# CUADERNO DE EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

**MARGARITA RAMÍREZ GALINDO**
**ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ**

# FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO


# CUADERNO DE EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES


MARGARITA RAMÍREZ GALINDO
ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ



DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

# PRÓLOGO

La presente obra tiene como principal finalidad servir de complemento a la clase de teoría de la asignatura Ecuaciones Diferenciales para los alumnos que la cursan en la Facultad de Ingeniería, así como un apoyo didáctico para los profesores que la imparten.

La idea de realizar un Cuaderno de Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales, surge a partir de considerar conveniente optimizar el empleo del banco de reactivos de la Coordinación de Ecuaciones Diferenciales, constituido en su mayor parte por las propuestas de exámenes realizadas por los profesores de esta asignatura, a lo largo de varios semestres. Fue a iniciativa del Ing. Enrique Arenas Sánchez, que se creó este banco de reactivos , más adelante continuó la recopilación y ordenación de reactivos la Ing. Margarita Ramírez Galindo; posteriormente ambos colaboraron para dar forma al trabajo que aquí se presenta.

Este cuaderno consta de 180 ejercicios en total, de los cuales 100 presentan el proceso de resolución de manera detallada y 80 son ejercicios propuestos con solución. Cabe mencionar que para este trabajo se realizó una selección de aquellos reactivos que pudiesen reforzar de manera más representativa los contenidos del curso y se planeó que este cuaderno ofreciera no sólo el proceso de resolución, sino además una orientación para el alumno de cómo resolver los ejercicios a partir de la aplicación de los conceptos teóricos correspondientes.

La característica fundamental de este cuaderno, es que los ejercicios resueltos se han desarrollado buscando que el alumno identifique en el proceso de resolución aspectos elementales de las ecuaciones diferenciales, que le permitan reforzar en cada ejercicio los conceptos previamente vistos en su clase de teoría. En cuanto a los ejercicios propuestos, se seleccionaron de manera que propicien en el alumno la inquietud de reafirmar sus conocimientos; para éstos se proporciona su solución.

La obra se ha dividido en seis temas, siguiendo el orden del programa de la asignatura. El número de ejercicios que se presentan en cada uno de ellos, ha sido considerando los contenidos respectivos, de manera que los temas de contenidos más densos se complementan con mayor número de ejercicios resueltos.

Deseamos que este trabajo logre su cometido de favorecer al aprendizaje de los alumnos y servir de apoyo a los profesores, este es el objetivo primordial.

Un reconocimiento especial debe darse a la Srita. Martha Josefina Fernández Martínez, quien realizó el proceso de captura de este trabajo con gran esmero y dedicación.

Concientes de que la obra puede presentar errores, agradeceremos tanto a alumnos como a profesores los comentarios que nos hagan llegar, lo que permitirá corregir y mejorar futuras ediciones.

MARGARITA RAMÍREZ GALINDO　　　　ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ

# P R E S E N T A C I Ó N

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso de la obra *Cuaderno de ejercicios de ecuaciones diferenciales*, elaborada por los profesores Margarita Ramírez Galindo y Enrique Arenas Sánchez

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

# CONTENIDO

## TEMA 1 ECUACIONES DIFERENCIALES



## TEMA 2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN



## TEMA 3 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

## TEMA 4 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES



## TEMA 5 TRANSFORMADA DE LAPLACE



## TEMA 6 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

# TEMA 1

# ECUACIONES DIFERENCIALES

## 1.1 DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL.

**1)** Clasifique cada una de las ecuaciones diferenciales, atendiendo a si es ordinaria o parcial, de coeficientes variables o constantes, lineal o no lineal; indique también el orden, así como las variables dependientes e independientes.

a) $\dfrac{dx}{dt} = k(4-x)(1-x)$

b) $-\pi(y\tan\alpha)^2\dfrac{dy}{dt} = 12(2gy)^{\frac{1}{2}}$ donde $\alpha$ y $g$ son constantes

c) $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r} + kN$ donde $k$ es constante

**RESOLUCIÓN**

a) Ordinaria, coeficientes constantes, no lineal, primer orden, " $x$ " variable dependiente, " $t$ " variable independiente.

b) Ordinaria, coeficientes constantes, no lineal, primer orden, " $y$ " variable dependiente, " $t$ " varible independiente.

c) Parcial, coeficiente varible, lineal, segundo orden, " $N$ " variable dependiente, " $r$ " y " $t$ " varibles independientes.

**2)** Determine los valores que pueden tomar las constantes $k, m, n, t$ de modo que la ecuación diferencial $x^t\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + 4\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right) = x^n$ sea lineal, de segundo orden y de coeficientes constantes.

**RESOLUCIÓN**

Si $m = 1$ es lineal

Si $k = 2$ es de segundo orden

Si $t = 0$ $x^t = x^0 = 1$ es constante y la ecuación es de coeficientes constantes

Como $x^n$ es el término independiente, $n$ puede ser cualquier real.

## 1.2 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

**1)** Sea la función $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

a) Muestre que $y(x)$ es solución de la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

b) Determine, si existen, los valores de $C_1$ y $C_2$, tales que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

**RESOLUCIÓN**

a) Si $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial, entonces debe satisfacerla.

Se calcula la primera y segunda derivadas de la función $y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -C_1 e^{-x} + 2\,C_2\,e^{2x}$$

Al derivar nuevamente se obtiene

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 e^{-x} + 4\,C_2\,e^{2x}$$

Enseguida se sustituyen estas funciones en la ecuación diferencial:

$$C_1 e^{-x} + 4\,C_2\,e^{2x} - (-C_1\,e^{-x} + 2\,C_2\,e^{2x}) - 2\,(C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2x}) = 0$$

se efectúan operaciones y reducen términos semejantes, con lo que se tiene

$$0 = 0$$

y así queda demostrado que $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

b) Para la condición $y(0) = 2$, se sustituye en la solución de la ecuación diferencial, esto es

$$\begin{aligned} 2 &= C_1\,e^{(0)} + C_2\,e^{(0)} \\ 2 &= C_1 + C_2 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots.(1)$$

De manera análoga, para la condición $y'(0) = 1$, se sustituye en la primera derivada de la función solución

$$
\begin{aligned}
1 &= -C_1\, e^{(0)} + 2\, C_2\, e^{(0)} \\
1 &= -C_1 + 2\, C_2 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)
\end{aligned}
$$

Se resuelve el sistema formado por (1) y (2); sumando ambas ecuaciones

$(1) + (2)$

$$
\begin{aligned}
3 &= 3\, C_2 \\
3 &= C_2
\end{aligned}
$$

Finalmente, se sustituye este valor en (2), con lo que se obtiene

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 2 - C_2 \\
C_1 &= 2 - 3 \\
C_1 &= -1
\end{aligned}
$$

**2)** Verifique que $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, x^{\frac{3}{2}}$ con $x > 0$, es solución de la ecuación diferencial

$$y\, y''' = -\frac{1}{2}$$

**RESOLUCIÓN**

La función dada debe satisfacer la ecuación diferencial, por lo que es necesario calcular

$y'$ , $y''$ , $y'''$

Para $y'$ se tiene

$$y' = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\; x^{\frac{1}{2}}$$

Para $y''$ se tiene

$$y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}$$

Finalmente se tiene $y'''$

$$y''' = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\,x^{-\frac{3}{2}}$$

Se sustituye $y$ , $y'''$ en la ecuación diferencial

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x^{\frac{3}{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\,x^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Del resultado obtenido se concluye que la función dada sí es solución de la ecuación diferencial.

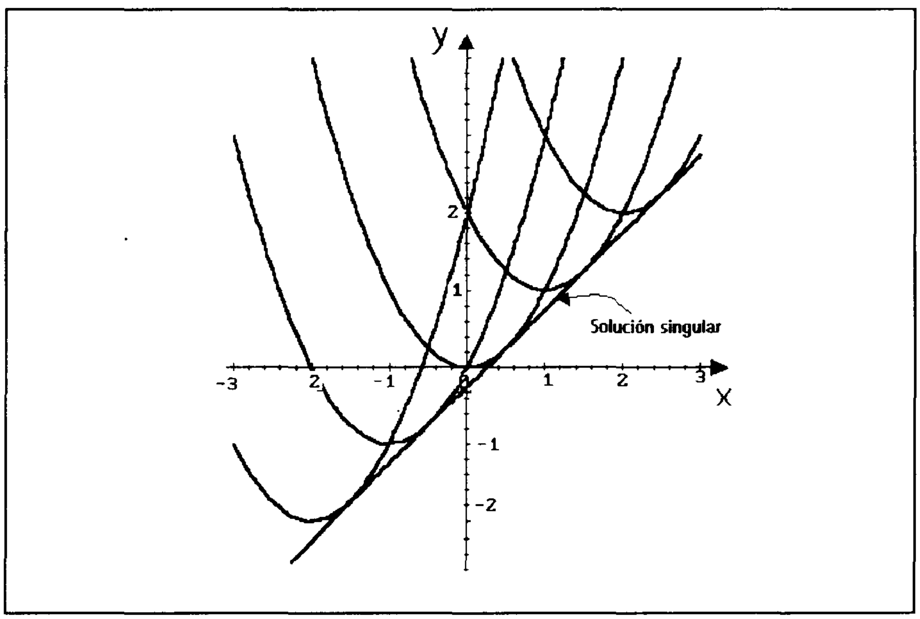
**3)** Dada la ecuación diferencial $(y')^2 + 2y' + 4x - 4y = 0$ , si su solución general es

$$y = (x - C)^2 + C$$

a) construya una gráfica, de la familia soluciones,
b) determine, si existe, la ecuación de una solución singular.

**RESOLUCIÓN**

a) $y - C = (x - C)^2$ representa a la familia de parábolas con vértices sobre la recta $y = x$




b) Para determinar si existe alguna solución singular, se deriva la ecuación diferencial parcialmente respecto a $y'$ :

$$\frac{\partial}{\partial y'}[(y')^2 + 2y' + 4x - 4y] = 0$$

de aquí se obtiene

$$2y' + 2 = 0$$
$$y' = -1$$

Este valor de $y'$ es sustituído en la ecuación diferencial

$$(-1)^2 + 2(-1) + 4x - 4y = 0$$

y al reducir términos se tiene

$$4x - 4y = 1$$

constituye una solución singular. En la gráfica del inciso a) se observa la recta tangente a la familia de parábolas; esta recta es la representación gráfica de la solución singular obtenida.

**4)** a) Obtenga la ecuación diferencial que tiene por solución general a $y = (x - C)^2 - 1$ , donde $C$ es constante.

b) Determine cuáles de las siguientes funciones son solución de la ecuación obtenida en a) indicando, en su caso, que tipo de solución es:

I) $y = x^2$

II) $y = -1$

III) $y = x^2 + 2x$

**RESOLUCIÓN**

a) Para obtener la ecuación diferencial, se debe eliminar la constante $C$ de la solución

$$y = (x - C)^2 - 1$$

la cual se logra derivando dicha solución

$$y' = 2(x - C)$$

enseguida se despeja la constante o el término $(x - C)$ , lo cual resulta más adecuado,

es decir, $$x - C = \frac{y'}{2}$$

este resultado se sustituye en la solución general, con lo que

$$y = \left( \frac{y'}{2} \right)^2 - 1$$

la cual es la ecuación diferencial y que es posible reescribir como

$$4y = (y')^2 - 4$$

$$(y')^2 = 4y + 4$$

b) Para $y = x^2$ , se deriva obteniendo $y' = 2x$ y al sustituir en la ecuación diferencial

$$(2x) \neq 4x^2 + 4 \quad \therefore \quad \text{no es solución}$$

Para $y = -1$ , $y' = 0$
se sustituye en la ecuación diferencial

$0 = 4(-1) + 4 = 0$ sí es solución, es solución singular pues no se obtiene de la solución general.

Para $y = x^2 + 2x$ , se deriva

$$y' = 2x + 2$$

al sustituir en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} (2x + 2)^2 &= 4(x^2 + 2x) + 4 \\ 4x^2 + 8x + 4 &= 4x^2 + 8x + 4 \end{aligned} \quad ,$$

sí es solución y es particular, pues se obtiene de la general.

**5)** La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto $(x, y)$ del plano $xy$ está dada por $f(x) = 4 - 2x$ .

a) Establezca la ecuación diferencial de la familia.

b) Determine el elemento de la familia que pasa por el punto $(0, 0)$ .

## RESOLUCIÓN

a) La pendiente $m$ , de acuerdo al enunciado es

$$m = \frac{dy}{dx} = 4 - 2x$$

que representa la ecuación diferencial de la familia.

b) Para resolver este inciso se requiere la solución general de la ecuación diferencial, es decir, la función $y$. Entonces al integrar

$$dy = (4 - 2x)\,dx$$

$$\int dy = \int (4 - 2x)\,dx$$

de donde

$$y = 4x - x^2 + C \quad \text{, que es la solución general.}$$

Para la condición $x = 0$ , $y = 0$ al sustituir en la solución general se tiene

$$0 = C$$

Finalmente, sustituyendo este valor en la solución general, se obtiene

$$y = 4x - x^2 \quad \text{que representa el elemento requerido.}$$

**6)** Obtenga la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de rectas tales que su pendiente y su abscisa al origen son iguales.

**RESOLUCIÓN**

La ecuación de la recta a considerar corresponde a punto y pendiente,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

donde el punto $P_0$ tiene por coordenadas $(a, 0)$ y $a$ es la abscisa al origen; si la pendiente y abscisa al origen son iguales se tiene $m = a$ y al sustituir en la ecuación de la recta

$$\begin{aligned} y &= a(x - a) \\ y &= ax - a^2 \end{aligned} \quad , \quad a \quad \text{es una constante arbitraria}$$

que es la ecuación de la familia de rectas.
Se deriva para eliminar la constante

$$y' = a$$

Enseguida se sustituye en la ecuación de la familia

$$y = y'x - (y')^2$$

que también se puede escribir como

$$(y')^2 - y'x + y = 0$$

**7)** Obtenga la ecuación diferencial cuya solución es la familia de parábolas con vértice sobre el eje $x$ , eje paralelo al eje $y$ cuya distancia del foco al vértice es " $a$ ".

**RESOLUCIÓN**

Es necesario obtener inicialmente la expresión analítica de la familia de parábolas.
La ecuación de la familia de parábolas es

$$4ay = (x - h)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$h$ es la única como constante arbitraria
al derivar una vez se tiene

$$4ay' = 2(x - h)$$

despejando $x - h$ se tiene

$$x - h = 2ay'$$

sustituyendo en (1) se tiene

$$4ay = (2ay')^2$$

finalmente

$$4ay = 4a^2(y')^2$$ , es la ecuación diferencial.

**8)** Obtenga la ecuación diferencial cuya solución es la familia de circunferencias con centros sobre el eje **x**.

**RESOLUCIÓN**

La ecuación de la circunferencia de centro $(h, k)$ y radio $r$ es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

De acuerdo a la descripción del enunciado el centro de las circunferencias tiene ordenada cero, es decir, $k = 0$ ; en lo que respecta al radio, es también variable. Entonces la ecuación que describe a la familia es

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes arbitrarias.

La ecuación diferencial deseada es de segundo orden (el orden corresponde al número de constantes arbitarias), por lo que es necesario derivar dos veces y eliminar las constantes $C_1$ y $C_2$

Para la primera derivada

$$2(x - C_1) + 2yy' = 0$$

Al simplificar

$$x - C_1 + yy' = 0$$

$$C_1 = x + yy'$$

Nuevamente se deriva

$$0 = 1 + yy'' + y'y'$$

Finalmente

$$(y')^2 + yy'' + 1 = 0$$

es la ecuación diferencial.

**9)** Determine la ecuación diferencial, que tiene como solución general

$$y_G = C_1 e^{\alpha x} + \gamma\, sen(x)$$

donde $\alpha$ , $\gamma$ , $C_1$ son constantes y únicamente $C_1$ es esencial y arbitraria.

**RESOLUCIÓN**

La solución general es $y = C_1 e^{\alpha x} + \gamma\, sen x$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (1)

esta función contiene una sola constante esencial y arbitraria por lo que la ecuación diferencial debe ser de primer orden.

Al derivar la función se obtiene

$$y' = \alpha C_1 e^{\alpha x} + \gamma \cos x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

a continuación se elimina la constante $C_1$ despejándola de (1) y (2)

$$C_1 = \frac{(y - \gamma \operatorname{sen} x)}{e^{\alpha x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$C_1 = \frac{y' - \gamma \cos x}{\alpha\, e^{\alpha x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

al igualar (3) y (4) se tiene

$$\frac{y - \gamma \operatorname{sen} x}{e^{\alpha x}} = \frac{y' - \gamma \cos x}{\alpha\, e^{\alpha x}}$$

al simplificar

$$\alpha\, y - \alpha\, \gamma \operatorname{sen} x = y' - \gamma \cos x$$

Finalmente al reordenar los términos se obtiene

$$y' - \alpha\, y = \gamma \cos x - \alpha\, \gamma \operatorname{sen} x$$

**10)** Verifique que la función $\frac{P}{1 - P} = C_1 e^t$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P)$$

**RESOLUCIÓN**

Para que la función dada sea solución de la ecuación diferencial debe satisfacerla, entonces es necesario calcular la derivada de la función.
Se observa que la función es implícita por lo que es conveniente expresarla de la siguiente manera

$$P = C_1 e^t (1 - P)$$

derivando en forma implícita

$$P' = C_1\, e^t (- P') + (1 - P)\, C_1\, e^t$$

$$P' = - C_1\, e^t P' + C_1\, e^t - C_1\, e^t P$$

$$P' = C_1 e^t (1 - P - P')$$

pero sabemos que $C_1 e^t = \frac{P}{1-P}$ , por lo que

$$P' = \frac{P}{1-P}(1 - P - P')$$

$$P'(1-P) = P(1-P-P')$$

al efectuar operaciones y simplificar

$$P' - PP' = P(1-P) - PP'$$

$$P' = P(1-P)$$

es decir , $\frac{dP}{dt} = P' = P(1-P)$ por lo que se verifica.

**11)** Verifique que la ecuación diferencial

$$y'' - y = 4x$$

tiene por solución a la función $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4x$ y obtenga la solución particular que satisfaga las condiciones $y(0) = 2$ , $y'(0) = 0$

**RESOLUCIÓN**

Para verificar es necesario que la función satisfaga a la ecuación diferencial; obtenemos $y'$ y $y''$

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 4$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

enseguida se sustituye en la ecuación diferencial

$$(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) - (C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4x) = 4x$$

efectuando operaciones y simplificando se tiene que

$$4x = 4x$$

Para obtener la solución particular se requiere derivar la solución general para aplicar la condición inicial $y'(0) = 0$

Al derivar se obtiene

$$y_G' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} -4$$

Entonces, aplicando $y(0) = 2$ y $y'(0) = 0$ se obtiene

$$2 = C_1 + C_2$$

$$0 = C_1 - C_2 - 4$$

que es un sistema que tiene por solución $C_1 = 3$ y $C_2 = -1$

Así, la solución particular que satisface las condiciones iniciales es

$$y = 3e^{x} - e^{-x} - 4x$$

**12)** Determine las funciones $Q(y)$ y $P(x)$ si $y^2 + 2Cx = C^2$ es la solución general de la ecuación diferencial $Q(y)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + P(x)\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

**RESOLUCIÓN**

Inicialmente se calcula la derivada de la función que representa a la solución general; dado que no está en forma explícita, se deriva implícitamente

$$2yy' + 2C = 0$$

o bien

$$yy' + C = 0$$

de donde

$$C = -yy'$$

Enseguida se sustituye en la solución general

$$y^2 + 2(-yy')x = (-yy')^2$$

efectuando operaciones

$$y^2 - 2yy'x = y^2(y')^2$$

reordenando e igualando a cero

$$y^2(y')^2 + 2xyy' - y^2 = 0$$

dividiendo entre $y$

$$y(y')^2 + 2xy' - y = 0$$

esta última ecuación tiene la forma de la ecuación diferencial dada

$$Q(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P(x)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

por lo que al comparar los coeficientes se obtiene

$$Q(y) = y \quad , \quad P(x) = 2x$$

## 1.3 PROBLEMA DEL VALOR INICIAL.

**1)** Verifique que $(y - C)^2 = Cx$ es la solución general de la ecuación diferencial $4x(y')^2 + 2xy' - y = 0$ y obtenga una solución particular que satisfaga la condición inicial $y(1) = 2$

**RESOLUCIÓN**

La solución general contiene una sola constante arbitraria, por lo que es necesario derivar una vez la solución general, esto es

$$2(y - C)y' = C$$

despejando $y'$ se obtiene

$$y' = \left(\frac{C}{2(y - C)}\right)$$

Después se sustituye en la ecuación diferencial

$$4x(y')^2 + 2xy' - y = 4x\left(\frac{C}{2(y - C)}\right)^2 + 2x\left(\frac{C}{2(y - C)}\right) - y$$

Efectuando operaciones se tiene

$$= \frac{xC^2 + xC(y - C) - y(y - C)^2}{(y - C)^2}$$

$$= \frac{xC^2 + xyC - xC^2 - y(y - C)^2}{(y - C)^2}$$

$$= \frac{xyC - y(y - C)^2}{(y - C)^2}$$

De la solución general se tiene $(y - C)^2 = Cx$, por lo que en el segundo miembro de la ecuación anterior se escribe

$$= \frac{xyC - y(Cx)}{Cx}$$

$$= 0$$

por lo tanto se verifica que sí es solución.

Para obtener la solución particular, se aplica la condición inicial $y(1) = 2$ en la solución general $(y - C)^2 = Cx$

$$(2 - C)^2 = C(1)$$

desarrollando el binomio se obtiene

$$4 - 4C + C^2 = C$$
$$C^2 - 5C + 4 = 0$$

esta última expresión es una ecuación de segundo grado que al resolver determina

$$C = 1 \quad \text{y} \quad C = 4$$

Para cada valor obtenido se tiene una solución particular, es decir

para $C = 1$ $\qquad (y - 1)^2 = x$

para $C = 4$ $\qquad (y - 4)^2 = 4x$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1)** Demuestre que $(y-c)^2 = cx$ es la solución general de la ecuación diferencial $4x(y')^2 + 2xy' - y = 0$ y obtenga una solución particular que satisfaga la condición inicial $y(1) = 2$

**Solución.**

$(y - 1)^2 = x \qquad (y - 4)^2 = 4x$

**2)** Clasifique cada una de las ecuaciones diferenciales, atendiendo a si es ordinaria o parcial, de coeficientes variables o constantes, lineal o no lineal; indique también el orden, así como las variables dependientes e independientes.

a) $xy'' - 4y' - 5y = e^{3x}$

b) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial y}{\partial t} + ky - \dfrac{\partial y}{\partial s}$ donde $k$ es una constante

c) $y'' + 2x^3y' - (x-1)y = xy^{\frac{3}{2}}$

**Solución.**

a) $xy'' - 4y' - 5y = e^{3x}$ ordinaria, coeficientes constantes, lineal, orden 2, $y$ variable dependiente, $x$ variables independiente

b) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial^2 t} = \dfrac{\partial y}{\partial t} + ky - \dfrac{\partial y}{\partial s}$ $k = cte$ parcial, coeficientes constantes, lineal, orden 2, $y$ variable dependiente, $t, s$ variables independientes

c) $y'' + 2x^3y' - (x-1)y = xy^{\frac{3}{2}}$ ordinaria, coeficientes variables, no lineal, orden 2, $y$ variable dependiente, $x$ variable independiente

**3)** Obtenga la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de circunferencias con centro en la recta $y = x$ y tangentes al eje $y$ .

**Solución.**

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{x + yy'}{x + y'}\right)(x + y) + \frac{(x + yy')^2}{(x + y')^2} = 0$$

**4)** Sea la ecuación diferencial $y' - x\sqrt{y} = 0$ , que tiene como solución la familia uniparamétrica de soluciones $y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2$

Determine
a) una solución particular
b) una solución singular

**Solución.**

a) si $C = 0$ una solución particular es $y = \left(\frac{x^2}{4}\right)^2$

b) una solución singular es $y = 0$

**5)** Verifique que $y = \dfrac{2}{1 - Ce^x}$ , donde C es una constante arbitraria, es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(y-2)}{2}$

**6)** Determine los valores que pueden tomar las constantes *k, m, n, t* de modo que la ecuación diferencial $x^t\left(\dfrac{d^ny}{dx^n}\right)^m + 4\left(\dfrac{d^ky}{dx^k}\right)^3 = x$ sea de segundo orden y segundo grado.

**Solución.**

Para la ecuación $x^t \left( \dfrac{d^n y}{dx^n} \right)^m + 4 \left( \dfrac{d^k y}{dx^k} \right)^3 = x$ sea de segundo orden y de segundo grado $n = 2$ (2o. orden) con $k > 2$ , $m = 2$ y $t \in \mathbb{R}$

**7)** a) Obtenga una ecuación diferencial de la cual la familia de rectas $y = Cx + C^2$ , es solución.

b) Determine cuáles de las funciones

$$y_1 = -\frac{1}{4} x^2 \ , \qquad y_2 = x + 1 \ , \qquad y_3 = x + 3$$

son solución de la ecuación obtenida en el inciso anterior e indique, en cada caso, qué tipo de solución es.

**Solución.**

a) $y = x y' + (y')^2$

b) $y_1$ es una solución singular

$y_2$ es una solución particular

$y_1$ no es solución

**8)** Sea la ecuación diferencial $y'' - y' = 20$ , cuya solución general es

$$y_G = C_1 + C_2 e^t - 20t$$

Obtenga la solución particular sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 0$ , $y'(0) = 40$

**Solución.**

$y_p = -40 + 40 e^t - 20t$

**9)** Si $x^2 + (y - C)^2 = 4$ es la solución general de la ecuación diferencial $x^2 = (4 - x^2)(y')^2$ , obtenga , si existe, una solución singular de la ecuación difrencial dada.

**Solución.**

Existen dos soluciones singulares y son $x = 2$ , $x = -2$

**10)** Verifique que $4x^2 - y^2 = C$ , donde $C$ es una constante arbitraria, proporciona una familia uniparamétrica de soluciones implícitas de

$$y\frac{dy}{dx} - 4x = 0$$

# TEMA 2

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

## 2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES.

**1)** Resuelva la ecuación diferencial $y^2 dx - xydy = x^2 ydy$ , utilizando el método de separación de variables.

**RESOLUCIÓN**

$$y^2 dx - xydy = x^2 ydy$$

Agrupando términos para cada diferencial se tiene

$$y^2 dx = (x^2 y + xy)\, dy$$

Enseguida se separan variables

$$\frac{dx}{x^2 + x} = \frac{ydy}{y^2}$$

El paso inmediato es integrar ambos miembros

$$\int \frac{dx}{x^2 + x} = \int \frac{ydy}{y^2}$$

en el primer miembro se observa que es necesario descomponer en fracciones parciales, de donde se obtiene

$$\int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{dy}{y}$$

integrando

$$Ln\,|x| - Ln\,|x+1| = Ln\,|y| + C$$

por propiedades de logaritmos se obtiene

$$Ln\left( \frac{x}{x+1} \right) = Ln\,(Cy)$$

y aplicando la función exponencial

$$\frac{x}{x+1} = C\,y$$

finalmente

$$y = \frac{x}{C(x+1)} \quad , \text{ que es la solución general}$$

**2)** Resuelva la ecuación diferencial $y'(1+e^x) = e^{x-y}$ utilizando el método de separación de variables.

**RESOLUCIÓN**

La ecuación diferencial también se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dx}(1 + e^x) = \frac{e^x}{e^y}$$

al separar variables se obtiene

$$e^y dy = \left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right) dx$$

posteriormente se integran ambos miembros

$$\int e^y dy = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}$$

de donde se obtiene

$$e^y = Ln(1 + e^x) + C$$

que es la solución de la ecuación diferencial.

**3)** Resuelva la ecuación diferencial

$$(3x - 6y + 4)\frac{dy}{dx} + x - 2y + 3 = 0$$

**Sugerencia:** utilizar el cambio de variable $v = x - 2y$

**RESOLUCIÓN**

$$(3x - 6y + 4)\frac{dy}{dx} + x - 2y + 3 = 0$$

al utilizar la sustitución $v = x - 2y$ se despeja a la variable $y$, asimismo se calcula la derivada con respecto a $x$

$$y = \frac{x - v}{2} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{dv}{dx}\right)$$

se sustituye en la ecuación diferencial dada

$$\left(3x - 6\left(\frac{x - v}{2}\right) + 4\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dv}{dx}\right) + x - 2\left(\frac{x - v}{2}\right) + 3 = 0$$

se efectúan las operaciones indicadas y se reducen términos

$$(3x - 3x + 3v + 4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dv}{dx}\right) + x - x + v + 3 = 0$$

$$(3v + 4)\left(1 - \frac{dv}{dx}\right) + 2v + 6 = 0$$

$$3v + 4 - 3v\frac{dv}{dx} - 4\frac{dv}{dx} + 2v + 6 = 0$$

se llega a una ecuación diferencial de variables separables

$$(3v + 4)dv = dx(5v + 10)$$

$$dx = \frac{1}{5}\frac{3v + 4}{(v + 2)}dv$$

integrando

$$\int dx = \frac{1}{5}\int \frac{3v + 4}{v + 2}dv$$

$$\frac{3v + 4}{+2} = 3 - \frac{2}{v + 2}$$

entonces

$$\int dx = \frac{1}{5}\int 3 - \frac{2}{v + 2}dv$$

$$x = \frac{1}{5}(3v - 2Ln(v + 2)) + C$$

Sin embargo, de la sustitución $v = x - 2y$ se obtiene

$$x = \frac{1}{5}(3x - 6y - 2Ln(x - 2y + 2)) + C$$

que es la solución general.

**4)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = \tan^2(x+y)$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$$

La forma del argumento de la función sugiere emplear la sustitución

$$u = x + y \quad \text{.........(1)}$$

Lo que implica calcular $du$, entonces

$$du = dx + dy \quad \text{........ (2)}$$

ahora bien, en la ecuación diferencial es necesario el término $\dfrac{dy}{dx}$ ; lo obtenemos de (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \quad \text{.........(3)}$$

Enseguida se sustituyen (1) y (3) en la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dx} - 1 = \tan^2(u)$$

se tiene una ecuación de variables separables, por lo que

$$\frac{du}{dx} = \tan^2(u) + 1$$

$$\frac{du}{\tan^2(u) + 1} = dx$$

$$\frac{du}{\sec^2(u)} = dx$$

$$\cos^2(u)\, du = dx$$

Entonces ya es posible integrar ambos miembros

$$\int \cos^2(u)\, du = \int dx$$

$$\int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u \right) du = \int dx$$

de donde resulta

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}sen\,2u = x + C$$

pero de la sustitución efectuada se tiene

$$u = x + y$$

entonces del resultado anterior

$$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}sen\,2(x+y) = x + C$$

o bien

$$2(x+y) + sen\,2(x+y) = 4x + 4C$$

agrupando términos

$$2(y-x) + sen\,2(x+y) = C_1$$

que es la solución general.

**5)** Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y}\right)dx + \left(x^2\cos y\right)dy = 0$$

sujeta a la condición inicial $y(1) = \pi$

**RESOLUCIÓN**

Es una ecuación diferencial de primer orden expresada en forma diferencial, analizamos si es o no de variables separables, para lo cual separamos los términos diferenciales

$$\left(\frac{1-x}{y}\right)dx = -x^2\cos y\,dy$$

sí es de variables separables, por lo que se tiene

$$\frac{1-x}{-x^2}dx = y\cos y\,dy$$

esta igualdad también se puede escribir como

$$\frac{x-1}{x^2}dx = y\cos y\,dy$$

Luego de separar variables integramos ambos miembros de la igualdad

$$\int\frac{x-1}{x^2}dx = \int y\cos y\,dy$$

La integral del lado izquierdo se resuelve separando en dos nuevas integrales; la del lado derecho se resuelve integrando por partes

$$\int \frac{x}{x^2} dx - \int \frac{dx}{x^2} = \int y \cos y \, dy$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int x^{-2} dx = \int y \cos y$$

$$Lnx - \frac{x^{-1}}{-1} + C_1 = yseny + \cos y + C_2$$

Reordenando y agrupando constantes se obtiene

$$Lnx + \frac{1}{x} = yseny + \cos y + C$$

que es la solución general de la ecuación diferencial. Sin embargo, se tienen condiciones iniciales, las cuáles se aplican en la solución general para obtener el valor de la constante

$$y(1) = \pi \quad \Rightarrow \quad \ln(1) + \frac{1}{1} = \pi \, sen\pi + \cos\pi + C$$

$$(0) + 1 = (0) + (-1) + C$$

$$2 = C$$

Entonces la solución particular que satisface la condición inicial dada es

$$yseny + \cos y + 2 = \ln x + \frac{1}{x}$$

## 2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES HOMOGÉNEOS.

**1)** Resuelva la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene la ecuación

$$(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0$$

Se analiza qué tipo de ecuación es; se descarta que sea separación de variables y, por inspección, se puede afirmar que es de coeficientes homogéneos de grado 2.

Se realiza la sustitución $y = ux$ teniendo presente que es necesario calcular el diferencial de $y$

Al calcularlo se obtiene $dy = u\,dx + x\,du$, que al sustituirlo en la ecuación diferencial nos lleva a

$$(x^2 + (ux)^2)\,dx - x(ux)(u\,dx + x\,du)$$

efectuando operaciones y simplificando

$$(x^2 + u^2x^2)\,dx - x^2u(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$x^2\,dx + u^2x^2\,dx - u^2x^2\,dx - ux^3\,du = 0$$

obteniendo una ecuación diferencial de variables separables

$$x^2dx - x^3u\,du = 0$$

separando variables

$$\frac{dx}{x} - u\,du = 0$$

integrando

$$Lnx - \frac{u^2}{2} = C$$

finalmente

$Lnx - \dfrac{y^2}{2x^2} = C$, que es la solución general de la ecuación diferencial.

**2)** Resuelva la ecuación diferencial de coeficientes homogéneos

$$y\,dx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right) dy$$

**RESOLUCIÓN**

Se observa que es una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos de grado uno; se propone la sustitución $y = ux$ lo que implica calcular la diferencial $dy$, esto es

$$dy = u\,dx + x\,du$$

Enseguida se sustituye en la ecuación diferencial

$$ux\,dx = \left(x + \sqrt{u^2 x^2 - x^2}\right)(u\,dx + x\,du)$$

donde luego de efectuar operaciones y reordenar se tiene

$$-u\sqrt{u^2 - 1}\,x\,dx = x^2\left(1 + \sqrt{u^2 - 1}\right) du$$

que es una ecuación de variables separables.
Al separar variables se obtiene

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 + \sqrt{u^2 - 1}}{u\sqrt{u^2 - 1}}\,du$$

$$-\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u\sqrt{u^2 - 1}}\right) du$$

al simplificar

$$-\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{1}{u}\right) du$$

Posteriormente se integra

$$-\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\,dx + \int \frac{du}{u}$$

$$-Ln\,x = angsec\,u + Ln\,u + C$$

pero se tiene $y = ux$, entonces $u = \frac{y}{x}$, por lo que

$$-Ln\,x = angsec\frac{y}{x} + Ln\frac{y}{x} + C$$

que es la solución general de la ecuación diferencial.

**3)** Determine si la función $F(x,y)$ es homogénea. En caso de serlo defina su grado de homogeneidad

$$F(x,y) = (x + \sqrt{y^2 - xy}) - \frac{xy + y^2}{x} + \frac{x^5}{y^4}$$

**RESOLUCIÓN**

Una función $F(x,y)$ es homogénea de grado $n$ si

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y)$$

entonces

$$F(\lambda x + \lambda y) = \lambda x + \sqrt{(\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y)} - \frac{(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2}{(\lambda x)} + \frac{(\lambda x)^5}{(\lambda y)^4}$$

$$F(\lambda x + \lambda y) = \lambda x + \lambda\sqrt{y^2 - xy} - \frac{\lambda^2(xy + y^2)}{\lambda x} + \frac{\lambda^5 x^5}{\lambda^4 y^4}$$

$$F(\lambda x + \lambda y) = \lambda\left[\left(x + \sqrt{y^2 - xy}\right) - \frac{xy + y^2}{x} + \frac{x^5}{y^4}\right]$$

$$F(\lambda x + \lambda y) = \lambda\, F(x,y)$$

Por lo que $F(x,y)$ es homogénea de grado 1

## 2.3 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS. FACTOR INTEGRANTE.

**1)** Si un factor integrante de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + P(x)y = x$ es $\mu(x) = e^{x^2}$ , obtenga:

a) $P(x)$

b) la solución general $y = y(x)$

**RESOLUCIÓN**

Para la ecuación dada

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = x$$

como la ecuación diferencial es lineal y de primer orden, un factor integrante es

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ y como $\mu(x) = e^{x^2}$ se tiene que $\int P(x)dx = x^2$ por lo tanto

$$P(x) = 2x$$

así, la ecuación diferencial correspondiente que se tiene es

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x$$

que en forma diferencial se expresa como

$$dy = (x - 2xy)dx$$

$$(2xy - x)dx + dy = 0$$

multiplicando por su factor integrante $e^{x^2}$ se obtiene

$$e^{x^2}(2xy - x) + e^{x^2}dy = 0$$

integrando

$$f(x,y) = \int e^{x^2}dy + h(x) = ye^{x^2} + h(x)$$

derivando parcialmente a $f$ con respecto de $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2} + h'(x) = 2xye^{x^2} - xe^{x^2}$$

por lo tanto

$$h'(x) = -xe^{x^2}$$

y

$$h(x) = -\frac{e^{x^2}}{2} + c$$

finalmente, la solución es

$$ye^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} = c$$

$$y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$$

**2)** Resuelva la ecuación diferencial

$$-x\,seny\,dy - (5x - 5x\cos y)\,dx = 0$$

**RESOLUCIÓN**

$$-x\,seny\,dy - (5x - 5x\cos y)\,dx = 0 \quad . . . .(1)$$

efectuando un cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= \cos y \\ du &= -sen\,v\,dy \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuacón diferencial

$$x\,du - (5x - 5x\,u)\,dx = 0$$

que tiene la forma lineal

$$u' + 5u = 5$$

$$v(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

$$v(x) = e^{5\int dx} = e^{5x}$$

al multiplicar la ecuación diferencial por

$v(x)$ ésta se transforma en exacta

$$e^{5x}\,du + 5\,e^{5x}\,u\,dx = 5\,e^{5x}\,dx$$

$$M\,du + N\,dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial u}$$

$$5\,e^{5x} = 5\,e^{5x}$$

$$d[\,e^{5x}u\,] = 5\,e^{5x}\,dx$$

integrando ambos miembros

$$\int d[\,e^{5x}u\,] = 5\int e^{5x}\,dx$$

$$e^{5x}u = e^{5x} + C$$

$$u = 1 + C\,e^{-5x}$$

$$\cos y = 1 + C\,e^{-5x}$$

otra forma de resover la ecuación (1) es

multiplicando por $-\dfrac{1}{x}$

$$\operatorname{sen} y\,dy + 5\,(1 - \cos y)\,dx = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen} y}{1 - \cos y}\,dy + 5dx = 0$$

integrando

$$Ln\,(1 - \cos y) + 5x = C_1$$

$$1 - \cos y = C_2 e^{-5x}$$

**3)** Resuelva la ecuación diferencial

$$(\,2xy - \sec^2 x\,)\,dx + (\,x^2 + 2y\,)dy = 0$$

**RESOLUCIÓN.**

Es una ecuación diferencial que no es de variables separables y no es de coeficientes homogéneos; se verá entonces si es o no exacta.
Se identifican los coeficientes de la ecuación diferencial

$$M(x,y) = 2xy - \sec^2 x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

$$N(x,y) = x^2 + 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

se tiene $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces es una ecuación diferencial exacta.

Al ser exacta se tiene que existe una función $f(x,y)$ tal que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \quad ............(1)$$

donde

$$df = M(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy \quad ............(2)$$

de (1) y (2) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = M(x,y) \quad ............(3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = N(x,y) \quad ............(4)$$

De (4)

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x)$$

$$f(x,y) = \int (x^2 + 2y)\,dy + g(x)$$

Luego de integrar

$$f(x,y) = x^2 y + y^2 + g(x)$$

y al derivar parcialmente con respecto a $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy + g'(x) \quad .............(5)$$

igualando los segundos miembros de (3) y (5)

$$M(x,y) = 2xy + g'(x)$$

al sustituir al coeficiente $M$

$$2xy - \sec^2 x = 2xy + g'(x)$$

resulta

$$g'(x) = -\sec^2 x$$

y al integrar

$$g(x) = -\int \sec^2 x \, dx$$

$$g(x) = -\tan x$$

por lo que la función $f(x,y)$ es

$$f(x,y) = x^2 y + y^2 - \tan x$$

Teniendo presente que la solución general es de la forma

$$f(x,y) = C$$

se puede escribir

$$x^2 y + y^2 - \tan x = C$$

que es la solución general.

**4)** Resuelva la ecuación diferencial

$$(1 + seny)\, dx = [\, 2y\cos y - x(\sec y + \tan y)\,]\, dy$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$

**RESOLUCIÓN**

Se observa que la ecuación no es de variables separables ni de coeficientes homogéneos; se verá si es o no exacta, para lo cual la llevamos a la forma

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$$

entonces se tiene

$$(1 + seny)\, dx - [\, 2y\cos y - x(\sec y + \tan y)\,]\, dy = 0 \quad \text{..........(1)}$$

Enseguida se determinan $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \sec y + \tan y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \therefore \quad \text{no es exacta}$$

Dado que no es exacta, se procede a obtener un factor integrante adecuado para transformar la ecuación diferencial en exacta.

Se propone un factor integrante $\mu(x) = e^{\int g(x)\,dx}$, para el cual

$$g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\cos y - (\sec y + \tan y)}{-2y\cos y + x(\sec y + \tan y)}$$

No depende solo de $x$

Ahora se propone un factor integrante $\mu(y) = e^{\int h(y)\,dy}$, para el cual

$$h(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{\operatorname{sen} y + \tan y - \cos y}{1 + \operatorname{sen} y}$$

Depende solo de $y$, sin embargo, es conveniente simplificarlo pues para obtener $\mu(y)$ se requiere integrar a la función $h(y)$

Las funciones $\sec y$ y $\tan y$ se pueden expresar en términos de las funciones $\operatorname{sen} y$ y $\cos y$, como se indica enseguida:

$$\sec y + \tan y = \frac{1}{\cos y} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{1 + \operatorname{sen} y}{\cos y}$$

$$\sec y + \tan y - \cos y = \frac{1 + \operatorname{sen} y}{\cos y} - \cos y$$

Entonces $h(y)$ se puede escribir como

$$h(y)=\frac{\dfrac{1+seny}{\cos y}-\cos y}{1+seny}=\frac{\dfrac{1+seny}{\cos y}}{1+seny}-\frac{\cos y}{1+seny}$$

$$h(y)=\frac{1}{\cos y}-\frac{\cos y}{1+seny}$$

Enseguida se procede a integrar

$$\begin{aligned}\int h(y)\,dy &= \int\left(\frac{1}{\cos y}-\frac{\cos y}{1+seny}\right)dy\\ &= \int \sec y\,dy-\int\frac{\cos y}{1+seny}\,dy\\ &= Ln(\sec y+\tan y)-Ln(1+seny)\\ &= Ln\left(\frac{\sec y+\tan y}{1+seny}\right)\\ &= Ln\left(\frac{\dfrac{1+seny}{\cos y}}{1+seny}\right)\end{aligned}$$

El elemento que se requiere es $e^{\int h(y)\,dy}$, entonces

$$e^{\int h(y)\,dy}=e^{Ln\left(\frac{1}{\cos y}\right)}=\frac{1}{\cos y}$$

Así, el factor integrante es

$$\mu(y)=\frac{1}{\cos y}$$

A continuación se multiplica la ecuación diferencial (1) por $\mu(y)$

$$\mu(y)\{(1+seny)\,dx-[2y\cos y-x(\sec y+\tan y)]\,dy\}=0$$

$$\frac{1}{\cos y}\{(1+seny)\,dx-[2y\cos y-x(\sec y+\tan y)]\,dy\}=0$$

de aquí se obtiene

$$\left(\frac{1+seny}{\cos y}\right)dx-\left[2y-\frac{x}{\cos y}(\sec y+\tan y)\right]dy=0 \quad \text{...........(2)}$$

Se procede a verificar si es o no exacta

$$M(x,y)=\frac{1+seny}{\cos y}$$

$$N(x,y) = -2y + \frac{x}{\cos y}(\sec y + \tan y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\cos y(\cos y) - (1 + sen y)(sen y)}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos^2 y + sen y + sen^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 + sen y}{\cos^2 y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\sec y + \tan y}{\cos y} = \frac{\frac{1}{\cos y} + \frac{sen\, y}{\cos y}}{\cos y}$$

$$= \frac{\frac{1 + sen y}{\cos y}}{\cos y}$$

$$= \frac{1 + sen y}{\cos^2 y}$$

Así, se cumple $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , por lo que se verifica que (2) es exacta.

Por otro lado, se tiene que si una ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función $f(x,y)$ tal que

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

donde

$$M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

Se procede a obtener $f(x,y)$ :

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)$$

$$f(x,y) = \int \frac{1 + sen y}{\cos y}\,dx + h(y)$$

$$f(x,y) = x\left(\frac{1 + sen y}{\cos y}\right) + h(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = N(x,y)$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x\left(\frac{1+seny}{\cos^2 y}\right) + h'(y)$$

por lo que se tiene

$$x\left(\frac{1+seny}{\cos^2 y}\right) + h'(y) = -2y + \frac{x}{\cos y}(\sec y + \tan y)$$

$$= -2y + x\left(\frac{\frac{1}{\cos}}{\cos y} + \frac{\frac{seny}{\cos y}}{\cos y}\right)$$

$$= -2y + x\left(\frac{1+seny}{\cos^2 y}\right)$$

De esta última ecuación despejamos $h'(y)$ , esto es

$$h'(y) = -2y$$

de aquí se procede a integrar en ambos miembros, de donde

$$h(y) = -2\int y\,dy$$

$$h(y) = -y^2$$

este valor se sustituye (3), por lo que

$$f(x,y) = x\left(\frac{1+seny}{\cos y}\right) - y^2$$

Se recordará que la solución está dada por

$$f(x,y) = C$$

Entonces, la solución general es

$$x\left(\frac{1+seny}{\cos y}\right) - y^2 = C$$

Dado que se trata de un problema con la condición inicial $y(0) = 1$ , se tiene

$$0 - (1)^2 = C$$

$$-1 = C$$

por lo que la solución particular que satisface la condición es

$$x\left(\frac{1+seny}{\cos y}\right) - y^2 = -C$$

**6)** Demuestre que

$$( x + 3x^3 sen y) dx + ( x^4 \cos y ) dy = 0$$

no es exacta, pero que multiplicando esta ecuación por el factor $x^{-1}$ se obtiene una ecuación exacta. Posteriormente obtenga la solución de ésta última.

**RESOLUCIÓN**

Para que una ecuación diferencial sea exacta, es condición necesaria y suficiente que

$$\frac{\partial}{\partial y} M ( x , y ) = \frac{\partial}{\partial x} N ( x , y )$$

por lo que inicialmente se procede a identificar las funciones $M$ y $N$ ,

$$M ( x , y ) = x + 3 x^3 sen y$$

$$N ( x , y ) = x^4 \cos y$$

enseguida se obtiene las derivadas parciales, esto es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 x^3 \cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4 x^3 \cos y$$

se observa que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

con lo que se confirma que no es exacta.

A continuación multiplicamos la ecuación dada por el factor $x^{-1}$ , que es justamente un factor integrante $\mu ( x )$

$$x^{-1} \left[ ( x + 3 x^3 sen y ) dx + ( x^4 \cos y ) dy \right] = 0$$

de donde se obtiene

$$( 1 + 3 x^2 sen y ) dx + ( x^3 \cos y ) dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Enseguida se verifica que es exacta

$$M ( x , y ) = 1 + 3 x^2 sen y$$

$$N(x,y) = x^3 \cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \cos y$$

se cumple que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{por lo tanto es exacta}$$

Para obtener la solución de (A) se debe determinar la función $f(x,y)$ tal que

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Se procede a obtener $f(x,y)$ :

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x)$$

$$f(x,y) = \int (x^3 \cos y)\,dy + g(x)$$

$$f(x,y) = x^3 seny + g(x)$$

Para obtener la función $g(x)$, la cual representa a la constante de integración, se considera

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 seny + g'(x) = 1 + 3x^2 seny$$

de donde se obtiene

$$g'(x) = 1$$

e integrando

$$g(x) = \int dx = x$$

por lo que

$$f(x,y) = x^3 \, sen y + x$$

La solución de la ecuación diferencial es de la forma $f(x,y) = C$ por lo que

$$x^3 \, sen y + x = C$$

es la solución general.

**7)** Para la ecuación diferencial

$$[\, y\cos(xy) + e^x \,]\, dx + N(x,y)\, dy = 0$$

obtenga la función más general $N(x,y)$, de manera que la ecuación sea exacta.

**RESOLUCIÓN**

Inicialmente se establece la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{.............(A)}$$

Lo anterior implica identificar a la función $M(x,y)$ a considerar , por lo que se tiene

$$M(x,y) = y\cos(xy) + e^x$$

Enseguida se deriva parcialmente con respecto a $y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -xy \, sen(xy) + \cos(xy)$$

y bajo la condición necesaria y suficiente establecida por la ecuación (A) se tiene

$$\frac{\partial N}{\partial y} = -xy \, sen(xy) + \cos(xy) \quad \text{...........(B)}$$

De la ecuación anterior se procede a integrar parcialmente con respecto a $x$ , es decir

$$N(x,y) = \int [\, -xy \, sen(xy) + \cos(xy) \,]\, dx + h(y)$$

de aquí tenemos dos integrales, a saber

$$I_1 = \int (-xy) \, sen(xy)\, dx$$

$$I_2 = \int \cos(xy)\, dx$$

Para $I_1$ se tiene una integral por partes donde

$u = -xy \qquad\qquad du = -y\,dx$

y $\quad dv = sen\,(xy)\,dx \quad , \quad v = \int sen\,(xy)\,dx = \frac{-1}{y}\cos(xy)$

Entonces

$$I_1 = x\cos(xy) - \int \cos(xy)\,dx$$

$$I_1 = x\cos(xy) - \frac{1}{y}\,sen\,(xy)$$

Para $I_2$ se tiene una integral inmediata

$$I_2 = \int \cos(xy)\,dx = \frac{1}{y}\,sen\,(xy)$$

De lo anterior se tiene

$$N(x,y) = x\cos(xy) - \frac{1}{y}\,sen\,(xy) + \frac{1}{y}\,sen\,(xy) + h(y)$$

$$N(x,y) = x\cos(xy) + h(y)$$

que es la función más general que garantiza que la ecuación diferencial dada sea exacta.

**8)** Determine si la ecuación diferencial

$$\cos\theta\,dr - (r\,sen\theta - e^{\theta})\,d\theta = 0$$

es exacta. Si es exacta, obtenga su solución general.

**RESOLUCIÓN**

La ecuación diferencial es de la forma

$$M(r,\theta)\,dr + N(r,\theta)\,d\theta = 0$$

donde se identifican a las funciones $M$ y $N$

$$M(r,\theta) = \cos\theta$$

$$N(r,\theta) = -(r\,sen\theta - e^{\theta})$$

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial sea exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial N}{\partial r}$$

por lo que se procede a obtener las derivadas parciales

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = -sen\,\theta$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = -sen\,\theta$$

De la igualdad anterior se concluye que es exacta.

Ahora bien, si es exacta, se asegura que existe una función $f(r,\theta)$ tal que su diferencial total es justamente el primer miembro de la ecuación diferencial original, es decir

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\,dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)\,d\theta$$

ó bien

$$df = M(r,\theta)\,dr + N(r,\theta)\,d\theta$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial r} = M(r,\theta) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = N(r,\theta)$$

lo que permite obtener $f(r,\theta)$ integrando cualquiera de las expresiones anteriores, como se muestra enseguida

$$f(r,\theta) = \int M(r,\theta)\,dr + h(\theta)$$

$$f(r,\theta) = \int \cos\theta\,dr + h(\theta)$$

$$f(r,\theta) = r\cos\theta + h(\theta) \quad ..........(A)$$

Para obtener $h(\theta)$ , se considera que

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = N(r,\theta) \quad ..........(B)$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta + h(\theta))$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\,sen\theta + h'(\theta)$$

entonces, de acuerdo a la ecuación (B) se tiene

$$-r\,sen\theta + h'(\theta) = -r\,sen\theta + e^{\theta}$$

despejando $h'(\theta)$

$$h'(\theta) = e^{\theta}$$

posteriormente se integra

$$\int h(\theta) = \int e^{\theta}\, d\theta$$

$$h(\theta) = e^{\theta}$$

y al sustituir el resultado anterior en (A) se obtiene

$$f(r,\theta) = r\cos\theta + e^{\theta}$$

Finalmente, se tiene que $f(r,\theta) = C$ es la forma de la solución general de la ecuación diferencial, por lo que el resultado es

$$r\cos\theta + e^{\theta} = C$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1)** Resuelva la ecuación diferencial $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x)dx + (x^2 + 2xy - x)dy = 0$

**Solución.**

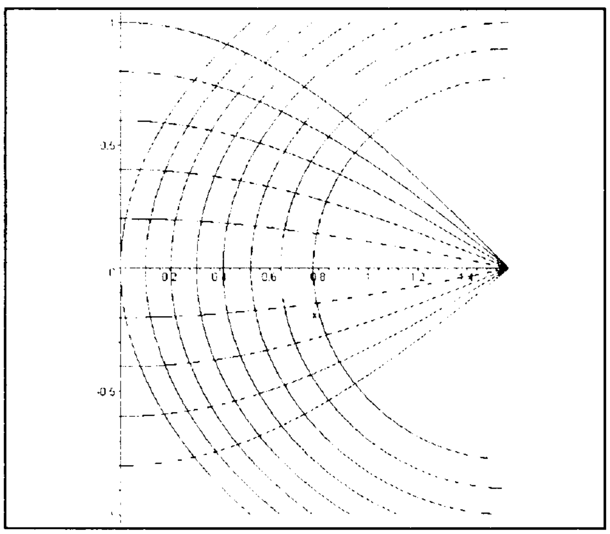
$$x^2 y^2 + x^3 y - x^2 y + 2x^3 = C$$

**2)** Obtenga una solución gráfica de la ecuación $yy' = \cos x$, con $x$ en el intervalo

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Solución.**

Trazando para $k = \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \pm 4$, se obtiene



**3)** Resuelva la ecuación diferencial $(x^2 + y^2 + 1)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy = 0$

**Solución.**

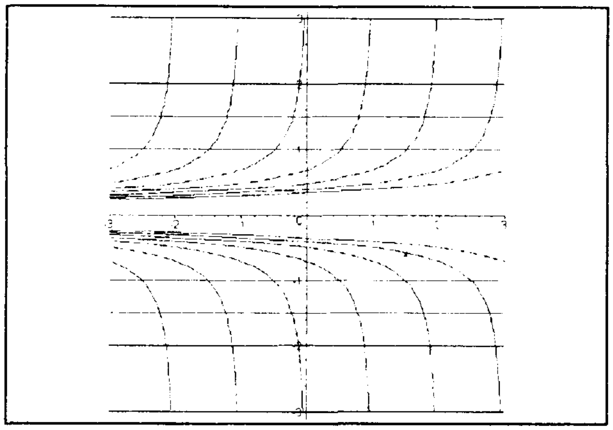
$$x - \frac{y^2}{x} - \frac{1}{x} + y + C$$

**4)** Obtenga una solución gráfica de la ecuación $y' = y^2$ .

**Solución.**

$y^2 = k$

trazando para $k = \pm 2,\ \pm 1,\ \pm \frac{1}{2},\ 0$ , se obtiene



**5)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial homogénea

$$\left(x + \sqrt{y^2 - xy}\right)y' = y \quad ; \quad y\left(-3e^{-4}\right) = e^{-4}$$

**Sugerencia:** considerar el cambio de variable $x = uy$ .

**Solución.**

$$y = e^{-2\left(1 - \frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

**6)** Si la ecuación propuesta es no exacta obtenga un factor integrante que dependa de una sola de las variables y posteriormente resuelva la ecuación diferencial

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0$$

**Solución.**

$$-\frac{y^2}{x} + Ln\,x = C$$

**7)** Resuelva la ecuación diferencial

$$(xy + y^2 + x^2)dx - x^2dy = 0$$

**Solución.**

$y = x\tan(Ln\,|\,Cx\,|)$

**8)** Compruebe si la siguiente ecuación diferencial es exacta. En caso de no serlo, calcular un factor integrante $\mu(x)$ y determinar su familia uniparamétrica de soluciones $F(x,y)$

$$(y^2e^{2x} + 1)dx + (2ye^{2x} - e^x)dy = 0$$

**Solución.**

$y^2e^x - e^{-x} - y = C$

**9)** Resuelva la ecuación diferencial

$$xdy - ydx - (1 - x^2)dx = 0$$

**Solución.**

$y = Cx - 1 - x^2$

**10)** Resuelva el problema de condiciones iniciales $\sqrt{y} = -y' - xy'$ , $y(0) = 1$

**Solución.**

$Ln(x + 1) + 2\sqrt{y} = 2$

**11)** Resuelva la ecuación diferencial $(y^4 + 2xy^2)dx + (2xy^3 - 3y^4)dy = 0$

**Solución.**

$xy^2 + x^2 - y^3 = C$

**12)** Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 2$

**Solución.**

$$x^2 = C e^{\frac{y}{x}}$$

**13)** Resuelva la ecuación diferencial

$$x dy + y dx + (x + y) dx = 0$$

**Solución.**

$$x^3 + 3x^2 y = C$$

**14)** Resuelva la ecuación diferencial $(xy^2 - x - y^2 + 1)dx = (xy + x - y - 1)dy$

**Solución.**

$$y = C e^x + 1$$

**15)** Resolver la ecuación diferencial $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

**Solución.**

$$x = C e^{\frac{y^2}{2x^2}}$$

**16)** Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + x^2 + y^2$

Sugerencia: hacer el cambio de variable $y = vx$

**Solución.**

$$y = x \tan\left( \frac{x^2}{2} + C \right)$$

**17)** Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(x + \sqrt{y^2 - xy}\right) \frac{dy}{dx} = y$$

**Solución.**

$$\frac{-2\sqrt{y^2 - xy}}{y} - Ln\, y = C$$

**18)** Resuelva la ecuación diferencial

$$r\cos\theta\, d\theta + (r - sen\theta)dr = 0$$

**Solución.**

$$\frac{1}{r} sen\,\theta + Ln\, r = C$$

**19)** Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$$

**Solución.**

$$-\frac{1}{2} Ln\left(\frac{-y^2 - 2xy + x^2}{x^2}\right) - Ln(x) = C$$

**20)** Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2x - y + 1)^2}{2x - y}$

**Sugerencia:** Hacer el cambio de variable $u = 2x - y$

**Solución.**

$$-\frac{1}{2} Ln((2x - y)^2 + 1) - x = C$$

# TEMA 3

# ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

## 3.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN.

**1)** Si la solución general de la ecuación diferencial $y' + P(x)y = Q(x)$ es:

$$y(x) = Ce^{\frac{sen\,2x}{2}} - 1$$

determine las funciones $P(x)$ y $Q(x)$

**RESOLUCIÓN**

La ecuación diferencial es no homogénea, por lo que su solución general es de la forma $y = y_h + y_p$, donde $y_h$ es la solución de la homogénea asociada y $y_p$ es una solución particular de la no homogénea.
Así se tiene que

$$y_h = Ce^{\frac{sen\,2x}{2}} \qquad \text{y} \qquad y_p = -1$$

Ahora bien, si $y_h$ es solución de la homogénea asociada, entonces la satisface por lo que se calcula $y_h'$

$$y_h' = \frac{\cos 2x}{2}(2)Ce^{\frac{sen\,2x}{2}}$$

$$y_h' = C\cos 2x\, e^{\frac{sen\,2x}{2}}$$

Sustituyendo en $y' + P(x)y = 0$, que es la ecuación diferencial homogénea asociada a la no homogénea, se tiene

$$C\cos 2x\, e^{\frac{sen\,2x}{2}} + P(x)Ce^{\frac{sen\,2x}{2}} = 0$$

De esta ecuación se obtiene $P(x)$

$$P(x) = -\frac{C\cos 2x\, e^{\frac{sen\,2x}{2}}}{C e^{\frac{sen\,2x}{2}}}$$

de donde resulta

$$P(x) = -\cos 2x$$

De manera análoga, si $y_p$ es solución de la no homogénea, entonces la satisface, por lo que es necesario calcular $y_p'$

$$y_p' = 0$$

Sustituyendo en $y' + P(x)y = Q(x)$, que es la ecuación diferencial no homogénea, se tiene

$$(0) + P(x)(-1) = Q(x) \; ; \quad \text{pero} \quad P(x) = -\cos 2x$$

$$\therefore \qquad (-\cos 2x)(-1) = Q(x)$$

Finalmente

$$Q(x) = \cos 2x$$

**2)** Obtenga la solución general de la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \cos 2x$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial no homogénea, de primer orden y de coeficientes variables, que puede asociarse con la expresión

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

que es la forma normalizada de la ecuación de primer orden no homogénea.
Por lo anterior, se observa la conveniencia de normalizar la ecuación diferencial dada.

Dividiendo entre $x$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x\cos 2x$$

y ya es posible identificar a las funciones

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$Q(x) = x\cos 2x$$

Debe tenerse presente que la solución general de (A) está dada por

$$y_G = y_h + y_p$$

donde $y_h$ es la solución de la homogénea asociada y $y_p$ es una solución particular de la no homogénea y cada una de estas funciones está dada por

$$y_h = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$$

Enseguida se procede a calcular las integrales anteriores:

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = -Lnx = Ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = Lnx$$

$$\begin{aligned}\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx &= \int x\cos 2x\,e^{Ln(x)}\,dx \\ &= \int x\cos 2x\left(\frac{1}{x}\right)dx \\ &= \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,sen\,2x\end{aligned}$$

A continuación se tiene $y_h$ y $y_p$, esto es,

$$y_h = Ce^{-\int P(x)\,dx} = Ce^{Lnx} = Cx$$

$$y_p = e^{\int P(x)\,dx}\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$$

$$y_p = e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\,sen\,2x\right)$$

$$y_p = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\,sen\,2x\right)$$

Por lo que la solución general es

$$y = Cx + \frac{x}{2} sen\, 2x$$

**3)** Sabiendo que la solución general de una ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

es

$$y = \frac{x^3 - 3x}{3(x^2 + x)} + \frac{c}{3(x^2 + x)}$$

calcular las funciones $P(x)$ y $Q(x)$

## RESOLUCIÓN

Se tiene una ecuación diferencial de primer orden, no homogénea, de coeficientes variables de la cual su solución general es dato.
Para una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, su solución general es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

donde $y_h = C e^{\int -p(x)dx}$ y $y_p = e^{-\int p(x)dx} \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx$ por lo que de la solución general dada se infiere

$$y_h = \frac{C}{3(x^2 + x)} \quad ..........(A) \qquad y_p = \frac{x^3 - 3x}{3(x^2 + x)} \quad .........(B)$$

donde $y_h$ es la solución de la homogénea asociada y $y_p$ es una solución particular de la no homogénea.
Así, para la ecuación homogénea asociada

$$y' + P(x)y = 0 \quad ..........(C)$$

y teniendo presente que $y_h$ es su solución y que por lo tanto la satisface, es necesario obtener $y_h'$

$$y_h' = \frac{-C(2x + 1)}{3(x^2 + x)^2}$$

la cual se sustituye en (A)

$$\frac{-C(2x+1)}{3(x^2+x)^2}+P(x)\frac{C}{3(x^2+x)}=0$$

de donde se despeja la función $P(x)$, esto es

$$P(x)=\frac{(2x+1)}{(x^2+x)}$$

Por otro lado, asumiendo que $y_p$ es una solución particular de

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

y se sabe que la forma de $y_p$ está dada por

$$y_p=e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

se sustituye la función $P(x)$ y se efectúan las operaciones indicadas; para las integrales

$$-\int P(x)\,dx=-\int\frac{-(2x+1)}{(x^2+x)}dx=-Ln(x^2+x)=Ln\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\quad\text{...........(D)}$$

$$\int P(x)\,dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x}dx=Ln(x^2+x)\quad\text{...........(E)}$$

entonces $y_p$ es

$$y_p=e^{Ln\left(\frac{1}{x^2+x}\right)}\int Q(x)\,e^{Ln(x^2+x)}\,dx$$

simplificando se obtiene

$$y_p=\frac{1}{x^2+x}\int Q(x)(x^2+x)\,dx\quad\text{...........(F)}$$

Por otro lado, se tiene el valor conocido $y_p$ dado por (B), entonces se pueden igualar (B) y (F)

$$\frac{1}{x^2+x}\int Q(x)(x^2+x)\,dx=\frac{x^3-3x}{3(x^2+x)}$$

de donde

$$\int Q(x)(x^2+x)\,dx = \frac{(x^3-3x)(x^2+x)}{3(x^2+x)}$$

$$\int Q(x)(x^2+x)\,dx = \frac{1}{3}(x^3-3x)$$

Derivando ambos miembros de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} Q(x)(x^2+x) &= \frac{1}{3}(3x^2-3) \\ &= \frac{1}{3}3(x^2-1) \\ &= x^2-1 \end{aligned}$$

Finalmente, se despeja a la función de interés

$$Q(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}$$

$$Q(x) = \frac{x-1}{x}$$

**4)** Resuelva la ecuación diferencial

$$t\frac{dx}{dt} - 2x = t\,Ln3t$$

**RESOLUCIÓN**

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden no homogénea; resolverla implica obtener su solución general la cuál es de la forma

$$x_G = x_h + x_p.$$

donde $x_h$ es la solución de la ecuación homogénea asociada y $x_p$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Para obtener la solución general tenemos 2 formas, una es posible aplicando directamente la expresión que involucra factores integrantes:

$$x_G = Ce^{-\int P(t)dt} + e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)\,e^{\int P(t)dt}\,dt$$

Otra, obteniendo inicialmente $x_h$ por separación de variables y posteriormente aplicando variación de parámetros para obtener $x_p$ , lo que da lugar justamente el segundo término de la ecuación anterior.

Entonces, reordenamos inicialmente la ecuación diferencial para transformarla posteriormente en la forma normalizada

$$x' + P(t)x = Q(t)$$

$$t\frac{dx}{dt} - 2x = t\,Ln(3t)$$

dividiendo entre " $t$ "

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t}x = Ln(3t)$$

que es una ecuación diferencial de la forma

$$x' + P(t)x = Q(t)$$

Para obtener la solución, inicialmente trabajamos con la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t}x = 0$$

efectuamos separación de variables

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}x$$

$$\frac{dx}{x} = 2\frac{dt}{t}$$

Integramos $$\int\frac{dx}{x} = 2\int\frac{dt}{t}$$

$$Ln|x| + C_1 = 2\,Ln|t| + C_2$$

Finalmente, la solución de la homogénea asociada es,

$$Ln|x| = 2Ln|t| + C$$

que también se puede expresar en forma explícita; aplicamos propiedades según se indica

$$Ln(x) = Ln(t^2) + Ln\,C$$

$Ln(x) = Ln(Ct^2)$ , y al aplicar la exponencial

$$x_h = C\,t^2$$

que es la solución general, en forma explícita , de la ecuación homogénea asociada.

Para obtener $x_p$ , identificamos los elementos necesarios para integrar

Sabemos que una solución particular de la no homogénea tiene la forma:

$$x_p = e^{-\int P(t)d(t)} \quad ; \quad \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$$

y de la ecuación normalizada

$$P(t) = -\frac{2}{t} \quad ; \quad Q(t) = Ln(3t)$$

enseguida integramos los elementos necesarios

$$-\int P(t)d(t) = 2\int\frac{dt}{t} = 2Lnt = Lnt^2$$

$$e^{-\int P(t)dt} = e^{Ln(t^2)} = t^2 \quad ; \quad e^{\int P(t)dt} = e^{Ln\left(\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1}{t^2}$$

$$\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt = \int Ln(3t)\left(\frac{1}{t^2}\right)dt = \int Ln(3t)(t^{-2})dt = I$$

Integramos

$$u = Ln(3t) \qquad dv = t^{-2}$$

$$du = \frac{3}{3t}dt = \frac{1}{t}dt \qquad v = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}$$

$$I = -\frac{1}{t}Ln(3t) + \int\frac{1}{t}.\frac{1}{t}dt = -\frac{1}{t}Ln(3t) + \int t^{-2}dt$$

$$I = -\frac{1}{t}Ln(3t) + \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}Ln(3t) - \frac{1}{t} = \bar{x}_p$$

Entonces la solución general es:

$$\bar{x}_G = \bar{x}_h + \bar{x}_p = Ct^2 - \frac{1}{t}(Ln(3t) + 1)$$

**5)** Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\sqrt{x}}y' + x^{\frac{1}{2}}y = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-e^{\frac{x^2}{2}}}$$

**RESOLUCIÓN**

Es una ecuación diferencial no homogénea de primer orden de coeficientes variables; es necesario normalizar, por lo que multiplicamos por $\sqrt{x}$

$$y' + xy = x(1-e^{\frac{x^2}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

es una ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

La solución general puede obtenerse en términos de un factor integrante como se muestra enseguida

$$y_G = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

donde $$P(x) = x \ , \ Q(x) = x(1-e^{\frac{x^2}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

Enseguida calculamos las integrales indicadas

$$-\int p(x)dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} \quad ; \quad e^{-\int P(x)dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int P(x)dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad ; \quad e^{\int P(x)dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\int Q(x)e^{P(x)dx} = \int x(1-e^{\frac{x^2}{2}})^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}})dx = \int u^n du$$

Integramos realizando un cambio de variable

$$u = 1 - e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$du = -e^{\frac{x^2}{2}}(x)dx = -xe^{\frac{x^2}{2}}dx = -\frac{2}{3}(1-e^{\frac{x^2}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

Entonces, al sustituir en la forma de la solución general se obtiene

$$y_G = Ce^{\frac{-x^2}{2}} + e^{\frac{-x^2}{2}}\left[-\frac{2}{3}(1-e^{\frac{x^2}{2}})^{\frac{3}{2}}\right]$$

Reordenando y factorizando se tiene finalmente

$$y_G = e^{\frac{-x^2}{2}}\left[C - \frac{2}{3}(1-e^{\frac{x^2}{2}})^{\frac{3}{2}}\right]$$

**6)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xy' - y = x^2 e^{-3x} \quad \text{............(A)}$$

**RESOLUCIÓN**

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden, no homogénea y coeficiente variable; para resolverla es necesario normalizarla por lo que se divide entre la variable $x$, de donde se obtiene

$$y' - \frac{1}{x}y = xe^{-3x}$$

La cual ya es una ecuación de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$ donde

$$P(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = xe^{-3x}$$

La solución general de una ecuación de la forma anterior está dada por

$$y_G = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

donde $y_h = Ce^{-\int P(x)dx}$ es la solución de la homogénea asociada

$$y_p = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Efectuamos el cálculo de las diferentes integrales, según se indica

$$\int P(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} = -Ln\,x = Ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-\int P(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = Ln\,x$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{Ln\,x} = x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{Ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{-3x}\frac{1}{x}dx = \int e^{-3x}dx$$
$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Así, se obtiene

$$y_h = Cx \quad \text{y} \quad y_p = -\frac{x}{3}e^{-3x}$$

y la solución general es

$$y = Cx - \frac{x}{3}e^{-3x}$$

**7)** Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{\cos 3x}{\sqrt{x^2+1}}$$

**RESOLUCIÓN**

Es una ecuación lineal, de primer orden, no homogénea y de coeficientes variables de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

su solución general está dada por

$$y_G = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

donde

$$y_h = Ce^{-\int P(x)dx} \quad ; \quad y_p = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

para resolverla es conveniente identificar a las funciones que intervienen en las integrales, es decir,

$$P(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$Q(x) = \frac{\cos 3x}{\sqrt{x^2+1}}$$

A continuación efectuamos las operaciones necesarias para $y_h$ y $y_p$

$$-\int P(x) = -\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}Ln(x^2+1)$$
$$= Ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\int P(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}Ln(x^2+1)$$
$$= Ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

entonces

$$y_h = C e^{Ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)} = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$$

Por otro lado

$$y_h = e^{Ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)} \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{x^2+1}}\, e^{Ln(\sqrt{x^2+1})}\,dx$$
$$y_p = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{x^2+1}} \sqrt{x^2+1}\,dx$$
$$y_p = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int \cos 3x\,dx$$
$$y_p = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{sen\,3x}{3}\right)$$

Finalmente, la solución general es

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{sen\,3x}{3\sqrt{x^2+1}}$$

**8)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = (\tan x)\,y + sen\,x$$

sujeta a la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial de primer orden, que puede escribirse de la siguiente manera

la cual es una ecuación de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

entonces, se identifican las siguientes funciones

$$P(x) = -\tan x$$
$$Q(x) = sen\, x$$

La ecuación diferencial referida corresponde a una ecuación no homogénea de coeficientes variables, cuya solución general es de la forma

$$y = C e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx$$

donde

$$y_h = C e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx$$

A continuación,se calculan las integrales necesarias, esto es

$$-\int P(x)\,dx = \int \tan x\, dx = \int \frac{sen\, x}{\cos x}\, dx = -Ln(\cos x) = Ln(\sec x)$$

$$e^{-\int P(x)\,dx} = e^{Ln(\sec x)} = \sec x$$

por lo que

$$y_h = C \sec x$$

Por otro lado

$$\int P(x)\,dx = -\int \tan x\, dx = -Ln(\cos x)$$

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{Ln(\cos x)} = \cos x$$

entonces

$$\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx = \int sen\, x \cos x\, dx = \frac{(sen\, x)^2}{2}$$

por lo que

$$y_p = \sec x \, \frac{(sen\, x)^2}{2}$$

y la solución general es

$$y = C \sec x + \sec x \, \frac{(sen\, x)^2}{2}$$

Aplicando la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ se tiene

$$\sqrt{2} = C \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{\left(\sec \frac{\pi}{4}\right)^2}{2}$$

$$\sqrt{2} = C\sqrt{2} + \sqrt{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}\right]$$

$$\sqrt{2} = C\sqrt{2} + \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{4}$$

Finalmente para la condición inicial dada

$$y = \frac{3}{4} \sec x + \sec x \, \frac{(sen\, x)^2}{2}$$

## 3.2 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA.

**1)** Resuelva la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 0$

**RESOLUCIÓN**

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y de coeficientes constantes. Inicialmente la expresamos en términos del operador diferencial

$$( D^2 - D - 2 )\, y = 0$$

de donde la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$

Dado que las raíces son reales y diferentes, la solución general es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

**2)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y de coeficientes constantes, que expresada en términos del operador diferencial es

$$( D^2 - 6D + 9 )y = 0$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

siendo sus raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 3$ que son reales y repetidas; entonces la solución general es

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

**3)** Resuelva la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 4y = 0$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y de coeficientes constantes; expresada en términos del operador diferencial es

$$(D^2 - 3D + 4)\,y = 0$$

y la ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$$

siendo sus raíces o valores característicos $\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ y $\lambda^2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$ las cuáles son complejas, por lo que la solución general es

$$y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 e^{\frac{3}{2}x}\, sen\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

**4)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación de tercer orden, homogénea y de coeficientes constantes; expresada en términos del operador diferencial es

$$(D^3 - 2D - D + 2)\,y = 0$$

y su ecuación característica es

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

Se procede a obtener sus raíces, las cuáles son $\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$

Las raíces son reales y distintas, por lo que la solución general es

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^2 x + C_3 e^{-x}$$

**5)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación de tercer orden, homogénea y de coeficientes constantes; expresada en términos del operador diferencial es

$$(D^3-3D^2+3D-1)y=0$$

Su ecuación característica es

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$$

siendo sus raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

Se tiene el caso de raíces reales repetidas por lo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1e^x + C_2e^x + C_3x^2e^x$$

**6)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y^{(IV)}+2y''+y=0$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial de cuarto orden, homogénea y coeficientes constantes; en términos del operador diferencial

$$(D^4+2D^2+1)y=0$$

y su ecuación característica es

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \quad ............(A)$$

Se determinan sus raíces mediante un cambio de variable adecuada que transforme la ecuación de cuarto grado en una ecuación de segundo grado, esto es

$$w=\lambda^2 \quad , \quad w^2=\lambda^4$$

por lo que se tiene

$$w^2+2w+1=0$$

$$(w+1)^2=0$$

Las raíces para la ecuación de segundo grado son $w_1=w_2=-1$ ; regresando a la variable original se tiene $\lambda^2=-1$ por lo que $\lambda=\pm i$ ; entonces las raíces de la ecuación de cuarto grado son $\lambda_{1,2}=\pm i \quad , \quad \lambda_{3,4}=\pm i$

esto es, raíces complejas repetidas con parte real nula.

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = C_1 \cos x + C_2 senx + C_3 x \cos x + C_4 x senx$$

## 3.3 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA.

**1)** Dada la ecuación diferencial $y'' = x^2 - 1$ , obtenga

a) la solución general,

b) una solución $y(x)$ tal que $y(0) = 1$ , $y'(0) = 2$ ,

c) una solución cuya representación gráfica pase por los puntos (1,2) y (3,5)

**RESOLUCIÓN**

**a)** Por el tipo de ecuación diferencial, se tiene la posibilidad de resolverla utilizando dos métodos diferentes.

Primer método:

Se tiene $y'' = x^2 - 1$ ...........(A)

que también se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 - 1$$

Al integrar esta ecuación se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \int (x^2 - 1)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} - x + C_1$$

nuevamente se integra

$$y = \int \left( \frac{x^3}{3} x + C_1 \right)$$

de donde se obtiene

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

que constituye la solución general de la ecuación diferencial (A)

Segundo método:

La ecuación dada es de segundo orden, coeficientes constantes y no homogénea y su solución general es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

donde $y_h$ es la solución de la homogénea asociada y $y_p$ es una solución particular de la no homogénea.

Para obtener $y_h$ se considera la ecuación

$$y'' = 0$$

que expresada en términos del operador diferencial es

$$D^2 y = 0$$

y cuya ecuación característica es

$$\lambda^2 = 0$$

De esta última obtenemos sus raíces, a saber,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Se tienen valores característicos repetidos, por lo que la solución correspondiente es

$$y_h = C_1 + C_2 x$$

La determinación de $y_p$ implica obtener un aniquilador para la función

$$Q(x) = x^2 - 1$$

el cual resulta ser

$$P(D) = D^3$$

Al aplicar este operador a ambos miembros de la ecuación (A), esta última en términos del operador $D$

$$D^3(D^2 y) = D^3(x^2 - 1)$$

lleva a la expresión

$$D^5 y = 0$$

se obtiene una ecuación diferencial de quinto orden cuya ecuación característica es $\lambda_5 = 0$ ; de aquí obtememos sus raíces: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$

Así, la solución de la ecuación es

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4$$

Esta solución involucra la solución de la ecuación homogénea asociada $(y_h)$ y una solución particular $(y_p)$ de la ecuación no homogénea original (A); entonces, cada solución es de la forma

$$y_h = C_1 + C_2 x \text{ ..........(B)}$$

$$y_p = C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 \text{ ..........(C)}$$

Ahora bien, si $y_p$ es solución de (A) entonces la satisface, por lo que es necesario obtener

$y_p'$ , $y_p''$

$$y_p' = 2C_3 x + 3C_4 x^2 + 4C_5 x^3$$
$$y_p'' = 2C_3 + 6C_4 x + 12C_5 x^2$$

enseguida se sustituye en la ecuación diferencial no homogénea:

$$2C_3 + 6C_4 x + 12C_5 x^2 = x^2 - 1$$

y por igualdad de polinomios se obtiene el sistema

$$2C_3 = -1$$
$$6C_4 = 0$$
$$12C_5 = 1$$

que al resolver permite obtener

$$C_3 = -\frac{1}{2} , \quad C_4 = 0 , \quad C_5 = \frac{1}{12}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación (C) con lo que se tiene

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4$$

Finalmente, la solución general es

$$y_G = C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 \text{ .........(D)}$$

la cual es igual a la obtenida por el primer método.

**b)** A partir de la solución general se obtiene la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas, lo que requiere calcular $y_G$ , esto es

$$y_G = C_2 - x^2 + \frac{1}{3}x^3 \text{ .........(E)}$$

esta ecuación junto con (D), al aplicar las condiciones iniciales constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $C_1$ y $C_2$ .

La condición $y(0) = 1$ se sustituye en (D), lo que permite obtener

$$1 = C_1$$

La condición $y'(0) = 2$ se sustituye en (E), con lo que se obtiene

$$2 = C_2$$

Sustituyendo los valores $C_1$ y $C_2$ en la ecuación (D) se tiene

$$y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4$$

que constituye una solución particular de la ecuación diferencial (A).

c) Este inciso implica nuevamente condiciones iniciales; si se busca obtener una solución que satisfaga $y(1) = 2$ y $y(3) = 5$ , entonces se sustituye estas condiciones en la ecuación (D)

$$2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + C_1 + C_2$$

$$2 = -\frac{5}{12} + C_1 + C_2$$

finalmente

$$2 + \frac{5}{12} = C_1 + C_2$$

$$\frac{29}{12} = C_1 + C_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(F)$$

asimismo

$$5 = C_1 + 3C_2x - \frac{1}{2}(3)^2 + \frac{1}{12}(3)^4$$

$$5 = C_1 + 3C_2 - \frac{9}{2} + \frac{81}{12}$$

$$5 + \frac{9}{2} - \frac{81}{12} = C_1 + 3C_2$$

finalmente

$$\frac{33}{12} = C_1 + 3C_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(G)$$

Enseguida se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (F) y (G), de donde se tiene

$$C_1 = \frac{27}{12} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{1}{6}$$

Al sustituir estos valores en (D), se obtiene la solución

$$y = \frac{27}{12} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4$$

cuya representación gráfica contiene a los puntos (1,2) y (3,5)

**2)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial mediante el método de coeficientes indeterminados

$$y'' + 3y' - 10y = \cot 3x \, sen\, 3x$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene la ecuación

$$y'' + 3y' - 10y = \cot 3x \; sen\, 3x$$

que es una ecuación diferencial no homogénea, de segundo orden y de coeficientes constantes; asimismo se tiene una función $Q(x)$ para la cual aparentemente no existe operador diferencial anulador, sin embargo, si simplificamos la función $Q(x)$, se tiene

$$Q(x) = \cot 3x \, sen\, 3x = \frac{\cos 3x}{sen\, 3x}(sen\, 3x)$$

$$Q(x) = \cos 3x$$

Por lo que la ecuación diferencial se puede escribir de la siguiente manera

$$y'' + 3y' - 10y = \cos 3x$$

es posible resolverla por el método de coeficientes indeterminados.
Se sabe que la solución general de una ecuación diferencial no homogénea es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

por lo que inicialmente se calcula $y_h$, que es la solución de la homogénea asociada

$$y'' + 3y' - 10y = 0$$

y en términos del operador diferencial es

$$(D^2 + 3D - 10)\, y = 0$$

cuya ecuación y valores característicos son

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2$$

por lo que se tiene

$$y_h = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$$

Para obtener $y_p$, que es una solución particular de la ecuación no homogénea, se busca un operador que anule a la función

$$Q(x) = \cos 3x$$

el cual resulta

$$P(x) = D^2 + 9$$

Aplicando $P(D)$ a la ecuación original se tiene

$$P(D)(D^2 + 3D - 10)y = P(D)(\cos 3x)$$

$$(D^2 + 9)(D^2 + 3D - 10)y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

que es una ecuación diferencial de orden mayor a la original, cuya ecuación característica y raíces respectivas son

$$(\lambda^2 + 9)(\lambda^2 + 3\lambda - 10) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3i,\ \lambda_4 = -3i$$

Así la solución general de (A) es

$$y_G = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 3x + C_4\, sen\, 3x$$

en donde es posible identificar $y_h$ y la forma $y_p$

$$y_h = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$$

$$y_p = C_3 \cos 3x + C_4\, sen\, 3x$$

En $y_p$ se tienen justamente los coeficientes indeterminados $C_3$ y $C_4$ cuyos valores deben obtenerse, lo cual se logra derivando $y_p$ y posteriormente sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$y_p' = -3C_3\, sen\, 3x + 3C_4 \cos 3x$$
$$y_p'' = -9C_3 \cos 3x - 9C_4\, sen\, 3x$$

al sustituir en la ecuación diferencial original

$$-9\cos 3x - 9C_4\, sen\, 3x + 3(-3C_3\, sen\, 3x + 3C_4 \cos 3x)$$
$$-10(C_3 \cos 3x + C_4\, sen\, 3x) = \cos 3x$$

desarrollando operaciones y posteriormente al factorizar se obtiene

$$\cos 3x(-19C_3 + 9C_4) + sen\,3x(-9C_3 - 19C_4) = \cos 3x$$

y al igualar coeficientes se forma el sistema

$$\begin{aligned} -19\,C_3 + 9\,C_4 &= 1 \\ -9\,C_3 - 19\,C_4 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$C_3 = -\frac{19}{442};\ C_4 = \frac{9}{442}$$

Entonces $y_p$ resulta

$$y_p = -\frac{19}{442}\cos 3x + \frac{9}{442}sen\,3x$$

por lo que la solución general es

$$y_G = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} - \frac{19}{442}\cos 3x + \frac{9}{442}sen\,3x$$

**3)** Obtenga la solución general de la ecuación

$$y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x}\sec 2x - 4e^{2x}\csc 2x$$

## RESOLUCIÓN

La ecuación diferencial es no homogénea, lineal, de segundo orden y coeficientes constantes; su solución general es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

Para la solución de la ecuación homogénea asociada, $y_h$, se tiene

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

y en términos del operador diferencial

$$(D^2 - 4D + 8)y = 0$$

su ecuación característica asociada es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 2 + 2i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 2 - 2i$$

De acuerdo a las raíces obtenidas resulta

$$y_h = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} sen 2x$$

En lo que respecta a $y_p$, que es una solución particular de la no homogénea, necesitamos

considerar la función $Q(x)$, para la cual no existe operador anulador; lo anterior implica la aplicación del método de variación de parámetros, el cual consiste en sustituir las constantes ó parámetros de $y_h$ por funciones desconocidas $u(x)$ y $v(x)$, las que deben ser determinadas. Así, se tiene

$$y_p = u(x) e^{2x} \cos 2x + v(x) e^{2x} sen 2x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

donde $u'(x)$ y $v'(x)$ son funciones que satisfacen el sistema

$$\begin{bmatrix} e^{2x}\cos 2x & e^{2x} sen 2x \\ 2e^{2x}(\cos 2x - sen 2x) & 2e^{2x}(\cos 2x + sen 2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(x) \end{bmatrix}$$

siendo $Q(x) = 4e^{2x} \sec 2x - 4e^{2x} csc\, 2x$

Para resolver este sistema por regla de Cramer es necesario obtener los determinantes siguientes:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{2x}\cos 2x & e^{2x} sen 2x \\ 2e^{2x}(\cos 2x - sen 2x) & 2e^{2x}(\cos 2x + sen 2x) \end{vmatrix} = 2e^{4x}(\cos^2 2x + \cos 2x\, sen\, 2x) - 2e^{4x}(\cos 2x\, sen\, 2x - sen^2 2x)$$

$$\Delta_1 = 2e^{4x} \cos 2x\, sen\, 2x - 2e^{4x} \cos 2x\, sen\, 2x + 2e^{4x}(\cos^2 2x + sen^2 2x) = 2e^{4x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ Q(x) & 2e^{2x}(\cos 2x + sen 2x) \end{vmatrix} = -e^{2x}(4e^{2x} \sec 2x - 4e^{2x} csc\, 2x)$$

$$\Delta_2 = 4e^{4x} csc\, 2x - 4e^{4x} \sec 2x = 4e^{4x}(csc\, 2x - \sec 2x)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^{2x}\cos 2x & 0 \\ 2e^{2x}(\cos 2x - sen\, 2x) & Q(x) \end{vmatrix} = e^{2x}(4e^{2x} \sec 2x - 4e^{2x} csc\, 2x)$$

$$\Delta_3 = 4e^{4x}(\sec 2x - csc\, 2x)$$

Enseguida se procede a determinar las incógnitas $u'(x)$ y $v'(x)$ :

$$u'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{4e^{4x}(\cos 2x - \sec 2x}{2e^{4x}} = 2(csc\,2x - \sec 2x)$$

$$v'(x) = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = \frac{4e^{4x}(\sec 2x - csc\,2x)}{2e^{4x}} = 2(\sec 2x - csc 2x)$$

interesan las funciones $u(x)$ y $v(x)$ por lo que se procede a integrar las funciones obtenidas $u'(x)$ y $v'(x)$ , esto es

$$u(x) = 2\int (csc\,2x - \sec 2x)\,dx = \frac{2}{2} Ln\,(csc\,2x - \cot 2x)$$

$$v(x) = 2\int (\sec 2x - csc\,2x)\,dx = -\frac{2}{2} Ln\,(\sec 2x + \tan 2x)$$

De lo anterior se establece la solución $y_p$

$$y_p = Ln\,(csc 2x - \cot 2x)\,e^{2x}\cos 2x - Ln\,(\sec 2x + \tan 2x)\,e^{2x}\,sen 2x$$

Finalmente, la solución general es

$$y = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\,sen\,2x + e^{2x}\cos 2x\,Ln\,(csc\,2x - \cot 2x)$$
$$+\, e^{2x}\,sen\,2x\,Ln\,(\sec 2x + \tan 2x)$$

**4)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y'' + y' - 2y = (2 + 6x)e^x$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial no homogénea, de segundo orden y coeficientes constantes, por lo que su solución general es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

Para obtener $y_h$ , que es la solución de la ecuación homogénea asociada, se considera

$$y'' + y' - 2y = 0$$

que en términos del operador diferencial es

$$(D^2 + D - 2)y = 0$$

siendo su ecuación característica y raíces, respectivamente,

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

de donde

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Para obtener $y_p$, que es una solución particular de la ecuación no homogénea dada, mediante el método de los coeficientes indeterminados, es necesario identificar a la función $Q(x)$, a saber,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (2 + 6x)e^x \\ &= 2e^x + 6xe^x \end{aligned}$$

Enseguida se elige al operador anulador (aniquilador) de la función $Q(x)$, esto es,

$$P(D) = (D - 1)^2$$

este es un operador tal que, aplicado a la función $Q(x)$ la anula

$$P(D)Q(x) = 0$$

$$(D - 1)^2 (2e^x + 6xe^x) = 0$$

Al aplicar $P(D)$ a la ecuación no homogénea original se tiene

$$\begin{aligned} P(D^2 + D - 2)y &= P(D)Q(x) \\ (D - 1)^2 (D + D - 2)y &= 0 \end{aligned} \qquad \text{............(A)}$$

que es una ecuación homogénea de orden superior a la dada inicialmente; la ecuación característica correspondiente es

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + \lambda - 2) = 0$$

y sus raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 1$

por lo que la solución general de (A) resulta ser

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x$$

en esta solución podemos identificar a $y_h$ y $y_p$, esto es

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$y_p = C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x$$

De $y_p$ es necesario determinar los coeficientes (constantes) $C_3$ y $C_4$ , por lo que se requiere $y_p'$ y $y_p''$ .

$$y_p' = C_3 x e^x + C_3 e^x + C_4 x^2 e^x + 2 C_4 x e^x$$

$$y_p'' = C_3 x e^x + C_3 e^x + C_3 e^x + C_4 x^2 e^x + 2 C_4 x e^x + 2 C_4 x e^x + 2 C_4 e^x$$

reduciendo términos en $y_p''$ se llega a

$$y_p'' = C_3 x e^x + 2 C_3 e^x + C_4 x^2 e^x + 4 C_4 x e^x + 2 C_4 e^x$$

enseguida se sustituye en la ecuación diferencial original, esto es,

$$\begin{aligned} & C_3 x e^x + 2 C_3 e^x + C_4 x^2 e^x + 4 C_4 x e^x \\ & + 2 C_4 e^x + C_3 x e^x + C_3 e^x + C_4 x^2 e^x \\ & + 2 C_4 x e^x - 2 C_3 x e^x - 2 C_4 x^2 e^x \\ & = 2 e^x + 6 x e^x \end{aligned}$$

simplificando términos y factorizando

$$3 C_3 e^x + 6 C_4 x e^x + 2 C_4 e^x = 2 e^x + 6 x e^x$$

$$e^x ( 3 C_3 + 2 C_4 ) + 6 C_4 x e^x = 2 e^x + 6 x e^x$$

de donde se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 3 C_3 + 2 C_4 &= 2 \quad \Rightarrow \quad C_3 = o \\ 6 C_4 &= 6 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 1 \end{aligned}$$

estos valores son sustituídos en $y_p$ , por lo que resulta

$$y_p = x^2 e^x$$

Finalmente, la solución general es

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 e^x$$

**5)** Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = x^2 - 1$$

## RESOLUCIÓN

Es una ecuación de segundo orden, no homogénea, de coeficientes constantes. La solución general esta dada por la solución de la ecuación homogénea asociada $(y_h)$ y una solución particular de la no homogénea $(y_p)$, es decir,

$$y_G = y_h + y_p$$

Para obtener $y_h$ se considera

$$y'' - 2y' + y = 0$$

que expresada en términos del operador diferencial es

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

y cuya ecuación carácterística es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, raíces reales repetidas; para este caso la solución es

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

que corresponde a la solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación no homogénea original.

Para obtener $y_p$ es conveniente emplear el método de coeficientes indeterminados, pues la forma del segundo miembro de la ecuación no homogénea

$$Q(x) = x^2 - 1$$

es de tipo polinomial, la cual sugiere la aplicación de un operador anulador de la forma

$$P(D) = D^3$$

Dado que la ecuación no homogénea es una igualdad, se aplica $P(D)$ en ambos miembros

$$P(D)(D^2 - 2D + 1)y = P(D)(x^2 - 1)$$
$$D^3(D^2 - 2D + 1)y = D^3(x^2 - 1)$$

La aplicación de $P(D) = D^3$ en el segundo miembro propicia que el término $Q(x)$ se anule, por lo que se tiene

$$D^3(D^2 - 2D + 1)y = 0 \quad \text{..........(B)}$$

que es una ecuación diferencial homogénea de orden superior al de la ecuación original, la que al ser resuelta permitirá obtener la solución $y_p$

La ecuación característica asociada a (B) es

$$\lambda^3(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda^3(\lambda - 1)^2 = 0$$

y sus valores característicos son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \ , \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

Así la solución general de (B) es

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 + C_4 x + C_5 x^2$$

esta solución involucra a $y_h$ y $y_p$ , a saber

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$y_p = C_3 + C_4 x + C_2 x^2$$

Enseguida se determinan los coeficientes de $y_p$ considerando que si $y_p$ es una solución particular de (A), entonces la satisface.

Calculamos $y_p'$ y $y_p''$ ,

$$y_p' = C_4 + 2C_5 x$$

$$y_p'' = 2C_5$$

Sustituyendo en (A)

$$2C_5 - 2C_4 - 4C_5 x + C_3 + C_4 x + C_5 x^2 = x^2 - 1$$

de aquí se tiene el sistema

$$\begin{aligned} 2C_5 - 2C_4 + C_3 &= 0 \\ -4C_5 + C_4 &= -1 \\ C_5 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} C_3 &= 4 \\ C_4 &= 3 \\ C_5 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

por lo que

$$y_p = 4 + 3x + x^2$$

Finalmente, la solución general de (A) es

$$y_G = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 + 3x + 4$$

**6)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial ordinaria, utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = -6e^{-x} + 3\,sen\,3x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

## RESOLUCIÓN

De la ecuación homogénea asociada

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

se obtiene su ecuación característica, así como sus raíces

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 + 3i \\ \lambda_3 = 2 - 3i \end{cases}$$

por lo que la solución de (B) es

$$y_h = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_3 \cos 3x + C_4\,sen\,3x)$$

Por otro lado, para la función

$$Q(x) = -6e^{-x} + 3\,sen\,3x$$

el operador anulador es

$$P(D) = (D^2 + 9)(D + 1)$$

por lo que, al aplicarlo en la ecuación diferencial (A) se tiene

$$(D^2 + 9)(D + 1)(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

cuya ecuación característica es

$$(\lambda^2 + 9)(\lambda + 1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13) = 0$$

y sus raíces son

$\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = 2 + 3i$ , $\lambda_3 = 2 - 3i$ , $\lambda_4 = -1$ , $\lambda_5 = 3i$ , $\lambda_6 = -3i$

entonces, la solución general de (C) es

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x}\,sen\,3x \\ & + C_4 x e^{-x} + C_5 \cos 3x + C_6\,sen\,3x \end{aligned}$$

donde se identifican $y_h$ y $y_p$ , esto es

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x}\,sen\,3x$$
$$y_p = C_4 x e^{-x} + C_5 \cos 3x + C_6\,sen\,3x$$

Para obtener los valores de $C_4$ , $C_5$ , $C_6$ es necesario calcular $y_p'$ , $y_p''$ y $y_p'''$

$$y_p' = -C_4 x e^{-x} + C_4 e^{-x} - 3C_5 sen\,3x + 3\,C_6 \cos 3x$$
$$y_p'' = C_4 x e^{-x} - C_4 e^{-x} - C_4 e^{-x} - 9\,C_5 \cos 3x - 9\,C_6 sen\,3x$$
$$y_p''' = -C_4 x e^{-x} + C_4 e^{-x} + 2\,C_4 e^{-x} + 27\,C_5 sen\,3x - 27 C_6 sen\,3x$$
$$y_p''' = -C_4 x e^{-x} + 3\,C_4 e^{-x} + 27\,C_5 sen\,3x - 27\,C_6 sen\,3x$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (A)

$$\begin{aligned}&-C_4 x e^{-x} + 3\,C_4 e^{-x} + 27\,C_5 sen\,3x - 27 C_6 sen\,3x - 3\,C_4 x e^{-x}\\&+ 6\,C_4 e^{-x} + 27\,C_5 \cos 3x + 27\,C_6 sen\,3x - 9\,C_4 x e^{-x} + 9\,C_4 e^{-x}\\&- 27\,C_5 sen\,3x + 27\,C_6 \cos 3x + 13\,C_4 x e^{-x} + 13\,C_5 \cos 3x\\&+ 13\,C_6 sen\,3x = -6\,e^{-x} + 3\,sen\,3x\end{aligned}$$

al reducir términos semejantes

$$18\,C_4 e^{-x} + 40\,C_5 \cos 3x + 40\,C_6 sen\,3x = -6\,e^{-x} + 3\,sen\,3x$$

de donde se obtienen los valores buscados

$$C_4 = -\frac{1}{3}\ , \quad C_5 = 0\ , \quad C_6 = \frac{3}{40}$$

al sustituir estos valores en la forma de $y_p$ se tiene

$$y_p = -\frac{1}{3} x e^{-x} + \frac{3}{40} sen\,3x$$

Finalmente, la solución general es

$$y_G = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 sen\,3x) + \frac{3}{40} sen\,3x - \frac{1}{3} x e^{-x}$$

**7)** Sea la ecuación diferencial de coeficientes constantes $\frac{d^2y}{dt^2} + A\frac{dy}{dt} + By = Q(t)$ de la que se conoce una solución particular $y_p$ y la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada $y_h$

$$y_p = -\frac{3}{4} t \cos 2t$$
$$y_h = C_1 \cos 2t + C_2 sen\,2t$$

Obtenga

a) los valores de las constantes $A$ y $B$

b) la función $Q(t)$

**RESOLUCIÓN**

a) Para determinar $A$ y $B$ se considera la ecuación homogénea asociada

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A\frac{dy}{dt} + By = 0$$

y su correspondiente solución $y_h = C_1 \cos 2t + C_2 sen\, 2t$

de la cual es posible identificar las raíces que determinan los valores característicos correspondientes a la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial

$$\lambda = 2i \quad , \quad \lambda = -2i$$

entonces, la ecuación característica es

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

y la ecuación diferencial homogénea expresada en términos del operador diferencial resulta

$$(D^2 + 4)y = 0$$

o bien

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

de donde los valores de las constantes son $A = 0$ , $B = 4$

Otra forma para determinar estos valores consiste en obtener $y_h'$ , $y_h''$ y posteriormente eliminar las constantes esenciales y arbitrarias $C_1$ y $C_2$ considerando las funciones

$$y_h = C_1 \cos 2t + C_2 sen\, 2t \quad \text{..........(I)}$$

$$y_h' = -2C_1 sen\, 2t + 2C_2 \cos 2t \quad \text{..........(II)}$$

$$y_h'' = -4C_1 \cos 2t - 4C_2 sen\, 2t \quad \text{..........(III)}$$

Multiplicando (I) por (4) y sumando a (III)

$$4C_1\cos 2t + 4C_2 sen\, 2t = 4y_h$$

$$-4C_1\cos 2t - 4C_2 sen\, 2t = y_h^{//}$$

de donde resulta

$$y_h^{//} + 4y_h = 0$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0$$

b) En lo que respecta a la obtención de $Q(t)$, debe considerarse que la ecuación diferencial es de la forma

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = Q(t) \quad ..........(IV)$$

que es una ecuación diferencial no homogénea y si $y_p$ es una solución de ella debe de satisfacerla. Entonces se obtiene

$$y_p^{/} = \frac{3}{2} t\, sen\, 2t - \frac{3}{4}\cos 2t$$

$$y_p^{//} = 3t\cos 2t + \frac{3}{2} sen\, 2t + \frac{3}{2} sen\, 2t$$

$$y^{///} = -3t\cos 2t + 3\, sen\, 2t$$

posteriormente se sustituyen $y_p$ y $y_p^{//}$ en (IV)

$$3t\cos 2t + 3\, sen\, 2t + 4\left(-\frac{3}{4} t\cos 2t\right) = Q(t)$$

$$3\, sen\, 2t = Q(t)$$

**8)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial ordinaria, utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$y^{///} - 3y^{//} + 9y^{/} + 13y = -6e^{-x} + 3\, sen\, 3x$$

**RESOLUCIÓN**

De la ecuación homogénea asociada

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 + 3i \\ \lambda_3 = 2 - 3i \end{cases}$$

la solución característica es

$$y_C = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_3 \cos 3x + C_4 sen\, 3x)$$

el operador anulador de $-6e^{-x} + 3\, sen\, 3x$ es $(D+9)(D^2+1)$

así $$(D+9)(D^2+1)(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

de donde la forma de la solución general está dada por

$$\begin{aligned} y_G = C_1 e^{-x} \quad &+ \quad C_2 sen 3x + C_3 \cos 3x + C_4 x e^{-x} \\ &+ \quad e^{2x}(C_5 \cos 3x + C_6 sen 3x) \end{aligned}$$

la forma de la solución particular es

$$y_p = C_4 x e^{-x} + C_2 sen 3x + C_3 \cos 3x$$

derivando

$$\begin{aligned} y_P' &= C_4(1 - x)e^{-x} + 3C_2 \cos 3x - C_3 sen\, 3x \\ y_P'' &= C_4(-2 + x)e^{-x} - 9C_2 sen\, 3x - 9C_3 \cos 3x \\ y_P''' &= C_4(3 - x)e^{-x} - 27C_2 \cos 3x + 27C_3 sen\, 3x \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$C_2 = \frac{3}{40} \quad , \quad C_3 = 0 \quad , \quad C_4 = -\frac{1}{3}$$

por lo que $y_P = -\dfrac{1}{3} x e^{-x} + \dfrac{3}{40} sen 3x$

finalmente la solución general es

$$y_G = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 sen 3x) + \frac{3}{40} sen 3x - \frac{1}{3} x e^{-x}$$

**9)** Resuelva la ecuación diferencial $y'' + y = 2\cos x$ utilizando el método de variación de parámetros.Considere las condiciones iniciales $y(0) = 5$ y $y'(0) = 2$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial de segundo orden, no homogénea, de coeficientes constantes y su solución general es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

Para la solución de la homogénea asociada $y_h$, se tiene

$$y'' + y = 0$$

en términos del operador diferencial es

$$(D^2 + 1)y = 0$$

siendo su ecuación característica

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -1$$

y sus valores característicos $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ de donde

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 sen x$$

Para una solución particular de la no homegénea $y_p$, mediante el método de variación de parámetros, se tiene

$$y_p = u(x)\cos x + v(x) sen x$$

donde las primeras derivadas de $u(x)$ y $v(x)$ satisfacen el sistema

$$\begin{bmatrix} \cos x & sen x \\ -sen x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos x \end{bmatrix}$$

Del sistema anterior se obtiene

$$u' = -2 sen x \cos x$$

$$v' = 2\cos^2 x$$

de donde, al integrar

$$u(x) = -2\int \cos x\, sen\, x\, dx = -sen^2 x$$

$$v(x) = 2\int \cos^2 x\, dx = x + \frac{1}{2} sen\, 2x$$

sustituyendo en $y_p$ permite obtener

$$y_p = -sen^2 x \cos x + (x + \frac{1}{2} sen\, 2x)\, sen\, x$$

pero $\frac{1}{2} sen\, 2x = \frac{1}{2}(2\, sen\, x \cos x) = sen\, x \cos x$ , por lo que

$$\begin{aligned} y_p &= -sen^2 x \cos x + (x + sen\, x \cos x)\, sen\, x \\ &= -sen^2 x \cos x + x\, sen\, x + sen^2 \cos x \\ &= x\, sen\, x \end{aligned}$$

Entonces, la solución general es

$$y_G = C_1 \cos x + C_2\, sen\, x + x\, sen\, x$$

Para las condiciones iniciales dadas se requiere $y_G'$ , así

$$y_G = -C_1\, sen x + C_2 \cos x + sen x + x \cos x$$

aplicando $y(0) = 5$ y $y'(0) = 2$ en $y_G$ y $y_G'$ se tiene que

$$\begin{aligned} C_1 &= 5 \\ C_2 &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente

$$y = 5\cos x + 2 sen x + x sen x$$

**10)** Sea la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes $L(y) = 3y'' + Ay' + By = 0$ , de la cual se conocen las soluciones $y_1 = 4e^{x/3}$ y

$y_2 = 3e^{3x} - \frac{1}{3}e^{x/3}$

Determine la solución de la ecuación $L(y) = 9$ , de tal forma que se satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 3$ , $y'(0) = -8$ , $\lambda_1 = 3$ , $\lambda_2 = 3$ , $\lambda_3 = 0$ , $\lambda_4 = -2i$ , $\lambda_5 = 2i$

**RESOLUCIÓN**

La ecuación diferencial $3y'' + Ay' + By = 0$

se obtiene al aplicar el operador diferencial $L$ a la función $y$

Es necesario obtener los coeficientes $A$ y $B$ para establecer la ecuación diferencial homogénea inicialmente.
Del enunciado se tienen dos funciones tales que cada una de ellas es solución de la ecuación diferencial homogénea, por lo que la satisfacen, entonces se calcula $y_1'$ , $y_1''$ , $y_2'$ , $y_2''$

$$y_1' = \frac{4}{3}e^{\frac{x}{3}} \quad , \quad y_1'' = \frac{4}{9}e^{\frac{x}{3}}$$

$$y_2' = 9e^{3x} - \frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}} \quad , \quad y_2'' = 27e^{3x} - \frac{1}{27}e^{\frac{x}{3}}$$

Para $y_1$ se tiene

$$3\left(\frac{4}{9}e^{\frac{x}{3}}\right) + A\left(\frac{4}{3}e^{\frac{x}{3}}\right) + B\left(4e^{\frac{x}{3}}\right) = 0$$

$$\frac{4}{3}e^{\frac{x}{3}} + \frac{4}{3}Ae^{\frac{x}{3}} + 4Be^{\frac{x}{3}} = 0$$

Multiplicando por 3

$$4e^{\frac{x}{3}} + 4Ae^{\frac{x}{3}} + 12Be^{\frac{x}{3}} = 0 \;............(\mathrm{I})$$

Para $y_2$ se tiene

$$3\left(27e^{3x} - \frac{1}{27}e^{\frac{x}{3}}\right) + A\left(9e^{3x} - \frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}\right) + B\left(3e^{3x} - \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\right) = 0$$

$$81e^{3x} - \frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}} + 9Ae^{3x} - \frac{A}{9}e^{\frac{x}{3}} + 3Be^{3x} - \frac{B}{3}e^{\frac{x}{3}} = 0$$

Multiplicando por 9

$$729e^{3x} - e^{\frac{x}{3}} + 81Ae^{3x} - Ae^{\frac{x}{3}} + 27Be^{3x} - 3Be^{\frac{x}{3}} = 0 \;............(\mathrm{II})$$

Debe resolverse el sistema formado por (I) y (II).
Resolviendo para (A) en (I) resulta

$$A = -3B - 1$$

Al sustituir en (II) y reducir términos semejantes se obtiene

$$648 = 216B \;\Rightarrow\; B = 3$$

por lo que $A = -10$

Así, la ecuación diferencial homogénea resulta ser

$$3y'' - 10y' + 3y = 0$$

Del enunciado se tiene que se quiere la solución de $L(y) = 9$ , es decir, la solución de

$$3y'' - 10y' + 3y = 9 \;...........(\mathrm{III})$$

que es una ecuación no homogénea de segundo orden, cuya solución general es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

Para obtener $y_h$ se sonsidera

$$3y'' - 10y' + 3y = 0$$

que en términos del operador diferencial es

$$(3D^2 - 10D + 3)y = 0$$

siendo su ecuación característica

$$3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$ , $\lambda_2 = \frac{1}{3}$

Entonces, la solución de la homogénea asociada es

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}$$

Para obtener $y_p$ se tiene de la ecuación no homogénea (III)

$$Q(x) = 9$$

un operador anulador para esta función es

$$P(D) = D$$

y al aplicarlo en (III) se obtiene

$$D(3D^2 - 10D + 3)y = 0 \quad \text{............(IV)}$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda(3\lambda^2 - 10\lambda + 3)y = 0$$

y los valores característicos correspondientes resultan

$$\lambda_1 = 3 \; , \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \; , \quad \lambda_3 = 0$$

así, la solución general de (IV) es

$$y = C_1 e^{3x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x} + C_4$$

por lo que

$$y_p = C_4$$

Ahora bien, si $y_p$ es una solución particular de (III) entonces debe satisfacerla por lo que

calculamos $y_p'$ , $y_p''$

$$y_p' = 0$$
$$y_p'' = 0$$

al sustituir en (III) resulta

$$3C_4 = 9 \rightarrow C_4 = 3$$

por lo que la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y_G = C_1 e^{3x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x} + 3$$

Para aplicar las condiciones iniciales dadas es necesario derivar a la función que representa a la solución general, esto es

$$y_G' = 3C_1 e^{3x} + \frac{1}{3} C_2 e^{\frac{1}{3}x}$$

enseguida se aplican $y(0) = 3$ , $y'(0) = -8$ , que son las condiciones iniciales

$$3 = C_1 + C_2 + 3$$
$$-8 = 3C_1 + \frac{1}{3} C_2$$

al resolver este sistema se obtiene

$$C_1 = C_2 = -3$$

sustituyendo estos valores en la solución general resulta finalmente

$$y = -3e^{3x} - 3e^{\frac{1}{3}x} + 3$$

**11)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xy' - y = x^2 e^{-3x} \quad ...........(A)$$

**RESOLUCIÓN**

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden, no homogénea y coeficiente variable; para resolverla es necesario normalizarla por lo que se divide entre la variable $x$ , de donde se obtiene

$$y' - \frac{1}{x} y = x e^{-3x}$$

La cual ya es una ecuación de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$ donde

$$P(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = x e^{-3x}$$

La solución general de una ecuación de la forma anterior está dada por

$$y_G = C e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx$$

donde $\quad y_h = C e^{-\int P(x)\,dx} \quad$ es la solución de la homogénea asociada

$$y_p = e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx$$

Efectuamos el cálculo de las diferentes integrales, según se indica

$$\int P(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} = -Ln\,x = Ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-\int P(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = Ln\,x$$

$$e^{-\int P(x)\,dx} = e^{Ln\,x} = x$$

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{Ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$$

$$\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx = \int x\, e^{-3x} \frac{1}{x}\, dx = \int e^{-3x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3x}$$

Así, se obtiene

$$y_h = C x \quad \text{y} \quad y_p = -\frac{x}{3} e^{-3x}$$

y la solución general es

$$y = C x - \frac{x}{3} e^{-3x}$$

**12)** Obtenga la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de menor orden cuya solución general es $\; y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 sen 2x) + C_3 + C_4 x + 5 e^{4x}$

**RESOLUCIÓN**

De la solución general

$$y_h = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} sen 2x + C_3 + C_4 x + 5 e^{4x}$$

se tiene la solución $y_h$ y la solución $y_p$, esto es

$$y_h = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} sen\, 2x + C_3 + C_4 x$$

$$y_p = 5e^{4x}$$

Lo anterior significa que la ecuación buscada es no homogénea. Po otro lado, al observar los elementos de $y_h$, es posible determinar las raíces que están involucradas; de los términos con funciones exponenciales y trigonométricas se tiene

$$\lambda_1 = -3 + 2i \ , \quad \lambda_1 = -3 - 2i$$

de los términos con funciones polinomiales se tiene

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Así, la ecuación característica correspondiente a $y_h$ está dada por

$$(\lambda - (-3 + 2i)).(\lambda - (-3 - 2i))\lambda^2 = 0$$

al efectuar operaciones se obtiene

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 = 0$$

en términos del operador diferencial

$$(D^4 + 6D^3 + 13D^2)y = 0$$

o bien

$$y^{(IV)} + 6y''' + 13y'' = 0$$

Entonces, la ecuación diferencial buscada se puede escribir como

$$y^{(IV)} + 6y''' + 13y'' = Q(x) \ \text{...........(A)}$$

donde $Q(x)$ es la función pendiente por determinar.

Al inicio del proceso de resolución se encontró $y_p$, que es una solución de la no homogénea (A), y si es solución entonces la satisface, por lo que se requiere obtener $y_p'$, $y_p''$, $y_p'''$, $y_p^{(IV)}$, por lo que

$$y_p = 5e^{4x}$$

$$y_p' = 20e^{4x}$$

$$y_p'' = 80e^{4x}$$

$$y_p''' = 320e^{4x}$$

$$y_p^{(IV)} = 1280e^{4x}$$

enseguida se sustituye en (A)

$$1280\,e^{4x} + 6(\,320\,e^{4x}\,) + 13\,(\,80\,e^{4x}) = Q(x)$$
$$4240\,e^{4x} = Q(x)$$

Por lo que, la ecuación diferencial buscada es

$$y^{IV} + 6y''' + 13y'' = 4240e^{4x}$$

**13)** Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = xe^{2x}$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una ecuación diferencial lineal no homogénea, de tercer orden y coeficientes constantes; su solución general es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

Inicialmente se obtiene la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y''' - 2y'' - 4y' - 8y = 0$$

cuya ecuación característica es

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0$$

y sus raíces son

$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3 - 2$

Entonces la solución es

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x}$$

Para obtener $y_p$ se empleará el método de coeficientes indeterminados, por lo que se considera a la función

$$Q(x) = xe^{2x}$$

cuyo operador anulador es

$$P(D) = (D - 2)^2$$

Al aplicar $P(D)$ en la ecuación no homogénea se tiene

$$(D - 2)^2 (D^3 + 2D^2 - 4D - 8)y = (D - 2)^2 Q(x)$$

$$(D - 2)^2 (D^3 + 2D^2 - 4D - 8)y = 0$$

su ecuación característica y raíces respectivas son

$$(\lambda - 2)^2 (\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8) = 0 \quad ;$$

$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -2 \quad , \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 2$

Por lo que su solución general es

$$y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x} + C_4 x e^{2x} + C_5 x^2 e^{2x}$$

donde se identifica a $y_p$ , esto es

$$y_p = C_4 x e^{2x} + C_5 x^2 e^{2x}$$

Es necesario obtener $y'$ , $y''$ , $y_p'''$

$$y_p' = 2C_4 x e^{2x} + C_4 e^{2x} + 2C_5 x^2 e^{2x} + 2C_5 x e^{2x}$$

$$y_p'' = 4C_4 x e^{2x} + 4C_4 e^{2x} + 4C_5 x^2 e^{2x} + 8C_5 x e^{2x} + 2C_5 e^{2x}$$

$$\begin{aligned} y_p''' = {} & 8C_4 x e^{2x} + 12C_4 e^{2x} + 8C_5 x^2 e^{2x} + \\ & 24C_5 x e^{2x} + 12C_5 e^{2x} \end{aligned}$$

Enseguida se sustituye en la ecuación diferencial dada, pues se sabe que si $y_p$ es su solución, entonces la satisface.

Al reducir términos semejantes y agruparlos se obtiene

$$\begin{aligned} 16C_4 e^{2x} + 40C_5 x e^{2x} + 16C_5 e^{2x} - 8C_5 x e^{2x} &= x e^{2x} \\ (16C_4 + 16C_5) e^{2x} + 32C_5 x e^{2x} &= x e^{2x} \end{aligned}$$

y por igualdad de coeficientes

$$\begin{aligned} 16C_4 + 16C_5 &= 0 \\ C_4 &= -C_5 \end{aligned}$$

resolviendo para las constantes

$$C_4 = -\frac{1}{32}$$

$$32\,C_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_5 = \frac{1}{32}$$

sustituyendo estos valores en la solución particular se tiene que

$$y_p = -\frac{1}{32}x\,e^{2x} + \frac{1}{32}x^2\,e^{2x}$$

Y la solución general es finalmente

$$y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x\,e^{-2x} - \frac{1}{32}x\,e^{2x} + \frac{1}{32}x^2\,e^{2x}$$

**14)** Obtenga la solución particular de la ecuación diferencial

$$(x^2 - 1)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = x^2 - 1$$

si la solución de la ecuación homogénea asociada correspondiente es

$$y_h = C_1 x + C_2 (1 + x^2)$$

**RESOLUCIÓN**

Se trata de una ecuación diferencial de coeficientes varaiables, de segundo orden y no homogénea. Para obtener $y_p$ (solución particular) es necesario normalizar y al hacerlo se obtiene

$$y'' - \frac{2x}{x^2 - 1}y' + \frac{2}{x^2 - 1}y = 1$$

La forma de $y_p$ es

$$y_p = u(x) + v(x)(1 + x^2)$$

donde las primeras derivadas de $u(x)$ y $v(x)$ son funciones tales que satisfacen el sistema

$$\begin{bmatrix} x & 1 + x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Cramer es necesario obtener los siguinetes determinantes:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x & 1 + x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} = x^2 - 1$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 + x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} = -(x^2 - 1)$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = x$$

de lo anterior, resulta que

$$u'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = -1 - \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$v'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Integrando cada función $u'(x)$ y $v'(x)$ obtenemos las funciones deseadas para $y_p$

$$u(x) = \int \left( -1 - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right) dx = -\int dx - 2\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

para obtener $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$ se emplea la descomposición en fracciones parciales, esto es,

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$
$$1 = A(x-1) + B(x-1)$$

; de aquí resulta $A = \frac{1}{2}$ , $B = -\frac{1}{2}$

por lo que

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)} = \frac{1}{2} Ln(x-1) - \frac{1}{2} Ln(x$$
$$= -\frac{1}{2}[Ln(x+1) - Ln(x-1)]$$
$$= -\frac{1}{2} Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Regresando a $u(x)$ resulta

$$u(x) = -x + Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

De manera similar para $v(x)$

$$v(x) = \int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2} Ln(x^2 - 1)$$

Finalmente, una solución particular es

$$y_p = \left[ -x + Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right] x + \left[ \frac{1}{2} Ln(x^2 - 1) \right] (1 + x^2)$$

$$y_p = -x^2 + x Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{1}{2}(1 + x^2) Ln(x^2 - 1)$$

**15)** Si $\{1, x^{-1}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $x^2 y'' + 2xy' = 0$ , obtenga la solución general de la ecuación

$$x^2 y'' + 2xy' = x^{-1}$$

**RESOLUCIÓN**

La ecuación a resolver es de segundo orden , coeficientes variables y no homogénea y su solución es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

En lo que respecta a $y_h$ , que es la solución de la ecuación homogénea asociada, se obtiene a partir del conjunto dado, pues al ser fundamental se asegura que cada función es independiente de la otra y la solución general de la homogénea asociada está formada por una combinación lineal de las funciones linealmente independientes, por lo que se tiene

$$y_h = C_1 + C_2 x^{-1}$$

Por otro lado, la solución $y_p$ se obtiene empleando el método de variación de parámetros, esto es

$$y_p = u(x)(1) + v(x) x^{-1}$$

donde las primeras derivadas de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ satisfacen el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & -x^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(x) \end{bmatrix}$$

Es importante señalar que la función $Q(x)$ de este sistema se determina a partir de la ecuación diferencial no homogénea expresada en forma normalizada la cual se obtiene al dividir la ecuación

$$x^2 y'' + 2xy' = x^{-1}$$

entre $x^2$, de donde se obtiene

$$y'' + \frac{2}{x} y' = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

de esta forma se identifica a la función deseada

$$Q(x) = \frac{1}{x^3}$$

Así, el sistema anterior se escribe nuevamente

$$\begin{bmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & -x^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{-3} \end{bmatrix}$$

que se resuelve utilizando la regla de Cramer. Para resolverlo se obtiene

$$u'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad v'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

donde

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & -x^{-2} \end{bmatrix} = -x^{-2}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & x^{-1} \\ x^{-3} & -x^{-2} \end{bmatrix} = -x^{-4}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{-3} \end{bmatrix} = x^{-3}$$

Entonces

$$u'(x) = \frac{-x^{-4}}{-x^{-2}} = x^{-2} \quad ; \quad v'(x) = \frac{x^{-3}}{-x^{-2}} = -x^{-1}$$

Integrando

$$u(x) = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x}$$

$$v(x) = -\int \frac{dx}{x} = -Ln\,x = Ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Enseguida se sustituye en $y_p$ , esto es

$$y_p = \left(-\frac{1}{x}\right)(1) + Ln\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y_p = \frac{1}{x}\left[Ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]$$

Finalmente, la solución general es

$$y = C_1 + C_2x^{-1} + \frac{1}{x}\left[Ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]$$

**16)** Considere una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, cuyo segundo miembro es la función $Q(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$ y cuyas raíces de la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada correspondiente son $\lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = -1$ . Obtenga una solución particular de la ecuación no homogénea.

**RESOLUCIÓN**

De acuerdo a la descripción, se deberá obtener $y_p$ (solución particular de la no homogénea) utilizando el método de variación de parámetros.

Se requiere conocer primero $y_h$ (solución de la ecuación homogénea asociada) lo cual es posible por los valores $\lambda_1$ y $\lambda_2$ .

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

Así,una solución $y_p$ está dada por

$$y_p = u(x)e^{-x} + v(x)xe^{-x}$$

donde las funciones $u'(x)$ y $v'(x)$ satisfacen el sistema

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & -xe^{-x} + e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-x}}{1 + x^2} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema por el método de la regla de Cramer:

$$u'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} \ , \quad v'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

donde $\Delta$ , $\Delta_1$ y $\Delta_2$ son los siguientes determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & -xe^{-x} + e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x}(-xe^{-x} + e^{-x}) + e^{-x}(xe^{-x})$$

$$\Delta = -xe^{-2x} + e^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \dfrac{e^{-x}}{1 + x^2} & -xe^{-x} + e^{-x} \end{vmatrix} = -\left(\frac{e^{-x}}{1 + x^2}\right)(xe^{-x})$$

$$\Delta_1 = -\frac{xe^{-2x}}{1 + x^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^{-x}}{1 + x^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{-2x}}{1 + x^2}$$

de lo anterior se tiene

$$u'(x) = \frac{-\dfrac{xe^{-2x}}{1 + x^2}}{e^{-2x}} = -\frac{x}{1 + x^2}$$

$$u(x) = -\int \frac{x}{1 + x^2}\,dx = -\frac{1}{2}Ln(1 + x^2)$$

$$u(x) = Ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$v'(x) = \frac{\dfrac{e^{-2x}}{1 + x^2}}{e^{-2x}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$v(x) = \int \frac{dx}{1 + x^2} = ang\tan x$$

Por lo que finalmente

$$y_p = Ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)e^{-x} + (ang\tan x)\,x\,e^{-x}$$

**17)** Obtenga la ecuación diferencial de la cual es solución general la siguiente función:

$$y = C_1 e^x + (C_2 + x)\cos x + (C_3 - x)\,sen\,x$$

**RESOLUCIóN**

Inicialmente conviene desarrollar la función dada, esto es

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + x\cos x + C_3\,sen\,x - x\,sen\,x$$

reordenando

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3\,sen\,x + x\cos x - x\,sen\,x$$

Se observa que hay elementos constantes no especificados $(C_1\ ,\ C_2\ y\ C_3)$ y elementos cuyos coeficientes están determinados; lo anterior indica que la solución general involucra la solución de la ecuación homogénea asociada $(y_h)$ , más una solución particular de la no homogénea $(y_p)$ , es decir

$$y_G = y_h + y_p$$

Para $y_h = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 sen\, x$ es posible identificar las raíces que la generan,

las cuales son $\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_{2,3} = \pm\, i$

y en términos de factores se tiene

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

que es la ecuación característica correspondiente. Esta ecuación nos permite obtener la ecuación diferencial en términos del operador diferencial

$$(D - 1)(D^2 + 1) = 0$$

$$(D^3 - D^2 + D - 1) = 0$$

o bien

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

Entonces, la ecuación buscada es de la forma

$$y''' - y'' + y' - y = Q(x) \ \ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

conocida la función $y_p$, se sabe que al ser solución de la ecuación no homogénea, entonces la satisface, por lo que se deriva y sustituye en (A)

$$\begin{aligned} y_p &= x \cos x - x\, sen x \\ y_p' &= x - x\, sen\, x - sen\, x - x \cos x \\ y_p'' &= -2\, sen\, x - 2 \cos x - x \cos x + x\, sen\, x \\ y_p''' &= -3 \cos x + 3\, sen\, x + x\, sen\, x + x \cos x \end{aligned}$$

Enseguida

$$\begin{gathered} -3 \cos x + 3\, sen\, x + x\, sen\, x + x \cos x + 2\, sen\, x \\ + 2 \cos x + x \cos x - x\, sen\, x + x \cos x - x\, sen\, x \\ + \cos x - x\, sen\, x - sen\, x - x \cos x - x \cos x \\ + x\, sen\, x = Q(x) \end{gathered}$$

reduciendo términos se obtiene

$$Q(x) = 4\, sen\, x$$

Finalmente, la ecuación diferencial es

$$y''' - y'' + y' - y = 4\, sen\, x$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1)** Determine la forma de la solución particular $y_p(x)$ en la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 9y = (10x^2 + 21x + 9)\, sen\, 3x + x \cos 3x$$

**Solución.**

$$y_p = (C_1 x + C_2 x^2 + C_4 x^3)\, sen\, 3x + (C_4 x + C_5 x^2 + C_6 x^3) \cos 3x$$

**2)** Obtenga la solución general de la ecuación diferencial:

$$xy'' + y' - \frac{4}{x} y = x + x^3$$

utilizando el método de variación de parámetros si:

$$y_c(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$$

**Solución.**

$$y_G = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + \frac{1}{4} x^2 Ln\, x + \frac{1}{12} x^4$$

**3)** Use el método de los coeficientes indeterminados para obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = xe^{-3x}$$

**Solución.**

$$C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2}(2x + x^2)e^{-3x}$$

**4)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + y = \sec x$$

**Solución.**

$$C_1 \cos x + C_2 \, sen\, x + \cos x \, Ln(\cos x) + x \, sen\, x$$

**5)** Obtenga la ecuación diferencial cuya solución general es

$$y = e^{2x}\left( C_1 + C_2 x + \frac{1}{x} \right)$$

**Solución.**

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2x}}{x^3}$$

**6)** Sea la ecuación diferencial lineal

$$P(D)y = Q(x) \;...........(1)$$

Si $A = \{ x - 2e^{3x} , 4 + 5e^{3x} , 2 - 9x \}$ es un conjunto de

algunas soluciones de la ecuación $P(D)y = 0$ y $f(x) = -e^{4x}$ es una solución de (1), determine

a) la solución general de (1);

b) la ecuación diferencial (1), identificando el operador $P(D)$ y la función $Q(x)$

**Solución.**

a) $y_G = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} - e^{4x}$

b) $D^2(D - 3)y = -16e^{4x}$

**7)** Utilice el método de coeficientes indeterminados para obtener la forma de una solución particular de la ecuación diferencial

$$(D^2 - 2D - 3)y = x \, sen 2x + x^3 e^{3x}$$

**Solución.**

$$y_H = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\,sen\,2x + (C_5 x + C_6 x^2 + C_7 x^3 + C_8 x^4)e^{3x}$$

**8)** Sean $L_1$ y $L_2$ operadores diferenciales tales que

$$L_1 = D^2 + 1 \qquad y \qquad L_2 = (sen\,x)\,D$$

Obtenga

a) $(L_1 L_2)\,y$ ;

b) $(L_2 L_1)\,y$ ;

c) de acuerdo al resultado obtenido en los incisos a) y b) ¿qué puede concluir respecto al producto de los operadores $L_1$ y $L_2$ ?

**Solución.**

a) $(L_1 L_2)\,y = 2(\cos x)\,y'' + (sen\,x)\,y'''$

b) $(L_2 L_1)\,y = (sen\,x)(y''' + y')$

c) Los operadores $L_2 L_1$ y $L_1 L_2$ son diferentes.

**9)** Determine la ecuación diferencial cuya solución general es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x$$

**Solución.**

$$y'' - y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

**10)** Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = \sqrt{2 + e^x} - y$$

**Solución.**

$$y = Ce^{-x} + \frac{2}{3}e^{-x}(2 + e^{x})^{\frac{3}{2}}$$

**11)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y''' + y' = 6x(2x + 1)$$

**Solución.**

$$C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + 9x^2 - 3x^3 + x^4$$

**12)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2x}}{x}$$

**Solución.**

$$(C_1 + C_2 x)e^{2x} - 2xe^{2x}(1 - Lnx)$$

**13)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = \cos x(y + 2\,sen x)$$

**Solución.**

$$Ce^{sen x} + 2\,sen x - 2$$

**14)** Resuelva la ecuación diferencial

$$(D + 1)(D - 1)y = \cos\frac{x}{2}$$

**Solución.**

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{4}{5}\cos\frac{x}{2}$$

**15)** Sean los operadores diferenciales $A = (xD - 1)$ y $B = (D + 1)$ . Demuestre que $AB \neq BA$

**Solución.**

$$AB = (xD - 1)(D + 1) = xD^2 + xD - D - 1$$
$$BA = (D + 1)(xD - 1) = D(xD) - D - xD - 1 \qquad \text{de donde} \qquad AB \neq BA$$
$$= D + xD^2 - D + xD - 1$$

# TEMA 4

# SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

## 4.1 CÁLCULO DE LA MATRIZ EXPONENCIAL.

**1)** Obtenga la matriz exponencial correspondiente a

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**RESOLUCIÓN**

Para obtener la matriz exponencial $e^{At}$ es necesario calcular los valores característicos asociados a la matriz $C$ por lo que se requiere el determinante

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

por lo que la ecuación característica asociada a la matriz $C$ es

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

y los valores característicos correspondientes a esta última son

$\lambda_1 = 1 \;, \quad \lambda_2 = i \;, \quad \lambda_3 = -i$

La matriz exponencial está dada por la expresión

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2 \; \ldots\ldots\ldots\text{(A)}$$

y la obtención de $\beta_0$ , $\beta_1$ y $\beta_2$ a su vez está dada por

$$e^{\lambda i t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda i + \beta_2 \lambda i^2 \; \ldots\ldots\ldots\text{(B)}$$

por lo que se sustituye cada valor característico en (B)

$$\lambda_1 = 1$$

$$e^{t} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \quad \text{..........(C)}$$

$$\lambda_2 = i$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{ti} = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 i^2 \\ e^{ti} = \beta_0 + \beta_1 i - \beta_2 \end{array}\right. \quad \text{...........(D)}$$

y de acuerdo al desarrollo de Euler

$$e^{ti} = cis\,t = \cos t + i\,sen\,t \quad \text{.........(E)}$$

Haciendo (D) = (E)

$$\beta_0 + \beta_1 i - \beta_2 = \cos t + i\,sen\,t$$

de donde resulta $\beta_0 - \beta_2 = \cos t \Rightarrow \beta_0 = \cos t + \beta_2$ ..........(F)

$$\beta_1 = sen\,t$$

De la ecuación (C)

$$\left.\begin{array}{l} \beta_0 = e^{t} - \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_0 = e^{t} - sen\,t - \beta_2 \end{array}\right. \quad \text{..........(G)}$$

además (F) = (G)

$$\cos t + \beta_2 = e^{t} - sen\,t - \beta_2$$

$$\beta_2 = \frac{e^{t} - sen\,t - \cos t}{2}$$

sustituyendo en (G) se tiene

$$\beta_0 = e^{t} - sen\,t - \frac{1}{2}(e^{t} - sen\,t - \cos t)$$

$$\beta_0 = \frac{\cos t + e^{t} - sen\,t}{2}$$

Las funciones $\beta_0$ , $\beta_1$ , y $\beta_2$ se sustituyen en (A), donde previamente se efectúan las operaciones del segundo miembro

$$e^{At} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_0 - \beta_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 & -\beta_1 & \beta_0 + \beta_1 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + \cos t - sent & 2sent & e^t - \cos t - sent \\ e^t - \cos t - sent & 2\cos t & e^t - \cos t + sent \\ e^t - \cos t + sent & -2sent & e^t + \cos t + sent \end{bmatrix}$$

**2)** Determine $e^{At}$ para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**RESOLUCIÓN**

La matriz exponencial está dada por

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2 \quad \text{..........(A)}$$

además, es necesario emplear la expresión

$$e^{\lambda i t} = \beta_0 \dot{+} \beta_1 \lambda i + \beta_2 (\lambda i)^2 \quad \text{...........(B)}$$

donde $\lambda i$ representa cada uno de los valores característicos.
Para obtener los valores característicos se calcula

$$\det(A - \lambda I) \text{ , estos es } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$$

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = i \quad , \quad \lambda_3 = -i$$

Enseguida se sustituye cada uno de estos valores en (B);

para $\lambda_1 = 1$

$$e^{t} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \quad ..........(C)$$

para $\lambda = i$

$$e^{ti} = \beta_0 + \beta_1 i - \beta_2 \quad .........(D)$$

y del desarrollo de la forma de Euler

$$e^{ti} = \cos t + i\, sen\, t$$

por lo que

$$\beta_0 + \beta_1 i - \beta_2 = \cos t + i\, sen\, t$$

de donde resulta

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 - \beta_2 &= \cos t \\ \beta_1 &= sen\, t \end{aligned}\right. \quad ..........(E)$$

De la ecuación (C) y (E) se obtiene

$$\beta_0 = \frac{1}{2}\left( e^{t} - sen\, t + \cos t \right)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\left( e^{t} - sen\, t - \cos t \right)$$

Ahora bien, considerando la ecuación (A) es conveniente expresarla en términos de $\beta_0$ , $\beta_1$ y $\beta_2$ como se indica; además es necesario obtener la matriz $A^2$ , entonces resulta

$$e^{At} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \beta_0 - \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ -\beta_1 & \beta_1 - \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se sustituyen las funciones $\beta_0$ , $\beta_1$ y $\beta_2$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & sen\, t & 0 \\ -sen\, t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

**3)** Sea la matriz exponencial

$$e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos t & -sen\,t \\ sen\,t & \cos t \end{bmatrix}$$

Obtenga

a) las funciones $\beta_0$ y $\beta_1$ tales que $e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$ ,

b) la matriz de coeficientes correspondientes a $e^{At}$

**RESOLUCIÓN**

a) De la matriz exponencial se pueden identificar los valores característicos asociados a $A$ , esto es

$$\lambda_1 = 2 + i \quad , \quad \lambda_2 = 2 - i$$

los cuales se sustituyen en

$$e^{\lambda_i t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_i$$

Para $\lambda_1 = 2 + i$

$$e^{(2+i)t} = \beta_0 + \beta_1 (2 + i)$$

$$e^{2t} \,.\, e^{ti} = \beta_0 + 2\,\beta_1 + \beta_1 i \;\;\ldots\ldots\ldots\text{(A)}$$

y del desarrollo de Euler

$$e^{ti} = cis\,t = \cos t + i\,sen\,t \;\;\ldots\ldots\ldots\text{(B)}$$

Sustituyendo (B) en (A)

$$\begin{aligned} \beta_0 + 2\,\beta_1 + \beta_1 i &= e^{2t}(\cos t + i\,sen\,t) \\ &= e^{2t}\cos t + i\,e^{2t} sen\,t \end{aligned}$$

y por igualdad de números complejos

$$\beta_0 + 2\,\beta_1 = e^{2t}\cos t$$

$$\beta_1 = e^{2t} sen\,t$$

por lo que resulta

$$\beta_0 = e^{2t}\cos t - 2\,e^{2t} sen\,t$$

b) Se sabe que $e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$ donde $A$ es una matriz cuyos elementos son desconocidos. Si se considera que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces se tiene

$$e^{At} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \beta_0 + a\beta_1 & b\beta_1 \\ c\beta_1 & \beta_0 + d\beta_1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

sustituyendo las funciones $\beta_0$ y $\beta_1$ en (C)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t - 2e^{2t}sent + ae^{2t}sent & be^{2t}sent \\ ce^{2t}sent & e^{2t}\cos t - 2e^{2t}sent + de^{2t}sent \end{bmatrix}$$

que también se puede escribir como

$$e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos t + sen\,t\,(-2 + a) & sen\,t\,b \\ sen\,t\,c & \cos t + sen\,t(-2 + d) \end{bmatrix}$$

Igualando con los elementos de la matriz $e^{At}$ que es dato se tiene

$$\begin{aligned} \cos t + sen\,t(a - 2) &= \cos t \\ sen\,t\,b &= -sen\,t \\ sen\,t\,c &= sen\,t \\ \cos t + sen\,t(d - 2) &= \cos t \end{aligned}$$

y por igualdad de funciones

$$\begin{aligned} a - 2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \\ b &= -1 \\ c &= 1 \\ d - 2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2 \end{aligned}$$

por lo tanto la matriz A es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## 4.2 TRANSFORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN n A UN SISTEMA DE n ECUACIONES DE PRIMER ORDEN.

**1)** Sea la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = 1$$

con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$

a) Obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente.
b) Resuelva el sistema obtenido en el inciso anterior.

**RESOLUCIÓN**

$$y'' - 2y' + y = 1$$

$$y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 1$$

a) Para realizar la transformación se introducen tantas variables nuevas como el orden de la ecuación diferencial; para este caso se tendrán 2 variables, a saber

$$y = w_1 \quad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$y' = w_1' = w_2 \quad \ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$y'' = w_2' \quad \ldots\ldots\ldots.(3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en la ecuación diferencial

$$w_2' - 2w_2 + w_1 = 1$$

que también se escribe como

$$w_2' = -w_1 + 2w_2 + 1$$

Entonces, el sistema de primer orden es

$$\begin{aligned} w_1' &= w_2 \\ w_2' &= -w_1 + 2w_2 + 1 \end{aligned}$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que es el sistema de ecuaciones diferenciales equivalente.

En lo que se refiera a las condiciones iniciales dadas, para obtener el vector $\bar{w}(0)$, se tiene

$$y = w_1 \text{ , por lo que si } y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad w_1(0) = 1$$

$$y' = w_2 \text{ , por lo que si } y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad w_2(0) = 1$$

entonces

$$\bar{w}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ que es el vector de términos independientes

b) El sistema es de la forma

$$\bar{w}_1' = A\bar{w} + \bar{b}(t)$$

que es un sistema de primer orden; su solución está dada por

$$\bar{w} = e^{At}\bar{w}(0) + \int_0^t e^{A\tau}\bar{b}(t - \tau)\,d\tau$$

Se procede a calcular la matriz exponencial, esto es

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A \quad \text{..........(1)}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

y las funciones $\beta_0$ y $\beta_1$ se obtendrán considerando los valores característicos; para determinar éstos últimos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

entonces

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Cada $\lambda_i$ se sustituye en la ecuación

$$e^{\lambda_i t} = \beta_0 + \beta_1\lambda_i \quad \text{..........(2)}$$

pero dado que los valores característicos son repetidos, deberá derivarse (2) con respecto a

$\lambda$ ,

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t}) = \frac{d}{d\lambda}(\beta_0 + \beta_1 \lambda)$$
$$t e^{\lambda t} = \beta_1$$

y sustituyendo $\lambda = 1$ se tiene

$$\beta_1 = t e^t$$

Para obtener $\beta_0$ , se sustituye $\lambda = 1$ y $\beta_1$ en (2)

$$e^t = \beta_0 + 2\beta_1$$
$$e^t = \beta_0 + t e^t \quad \Rightarrow \quad \beta_0 = e^t - t e^{2t}$$

así, la matriz exponencial es

$$e^{At} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$e^{At} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \beta_0 + 2\beta_1 \end{bmatrix} =$$
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t - t e^t & t e^t \\ -t e^t & e^t + t e^t \end{bmatrix}$$

De la forma de solución se tiene

$$\bar{w}_h = e^{At} \bar{w}(0)$$

$$\bar{w}_p = \int_0^t e^{A\tau} \bar{b}(t - \tau) d\tau$$

por lo que

$$\bar{w}_h = \begin{bmatrix} e^t - t e^t & t e^t \\ -t e^t & e^t + t e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

y para $\bar{w}_p$

$$e^{A\tau} \bar{b}(t - \tau) = \begin{bmatrix} e^\tau - \tau e^\tau & \tau e^\tau \\ -\tau e^\tau & e^\tau + \tau e^\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego de efectuar el producto de matrices

$$e^{A\tau} \bar{b}(t - \tau) = \begin{bmatrix} \tau e^\tau \\ e^\tau + \tau e^\tau \end{bmatrix}$$

enseguida se procede a integrar

$$\bar{w}_p = \int_0^t e^{A\tau}\bar{b}(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \tau e^{\tau} \\ e^{\tau} + \tau e^{\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$I_1 = \int_0^t \tau e^{\tau} d\tau = \tau e^{\tau} - e^{\tau} \Big|_0^t = te^t - e^t + 1.$$

$$I_2 = \int_0^t (e + \tau e^{\tau})\,d\tau = e^{\tau} + \tau e^{\tau} - e^{\tau} \Big|_0^t = e^t + te^t - e^t = te^t$$

entonces

$$\bar{w}_p = \begin{bmatrix} te^t - e^t + 1 \\ te^t \end{bmatrix}$$

Finalmente la solución del sistema es $\bar{w} = \bar{w}_h + \bar{w}_p$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} te^t + 1 \\ e^t + te^t \end{bmatrix}$$

## 4.3 SISTEMAS HOMOGÉNEOS DE PRIMER ORDEN.

**1)** Utilice el método de la matriz exponencial para resolver el sistema

$$x_1' = -2x_1 - 4x_2$$
$$x_2' = x_1 - 2x_2$$

sujeto a las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ , $x_2(0) = -1$

### RESOLUCIÓN

La forma matricial del sistema es $\bar{x}' = A\bar{x}$ , el cual es un sistema homogéneo de primer orden cuya solución es de la forma $\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0)$ , donde $e^{At}$ es la matriz exponencial y $\bar{x}(0)$ es el vector de condiciones iniciales.

Del sistema es posible identificar a la matriz de coeficientes $A$ , de donde se tiene

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, se sabe que la matriz exponencial $e^{At}$ se obtiene de

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A \quad ..........(1)$$

lo que implica obtener $\beta_0$ y $\beta_1$ , que son funciones de "t" y quedan determinadas a partir de

$$e^{\lambda i t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda i \quad ...........(2)$$

donde

$\lambda i$ , $i = 1,2,...,n = 1$ son los valores característicos de la matriz de coeficientes y $n$ es el orden de la matriz.

Los $\lambda i$ se obtienen del determinante $|A - \lambda I|$ , esto es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 8$$

donde $\lambda^2 + 4\lambda + 8$ es el polinomio característico correspondiente y $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ es la ecuación característica asociada al polinomio anterior.

Al resolver la ecuación se obtienen $\lambda_1 = -2 + 2i$ , $\lambda_2 = -2 - 2i$ que son los valores característicos asociados a la matriz de coeficientes $A$ .

Enseguida se sustituye en la ecuación (2) cada uno de los valores característicos obtenidos.

Para $\lambda_1 = -2 + 2i$

$$e^{(-2+2i)t} = \beta_0 + \beta_1(-2+2i)$$

$$e^{-2t}e^{2ti} = \beta_0 - 2\beta_1 + 2\beta_1 i \quad ..........(3)$$

Considerando la representación en forma de Euler para números complejos

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\,sen\,\theta$$

$$e^{2ti} = \cos 2t + i\,sen\,2t$$

por lo que $e^{-2t}e^{2ti} = e^{-2t}(\cos 2t + i\,sen\,2t)$

$$e^{-2t}e^{2ti} = e^{-2t}\cos 2t + i\,e^{-2t}sen\,2t \quad .........(4)$$

Igualando (3) y (4)

$$\beta_0 - 2\beta_1 + 2\beta_1 i = e^{-2t}\cos 2t + i e^{-2t} sen 2t$$

Entonces, por igualdad de números complejos

$$\beta_0 - 2\beta_1 = e^{-2t}\cos 2t \quad ..........(5)$$

$$2\beta_1 = e^{-2t} sen 2t \quad ..........(6)$$

De la ecuación (6)

$$\beta_1 = \frac{1}{2}e^{-2t} sen 2t$$

Al sustituir $\beta_1$ en (5) y despejar $\beta_0$

$$\beta_0 = 2\left(\frac{1}{2}e^{-2t} sen 2t\right) + e^{-2t}\cos 2t \ ,$$

$$\beta_0 = e^{-2t} sen\,2t + e^{-2t}\cos 2t$$

Según se observa, se han determinado los valores de $\beta_0$ y $\beta_1$ a partir del valor característico $\lambda_1 = -2 + 2i$ , por lo que es innecesario realizar el proceso análogo para

$\lambda_2 = -2-2i$ , lo que nos llevaría al mismo resultado.

Enseguida se procede a obtener $e^{At}$ , esto es

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$$

$$e^{At} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_1 & -4\beta_1 \\ \beta_1 & \beta_0 - 2\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos 2t & -2e^{-2t} sen 2t \\ \frac{1}{2} e^{-2t} sen 2t & e^{-2t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

Se sabe que la solución es de la forma $\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0)$ , por lo que al sustituir se tiene

$$\bar{x} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\, sen 2t \\ \frac{1}{2} sen 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} e^{-2t}(\cos 2t + 2\, sen 2t) \\ e^{-2t}\left( \frac{1}{2} sen 2t - \cos 2t \right) \end{bmatrix}$$

**2)** Obtenga la solución general del sistema

$$x_1' = x_1 - 3x_2$$
$$x_2' = 3x_1 + 7x_2$$

utilizando el método de la matriz exponencial.

**RESOLUCIÓN**

Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, homogéneo, de representación matricial

$$\bar{x}' = A\bar{x}$$

y su solución está dada por

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) \;..........(1)$$

en este caso $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

La matriz exponencial se obtiene de

$$e^{At} = \beta_0 + \beta_1 A \;..........(2)$$

donde $A$ es la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

y $\beta_0$ , $\beta_1$ se obtiene de los valores característicos de

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 7-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

Así, la ecuación característica es

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

y sus valores característicos son $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Cada valor característico se sustituye en

$$e^{\lambda i t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda i \;...........(3)$$

para $\lambda_1 = 4$ $$e^{4t} = \beta_0 + 4\beta_1 \;...........(4)$$

ahora bien, como se tienen valores característicos repetidos, la ecuación ( 3 ) debe derivarse con respecto a $\lambda$ , esto es

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t}) = \frac{d}{d\lambda}(\beta_0 + \beta_1 \lambda)$$

$$t e^{\lambda t} = \beta_1$$

en esta última ecuación se sustituye $\lambda_2 = 4$

$$t e^{4t} = \beta_1$$

y de la ecuación (4)

$$\beta_0 = e^{4t} - 4\beta_1$$

$$\beta_0 = e^{4t} - 4te^{4t}$$

Obtenidos las funciones $\beta_0$ y $\beta_1$ es posible determinar la matriz exponencial

$$e^{At} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 & -3\beta_1 \\ 3\beta_1 & \beta_0 + \beta_1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $\beta_0$ y $\beta_1$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{4t} - 3te^{4t} & -3te^{4t} \\ 3te^{4t} & e^{4t} + 3te^{4t} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la solución general es:

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} e^{4t} - 3te^{4t} & -3te^{4t} \\ 3te^{4t} & e^{4t} + 3te^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = e^{4t}\left[k_1 - t(3k_1 + 3k_2)\right]$$

$$x_2 = e^{4t}\left[k_2 + t(3k_1 + 3k_2)\right]$$

y si consideramos

$$c_1 = k_1 \ , \quad c_2 = k_2 \ , \quad C_3 = 3k_1 + 3k_2$$

entonces

$$x_1 = e^{4t}\,(C_1 - C_3 t)$$

$$x_2 = e^{4t}\,(C_2 + C_3 t)$$

**3)** Escoger la opción que contenga la solución correcta del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$ y determine la solución particular para $t = 0$ si $x(0) = 1$

y $y(0) = 2$ .

$$A)\begin{cases} x(t) = e^{t}(c_1\cos 2t + c_2 sen 2t) \\ y(t) = e^{t}[(c_1 - c_2)\cos 2t - (c_1 - c_2) sen 2t] \end{cases}$$

$$B)\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} \\ y(t) = -3c_1 e^{t} + 2c_2 e^{t} \end{cases}$$

$$C)\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t}\cos t + (c_1 - 2c_2)e^{2t} sen t \\ y(t) = c_2 e^{2t}\cos t + (c_1 - c_2)e^{2t} sen t \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN**

Del sistema, el cual es homogéneo, se tiene la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya ecuación característica asociada está dada por $\det(A - \lambda I) = 0$
es decir

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 2$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 + i, \ \lambda_2 = 2 - i$$

Estas raíces permiten obtener términos como $e^{2t}\cos t$ y $e^{2t} sen t$ , por lo que la solución del sistema los debe contener.
Considerando las diferentes opciones, la única posible es la del inciso (C) y al aplicar las condiciones iniciales dadas se llega a

$C_1 = 1$ , $C_2 = 2$

por lo que la solución particular resulta

$$x(t) = e^{2t}\cos t - 3e^{2t} sen t$$
$$y(t) = 2e^{2t}\cos t - e^{2t} sen t$$

**4)** Si el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' &= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

tiene como matriz exponencial

$$e^{At} = \begin{bmatrix} t+1 & t & t \\ -2t & -2t+1 & -2t \\ t & t & t+1 \end{bmatrix}$$

obtener las funciones $\beta_k(t)$ $\forall$ $k = 0,1,2$ tal que $e^{\lambda_j t} = \sum_{k=0}^{2} (\lambda_i^k \ \beta_k(t))$

## RESOLUCIÓN

Se tiene un sistema homogéneo de primer orden de la forma

$$\overline{x'} = A\overline{x}$$

del cual se identifica a la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y se obtiene la matriz $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Las funciones $\beta_k$ se obtienen a partir de

$$e^{\lambda_j t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_j + \beta_2 \lambda_j^2 \quad ..........(A)$$

por lo que se requieren los valores característicos asociados a la matriz $A$ .
Entonces se tiene

$$\det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\,[(-2-\lambda)(1-\lambda)+2\,]$$

$$=-1\,[-2(1-\lambda)+2\,]+[-2-(-2-\lambda)]$$

$$=\lambda^3$$

así, la ecuación característica es $\lambda^3 = 0$ y los valores característicos son

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , que son valores reales repetidos.

Al tener valores característicos repetidos 3 veces, se deriva la ecuación ( A ) 2 veces respecto a $\lambda$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}e^{\lambda t} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}\right) = \frac{d^2}{d\lambda^2} = (\,\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2\,)$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}e^{\lambda t} = \frac{d}{d\lambda}(te^{\lambda t}) = \frac{d}{d\lambda} = (\,\beta_1 + 2\beta_2\lambda\,) \;\ldots\ldots\ldots..(B)$$

Finalmente

$$t^2e^{\lambda t} = 2\beta_2 \;\ldots\ldots\ldots..(C)$$

Enseguida se sustituye en (A), (B) y (C) el valor $\lambda = 0$ y se obtiene

$\beta_0 = 1$ , $\beta_1 = t$ y $\beta_2 = \dfrac{t^2}{2}$

que son las funiones pedidas.

## 4.4 SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS DE PRIMER ORDEN.

**1)** Obtenga la solución del sistema $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}(t)$

sujeto a las condiciones $\bar{x}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ , si la matriz exponencial correspondiente es

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & t\,e^{2t} \\ -t\,e^{2t} & (1-t)\,e^{2t} \end{bmatrix}$$

y el vector de términos independientes es $\bar{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**RESOLUCIÓN**

La forma $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{b}(t)$ corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneo, cuya solución es de la forma

$$\bar{x} = e^{A(t-t_0)}\,\bar{x}(t_0) + \int_0^{t-t_0} e^{A\tau}\,\bar{b}(t-\tau)\,d\tau$$

donde $t_0$ indica que las condiciones iniciales ocurren en $\bar{x}(t_0)$ .

En este caso se tiene como dato la matriz exponencial y el vector de condiciones en $t_0 \neq 0$

Sabemos que la solución del sistema homogéneo asociado es

$$\bar{x}_h = e^{A(t-t_0)}\,\bar{x}(t_0)$$

entonces para los datos conocidos

$$\bar{x}_h = e^{A(t-1)}\,\bar{x}(1)$$

$$\bar{x}_h = e^{2(t-1)}\begin{bmatrix} 1-(t-1) & t-1 \\ -(t-1) & 1-(t-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_h = e^{2(t-1)}\begin{bmatrix} t & t-1 \\ -t+1 & 2-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_h = e^{2(t-1)}\begin{bmatrix} 2t \\ 2-2t \end{bmatrix}$$

En lo que respecta a la solución particular del sistema no homogéneo, está dada por

$$\bar{x}_p = \int_0^{t - t_0} e^{A\tau}\, \bar{b}(t - \tau)\, d\tau$$

En esta expresión conviene trabajar el integrando de manera que tome una forma más sencilla para integrar.
Realizando el producto

$$e^{A\tau}\bar{b}(t-\tau) = \begin{bmatrix} (1+\tau)e^{2\tau} \\ -\tau e^{2\tau} \end{bmatrix}$$

Enseguida procedemos a efectuar la integral, teniendo presente que la integral de una matriz de funciones se obtiene integrando cada uno de los elementos de dicha matriz. Para el primer elemento se tiene

$$\int_0^{t-1} (1 + \tau) e^{2\tau} d\tau = \int_0^{t-1} e^{2\tau} d\tau + \int_0^{t-1} \tau e^{2\tau} d\tau$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2\tau}\right]_0^{t-1} + \left[\frac{1}{2}\tau e^{2\tau} - \frac{1}{4} e^{2\tau}\right]_0^{t-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2(t-1)} - e^0\right) + \left[\frac{1}{2}(t-1)e^{2(t-1)} - \frac{1}{4}e^{2(t-1)} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{2(t-1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t e^{2(t-1)} - \frac{1}{2} e^{2(t-1)} * \frac{1}{4} e^{2(t-1)} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} t e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} e^{2(t-1)} - \frac{1}{4}$$

Para el siguiente elemento

$$\int_0^{t-1} -\tau e^{2\tau} d\tau = -\left[\frac{1}{2}\tau e^{2\tau} - \frac{1}{4} e^{2\tau}\right]_0^{t-1}$$

$$= -\left[\frac{1}{2}(t-1)e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} e^{2(\tau-1)} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2} t e^{2(t-1)} - \frac{1}{2} e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} e^{2(\tau-1)} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} t e^{2(t-1)} + \frac{3}{4} e^{2(\tau-1)} + \frac{1}{4}$$

Entonces la integral

$$\int_0^{t - 1} e^{A\tau}\, \bar{b}(t - \tau)\, d\tau$$

da por resultado

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}te^{2(t-1)} - \frac{1}{4}e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} \\ -\frac{t}{2}e^{2(t-1)} + \frac{3}{4}e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\bar{x}_p = \begin{bmatrix} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la forma de la solución del sistema es

$$\bar{x} = \bar{x}_h + \bar{x}_p$$

Y de acuerdo a los resultados previos se obtiene finalmente

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \left(\frac{5t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{5t}{2} + \frac{11}{4}\right)e^{2(t-1)} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

que es la solución del sistema.

**2)** Aplique el método de la matriz exponencial para resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x_1(0) = 10$ , $x_2(0) = 5$ , si se sabe que

$$e^{At} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{5t} + 2 & 3e^{5t} - 3 \\ 2e^{5t} - 2 & 2e^{5t} + 3 \end{bmatrix}$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene un sistema no homogéneo de primer orden cuya representación matricial es $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}(t)$ , donde la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

y el vector de términos independientes es

$$\bar{b}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Asimismo, el vector de condiciones iniciales es

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Para un sistema de este tipo, con condiciones iniciales en $\bar{x}(0)$, la solución es de la forma

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A\tau}\bar{b}(t - \tau)\,d\tau$$

donde identificamos la solución del sistema homogéneo asociado

$$\bar{x}_n = e^{At}\bar{x}(0)$$

y una solución particular del sistma no homogéneo asociado

$$\bar{x}_p = \int_0^t e^{A\tau}\bar{b}(t - \tau)\,d\tau$$

Considerando que parte de la información que se proporciona es la matriz exponencial $e^{At}$, obtenemos

$$\bar{x}_h = e^{At}\bar{x}(0) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{5t} + 2 & 3e^{5t} - 3 \\ 2e^{5t} - 2 & 2e^{5t} + 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones

$$\bar{x}_h = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 45e^{5t} + 5 \\ 30e^{5t} - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9e^{5t} + 1 \\ 6e^{5t} - 1 \end{bmatrix}$$

En lo que respecta a $\bar{x}_p$, se tiene que calcular la integral de una matriz, que corresponde al integrando $e^{A\tau}\bar{b}(t - \tau)$ el cual inicialmente se obtiene de la siguiente manera:

$$e^{A\tau}\bar{b}(t - \tau)\,d\tau = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{5\tau} + 2 & 3e^{5\tau} - 3 \\ 2e^{5\tau} - 2 & 2e^{5\tau} + 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3e^{5\tau} + 2 \\ 2e^{5\tau} - 2 \end{bmatrix}$$

Enseguida integramos

$$\int_0^t e^{At}\bar{b}(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{5\tau}+2 \\ 2e^{5\tau}+2 \end{bmatrix} d\tau$$

Para cada uno de los términos se tiene

$$\int_o^t (3e^{5\tau}+2)\,d\tau = \left[\frac{3}{5}e^{5\tau}+2\tau\right]_0^t = \frac{3}{5}e^{5t} - \frac{3}{5} + 2t$$

$$\int_o^t (2e^{5\tau}-2)\,d\tau = \left[\frac{2}{5}e^{5\tau}-2\tau\right]_0^t = \frac{2}{5}e^{5t} - \frac{2}{5} - 2t$$

Por lo que

$$\bar{x}_p = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}e^{5t}+2t-\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}e^{5t}-2t-\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\bar{x} = \bar{x}_h + \bar{x}_p$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 9e^{5t}+1 \\ 6e^{5t}-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5}e^{5t}+2t-\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}e^{5t}-2t-\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{48}{5}e^{5t}+2t+\frac{2}{5} \\ \frac{32}{5}e^{5t}-2t-\frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

**3)** Resuelva el sistema

$$x' = x - y$$
$$y' = x + + 3y - 1$$

sujeto a $x(0) = 1$ , $y(0) = 0$

## RESOLUCIÓN

Se tiene un sistema de primer orden no homogéneo que se puede expresar también de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}(t)$$

y es fácil así identificar los diferentes elementos que intervienen en su solución .
Para un sistema no homogéneo, su solución es de la forma

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A\tau}\bar{b}(t-\tau)\,d\tau$$

donde $e^{At}$ es la matriz exponencial y se obtiene considerando las ecuaciones

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A \quad \text{.........(A)}$$

$$e^{\lambda i t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_i \quad \text{.........(B)}$$

Es necesario determinar los valores característicos correspondientes a la matriz de coeficientes, por lo que se calcula

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

de donde

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Enseguida se sustituye $\lambda_1 = 2$ en la ecuación (B)

$$e^{2t} = \beta_0 + 2\beta_1 \quad \text{.........(C)}$$

Para tener otra ecuación que permita obtener las funciones $\beta_0$ y $\beta_1$ , se deriva la ecuación (B) con respecto a $\lambda$ ,

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t}) = \beta_1$$

$$te^{\lambda t} = \beta_1$$

y se sustituye $\lambda_2 = 2$ por lo que

$$\beta_1 = te^{2t}$$

asimismo, se sustituye $\beta_1$ en (C) de donde resulta

$$\beta_0 = e^{2t} - 2te^{2t}$$

Luego de obtener estas funciones se procede a calcular la matriz exponencial, por lo que conviene desarrollar $e^{At}$ de la siguiente manera

$$e^{At} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \beta_0 + 3\beta_1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} - te^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{bmatrix}$$

por lo que la solución del sistema se expresa como

Al efectuar operaciones

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} - te^{2t} \\ te^{2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \tau e^{2\tau} \\ -e^{2\tau} - \tau e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} - te^{2t} \\ te^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau}{2}e^{2\tau} - \frac{1}{4}e^{2\tau} \\ -\frac{1}{2}e^{2\tau} - \frac{\tau}{2}e^{2\tau} + \frac{1}{4}e^{2\tau} \end{bmatrix}_0^t$$

Finalmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

**4)** Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x_1' = 3x_1 + x_2 + f_1(t)$$
$$x_2' = -3x_2 + f_2(t)$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ , $x_2(0) = 0$ Obtener las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tales que la solución del sistema sea:

$$x_1 = \frac{1}{9}(e^{3t} - 1 - 3t)$$
$$x_2 = 0$$

**RESOLUCIÓN**

El sistema en cuestión es de primer orden, no homogéneo y se conoce su solución.
A partir de la representación matricial del sistema

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{f}(t)$$

se tiene que

$$\bar{f}(t) = \bar{x}' - A\bar{x}$$

donde el primer miembro constituye la incógnita en cuestión. De la solución que es dato, obtenemos el vector $\bar{x}'$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(e^{3t} - 1 - 3t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}' = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

asimismo, de la matriz de coeficientes $A$ y el vector $\bar{x}$

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(e^{3t} - 1 - 3t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} - t \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces, al sustituir en $\bar{f}(t)$ :

$$\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} - t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$f_1(t) = t$$

$$f_2(t) = 0$$

**5)** Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = x - 3y - 9e^t \\ y' = 3x + y + 9e^t \end{cases}$$

del cual se sabe que su respectiva matriz exponencial es

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos 3t & -sen\, 3t \\ sen\, 3t & \cos 3t \end{bmatrix}$$

Determine la solución general del sistema.

**RESOLUCIÓN**

Se tiene un sistema no homogéneo de la forma

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}(t)$$

y su solución está dada por

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\bar{b}(\tau)\,d\tau$$

En este caso no se conoce el vector de coeficientes iniciales $\bar{x}(0)$ , por lo que es conveniente expresarlo en términos de elementos no especificados, es decir

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Dado que se conoce la matriz exponencial, la solución del sistema homogéneo asociado $\bar{x}_h$ puede obtenerse de la siguiente manera

$$\bar{x}_h = e^{At}\bar{x}(0) = e^t \begin{bmatrix} \cos 3t & -sen\,3t \\ sen\,3t & \cos 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos 3t - y_0\, sen\,3t \\ x_0\, sen\,3t + y_0 \cos 3t \end{bmatrix}$$

Para el sistema no homogéneo, una solución particular $\bar{x}_p$ se obtiene según se indica:

$$\bar{x}_p = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\bar{b}(\tau)\,d\tau$$

por lo que se obtienen inicialmente los elementos del integrando, esto es,

$$e^{A(t-\tau)}\bar{b}(\tau) = e^{(t-\tau)} \begin{bmatrix} \cos 3(t-\tau) & -sen\,3(t-\tau) \\ sen\,3(t-\tau) & \cos 3(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9e^{\tau} \\ 9e^{\tau} \end{bmatrix}$$

$$= 9e^t \begin{bmatrix} -\cos(3t-3\tau) - sen\,3(t-\tau) \\ -sen(3t-3\tau) + \cos(3t-3\tau) \end{bmatrix}$$

Posteriormente se integra esta matriz de funciones:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}\bar{b}(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$I_1 = 9e^t \int_0^t [\,-\cos(3t-3\tau) - sen(3t-3\tau)\,]\,d\tau$$

$$I_2 = 9e^t \int_0^t [\,-sen(3t-3\tau) + \cos(3t-3\tau)\,]\,d\tau$$

Para $I_1$ se tiene

$$I_1 = -9e^t \left[ \int_0^t (\cos 3t \cos 3\tau + sen\, 3t\, sen\, 3\tau - 3\tau)\, d\tau + \right.$$
$$\left. \int_0^t (sen\, 3t \cos 3\tau - \cos 3t\, sen\, 3\tau)\, d\tau \right]$$

$$= -9e^t \left[ (\cos 3t + sen\, 3t) \int_0^t \cos 3\tau\, d\tau + \right.$$
$$\left. (sen\, 3t - \cos 3t) \int_0^t (sen\, 3\tau)\, d\tau \right]$$

$$= -9e^t \left[ \frac{1}{3} (\cos 3t + sen\, 3t)\, sen\, 3\tau \,\Big|_0^t \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3} (sen\, 3t - \cos 3t) \cos 3\tau \,\Big|_0^t \right]$$

$$= -3e^t (\cos 3t + sen\, 3t)\, sen\, 3t + 3e^t (sen\, 3t - \cos 3t)(\cos 3t - 1)$$

Efectuando operaciones y simplificando resulta

$$I_1 = 3e^t (\cos 3t - sen\, 3t - 1)$$

De manera similar para $I_2$ se tiene

$$I_2 = 9e^t \left[ \int_0^t (\cos 3t \cos 3\tau + sen\, 3t\, sen\, 3\tau)\, d\tau + \right.$$
$$\left. - \int_0^t (sen\, 3t \cos 3\tau - \cos 3t\, sen\, 3\tau)\, d\tau \right]$$

$$= 9e^t \left[ (\cos 3t - sen\, 3t) \int_0^t \cos 3\tau\, d\tau + \right.$$
$$\left. (sen\, 3t + \cos 3t) \int_0^t (sen\, 3\tau)\, d\tau \right]$$

$$= -9e^t \left[ \frac{1}{3} (\cos 3t - sen\, 3t)\, sen\, 3\tau \,\Big|_0^t \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3} (sen\, 3t + \cos 3t) \cos 3\tau \,\Big|_0^t \right]$$

$$= 3e^t (\cos 3t - sen\, 3t)\, sen\, 3t - 3e^t (sen\, 3t + \cos 3t)(\cos 3t - 1)$$

Efectuando operaciones y simplificando resulta

$$I_2 = 3e^t (-1 + sen\, 3t + \cos 3t)$$

Entonces, una solución particular del sistema no homogénea es

$$\bar{x}_p = \begin{bmatrix} 3\,e^t\,(\cos 3t - sen\,3t - 1) \\ 3\,e^t\,(\cos 3t + sen\,3t - 1) \end{bmatrix}$$

por lo que la solución es

$$\bar{x} = \bar{x}_h + \bar{x}_p$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} e^t\left(x_0 \cos 3t - y_0\, sen\,3t\right) + 3e^t(\cos 3t - sen\,3t - 1) \\ e^t\left(x_0\, sen\,3t - y_0 \cos 3t\right) + 3e^t(\cos 3t + sen\,3t - 1) \end{bmatrix}$$

**6)** Si $[e^{At}]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$ es la matriz inversa de la matriz exponencial $e^{At}$ de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + f(t) \\ x_2' &= 2x_2 + 4e^{2t} \end{aligned}$ y una solución particular del sistema es

$$\bar{x}_p(t) = \begin{bmatrix} (3t + 2t^2)\,e^{2t} \\ g(t) \end{bmatrix} .$$

Obtener las funciones $f(t)$ y $g(t)$

**RESOLUCIÓN**

Del sistema

$$x_1' = 2x_1 + x_2 + f(t) \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x_2' = 2x_2 + 4e^{2t} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

se resuelve la ecuación (2)

$$x_2' - 2x_2 = 4\,e^{2t}$$

que es no homogénea de primer orden, de la forma

$$x_2' - P(t)\,x_2 = Q(t)$$

cuya solución está dada por

$$x_2 = h_{2h} + x_{2p}$$

donde

$$x_{2h} = C_1 e^{-\int P(t)dt}$$

$$x_{2h} = C_1 e^{\int 2dt} = C_1 e^{2t}$$

y también

$$x_{2p} = e^{-\int P(t)dt} \int Q(t) e^{\int P(t)dt} dt$$

$$x_{2p} = e^{2t} \int 4 e^{2t} e^{-\int 2dt} dt$$

$$x_{2p} = e^{2t}(4\,t)$$

$$x_{2p} = 4 t e^{2t}$$

Entonces, la solución general de (2) es

$$x_{2h} = C_1 e^{2t} + 4 t e^{2t} \quad \text{............(3)}$$

sustituyendo resultado en (1)

$$x_1' - 2x_1 = C_1 e^{2t} + 4 t e^{2t} + f(t) \quad \text{...........(4)}$$

Por otro lado, de $\bar{x}_p(t)$ se tiene

$$x_1 = (3t + 2t^2) e^{2t}$$

y al derivar esta última ecuación

$$x_1' = (3t + 2t^2) 2 e^{2t} + e^{2t}(3 + 4t)$$

$$x_1' = (3 + 10t + 4t^2) e^{2t}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_1' - 2x_1 &= (3 + 10t + 4t^2) e^{2t} - (6t + 4t^2) e^{2t} \\ &= (3 + 4t) e^{2t} \end{aligned} \quad \text{........... (5)}$$

Igualando (4) y (5)

$$\begin{aligned} &C_1 e^{2t} + 4 t e^{2t} + f(t) = (3 + 4t) e^{2t} \\ &f(t) = (3 + 4t) e^{2t} - (C_1 + 4t) e^{2t} \\ &f(t) = (3 - C_1) e^{2t} \end{aligned}$$

y de la ecuación (3) resulta

$$g(t) = (C_1 + 4t)e^{2t}$$

que son las funciones buscadas.

**7)** Resuelva el sistema

$$x_1' = x_2 + 1$$

$$x_2' = x_1 + e^t$$

sujeto a las condiciones iniciales $x_1(0) = C_1$ , $x_2(0) = C_2$ , si la matriz exponencial correspondiente es

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix}$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene un sistema no homogéneo de la forma

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}(t)$$

y su solución está dada por

$$\bar{x} = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A\tau} b(t - \tau)\, d\tau$$

$$\bar{x} = \bar{x}_h + \bar{x}_p$$

Del sistema se identifican

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \bar{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}$$

y en este caso las condiciones iniciales están dadas por elementos constantes por lo que se tiene

$$\bar{x}_h = e^{At}\bar{x}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{2}C_1\begin{bmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}C_2\begin{bmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{bmatrix}$$

por otro lado

$$e^{A\tau}\bar{b}(t-\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{\tau}+e^{-\tau} & e^{\tau}-e^{-\tau} \\ e^{\tau}-e^{-\tau} & e^{\tau}+e^{-\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ e^{(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones

$$e^{A\tau}\bar{b}(t-\tau) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{\tau}+e^{-\tau}+e^{t}-e^{-2\tau}e^{t} \\ e^{\tau}-e^{-\tau}+e^{t}+e^{-2\tau}e^{t} \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\bar{x}_p = \int_0^t e^{A\tau}\bar{b}(t-\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\int_0^t (e^{\tau}+e^{-\tau}+e^{t}-e^{-2t}e^{t})\,d\tau \\ \frac{1}{2}\int_0^t (e^{\tau}-e^{-\tau}+e^{t}+e^{-2t}e^{t})\,d\tau \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2te^{t}+e^{t}-e^{-t} \\ -4+2te^{t}+3e^{t}+e^{-t} \end{bmatrix}$$

finalmente resulta

$$\bar{x} = \bar{x}_h + \bar{x}_p$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}C_1\begin{bmatrix} e^{t}+e^{-t} \\ e^{t}-e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}C_2\begin{bmatrix} e^{t}-e^{-t} \\ e^{t}+e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2te^{t}+e^{t}-e^{-t} \\ -4+2te^{t}+3e^{t}+e^{-t} \end{bmatrix}$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1)** Dada la matriz exponencial

$$e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos t & -sent \\ sent & \cos t \end{bmatrix}$$

obtenga los valores de $\beta_0$ , $\beta_1$ , tales que $e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$ , así como la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

**Solución.**

$$\beta_0 = e^{2t}\,(\cos t - 2\,sent)$$
$$\beta_1 = e^{2t}\,(sen\,t)$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**2)** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_1 = x_2 + 1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \cot t$$

con las condiciones $x_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ , $x_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**Solución.**

$$x_1 = sen\,t\left(Ln\left(\frac{sen\,t}{\cos t + 1}\right)\right)$$
$$x_2 = \cos t\left(Ln\left(\frac{sen\,t}{\cos t + 1}\right)\right)$$

**3)** Obtenga la matriz exponencial $e^{At}$ , donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Solución.**

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{e^{2t} - 1}{2} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ t & \dfrac{e^{2t} - 1 - 2t}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

**4)** Utilice la matriz exponencial para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_1 = x_2 + e^{3t}$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2$$

con las condiciones $x_1(0) = 1$ , $x_2(0) = 0$

**Solución.**

$$x_1 = \frac{1}{16}(4te^{3t} + 9e^{-t} + 7e^{3t})$$
$$x_2 = \frac{1}{16}(12te^{3t} - 9e^{-t} + 9e^{3t})$$

**5)** Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

a) verifique si se cumple $e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

b) de acuerdo con el resultado del inciso a) ¿se puede afirmar que la expresión $e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ es falsa para toda matriz cuadrada. Justifique la respuesta.

**Solución.**

La igualdad no se cumple sólo se cumple cuando las matrices $A$ y $B$ son conmutativas.

**6)** Dada la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 1$ ; sujeta a $y(0) = 1$ ; $y'(0) = -1$ . Obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales lineal de primer orden equivalente y resuelvalo.

**Solución.**

$$x = 1 - e^{-t}$$
$$y = x' = e^{-t}$$

**7)** Transforme la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\cos t$ en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente.

**Solución.**

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

**8)** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = z + x$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y$$

**Solución.**

$$x = \frac{1}{a}(C_1(6e^{-t} + 3e^{2t}) + C_2(-3e^{-t} + 3e^{2t}) + C_3(-3e^{-t} + 3e^{2t}))$$
$$y = \frac{1}{a}(C_1(-3e^{-t} + 3e^{2t}) + C_2(6e^{-t} + 3e^{2t}) + C_3(-3e^{-t} + 3e^{2t}))$$
$$z = \frac{1}{a}(C_1(-3e^{-t} + 3e^{2t}) + C_2(-3e^{-t} + 3e^{2t}) + C_3(6e^{-t} + 3e^{2t}))$$

**9)** Si se sabe que para $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, la matriz exponencial

$$e^{At} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{3t} + 4e^{-2t} & -2e^{3t} + 2e^{-2t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-2t} & 4e^{3t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

calcule la solución del sistema $\begin{matrix} (D+1)x + 2y = 0 \\ 2x + (D-2)y = t \end{matrix}$ que cumpla con las condiciones

$x(0) = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad .$

**Solución.**

$$x = -\frac{2}{45}e^{3t} + \frac{1}{10}e^{-2t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{18}$$
$$y = \frac{4}{45}e^{3t} + \frac{1}{20}e^{-2t} - \frac{1}{6}t - \frac{5}{36}$$

**10)** Dada la ecuación diferencial $y^{IV} - 5y^{'''} + 7y' - 5y + 2e^{-t} = 0$

obtenga un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente y expresarlo en forma matricial.

**Solución.**

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

# TEMA 5

# TRANSFORMADA DE LAPLACE

## 5.1 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

**1)** Aplique la definición para obtener la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = (1 + e^{2t})^2$$

**RESOLUCIÓN**

La función $f(t)$ se puede expresar también de la siguiente manera:

$$f(t) = 1 + 2e^{2t} + e^{4t}$$

y la definición de Transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t) dt$$

Entonces, al aplicar la definición a la función dada se tiene

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 + 2e^{2t} + e^{4t})\, dt$$

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-st} \ (1 + 2e^{2t} + e^{4t})\, dt$$

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \lim_{b \to \infty} \left[ \int_0^{b} e^{-st} dt + 2\int_0^{b} e^{-st} e^{2t} dt + \int_0^{b} e^{-st} e^{4t}\, dt \right]$$

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \lim_{b \to \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^b + 2\int_0^{b} e^{-(s-2)t} dt + \int_0^{b} e^{-(s-4)t}\, dt \right]$$

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \lim_{b \to \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_o^b - \frac{2}{(s-2)} e^{-(s-2)t} \Big|_0^b - \frac{1}{(s-4)} e^{-(s-4)t} \Big|_0^b \right]$$

Valuando en los extremos de integración y aplicando el límite a cada uno de los términos

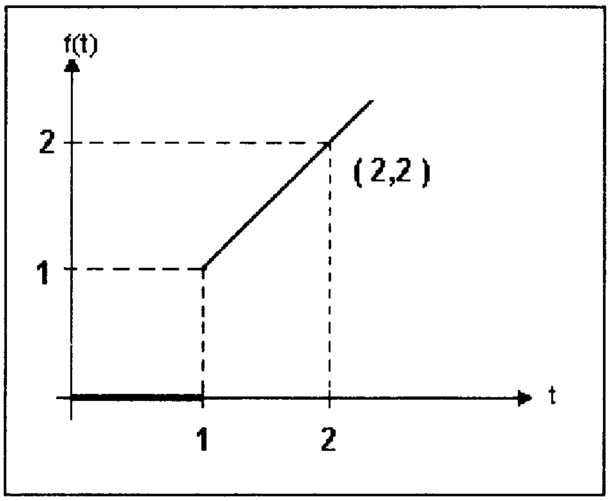
$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \} = \lim_{b\to\infty}\left[\ -\frac{1}{s}\ (e^{-sb} - 1) - \frac{2}{(s-2)}(e^{-(s-2)b} - 1) - \frac{1}{(s-4)}(e^{-(s-4)b} - 1)\right]$$

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-4}$$

Así resulta

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \} = F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-4}$$

**2)** Dada la gráfica de la función $f(t)$, determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ utilizando la definición




**RESOLUCIÓN**

La función mostrada se expresa en términos de su regla de correspondencia de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ t & t \ge 1 \end{cases}$$

entonces, al aplicar la definición

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st}(0)\,dt + \int_1^\infty t\,e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \} = \lim_{b\to\infty}\left[\ \int_1^b t\,e^{-st}dt\ \right]$$

Integrando por partes

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{b\to\infty}\left[ -\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}dt \right]_1^b$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{b\to\infty}\left[ -\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}\,e^{-st} \right|_1^b$$

Valuando en los extremos de integración y aplicando el límite resulta

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \} = \lim_{b\to\infty}\left[ -\frac{b}{s}e^{-sb} - \frac{1}{s^2}e^{-sb} + \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s} \right]$$

$$\mathcal{L}\{\ f(t)\ \} = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$\Rightarrow F(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

**3)** Aplique la definición para obtener $\mathcal{L}\{\ f(t)\ \}$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \cos t & t \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN**

$$\mathcal{L}\ \{\ f(t)\ \} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st}(0)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty e^{-st}\cos t\,dt$$

$$\mathcal{L}\ \{\ f(t)\ \} = \lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^b e^{-st}\cos t\,dt$$

Integrando por partes se tiene

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} e^{-st}\cos t\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[ -\frac{\cos t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s}\left( -\frac{sent}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}\cos t\,dt\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{b}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} e^{-st}\cos t\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[ -\frac{\cos t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s^2}\,sent e^{-st} - \frac{1}{s^2}\int e^{-st}\cos t\,dt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{b}$$

Agrupando términos semejantes

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} e^{-st}\cos t\,dt = \lim_{b\to\infty}\left( -\frac{\cos t}{s}e^{-st} + \frac{sen\,t}{s^2}\,e^{-st}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{b}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} e^{-st}\cos t\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\dfrac{-s\cos t\,e^{-st} + sen\,t\,e^{-st}}{s^2}}{\dfrac{s^2+1}{s^2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{b}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} e^{-st}\cos t\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-s\cos t\,e^{-st} + sen\,t\,e^{-st}}{s^2+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-s\cos b\,e^{-sb} + sen\,b\,e^{-sb} - s\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s} + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\right]$$

Aplicando el límite en segundo miembro

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-st}\cos t\,dt = \frac{-e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$$

Finalmente

$$\mathcal{L}\{\,f(t)\,\} = F(s) = -\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

## 5.2 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE COMO UN OPERADOR LINEAL.

**1)** Sin utilizar la definición, obtenga

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos ht}{e^{-3t}}\right\}$$

**RESOLUCIÓN**

Es conveniente expresar la función coseno hiperbólico en términos de la función exponencial, por lo que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos ht}{e^{-3t}}\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{t}+e^{-t}}{2e^{-3t}}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos ht}{e^{-3t}}\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})e^{3t}\right\}$$

dado que la tranformada de Laplace es una tranformación lineal se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos ht}{e^{-3t}}\right\}=\frac{1}{2}[\,\mathcal{L}\{e^{4t}\}+\mathcal{L}\{e^{2t}\}\,]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s-2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s-2+s-4}{s^2-6s+8}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2(s-3)}{s^2-6s+8}\right]$$

De donde

$$F(s)=\frac{s-3}{s^2-6s+8}$$

## 5.3 TEOREMA DE TRASLACIÓN EN EL DOMINIO DE "s".

**1)** Determine

a) $\mathscr{L}\ \{\ e^{t-2}\,sen\,3t\ \}$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s-2s+5}\right\}$

**RESOLUCIÓN**

a) La función a transformar se expresa también como

$$f(t) = e^{t}e^{-2}\,sen\,3\,t$$

por lo que se tiene

$$\mathscr{L}\{\ e^{-2}e^{t}\,sen\,3\,t\ \}$$

De la linealidad de la transformada de Laplace resulta

$$e^{-2}\ \mathscr{L}\{\ e^{t}\,sen\,3\,t\ \}$$

y de acuerdo al primer teorema de traslación que indica

$$\mathscr{L}\ \{\ e^{at}f(t)\ ] = F(s-a)$$

donde $\quad F(s) = \mathscr{L}\ \{\ f(t)\ \}$

se obtiene

$$\mathscr{L}\ \{\ e^{t-2}\,sen\,3\,t\ \} = e^{-2}\left[\ \frac{3}{(s-1)^2+9}\ \right]$$

$$= \frac{3\,e^{-2}}{(s-1)^2+9}$$

b) La función a antitransformar puede expresarse en términos de su denominador factorizado según se indica

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s-1)^2+4}\right\}$$

Por la linealidad de la transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s-1)^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+4}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^2+4}\right\}$$

En el segundo miembro se tiene un traslado en el denominador, por lo que es necesario realizarlo también en el numerador, y de esta forma aplicar el primer teorema de traslación; asimismo, en el segundo miembro conviene factorizar como se indica a continuación

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s-1)^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1+1}{(s-1)^2+4}\right\} + 4\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} + 5\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

y al aplicar el primer teorema de traslación en su forma inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s-1)^2+4}\right\} = e^{t}\cos(2t) + \frac{5}{2}e^{t}sen(2t)$$

**2)** Sea $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ , compruebe que $\mathscr{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as)$

donde $f(t) = t^2 + e^{(2t+1)}$

**RESOLUCIÓN**

Si $f(t) = t^2 + e^{2t}e$ , entonces

$$f\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{t}{a}\right) + e\,e^{2\left(\frac{t}{a}\right)}$$

$$= \frac{t^2}{a^2} + e\,e^{\left(\frac{2}{a}\right)t}$$

Transformando en Laplace resulta

$$\mathscr{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = \frac{1}{a^2}\,\mathscr{L}\{t^2\} = e\,\mathscr{L}\left\{e^{\left(\frac{2}{a}\right)t}\right\}$$

$$= \frac{2}{a^2s^3} + \frac{e}{s-\frac{2}{a}} = \frac{2}{a^2s^3} + \frac{e}{\frac{as-2}{a}}$$

$$= \frac{2}{a^2s^3} + \frac{ae}{as-2} \quad \text{...........(A)}$$

Por otro lado

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

y al transformar $f(t)$ se tiene

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2\} + e\,\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$= \frac{2}{s^3} + \frac{e}{s-2}$$

por lo que $F(as) = \dfrac{2}{(as)^3} + \dfrac{e}{as-2}$

y multiplicando ambos miembros por la constante $a$

$$aF(as) = \frac{2a}{a^3 s^3} + \frac{ae}{as-2}$$

$$aF(as) = \frac{2}{a^2 s^3} + \frac{ae}{as-2} \quad \text{...........(B)}$$

Al comparar (A) y (B) se comprueba que

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as)$$

## 5.4 TEOREMA DE TRASLACIÓN EN EL DOMINIO DE "t"

**1)** De un formulario de transformadas de Laplace se tiene que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{sen\,at - at\cos at}{2a^3}\right\} = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$$

y $$\mathscr{L}\left\{\frac{t\,sen\,at}{2a}\right\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$$

Utilizando las transformadas de Laplace anteriores, obtenga

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{[(s-2)^2 + 9]^2}\right\}$$

**RESOLUCIÓN**

Para obtener la transformada inversa es necesario trasladar el parámetro $s$ del numerador al traslado que presenta el mismo parámetro del denominador, es decir

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{[(s-2)^2 + 9]^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s - 2 + 2}{[(s-2)^2 + 9]^2}\right\}$$

y por la linealidad de la antitransformada se tiene

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{[(s-2)^2 + 9]^2}\right\} + 2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s-2)^2 + 9]^2}\right\}$$

Por otro lado, de las tranformadas dadas resulta

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \left\{\frac{sen\,at - at\cos at}{2a^3}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{t\,sen\,at}{2a}$$

Entonces, del segundo teorema de traslación

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{[(s^2 + 9)]^2}\right\}\Bigg|_{(s-2)\to s} = \frac{t\,sen\,3t}{2(3)}\,e^{2t} = \frac{e^{2t}\,t\,sen\,3t}{6}$$

también

$$2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[\,s^2+9\,]^2}\right\}\Bigg|_{(s-2)\to s} = 2\left[\frac{sen\,3t - 3t\cos 3t}{2(3)^3}\right]e^{2t}$$

$$= \frac{e^{2t}}{27}\,(\,sen\,3t - 3t\cos 3t\,)$$

Finalmente

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{[\,(s-2)^2+9\,]^2}\right\} = \frac{e^{2t}t\,sen\,3t}{6} + \frac{e^{2t}}{27}\,(\,sen\,3t - 3t\cos 3t\,)$$

**2)** Obtenga la transformada de Laplace de la función $x(t) = e^{-3t}\cos(2t-8)\,u(t-4)$

**RESOLUCIÓN**

La función $x(t)$ también se puede expresar de la siguiente manera:

$$x(t) = e^{-3t}\cos 2(t-4)\,u(t-4)$$

o bien

$$x(t) = e^{-3(t-4)}\,e^{-12}\cos 2(t-4)\,u(t-4)$$

del segundo teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{\,g(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}G(s)$$

entonces

$$X(s) = \mathcal{L}\{\,x(t)\,\} = \mathcal{L}\{\,e^{-3(t-4)}\,e^{-12}\cos 2(t-4)\,u(t-4)\}$$

donde

$$g(t-4) = e^{-3(t-4)}\,e^{-12}\cos 2(t-4)$$

de aqui se tiene

$$g(t) = e^{-3t}\,e^{-12}\cos 2t$$

y al transformar

$$G(s) = e^{-12}\,\mathcal{L}\{\,e^{-3s}\cos 2t\,\}$$

aplicando el primer teorema de traslación resulta

$$G(s) = e^{-12}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+4}\right]$$

y para la función buscada

$$X(s) = e^{-12} e^{-4s} \left[ \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4} \right]$$

## 5.5 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LAS FUNCIONES IMPULSO, ESCALÓN Y RAMPA.

**1)** Obtenga la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & ; \quad 1 \le t \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN**

La función también se puede escribir de la siguiente manera

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le t < 1 \\ (t-1)^2 + 1 & ; \quad 1 \le t \end{cases}$$

y en términos de la función escalón unitario resulta

$$f(t) = u(t) + u(t-1)\left[(t-1)^2 + 1\right] - u(t-1)$$

$$= u(t) + u(t-1)(t-1)^2 + u(t-1) - u(t-1)$$

al simplificar se obtiene

$$f(t) = u(t) + u(t-1)(t-1)^2$$

de esta manera la obtención de la transformada de Laplace resulta

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \mathcal{L}\{ u(t) \} + \mathcal{L}\{ u(t-1)(t-1)^2 \}$$

y del segundo teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{ u(t-a)g(t-a) \} = e^{-as}G(s) \ , \quad \text{donde} \quad G(s) = \mathcal{L}\{ g(t) \}$$

Interesa determinar

$$\mathcal{L}\{ u(t-1)(t-1)^2 \} = e^{-s}G(s)$$

para obtener $G(s)$ es necesario primero obtener $g(t)$ por lo que se tiene

$$g(t-1) = (t-1)^2 \quad \Rightarrow \quad g(t) = t^2$$

y resulta

$$G(s) = \mathcal{L}\{ t^2 \} = \frac{2}{s^3}$$

entonces

$$\mathcal{L}\{\, u(t-1)g(t-1) \,\} = \frac{2e^{-s}}{s^3}$$

y para la función $u(t)$

$$\mathcal{L}\{\, u(t) \,\} = \frac{1}{s}$$

Finalmente

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2e^{-s}}{s^3}$$

Es conveniente mencionar que la transformada obtenida, se puede determinar también empleando la definición de transformada de Laplace.

**2)** Obtenga la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & ; \quad 0 \le t < 2\pi \\ 0 & ; \quad 2\pi \le t \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN**

Para obtener $F(s)$ es posible facilitar el proceso si expresamos a la función en términos de la función escalón unitario:

$$f(t) = u(t)\cos 2t - u(t-2\pi)\cos 2t$$

pero $\cos 2t = \cos 2(t-2\pi)$

entonces

$$f(t) = (\cos 2t)u(t) - \cos 2(t-2\pi)u(t-2\pi)$$

transformando en Laplace y aplicando el segundo teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{\, f(t) \,\} = \mathcal{L}\{\, \cos 2t\, u(t) \,\} - \mathcal{L}\{\, \cos 2(t-2\pi)u(t-2\pi) \,\}$$

$$= \frac{s}{s^2+4} - e^{-2\pi s}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$$

Finalmente

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{s e^{-2\pi s}}{s^2 + 4}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4}\left(1 - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 4}\right)$$

Otra manera de obtener $F(s)$ es aplicando la definición como se indica enseguida:

$$\mathscr{L}\{ f(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} e^{-st} \cos 2t\, dt$$

Integrando dos veces por partes y simplificando

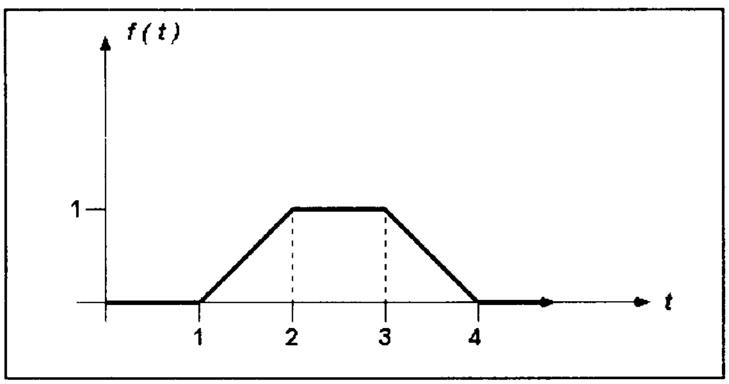
$$\int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt = \left. \frac{2 e^{-st} sen\, 2t - s e^{-st} \cos 2t}{s^2 + 4} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{s e^{-2\pi s}}{s^2 + 4}$$

Finalmente

$$\mathscr{L}\{ f(t) \} = \frac{s}{s^2 + 4}\left(1 - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 4}\right)$$

**3)** Obtenga la transformada de Laplace de la función cuya gráfica se muestra a continuación




**RESOLUCIÓN**

A partir de la gráfica se expresa la función en términos de la función rampa

$$f(t) = r(t - 1) - r(t - 2) - r(t - 3) + r(t - 4)$$

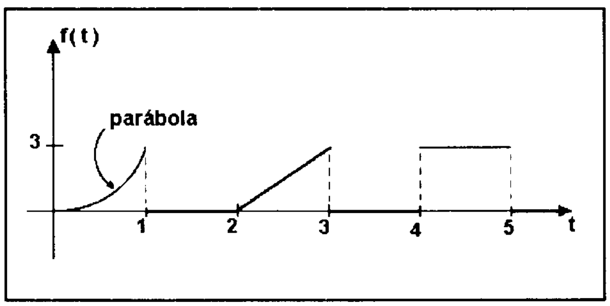
y al transformar en Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{r(t-1)\} - \mathcal{L}\{r(t-2)\} - \mathcal{L}\{r(t-3)\} + \mathcal{L}\{r(t-4)\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s})$$

**4)** Exprese la función $f(t)$, cuya gráfica se muestra en la figura, en términos de las funciones generalizadas rampa unitaria y escalón unitario.




**RESOLUCIÓN**

Para expresar a $f(t)$ en términos de las funciones generalizadas debe recordarse que

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases} \quad ; \quad u(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t\geq a \end{cases}$$

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases} \quad ; \quad r(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ t-a & t\geq a \end{cases}$$

por lo que se tiene que

$$f(t) = 3t^2u(t) - 3t^2u(t-1) + 3r(t-2) - 3u(t-3)$$
$$- 3r(t-3) + 3u(t-4) - 3u(t-5)$$

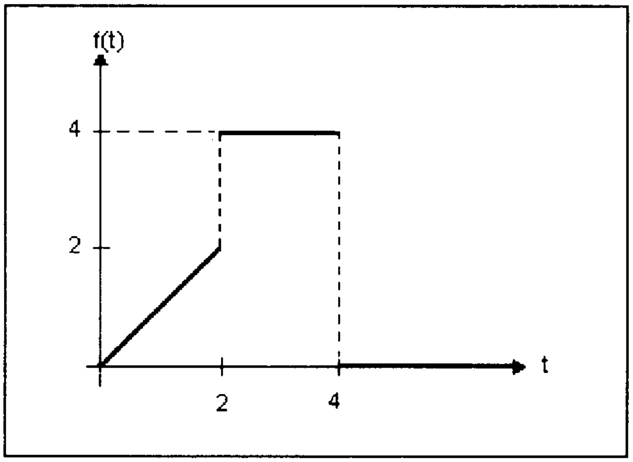
**5)** Sea $f(t) = \begin{cases} t & ; \quad 0<t<2 \\ 4 & ; \quad 2<t<4 \\ 0 & ; \quad t>4 \end{cases}$

a) Represente la función $f(t)$ en términos de funciones generalizadas rampa unitaria y escalón unitario.

b) Calcule la transformada de Laplace de $f(t)$

**RESOLUCIÓN**

Es conveniente presentar gráficamene a la función , por lo que se tiene




a) a partir de esta gráfica resulta más fácil expresar $f(t)$ en términos de las funciones $r(t)$ y $u(t)$

$$f(t) = r(t) + 2u(t-2) - r(t-2) - 4u(t-4)$$

b)

$$f(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{r(t)\} + 2\mathcal{L}\{u(t-2)\} - \mathcal{L}\{r(t-2)\} - 4\mathcal{L}\{u(t-4)\}$$

Finalmente

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{4}{s}e^{-4s}$$

## 5.6 DERIVADA DE LA TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN.

**1)** Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{ Ln\left( \frac{s+2}{s-2} \right) \right\}$

Sugerencia: Utilice el teorema de la derivada de una transformada.

**RESOLUCIÓN**

Por propiedades de la función logaritmo natural se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ Ln\left( \frac{s+2}{s-2} \right) \right\} = \mathcal{L}^{-1}\{ Ln(s+2) - Ln(s-2) \}$$

Del teorema de la derivada de una transformada

$$\mathcal{L}\{ t^n f(t) \} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \; ; \qquad F(s) = \mathcal{L} f(t)$$

y si $F(s) = Ln(s+2) - Ln(s-2)$ al derivar se tiene

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} \quad \text{...........(A)}$$

Ahora bien, si se antitransforma el teorema de referencia

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \right\} = t^n f(t)$$

para $n = 1$ resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ -\frac{dF(s)}{ds} \right\} = tf(t)$$

por lo que de la derivada obtenida en (A)

$$-\frac{dF(s)}{ds} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-2}$$

Antitransformando resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-2} \right\} = tf(t)$$

$$-e^{-2t} + e^{2t} = tf(t)$$

pero también

$$-e^{-2t} + e^{2t} = 2\,senh\,2t$$

por lo que

$$t\,f(t) = 2\,senh\,2t$$

de donde se tiene

$$f(t) = \frac{2\,senh\,2t}{t}$$

## 5.7 TEOREMA DE CONVOLUCIÓN.

**1)** Utilice el teorema de Convolución para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\}$$

**RESOLUCIÓN.**

Se tiene $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ , donde $H(s) = \dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)}$

esta función es también

$$\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

entonces se busca obtener

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right\}$$

Del teorema de Convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = f(t) * g(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Entonces se tiene

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-4}\right\} = sen2t$$

pero para resolver la integral de convolucion se reuieren las funciones

$f(\tau)$ y $g(t-\tau)$ por lo que resulta

$$f(\tau) = sen2\tau$$

$$g(t-\tau) = e^{(t-\tau)}$$

sustituyendo estas funciones en la integral de convulución

$$f(t) * g(t) = \int_0^t sen2\tau\, e^{(t-\tau)} d\tau$$

$$f(t) * g(t) = e^t \int_0^t e^{-\tau} sen\, 2\tau\, d\tau$$

La integral se calcula integrando dos veces por partes, de donde se obtiene

$$\int_0^t e^{-\tau} sen2\tau\, d\tau = \frac{1}{5}(-2e^{-t}\cos 2t - e^{-t} sen2t + 2)$$

A partir de este resultado se tiene

$$f(t) * g(t) = \frac{e^t}{5}(-2e^{-t}\cos 2t - e^{-t} sen2t + 2)$$

$$f(t) * g(t) = \frac{1}{5}(-2\cos 2t - sen2t + 2e^t)$$

De donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = -\frac{1}{5}(2\cos 2t + sen2t - 2e^t)$$

## 5.8 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

**1)** Utilice el método de la transformada de Laplace para resolver el problema de valores iniciales $y'' + 4y = sen3t$ ; $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$

**RESOLUCIÓN**

Transformando en Laplace ambos miembros de la ecuación diferencial se tiene

$$\mathcal{L}\{ y'' \} + 4\mathcal{L}\{ y \} = \mathcal{L}\{ sen3t \}$$

$$s^2 Y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4Y(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

enseguida se aplican las condiciones iniciales $y(0) = 0$ , $y'(0) = 0$
de donde resulta

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

se tiene ahora un problema de tipo algebraico donde se busca despejar a la función $y(s)$ esto es

$$Y(s)\,(s^2 + 4) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2 + 4)\,(s^2 + 9)}$$

Para obtener la solución de la ecuación diferencial se deberá antitransformar, por lo que es, necesario simplificar el segundo término de la última expresión y tener elementos que se antitransformen fácilmente; se hace entonces necesario descomponer $y(s)$ en una suma de fracciones parciales según se indica a continuación

$$\frac{3}{(s^2 + 4)\,(s^2 + 9)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}$$

de aquí resulta

$$3 = (As + B)(s^2 + 9) + (Cs + D)(s^2 + 4)$$

desarrollando el segundo miembro

$$3 = As^3 + 9As + Bs^2 + 9B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D$$

$$3 = s^3(A + C) + s^2(B + D) + s(9A + 4C) + 9B + 4D$$

y por igualdad de términos

$$A + C = 0$$

$$B + D = 0$$

$$9A + 4C = 0$$

$$9B + 4D = 3$$

resolviendo este sistema se tiene $A = 0$ , $B = \dfrac{3}{5}$ , $C = 0$ , $D = -\dfrac{3}{5}$

Entonces

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s^2 + 4} - \frac{\frac{3}{5}}{s^2 + 9}$$

Al antitransformar

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 9}\right\}$$

por lo que la solución de la ecuación diferencial es

$$y(t) = \frac{3}{10} sen 2t - \frac{3}{15} sen 3t$$

o bien

$$y(t) = \frac{3}{10} sen 2t - \frac{1}{5} sen 3t$$

**2)** Aplique la transformada de Laplace, para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 7y' + 6y = 10\,\delta(t - 2)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ , $y'(0) = 0$

## RESOLUCIÓN

Transformando en Laplace sobre ambos miembros de la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\{y''\} - 7\,\mathcal{L}\{y'\} + 6\,\mathcal{L}\{y\} = 10\,\mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$

$$s^2 Y(s) - sY(0) - Y'(0) - 7[sY(s) - Y(0)] + 6Y(s) = 10e^{-2s}$$

Al efectuar operaciones y aplicar las condiciones iniciales resulta

$$s^2 Y(s) - 7sY(s) + 6Y(s) = 10e^{-2s}$$

En esta última ecuación interesa obtener $y(s)$, por lo que se factoriza y despeja a continuación

$$Y(s)\,(s^2 - 7s + 6) = 10e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{10e^{-2s}}{s^2 - 7s + 6}$$

$$y(s) = \frac{10e^{-2s}}{(s-6)(s-1)}$$

teniendo presente que la solución de la ecuación diferencial está dada por $y(t)$, es necesario obtener la antitransformada de la función $y(s)$, esto es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10e^{-2s}}{(s+6)(s-1)}\right\}$$

La función a antitransformar puede expresarse también de la siguiente forma

$$e^{-2s}\frac{10}{(s-6)(s-1)}$$

que llevaría a la aplicación del segundo teorema de traslación en forma inversa, es decir

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}G(s)\} = g(t-a)u(t-a)$$

Para obtener $g(t)$ se requiere que $G(s)$ se antitransforme, lo que lleva a expresar a ésta última en términos de fracciones parciales:

$$G(s) = \frac{10}{(s-6)(s-1)} = \frac{A}{s-6} + \frac{B}{s-1}$$

$$10 = A(s-1) + B(s-6)$$

La obtención de las constantes $A$ y $B$ puede realizarse como se indica:

para $s = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -2$

para $s = 6 \quad \Rightarrow \quad A = 2$

Entonces, para la función $g(t)$ se tiene

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = 2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} - 2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = 2e^{6t} - 2e^{t}$$

De acuerdo al segundo teorema de traslación y a la función $y(s)$ se identifica el valor del traslado que es $a = 2$ , por lo que

$$g(t-a) = g(t-2) = 2e^{6(t-2)} - 2e^{(t-2)}$$

y para la función $y(t)$ resulta

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{10}{(s-6)(s-1)}\right\} = g(t-2)\,u(t-2)$$

por lo que finalmente

$$y(t) = [2e^{6(t-2)} - 2e^{(t-2)}]\,u(t-2)$$

**3)** Mediante el método de la transformada de Laplace, resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + y = t - (t-4)u(t-2)$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene la ecuación diferencial

$$y'' + y = t - (t-4)u(t-2)$$

Enseguida se aplica la transformada de Laplace a cada uno de los términos

$$\mathscr{L}\{y''\} + \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t\} - \mathscr{L}\{(t-4)u(t-2)\}$$

de donde se obtiene

$$s^2Y(s) - sY(0) - Y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\left(\frac{1-2s}{s^2}\right)$$

Al aplicar condiciones iniciales y reducir términos resulta

$$s^2 Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\left(\frac{1 - 2s}{s^2}\right)$$

$$Y(s)(s^2 + 1) = 1 + \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\left(\frac{1 - 2s}{s^2}\right)$$

despejando a la incógnita de interés

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)} - e^{-2s}\left[\frac{1 - 2s}{s^2(s^2 + 1)}\right]$$

Interesa obtener la antitransformada de la función $y(s)$ , esto es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\left[\frac{1 - 2s}{s^2(s^2 + 1)}\right]\right\}$$

En el segundo término a antitransformar se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\left[\frac{1 - 2s}{s^2(s^2 + 1)}\right]\right\}$$

y de acuerdo al segundo teorema de traslación en su forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}G(s)\right\} = g(t - a)u(t - a)$$

lo cual implica obtener la función $g(t)$ ; para obtenerla se considera

$$G(s) = \frac{1 - 2s}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2s &= A(s)(s^2 + 1) + B(s^2 + 1) + (Cs + D)s^2 \\ &= s^3(A + C) + s^2(B + D) + s(A) + B \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2 \\ B + D &= 0 \quad \Rightarrow \quad D = -1 \\ A &= -2 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

entonces

$$G(s) = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2s - 1}{s^2 + 1}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$g(t) = -2 + t + 2\cos t - sen t$$

Del exponencial $e^{-2s}$ se tiene $a = 2$ , por lo que la función $g(t)$ trasladada es

$$g(t-2) = -2 + (t-2) + 2\cos(t-2) - sen(t-2)$$

Finalmente, para la función solución

$$y(t) = t - [-2 + t - 2 + 2\cos(t-2) - sen(t-2)]\,u(t-2)$$

$$y(t) = t + [\,4 - t + sen(t-2) - 2\cos(t-2)]\,u(t-2)$$

**4)** Utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 3y = 1 + \delta(t-3)$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$ , $y'(0) = 1$

## RESOLUCIÓN

Inicialmente se transforma en Laplace cada uno de los términos de la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\delta(t-3)\}$$

$$s^2Y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4[\,sY(s) - Y(0)\,] + 3Y(s) = \frac{1}{s} + e^{-3s}$$

posteriormente se aplican condiciones iniciales y se simplifica, es decir,

$$s^2Y(s) - s - 1 + 4\,sY(s) - 4 + 3Y(s) = \frac{1}{s} + e^{-3s}$$

$$Y(s)\,[\,s^2 + 4s + 3\,] = \frac{1}{s} + e^{-3s} + s + 5$$

$$Y(s)\,(s+3)(s+1) = \frac{1 + se^{-3s} + s^2 + 5s}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+3)(s+1)} + \frac{se^{-3s}}{s(s+3)(s+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\, Y(s) \,\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+3)(s+1)} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-3s} \cdot \frac{1}{(s+3)(s+1)} \right\}$$

se tienen entonces dos funciones a antitransformar, a saber

$$I = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+3)(s+1)} \right\}$$

Por fracciones parciales

$$\frac{s^2 + 5s + 1}{s(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+1)}$$

$$s^2 + 5s + 1 = A(s+3)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+3)$$

para $s = 0$ : $A = \dfrac{1}{3}$

para $s = -3$ : $B = -\dfrac{5}{6}$

para $s = -1$ : $C = \dfrac{3}{2}$

por lo que resulta

$$I = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+3)} \right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)} \right\}$$

$$I = \frac{1}{3} - \frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$

Por otro lado

$$II = \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-3s} \cdot \frac{1}{(s+3)(s+1)} \right\}$$

Esta función se antitransformará considerando el segundo teorema de traslación, esto es

$$\mathcal{L}^{-1}\{\, e^{-as}G(s) \,\} = g(t-a)\,u(t-a)$$

Entonces, la función $G(s)$ es $\dfrac{1}{(s+3)(s+1)}$ , y por fracciones parciales

$$\frac{1}{(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1}$$

$$1 = A(s+1) + B(s+3)$$

para $\quad s = -1 \; : \; B = \frac{1}{2}$

para $\quad s = -3 \; : \; A = -\frac{1}{2}$

por lo que resulta $\quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ G(s) \}$

$$g(t) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s+3} \right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s+1} \right\}$$

$$g(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

y de acuerdo a la expresión $II$, se tiene de la función $e^{-3s}$ el elemento $a = 3$, por lo que es posible obtener la función $g(t)$ con traslado

$$g(t-3) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-(t-3)}$$

Así, resulta

$$II = \left[ -\frac{1}{2}e^{-3(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-(t-3)} \right]u(t-3)$$

Finalmente

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t} + \left[ \frac{1}{2}e^{-(t-3)} - \frac{1}{2}e^{-3(t-3)} \right]u(t-3)$$

**5)** Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$x'' - y'' = t^2$$
$$x'' + y'' = 4t$$

sujeto a las condiciones iniciales $\quad x(0) = 8 \;,\quad x'(0) = 0 \;,\quad y(0) = 0 \;,\quad y'(0) = 0$

**RESOLUCIÓN**

Tranformando en Laplace cada una de las ecuaciones del sistema resulta

$$\mathcal{L}\{x''\} - \mathcal{L}\{y''\} = \mathcal{L}\{t^2\}$$
$$\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{y''\} = 4\mathcal{L}\{t\}$$

$$s^2X(s) - sX(0) - X'(0) - [s^2Y(s) - sY(0) - Y'(0)] = \frac{2}{s^3}$$

$$s^2X(s) - sX(0) - X'(0) + [s^2Y(s) - sY(0) - Y'(0)] = \frac{4}{s^2}$$

enseguida se aplican condiciones iniciales y se reducen términos

$$s^2X(s) - 8s - s^2Y(s) = \frac{2}{s^3} \quad \text{.........(A)}$$

$$s^2X(s) - 8s + s^2Y(s) = \frac{4}{s^2} \quad \text{.........(B)}$$

Sumando ( A ) y ( B ) se obtiene

$$2s^2X(s) - 16s = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2}$$

de donde

$$2s^2X(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + 16s = \frac{2 + 4s + 16s^4}{2s^3}$$

$$X(s) = \frac{2 + 4s + 16s^4}{2s^5} = \frac{2(1 + 2s + 8s^4)}{2s^5}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{8}{s}$$

y al antitransformar

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} + 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{4!}t^4 + \frac{2}{3!}t^3 + 8 \quad \text{.........(C)}$$

Para obtener $Y(s)$ se puede emplear la ecuación (B), es decir

$$s^2Y(s) = \frac{4}{s^2} + s^2X(s) + 8s$$

$$s^2Y(s) = \frac{4 - s^4X(s) + 8s^3}{s^2}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{4 - s^4X(s) + 8s^3}{s^4}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^4} - X(s) + \frac{8}{s}$$

y al antitransformar

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$y(t) = 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} + 8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - x(t)$$

pero $x(t)$ ya ha sido obtenida, entonces al sustituirla se llega a

$$y(t) = \frac{4}{3!}t^3 + 8 - \frac{1}{4!}t^4 - \frac{2}{3!}t^3 - 8$$

$$y(t) = \frac{2}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}t^4 \quad \text{..........(D)}$$

por lo que (C) y (D) constituyen la solución del sistema.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1)** Obtenga la Transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & ; \ t < 5 \\ t^2 + e^t & ; \ t \geq 5 \end{cases}$

b) $g(t) = e^{3t} \cos \sqrt{5}\, t - t^2 e^{-2t} + \int_0^t sen\, \tau \, d\tau$

**Solución.**

a) $\mathcal{L}\{ f(t) \} = e^{-5s} \left[ \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{10}{s^2} + \dfrac{25}{s} + \dfrac{e^s}{s-1} \right]$

b) $\mathcal{L}\{ g(t) \} = \dfrac{s-3}{(s-3)^2 + 5} - \dfrac{2}{(s+2)^3} + \dfrac{1}{s(s^2+1)}$

**2)** Obtenga la Transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $G(s) = \dfrac{3}{s^3 + s}$ usando convolución.

b) $F(s) = \dfrac{e^{-3s} + s - 2}{s^2 - 4s - 5}$

**Sol.**

a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \dfrac{3}{s(s^2+1)} \right\} = 3 - 3 \cos t$

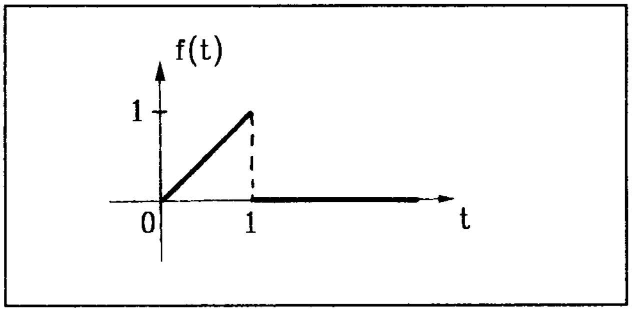
b) $f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} e^{2t} \cosh 3t & ; \ 0 \leq t < 3 \\ e^{2t} \left( \dfrac{1}{3} e^{-6} senh(3t - 9) + \cosh 3t \right) & ; \ t \geq 3 \end{cases}$

**3)** Obtenga, utilizando la transformada de Laplace, la solución de la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-t}$ que satisface las condiciones $y(0) = 2$ , $y'(0) = 1$

**Sol.**

$y(t) = 2t\, e^{-2t} - e^{-2t} + 3e^{-t}$

**4)** Utilice el método de la transformada de Laplace para obtener la solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = f(t)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ , siendo $f(t)$ la función cuya gráfica se muestra a continuación




**Solución.**

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{-1 + 2t + e^{-2t}}{4} & ; \quad 0 \le t < 1 \\ \dfrac{(1 + e^2)e^{-2t}}{4} & ; \quad t \ge 1 \end{cases}$$

**5)** Utilice la transformada de Laplace para obtener $x_1(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 + f(t) \\ x_1 &= 1 - x_2' \end{aligned} \qquad \text{donde} \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$$

sujeta a las condiciones $\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned}$

**Solución.**

$$x_1(t) = (1 - e^{(t-1)})u(t-1) \quad \text{ó bien} \quad x_1(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ -1 + e^{(t-1)} & t \ge 1 \end{cases}$$

**6)** Sea la ecuación diferencial

$$y' - 3y = e^{3t}$$

sujeta a $y(1) = 0$

Calcule $y(0)$ (use la transformada de Laplace)

**Solución.**

$$y = (t-1)e^{3t}$$
$$y(0) = -1$$

**7)** Utilice la transformada de Laplace para obtener el valor de la función $x(t)$ tal que satisfaga al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' \quad + 8y &= 2 \\ x' - 2x + y' &= e^{4t} \end{aligned}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = 0$ , $y(0) = 0$ .

**Solución.**

$$x(t) = e^{4t}(2t - 4t^2)$$

**8)** Emplee la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 9y = 6t^2 e^{-3t}$$

con $\quad y(0) = y'(0) = 0$

**Solución.**

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}t^4 e^{-3t}$$

**9)** Emplee la transformada de Laplace para resolver una de las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones dadas

$y'' + y^2 = e^{-t} \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1$

$(D+2)^2 y = e^t \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$

$y'' + \dfrac{1}{t}y' = 2 \quad ; \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0$

**Solución.**

$$y(t) = \frac{1}{9}e^t + \frac{8}{9}e^{-2t} + \frac{5}{3}te^{-2t}$$

**10)** Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$x'' + y'' = e^{2t}$$
$$2x' + y'' = -e^{2t} + \delta(t-1)$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = 0$ , $y(0) = 0$ , $x'(0) = 0$ , $y'(0) = 0$

**Solución.**

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} + te^{2t} + e^{t-1}\,senh(t-1)\,u(t-1)$$

$$y(t) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}e^{2t} - te^{2t} - e^{t-1}\,senh(t-1)\,u(t-1)$$

**11)** Utilice el método de la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 9y = 3\,sen\,t$$

si las condiciones iniciales son $y(0) = y'(0) = 0$

**Solución.**

$$y(t) = \frac{3}{8}\,sen\,t - \frac{1}{8}\,sen\,3t$$

**12)** Obtenga, mediante la transformada de Laplace, la solución del sistema

$$x_1'' + 10x_1 = 4x_2$$
$$-4x_1 + x_2'' = -4x_2$$

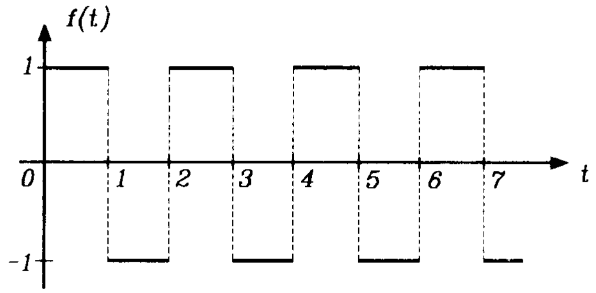
sujeto a las condiciones $x_1(0) = 0$ , $x_1'(0) = 1$ , $x_2(0) = 0$ , $x_2'(0) = -1$

**Solución.**

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10} sen\sqrt{2}\,t + \frac{\sqrt{3}}{5} sen\, 2\sqrt{3}\,t$$

$$x_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{5} sen\sqrt{2}\,t - \frac{\sqrt{3}}{10} sen\, 2\sqrt{3}\,t$$

**13)** Obtenga la transformada de Laplace de la siguiente función periódica:




**Sol.**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left[\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}\right]$$

**14)** Aplique la transformada de Laplace, para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 7y' + 6y = 10\,\delta(t-2)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ , $y'(0) = 0$

**Solución.**

$$y(t) = (2e^{6(t-2)} - 2e^{(t-2)})\,u(t-2)$$

**15)** Emplee la transformada de Laplace para obtener la solución de la ecuación diferencial.

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ ; $y'(0) = 1$ ; $y''(0) = -3$

**Solución.**

$$y = (-1 + e^{-t} + 2te^{-t})\,u(t)$$

# TEMA 6

# INTRODUCCION A LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

## 6.1 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES.

**1)** Obtenga la ecuación diferencial parcial cuya solución general sea

$$U(x,y) = f(y)e^x + g(x)$$

**RESOLUCIÓN**

La función $U$ contiene a su vez dos funciones arbitrarias, $f$ y $g$, por lo que la ecuación en derivadas parciales que se busca debe ser de segundo orden. Deben entonces calcularse parciales segundas de manera que se eliminen las funciones arbitrarias.
Se tiene a la función

$$U(x,y) = f(y)e^x + g(x)$$

Obtenemos parciales segundas buscando eliminar a $f$ y $g$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f(y)e^x + g'(x) \text{ ..........(A)}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(y)e^x + g''(x) \text{ ..........(B)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f'(y)e^x \text{ .......... ...........(C)}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = f'(y)e^x \text{ ........................(D)}$$

Se observa que al igualar las ecuaciones (C) y (D) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

que es la ecuación en derivadas parciales buscada.

**2)** Obtenga la ecuación diferencial en derivadas parciales cuya solución general es la función

$$u(x,y) = f(x^2 - 2y) + x^2$$

**RESOLUCIÓN**

Para la función solución general

$$u(x,y) = f(x^2 - 2y) + x^2$$

se tiene a la función $u$ en términos de una función arbitraria $f$, por lo que la ecuación en derivadas parciales a obtener debe ser de primer orden.
Así, es necesario calcular primeras derivadas parciales buscando eliminar a la función arbitraria.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x^2 - 2y)(2x) + 2x \quad \text{..........(A)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x^2 - 2y)(-2) \quad \text{................(B)}$$

De (A) y (B) se despeja el factor común $f'(x^2 - 2y)$, esto es

$$f'(x^2 - 2y) = \frac{1}{2x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\right) \quad \text{..........(C)}$$

$$f'(x^2 - 2y) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{....................(D)}$$

igualando (C) y (D) resulta

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$$

y al simplificar y reordenar la expresión anterior se llega a

$$\frac{1}{2x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

o bien, finalmente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$

**3)** Determine la ecuación en derivadas parciales cuya solución general es

$$u(x,y) = f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy} + \frac{e^{-x}}{1 - y^2}$$

**RESOLUCIÓN**

Se tienen dos funciones arbitrarias $f$ y $g$, ambas dependen de la variable $y$. Es necesario derivar parcialmente dos veces, de manera que se logren eliminar dichas funciones.

La primera derivada parcial con respecto a $x$ es

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf(y)e^{xy} - yg(y)e^{-xy} + \frac{e^{x}}{1 - y^2} \quad \text{.........(A)}$$

Nuevamente se deriva parcialmente con respecto a $x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 f(y)e^{xy} + y^2 g(y)e^{-xy} + \frac{e^{x}}{1 - y^2} \quad \text{.........(B)}$$

No se han eliminado las funciones arbitrarias, sin embargo, al factorizar la expresión (B) se observa la posibilidad de eliminarlas, según se indica enseguida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\left[f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy}\right] + \frac{e^{x}}{1 - y^2} \quad \text{.........(C)}$$

Multiplicando la función $u(x,y)$ por el factor $y^2$

$$y^2 u = y^2\left[f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy}\right] + y^2\frac{e^{x}}{1 - y^2} \quad \text{.........(D)}$$

Se observa en (C) y (D) un factor común, lo que lleva a

$$y^2\left[f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{e^{x}}{1 - y^2} \quad \text{.........(E)}$$

$$y^2\left[f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy}\right] = y^2 u - y^2\frac{e^{x}}{1 - y^2} \quad \text{.........(F)}$$

Igualando (E) y (F) y reordenando términos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 u + \frac{e^{x}}{1 - y^2} - y^2\frac{e^{x}}{1 - y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 u + \frac{e^{x}}{1 - y^2}(1 - y^2)$$

Finalmente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 u + e^x$$

# 6.2 EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES.

**1)** Resuelva la ecuación en derivadas parciales

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$$

Considere una constante de separación $\alpha = 0$ .

**RESOLUCIÓN**

Se tiene la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u \quad \text{..........(A)}$$

De acuerdo al método de separación de variables, se propone la función

$$u(x,y) = F(x)\,G(y)$$

como solución de la ecuación diferencial dada.
Esta función también se puede escribir simplemente

$$u = FG$$

Enseguida se calculan las derivadas parciles que se observan en la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = FG'$$

y al sustituir en (A)

$$xF''G + yFG' = FG$$

posteriormente se reordenan términos para separar variables

$$xF''G = F(G - yG')$$

$$\frac{xF''}{F} = \frac{G - yG'}{G}$$

Para la constante de separación indicada $\alpha = 0$ se tiene

$$\frac{x F''}{F} = \alpha = 0 \quad .........(B)$$

también

$$\frac{G - y G'}{G} = \alpha = 0 \quad .........(C)$$

Resolviendo la ecuación (B) resulta

$$\frac{x F''}{F} = 0 \quad ; \quad x F'' = 0 \quad \Rightarrow F'' = 0$$

que es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden, cuya solución es

$$F = F(x) = C_1 + C_2 x$$

De manera similar se procede a resolver la ecuación (C)

$$\frac{G - y G'}{G} = 0 \quad ; \quad G - y G' = 0$$

que es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de variables separables, esto es

$$G' = \frac{G}{y} \quad ; \quad \frac{dG}{dy} = \frac{G}{y}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{dG}{G} = \int \frac{dy}{y}$$

$$Ln\, G = Ln\, y + C$$

de donde resulta

$$G = G(y) = C y$$

Entonces, la función $u(x,y)$ resulta

$$u(x,y) = (C_1 + C_2 x)(C y)$$

y al efectuar operaciones se tiene finalmente

$$u(x,y) = A y + B x y$$

**2)** Utilice el método de separación de variables, resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = u$$

Considere una constante de separación $\alpha < 0$

## RESOLUCIÓN

Para la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \quad \text{..........(A)}$$

de acuerdo al método de separación de variables se propone como solución la función

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

A continuación se obtienen las derivadas parciales requeridas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = FG'$$

posteriormente se sustituye en la ecuación diferencial

$$F''G + FG' = FG$$

enseguida se reordena para separar variables

$$F''G + FG' - FG = 0$$

$$G(F'' - F) = -FG'$$

$$\frac{F'' - F}{F} = \frac{-G'}{G}$$

Para la constante de separación $\alpha < 0$ se considera $\alpha = -k^2$, por lo que se tiene

$$\frac{F'' - F}{F} = \alpha = -k^2 \quad \text{..........(B)}$$

$$\frac{-G'}{G} = \alpha = -k^2 \quad \text{..........(C)}$$

Inicialmente se resuelve la ecuación (B)

$$\frac{F'' - F}{F} = -k^2$$

$$\Rightarrow \qquad F'' - F + k^2 F = 0$$

o bien

$$F'' - (1 - k^2) F = 0$$

que es una ecuación ordinaria homogénea de segundo orden, la cual también se puede escribir como

$$\left[D^2 - (1 - k^2)\right] F = 0$$

siendo su ecuación característica asociada

$$\lambda^2 - (1 - k^2) = 0$$

que al resolver nos lleva a obtener

$$\lambda = \pm\sqrt{1 - k^2}$$

por lo que la solución de (B) es

$$F(x) = C_1 e^{\left(\sqrt{1 - k^2}\right)x} + C_2 e^{\left(-\sqrt{1 - k^2}\right)x}$$

De manera análoga para la ecuación (C) se tiene

$$\frac{-G'}{G} = -k^2$$

$$\Rightarrow \quad -G' + k^2 G = 0$$

$$G' - k^2 G = 0$$

que es una ecuación de primer orden de variables separables; al resolver se tiene

$$G' = k^2 G$$

$$\frac{dG}{dt} = k^2 G$$

$$\int \frac{dG}{G} = \int k^2 \, dt$$

$$Ln\, G = k^2 t + C$$

y al aplicar la función exponencial resulta

$$G(t) = C_3 e^{k^2 t}$$

Entonces. la solución es

$$u(x,t) = \left[ C_1 e^{\left(\sqrt{1-k^2}\right)x} + C_2 e^{\left(-\sqrt{1-k^2}\right)x} \right] C_3 e^{k^2 t}$$

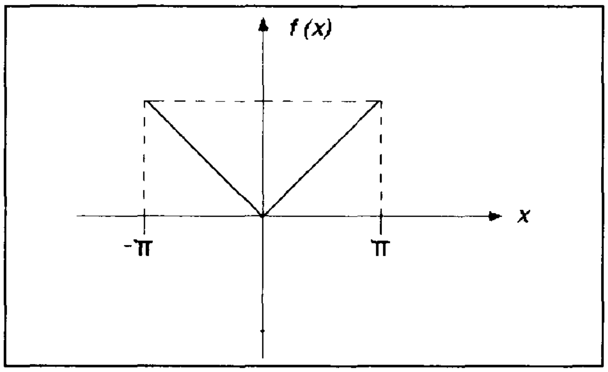
## 6.3 SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER.

**1)** Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN**

La función está dada por dos reglas de correspondencia y su representación gráfica es:




Se trata de una función par, entonces los coeficientes de la Serie Trigonométrica de Fourier son: $a_0$ , $a_n$ y $b_n = 0$ y la serie en cuestión es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{........(A)}$$

por la que se procede a la obtención de $a_0$ y $a_n$ .

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

En las expresiones anteriores $L$ representa el semiperiodo, que en este caso está dado por $L = \pi$ ; se tiene así:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

Para el segundo coeficiente se tiene:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\,sen\,nx - \int \frac{1}{n}\,sen\,nx\,dx\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\,sen\,nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\,sen\,n\pi + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Obtenidos los coeficientes de la serie, se sustituye en (A), de donde finalmente

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx$$

**2)** Obtenga los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN**

La función indicada es una función impar por lo que sólo se tienen coeficientes $b_n$, entonces el desarrollo de la serie trigonométrica de Fourier es de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,sen\,\frac{n\pi x}{L}$$

De acuerdo a la función $f$ dada, se tiene que el periodo es $T = 2\pi$, por lo que el semiperiodo es $L = \pi$

Para obtener el coeficiente $b_n$ se considera

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,sen\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

y para $L = \pi$ resulta

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} sen\, x\, dx$$

enseguida se integra y evalúa la integral

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} \left[ 1 - (-1)^n \right]$$

y la serie trigonométrica de Fourier, que resulta ser la serie de senos de Fourier es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 1 - (-1)^n \right] sen\,(nx)$$

Es necesario obtener los 3 primeros términos no nulos de la serie indicada, por lo que dando a $n$ distintos valores se observa que

$$b_n = 0 \;, \; \text{si} \;\; n \;\; \text{es par}$$

$$b_n \neq 0 \;, \; \text{si} \;\; n \;\; \text{es impar}$$

Por lo anterior, se tiene que para la función con términos no nulos se considerará $n = 1 , 3 , 5$ ; esto es,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} sen\, x + \frac{4}{3\pi} sen\,(3x) + \frac{4}{5\pi} sen\,(5x) + \ldots$$

que representa el desarrollo de interés.

**3)** Obtenga los cuatro primeros términos no nulos de la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = x^2$$

en el intervalo $-1 < x < 1$

**RESOLUCIÓN**

La función en cuestión es una función par, de periodo $T = 2$ y semiperiodo $L = 1$
El desarrollo de la serie trigonométrica de Fourier está dado por

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

donde los coeficientes $a_0$ y $a_n$ se obtienen de acuerdo a las expresiones siguientes:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx\ , \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Al sustituir $L$ y la función dada se tiene por un lado

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

y por otro

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx$$

$$a_n = 2\left[\frac{2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \left(\frac{x^2}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) sen\, n\pi x\right]_0^1$$

$$a_n = 2\left[\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right) sen\, n\pi - 0\right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

Entonces, el desarrollo de Fourier correspondiente es

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos n\pi x$$

y para los cuatro primeros términos no nulos damos a $n$ los valores $1, 2$ y $3$ , pues el primer término no nulo está dado por $a_0$ ; así se tiene

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}(-1)\cos\pi x + \frac{4}{4\pi^2}(-1)^2\cos 2\pi x + \frac{4}{9\pi^2}(-1)^3\cos 3\pi x + \ldots$$

o bien

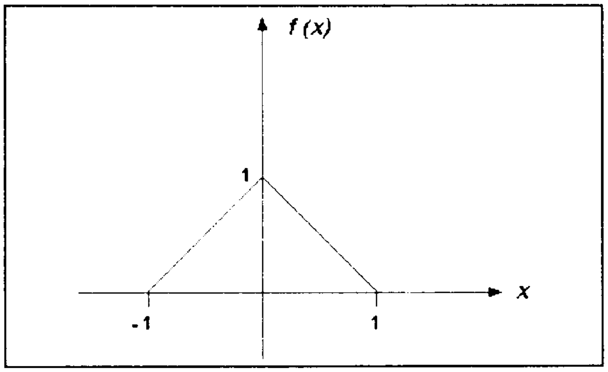
$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi x - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x + \ldots$$

**4)** Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad -1 < x < 0 \\ -x + 1 & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN**

Es conveniente trazar la gráfica de la función para determinar a partir de ella qué tipo de función (par o impar) es.




Se observa que es una función par (simétrica respecto al eje de las ordenadas) por lo que el desarrollo de la serie Fourier estará dado por

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Los coeficientes $a_0$ y $a_n$ se determinan a partir de las expresiones

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx \ , \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

El periodo de la función es $T = 2$ , por lo que el semiperiodo es $L = 1$ ; entonces al sustituir en las expresiones anteriores se tiene

$$a_0 = 2 \int_0^1 (-x + 1)\, dx = 2 \left[ -\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1$$

$$= 2 \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = 1$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (-x + 1) \cos n\pi x \, dx$$

de aquí resultan dos integrales

$$a_n = 2\left[ -\int_0^1 x \cos n\pi x \, dx + \int_0^1 \cos n\pi x \, dx \right]$$

resolviendo

$$a_n = 2\left[ -\left( \frac{\cos n\pi x}{n^2 \pi^2} + \frac{x \, sen \, n\pi x}{n \pi} \right)_0^1 + \left( \frac{sen \, n\pi x}{n\pi} \right)_0^1 \right]$$

evaluando para extremo superior y para extremo inferior

$$a_n = 2\left[ -\left( \frac{\cos n\pi}{n^2 \pi^2} + \frac{sen \, n\pi}{n \pi} - \frac{1}{n^2 \pi^2} \right) \right]$$

de aquí se tiene $\cos n\pi = (-1)^n$ y $sen \, n\pi = 0$ , $n = 1, 2, 3 \ldots$ por lo que

$$a_n = 2\left[ \frac{-(-1)^n + 1}{n^2 \pi^2} \right] = -\frac{2}{n^2 \pi^2}\left[ (-1)^n - 1 \right]$$

que también se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2} & , \ para \ n \quad impar \\ 0 & , \ para \ n \quad par \end{cases}$$

Así, el desarrollo de Fourier correspondiente es

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x$$

**5)** Obtenga el desarrollo en serie seno de Fourier de la función $f(x) = \cos 3x$ , en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene una función definida en medio intervalo, entonces $L = \frac{\pi}{2}$

El desarrollo en serie seno de Fourier está dado por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen \, \frac{n\pi x}{L}$$

El coeficiente $b_n$ se determina con la expresión

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \, sen \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

Entonces se tiene

$$b_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) \, sen \, \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} \, dx$$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) \, sen \, (2nx) \, dx$$

Esta integral contiene en el integrando un producto de funciones trigonométricas de argumento diferente, que se puede resolver empleando la expresión

$$\int sen \, mu \cos nu \, du = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(m+n)u}{m+n} - \frac{\cos(m-n)u}{m-n} \right] + C$$

Así, para la integral que nos ocupa

$$b_n = \frac{4}{\pi} \left[ -\frac{\cos(2n+3)x}{2(2n+3)} - \frac{\cos(2n-3)x}{2(2n-3)} \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \left( \frac{2n}{4n^2 - 9} \right) = \frac{8n}{\pi(4n^2 - 9)}$$

Finalmente, el desarrollo pedido es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 9)} \, sen \, (2nx)$$

**5)** Calcule la serie de cosenos de Fourier para la función

$$f(x) = e^x \quad , \quad 0 < x < 1$$

**RESOLUCIÓN**

Para la función en cuestión el desarrollo de la serie de cosenos de Fourier está dado por

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

y los coeficientes $a_0$ y $a_n$ se determinan a partir de las expresiones

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx \quad \text{y} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Se tiene una función definida en medio intervalo donde $L = 1$ , de donde

$$a_0 = 2 \int_0^1 e^x dx = 2 \left[ e^x \right] \Big|_0^1 = 2( e - e^0 ) = 2( e - 1 )$$

también

$$a_n = 2 \int_0^1 e^x \cos n\pi\, x\, dx = 2 \left[ \frac{e^x n \pi}{n^2 \pi^2 + 1} \left( sen\, n\pi x + \frac{1}{n \pi} \cos n\pi x \right) \right] \Bigg|_0^1$$

$$a_n = 2 \left[ \frac{e\, n\, \pi}{n^2 \pi^2 + 1} \left( sen\, n\pi + \frac{1}{n \pi} \cos n\pi \right) - \frac{n \pi}{n^2 \pi^2 + 1} \left( \frac{1}{n \pi} \right) \right]$$

se tiene: $sen\, n\pi = 0$ , $n = 1 , 2 , 3 , . . .$ ; $\cos n\pi = ( - 1 )^n$

$n = 1 , 2 , 3 , . . .$

por lo que resulta

$$a_n = 2 \left[ \frac{n \pi e}{n^2 \pi^2 + 1} \left( \frac{1}{n \pi} ( - 1 )^n \right) - \frac{1}{n^2 \pi^2 + 1} \right]$$

simplificando

$$a_n = 2 \left[ \frac{( - 1 )^n e - 1}{n^2 \pi^2 + 1} \right]$$

Finalmente se obtiene

$$f(x) = (e - 1) + 2 \sum_{n = 1}^{\infty} \left[ \frac{( - 1 )^n e - 1}{n^2 \pi^2 + 1} \right] \cos n\pi x$$

## 6.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA.

**1)** Determine la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0, y) = 2e^y$$

### RESOLUCIÓN

En este caso no se conoce la constante de separación,por lo que el proceso a seguir implicará expresar la solución en términos de dicha constante y posteriormente la condición de frontera llevará a la obtención de la solución que la satisfaga. Se propone la función $u$ como solución de la ecuación en derivadas parciales, esto es

$$u(x,y) = F(x)\, G(y)$$

enseguida se obtienen las derivadas parciales necesarias

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = F'(x)\, G'(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x)\, G''(y)$$

que al sustituir en la ecuación diferencial lleva a

$$F'(x)\, G'(y) = F(x)\, G''(y) + F(x)\, G(y)$$

esta ecuación también se puede expresar de la siguiente manera

$$F' G' = F G'' + F G$$

separando variables

$$\frac{F'}{F} = \frac{G'' + G}{G'}$$

y considerando la constante de separación $\alpha$ se tiene

$$\frac{F'}{F} = \alpha \; ; \qquad \frac{G'' + G}{G'} = \alpha$$

A continuación se resuelve cada una de las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas.

Por una lado se tiene

$$F' = \alpha F$$

y al resolver

$$\frac{dF}{dx} = \alpha F$$

$$\int \frac{dF}{F} = \int \alpha \, dx$$

$$Ln\, F = \alpha x + C$$

$$F(x) = C_1 e^{\alpha x}$$

y por otro

$$G'' + G = \alpha G'$$

$$G'' - \alpha G' + G = 0$$

que en términos del operador diferencial es

$$\left(D^2 - \alpha D + 1\right) G = 0$$

siendo su ecuación característica

$$\lambda^2 - \alpha \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

por lo que

$$G(y) = C_2 e^{\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y} + C_3 e^{\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y}$$

Entonces, para la función propuesta como solución se obtiene

$$u(x,y) = C_1 e^{\alpha x} \left[ C_2 e^{\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y} + C_3 e^{\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y} \right]$$

que al efectuar operaciones se simplifica según se indica

$$u(x,y) = A e^{\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y + \alpha x} + B e^{\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y + \alpha x} \quad \text{.........(A)}$$

Posteriormente se aplica la condición de frontera $u(0,y) = 2e^y$ , esto es

$$A e^{\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y} + B e^{\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}\right) y} = 2e^y \quad \text{.........(B)}$$

y por igualdad de exponentes

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} = 1$$

$$\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} = 1$$

o bien

$$\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} = 1$$

$$\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4} = 2$$

Resolviendo para $\alpha$ resulta

$$\pm \sqrt{\alpha^2 - 4} = 2 - \alpha$$

$$\alpha^2 - 4 = (2 - \alpha)^2$$

$$\alpha^2 - 4 = 4 - 4\alpha + \alpha^2$$

$$4\alpha = 8$$

$$\alpha = 2$$

sustituyendo este valor en (B)

$$A e^{\left(\frac{2 + \sqrt{4 - 4}}{2}\right) y} + B e^{\left(\frac{2 - \sqrt{4 - 4}}{2}\right) y} = 2 e^{y}$$

de donde

$$A e^{y} + B e^{y} = 2 e^{y}$$

$$(A + B) e^{y} = 2 e^{y}$$

y por igualdad de coeficientes

$$A + B = 2 \quad \text{..........(C)}$$

Al sustituir $\alpha$ en (A) $u(x, y) = A e^{y + 2x} + B e^{y + 2y} = (A + B) e^{y + 2x}$

y si en esta última expresión se considera (C) se tiene

$$(A + B) e^{y + 2x} = 2 e^{y + 2x}$$

Finalmente

$$u(x, y) = 2 e^{y + 2x}$$

**2)** Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

para las condiciones de frontera $u(0,y) = 5 + e^{2y} + 2e^{4y}$ ,

$$u(x,y) = 3e^{x} + 5e^{2x}$$

**RESOLUCIÓN**

Se tiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \quad \text{..........(I)}$$

con ciertas condiciones de frontera, las cuales llevarán a la obtención de la solución que satisfaga dichas condiciones.
Se plantea la solución por el método de separación de variables, considerando a la función $u(x,y)$ como la función solución, esto es

$$u(x,y) = F(x)\,G(y) \quad \text{..........(II)}$$

Enseguida se obtienen las derivadas parciales requeridas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\,G''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = F'\,G'$$

sustituyendo en la ecuación (I)

$$F\,G'' = 2\,F'\,G'$$

separando variables resulta

$$\frac{G''}{2\,G'} = \frac{F'}{F}$$

y para la constante de separación $\alpha$

$$\frac{G''}{2\,G'} = \alpha \quad ; \quad \frac{F'}{F} = \alpha$$

a continuación se resuelve cada una de estas ecuaciones diferenciales ordinarias.
Por un lado se tiene

$$G'' - 2\,\alpha\,G' = 0$$

cuya solución es

$$G(y) = C_1 + C_2 e^{2\alpha y}$$

y por otro

$$F' = \alpha F$$

$$\frac{dF}{dx} = \alpha F$$

$$\int \frac{dF}{F} = \int \alpha \, dx$$

$$Ln F = \alpha x + C$$

$$F(x) = C_3 e^{\alpha x}$$

por lo que la solución completa es

$$u(x,y) = C_3 e^{\alpha x} (C_1 + C_2 e^{2\alpha y})$$

que al simplificar lleva a

$$u(x,y) = A e^{\alpha x} + B e^{\alpha (x+2y)}$$

Considerando las condiciones de frontera se observa que se tienen dos exponenciales en $x$ y $y$, por lo que es conveniente expresar la solución de la siguiente manera:

$$u(x,y) = A_1 e^{\alpha_1 x} + B_1 e^{\alpha_1 (x+2y)} + A_2 e^{\alpha_2 x} + B_2 e^{\alpha_2 (x+2y)} \quad .........(III)$$

Para la condición $u(0,y) = 5 + e^{2y} + 2e^{4y}$, se sustituye en (III)

$$5 + e^{2y} + 2e^{4y} = A_1 + B_1 e^{2\alpha_1 y} + A_2 + B_2 e^{2\alpha_2 y}$$

donde por igualdad de coeficientes se tiene

$$A_1 + A_2 = 5$$

$$B_1 = 1$$

$$B_2 = 2$$

$$2\alpha_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 1$$
$$2\alpha_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 2$$

sustituyendo estos valores en (III)

$$u(x,y) = A_1 e^x + e^{x+2y} + A_2 e^{2x} + 2e^{2(x+2y)} \quad \text{........(IV)}$$

Para la condición $u(x,0) = 3e^x + 5e^{2x}$ , al sustituir en (IV)

$$3e^x + 5e^{2x} = A_1 e^x + e^x + A_2 e^{2x} + 2e^{2x}$$

igualando coeficientes se tiene

$$A_1 + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 2$$
$$A_2 + 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 3$$

Finalmente, al sustituir en (IV) resulta

$$u(x,y) = 2e^x + e^{x+2y} + 3e^{2x} + 2e^{2(x+2y)}$$

**3)** Resuelva el siguiente problema con valor de frontera usando una constante de separación negativa.

$$U_t = \alpha^2 U_{xx}$$

$$U(0,t) = 0$$

$$U(L,t) = 0$$

$$U(x,0) = sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

**RESOLUCIÓN**

Para la ecuación en derivadas parciales

$$U_t = \alpha^2 U_{xx}$$

que también se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

se tienen las condiciones de frontera

$$U(0,t) = 0$$

$$U(L,t) = 0$$

$$U(x,0) = sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

y se considerá una constante de separación negativa, es decir se considerará de la forma $-k^2 \quad , \quad k \in \mathbb{R}$

De acuerdo al método de separación de variables se tiene

$$U(x,t) = F(x)\,G(t) \quad ..........(\mathrm{I})$$

derivando parcialmente resulta

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(x)\,G'(t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F''(x)\,G(t)$$

enseguida se sustituye en la ecuación diferencial parcial dada:

$$F(x)\,G'(t) = \alpha^2 F''(x)\,G(t)$$

o bien

$$F\,G' = \alpha^2 F''\,G$$

Separando variables

$$\frac{F''}{F} = \frac{G'}{\alpha^2 G}$$

para la constante de separación igual a $-k^2$ se tiene

$$\frac{F''}{F} = -k^2 \quad , \qquad \frac{G'}{\alpha^2 G} = -k^2$$

Resolviendo para cada una de las ecuaciones diferenciales anteriores

$$\frac{F''}{F} = -k^2 \;\Rightarrow\; F'' + k^2 F = 0$$

$$\frac{G'}{\alpha^2 G} = -k^2 \;\Rightarrow\; G' + k^2 \alpha^2 G = 0$$

se obtiene, en cada caso

$$F(x) = C_1 \cos kx + C_2\, sen\, kx$$

$$G(t) = C_3\, e^{-k^2 \alpha^2 t}$$

posteriormente se sustituyen estas funciones en la función (I), de donde resulta

$$U(x,t) = (C_1 \cos kx + C_2\, sen\, kx)\, C_3\, e^{-k^2 \alpha^2 t} = F(x)\,G(t)$$

Para la condición de frontera $U(0,t) = 0$ se tiene

$$U(0,t) = F(0)G(t) = 0$$

$$F(0) = C_1 = 0$$

entonces

$$F(x) = C_2 \, sen \, k x$$

Para la condición de frontera $U(L,t) = 0$

$$U(L,t) = F(L)G(t) = 0$$

$$F(L) = C_2 \, sen \, k L = 0$$

resulta

$$sen \, k L = 0 \;\Rightarrow\; k L = ang \, sen(0)$$

$$k L = n \pi \quad para \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$k = \frac{n \pi}{L}$$

por lo que

$$F(x) = C_2 \, sen \frac{n \pi}{L} x \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Sustituyendo en (I)

$$U(x,t) = \left( C_2 \, sen \frac{n \pi}{L} x \right) \left( C_3 \, e^{-\left(\frac{n \pi}{L}\right)^2 \alpha^2 t} \right)$$

que se puede expresar también como

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, e^{-\left(\frac{n \pi \alpha}{L}\right)^2 t} sen \frac{n \pi x}{L}$$

Para la condición de frontera $U(x,0) = sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} sen\left(\frac{3 \pi x}{L}\right)$

$$sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} sen\left(\frac{3 \pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, sen\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

por comparación de funciones se tiene

$$n = 1 \; , \; C_1 = 1 \quad ; \quad n = 3 \; , \; C_3 = \frac{1}{2}$$

entonces la solución es

$$U(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)^2 t} sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{3\pi\alpha}{L}\right)^2 t} sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

**4)** Obtenga la solución de la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ ,

que cumpla con las condiciones de frontera $u(0,y) = 2$ y $u(-1,y) = 0$

**RESOLUCIÓN**

La ecuación diferencial parcial dada se resuelve mediante el método de separación de variables, considerando como constante de separación a $\alpha$ , cuyo valor se determinará a partir de las condiciones del problema.

Las derivadas parciales para la función propuesta como solución $U(x,y) = F(x)G(y)$ , son

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = F'G \ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F'G'$$

sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$F''G + F'G - F'G' = 0$$

separando variables

$$F''G + F'(G - G') = 0$$

$$\frac{F''}{F'} = \frac{G' - G}{G}$$

para la constante de separación $\alpha$

$$\frac{F''}{F'} = \alpha \quad ; \quad \frac{G' - G}{G} = \alpha$$

enseguida se resuelve cada una de estas ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$F'' - \alpha F' = 0 \quad ; \quad (D^2 - \alpha D)F = 0$$

$$\lambda^2 - \alpha\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - \alpha) = 0 \quad \therefore \quad \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = \alpha$$

de donde

$$F(x) = C_1 + C_2 e^{\alpha x}$$

también

$$G' - G = \alpha G \quad ; \quad \frac{dG}{dy} = G(\alpha + 1)$$

$$\int \frac{dG}{G} = \int (\alpha + 1)\, dy$$

$$Ln\, G = (\alpha + 1)y$$

por lo que

$$G(y) = C_3 e^{(1+\alpha)y}$$

así, la solución completa es

$$u(x,y) = (C_1 + C_2 e^{\alpha x}) C_3 e^{(1+\alpha)y}$$

o bien

$$u(x,y) = A e^{(1+\alpha)y} + B e^{\alpha x + (1+\alpha)y} \quad \text{..........(I)}$$

A continuación se aplica la condición de frontera $u(0,y) = 2$

$$2 = A e^{(1+\alpha)y} + B e^{(1+\alpha)y}$$

$$2 = (A + B) e^{(1+\alpha)y}$$

de aquí se tiene

$$(1 + \alpha)y = 0$$

$$1 + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$$

$$A + B = 2$$

$$A = 2 - B$$

sustituyendo en (I)

$$u(x,y) = (2 - B)e^{0} + B e^{-x+0}$$

$$u(x,y) = (2 - B) + B e^{-x}$$

para la condición $u(-1, y) = 0$

$$0 = 2 - B + Be$$

$$B(1 - e) = 2$$

$$B = \frac{2}{1-e} \quad \Rightarrow \quad A = 2 - \frac{2}{1-e};$$

$$A = \frac{2 - 2e - 2}{1-e} = -\frac{2e}{1-e}$$

Finalmente se sustituyen los valores de $A$ , $B$ y $\alpha$ en (I)

$$u(x,y) = \frac{2e}{e-1} - \frac{2}{e-1} e^{-x}$$

y luego de simplificar

$$u(x,y) = \frac{2}{e - 1}(e - e^{-x})$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1)** Obtenga la función $U(x,t)$ que satisfaga a la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ ; \quad 0 < x < 3, \quad t > 0$$

con las condiciones $U(0,t) = 0$, $U(3,t) = 0$, $U(x,0) = 2$ ,
sabiendo que una solución completa de la ecuación en derivadas parciales es

$$U(x,t) = (A\cos kx + B\,sen\,kx)(e^{-2k^2t})$$

**Solución.**

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-\frac{2(2n-1)^2\pi^2 t}{9}}sen\frac{(2n-1)\pi}{3}x$$

**2)** Desarrolle en una serie de Fourier la función $f(x) = |x| + 1$ en el intervalo

$-\pi \le x \le \pi$ y muestre que $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

**Solución.**

$$f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

$$f(0) = 1 = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

**3)** Resuelva la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = u$ sujeta a $u(0,t) = 2e^{t} + 4e^{-t}$

**Solución.**

$u(x,t) = 2e^{x+t} + 4e^{-x-t}$

**4)** Represente a la función $f(x) = (x - \pi)^2$ , definida en $\pi < x < 2\pi$ , por medio de una serie de Fourier. Considere que $f(x) = f(x + \pi)$

**Solución.**

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \cos 2nx - \frac{\pi}{n} \, sen\, 2nx \right)$$

**5)** Obtenga el desarrollo en serie seno de Fourier de la función $f(x) = \cos 3x$ , en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

**Solución.**

$$f(x) = -\frac{4}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(16n^2 - 9)\pi} \cos 4nx + \frac{16n}{(16n^2 - 9)\pi} \, sen\, 4nx$$

**6)** Sea $f(t)$ una función periódica de periodo $T = 2$ , donde $f(t) = t^2$ para $t \in (0,2)$ .

Realice el desarrollo de la serie de Fourier de $f(t)$ si se sabe que $a_n = \frac{4}{n^2 \pi^2}$

**Solución.**

$$f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi t) - \frac{4}{n\pi} \, sen\, (n\pi t) \right)$$

**7)** Resuelva el problema de valores en la frontera

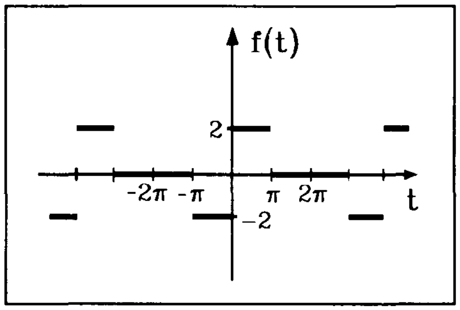
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < 100 \quad ; \quad t > 0$$

$$\text{con} \quad \begin{array}{ll} u(0,t) = 0 \ , & t>0 \\ u(100,t) = 0 \ , & t>0 \\ u(x,0) = 50 \ , & 0<x<100 \end{array}$$

**Solución.**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{(2n-1)\pi}\, sen \frac{(2n-1)\pi}{100} x\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{10000}\alpha^2 t}$$

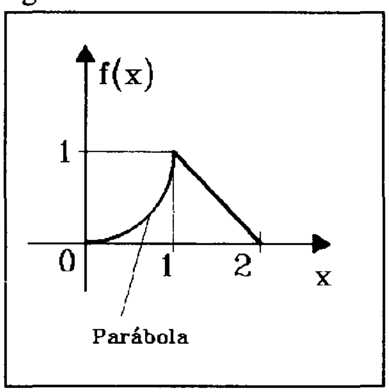
**8)** Calcule los cuatro primeros términos no nulos la serie de Fourier de la función




**Solución.**

$$f(t) = \frac{4}{\pi} sen \frac{1}{2} t + \frac{4}{\pi} sent + \frac{4}{3\pi} sen \frac{3}{2} t + \frac{4}{5\pi} sen \frac{5}{2} t + ..$$

**9)** Obtenga los cuatro primeros términos del desarrollo en serie coseno de Fourier de la función mostrada en la figura




**Solución.**

$$f(x) = \frac{5}{12} + \left(-\frac{16}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^2}\right)\cos\frac{\pi}{2}x + \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)\cos x + \left(\frac{16}{27\pi^3} + \frac{4}{9\pi^2}\right)\cos\frac{3\pi x}{2} + \ldots$$

**10)** Obtenga el desarrollo en series de Fourier de la función $f(x) = Ax(\pi - x)(\pi + x)$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ .

**Sugerencia:** Verifique si la función es par o impar.

**Solución.**

$$f(x) = -12A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} sen nx$$

Esta obra se terminó de imprimir
en julio de 2009
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

**Secretaría de Servicios Académicos**

El tiraje consta de 500 ejemplares impresos en offset
con papel bond de 75 gramos, de 28 × 21.5 cm.

**Universidad Nacional Autónoma de México**

**Facultad de Ingeniería**