vectores de un espacio vectorial V un único escalar de un campo [1] K.

Por ejemplo, en el espacio vectorial R^2 definido sobre el campo de los reales se puede definir la función $f : R^2 \times R^2 \to R$ de la siguiente forma:

$$f(\overline{v},\overline{w}) = \sum_{i=1}^{2} v_i w_i \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

$(\overline{v},\overline{w}) \in R^2 \times R^2$, donde $\sum_{i=1}^{2} v_i w_i \in R$

En particular, la imagen de $((4,3,2), (2,-3,1))$ según f es 1, es decir,

$$f((4,3,2), (2,-3,1)) = 1$$

Representaremos a este tipo de funciones mediante la siguiente simbología:

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \to K \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (3)$$

Así, la función $f(\overline{v},\overline{w}) = \sum_{i=1}^{2} v_i w_i$ se escribe

$$(\overline{v} \mid \overline{w}) = \sum_{i=1}^{2} v_i w_i \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)'$$

---

[1] Como se mencionó en la introducción, el campo K representa al campo de los reales o los complejos.

A la función $(\cdot \mid \cdot) : V \times V \to K$ la llamaremos producto interno o producto interior si satisface las siguientes propiedades:

Sean $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ y $\alpha \in K$

1.- $(\bar{u} \mid \bar{v}) = \overline{(\bar{v} \mid \bar{u})}$

donde $\overline{(\bar{v} \mid \bar{u})}$ es el complejo conjugado de $(\bar{v} \mid \bar{u})$

2.- $(\alpha \bar{u} \mid \bar{v}) = \alpha(\bar{u} \mid \bar{v})$

3.- $(\bar{u} \mid \bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \mid \bar{v}) + (\bar{u} \mid \bar{w})$

4.- $(\bar{u} \mid \bar{u}) \geq 0$

$(\bar{u} \mid \bar{u}) = 0$, si y sólo si $\bar{u} = \bar{0}$

Un ejemplo muy conocido de producto interno en R^n es el producto escalar ordinario. En tu curso de Algebra y Geometría Analítica[2] estudiaste que para cualesquiera dos vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$ del espacio R^n

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n \qquad (4)$$

La función expresada en (4) satisface las cuatro propiedades enunciadas anteriormente.

De acuerdo a (1) y (3), la función $\bar{v} \cdot \bar{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ se puede escribir de las siguientes maneras:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = f(\bar{v}, \bar{w}) = (\bar{v} \mid \bar{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Como habrás observado, la expresión (2) o (2)' es el producto escalar ordinario definido en R^2

Consideremos ahora otra función definida también de $R^2 \times R^2$ en R de la siguiente manera:

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = 2v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + v_2 w_2 \qquad (5)$$

---

[2] Apuntes de geometría analítica
Facultad de Ingeniería, UNAM
Página 20

Para comprobar que esta función es un producto interno hay que verificar que se cumplen las cuatro propiedades. Verifiquemos, por ejemplo, la propiedad 3.

Sean $\overline{u} = (u_1, u_2)$, $\overline{v} = (v_1, v_2)$, $\overline{w} = (w_1, w_2)$ tres vectores de R^2.

$$(\overline{u} \mid \overline{v} + \overline{w}) = ((u_1, u_2) \mid (v_1, v_2) + (w_1 + w_2))$$
$$= ((u_1, u_2) \mid (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2))$$

$$(\overline{u} \mid \overline{v} + \overline{w}) = 2u_1(v_1 + w_1) + u_1(v_2 + w_2) + u_2(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) \qquad (6)$$

$$(\overline{u} \mid \overline{v}) + (\overline{u} \mid \overline{w}) = ((u_1, u_2) \mid (v_1, v_2)) + ((u_1, u_2) \mid (w_1, w_2))$$

$$(\overline{u} \mid \overline{v}) + (\overline{u} \mid \overline{w}) = 2u_1(v_1 + w_1) + u_1(v_2 + w_2) + u_2(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) \qquad (7)$$

Como la expresión (6) es igual a la expresión (7),

$$(\overline{u} \mid \overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} \mid \overline{v}) + (\overline{u} \mid \overline{w})$$

De igual manera se pueden verificar las otras tres propiedades. Se deja como ejercicio al estudiante verificarlas.

Las expresiones (2)' y (5) son dos ejemplos de producto interno en el espacio R^2. De acuerdo a esto, pueden existir varios productos internos en un mismo espacio vectorial.

Llamaremos Espacio Euclidiano a un espacio vectorial con producto interno.

Al espacio vectorial definido sobre los reales con un producto interno se le llama también Espacio Real Euclidiano. Al espacio vectorial definido sobre los complejos con un producto interno se le llama Espacio Complejo Euclidiano; también se le suele llamar Espacio Unitario.

En el espacio real euclidiano la propiedad 1 es simplemente

$$(\overline{u} \mid \overline{v}) = (\overline{v} \mid \overline{u})$$

y se tiene además que

$$(\alpha \overline{u} \mid \overline{v}) = (\overline{u} \mid \alpha \overline{v}) = \alpha(\overline{u} \mid \overline{v})$$

mientras que en el espacio complejo euclidiano

$$(\overline{u} \mid \alpha \overline{v}) = \overline{\alpha}\,(\overline{u} \mid \overline{v})$$

donde $\overline{\alpha}$ es el complejo conjugado de α.

En cursos anteriores[3], se estudió que el módulo de un vector $\bar{v}$ del espacio n-dimensional que es la longitud o magnitud del mismo, se obtiene mediante la expresión

$$|\bar{v}| = |(v_1, v_2, \ldots, v_n)| = (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)^{1/2} \qquad (8)$$

Así, por ejemplo, la magnitud del vector $\bar{v} = (3,4)$ del espacio R^2 es, según (8)

$$|\bar{v}| = |(3,4)| = (3^2 + 4^2)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

El módulo del vector $\bar{v}$ se puede expresar mediante el producto escalar de acuerdo a la expresión:

$$|\bar{v}| = (\bar{v} \cdot \bar{v})^{1/2} \qquad (9)$$

Así, el módulo del vector $\bar{v} = (3,4)$ se obtiene también de la siguiente manera

$$|\bar{v}| = ((3,4) \cdot (3,4))^{1/2} = ((3)(3) + (4)(4))^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

Nos preguntamos ahora si la expresión (9) se puede generalizar para cualquier espacio vectorial con un producto interno arbitrario. La respuesta es afirmativa, puesto que de acuerdo con la propiedad 4 del producto interno, el número $(\bar{v} \mid \bar{v})$ siempre es mayor que cero para cualquier $\bar{v}, (\bar{v} \neq \bar{0})$; por lo tanto, se le puede extraer raíz cuadrada y el número $(\bar{v} \mid \bar{v})^{1/2}$ siempre existe y es positivo.

Al número $(\bar{v} \mid \bar{v})^{1/2}$ se le llama Norma de $\bar{v}$ y lo representaremos por $\| \bar{v} \|$; es decir,

$$\| \bar{v} \| = (\bar{v} \mid \bar{v})^{1/2} \qquad (10)$$

Así, la norma del vector $\bar{v} = (3,4)$ con el producto escalar ordinario definido en (2)' es igual a 5; y la norma del mismo vector con el producto interno definido en (5) es

$$\| \bar{v} \| = \| (3,4) \| = ((3,4) \mid (3,4))^{1/2} = \sqrt{2(9)+12+12+16} = \sqrt{58}$$

---

[3] Apuntes de geometría analítica
Facultad de Ingeniería, UNAM
Página 13

Una conclusión importante de lo anterior es que la norma de un vector depende del producto interno elegido ya que es posible definir un producto interno de varias maneras.

El concepto de norma viene a ser así, una abstracción del concepto ordinario de módulo o longitud de un vector.

De esta manera, en el espacio euclidiano F de todas las funciones continuas reales de variable real cuyo producto interno está definido como

$$(f(t) \mid g(t)) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt\,, \qquad \forall\ f, g \in F$$

la norma de $p(t) = t + 2$ está dada por

$$\| p(t) \| = (p(t) \mid p(t))^{1/2} = \sqrt{\int_0^1 (t+2)^2\, dt} \quad = \quad \frac{19}{3}$$

En un espacio euclidiano, también podemos generalizar el concepto de ángulo entre dos vectores.

Recordemos de cursos anteriores que el ángulo entre dos vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$ se determina mediante la expresión

$$\cos\Theta = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{v}|\ |\bar{w}|}\,, \quad \forall\ \bar{u}, \bar{w} \in R^n, \qquad \bar{v}, \bar{w} \neq \bar{0}$$

donde $\bar{v}\cdot\bar{w}$ es el producto escalar ordinario y $|\bar{v}|$ y $|\bar{w}|$ son los módulos de $\bar{v}$ y $\bar{w}$ respectivamente.

Podemos generalizar lo anterior para cualesquiera vectores no nulos $\bar{v}$ y $\bar{w}$ de un espacio euclidiano.

Se define entonces el ángulo Θ entre los vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$ como

$$\cos\Theta = \mathrm{Re}\ \frac{(\bar{v} \mid \bar{w})}{\| \bar{v} \|\ \| \bar{w} \|} \qquad \text{———————} (11)$$

Esta expresión se puede generalizar para cualquier espacio euclidiano si

$$-1 \leq \frac{(\bar{v} \mid \bar{w})}{\| \bar{v} \|\ \| \bar{w} \|} \leq 1$$

Como es posible demostrar lo anterior (ver desigualdad de Cauchy-Schwarz) entonces, (11) se puede utilizar para definir el ángulo entre dos vectores[4] de un espacio vectorial cualquiera con un producto interno arbitrario.

Estaremos particularmente interesados en vectores cuyo ángulo entre ellos sea $\Theta = 90°$, es decir, en vectores en los cuales se tenga que $(\bar{v} \mid \bar{w}) = 0$. A los vectores cuyo producto interno es cero se les llama ortogonales y el conjunto de vectores $\{\bar{v}_i\}$ de un espacio euclidiano se dice que es ortogonal (o que sus vectores son ortogonales dos a dos) si, para $i \neq j$, se tiene que $(\bar{v}_i \mid \bar{v}_j) = 0$

Es conveniente, también aquí, hacer la observación de que la ortogonalidad entre vectores depende del producto interno elegido ya que es posible que dos vectores sean ortogonales con respecto a un producto interno y que no lo sean con respecto a otro.

El concepto de producto interno ha hecho posible la generalización del concepto de magnitud de un vector y ángulo entre vectores de un espacio vectorial arbitrario.

Sin embargo, queremos hacer algunas observaciones respecto a los conceptos presentados en este bloque.

El producto interno proporciona una manera conveniente de generalizar el concepto de magnitud (norma), no obstante, no es la única. El concepto de norma se puede definir aunque no esté definido un producto interno; es decir, la norma se puede definir en un espacio vectorial V como una función

$$\| \cdot \| \; : \; V \to R$$

que cumple las siguientes propiedades:

I) $\| \bar{v} \| \geq 0, \qquad \forall\, \bar{v} \in V$

$\quad$ y $\quad \| \bar{v} \| = 0$, si y sólo si $\bar{v} = \bar{0}$

II) $\| \lambda \bar{v} \| = |\lambda| \, \| \bar{v} \|, \quad \forall\, \bar{v} \in V, \quad \lambda \in R$

III) $\| \bar{v} + \bar{w} \| \leq \| \bar{v} \| + \| \bar{w} \|, \quad \forall\, \bar{v}, \bar{w} \in V$

---

[4] Recordar que $|\cos \Theta| \leq 1$

Por ejemplo, las siguientes funciones establecen normas de un vector $\bar{v}$ sin necesidad de tener definido un producto interno:

$$\|\bar{v}\| = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \; ; \qquad \|\bar{v}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2}$$

Si en un espacio vectorial está definida la función $\|\cdot\| : V \to R$ llamada norma, al espacio se le suele llamar Espacio Normado; mientras que espacio euclidiano es el espacio vectorial en el cual está definido un producto interno que se puede usar para definir la norma del vector. En algunas ocasiones al espacio euclidiano se le llama Espacio Prehilbert o Espacio Prehilbertiano. Luego, todo espacio euclidiano o espacio prehilbert es un espacio vectorial normado, pero no todo espacio normado es un espacio euclidiano o espacio prehilbert.

Te sugerimos que para reafirmar todo lo anterior y profundizar más en estos temas consultes la siguiente bibliografía:

- Algebra Lineal y Aplicaciones
  Francis G. Florey
  Edit. Prentice-Hall
  Páginas 335 a 364

- Introducción al Algebra Lineal
  Howard Anton
  Edit. Limusa
  Páginas 178 a 200

- Calculus, Volumen 2
  Tom M. Apostol
  Edit. Reverté
  Páginas 17 a 32

Para obtener habilidad en la solución de ejercicios de estos temas, te sugerimos trates de resolver los que a continuación te presentamos.

1.- Demuestra que la función $(\cdot|\cdot)$ definida por

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = \bar{x} A \bar{y}^T, \quad \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in R^2$$

donde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, no es un producto interno indicando la(s) propiedad(es) que no se cumple(n).

2.- Demuestra que para todo espacio real euclidiano E, se cumple que

$$4(\bar{x} \mid \bar{y}) = (\bar{x} + \bar{y} \mid \bar{x} + \bar{y}) - (\bar{x} - \bar{y} \mid \bar{x} - \bar{y}), \quad \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in E$$

3.- Sea $\bar{v} = (4 + 2i,\ 5 - 6i)$ un vector del espacio complejo V. Si para cualesquiera dos vectores $\bar{u} = (x_1, x_2)$, $\bar{v} = (y_1, y_2)$ de V, el producto interno en V se define como

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = \sum_{i=1}^{2} x_i \bar{y}_i, \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$$

donde $\bar{y}_i$ es el complejo conjugado de y_i, calcula $\|\bar{v}\|$

4.- Sea W el espacio de los polinomios de grado menor o igual a tres definidos en el intervalo $[-1, 1]$ con el producto interno

$$(p \mid q) = \int_{-1}^{1} p(x)\ q(x)\, dx, \quad \forall\ p, q \in W$$

Una base de dicho espacio es el conjunto $B = \{1, x, x^2, x^3\}$; utilizando el proceso de Gram-Schmidt, obtén una base ortogonal a partir de B.

5.- Demuestra que todo conjunto ortogonal de vectores que no contiene al vector cero es linealmente independiente.

6.- Obtén una base ortonormal (considerando el producto escalar ordinario) para el siguiente subespacio de R^3:

$$W = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$$

Operadores Simétricos y Hermitianos

Empezaremos dando la definición de operador hermitiano.

Sea V un espacio euclidiano definido sobre el campo de los complejos y sea T un operador lineal definido sobre V. Si se cumple que

$$(T(\bar{v})|\bar{w}) = (\bar{v}|T(\bar{w})), \quad \forall\, \bar{v}, \bar{w} \in V \qquad (12)$$

entonces se dice que T es un operador hermitiano con respecto al producto interno dado.

Conviene hacer aquí algunas observaciones importantes:

a) No debe confundirse el concepto de operador hermitiano con el de matriz hermitiana. Un operador hermitiano es un operador lineal que satisface la ecuación (12), en cambio, una matriz hermitiana es una matriz que es igual a su transpuesta conjugada. En algunas ocasiones ambos conceptos están relacionados, como podrá observarse en los ejemplos que se presentarán más adelante.

b) Si T es un operador hermitiano con un producto interno, puede dejar de ser hermitiano con otro producto interno, lo cual también se mostrará en los ejemplos siguientes.

c) Basta que un operador sea hermitiano respecto a algún producto interno para que se pueda diagonalizar y para que sus valores característicos sean reales.

Cuando el espacio vectorial está definido sobre el campo de los números reales en vez de los complejos, entonces, si T es un operador lineal que satisface la expresión (12) se dice que T es un operador simétrico con respecto al producto interno dado.

En consecuencia, los operadores simétricos pueden considerarse como casos particulares de operadores hermitianos, y cuando un operador es simétrico se acostumbra decir indistintamente que es simétrico o hermitiano.

También en este caso, no debe confundirse un operador simétrico con una matriz simétrica y nuevamente, un operador simétrico respecto a un producto interno puede no serlo respecto a otro.

Por ejemplo, consideremos el espacio vectorial R^2 con el producto escalar ordinario. Determinemos si el operador $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es un operador hermitiano.

Sean $\bar{v} = (v_1, v_2)$ y $\bar{w} = (w_1, w_2)$ dos vectores de R^2.

Al aplicar T sobre cada uno de estos vectores se tiene

$$T(\bar{v}) = T(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (v_1 + 2v_2,\ 2v_1 + 3v_2)$$

$$T(\bar{w}) = T(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = (w_1 + 2w_2,\ 2w_1 + 3w_2)$$

Entonces, el lado izquierdo de la ecuación (12) es:

$$\begin{aligned}(T(\bar{v})\,|\,\bar{w}) &= ((v_1 + 2v_2,\ 2v_1 + 3v_2)\,|\,(w_1, w_2)) \\ &= v_1w_1 + 2v_2w_1 + 2v_1w_2 + 3v_2w_2\end{aligned}$$

y el lado derecho es

$$\begin{aligned}(\bar{v}\,|\,T(\bar{w})) &= ((v_1, v_2)\,|\,(w_1 + 2w_2,\ 2w_1 + 3w_2)) \\ &= v_1w_1 + 2v_1w_2 + 2v_2w_1 + 3v_2w_2\end{aligned}$$

es decir,

$$(T(\bar{v})\,|\,\bar{w}) = (\bar{v}\,|\,T(\bar{w}))$$

por lo tanto, el operador T es un operador hermitiano respecto al producto escalar ordinario.

En este caso como R^2 es un espacio sobre los reales, se puede decir indistintamente que T es un operador simétrico o hermitiano.

Observemos que la matriz T es una matriz simétrica y, también es un operador simétrico respecto al producto escalar ordinario.

Otra forma de hacer el análisis es como sigue[5]

Por un lado tenemos que

$$(T(\bar{v})|\bar{w}) = (T\bar{v})^T\bar{w} = \bar{v}^T T^T \bar{w}$$

y por el otro

$$(\bar{v}|T(\bar{w})) = \bar{v}^T T \bar{w}$$

donde $\bar{v}^T T^T \bar{w}$ y $\bar{v}^T T \bar{w}$ son productos usuales de matrices. Como T es una matriz simétrica, $T^T = T$, y por lo tanto,

$$(T(\bar{v})|\bar{w}) = (\bar{v}|T(\bar{w})),$$

lo cual demuestra nuevamente que T es hermitiano.

Se puede demostrar que todo operador hermitiano es diagonalizable (sin importar respecto a que producto interno sea hermitiano). En consecuencia, T se podrá diagonalizar, como lo veremos al final de este bloque. Antes, analicemos otro operador.

Sea el operador $G = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ definido en R^2 y con el mismo producto interno del ejemplo anterior.

Por un lado tenemos

$$(G(\bar{v})|\bar{w}) = (G\bar{v})^T\bar{w} = \bar{v}^T G^T \bar{w}$$

y por otro

$$(\bar{v}|G(\bar{w})) = \bar{v}^T G \bar{w}$$

---

[5]Recuerda que el producto escalar ordinario se puede escribir como el producto de la matriz renglón $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2]$ y la matriz columna $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, es decir,

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x}^T \bar{y} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Como $G^T \neq G$, entonces $\bar{v}^T G^T \bar{w} \neq \bar{v}^T G \bar{w}$ y por lo tanto G no es un operador hermitiano (simétrico) respecto al producto escalar ordinario, aunque posiblemente lo sea respecto a otro producto interno.

Consideremos ahora otro producto interno en R^2 el cual denotaremos por $(\ |\ )'$ y que esté definido de la siguiente manera

$$(\bar{v}|\bar{w})' = \bar{v}^T M \bar{w}, \quad \forall\, \bar{v},\ \bar{w} \in R^2$$

siendo M la matriz $M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}$

Determinemos si el operador del ejemplo anterior, $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es un operador hermitiano respecto a este nuevo producto interno.

Por un lado, $(T(\bar{v})|\bar{w})' = (T\bar{v})^T M\bar{w} = \bar{v}^T T^T M\bar{w}$

Por otro lado, $(\bar{v}|T(\bar{w}))' = \bar{v}^T M T \bar{w}$

Para que $(T(\bar{v})|\bar{w})' = (\bar{v}|T(\bar{w}))'$ se requiere que $MT = T^T M$; pero,

$$MT = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 36 & 55 \end{bmatrix} \quad y \quad T^T M = \begin{bmatrix} 9 & 36 \\ 16 & 55 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, T no es un operador hermitiano (simétrico) respecto a este producto interno.

Observemos que el operador T no es simétrico respecto a $(\ |\ )'$ aunque sea una matriz simétrica.

Como T resultó ser hermitiano respecto al primer producto interno, sabemos que se puede diagonalizar aunque no sea hermitiano respecto al segundo.

Consideremos nuevamente el operador $G = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ ahora con el segundo producto interno $(\ |\ )'$

Determinemos si G es hermitiano (simétrico)

$$(G(\bar{v})|\bar{w})' = (G\bar{v})^T M\bar{w} = \bar{v}^T G^T M\bar{w}$$

$$(\bar{v}|G(\bar{w}))' = \bar{v}^T M G\bar{w}$$

donde

$$G^T M = \begin{bmatrix} 17 & -2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 162 \end{bmatrix}$$

$$M G = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 162 \end{bmatrix}$$

Como $\bar{v}^T G^T M\bar{w} = \bar{v}^T M G\bar{w}$, entonces G es un operador hermitiano respecto al producto interno (|)' y, por lo tanto se puede diagonalizar mediante un cambio de base.

Observemos que el operador G es simétrico respecto al segundo producto interno (|)', pero no es una matriz simétrica, y que G no es un operados simétrico respecto al primer producto interno (producto escalar ordinario) como lo vimos con anterioridad.

Podemos aquí resumir las observaciones hechas anteriormente:

I) Un mismo operador puede ser hermitiano (simétrico) para un producto interno y puede no ser hermitiano (simétrico) para otro producto interno.

II) Un operador puede ser hermitiano (simétrico) aunque no esté representado por una matriz hermitiana (simétrica).

III) Un operador puede no ser hermitiano (simétrico) aunque esté representado por una matriz hermitiana (simétrica).

Los operadores hermitianos presentan propiedades muy importantes como las que mencionamos en la introducción de este capítulo. Una de ellas es que sus valores característicos son números reales aunque el espacio vectorial esté definido sobre los complejos y que sus vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son ortogonales.

Por ejemplo, para el operador $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ sus valores característicos son

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5} \quad y \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$$

y dos de sus vectores característicos asociados son

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar de inmediato que λ_1 y λ_2 son reales y que $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son ortogonales respecto al producto escalar ordinario. Además, si efectuamos un cambio de base definido por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{bmatrix}$$

, el operador T quedará en forma diagonal (notar que las columnas de A son vectores característicos de T). En efecto, para efectuar el cambio de base debemos realizar el producto $A^{-1}TA$. Procediendo de esta manera:

$$A^{-1}TA = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5} + 3}{2} & \sqrt{5} - 2 \\ \sqrt{5} + 2 & \frac{3\sqrt{5} - 7}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{10} \begin{bmatrix} \frac{5+3\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{15-7\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

que es una matriz diagonal y sus elementos de la diagonal son precisamente los valores característicos de T.

Para el operador $G = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ *se tiene que* $\lambda_1 = 18$ *y* $\lambda_2 = 9$

y dos de sus vectores característicos asociados son:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nuevamente, como este operador es hermitiano respecto al producto interno $(\bar{v}|\bar{w})' = \bar{v}^T M \bar{w}$, *se comprueba que sus valores característicos son reales y sus vectores característicos ortogonales (respecto a este producto interno).*

En efecto,

$$(\bar{v}_1|\bar{v}_2)' = \bar{v}_1^T M \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Además, al efectuar el cambio de base definido por la matriz $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *el operador G quedará en forma diagonal. (Notar que la matriz B está formada con vectores característicos de G).*

$$B^{-1} G B = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -162 & 0 \\ 0 & -81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Para finalizar este bloque, haremos algunas observaciones adicionales:

a) Existen operadores que no son hermitianos respecto a ningún producto interno, pero que también se pueden diagonalizar mediante un cambio de base; por ejemplo, los operadores antihermitianos y unitarios.

b) Existen operadores que no se pueden diagonalizar mediante ningún cambio de base, por ejemplo $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Este operador tiene como valores característicos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$, que son reales, pero no se puede diagonalizar.

A continuación te sugerimos que trates de responder a las siguientes preguntas:

1.- ¿Los valores característicos de cualquier operador son siempre los mismos independientemente del producto interno elegido?

2.- Si un operador tiene valores característicos reales, ¿implica que sea hermitiano?

3.- Si un operador arbitrario tiene sus vectores característicos linealmente independientes, ¿éstos pueden dejar de ser linealmente independientes si se cambia el producto interno?

4.- Si dos vectores cualesquiera respecto a un producto interno no son ortogonales, ¿se implica que sean linealmente dependientes?

Si tienes problemas en las respuestas de estas preguntas, te sugerimos acudas al servicio de asesoría y reafirmes estos conceptos consultando la siguiente bibliografía:

- Calculus, volumen 2
  Tom M. Apostol
  Edit. Reverté
  Páginas 142 a 154

- *Algebra Lineal*
  Seymour Lipschutz
  Edit. Mc. Graw-Hill, serie Schaum
  Páginas 279 a 313

Te sugerimos también, trates de resolver los siguientes ejercicios.

7.- *Sea el operador lineal* $S:R^2 \rightarrow R^2$ *definido por*

$$S(x,y) = (-2x + 5y,\ 5x + 4y)$$

Considerando el producto interno como el producto escalar ordinario en R^2:

a) *Comprueba que S es un operador simétrico.*

b) *Verifica que la representación matricial de S respecto a la base* $\{(1,0),(0,1)\}$ *es una matriz simétrica.*

c) *Verifica que la representación matricial de S respecto a la base* $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}$ *es también una matriz simétrica.*

8.- *Sea* $T:V \rightarrow V$ *un operador lineal y sean* λ *un valor característico de T y* $\bar{v}$ *su vector característico asociado. Demuestra que*

$$\lambda = \frac{(T(\bar{v})\,|\,\bar{v})}{(\bar{v}\,|\,\bar{v})}$$

9.- *Demuestra que los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos de un operador hermitiano son ortogonales.*

10.- *Demuestra que, si* λ *es un valor característico de un operador unitario, entonces,* λ *tiene módulo uno, es decir,* $|\lambda| = 1$

11.- a) *Demuestra que el operador* $T:R^2 \to R^2$ *definido por*

$$T(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$$

es un operador ortogonal considerando el producto interno como el producto escalar ordinario.

b) *Obtén los valores característicos del operador y verifica, para tales valores, el teorema enunciado en el ejercicio 10.*

12.- *Considera el espacio vectorial* R^2 *con el producto escalar ordinario.*

Para el operador $\Theta = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

verifica que se cumple la hipótesis del teorema espectral; obtén la representación matricial diagonal y la base cuya existencia garantiza el teorema.

Miscelánea

1.- Sea el espacio vectorial C^3 definido sobre los complejos. Determina si la función

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + a_3\bar{b}_3$$

donde $\bar{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{w} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{v}, \bar{w} \in C^3$, $a_i, b_i \in C$ es un producto interno en C^3

Nota: $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ son los conjugados de b_1, b_2, b_3 respectivamente.

2.- Sea $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z, w \in R \right\}$ un espacio vectorial definido sobre el campo de los reales.

a) Demuestra que la función

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) = a_1a_2 + 2b_1b_2 + 3c_1c_2 + d_1d_2$$

es un producto interno.

b) Calcula el ángulo entre las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- *Demuestra que en un espacio complejo euclidiano V, se cumplen las si-- guientes propiedades:*

a) $(\alpha\bar{v} \mid \beta\bar{w}) = \alpha\bar{\beta}(\bar{v} \mid \bar{w})$

b) $(\bar{v} \mid \alpha\bar{w} + \beta\bar{u}) = \bar{\alpha}(\bar{v} \mid \bar{w}) + \beta(\bar{v} \mid \bar{u}) \qquad \forall\ \bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V, \quad \alpha, \beta \in C$

Nota: $\bar{\alpha}$ *y* $\bar{\beta}$ *son los conjugados de* α *y* β

4.- *Sean* $\bar{v}$ *y* $\bar{w}$ *vectores de un espacio real euclidiano. Demuestra que*

$$(\bar{v} + \bar{w} \mid \bar{v} - \bar{w}) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \|\bar{v}\| = \|\bar{w}\|$$

5.- *Sea F el espacio vectorial de las funciones reales de variable real en el intervalo* $[1, e]$.

Si se define un producto interno en F por

$$(f \mid g) = \int_1^e \ln x\, f(x)\, g(x)\, dx, \qquad \forall\ f, g \in F$$

calcula la norma $\|f\|$, *si* $f(x) = \sqrt{x}$

6.- *Sea* $P = \{ct^2 + bt + a \mid a, b, c \in R\}$ *el espacio euclidiano cuyo producto interno está definido como*

$$(p \mid q) = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt, \qquad \forall\ p, q \in P$$

Obtén un vector f_3 *que sea ortogonal a los vectores* $f_1(t) = t^2 - t$ *y* $f_2(t) = t - 1$

7.- *Sea M el espacio euclidiano de las matrices cuadradas de orden dos cuyo producto interno está definido de la siguiente manera:*

$$(A \mid B) = tr(B^T A), \qquad \forall\, A, B \in M$$

Obtén una base ortonormal de M a partir de la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

8.- *Sea* $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ *una base ortonormal de un espacio euclidiano V. Considerando el producto escalar ordinario, demuestra que:*

a) $((\alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n) \mid (\beta_1 \bar{e}_1 + \ldots + \beta_n \bar{e}_n)) = a_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{\beta}_n$

donde los α_i, $\beta_i \in C$

b) *Para todo* $\bar{v}, \bar{w} \in V$,

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = (\bar{v} \mid \bar{e}_1)\ \overline{(\bar{w} \mid \bar{e}_1)} + (\bar{v} \mid \bar{e}_2)\overline{(\bar{w} \mid \bar{e}_2)} + \ldots + (\bar{v} \mid \bar{e}_n)\overline{(\bar{w} \mid \bar{e}_n)}$$

9.- *Sean S y T dos operadores hermitianos. Demuestra que el operador* $(S + T)$ *también es hermitiano.*

10.- *Sea F el conjunto de todas las funciones complejas* $f: R \to C$ *definidas en el intervalo* $[-a, a]$ *tal que*

$$\int_{-a}^{a} \bar{f}_1(x)\ f_2(x)\, dx = \left[\bar{f}_1(x)\ f_2(x)\right]_{-a}^{a} = 0$$

Si se define el producto interno

$$(f \mid g) = \int_a^b \bar{f}(x)\ g(x)\, dx,$$

determina si el operador $P = i\,\dfrac{d}{dx}$ *es hermitiano.*

11.- Sea $T: C^2 \to C^2$ un operador lineal, donde $C^2 = \{(a + bi, c + di) \mid a, b, c, d \in R\}$ definido por $T(a + bi, c + di) = (-(b + d) + (a + c)i, -b + ai)$. Determina si T es un operador antihermitiano para el producto interno

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = (a_1 + b_1 i)\overline{(a_2 + b_2 i)} + (c_1 + d_1 i)\overline{(c_2 + d_2 i)}, \qquad \forall\ \bar{v}, \bar{w} \in C^2$$

12.- a) Demuestra que los valores característicos de un operador antihermitiano son números imaginarios puros.

b) Demuestra que el operador $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ es un operador antihermitiano para el producto interno

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = \bar{v}^T\ \bar{w} = [x_1\ \ x_2\ \ x_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \forall\ \bar{v}, \bar{w} \in R^3$$

c) Verifica el teorema del inciso (a) obteniendo los valores característicos del operador A.

13.- El operador $T(x, y) = (x \cos\Theta - y \operatorname{sen}\Theta,\ x \operatorname{sen}\Theta + y \cos\Theta)$ representa geométricamente una rotación del plano alrededor del origen, siendo Θ el ángulo de giro.

Determina si el operador T es ortogonal.

14.- Los renglones de una matriz ortogonal forman un conjunto ortonormal de vectores para el producto escalar oridinario. Obtén una matriz ortogonal, A, cuyo primer renglón sea $u = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

15.- Sea V un espacio euclidiano y sean A y B bases ortonormales de V. Demuestra que la matriz de transición M_B^A es una matriz ortogonal.

16.- Demuestra que si $T: V \to V$ es un operador ortogonal en un espacio euclidiano V, entonces, T transforma bases ortonormales en bases ortonormales, es decir, si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces, $\{T(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2), \ldots, T(\bar{v}_n)\}$ es una base ortonormal.

17.- La matriz asociada con respecto a las bases canónicas de un operador lineal $T: R^3 \to R^3$ es

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Marca con una X la respuesta correcta:

De acuerdo al enunciado anterior, el operador T es hermitiano (considera el producto escalar ordinario).

SI NO

b) Una base ortonormal de R^3 formada por los vectores característicos de T es

$B =$

c) Comprueba que la matriz M y la matriz diagonal D formada por los valores característicos de T están relacionadas por la expresión $D = P^T M P$. Es decir, la matriz P cuyas columnas son vectores característicos de T es una matriz unitaria (ortogonal).

Examen de Capítulo

1.- Sea $S = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ un espacio vectorial definido sobre el campo de los reales, en el que se define la operación

$$(p \mid q) = p(1)q(1) + p(0)q(0) + p(2)q(2), \qquad \forall\ p, q \in S$$

que cumple con $(p \mid q) = (q \mid p)$

y $(p \mid q + r) = (p \mid q) + (p \mid r), \qquad \forall\ p, q, r \in S$

Determina si $(p \mid q)$ es un producto interno.

Nota: $p(1)$ es el polinomio $p(x)$ evaluado en $x = 1$

25 PTS.

2.- Relaciona las siguientes columnas escribiendo en el paréntesis de la derecha la letra que corresponda para completar correctamente la expresión de la izquierda.

Sea V un espacio euclidiano complejo. Entonces, si $\bar{x}, \bar{y} \in V$ y $\alpha \in C$:

A) $(\bar{x} \mid \bar{y}) =$

B) $\alpha(\bar{x} \mid \bar{y}) =$

C) $\bar{\alpha}\ (\bar{x} \mid \bar{y}) =$

D) si $\bar{x} \neq \bar{0}$, entonces

E) $\bar{x}$, $\bar{y}$ son ortogonales si

( ) $(\alpha \bar{x} \mid \bar{y})$

( ) $(\bar{x} \mid \bar{y}) > 0$

( ) $(\bar{x} \mid \bar{x}) = 0$

( ) $(\alpha \bar{x} \mid \alpha \bar{y})$

( ) $(\bar{x} \mid \bar{x}) > 0$

( ) $(\bar{x} \mid \bar{y}) = 0$

( ) $\overline{(\bar{y} \mid \bar{x})}$

( ) $(\bar{x} \mid \alpha \bar{y})$

( ) $(\bar{y} \mid \bar{x})$

10 PTS.

3.- Demuestra que si $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son ortogonales, entonces cualquier múltiplo escalar de $\bar{v}$, $\alpha \bar{v}$, también es ortogonal al vector $\bar{w}$.

15 PTS.

4.- Sea V el espacio euclidiano real de todos los polinomios con el producto interno

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt, \qquad \forall\, f, g \in V$$

Determina si el operador $T: V \to V$ definido por $T(f(x)) = f(x) + f(-x)$ es un operador simétrico.

25 PTS.

5.- Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales, donde

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in R \right\}$$

y sea $(A \mid B) = tr\,(A B^T)$, $\quad A, B \in V$, un producto interno definido en V.

a) Comprueba que el operador $T(A) = A$, $\quad A \in V$, es un operador ortogonal.

b) A partir de la base $\left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ obtén una base ortonormal de V.

25 PTS.

Tiempo máximo de duración 1 hora 30 minutos.

Respuestas

EXAMENES DIAGNOSTICO

CAPITULO I

1.- a)

2.- $x = 3$
$y = 2$

3.- $x = 1$
$y = -\frac{1}{2}$

4.- 4, 7

5.- *Velocidad del bote* 3 km/hr
Velocidad de la corriente 1 km/hr

CAPITULO II

1.- a) $1 - 2i$
b) $7 - 4i$
c) $11\,i$

2.- a) 13
b) 44

CAPITULO III

1.- a) ϕ b) I

2.- a) $a + c = b + c$, entonces $a = b$

b) Cerradura, asociatividad, conmutatividad, ley cancelativa, existencia de elemento idéntico, existencia de inversos.

c) $x(yz) = (xy)z$

d) $1 + 0i$

3.- (C)
(B)
(D)

4.- a) biyectiva
b) inyectiva
c) unívoca

5.- a) $6e^{2x}$

b) $\dfrac{\log_{10} e}{1+t} + 21\,t^2$

c) $\sec^2 x - 16x$

CAPITULO IV

1.- Son iguales únicamente $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_4$

2.- $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 3$, $e = -6$

3.-

S	$f(S)$
-2	-2
-1	-2
0	0
1	2
2	2

4.- a) $f_1''(x) = 24x - 6$

b) $f_2''(x) = 48\, e^{4x} - 3x \cos x - 6 \operatorname{sen} x$

c) $f_3''(x) = -\dfrac{3 + 2 \ln x}{x^3}$

CAPITULO V

1.- a) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $x = \frac{1}{7} k, \quad y = \frac{2}{7} k, \quad z = k, \quad \forall k \in R$

2.- a) $$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.- a) $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$

CAPITULO VI

1.- a) $\sqrt{37}$ b) 5

2.- Son ortogonales $\overline{u},\overline{v}$ y $\overline{v},\overline{w}$

3.- $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{9}\right)$

4.- 0

5.- $[-2]$

6.- 8

7.- a) $a = -3 - 3i$, $b = -4i$, $c = 8 + i$

$d = 6$, $e = i$, $f = 10$

b) $x = -1 - i$, $y = -13$, $z = 8 + 4i$, $w = 0$

c) Sí

EJERCICIOS PROPUESTOS

CAPITULO I

1.- *Solución general:*

$$x = k_1$$
$$y = k_2$$
$$z = k_3$$
$$w = 4k_1 - 3k_2 + 2k_3, \qquad k_1, k_2, k_3 \in R$$

Soluciones particulares:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & x = 1 \\ y = 0 & y = 1 \\ z = 0 & z = 1 \\ w = 0 & w = 3 \end{array}$$

2.- a) *Incompatible*

b) $x_1 = \dfrac{7k - 2}{5}, \quad x_2 = \dfrac{4k - 14}{5}, \quad x_3 = 1 - k, \quad x_4 = k, \quad k \in R$

c) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

3.- $a = 0$

4.- $m = 3$

solución general:

$$t = k$$
$$s = -\frac{7}{2}k$$
$$r = -\frac{13}{2}k, \qquad k \in R$$

Una solución particular: $t = 2, \quad s = -7, \quad r = -13$

5.- (16, -9, -4)

6.- Compresoras : \$ 2 millones
Medidores : \$ 500 mil
Válvulas : \$ 250 mil
Reguladores : \$ 1 millón

7.- El mínimo permisible por DA sería de 500 carros.

CAPITULO II

1.- $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 0$

2.-
$$\begin{bmatrix} 11 & 4 & 6 & 11 & 8 & 5 \\ 11 & 2 & -6 & 4 & 15 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & -10 & 5 & 4 & 2 \\ 17 & 1 & 10 & 18 & 21 & 2 \end{bmatrix}$$

3.- a)
$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)
$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.- C *es hermitiana*

D *es antihermitiana*

8.- c)
$$H^n = \begin{bmatrix} \cos n\Theta & \operatorname{sen} n\Theta \\ -\operatorname{sen} n\Theta & \cos n\Theta \end{bmatrix}$$

9.- 3

10.-
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

11.-
$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

12.- A *no es ortogonal*

B *si es ortogonal*

13.- C *es unitaria*

D *no es unitaria*

14.- $x_1 = -\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$

$x_2 = 1 + \frac{3}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_2$

$x_3 = k_1$

$x_4 = k_2$

15.- $I_1 = 14, \quad I_2 = 22, \quad I_3 = -36, \quad V_2 = -228$

16.- a) - 22

b) - 22

c) - 22

17.- 3

18.- $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -3$

19.-

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21.- $x_2 = 1$

CAPITULO III

1.- a) Sí

b) 633

c) No se cumple

2.- a) 9 Ⓟ 6 = 36

1 Ⓟ 6, no se puede efectuar: $1 \notin T$

3 Ⓟ 3 = 18

c) Sí

d) No

3.- Sí

4.-

Ⓨ	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	A_2	A_3
A_2	A_2	A_3	A_1
A_3	A_3	A_1	A_2

El conjunto de acciones y la operación binaria forman un grupo abeliano.

5.- No forman grupo.

9.- Sí

10.- Sí

11.- b) *Dominio entero*

13.- *Sí*

15.- *No*

CAPITULO IV

1.- *Sí*

2.- *No*

3.- *No*

4.- *No*

5.- $k = -8$

8.- *Una base es,* $B = \{x^3 + 2x^2,\ \ 3x + 1\}$

dim $S = 2$

9.- a) $B = \{(1, -3, 2),\ (2, 4, 1),\ (1, 1, 1)\}$

b) $(1, 0, 0) = \frac{3}{2}(1, -3, 2) + \frac{5}{2}(2, 4, 1) - \frac{11}{2}(1, 1, 1)$

$(0, 1, 0) = -\frac{1}{2}(1, -3, 2) - \frac{1}{2}(2, 4, 1) + \frac{3}{2}(1, 1, 1)$

$(0, 0, 1) = -(1, -3, 2) - 2(2, 4, 1) + 5(1, 1, 1)$

10.- $(p)_G = (2, 3, 0)$

11.- $(\bar{v})_{B_2} = \left(-\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$

12.- a) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\dim M = 2$

c) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13.- a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

b) *dependiente*

c) *independiente*

d) $\bar{w} = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3 + \alpha_4\bar{v}_4$

e) *dependiente*

14.- $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$

15.- *Una base de S es,* $B = \{(-1, 5, 7)\}$

dim $S = 1$

16.- b) *Sí es una base de* E.

17.- $S = \left\{ \{(-a + \frac{5}{7} b,\ a - \frac{4}{7} b,\ a,\ b) \mid a, b \in R\} + (-\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0) \right\}$

18.- a) *independiente*

b) *dependiente*

c) *dependiente*

19.- a) $W(x) = 0$

b) *dependiente*

20.- b) $W(x) = 0$

c) *independientes*

1.- a) No

b) $N(T) = \{(0, -k, k) \mid k \in R\}$, $\quad \dim N(T) = 1$

$T(R^3) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in R\}$, $\quad \dim T(R^3) = 2$

c) No

d) No

e) $N(S) = \{(7k, -3k, k) \mid k \in R\}$, $\quad \dim N(S) = 1$

$S(R^3) = \{(x, y, y - x) \mid x, y \in R\}$, $\quad \dim S(R^3) = 2$

3.- $T(x, y) = (5x, -3y)$

5.- a) Codominio = D

Recorrido $= T(M) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in R \right\}$

Núcleo $= N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; k_1, k_2 \in R \right\}$

c) una base de $N(T) = \left[\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$

$\dim N(T) = 2$

6.- $M_B^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad M_E^B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

7.- $T(x,y,z) = (x+4y,\ y-x,\ 2x-2y+z,\ y-z)$

$\dim T(R^3) = 3, \qquad \dim N(T) = 0$

8.- $(0,\ \frac{27}{4})$

9.- a) $M(R) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

b) $(2, -2, 7),\ (0, 0, 9)$

10.- I) Sí ; $(G \circ F) : A \to A$

II) Sí ; $(G \circ H) : C \to A$

III) No

IV) Sí ; $(S \circ F) : A \to C$

V) No

VI) Sí ; $(H \circ T \circ G) : B \to B$

11.- a) $(0, 0)$

b) $(x-y,\ x-y)$

c) $(x,\ 2x+y)$

12.- $T^{-1}(x, y, z) = (x,\ y-x,\ z-y)$

13.- $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = (b-a)x + a$

14.- a) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$

$\bar{v}_{\lambda_1} = \{(k_1, 0, 0) \mid k_1 \in R,\ k_1 \neq 0\}$

$\bar{v}_{\lambda_2} = \{(k_2, 2k_2, 0) \mid k_2 \in R,\ k_2 \neq 0\}$

$\bar{v}_{\lambda_3} = \{(2k_3, 5k_3, 5k_3) \mid k_3 \in R,\ k_3 \neq 0\}$

16.- $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$

una base de $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$ *es* $\{(1,0,0)\}$

dim $E(\lambda_1) =$ *dim* $E(\lambda_2) = 1$

una base de $E(\lambda_3) = \{(1, 1, -2)\}$

dim $E(\lambda_3) = 1$

20.- a) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & -17 \\ 1 & 1 & 15 \end{bmatrix}$

C A P I T U L O   VI

3.- 9

4.- $\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3},\ x^3 - \frac{3}{5}\}$

6.- $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$

11.- b) $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

12.- $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

base ortonormal: $\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})\}$

MISCELANEA

CAPITULO I

1.- $\lambda = 5$

2.- Compatible indeterminado

3.- $\forall\, k \in R,\ k \neq -2$

4.- $(2, -1, 3)$

5.- \$280.00

6.- $x = -2,\ y = \frac{3}{2},\ z = 2,\ w = -\frac{1}{2}$

7.- Primer obrero: 2 horas. Segundo y tercer obreros: 4 horas.

CAPITULO II

1.- $[4]$

3.- Sí

4.- (V)
(F)
(V)
(V)

5.- b) $294x + 315y - 147y - 42x^2 - 42y^2 = 0$

7.- Una matriz P es: $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

8.- a) $det(A) = 1$ b) $det(B) = 6$ c) $det(C) = -1$

10.- $X = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$

14.- 88

15.- a) $a = 5$
b) $x_2 = 2$

CAPITULO III

2.- Sí

4.- Grupo abeliano

5.- Grupo

7.- a) Sí
b) No
c) Sí
d) Sí

12.- No

13.- Sí

CAPITULO IV

2.- *No es un espacio vectorial*

5.- a) *No es un subespacio de* R^2

b) *No es un subespacio de* R^2

c) *Sí es un subespacio de* R^2

7.- b) $(\overline{w})_B = (3, -1, 2)$

8.- b) $(a,b)_B = \left(\frac{a}{x_1} - \frac{y_1\,(ax_2 - bx_1)}{x_1(x_2y_1 - x_1y_2)}\, , \frac{ax_2 - bx_1}{x_2y_1 - x_1y_2}\right)$

10.- a) $A \cap B = \{(0, y, z) \mid y + z = 0\}$

b) $\dim A \cap B = 1$

12.- a) $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 3a + b \\ 2a + c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$

b) $R(A) = 3$

c) 3

13.- *Es linealmente dependiente*

14.- b) $(f(x))_B = (2,7)$

15.- a) F_1 *no es subespacio de* F

b) F_2 *sí es subespacio de* F

c) F_3 *sí es subespacio de* F

d) F_4 *no es subespacio de* F

CAPITULO V

1.- No

3.- c) $\dim N(T) = 1$

5.- $T(ax^2 + bx + c) = (-a + b)x^2 + c$

7.- $H(x,y) = (-2x,\ 3x - y)$

8.- a) $S^{-1}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & z \\ y & x \end{bmatrix}$

b) $T^{-1}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y-x \\ z-y & w-z \end{bmatrix}$

c) $(SoT)^{-1}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & z-w \\ y-z & x-y \end{bmatrix}$

9.- $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (-2a + b)x + (2a - b + c)$

10.- $\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$

$$\bar{v}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ k_1 \neq 0$$

$$\bar{v}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 4k_2 & 2k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},\ k_2 \neq 0$$

12.- a) Sí

b) No

c) Sí

13.-
$$M_B^B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

15.- II) a) $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

b)
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; \{(1, -1, 1), (2, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

CAPITULO VI

1.- Sí

2.- b) $\theta = \text{áng} \cos \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$

5.- $\frac{1}{2} \sqrt{e^2 + 1}$

6.- $f_3 = 10t^2 - 8t + 1$

7.-
$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$$

10.- Sí

11.- Sí

13.- Sí

14.- $$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

17.- a) Si

EXAMENES DE CAPITULO

CAPITULO I

1.- *Solución general:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 9 - 4k_1 + k_2 + 2k_3 \\ x_2 &= k_3 \\ x_3 &= k_2 \\ x_4 &= -8 + k_1 \\ x_5 &= k_1 \qquad ; \; k_1, k_2, k_3 \in R \end{aligned}$$

Soluciones particulares:

$x_1 = 9$	$x_1 = 11$
$x_2 = 0$	$x_2 = 1$
$x_3 = 0$	$x_3 = 0$
$x_4 = -8$	$x_4 = -8$
$x_5 = 0$	$x_5 = 0$

2.- a) $k = 1$

b) *No existe* $k \in R$

c) $k \neq 1$

3.- $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

4.- *Producto A : 3 unidades*

Producto B : 1 unidad

Producto C : 1 unidad

Producto D : 1 unidad

CAPITULO II

1.- a) (F)
    b) (V)
    c) (F)
    d) (V)

2.- a) $det\ (A) = -1$

b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- $\forall\ \alpha, \beta \in R, \quad \alpha \neq 0$

4.- a) (V)
    b) (V)
    c) (V)
    d) (F)
    e) (F)

5.-
$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.- $w = -2$

C A P I T U L O III

1.- b) La condición suficiente es que: u sea el idéntico para * y el idéntico por la derecha para o.

2.- Si lo forman.

4.- Si lo es.

5.- No es un isomorfismo.

C A P I T U L O IV

2.- (V)
(F)
(V)
(V)
(V)

3.- Una base:

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right]$$

dim $M = 3$

4.- $(p(x))_B = (0, -3, 1, 2)$

5.- a) *independientes*

b) $\dim E_S = 1$

6.- $W(x) = (0\,!)\,(1\,!)\,(2\,!)\,(3\,!)\ldots((n-2)!)\ ((n-1)!) \neq 0$

Linealmente independiente.

7.- $\left\{\ \{(x, y) \mid y = -2x\} + (0, 5)\ \right\}$

CAPITULO V

1.-

$$N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & -k_1 \end{bmatrix} \;\middle|\; k_1, k_2, k_3 \in R \right\}$$

Una base $\left[\!\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]\!\right]$

$\dim N(T) = 3$

2.-

$$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3.- $M(x,y) = (2x + 2y,\ -4x + 2y)$

4.- b)

$$S^{-1}(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} \dfrac{a+c}{2} & \dfrac{-a+2b+c}{2} \\ & \\ \dfrac{-a+2b+c}{2} & \dfrac{a-c}{2} \end{bmatrix}$$

5.- a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$

$\overline{v}_{\lambda_1} = \overline{v}_{\lambda_2} = \{kx^2 \mid k \in R,\ k \neq 0\}$

$\overline{v}_{\lambda_3} = \{kx^2 + 2kx - 4k \mid k \in R,\ k \neq 0\}$

b) *No es posible.*

C A P I T U L O VI

1.- *Sí*

2.- (B) $(\alpha\,\overline{x} \mid \overline{y})$

(D) $(\overline{x} \mid \overline{x}) > 0$

(E) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = 0$

(A) $\overline{(\overline{y} \mid \overline{x})}$

(C) $(\overline{x} \mid \alpha\,\overline{y})$

4.- *Sí*

5.- b)

$$B = \left[\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \right]$$