



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

Diseño de observadores con entradas desconocidas
para sistemas no lineales por medio de
propiedades de disipatividad

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

Doctor En Ingeniería

ÁREA: ELÉCTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

ASESOR: DR. JAIME A. MORENO PÉREZ



México, D.F. Junio de 2006

**A mis queridos padres
Edmundo y Lulú**

Agradecimientos

Quiero agradecer:

- A Dios, por darme vida y salud para lograr esta importante meta para mi.
- A mis padres, por su cariño y apoyo incondicional y a mi hermana.
- Al Dr. Jaime Moreno por su invaluable ayuda y consejo.
- A la Dra. Cristina Verde por su apoyo y por iniciarme en esta apasionante área del conocimiento.
- A la UNAM, por toda la formación, académica y en general, que he recibido aquí.
- Al CONACyT y a la DGEP por las becas que me otorgaron para realizar mis estudios de doctorado.
- A la DGEP por la beca que me otorgó para realizar la estancia que hice en la Universidad de Stuttgart, Alemania.
- A los miembros del jurado por sus valiosos comentarios.
- A todos mis amigos y compañeros: Cecilia, Daniel, Eduardo, Jesús, Jorge, Juan Carlos, Manuel, Mauricio, Oscar, Paul, René, Sebastián; por su apoyo en todo momento.

Índice general

Índice de figuras	1
1. Introducción	3
1.1. Introducción General	3
1.2. Revisión bibliográfica de resultados previos	4
1.3. Motivación y planteamiento del problema	6
1.4. Contribución principal del trabajo	8
1.5. Organización del documento	8
2. Planteamiento del problema y preliminares	11
2.1. Planteamiento del problema	12
2.2. Sistema Error	15
2.3. Disipatividad	19
2.3.1. Definiciones	19
2.3.2. Disipativización	21
2.3.3. Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo	22
2.3.4. Disipatividad Parcial	23
2.3.5. Disipatividad Incremental	25
3. Caracterización de la existencia de OED no lineales	27
3.1. Condiciones para la existencia de OED	27
3.1.1. Disipatividad por inyección de la salida de la ecuación de error	28
3.1.2. Existencia de una forma normal global	29
3.2. Existencia de un OED desde un enfoque disipativo	31
3.3. Implicación del resultado en términos de detectabilidad	33
3.4. Necesidad de las condiciones realizadas	34
3.5. Ejemplo	35
3.6. Resumen	38
4. Diseño de OED para Sistemas LIT	39
4.1. Propiedades de detectabilidad y el diseño de un observador	40
4.1.1. Detectabilidad	40
4.1.2. Una forma de diseñar el observador	43
4.2. Implicación de las condiciones en términos de disipatividad	45
4.2.1. Diseño del observador por medio de una LMI	45
4.2.2. Interpretación física de la caracterización disipativa de las condiciones de existencia de los OED	48
4.3. Ejemplo	49
4.3.1. Simulaciones numéricas	52

4.3.2.	Primera simulación: w constante	52
4.3.3.	Segunda simulación: w como dinámica no modelada	53
4.4.	Resumen	55
5.	Diseño de OED para una clase de sistemas no lineales	57
5.1.	Una clase especial de disipatividad	58
5.2.	Planteamiento del problema	60
5.2.1.	Error de estimación	60
5.2.2.	Disipatividad por inyección de la salida de la ecuación de error	61
5.3.	Diseño del OED basado en disipatividad	62
5.3.1.	Existencia del OED	62
5.3.2.	Desigualdad Matricial (Lineal)	64
5.3.3.	Construcción del OED	65
5.4.	Ejemplo	69
5.5.	Mejoramiento del diseño del OED	72
5.5.1.	Ejemplo ilustrativo	72
5.5.2.	Diseño de OED cuando las no linealidades se definen por medio de múltiples sectores	73
5.5.3.	Un OED para el ejemplo ilustrativo	74
5.6.	Resumen	77
6.	Conclusiones	79
A.	Nomenclatura y Glosario	83
	Bibliografía	85

Índice de figuras

2.1. Indistinguibilidad de estados.	16
2.2. Indistinguibilidad de estados con entradas desconocidas.	17
2.3. Indistinguibilidad con entradas desconocidas.	17
3.1. Simulación del OED diseñado en el ejemplo. Velocidad angular.	37
3.2. Simulación del OED diseñado en el ejemplo. Norma cuadrática del error $x_2 - \hat{x}_2$. . .	38
4.1. Sistema mecánico lineal de cuarto orden	50
4.2. Entrada desconocida w : escalón de amplitud 7 (N) que comienza a los 7.5 (seg). Entrada conocida $u = 0$	52
4.3. Estados del sistema y error de estimación obtenidos con $w = 7$ (N)	53
4.4. Entrada desconocida w : dinámica no modelada (DNM) no lineal y discontinua. En- trada conocida $u = 0$	54
4.5. Entrada desconocida en la segunda simulación	54
4.6. Estados y error de estimación obtenidos de la segunda simulación	55
5.1. No linealidad $\psi(u)$	59
5.2. Retroalimentación entre Σ_L y $\psi(u)$	59
5.3. Transformación de lazo para hacer $R=0$	65
5.4. Sistema mecánico con amortiguador no lineal A_{nl}	69
5.5. Forma de la fuerza $F_{A_{nl}}$ con respecto a x_2	69
5.6. Simulación del OED diseñado. Evolución de las entradas u , w y de la no linealidad ψ	71
5.7. Simulación del OED diseñado. Evolución de los estados del sistema y del error de estimación, donde x_1 , x_3 están en (m) y x_2 , x_4 en (m/s)	71
5.8. Salidas de las no linealidades y la entrada desconocida.	76
5.9. Simulación del OED diseñado para (5.27).	76

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción General

Dentro del área del control automático se define como planta al mecanismo o proceso que se quiere controlar, monitorear o supervisar. Para el modelado de la planta se recurre muchas veces al concepto de variables de estado, es decir, variables importantes dentro del sistema que describen el estado en que se encuentra dicho sistema.

Correspondiendo a su importancia desde el punto de vista del modelado, las variables de estado juegan un papel relevante en la supervisión o control de la planta; es decir, el conocimiento de ellas en cada instante de tiempo (por medio de su medición) conduce a una mejor supervisión de la planta o en su caso a un mejor desempeño del sistema controlado. Sin embargo, no siempre es factible la medición de todas las variables de estado, ya sea por la inexistencia de un instrumento de medición apropiado, por el elevado costo del mismo, o por otra serie de factores.

Para afrontar el problema que representa no poder conocer directamente algunas o todas las variables de estado, se recurre a un estimador de estados u observador. Un observador es un sistema dinámico que utiliza la información disponible de las entradas y salidas de la planta con el fin de proporcionar un estimado de sus variables de estado que converge a los valores reales de las mismas (Luenberger, 1966).

Como lo más común es que no se puedan medir todas las variables de estado, el estudio de la existencia de estimadores de estados u observadores, así como su diseño, es de especial importancia para resolver problemas de control o supervisión de sistemas. Por un lado, se sabe que una condición necesaria para la existencia de los observadores es que la planta posea la propiedad de detectabilidad (Besançon, 1999b). Por el otro lado, en la literatura existen diversos métodos de diseño, entre los que se pueden mencionar los que buscan una transformación a formas particulares (Gauthier *et al.*,

1992; Hou y Pugh, 1998; Zeitz, 1987), los observadores de alta ganancia (Besançon, 1999a; Bornard y Hammouri, 1991; Gauthier *et al.*, 1992), los observadores Lipschitz (Rajamani, 1998), observadores para sistemas con no linealidades monótonas (Arcak y Kokotovic, 2001b), observadores que utilizan una extensión del criterio del círculo (Arcak y Kokotovic, 2001a; Arcak *et al.*, 2003; Moreno, 2004), entre otros.

En general, la estructura de un observador toma como base el modelo de la planta y un término corrector que depende del error de estimación de la salida, de tal forma que cuando no existe error, el término corrector desaparece y el observador termina siendo una copia de la planta. Esta estructura hace que el observador sea sensible a la existencia de perturbaciones (por ejemplo ruido en las mediciones) o a la incertidumbre que exista en los parámetros de la planta.

Ante el nuevo problema que representa la presencia de perturbaciones o incertidumbre, aparece el concepto de observador robusto. En particular en este trabajo se toman los Observadores con Entradas Desconocidas (OED) (Moreno, 2000b) como caso de estudio. Se le llama Observador con Entradas Desconocidas a aquel estimador de estados que proporciona un estimado convergente del estado de la planta, a pesar de la aparición de perturbaciones o la existencia de incertidumbre en los parámetros de la planta, los cuales se pueden considerar como entradas desconocidas. Por estas propiedades de robustez, existen diversas aplicaciones para este tipo de observadores además de la aplicación normal de estimación de los estados, por ejemplo en el área detección y aislamiento de fallas (Floquet *et al.*, 2004; Patton *et al.*, 2000; Yang y Saif, 1996) o en esquemas de control descentralizado (Aldeen y Marsh, 1999), entre otros.

Como un Observador con Entradas Desconocidas (OED) da solución a un problema de observación con mayores exigencias que para sistemas sin entradas desconocidas, las condiciones de existencia cambian y los métodos de diseño antes mencionados ya no son válidos para este caso. Como es de esperarse, el problema de determinar la existencia de un OED demandará condiciones más severas sobre la planta comparadas con las que se plantean para la existencia de un observador convencional (que no considera entradas desconocidas).

En este trabajo se estudian condiciones suficientes para la existencia de OED tales que se pueda proponer una forma de diseñar el observador con base en ellas.

1.2. Revisión bibliográfica de resultados previos

El estudio de los OED se ha desarrollado para dos grandes tipos de sistemas: los sistemas lineales e invariantes en el tiempo y los sistemas no lineales.

Existen diferencias significativas en el desarrollo obtenido en cada caso. Por un lado, el estudio

que se tiene hasta la fecha para sistemas lineales es extenso. Por ejemplo, las condiciones de existencia de los OED están bien establecidas y reportadas por Hautus (Hautus, 1983). Por el lado del diseño, existen diversos métodos propuestos para el diseño en el espacio de estados (Chu, 2000; Darouach *et al.*, 1994; Hou y Müller, 1992; Hou y Müller, 1994; Tsui, 1996) y por métodos en frecuencia (Ding *et al.*, 1990). Existen también diversos diseños orientados a aplicaciones en detección de fallas (Dassanake *et al.*, 2000; Gaddouna y Ouladsine, 1997; Xiong y Saif, 1999) y en control descentralizado (Yeu y Kawaji, 2001; Aldeen y Marsh, 1999). Incluso, también existen diseños para sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo (Fattouh *et al.*, 1999; Sename *et al.*, 2001).

Con base en las condiciones de existencia determinadas por Hautus, en (Moreno, 2001) se propone una relación entre dichas condiciones y un concepto constructivo como la pasividad. La idea fundamental de este trabajo es la proposición de que la existencia de un OED para una planta lineal es equivalente a que la misma planta pueda ser convertida en pasiva (pasivizada) por medio de una retroalimentación de los estados o una inyección de la salida.

Por otro lado, el estudio que se ha reportado de los OED para el caso no lineal es reducido con respecto al que se conoce del caso lineal. Por ejemplo, las condiciones de existencia no se tienen completamente bien caracterizadas, incluso no existen definiciones de observabilidad para este caso, aparte de las propuestas por Hautus (Hautus, 1983) para el caso lineal. Con respecto a las condiciones de existencia para el caso no lineal, existen algunos estudios al respecto para sistemas no lineales SISO generales (Moreno, 2000b) y para aplicaciones orientadas a la detección de fallas (Frank *et al.*, 1999). También existen algunas propuestas de diseño como (Floquet *et al.*, 2004; Koenig y Mammar, 2001; Rocha-Cózatl, 2001; Seliger y Frank, 1991; Xiong y Saif, 2001), siendo (Koenig y Mammar, 2001; Seliger y Frank, 1991) en particular diseños para detección de fallas.

Básicamente, en la literatura existen dos perspectivas principales para el planteamiento de la existencia y el diseño de OED para sistemas no lineales: la búsqueda de una transformación con la que se obtenga un subsistema desacoplado de la entrada desconocida (Moreno, 2000b; Koenig y Mammar, 2001; Rocha-Cózatl, 2001; Seliger y Frank, 1991) y la compensación de la entrada desconocida por medio de un esquema de modos deslizantes (Floquet *et al.*, 2004; Xiong y Saif, 2001).

Por un lado, el problema principal del diseño que se basa en transformar el sistema a una forma donde una parte del mismo queda desacoplado de la entrada desconocida es precisamente determinar la transformación que lleva al sistema a esa forma deseada. Sin embargo, encontrando esta transformación se pueden proporcionar condiciones de existencia de los OED (Moreno, 2000b;

Rocha-Cózatl, 2001) y se asegura un desacoplamiento completo ante la entrada desconocida, lo cual permite considerar incluso entradas desconocidas no acotadas.

Por el otro lado, el diseño por medio de modos deslizantes ofrece idealmente una convergencia en tiempo finito y la posibilidad de estimar la entrada desconocida (Xiong y Saif, 2001), con dos desventajas principales, tener un observador discontinuo con conmutaciones de alta frecuencia (frecuencia infinita en el caso ideal) y la necesidad de considerar solamente entradas desconocidas acotadas.

1.3. Motivación y planteamiento del problema

En general, tanto para sistemas lineales como no lineales, el establecimiento de condiciones de existencia de observadores (con y sin entradas desconocidas) resulta un problema separado del diseño de esos mismos observadores. Es decir, las condiciones de existencia generalmente resultan demasiado abstractas para ser utilizadas para construir el observador. En otras palabras, no resultan constructivas.

Por ejemplo para el sistema LIT

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, la condición de existencia de un observador puede expresarse como

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n$$

Sin embargo, si en el observador no se permite la inclusión de derivadas de la salida (lo cual es usual) la condición de existencia mencionada no resulta útil para la construcción del observador.

En particular, en el problema de observación con entradas desconocidas no se tienen completamente bien caracterizadas las condiciones de existencia y las condiciones que se han propuesto (Moreno, 2000b) presentan el mismo problema de ser demasiado abstractas.

El problema de darle un sentido constructivo a las condiciones de existencia de los OED se puede resolver encontrando una interpretación de dichas condiciones desde una perspectiva más orientada al diseño.

En este mismo sentido, la relación estudiada en el caso lineal entre la existencia de los OED y la pasividad (Moreno, 2001) tuvo como fin encontrar una interpretación equivalente de las condiciones

de existencia de los OED utilizando una herramienta muy utilizada en el diseño de controladores y observadores, como es la pasividad.

Por tanto, la motivación para realizar este trabajo fue proporcionar una caracterización de las condiciones de existencia de los OED que resulte útil para su construcción y diseño. Para llevar a cabo este fin se seleccionó el concepto de disipatividad, el cual generaliza el concepto de pasividad al caso en que exista un número diferente de entradas y salidas definidas en el sistema (sistemas denominados *no cuadrados*).

La disipatividad es un concepto energético con una interpretación física directa: un sistema es disipativo si la energía que almacena es menor a la que se le suministra (Byrnes *et al.*, 1991). De la teoría de sistemas, la energía o potencia suministrada a un sistema es proporcional al producto de la entrada y la salida, como por ejemplo en circuitos eléctricos donde la entrada sea un voltaje y la salida una corriente. De esta forma, la disipatividad es un concepto entrada-salida.

Dentro de la teoría de control, los sistemas disipativos resultan atractivos debido a que si un sistema es disipativo y su entrada es cero o alguna función explícita del tiempo, este mismo sistema es estable en el sentido de Lyapunov. Aún más, la clase de sistemas disipativos puede ampliarse, pues si bien algunos sistemas no son disipativos por naturaleza, bajo ciertas condiciones pueden convertirse en disipativos, ya sea por medio de una retroalimentación de los estados o de la salida (Byrnes *et al.*, 1991; Sepulchre *et al.*, 1997; Lin, 1995; Lin, 1996), o por medio de una inyección de la salida (Rocha-Cózatl y Moreno, 2001).

Debido a esto, recientemente la disipatividad, o un poco más en particular, la pasividad, ha sido utilizada para el diseño de controladores principalmente, pues además ofrece un enfoque constructivo (Sepulchre *et al.*, 1997; Kokotovic y Arcak, 2001). Además de este enfoque constructivo, los diseños basados en disipatividad (pasividad) ofrecen otras características adicionales. Por ejemplo, al ser la disipatividad un concepto energético, es posible una interpretación física de las relaciones entrada-salida de las variables del sistema de interés; por otro lado, al cumplir una propiedad estructural del sistema, los diseños basados en disipatividad poseen propiedades de robustez ante incertidumbre paramétrica. Existen trabajos que presentan resultados relacionados a la estabilización robusta utilizando conceptos de disipatividad (pasividad) (Lin y Shen, 1999).

El objetivo principal de este trabajo de tesis fue obtener una caracterización de las condiciones de existencia de los observadores con entradas desconocidas basada en propiedades de disipatividad, con el fin de utilizarla en la construcción y el diseño de los observadores.

Cabe mencionar que esta idea de utilizar conceptos de pasividad o disipatividad para el diseño de observadores también ha sido utilizada en (Shim *et al.*, 2003) para el caso en que no se consideran

entradas desconocidas en el modelo de la planta.

1.4. Contribución principal del trabajo

En este trabajo se muestran condiciones suficientes para la existencia de los OED en términos de propiedades de disipatividad. En particular, una de las condiciones es una clase especial de disipatividad que puede ser entendida como una propiedad de disipatividad incremental de la planta (Desoer y Vidyasagar, 1975) o como una propiedad de disipatividad de un sistema error, el cual se construye con la planta y una copia de ella.

El hecho de que la planta posea esta propiedad de disipatividad incremental es una de las condiciones suficientes para la existencia de un OED en el caso no lineal general. Además de la suficiencia, en este trabajo se discute también sobre la necesidad de esta condición: se demuestra que la propiedad de disipatividad requerida implica una propiedad de detectabilidad con entradas desconocida, la cual, a su vez, es una condición necesaria para la existencia del OED.

En el caso no lineal, es factible aplicar este método al motor de inducción, el cual posee la propiedad de disipatividad requerida. Sin embargo, al considerar sistemas no lineales generales, no ha sido posible proponer un método de diseño.

Seleccionando una clase de sistemas no lineales con una estructura particular, es posible proponer un diseño sistemático de los observadores basado en la solución de una desigualdad matricial (que en muchas circunstancias es lineal), lo cual representa otra ventaja de utilizar métodos basados en disipatividad para el diseño. El diseño propuesto, además, generaliza los diseños propuestos en (Arcak y Kokotovic, 2001a; Arcak *et al.*, 2003) del criterio del círculo, los observadores de alta ganancia (Besançon, 1999a; Bornard y Hammouri, 1991) y los observadores Lipschitz (Rajamani, 1998).

La clase de sistemas no lineales considerada incluye a los sistemas lineales invariantes en el tiempo, por lo que en este caso el diseño de OED también se basa en la solución de una desigualdad matricial (lineal).

1.5. Organización del documento

Este documento está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentan los preliminares del trabajo, es decir, la definición y el manejo de los conceptos básicos que se utilizan a lo largo de este documento. Después, en el tercer capítulo se presenta el resultado más general obtenido para sistemas no lineales: una caracterización de las condiciones de existencia de los OED

en términos de propiedades de disipatividad. A continuación, en el Capítulo 4 se presentan algunas implicaciones interesantes del resultado general al caso particular de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, así como un diseño de OED basado en una desigualdad matricial. En el Capítulo 5 la caracterización disipativa obtenida en general es aplicada a una clase grande de sistemas no lineales, obteniéndose un método de diseño de observadores con entradas desconocidas no lineales. Finalmente, en el Capítulo 6 se discuten las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Planteamiento del problema y preliminares

El objetivo de este capítulo es establecer el problema que se trata en este trabajo, así como también las definiciones y conceptos básicos que sirven de antecedentes de los desarrollos que se presentarán más adelante.

La clase de sistemas considerada para presentar el resultado más general de este trabajo es la siguiente. Sea un sistema no lineal afín en la entrada desconocida Σ , representado en variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + g(x)w, & x(0) &= x_0, \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, D_x es un dominio de \mathbb{R}^n , $u \in \mathbb{R}^m$ el vector de entradas conocidas, $w \in \mathbb{R}^q$ el vector de entradas desconocidas, $y \in \mathbb{R}^p$ el vector de salidas, y

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{bmatrix} g_1(x) & \dots & g_q(x) \end{bmatrix} \\ h(x) &= \text{col} \begin{pmatrix} h_1(x) & \dots & h_p(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se asumirá que $f(x, u)$ y las q columnas de $g(x)$ son campos vectoriales suaves definidos en $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $x \in \mathbb{R}^n$, respectivamente, y las componentes de $h(x)$ son funciones suaves definida en $x \in \mathbb{R}^n$. Se asume también que las señales $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $w(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$ pertenecen a algún espacio de funciones \mathcal{U} y \mathcal{W} , respectivamente.

Denótese como $x(t, x_0, u(\cdot), w(\cdot))$ la solución de (2.1) que pasa por x_0 en $t = 0$ y correspondiente a las entradas $u(\cdot)$, $w(\cdot)$, y como $y(t, x_0, u(\cdot), w(\cdot)) = h(x(t, x_0, u(\cdot), w(\cdot)))$ la salida correspondiente. Cuando no exista posibilidad de confusión, estas funciones se denotarán simplemente por $x(t)$ e $y(t)$.

Se asumirá también que el sistema (2.1) es completo, es decir, que las trayectorias del sistema $x(t)$ están definidas para todo $t \geq 0$, para toda condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, toda entrada conocida $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ y toda entrada desconocida $w(\cdot) \in \mathcal{W}$. Esto quiere decir que los espacios de funciones \mathcal{U} y \mathcal{W} deben ser tales que se asegure la existencia y unicidad de las soluciones de (2.1).

En el sistema (2.1) se puede ver que si w es arbitraria y desconocida, aún cuando $g(x)$ sea conocido, todo el término $g(x)w$ resulta desconocido. Aún más, como w no es utilizada por un OED de Σ , el mismo observador es un OED para cualquier sistema de la forma (2.1) con $w = g_n(x, u, \bar{w})$, donde \bar{w} es una nueva entrada desconocida. Esto permite considerar sistemas más generales que (2.1). Por ejemplo, sistemas no lineales en la entrada desconocida $\dot{x} = \bar{f}(x, u, \bar{w})$ pueden ser considerados si en (2.1) se toma $f(x, u) = \bar{f}(x, u, 0)$, y se selecciona $g(x)w$ de tal manera que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ el conjunto imagen de $g(x)w$ para toda w contenga al conjunto imagen de $\bar{f}(x, u, \bar{w}) - \bar{f}(x, u, 0)$ para toda \bar{w} , es decir, $\{a \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{w} \in \mathbb{R}^q, a = \bar{f}(x, u, \bar{w}) - \bar{f}(x, u, 0)\} \subseteq \{a \in \mathbb{R}^n \mid \exists w \in \mathbb{R}^q, a = g(x)w\}$.

Por tanto, la estructura de la clase de sistemas no lineales considerados no resulta restrictiva en cuanto a la manera como entra la entrada desconocida en el modelo.

De una manera similar, si (2.1) tiene un OED, entonces ese observador con una pequeña modificación es también un OED para un sistema con la misma dinámica que (2.1) pero con una salida definida como $\bar{y} = \rho(y) = \rho \circ h(x)$, donde ρ es un homeomorfismo, es decir, una función continua con una inversa también continua.

Antes de seguir con el planteamiento del problema, a continuación se presentan las siguientes definiciones de las funciones de clase \mathcal{K} y \mathcal{KL} , las cuales serán utilizadas a lo largo del documento.

Definición 1 (Khalil, 2002) *Se dice que una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ pertenece a la clase de funciones \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase de funciones \mathcal{K}_∞ si $a = \infty$ y si $\alpha(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.*

Definición 2 (Khalil, 2002) *Se dice que una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ pertenece a la clase de funciones \mathcal{KL} si, para cada s fija, el mapeo $\beta(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r y, si para cada r fija, el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.*

2.1. Planteamiento del problema

En el presente trabajo se considera el problema de estimación robusta de estados: utilizar la información medible, u e y , con el fin de estimar convergentemente los estados de un sistema,

x , a pesar de contener en su modelo entradas indeterminadas o desconocidas, w . En particular, se estudia la existencia y diseño de los observadores (estimadores) de estados que resuelven ese problema de estimación robusta.

Antes de definir formalmente lo que es un Observador con Entradas Desconocidas (OED) a continuación se comentan algunas interpretaciones posibles para la entrada que se ha denominado como entrada desconocida.

Como se ha comentado en la sección anterior, la entrada w es una entrada arbitraria y desconocida, por lo que puede interpretarse de varias formas. Por ejemplo puede ser una perturbación que se desvanece en el tiempo, una perturbación que no se desvanece, una señal de ruido que entra a la planta, algún tipo de incertidumbre en los parámetros de la misma planta o incluso una dinámica no modelada (no lineal, discontinua, por ejemplo).

Cuando se presenta el caso en que w represente una incertidumbre en los parámetros de la planta, el OED que se construirá será entonces un observador robusto, en el sentido utilizado convencionalmente (Zhou *et al.*, 1995).

Otro caso interesante que puede comentarse se presenta cuando w representa una dinámica no lineal, incluso cuando no está modelada. Si en la ecuación de estado de tuviera por ejemplo una dinámica no lineal, quizá discontinua, se tendrían varios problemas entre los que destacan la determinación de la existencia y unicidad de las soluciones y la apropiada manipulación de las ecuaciones para el diseño del observador. Sin embargo, si esa dinámica puede incluirse en su totalidad en un solo término, éste puede ser sustituido por un término w . Así, si se construye un observador independiente de esa w , el observador trabajará apropiadamente a pesar de la dinámica problemática (e incluso a pesar de dinámicas no modeladas realmente).

A continuación se define el concepto de Observador con Entradas Desconocidas que se utiliza para solucionar el problema de estimación robusta para sistemas no lineales.

Definición 3 (Moreno, 2000a; Moreno, 2000b) *Sea un sistema dinámico de dimensión finita con las variables (u, y) como entrada y con salida \hat{x}*

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \pi(\zeta, u, y) \ , \quad \zeta(0) = \zeta_0 \\ \hat{x} &= \chi(\zeta, u, y) \ ,\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde $\zeta \in D_\zeta \subset \mathbb{R}^m$ es el vector de estados, π y χ son funciones suficientemente suaves definidas en $(\zeta, u, y) \in D_\zeta \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, donde D_ζ es un dominio de \mathbb{R}^m . Denótese por $\zeta(t, \zeta_0, u, y)$ la solución de (2.2) correspondiente a las funciones u e y que pasan por ζ_0 en $t = 0$. El sistema (2.2) se denomina un observador con entradas desconocidas (OED) del sistema (2.1) en un subconjunto $\mathbb{X} \subset D_x \subset \mathbb{R}^n$ si se satisfacen las siguientes cuatro condiciones:

O1. Los sistemas (2.1) y (2.2) tienen soluciones únicas y definidas para todo tiempo positivo, para cada condición inicial $x(0) = x_0 \in D_x$, $\zeta(0) = \zeta_0 \in D_\zeta$, para toda $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ y para toda función $w(\cdot) \in \mathcal{W}$, tales que las trayectorias permanezcan en las regiones de definición;

O2. Existe un ζ_0 , tal que si $x_0 = \hat{x}_0 \triangleq \chi(\zeta_0, u(0), h(x_0))$ entonces

$$x(t, x_0, u, w) = \hat{x}(t, \zeta_0, u, y) \triangleq \chi(\zeta(t, \zeta_0, u, y), u, y)$$

para todo $t \geq 0$, $u \in \mathcal{U}$ y entrada desconocida $w \in \mathcal{W}$, donde $y \triangleq h(x(t, x_0, u, w))$;

O3. Existe un subconjunto $V \subset D_\zeta$ tal que $x_0 \in \mathbb{X}$ y $\zeta_0 \in V$ implican que $x(t, x_0, u, w) \in \mathbb{X}$ y $\hat{x}(t, \zeta_0, u, y) \in V$ para todo $t \geq 0$, $u \in \mathcal{U}$, $w \in \mathcal{W}$, y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t, \zeta_0, u, y) - x(t, x_0, u, w)\| = 0. \quad (2.3)$$

Se hace notar que esta convergencia puede escribirse también de la siguiente manera

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \gamma(\|x(0) - \hat{x}(0)\|, t) \quad (2.4)$$

donde $\gamma(\cdot)$ es una función de clase \mathcal{KL} .

O4. En el sistema (2.2) no existe información explícita de las derivadas de las funciones $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$, ni información de la entrada desconocida $w(\cdot)$.

Se dice que el sistema (2.1) posee un observador global si existe un observador (2.2) en D_x , un observador semiglobal si existe un observador para cada subconjunto compacto de D_x , y un observador local en x^0 si existe un observador en una vecindad de x^0 . Adicionalmente se pueden distinguir tres clases de observadores, de acuerdo a la dimensión del estado del observador ζ : de orden reducido, de orden completo y de orden extendido.

Aunque en (Moreno, 2000b) se han presentado condiciones de existencia para este tipo de observadores, la idea desarrollada aquí es plantear condiciones suficientes de existencia con ayuda del concepto de disipatividad.

Con el fin de llegar a una caracterización de las condiciones de existencia de los OED en términos de propiedades de disipatividad, en las siguientes secciones de este capítulo se realizan definiciones de conceptos que resultan de gran utilidad para ello.

2.2. Sistema Error

Existe un concepto que, aunque no es esencial en el estudio que se realizó, es de utilidad para comprender de mejor manera los resultados que se presentarán más adelante. Este concepto es el de sistema error de la planta no lineal (2.1) y se muestra a continuación

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + g(x)w , & x(0) = x_0 , \\ \dot{\bar{\zeta}} = f(\bar{\zeta}, u) + g(\bar{\zeta})\tilde{w} , & \bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}_0 , \\ e = h(x) - h(\bar{\zeta}) . \end{cases} \quad (2.5)$$

El sistema error Σ_e consiste en dos copias de la planta. Cada copia tiene su propio estado, x y $\bar{\zeta}$, respectivamente; en cuanto a las entradas, la parte conocida u es la misma para ambas copias, pero cada una de ellas tiene una entrada desconocida distinta, $w \neq \tilde{w}$; la salida de este sistema error es la diferencia entre las salidas de cada copia. Por medio de un cambio difeomórfico de coordenadas $T : (x, \bar{\zeta}) \rightarrow (x, \epsilon) = (x, x - \bar{\zeta})$ el sistema Σ_e puede ser representado en una forma más útil

$$\tilde{\Sigma}_e : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + g(x)w , & x(0) = x_0 , \\ \dot{\epsilon} = F(\epsilon; x; u) + G(\epsilon; x; w, \tilde{w}) , & \epsilon(0) = \epsilon_0 , \\ e = H(\epsilon; x) , \end{cases} \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} F(\epsilon; x; u) &\triangleq f(x, u) - f(x - \epsilon, u) \\ G(\epsilon; x; w, \tilde{w}) &\triangleq g(x)w - g(x - \epsilon)\tilde{w} \\ H(\epsilon; x) &\triangleq h(x) - h(x - \epsilon) \end{aligned}$$

Tómese en cuenta que $F(0; x; u) = 0$ y $H(0; x) = 0$ para todo x y u . Además, $F(-\epsilon; x - \epsilon; u) = -F(\epsilon; x; u)$ y $H(-\epsilon; x - \epsilon) = -H(\epsilon; x)$.

Por otro lado, $G(0; x; w, \tilde{w}) = g(x)(w - \tilde{w})$ y si una de las entradas desconocidas es cero $G(\epsilon; x; w, 0) = g(x)w$ para todo x .

El sistema $\tilde{\Sigma}_e$ puede ser interpretado como la interconexión en serie de la planta Σ y el error

$$\Xi : \begin{cases} \dot{\epsilon} = F(\epsilon; x; u) + G(\epsilon; x; w, \tilde{w}) , & \epsilon(0) = \epsilon_0 , \\ e = H(\epsilon; x) . \end{cases} \quad (2.7)$$

Este sistema error resulta útil para definir y entender algunos conceptos relacionados a la existencia de los OED: indistinguibilidad de estados, observabilidad y detectabilidad.

Considere por el momento un sistema sin entradas desconocidas. La idea de indistinguibilidad de los estados se puede ejemplificar en la Figura 2.1, en donde se puede ver el caso en que dos condiciones iniciales, x_0 y \tilde{x}_0 , bajo la misma entrada u , producen el mismo par entrada-salida (u, y) .

En esta figura, el conjunto de la izquierda denota el conjunto de condiciones iniciales posibles del sistema, en el conjunto de la derecha se agrupa el par conocido de funciones del tiempo (medibles y definidas en algún intervalo) entrada-salida (u, y) , mientras que F denota el mapa que asigna un par medible (u, y) a cada condición inicial. En este contexto funcional, se podría decir que la distinguibilidad de estados se refiere a que el mapa F de la Figura 2.1 sea inyectivo y la observabilidad se podría interpretar entonces como la posibilidad (o imposibilidad en este caso) de invertir el mapa F y determinar el estado inicial con ayuda de la pareja entrada-salida.

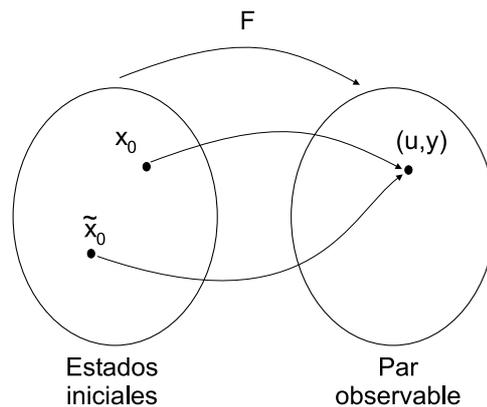


Figura 2.1: Indistinguibilidad de estados.

Cuando en el caso más general se considera que existen entradas desconocidas adicionales, éstas representan un grado más de libertad dentro del análisis de indistinguibilidad, pues el efecto de dos entradas desconocidas distintas puede producir ahora dos salidas iguales aún a pesar de que los estados iniciales sean distintos o, aún más, a pesar de que esos estados iniciales produzcan salidas distintas cuando no existen entradas desconocidas. La Figura 2.2 muestra este aumento en el grado de libertad en cuanto a los elementos desconocidos. En términos de funciones, esto implicaría la existencia de un tercer conjunto que contuviera las entradas desconocidas posibles. Por tanto el mapa F tiene ahora dos variables independientes $(x_0$ y w) y entonces una combinación de ellas podría generar la misma salida.

En otras palabras, cuando existen entradas desconocidas en el sistema, se genera un nuevo problema, denominado *estimación de los estados con entradas desconocidas*. Este problema contiene entonces al de estimación usual cuando las entradas desconocidas no son consideradas o son consideradas nulas.

En la Figura 2.3 se presenta un esquema en donde se ilustra la indistinguibilidad con entradas desconocidas. El conjunto de la izquierda también en este caso representa el conjunto de estados iniciales posibles.

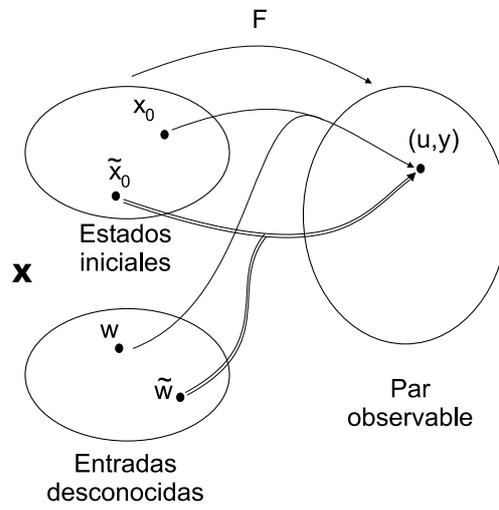


Figura 2.2: Indistinguibilidad de estados con entradas desconocidas.

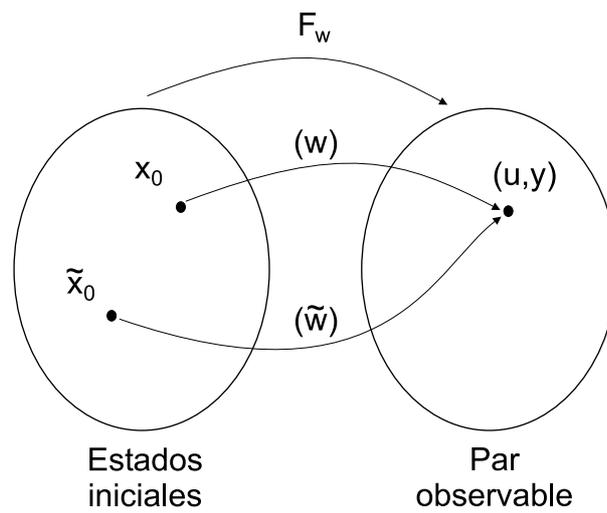


Figura 2.3: Indistinguibilidad con entradas desconocidas.

Por otro lado, la definición de detectabilidad se puede explicar de la siguiente manera. Supóngase que existe un par de condiciones iniciales que con la misma entrada producen la misma salida, por lo tanto, existen estados indistinguibles y el sistema entonces no es observable; sin embargo, si las dos trayectorias de estado $x(t)$ correspondientes a condiciones iniciales diferentes y a la entrada $u(t)$ convergen a una sola, entonces se dice que el sistema es detectable, es decir, a pesar de que el sistema no es observable, las condiciones iniciales que producen la misma salida generan asintóticamente una sola trayectoria de estado $x(t)$, por lo que, una vez que éstas convergen, a cada trayectoria de estado le corresponde una sola salida y viceversa, haciéndose posible la estimación de las trayectorias de estado a partir de la entrada y de la salida. De aquí que la teoría de control establezca que esta detectabilidad de estados es una condición necesaria para la existencia de observadores asintóticos de los estados de un sistema.

Estas ideas de distinguibilidad, observabilidad y detectabilidad se pueden plantear en términos del sistema error (2.8): si las salidas de cada copia de la planta son iguales, entonces en (2.8) se tiene que $e = 0$. Si existe distinguibilidad de estados (y por lo tanto observabilidad), entonces $e = 0$ implica que la única solución de la ecuación algebro-diferencial (2.7) es $\epsilon = 0$; mientras que si existe indistinguibilidad de estados, existen más soluciones distintas de cero $\epsilon \neq 0$. Desde esta perspectiva, la detectabilidad se da cuando para las soluciones de ϵ distintas de cero, $\epsilon \rightarrow 0$.

Además de la interpretación en términos de propiedades de observabilidad y detectabilidad que se acaba de presentar, mediante la definición del sistema error (2.6) también se pueden definir propiedades incrementales de la planta (Desoer y Vidyasagar, 1975), así como analizar el error de observación.

En este último caso, el error de estimación se construye a partir de un sistema con entrada desconocida (la planta) y un sistema sin entrada desconocida (el observador). Es por eso que en los siguientes capítulos, en la construcción del sistema error se considerará la segunda entrada desconocida $\tilde{w} = 0$, con lo cual el sistema error queda de la siguiente forma.

$$\tilde{\Sigma}_e : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + g(x)w, & x(0) = x_0, \\ \dot{\epsilon} = F(\epsilon; x; u) + g(x)w, & \epsilon(0) = \epsilon_0, \\ e = H(\epsilon; x), \end{cases} \quad (2.8)$$

Comentario 1 *Un caso especial se presenta cuando $g(x) = B$ es una matriz de elementos constantes y de rango completo (sin pérdida de generalidad). En ese caso no importa si las dos entradas desconocidas (w, \tilde{w}) están presentes o si una se considera cero. En ambos casos, el grado relativo estaría bien definido y sería igual a uno con respecto a cada una de las entradas, lo que facilita la determinación de una transformación que desacople el sistema de la entrada desconocida.*

2.3. Disipatividad

La disipatividad (Willems, 1972a; Willems, 1972b; Hill y Moylan, 1980) es un concepto entrada-salida que tiene una interpretación física (de tipo energético) muy clara: un sistema disipativo es aquel sistema que consiste de elementos que almacenan o disipan energía, pero no la generan.

En el caso particular en que el número de entradas y salidas de un sistema es igual y la potencia suministrada al sistema corresponde al producto interior de la entrada y la salida, el concepto de disipatividad se denomina pasividad (Byrnes *et al.*, 1991; Sepulchre *et al.*, 1997; Ortega *et al.*, 1998). La pasividad tuvo su inicio en el análisis de interconexiones de sistemas con funciones de transferencia racionales, que se podían realizar con resistencias, inductancias y capacitancias pasivas, es decir, que no generan energía, sólo la almacenan o la disipan. Estas funciones de transferencia tienen la característica de ser *positivas reales*, es decir, las partes reales de las funciones de transferencia son positivas para toda frecuencia. En los años sesenta el Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) relacionó este concepto de pasividad con el análisis de estabilidad de Lyapunov. A partir de este resultado, la pasividad comenzó a utilizarse como herramienta para estudiar la estabilización de sistemas lineales y posteriormente fue generalizada para sistemas no lineales.

Se considera que la aportación más importante de este concepto, y asimismo una de las leyes fundamentales de la retroalimentación, es la siguiente: un lazo de retroalimentación negativa que consta de dos sistemas pasivos es pasivo. Bajo una condición adicional (de detectabilidad) el lazo de retroalimentación es también estable en el sentido de Lyapunov. En el área del control automático es evidente el interés y la búsqueda de sistemas estables. Por tanto, la consecuencia de este resultado principal es un vasto conjunto de aplicaciones, como por ejemplo en el diseño de controladores y estimadores de estados.

La clase de sistemas disipativos puede ser ampliada, pues existe una clase más grande de sistemas que sin ser disipativos de origen, pueden hacerse disipativos por diversos medios, como pueden ser una retroalimentación de estados o de salidas o una inyección de las salidas. Con esto se obtiene el concepto de disipativización (o en particular pasivización): si un sistema no disipativo (pasivo) se convierte en uno disipativo (pasivo) por alguno de los medios antes mencionados, se dice que el sistema ha sido sujeto de una disipativización (pasivización).

2.3.1. Definiciones

En esta sección se realiza la formalización de los conceptos de disipatividad y pasividad mencionados. Considere el sistema no lineal (2.1), pero sin entradas desconocidas, con $f(x, u) =$

$f_s(x) + g_s(x)u$ y salida y

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_s(x) + g_s(x)u, \\ y &= h_s(x)\end{aligned}\tag{2.9}$$

Definición 4 *Considere el sistema no lineal (2.9) con $u = 0$. Asúma también que $f_s(0) = 0$. El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema resultante*

$$\dot{x} = f_s(x) , \tag{2.10}$$

1. *es estable en el sentido Lyapunov si, para cada $\bar{\varepsilon} > 0$, existe $\delta(\bar{\varepsilon}) > 0$ tal que $\|x_0\| < \delta$ implica que $\|x(t)\| < \bar{\varepsilon}$ para todo $t \geq 0$.*
2. *es (globalmente) asintóticamente estable en el sentido Lyapunov si es estable y existe una constante $\delta > 0$ tal que $\|x_0\| < \delta$ (para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$) implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.*
3. *es (globalmente) exponencialmente estable en el sentido Lyapunov si es estable y existe una constante $\delta > 0$ tal que $\|x_0\| < \delta$ (para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$) implica que existen constantes c_1 y c_2 , tal que $\|x(t)\| \leq c_1 \|x(0)\| e^{-c_2 t}$.*

El concepto general de disipatividad para sistemas representados en el espacio de estados se define con base en funciones de energía y en un balance de las mismas, como se describe enseguida.

Por un lado, la potencia suministrada al sistema (2.9) puede calcularse mediante una función que depende de los vectores de entrada y salida, u e y , respectivamente.

Definición 5 *(Byrnes et al., 1991) Sea ω una función real definida en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ denominada función de potencia suministrada. Se asume que para cualquier $u(t)$ y para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la salida $y(t) = h(x(t), x_0, u)$ de (2.9) es tal que $\omega(\tau) = \omega(u(\tau), y(\tau))$ satisface*

$$\int_0^t |\omega(\tau)| d\tau < \infty \quad \forall t \geq 0$$

Nótese que la integral de la potencia suministrada ω representa la energía suministrada al sistema.

Definiendo una función de almacenamiento de energía $V(x)$ que depende de los estados, ya que éstos se relacionan con los elementos capaces de almacenar energía en el sistema, se dice que el sistema (2.9) es *disipativo* si la energía suministrada es mayor o igual que la energía almacenada en el sistema.

Definición 6 *(Byrnes et al., 1991) El sistema (2.9) es C^r -disipativo (respectivamente C^r - estrictamente disipativo), con $r \geq 0$, si existe una función ¹ C^r no negativa $V(x)$, con $V(0) = 0$, una*

¹Una función con k derivadas continuas es llamada función C^k . De esta forma C^0 se refiere a las funciones continuas y C^∞ a las funciones suaves

función semipositiva definida (respectivamente positiva definida) $S^*(x)$ tal que para toda $u \in \mathcal{L}_{2e}$, todo $t \geq 0$ y toda solución de (2.9) se satisface que

$$V(x(t)) - V(x_0) \leq \int_0^t \omega(\tau) d\tau - \int_0^t S^*(x(\tau)) d\tau . \quad (2.11)$$

De aquí se puede concluir que, si además $V(x)$ es radialmente no acotada ($\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$) un sistema (estrictamente) disipativo, para una entrada $u(t) \equiv 0$, tiene a $x = 0$ como punto de equilibrio globalmente estable (respectivamente global y asintóticamente estable)(Byrnes *et al.*, 1991).

En el caso en que $\omega(\tau) = y^T(\tau)u(\tau)$ esta propiedad se denomina *pasividad*.

Comentario 2 En este trabajo se usará frecuentemente una forma particular de disipatividad cuando la función de potencia suministrada es

$$\omega(u, y) = y^T \mathbb{S}^T u$$

donde \mathbb{S} es una matriz de elementos constantes de dimensión $m \times p$.

Esta forma de disipatividad se puede reinterpretar en términos de pasividad. Si $\mathbb{S} = I$ entonces se recupera el concepto de pasividad². Si $\mathbb{S} \neq I$ y se define una nueva salida como $\tilde{y} = \mathbb{S}y$, entonces se puede hablar de pasividad de la entrada u a la salida \tilde{y} .

2.3.2. Disipativización

Una clase más amplia de sistemas es aquella que puede hacerse disipativa por algún medio, es decir, que sean disipativizables. Cabe señalar que en este trabajo son de particular interés los sistemas disipativizables por medio de una inyección de salidas, a pesar de que la forma más común de disipativizar un sistema es por medio de una retroalimentación de estados o de salidas. Para ver detalles con respecto a la disipativización (pasivización) por retroalimentación de los estados o de las salidas, véase (Byrnes *et al.*, 1991; Sepulchre *et al.*, 1997; Fradkov y Hill, 1998).

Definición 7 (Rocha-Cózatl y Moreno, 2001) Se dice que el sistema (2.9) es C^r -globalmente (estrictamente) disipativo por inyección de salida (EDIS) si existe una función suave $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, para la cual $L(0) = 0$, y una función $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$ suave y regular $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tal que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_s(x) + g_s(x)u + L(y) , \\ y &= h_s(x) \\ \tilde{y} &= R(x)y \end{aligned} \quad (2.12)$$

sea C^r - (estrictamente) disipativo, para todo $x \in \mathbb{R}^n$; tomando u como la entrada e \tilde{y} como la salida.

²A lo largo del documento se denotará como I la matriz identidad y cuando sea necesario I_n , donde n indicará la dimensión de la matriz identidad

En la anterior definición se establece una forma de disipativizar un sistema y en (Rocha-Cózatl y Moreno, 2001) se presentan condiciones suficientes para disipativizar un sistema no lineal de esta forma. Sin embargo, existe un resultado más general (Shishkin y Fradkov, 1997), en el cual se dan condiciones necesarias y suficientes para resolver la desigualdad con la que se demuestra la disipatividad 2.11, considerando sistemas no lineales afines en la entrada.

2.3.3. Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

En el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, el lema de Kalman-Yakubovich-Popov (del cual existe una versión no lineal (Sepulchre *et al.*, 1997)) se utiliza para concluir si un sistema representado en el espacio de estados es o no (estrictamente) disipativo, tomando la forma especial de disipatividad mencionada en el Comentario 2.

Lema 1 (Chen, 1984) *Sea el sistema lineal invariante en el tiempo*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$. Asuma que A es Hurwitz, (A, B) es controlable y (A, C) es observable. Entonces el sistema (2.13) es estrictamente disipativo si y sólo si existe una matriz simétrica y positiva definida P , una matriz S , y una constante positiva λ , tales que

$$\begin{aligned}PA + A^T P &< -\lambda P \\ PB &= (SC)^T\end{aligned}\tag{2.14}$$

Comentario 3 Si $S = I$, lo que implicaría $p = m$, entonces el sistema tiene una matriz de transferencia $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ de dimensión $m \times m$ que es estrictamente positiva real.

Una ventaja de establecer de esta forma si un sistema es disipativo, es que la solución de la expresión (2.14) puede obtenerse solucionando la desigualdad matricial (MI por sus siglas en inglés, *Matrix Inequality*)

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \lambda P & (PB)^T - SC \\ PB - (SC)^T & 0 \end{bmatrix} < 0\tag{2.15}$$

Esta desigualdad matricial es lineal (LMI por sus siglas en inglés) en las incógnitas P , λ , S , si el término λP se sustituye por ejemplo por λI .

Actualmente existen diversos algoritmos numéricos para resolver las desigualdades matriciales lineales como los que existen en el *LMI Toolbox* del software Matlab[©].

2.3.4. Disipatividad Parcial

En esta sección y en la siguiente se definen dos clases particulares de disipatividad que se requieren más adelante: la disipatividad parcial y la disipatividad incremental.

Con el fin de definir formalmente la primera de estas propiedades, se presentan los siguientes resultados, los cuales se basan en el concepto de estabilidad parcial (Chellaboina y Haddad, 2002).

Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) + g_1(x_1, x_2) w, & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) + g_2(x_1, x_2) w, & x_2(0) &= x_{20}, \\ y &= h(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $x_1 \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, \mathcal{D} es un conjunto abierto con $0 \in \mathcal{D}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$, $f_1 : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ es tal que para cada $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $f_1(0, x_2, 0) = 0$, y $f_1(\cdot, x_2, u)$ es localmente Lipschitz en x_1 , $f_2 : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ es tal que, para cada $x_1 \in \mathcal{D}$ y cada $u \in \mathbb{R}^m$, $f_2(x_1, \cdot, u)$ es localmente Lipschitz en x_2 . Las siguientes son definiciones de estabilidad parcial:

Definición 8 Considere que para el sistema no lineal (2.16) se hace $w = 0$. El sistema resultante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u), \end{aligned} \quad (2.17)$$

1. es estable en el sentido Lyapunov con respecto a x_1 uniformemente en x_{20} y en u si, para cada $\bar{\varepsilon} > 0$, existe $\delta(\bar{\varepsilon}) > 0$ tal que $\|x_{10}\| < \delta$ implica que $\|x_1(t)\| < \bar{\varepsilon}$ para todo $t \geq 0$ y para todo $x_{20} \in \mathbb{R}^{n_2}$ y todo $u \in \mathbb{R}^m$.
2. es (globalmente) asintóticamente estable con respecto a x_1 uniformemente en x_{20} si es estable en el sentido Lyapunov con respecto a x_1 uniformemente en x_{20} y en u y existe $\delta > 0$ tal que $\|x_{10}\| < \delta$ (para cada $x_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}$) implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$ para todo $x_{20} \in \mathbb{R}^{n_2}$ y todo $u \in \mathbb{R}^m$.

Una caracterización del tipo Lyapunov está dada por

Teorema 1 Considere el sistema no lineal (2.17). Se puede demostrar que

1. Si existe una función continuamente diferenciable $V : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ y funciones clase \mathcal{K} $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$, $\alpha_3(\cdot)$ que para $(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^{n_2}$ satisfacen

$$\alpha_1(\|x_1\|) \leq V(x_1, x_2) \leq \alpha_2(\|x_1\|), \quad (2.18)$$

y

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -\alpha_3(\|x_1\|) , \quad (2.19)$$

entonces el sistema dinámico no lineal (2.17) es asintóticamente estable con respecto a x_1 uniformemente en x_2 y en u .

2. Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{n_1}$ y existe una función continuamente diferenciable $V : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, una función clase \mathcal{K} $\alpha_3(\cdot)$, y funciones clase \mathcal{K}_∞ $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$, que satisfacen (2.18) y (2.19), entonces el sistema dinámico no lineal (2.17) es globalmente asintóticamente estable con respecto a x_1 uniformemente en x_2 y en u .

A continuación se define la propiedad de disipatividad parcial.

Definición 9 Se dice que el sistema (2.16) es Parcialmente Estrictamente Disipativo (PED) con respecto a x_1 si existe: (a) una función de almacenamiento continuamente diferenciable $V(x_1, x_2)$, positiva definida en x_1 , uniformemente en x_2 , es decir, se satisface para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$

$$\alpha_1(\|x_1\|) \leq V(x_1, x_2) \leq \alpha_2(\|x_1\|)$$

para algunas funciones $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ ; y (b) una matriz de rango fila completo $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^{q \times m}$, tal que a lo largo de las trayectorias del sistema (2.16) (con condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$) se satisface para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x_1\|) + w^T \mathbb{S}y , \quad (2.20)$$

para una función $\alpha_3(\cdot)$ de clase \mathcal{K} .

El sistema (2.16) se dice que es parcialmente disipativo porque las funciones $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ que acotan la función de almacenamiento $V(\cdot)$ y la función $\alpha_3(\cdot)$ de clase \mathcal{K} pueden depender solo de x_1 . Note que si el sistema (2.16) es PED, entonces (2.16) es (parcialmente) estrictamente pasivo con respecto a una nueva salida $\mathbb{S}y$. La disipatividad parcial estricta corresponde a la disipatividad estándar (Byrnes *et al.*, 1991), pero con una función de almacenamiento solamente positiva semidefinida.

Comentario 4 Una descripción alternativa de la disipatividad parcial puede ser realizada utilizando el concepto de estabilidad con respecto a conjuntos (Angeli, 2002; Lin *et al.*, 1996), como se hace en (Shim *et al.*, 2003).

2.3.5. Disipatividad Incremental

Existe una definición especial de disipatividad que se denomina disipatividad incremental. Esta propiedad se considera como una propiedad de la planta; sin embargo, también puede considerarse como una propiedad de disipatividad de un sistema error construido a partir de la planta. En el caso de la pasividad (mismo número de entradas que de salidas) esta propiedad ya fue definida en (Desoer y Vidyasagar, 1975).

Considerando la planta (2.9) y construyendo un sistema error utilizando dos copias de la planta se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_s(x) + g_s(x)u, & x(0) &= x_0, \\ \dot{\epsilon} &= F_s(\epsilon; x) + g_s(x)u, & \epsilon(0) &= \epsilon_0, \\ e &= H_s(\epsilon; x),\end{aligned}\tag{2.21}$$

donde $F_s(\epsilon; x) = f_s(x) - f_s(x - \epsilon)$, $H_s(\epsilon; x) = h_s(x) - h_s(x - \epsilon)$.

Definición 10 *Se dice que el sistema (2.9) es disipativo incrementalmente si el sistema error (2.21) con entrada u y salida e es parcialmente estrictamente disipativo con respecto a ϵ .*

Comentario 5 *La disipatividad incremental es una propiedad más fuerte que la disipatividad usual. Sin embargo, ambas resultan equivalentes para los sistemas lineales, para los cuales el sistema error resulta una copia exacta de la planta. En (2.9), tómesese $f_s(x) = Ax$, $g_s(x) = B$ y $h_s(x) = C$, donde A , B , y C son matrices de elementos constantes de las dimensiones apropiadas. Sustituyendo en (2.21), el sistema error está dado por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{\epsilon} &= A\epsilon + Bu \\ e &= C\epsilon\end{aligned}\tag{2.22}$$

ya que $F_s(\epsilon; x) = A\epsilon$. Como se puede ver, x y ϵ tienen la misma dinámica. Este último comentario se refuerza en el Capítulo 4 para sistemas con entradas desconocidas.

Capítulo 3

Caracterización de la existencia de OED no lineales basada en disipatividad

En el presente capítulo se presenta una caracterización de las condiciones de existencia de un Observador con Entradas desconocidas para sistemas no lineales basada en propiedades de disipatividad. En particular, esta caracterización es en términos de condiciones de suficiencia, aunque también se implica una condición necesaria.

Considere la clase de sistemas no lineales MIMO

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + g(x)w, & x(0) = x_0, \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada conocida, $w \in \mathbb{R}^q$ es la entrada desconocida, mientras que $y \in \mathbb{R}^m$ es la salida del sistema. Como se mencionó anteriormente, se asumirá que $f(x, u)$, $g(x)$ y $h(x)$ son funciones suaves de $x \in \mathbb{R}^n$. Se asume también que el sistema Σ es completo, es decir, sus trayectorias $x(t)$ están definidas para todo $t \geq 0$, todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y todo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ y $w(\cdot) \in \mathcal{W}$. Esto quiere decir que los espacios de funciones \mathcal{U} y \mathcal{W} deben ser tales que se asegure la existencia y unicidad de las soluciones de (3.1).

3.1. Condiciones para la existencia de Observadores con Entradas Desconocidas

A continuación se establecen condiciones suficientes para la existencia de OED en el caso no lineal en términos del concepto de disipatividad introducido en el capítulo anterior.

3.1.1. Disipatividad por inyección de la salida de la ecuación de error

La propiedad que permite establecer una relación entre la existencia de OED y la disipatividad es una propiedad de disipatividad de un sistema error que se construye a partir de la planta y que se puede entender como una propiedad de disipatividad incremental de la planta. El sistema error se reescribe enseguida

$$\tilde{\Sigma}_e : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + g(x)w, & x(0) = x_0, \\ \dot{\epsilon} = F(\epsilon; x; u) + g(x)w, & \epsilon(0) = \epsilon_0, \\ e = H(\epsilon; x), \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $F(\epsilon; x; u) = f(x, u) - f(x - \epsilon, u)$, $H(\epsilon; x) = h(x) - h(x - \epsilon)$.

En particular la propiedad que se busca es la de hacer parcialmente disipativo el sistema error $\tilde{\Sigma}_e$, usando la Definición 9 del Capítulo 2, por medio de una inyección parcial de salida.

Definición 11 *El sistema error $\tilde{\Sigma}_e$ (3.2) se dice que es Parcial y Estrictamente Disipativo por Inyección Parcial de Salida (PEDIPS) si existe: (a) una función continuamente diferenciable $L(e; y; x - \epsilon; u)$, con $L(0; y; x - \epsilon; u) = 0$ para todo y, x, ϵ, u ; (b) una función de almacenamiento continuamente diferenciable $V(\epsilon, x)$, positiva definida en ϵ , uniformemente en x , es decir, para todo $(\epsilon, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se satisface*

$$\alpha_1(\|\epsilon\|) \leq V(\epsilon, x) \leq \alpha_2(\|\epsilon\|)$$

para algunas funciones $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ ; y (c) una matriz de rango completo por fila $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^{q \times m}$, tal que a lo largo de las trayectorias del sistema

$$\tilde{\Sigma}_e^{is} : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + g(x)w, & x(0) = x_0 \\ \dot{\epsilon} = F(\epsilon; x; u) + L(e; y; x - \epsilon; u) + g(x)w, & \epsilon(0) = \epsilon_0 \\ e = H(\epsilon; x), \end{cases} \quad (3.3)$$

para todo $(\epsilon, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se satisface que

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|\epsilon\|) + w^T \mathbb{S}e, \quad (3.4)$$

para alguna función $\alpha_3(\cdot)$ de clase \mathcal{K} .

Cabe señalar que la propiedad PEDIPS es una generalización de la propiedad EDIS introducida en el Capítulo 2, y ambas son equivalentes en el caso lineal e invariante en el tiempo. Recordando, el sistema $\tilde{\Sigma}_e$ se dice que es parcialmente disipativo porque las funciones $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ que acotan la función de almacenamiento $V(\cdot)$ pueden depender solo de ϵ , y el comportamiento del subsistema x no es relevante. La inyección de salida se denomina parcial porque afecta solamente

al subsistema ϵ y no a la ecuación de estado completa del sistema. Note que si el sistema $\tilde{\Sigma}_e$ es PEDIPS, entonces $\tilde{\Sigma}_e^{is}$ es parcialmente estrictamente pasivo con respecto a una nueva salida Se .

El requisito principal sobre la planta para la existencia de un OED es entonces el siguiente.

Condición 1 *El sistema error $\tilde{\Sigma}_e$ (3.2) de la planta es PEDIPS.*

Comentario 6 *Como se comentó antes en la sección de preliminares, la función de potencia suministrada $\varpi = w^T Se$ utilizada en (3.4) parece ser restrictiva para sistemas no lineales generales. Las observaciones realizadas al principio de este capítulo muestran que pueden ser consideradas funciones de potencia suministrada más generales, como por ejemplo $\varpi = w^T D^T(x) Se$, con $D(x)$ una matriz cuadrada de rango completo para todo x . Por simplicidad, en este trabajo solo se considera la forma sencilla de la función de potencia suministrada, pero los resultados son válidos para esas funciones más generales.*

3.1.2. Existencia de una forma normal global

Considérese el sistema siguiente como un observador

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\zeta} = f(\zeta, u) - L(y - \hat{y}; y; \zeta; u) , & \zeta(0) = \zeta_0 \\ \hat{y} = h(\zeta) , \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, (3.3) representa la dinámica conjunta de la planta y el error de estimación.

A pesar de que a primera vista resulta sugerente considerar Ω como un OED para la planta Σ , cuando la Condición 1 se satisface. Es fácil ver de la desigualdad (3.4) que es imposible desacoplar el efecto de la perturbación $w(t)$ del error de estimación $\epsilon(t)$, y por lo tanto si $w \neq 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon \neq 0$. Esto muestra que Ω no es un OED para Σ . Sin embargo, Ω es un observador convergente cuando $w = 0$.

A continuación se establece una segunda condición para la existencia de un OED, la cual consiste en una transformación difeomórfica de estados. El estado del sistema original x se transformará en η y el error ϵ en z . La idea de esta transformación es descomponer η en dos partes, la primera de las cuales se ve afectada por la entrada desconocida w y la segunda queda desacoplada de ella. Esta segunda parte del estado transformado η será entonces la que se podrá reconstruir independientemente de w . El error transformado z también se expresará en dos partes, la primera de las cuales dependerá de w . Posteriormente se verificará entonces que la segunda parte del error satisface que $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0$.

Condición 2 Para el sistema Σ (3.1) las variables de salida $\mathbb{S}y = \mathbb{S}h(x)$ pueden ser complementadas por un conjunto de funciones suaves $\beta(x)$, tal que $\mathcal{L}_g\beta(x) = 0$ y

$$r : x \rightarrow \eta = \begin{pmatrix} \mathbb{S}h(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}$$

es un difeomorfismo global, donde $\mathcal{L}_g\beta(x) = \frac{\partial\beta(x)}{\partial x}g(x)$ es la derivada de Lie de $\beta(x)$ a lo largo de $g(x)$. Bajo esta transformación, la ecuación de estado del sistema (3.1) se puede escribir como

$$\Sigma_{nf} : \begin{cases} \dot{\eta}_1 = \tilde{f}_1(\eta, u) + \Gamma(\eta)w \\ \dot{\eta}_2 = \tilde{f}_2(\eta, u) \\ y_1 = \mathbb{S}h(x) = \eta_1 \\ y_2 = Mh(x) = \mu(\eta) \end{cases} \quad (3.6)$$

con condiciones iniciales $\eta(0) = \eta_0$ y donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\eta, u) &= \mathbb{S}\mathcal{L}_f h(x) \\ \tilde{f}_2(\eta, u) &= \mathcal{L}_f \beta(x) \\ \Gamma(\eta) &= \mathbb{S}\mathcal{L}_g h(x) \end{aligned}$$

La salida original y se expresa en dos partes: la primera, una selección dada por $y_1 = \mathbb{S}h(x)$, que resulta igual a la primera parte del estado transformado; la segunda, el resto de las salidas que puede expresarse como $y_2 = Mh(x)$ que en las coordenadas transformadas será una función $\mu(\eta)$. Como puede verse, M es tal que $[\mathbb{S}^T, M^T]$ es una matriz regular.

Si r es un difeomorfismo, entonces

$$T : \epsilon \rightarrow z = \begin{pmatrix} \mathbb{S}H(\epsilon, x) \\ \xi(\epsilon, x) \end{pmatrix}$$

donde $\xi(\epsilon, x) = \beta(x) - \beta(x - \epsilon)$, es un difeomorfismo para el sistema error.

Por tanto, en las nuevas coordenadas $\eta = r(x)$, $z = r(x) - r(x - \epsilon)$, el sistema $\tilde{\Sigma}_e^{is}$ se encuentra en la forma normal global

$$\tilde{\Sigma}_{nf}^{oi} : \begin{cases} \dot{\eta}_1 = \tilde{f}_1(\eta, u) + \Gamma(\eta)w \\ \dot{\eta}_2 = \tilde{f}_2(\eta, u) \\ \dot{z}_1 = \Phi_1(z; \eta; u) + \Lambda_1(e; y; \eta - z; u) + \Gamma(\eta)w \\ \dot{z}_2 = \Phi_2(z; \eta; u) + \Lambda_2(e; y; \eta - z; u) \\ e_1 = z_1 = \mathbb{S}e \\ e_2 = \mu(\eta) - \mu(\eta - z) = Me \end{cases} \quad (3.7)$$

con condiciones iniciales $\eta(0) = \eta_0$, $z(0) = z_0$, y donde

$$\begin{aligned}\Phi_1(z; \eta; u) &= \tilde{f}_1(\eta, u) - \tilde{f}_1(\eta - z, u) \\ \Phi_2(z; \eta; u) &= \tilde{f}_2(\eta, u) - \tilde{f}_2(\eta - z, u) \\ \Lambda_1(e; y; \eta - z; u) &= \mathbb{S}\mathcal{L}_L h(x - \epsilon) \\ \Lambda_2(e; y; \eta - z; u) &= \mathcal{L}_L \beta(x - \epsilon) .\end{aligned}$$

En este caso, $x = r^{-1}(\eta)$, $x - \epsilon = r^{-1}(\eta - z)$.

Comentario 7 *Nótese que la transformación no requiere que el grado relativo esté bien definido, y por tanto, $\Gamma(\eta)$ no necesariamente es regular.*

Si la Condición 1 se satisface, una forma normal local en la cual se presenta este desacoplamiento puede ser determinada bajo ciertas condiciones adicionales (Byrnes et al., 1991; Isidori, 1995), como por ejemplo que la matriz Hessiana (con respecto a ϵ) de la función de almacenamiento $V(\epsilon, x)$ sea regular, o que exista un grado relativo bien definido, por ejemplo cuando $g(x) = B$ como se comentó en el Comentario 1 del Capítulo 2.

Sin embargo, una transformación global requiere condiciones más estrictas. Cabe señalar que en el caso lineal, la existencia de esta transformación es una consecuencia de la Condición 1 (Moreno, 2001).

3.2. Existencia de un OED desde un enfoque disipativo

A continuación se presenta el resultado más general de este trabajo, en donde se demuestra la existencia de un OED cuando la entrada desconocida $w \neq 0$.

En el siguiente teorema se propone un observador con entradas desconocidas de orden reducido para el sistema Σ . Este observador estimará la segunda parte del estado transformado η cuando la primera parte de dicho estado se mide. Como es usual, el observador es una copia de la planta transformada (3.6) más el término corrector. Por tanto, los argumentos de las funciones involucradas serán: η_1 la primera parte del estado transformado, que es una parte de las salidas medidas; ζ_2 el estado del observador, que es el estimado de η_2 ; y el error de salida e_2 .

Al final, el estimado del estado original \hat{x} se obtendrá por medio de la transformación inversa de η_1 (primera parte del estado transformado, que se mide) y de ζ_2 (estimado de la segunda parte del estado transformado).

Teorema 2 *Suponga que para el sistema Σ las Condiciones 1 y 2 se satisfacen. Entonces existe*

un OED global para Σ . Además, un OED de orden reducido está dado por

$$\Omega_{or} : \begin{cases} \dot{\zeta}_2 = \tilde{f}_2(\eta_1, \zeta_2, u) - \Lambda_2(0, e_2; y, \eta_1; \zeta_2; u) , & \zeta_2(0) = \zeta_{20} \\ \hat{y}_2 = \mu(\eta_1, \zeta_2) \\ e_2 = y_2 - \hat{y}_2 \\ \eta_1 = \mathbb{S}y \\ \hat{x} = r^{-1}(\mathbb{S}y, \zeta_2) \end{cases} \quad (3.8)$$

el cual converge global, uniforme y asintóticamente.

Demostración. Asuma que la Condición 1 se satisface. Considérese ahora que en (3.3) el error de salida es $e_1(t) = \mathbb{S}e(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, y utilizando las expresiones (3.3) y (3.4), el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + g(x)w \\ \dot{\epsilon} &= F(\epsilon; x; u) + L(e_r; y; x - \epsilon; u) + g(x)w \\ 0 &= \mathbb{S}H(\epsilon; x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde e_r corresponde a la restricción de la variable e a los valores tales que $\mathbb{S}e = 0$, el conjunto $\epsilon = 0$ es un conjunto de equilibrio asintóticamente estable uniformemente en (x, u, w) , donde (x, u, w) corresponde a las trayectorias de la planta (véase también el Teorema 1 del Capítulo 2).

La Condición 2 permite escribir la ecuación de error en la forma normal (3.7). En estas coordenadas transformadas, (3.9) implica que para

$$\dot{z}_2 = \Phi_2(0, z_2; \eta; u) + \Lambda_2(0, e_2; y, \eta_1; \eta_2 - z_2; u) , \quad (3.10)$$

con condición inicial $z_2(0) = z_{20}$, el punto $z_2 = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable uniformemente en (η, u) . Es decir, existe una función $\bar{\gamma}(\cdot, \cdot)$ de tipo \mathcal{KL} , tal que

$$\|z_2(t)\| \leq \bar{\gamma}(\|z_2(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall \|z_2(t_0)\|, t_0 \geq 0$$

Además, la función de almacenamiento (transformada) $V(z_1, z_2, \eta)$, de la Definición 11, restringida a $z_1 = 0$, es una función de Lyapunov para (3.10) que satisface las condiciones del Teorema 1 de estabilidad parcial presentado en el Capítulo 2.

Nótese que la expresión anterior representa el error de estimación que se obtiene de proponer el observador (3.8). Por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\zeta_2 - \eta_2) = 0$, es decir,

$$\|\zeta_2(t) - \eta_2(t)\| \leq \bar{\gamma}(\|\zeta_2(t_0) - \eta_2(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall \|\zeta_2(t_0) - \eta_2(t_0)\|, t_0 \geq 0.$$

De la definición de z se tiene que $z_2 = \beta(x) - \beta(\hat{x}) = \beta(x) - \zeta_2$, por tanto, se tiene

$$r(x) = \begin{bmatrix} \mathbb{S}y \\ \beta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}y \\ \zeta_2 + z_2 \end{bmatrix} = r(\hat{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \end{bmatrix} ,$$

y se sigue fácilmente que existe una $\gamma(\cdot, \cdot)$ de tipo \mathcal{KL} tal que

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \gamma(\|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\|, t_0 \geq 0$$

es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$. ■

Comentario 8 *Este resultado se presentó en el 6o. Symposium sobre Sistemas de Control No lineal (NOLCOS) 2004 (Rocha-Cózatl y Moreno, 2004) llevado a cabo en Stuttgart, Alemania; una versión más detallada se sometió a la revista Automatica (Rocha-Cózatl y Moreno, 2005b).*

Comentario 9 *En el caso lineal, la Condición 2 es una consecuencia de la Condición 1, y por tanto esta última condición es suficiente para la existencia de un OED. Esta condición es además necesaria para sistemas LIT. Esto se detallará en el Capítulo 4.*

Comentario 10 *Si la entrada desconocida es cero, es decir, $w = 0$, entonces (3.4) implica, junto con el Teorema 1 (estabilidad parcial, Capítulo 2), que $\epsilon \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente con respecto a x_0 . Esto significa que el sistema Ω (3.5) constituye un observador asintóticamente convergente para la planta Σ cuando no hay entrada desconocida, es decir, $w = 0$ o incluso cuando $w \rightarrow 0$.*

Una idea similar de disipativizar la ecuación de error ha sido utilizada en (Shim et al., 2003) para el diseño de observadores para sistemas sin entradas desconocidas. Este método puede ser interpretado en el contexto del Teorema 2 como a continuación se describe: definiendo una entrada desconocida ficticia y si la ecuación de error puede ser convertida en estrictamente pasiva, entonces el sistema Ω (3.5) es un observador para la planta (sin entradas desconocidas) de acuerdo a los resultados del párrafo anterior de este mismo comentario.

3.3. Implicación del resultado en términos de detectabilidad

En el capítulo de preliminares ya se presentó la idea de detectabilidad con entradas desconocidas, la cual se puede recuperar como se describe a continuación.

Cualquier solución del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + g(x)w, & x(0) &= x_0, \\ \dot{\epsilon} &= F(\epsilon; x; u) + g(x)w, & \epsilon(0) &= \epsilon_0, \\ 0 &= H(\epsilon, x), \end{aligned} \tag{3.11}$$

tal que $\epsilon \neq 0$ corresponde a un par de trayectorias indistinguibles de la planta Σ (3.1), es decir, dos trayectorias de Σ que tienen las mismas señales medibles $(u(t), y(t))$ (nótese que pueden tener

diferentes entradas desconocidas). Si todas las soluciones de (3.11) requieren $\epsilon = 0$, entonces no existen trayectorias indistinguibles y el sistema es observable a pesar de las entradas desconocidas.

Asuma que la Condición 1 se satisface. Considérese ahora que en (3.3) $e(t) = 0, \forall t \geq 0$ (este es el caso cuando por ejemplo $\epsilon_0 = 0$ y $w = 0$). En ese caso $L(0; y; \zeta; u) = 0$ y el sistema de ecuaciones (3.3) se reduce a la Ecuación Algebro-Diferencial (DAE, por sus siglas en inglés *Differential-Algebraic Equation*) (3.11), que es la dinámica cero de $\tilde{\Sigma}_e$ (3.2), en la cual el conjunto $\epsilon = 0$ es un conjunto de equilibrio asintóticamente estable uniformemente en (x, u, w) . Esto en realidad representa una propiedad de detectabilidad, que es una condición necesaria para la existencia de los OED.

Una forma de expresar la detectabilidad con entradas desconocidas utilizando ahora el sistema error (3.2) es la siguiente.

Teorema 3 *Suponga que existe un OED para Σ . Entonces para el sistema (3.11) $\epsilon = 0$ es un conjunto de equilibrio asintóticamente estable para cada (x, u, w) trayectoria de la planta Σ .*

Demostración. Supóngase que existe un estado inicial ϵ_0 y una trayectoria de la planta (x, u, w) tal que los correspondientes (ϵ, x, u, w) satisfacen (3.11) y para los cuales $\epsilon(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces esto implica que $(x - \epsilon, u, 0)$ también es una trayectoria de la planta que es indistinguible a partir de (x, u, w) , lo cual contradice la existencia de un OED, pues el estado estimado \hat{x} tendría que converger simultáneamente a x y a $x - \epsilon$, lo que es imposible. ■

El sistema (3.11) representa la dinámica cero de (3.3), y tiene que ser débilmente estable (*weakly stable*) en el sentido particular dado por el Teorema 3. Esto corresponde a una propiedad de fase mínima *parcial* del sistema error $\tilde{\Sigma}_e$ (2.8), es decir, $e(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$. Como puede verse, ésta es una propiedad de la planta, que resulta independiente del término de inyección de salida $L(\cdot)$.

Se puede ver también que, con el fin de que la Condición 1 se satisfaga, es necesario (como en el caso lineal) que el número de salidas sea mayor o igual que el número de entradas desconocidas, es decir, $p \geq q$.

3.4. Necesidad de las condiciones realizadas

Siendo el caso no lineal general el que se ha considerado en este capítulo, sería difícil hablar de condiciones necesarias, pues incluso éste es un tema abierto para el caso de observadores sin entradas desconocidas. Sin embargo, a pesar de que no se ha estudiado por completo la necesidad de las condiciones propuestas, existen resultados en esa dirección.

Por ejemplo, aunque en este capítulo se han mostrado condiciones solamente suficientes, se mostró también que la Condición 1 implica una condición necesaria, más en particular, una condición de detectabilidad. Además, en (Moreno, 2000b) se muestra que bajo ciertas condiciones de regularidad adicionales las condiciones son también necesarias en el caso SISO.

En resumen, aunque estrictamente no se ha demostrado la necesidad de las condiciones, el hecho de que la condición 1 implique una condición que sí es necesaria indica que la caracterización basada en disipatividad de la existencia de OED es una muy buena caracterización de las condiciones de existencia conocidas.

Como se verá más adelante, para el caso lineal invariante en el tiempo las condiciones de existencia sí son necesarias y suficientes. Aún más, la propiedad de disipatividad implica la existencia de la transformación que lleva al sistema a la forma requerida.

3.5. Ejemplo

Para ilustrar el resultado, considérese el modelo de un motor de inducción (Marino y Tomei, 1995)

$$\begin{aligned}\dot{\varpi} &= -2\bar{\sigma}x_1^T \mathbb{J}x_2 - \frac{1}{J}\tau_L \\ \dot{x} &= Ax + \varpi Nx + Bu\end{aligned}$$

donde $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$ y $x_1 = \begin{bmatrix} i_a & i_b \end{bmatrix}^T$, $x_2 = \begin{bmatrix} \psi_a & \psi_b \end{bmatrix}^T$ son las corrientes de estator y los flujos de rotor, respectivamente. En esta expresión ϖ es la velocidad del rotor, $u = \begin{bmatrix} u_a & u_b \end{bmatrix}^T$ los voltajes de estator y τ_L es el par de carga. Los parámetros están dados por

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -a_{11}I_2 & a_{12}I_2 \\ a_{21}I_2 & -a_{22}I_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0_2 & n_1\mathbb{J} \\ 0_2 & -n_p\mathbb{J} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} bI_2 \\ 0_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde I_2 es la matriz identidad de dimensión 2, y a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b , $\bar{\sigma}$ y n_1 son constantes *positivas* que dependen de los parámetros físicos:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{M^2 R_r + L_r^2 R_s}{(L_r L_s - M^2)L_r}, \quad a_{12} = \frac{MR_r}{(L_r L_s - M^2)L_r}, \quad a_{21} = \frac{MR_r}{L_r}, \quad a_{22} = \frac{R_r}{L_r}, \\ b &= \frac{L_r}{L_r L_s - M^2}, \quad n_1 = \frac{n_p M}{L_r L_s - M^2}, \quad \bar{\sigma} = \frac{n_p M}{2JL_r}.\end{aligned}$$

donde J es el momento de inercia del motor, L_s, L_r las inductancias de los devanados de armadura y del rotor, respectivamente, M la inductancia mutua, R_s, R_r las resistencias de los devanados de armadura y del rotor, respectivamente, y n_p el número de pares de polos.

Suponga que τ_L es una perturbación desconocida, es decir, $w = [-\frac{1}{J}\tau_L]$, y que ϖ y x_1 son medidas, es decir $y_1 = \varpi$, $y_2 = x_1$. Tomando $\mathbb{S} = [1, 0, 0]$ y T (de la Condición 2) como la transformación identidad, la dinámica del error, con inyección de salida $L(\tilde{\varpi}, \tilde{x}_1; y; \hat{x}; u)$, está dada en la forma normal global (3.7) como a continuación

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\varpi}} &= -2\bar{\sigma}x_1^T \mathbb{J}x_2 + w \\
\dot{x} &= Ax + \varpi Nx + Bu \\
\dot{\tilde{\varpi}} &= -2\bar{\sigma}x_1^T \mathbb{J}x_2 + 2\bar{\sigma}(x_1 - \tilde{x}_1)^T \mathbb{J}(x_2 - \tilde{x}_2) + L_1(\tilde{\varpi}, \tilde{x}_1; y, \hat{x}, u) + w \\
\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + y_1 Nx - (y_1 - \tilde{\varpi})N(x - \tilde{x}) + L_2(\tilde{\varpi}, \tilde{x}_1; y, \hat{x}, u) \\
e_1 &= \tilde{\varpi} \\
e_2 &= C\tilde{x} = \tilde{x}_1
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $C = [I_2, 0_2]$ y $\tilde{\varpi} = \varpi - \hat{\varpi}$, $\tilde{x} = x - \hat{x}$. Para mostrar que la Condición 1 se satisface, tómesese como candidata a función de almacenamiento para el sistema error $V(\tilde{\varpi}, \tilde{x}) = \frac{1}{2}\tilde{\varpi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^T \tilde{x}$. Seleccionando la inyección de salida L de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\bar{\gamma}\tilde{\varpi} + 2\bar{\sigma}\tilde{x}_1^T \mathbb{J}\hat{x}_2 \\
L_2 &= -(K_0 + y_1 K_1)(y_2 - C\hat{x}) - \tilde{\varpi}N\hat{x}
\end{aligned}$$

donde

$$K_0 = \begin{bmatrix} (k - a_{11})I_2 \\ (a_{12} + a_{21})I_2 \end{bmatrix}, \quad k > 0, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0_2 \\ -n_1 \mathbb{J} \end{bmatrix},$$

entonces la derivada de V con respecto al tiempo y a lo largo de las trayectorias de (3.12) es

$$\dot{V} = - \begin{bmatrix} \tilde{\varpi} & \tilde{x}^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\gamma} & \bar{\sigma}x_1^T \mathbb{J}\mathcal{R} \\ \bar{\sigma}\mathcal{R}^T \mathbb{J}^T x_1 & \mathcal{Q} \end{bmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{bmatrix} \tilde{\varpi} \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \tilde{\varpi}w$$

con $\mathcal{R} = [0_2, I_2]$, y $\mathcal{Q} = \text{diag}\{kI_2, a_{22}I_2\}$. La matriz \mathbb{M} es positiva definida si y sólo si $\bar{\gamma} > 0$ y

$$\mathcal{Q} - \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\gamma}} \mathcal{R}^T \mathbb{J}^T x_1^T x_1 \mathbb{J} \mathcal{R} > 0.$$

Si x_1 permanece en un conjunto compacto, entonces seleccionando $\bar{\gamma}$ lo suficientemente grande, \mathbb{M} puede hacerse positiva definida, y la desigualdad de disipatividad (3.4) se satisface.

El OED de orden reducido (3.8) es por tanto

$$\Omega_{ro} : \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + y_1 N\hat{x} + Bu + (K_0 + y_1 K_1)(y_2 - C\hat{x}).$$

Ahora se presentan los resultados de simulaciones de este observador. El valor numérico de los parámetros del motor son $L_r = 0.076$ (H), $L_s = 0.142$ (H), $R_r = 0.93$ (Ω), $R_s = 1.633$ (Ω),

$M = 0.099$, $n_p = 2$, $J = 0.029$ ($Nm/rad/s^2$). El voltaje nominal es 220 (V) [rms]. Los voltajes de estator son senoidales con el valor nominal de voltaje y frecuencia 60 (Hz) con un retraso en el ángulo de fase de $\pi/2$ (rad) entre ellos. El par de carga se considera como otra senoidal con amplitud de 20 (Nm) y frecuencia 10 (Hz). Las condiciones iniciales son $\varpi_0 = 0$, $x_0 = 0_{4 \times 1}$ $\begin{bmatrix} -5, & 1, & -1, & 5 \end{bmatrix}^T$ y para el diseño del observador se considera $k = 2$.

En la Figura 3.1, se presenta la velocidad angular del motor, en donde se puede ver claramente que el par de carga senoidal afecta el desempeño de esta variable. Por otro lado, en la Figura 3.2 se muestra la norma cuadrática del error de estimación de los flujos magnéticos $x_2 - \hat{x}_2$. En esa figura se puede observar que el error de estimación tiende a cero independientemente que el par de carga varíe senoidalmente.

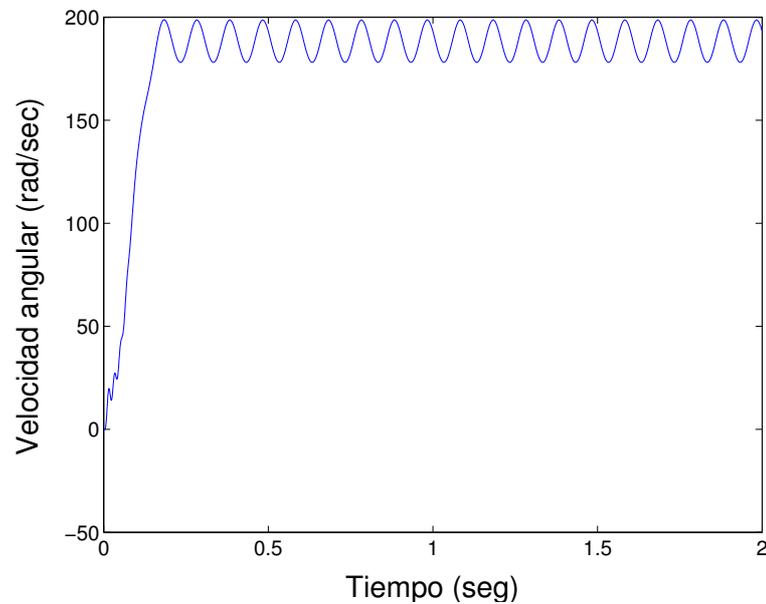


Figura 3.1: Simulación del OED diseñado en el ejemplo. Velocidad angular.

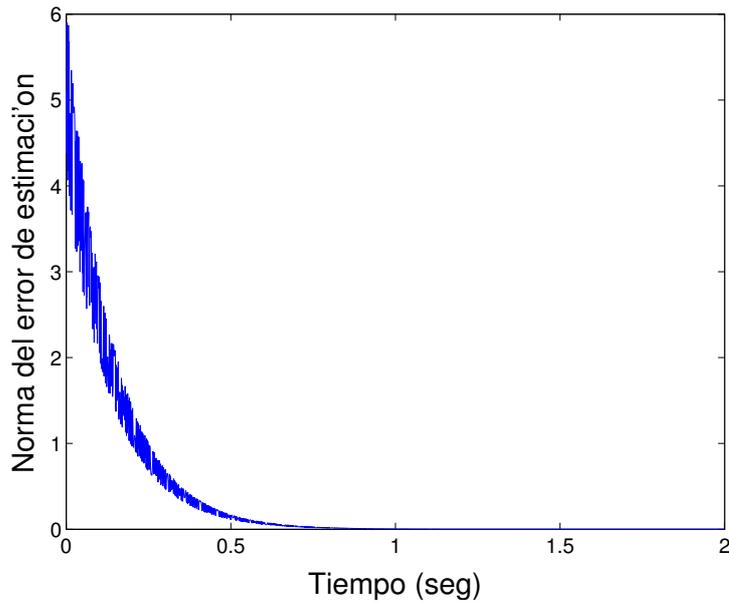


Figura 3.2: Simulación del OED diseñado en el ejemplo. Norma cuadrática del error $x_2 - \hat{x}_2$

3.6. Resumen

En este capítulo se han presentado dos condiciones suficientes para la existencia de OED no lineales: una condición de disipatividad del sistema error y la existencia de una transformación de estados que lleva al sistema a una forma especial.

La condición de disipatividad requerida sobre el sistema error puede ser interpretada como una propiedad de disipatividad incremental de la planta.

Esta misma condición de disipatividad implica también una condición necesaria para la existencia de los OED: una condición de detectabilidad con entradas desconocidas.

Proponiendo como ejemplo el motor de inducción, para el cual la transformación requerida se puede determinar, se muestra que si se puede disipativizar el sistema error por medio de una inyección de la salida, se puede diseñar un OED de tal forma que el error converge a cero independientemente del par de carga desconocido.

Capítulo 4

Diseño de OED para sistemas lineales e invariantes en el tiempo

El resultado general obtenido en el Capítulo 3 establece que una propiedad de disipatividad incremental de la planta es una condición suficiente para determinar la existencia de un observador con entradas desconocidas. Una pregunta inmediata que surge es, ¿qué implicaciones o interpretaciones nuevas proporciona esta caracterización para el caso de los sistemas lineales?

A pesar de que para sistemas lineales invariantes en el tiempo se tiene una caracterización completa de las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de observadores con entradas desconocidas (al principio de este documento se enumeraron algunas aportaciones registradas al respecto), en este capítulo se mostrará que la caracterización realizada para sistemas no lineales generales realizada en el Capítulo 3 sí ofrece una nueva perspectiva de estudio y diseño de OED lineales: por un lado, se puede proponer un método sencillo de diseño por medio de una desigualdad matricial lineal; por otro lado, por medio de una interpretación energética del resultado, se puede obtener información de la naturaleza de la variable que se tiene que medir con el fin de suplir el desconocimiento de la perturbación.

Cabe señalar que ya anteriormente se estudió cómo la existencia de los observadores se relaciona con la propiedad de pasividad (Rocha-Cózatl, 2001). Sin embargo, en aquél caso esa propiedad se pedía en la planta, a diferencia de este trabajo en donde se ha comprobado en el caso general que la propiedad que se requiere es para el sistema error, lo que se traduce en una propiedad de disipatividad incremental de la planta.

En este capítulo consideramos el sistema lineal siguiente

$$\Sigma_{lin} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dw \\ y = Cx \end{cases}$$

en el que, como anteriormente se definió, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $w \in \mathbb{R}^q$ e $y \in \mathbb{R}^m$ son los vectores de estados, entradas conocidas, entradas desconocidas y de salidas, respectivamente.

Cabe mencionar que un antecedente para los resultados de este capítulo se presentan en (Moreno, 2001), donde se establecen equivalencias entre las condiciones de existencia de los OED y las condiciones para disipativizar un sistema por retroalimentación de estados y por inyección de la salida.

4.1. Propiedades de detectabilidad y el diseño de un observador

4.1.1. Detectabilidad

Para el sistema lineal descrito, se puede construir el sistema error como se hizo en el caso no lineal (3.2), obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\tilde{\Sigma}_{e,lin} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dw \\ \dot{\epsilon} = A\epsilon + Dw \\ e = C\epsilon \end{cases} \quad (4.1)$$

donde sin pérdida de generalidad se considera que $\text{rango}(C) = p$ y $\text{rango}(D) = q$.

Este sistema error es el que se debe poder disipativizar por inyección de la salida para que exista un OED. Asimismo, de la misma forma que para los sistemas no lineales, si en (4.1) $e = 0$, se puede determinar la dinámica indistinguible y con ello la propiedad de observabilidad de la planta.

Como puede apreciarse, la primera ecuación está desacoplada de las otras dos. Por tanto, estas dos pueden ser tomadas aparte y expresadas en el dominio de la frecuencia como sigue, cuando $e = 0$:

$$\begin{bmatrix} sI - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ w \end{bmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Para que exista observabilidad con entradas desconocidas $\epsilon = 0$ debe ser la única solución de (4.2), es decir que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (4.3)$$

Sin embargo, la condición de rango (4.3) no define completamente la observabilidad con entradas desconocidas, sino una condición menos estricta, que es llamada por Hautus observabilidad fuerte (*strong observability*)(Hautus, 1983), que en términos de la ecuación (4.1) quiere decir que si $e = 0$ entonces $\epsilon = 0$.

Cabe recordar de la teoría de sistemas lineales, que los valores de s para los cuales la matriz de (4.3) pierde su rango son denominados ceros de transmisión. Por lo tanto (4.3) también implica que no existen ceros de transmisión en el sistema lineal.

Similarmente a lo que sucede con los conceptos clásicos de observabilidad y detectabilidad, existe detectabilidad fuerte si la condición de rango (4.3) es relajada. Es decir, si los valores de s para los cuales se pierde el rango están en el semiplano complejo izquierdo \mathbb{C}^- existe detectabilidad fuerte. En este caso, en términos del sistema (4.1), se tiene que si $e = 0$ entonces $\epsilon \rightarrow 0$.

Por tanto, la forma de verificar que el sistema sea detectable con entradas desconocidas se reduce a

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+ \quad (4.4)$$

Esto es lo que se ha definido en (Hautus, 1983) como detectabilidad fuerte para sistemas LIT y, como se puede ver, se puede interpretar como una condición de fase mínima para el sistema lineal (4.1).

Sin embargo, como se mostrará en el siguiente ejemplo, para asegurar la existencia de un observador con entradas desconocidas la detectabilidad fuerte no es condición suficiente. En términos de la ecuación (4.1), para la existencia de tal observador se requiere una condición más fuerte que asegure que si $e \rightarrow 0$ entonces $\epsilon \rightarrow 0$.

Con el siguiente ejemplo se quiere mostrar es que ni la propiedad de observabilidad ni la detectabilidad fuertes son condiciones suficientes para la existencia de un observador con entradas desconocidas.

Ejemplo 1 *Sea el sistema lineal*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (4.5)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

el cual tiene la propiedad de observabilidad (detectabilidad) fuerte, ya que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 4 & s + 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 + 1, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Considérese la siguiente ecuación, la cual describe al sistema (4.5)

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = w \quad (4.6)$$

donde el vector de estados está dado por

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Si la salida es $y(t) = \frac{\sin(t^2)}{t}$, la entrada desconocida w que la genera se obtiene al sustituir $y(t)$ en (4.6) y es

$$w = -4t \sin(t^2) + 6 \cos(t^2) + \frac{4 \sin(t^2)}{t} - \frac{2 \cos(t^2)}{t} - \frac{3 \sin(t^2)}{t^2} + \frac{2 \sin(t^2)}{t^3}$$

Si este es el caso, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow 0$, pero $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) \not\rightarrow 0$, ya que

$$\dot{y} = 2 \cos(t^2) - \frac{\sin(t^2)}{t^2}$$

y por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \not\rightarrow 0$.

De esta manera, no existe forma de construir un observador con entradas desconocidas para este sistema en el sentido de la Definición 3 (Capítulo 2), pues para ello se requiere que cuando las variables medidas tienden a cero, la variable a estimar también tienda a cero.

De este ejemplo se puede constatar que la condición de detectabilidad con entradas desconocidas (definida por Hautus en (Hautus, 1983) para los sistemas lineales como detectabilidad fuerte o *strong detectability*) es condición necesaria mas no suficiente para la existencia de observadores con entradas desconocidas que no utilicen derivadas de la salida.

Comentario 11 La propiedad de detectabilidad presentada en el Teorema 3 del Capítulo 3 conduce en el caso lineal a la detectabilidad fuerte (*strong detectability*) introducida por Hautus (Hautus, 1983), la cual se ha mostrado que es una condición necesaria para la existencia de un OED.

Hautus (Hautus, 1983) define detectabilidad fuerte* (*strong* detectability*) como la condición necesaria y suficiente para la existencia de OED propios, la cual implica que la condición (4.4) y la condición

$$\text{rango}(CD) = \text{rango}(D) = q. \quad (4.7)$$

se cumplen.

Esta segunda condición es llamada de regularidad y tiene varias interpretaciones. Por un lado, esta condición impide que se presente el caso del Ejemplo 1, es decir, con la imposición de esta condición (además de la detectabilidad fuerte) cuando la salida tiende a cero el estado también tiende a cero. Por otro lado, (4.7) se puede interpretar como que el grado relativo del sistema, tomando las salidas y , es igual a uno con respecto a cada una de las entradas desconocidas w .

Además, esta condición implica que el número de salidas tiene que ser mayor o igual al número de entradas desconocidas, es decir, $m \geq q$. Si $m = q$ la expresión (4.7) implica que la matriz CD es invertible.

En resumen, en el caso lineal las condiciones necesarias y suficientes de existencia de un OED para Σ_{lin} son

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+ \quad (4.8)$$

y

$$\text{rango } CD = \text{rango } D = q = \dim(w) \quad (4.9)$$

donde \mathbb{C}_0^+ es el semiplano cerrado complejo derecho.

Nótese que la condición (4.8), de detectabilidad fuerte (sin la estrella), es una condición algebraica de rango que resulta similar a la forma como se define la detectabilidad en el sentido usual: El sistema lineal invariante en el tiempo sin entradas desconocidas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx \end{aligned}$$

es detectable si y solo si para cada valor de s en \mathbb{C}_0^+ , la matriz compleja (de dimensión $(n+p) \times n$)

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.10)$$

Resulta evidente que la condición (4.8) es más estricta que (4.10). Por tanto, si en el sistema (4.1) la entrada desconocida es $w = 0$, y el sistema es detectable fuertemente, entonces también es detectable en el sentido usual (sin entradas desconocidas). Es decir, la propiedad de detectabilidad fuerte implica la detectabilidad usual. Asimismo, los observadores con entradas desconocidas funcionarán como observadores en el sentido usual cuando la entrada desconocida desaparece.-

4.1.2. Una forma de diseñar el observador

Por simplicidad y claridad, el sistema error puede ser llevado a una forma normal, en donde el diseño del observador resulta más fácil de realizar. El proceso desarrollado en esta sección es similar al de la prueba del Teorema 2 del Capítulo 3.

Si la condición (4.9) (grado relativo = 1) se cumple, entonces existen una transformación regular de salidas

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ H \end{bmatrix} y,$$

y una transformación difeomórfica $\xi = Tx$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SC \\ M \end{bmatrix} x = Tx,$$

tal que $MD = 0$.

Se puede reescribir el sistema Σ_{lin} en las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{y}_1 + \bar{A}_{12}\xi + \bar{B}_1u + w \\ \dot{\xi} &= \bar{A}_{21}\bar{y}_1 + \bar{A}_{22}\xi + \bar{B}_2u \\ \bar{y}_2 &= \bar{C}_{22}\xi \end{aligned}$$

donde la dinámica interna $(\bar{A}_{22}, \bar{C}_{22})$ es detectable por la condición (4.8) (de fase mínima).

Con el sistema expresado en estas coordenadas, se puede diseñar un observador

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\bar{y}}}_1 &= \bar{A}_{11}\hat{\bar{y}}_1 + \bar{A}_{12}\hat{\xi} + \bar{B}_1u + \bar{L}_{11}(\hat{\bar{y}}_1 - \bar{y}_1) + \bar{L}_{12}(\bar{C}_{22}\hat{\xi} - \bar{y}_2) \\ \dot{\hat{\xi}} &= \bar{A}_{21}\hat{\bar{y}}_1 + \bar{A}_{22}\hat{\xi} + \bar{B}_2u + \bar{L}_{21}(\hat{\bar{y}}_1 - \bar{y}_1) + \bar{L}_{22}(\bar{C}_{22}\hat{\xi} - \bar{y}_2) \end{aligned}$$

Los errores de estimación $\epsilon_1 = \bar{y}_1 - \hat{\bar{y}}_1$ y $\epsilon_2 = \xi - \hat{\xi}$ están dados por

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{L}_{11})\epsilon_1 + (\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22})\epsilon_2 + w \\ \dot{\epsilon}_2 &= (\bar{A}_{21} + \bar{L}_{21})\epsilon_1 + (\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22})\epsilon_2 \end{aligned}$$

Una selección de \bar{L} es con $\bar{L}_{21} = -\bar{A}_{21}$, \bar{L}_{22} tal que $(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22})$ sea Hurwitz y \bar{L}_{11} tal que $(\bar{A}_{11} + \bar{L}_{11})$ sea también Hurwitz.

La segunda parte del error puede hacerse asintóticamente estable dado que $(\bar{A}_{22}, \bar{C}_{22})$ es detectable por la condición (4.8) (de fase mínima).

El error de estimación es entonces

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{L}_{11})\epsilon_1 + (\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22})\epsilon_2 + w \\ \dot{\epsilon}_2 &= (\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22})\epsilon_2 \end{aligned}$$

Por tanto, el observador es

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\bar{y}}}_1 &= \bar{A}_{11}\hat{\bar{y}}_1 + \bar{A}_{12}\hat{\xi} + \bar{B}_1u + \bar{L}_{11}(\hat{\bar{y}}_1 - \bar{y}_1) + \bar{L}_{12}(\bar{C}_{22}\hat{\xi} - \bar{y}_2) \\ \dot{\hat{\xi}} &= \bar{A}_{21}\bar{y}_1 + \bar{A}_{22}\hat{\xi} + \bar{B}_2u + \bar{L}_{22}(\bar{C}_{22}\hat{\xi} - \bar{y}_2) \\ \hat{x} &= T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} z + T^{-1} \begin{bmatrix} SC \\ 0 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

donde

$$\hat{x} = T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} + T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En las coordenadas originales este observador tiene la siguiente forma

$$\Omega : \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + L(Cz - y) \\ \hat{x} = Ez + Fy \end{cases} \quad (4.11)$$

donde, a su vez,

$$z = T^{-1} \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{\xi} \end{bmatrix}, \quad L = T^{-1} \bar{L} = T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} \\ -\bar{A}_{21} & \bar{L}_{22} \end{bmatrix}$$

$$E = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}, \quad F = T^{-1} \begin{bmatrix} SC \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2. Implicación de las condiciones en términos de disipatividad

Como es de esperarse, al tomar el caso lineal, existen diversas simplificaciones de los conceptos definidos en los capítulos 2 y 3 para sistemas no lineales, en particular en cuanto a la perspectiva disipativa que se está estudiando.

Una simplificación clara se presenta en el sistema error que debe poseer la propiedad de disipatividad, es decir, (4.1). La estructura del sistema error es la misma que en el caso no lineal (3.2): dos ecuaciones dinámicas y una algebraica. La primera ecuación diferencial corresponde a la planta y la segunda propiamente al error, mientras que la ecuación algebraica representa al error de salida. Sin embargo, a diferencia del caso no lineal, en el sistema (4.1) las ecuaciones diferenciales en x y en ϵ están desacopladas. La consecuencia de esto es que la dinámica de x no juega ningún papel en lo que es propiamente el sistema error, por lo que en el caso lineal se utiliza el concepto de disipatividad en el sentido usual y no de disipatividad parcial como en el caso no lineal.

Por tanto, la posibilidad de volver disipativo al sistema error por medio de una inyección de la salida es la propiedad de disipatividad que se requiere para la existencia de los OED. Además, se observa de la ecuación (4.1) que el sistema error lineal resulta idéntico al sistema lineal original (planta), considerando que en este caso no es relevante la presencia del término de la entrada conocida u .

En resumen, en este caso la disipativización del sistema error es equivalente a la disipativización de la planta, lo cual es equivalente a su vez a la existencia de OED.

4.2.1. Diseño del observador por medio de una LMI

Ya se ha presentado anteriormente un diseño de OED. Sin embargo, utilizando la interpretación disipativa se puede llegar a otra forma diferente y más sencilla de calcular y construir un OED. En esta sección se presenta este nuevo método de diseño.

A lo largo de este trabajo se ha utilizado una clase especial de disipatividad, la cual está definida por medio de una función de potencia suministrada igual a $\omega = \bar{u}^T \mathbb{S} \bar{y}$, la cual se puede ver como una propiedad de pasividad entre la entrada \bar{u} y una selección de las salidas $\mathbb{S} \bar{y}$, que en realidad se puede entender como una nueva salida.

Por tanto, algunos resultados de la teoría de pasividad pueden ser aplicados al caso lineal. En particular, se consideran los siguientes resultados:

Sea el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x}\end{aligned}\tag{4.12}$$

1. (Sepulchre *et al.*, 1997) El sistema lineal invariante en el tiempo (4.12) es pasivizable por retroalimentación de los estados (de acuerdo a la definición realizada en el Capítulo 2) si y sólo si es de fase mínima y tiene grado relativo uno.
2. (Rocha-Cózatl, 2001) Un sistema lineal invariante en el tiempo (4.12) es pasivizable por inyección de la salida (de acuerdo a la definición realizada en el Capítulo 2) si y sólo si es pasivizable por retroalimentación de los estados.

Por tanto, para disipativizar el sistema error (4.1) por inyección de la salida es necesario y suficiente que el sistema sea de fase mínima y de grado relativo uno entre la salida $\mathbb{S}e$ y w (es decir, $\bar{u} = w$ y $\bar{y} = e$), lo cual es equivalente a que las condiciones (4.8) y (4.9) se cumplan.

En resumen, si (4.8) y (4.9) se cumplen, se puede encontrar una matriz de inyección de salida L , una matriz \mathbb{S} y una constante λ tal que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= (A + LC)\epsilon + Dw \\ e &= C\epsilon\end{aligned}\tag{4.13}$$

sea disipativo de la entrada w a la salida e (o pasivo de la entrada w a la nueva salida $\mathbb{S}e$), es decir, se satisface que

$$\dot{V} \leq -\lambda V(\epsilon) + w^T \mathbb{S}e ,\tag{4.14}$$

donde $V(\epsilon) = \epsilon^T P \epsilon$.

En otras palabras, las ecuaciones del Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (Lema 1 en el Capítulo 2), aplicado al sistema con inyección de salida (4.13), tiene solución para λ , L , P y \mathbb{S} .

$$\begin{aligned}P(A + LC) + (A + LC)^T P &< -\lambda P \\ PD &= (\mathbb{S}C)^T\end{aligned}\tag{4.15}$$

Como se menciona en la Sección 2.3.3, la solución a estas expresiones puede obtenerse al resolver la desigualdad matricial

$$\begin{bmatrix} P(A+LC) + (A+LC)^T P + \lambda P & (PD)^T - SC \\ PD - (SC)^T & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

Sin embargo, existe una familia de matrices de inyección de salida L que satisfacen la desigualdad (4.16), por lo que hay que seleccionar aquella que además de satisfacer la desigualdad, realice el desacoplamiento requerido, descrito en la Sección 4.1.2.

El diseño presentado en la misma Sección 4.1.2 fue realizado en coordenadas transformadas con el fin de que fuera más clara su presentación. Sin embargo, esta transformación de coordenadas no es necesaria, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1 *El diseño del observador (4.11) se realiza encontrando los parámetros L , $\lambda > 0$, S , M , tal que $MM^T > 0$ (rango fila completo) y $P = P^T$, $P > 0$, tal que la siguiente desigualdad matricial con restricciones se satisface*

$$\begin{bmatrix} P(A+LC) + (A+LC)^T P + \lambda P & (PD)^T - SC \\ PD - (SC)^T & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

$$MD = 0 \quad (4.18)$$

$$M(A+LC)D = 0 \quad (4.19)$$

Las matrices E y F en (4.11) están dadas por

$$E = \begin{bmatrix} SC \\ M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} SC \\ M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

Demostración. Se demostrará que (4.18) y (4.19) corresponden a las condiciones de desacoplamiento previamente determinadas.

Como es de esperarse, algunos resultados de la Sección 4.1.2 son utilizados. Por ejemplo, la primera ecuación (4.18) es requerida para la transformación, como se explicó anteriormente. De la Sección 4.1.2, la condición de desacoplamiento es

$$(\bar{A}_{21} + \bar{L}_{21}) = 0 \quad (4.21)$$

En el desarrollo anterior, el desacoplamiento se logró eligiendo apropiadamente \bar{L}_{21} . Sin embargo la ecuación (4.19) se propone ahora en las coordenadas originales, por tanto, se demostrará que (4.19) y (4.21) son equivalentes.

Considérese que

$$T(A+LC)T^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{L}_{11} & \bar{A}_{12} + \bar{L}_1\bar{C}_2 \\ \bar{A}_{21} + \bar{L}_{21} & \bar{A}_{22} + \bar{L}_2\bar{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}C(A+LC) \\ M(A+LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{S}C \\ M \end{bmatrix}^{-1}$$

Si

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}C \\ M \end{bmatrix}^{-1}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}C \\ M \end{bmatrix} Z_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{S}CZ_1 \\ MZ_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbb{S}C \\ M \end{bmatrix} Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{S}C \\ M \end{bmatrix} = Z_1\mathbb{S}C + Z_2M = I$$

De las propiedades de \mathbb{S} y M

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}C \\ M \end{bmatrix} D(D^T P D)^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene entonces que $Z_1 = D(D^T P D)^{-1}$. Por lo tanto,

$$(\bar{A}_{21} + \bar{L}_{21}) = M(A+LC)Z_1 = M(A+LC)D(D^T P D)^{-1} = 0$$

que es equivalente a (4.19). ■

4.2.2. Interpretación física de la caracterización disipativa de las condiciones de existencia de los OED

En el diseño de observadores una ayuda valiosa es saber (o tener una noción al menos) cuáles salidas deben medirse con el fin de construir el observador. En este caso, la caracterización disipativa de las condiciones de existencia muestra otra aportación importante al proporcionar este tipo de información.

Se ha mencionado que una simplificación en el caso lineal es que la disipativización del sistema error por inyección de la salida es equivalente a la disipativización de la planta. Por tanto, la desigualdad disipativa (4.14) puede expresarse entonces como

$$\dot{V} \leq -\lambda V(x) + w^T \mathbb{S}y, \quad (4.22)$$

donde $V(x) = x^T P x$.

Esta relación energética entre las variables tiene una interpretación en términos de la existencia del OED: con las salidas $\mathbb{S}y$ se puede reconstruir el estado x a pesar de no conocer la entrada w .

Aquel sistema que satisface (4.22) se dice que es disipativo tomando la entrada w y la salida y , y el término que incluye a ambas variables wSy representa la potencia suministrada al sistema. En otras palabras, el producto de la entrada w y la nueva salida Sy debe dar unidades de potencia.

En este momento cabe recordar de la teoría de sistemas que la potencia se puede calcular como el producto de una variable de flujo y una de esfuerzo, por ejemplo velocidad y fuerza para sistemas mecánicos de desplazamiento lineal (vea también la Tabla 4.1).

Por tanto, se entiende que para que exista un OED, existiendo una relación energética entre la entrada desconocida y la salida, si se conoce la naturaleza de w (por ejemplo una fuerza desconocida), la variable que se debe medir para poder construir un OED es complementaria en términos de potencia (velocidad).

Tipo de sistema	Variable de esfuerzo	Variable de flujo
Eléctrico	Voltaje	Corriente
Mecánico (lineal)	Fuerza	Velocidad
Mecánico (rotacional)	Par	velocidad angular
Hidráulico	Presión	Flujo volumétrico

Tabla 4.1: Cálculo de potencia: variables de flujo vs. variables de esfuerzo

En resumen, la caracterización disipativa de las condiciones de existencia de los OED conduce, por medio de la interpretación física de las variables involucradas, a información valiosa para la construcción del observador: nos permite interpretar qué tipo de variable se debe medir para construir un OED cuando se sabe la naturaleza de la entrada desconocida.

Esta interpretación física se ha explicado para los sistemas lineales por la facilidad de expresar la desigualdad disipativa en términos de la planta. Sin embargo, esta interpretación se puede hacer también para sistemas no lineales, como por ejemplo el motor de inducción presentado en el Capítulo 3. En aqu el capítulo se mostró cómo para suplir la información del par de carga (entrada desconocida) fue necesario medir la velocidad angular.

4.3. Ejemplo

Para ilustrar tanto el cálculo del observador por medio de la desigualdad matricial, como la interpretación física del resultado, se presenta el siguiente sistema mecánico

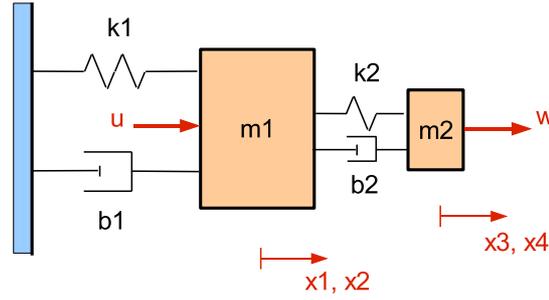


Figura 4.1: Sistema mecánico lineal de cuarto orden

el cual tiene la siguiente representación de estados

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

En particular se consideran los siguientes valores de los parámetros del sistema: $m_1 = 5$ (kg), $m_2 = 1$ (kg), $k_1 = 30$ (N/m), $k_2 = 10$ (N/m), $b_1 = 4$ (Ns/m), $b_2 = 2$ (Ns/m).

El sistema mecánico ilustrado en la Figura 4.1 puede verse como un sistema masa-resorte-amortiguador principal (m_1 , k_1 , c_1) perturbado por otro sistema similar (m_2 , k_2 , c_2) que se puede denominar como subsistema perturbador, pues a este sistema es al cual se le aplica directamente la fuerza desconocida w , lo que provoca un efecto perturbador en el subsistema principal.

Como puede verse, existen cuatro estados ($n = 4$), dos salidas ($m = 2$), una entrada conocida ($p = 1$) y una entrada desconocida ($q = 1$).

Se puede verificar que el modelo satisface las condiciones de existencia de los OED (4.8) y (4.9), es decir,

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+$$

$$\text{rango } CD = \text{rango } D = q = \dim(w)$$

Además, se cumple que $\dim(y) > \dim(w)$.

Por medio de una sencilla transformación de estado

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y utilizando las definiciones de las salidas, la planta puede ser expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}}_2 &= \left(-\frac{b_2}{m_2}\right) \bar{y}_2 + \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \xi + \frac{1}{m_2} w \\ \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_2}{m_1} \\ 1 \end{bmatrix} \bar{y}_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi \\ \bar{y}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi \end{aligned}$$

En este ejemplo, el diseño puede hacerse sin dificultad por el método presentado en la Sección 4.1.2 o utilizando la Proposición 1.

Utilizando el método de la Proposición 1, el observador queda en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu + L(Cz - y) \\ \hat{x} &= Ez + Fy \end{aligned}$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} -2.1 & 0 \\ 1.5 & -0.4 \\ -2.1 & -1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera la dinámica del error $\varepsilon = x - z$ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= (A + LC)\varepsilon + Dw \\ e &= C\varepsilon \end{aligned}$$

y es disipativa si se selecciona

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T \begin{bmatrix} 113.8 & -8.8 & -62.3 & 0 \\ -8.8 & 28.5 & -20.5 & 0 \\ -62.3 & -20.5 & 119.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon,$$

es decir,

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -1.0 \|\varepsilon\|^2 + w^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} e$$

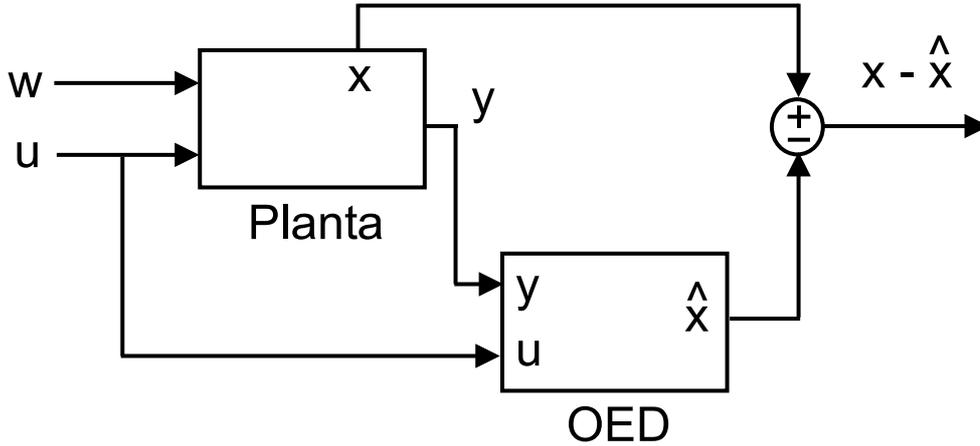


Figura 4.2: Entrada desconocida w : escalón de amplitud 7 (N) que comienza a los 7.5 (seg). Entrada conocida $u = 0$

En este ejemplo puede realizarse la interpretación física de esta propiedad de disipatividad. Aprovechando que la planta es lineal, la desigualdad de disipatividad puede ser reescrita en términos de las variables de la planta,

$$\dot{V}(x) \leq -1.0 \|x\|^2 + w^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{x_4} y.$$

La matriz \mathbb{S} selecciona las salidas que son pasivas con respecto a w y en este caso es $\mathbb{S} = [0, 1]$. Por tanto, la salida seleccionada es x_4 y el término $w^T \mathbb{S} y = w x_4$ es de hecho la potencia suministrada a la segunda parte (perturbadora) de la planta, es decir, la fuerza aplicada a m_2 multiplicada por su velocidad.

4.3.1. Simulaciones numéricas

El desempeño del observador diseñado se comprobó por medio de simulaciones numéricas programadas en *Simulink* del software Matlab[©].

Se realizaron dos simulaciones con el fin de mostrar las propiedades robustas del observador. En la primera simulación se consideró una entrada desconocida constante, que en este caso representa una fuerza constante aplicada a la masa m_2 . Con el segundo experimento se muestra que incluso una no linealidad discontinua que entra por el mismo canal que la entrada desconocida no llega a afectar el desempeño del observador, pues el error de estimación converge a cero.

4.3.2. Primera simulación: w constante

El esquema de la primera simulación es presentado en la Figura 4.2

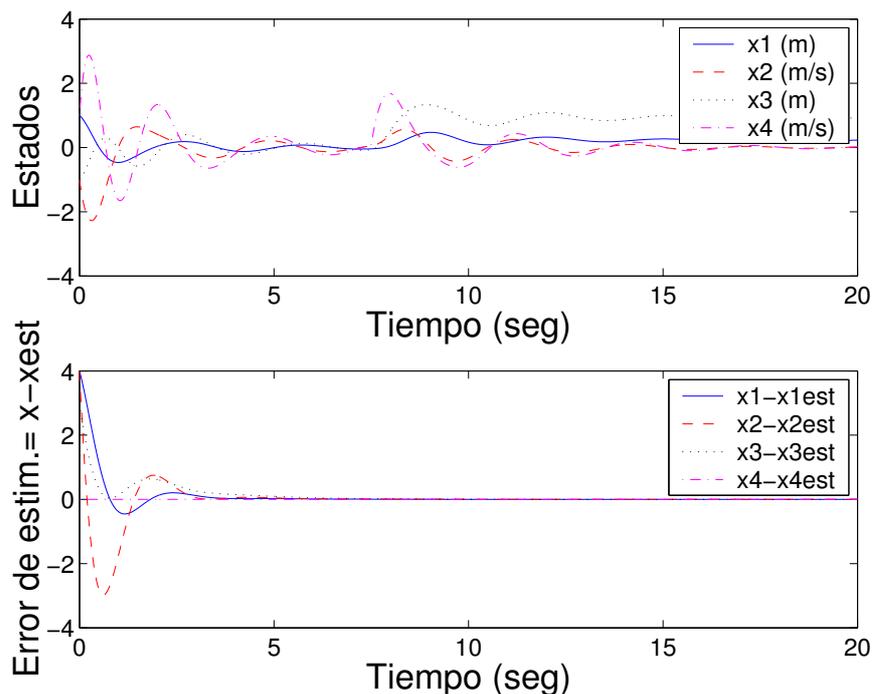


Figura 4.3: Estados del sistema y error de estimación obtenidos con $w = 7$ (N)

Con el fin de observar únicamente el efecto de la entrada desconocida en el error de estimación, se realizó la simulación con $u = 0$. Por otro lado, la fuerza desconocida es elegida constante con el valor de 7 (N) a partir de $t = 7.5$ (seg).

Los resultados son mostrados en la Figura 4.3. Se puede apreciar que la aparición de la entrada desconocida a los 7.5 (seg) afecta sensiblemente a los estados del sistema, mientras que el error de estimación permanece independiente de ésta.

4.3.3. Segunda simulación: w como dinámica no modelada

El esquema de la segunda simulación se muestra en la Figura 4.4. Como puede verse, ahora lo que entra por el canal de la entrada desconocida es una retroalimentación no lineal discontinua de los estados, es decir, una dinámica no modelada.

La dinámica no modelada asignada es $w = \sin(x_2 + x_4 - 0.75) |x_2 + x_4 - 0.75|$. En la realidad, esta dinámica no tiene una interpretación física directa, sin embargo, como se eligió en función de las velocidades se podría interpretar como un término de fricción. La razón principal de elegirla de esa forma fue con el fin de mostrar que puede entrar cualquier término no lineal discontinuo por el canal de w sin afectar el desempeño del observador

Los resultados de la Figura 4.6 muestran que a pesar de que se incluye una dinámica no modelada, el error de estimación converge a cero independientemente de ella. Como es de esperarse, los estados

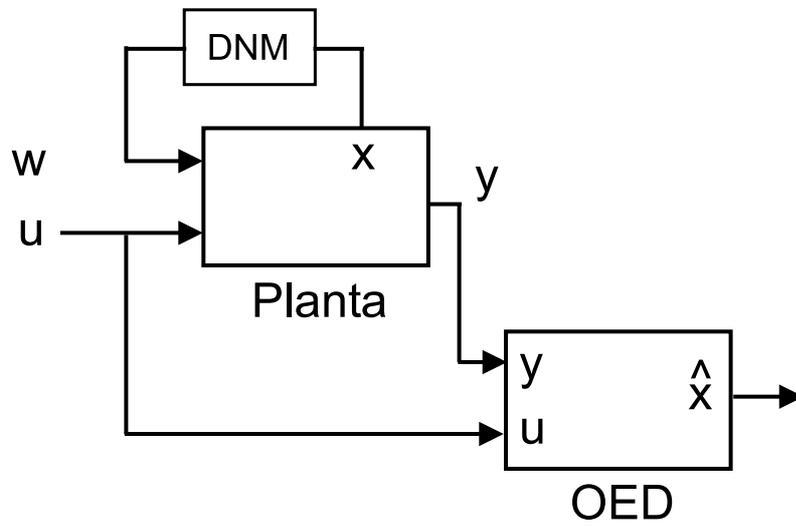


Figura 4.4: Entrada desconocida w : dinámica no modelada (DNM) no lineal y discontinua. Entrada conocida $u = 0$

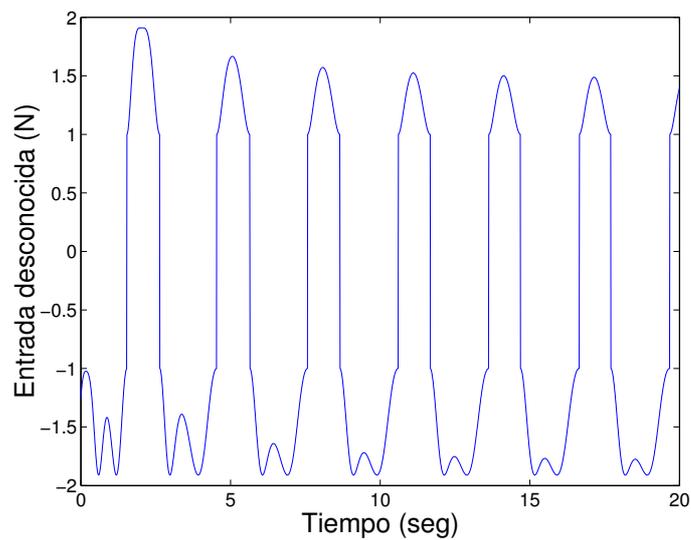


Figura 4.5: Entrada desconocida en la segunda simulación

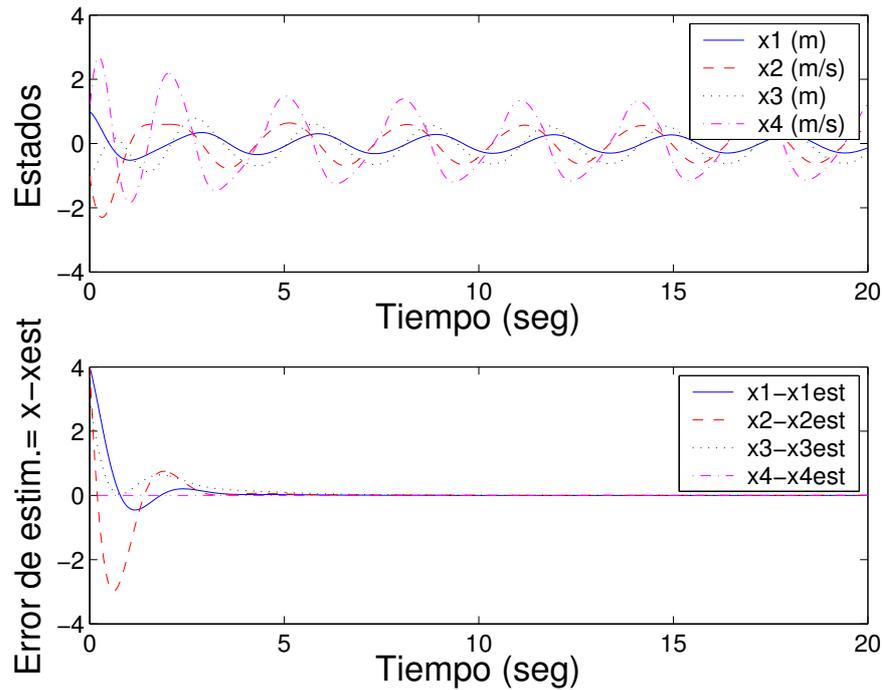


Figura 4.6: Estados y error de estimación obtenidos de la segunda simulación

del sistema si se ven grandemente afectados por la dinámica perturbadora.

4.4. Resumen

En este capítulo se han presentado algunas aportaciones al caso lineal que tiene la interpretación disipativa de las condiciones de existencia de los OED.

A pesar de que este ámbito lineal está muy bien estudiado en la literatura, la perspectiva disipativa permite proponer un diseño simple basado en una desigualdad matricial lineal con restricciones. También permite una interpretación física de las variables que deben medirse para llevar a cabo el proceso de estimación robusta de estados.

En la simulación numérica del ejemplo se constató que una dinámica no modelada puede ser incluida en lugar de la entrada desconocida, manteniéndose la convergencia del error a cero independiente de ese término desconocido.

Capítulo 5

Diseño de OED para una clase de sistemas no lineales

En el Capítulo 3 se determinaron condiciones suficientes para la existencia de OED para sistemas no lineales generales, lo que representa un resultado teórico importante. Sin embargo, por la generalidad de la clase de sistemas considerada en el Capítulo 3, no puede proponerse una forma sistemática para determinar la inyección de salida $L(\cdot)$ o la función de almacenamiento que permite garantizar la disipatividad del sistema error.

El objetivo de este capítulo es, por tanto, proponer un método de diseño para una clase grande de sistemas no lineales con una cierta estructura. La idea es mostrar que para esta clase de sistemas las condiciones propuestas en el Capítulo 3 pueden ser utilizadas en la construcción del observador.

La clase de sistemas no lineales considerados en este capítulo para el diseño de OED es la siguiente

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\psi(\sigma) + \varphi(t, y, u) - Dw, & x(0) = x_0 \\ y = Cx, \\ \sigma = Hx, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde, como anteriormente se definió, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$ son los vectores de estado, de entradas conocidas, de entradas desconocidas y de salidas, respectivamente; por otro lado, se define ahora $\sigma \in \mathbb{R}^r$ como una función lineal del estado y que se asume como no medible.

La función no lineal $\varphi(t, y, u)$ es arbitraria y se asume como localmente Lipschitz en y , continua en u y continua a tramos en t . El vector $\psi(\sigma)$ de dimensión s se asume como localmente Lipschitz en σ . Se supondrá que las trayectorias de Σ existen y están bien definidas para todo tiempo; es decir, no hay tiempos de escape finitos. Sin pérdida de generalidad, se asume que las matrices D y C son de rango completo.

Nótese que la clase de sistemas puede ser más grande considerando que por medio de transformaciones de estado, de salida o de entrada desconocida, algunos sistemas pueden ser transformados a la forma particular dada por (5.1).

5.1. Una clase especial de disipatividad

Con el fin de aprovechar la estructura particular de la clase de sistemas considerada, se utiliza una clase especial de disipatividad. Esta forma de disipatividad en realidad proviene de un planteamiento energético del criterio del círculo (vea estabilidad absoluta (Khalil, 2002)), el cual se introduce en esta sección. Este planteamiento tiene a su vez su raíz en el uso de formas cuadráticas para sistemas lineales.

Por tanto, se recordarán algunos resultados conocidos para sistemas LIT (véanse (Hill y Moylan, 1980; Khalil, 2002; Moreno, 2004; Willems, 1972a; Willems, 1972b) por ejemplo), pero desde una perspectiva disipativa.

Considérese el siguiente sistema LIT

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ son los vectores de estado, de entrada y de salida, respectivamente.

Considérense también funciones cuadráticas de potencia suministrada

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$, y Q , R son simétricas. Con base en este tipo de funciones de suministro, se puede definir la disipatividad de (5.2) con respecto a ellas.

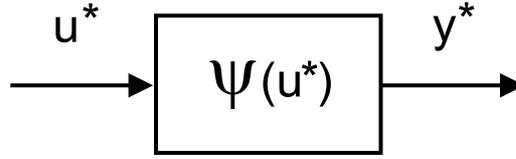
Definición 12 Se dice que Σ_L es estrictamente disipativo en el estado (EDE) con respecto a la potencia suministrada $\omega(y, u)$, abreviado EDE $\{Q, S, R\}$, si existen una matriz $P = P^T > 0$ y una constante $\lambda > 0$ tales que

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \lambda P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0$$

Considérese ahora el siguiente tipo de no linealidades.

Definición 13 Una no linealidad estática ¹ $\psi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y^* = \psi(u^*)$ localmente Lipschitz en u^* , tal que $\psi(0) = 0$, se dice que es disipativa con respecto a la potencia suministrada $\omega(y^*, u^*)$ (5.3),

¹Esta definición también puede realizarse cuando la no linealidad además sea variante en el tiempo $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y^* = \psi(t, u^*)$ continua a tramos en t y localmente Lipschitz en u^* , tal que $\psi(t, 0) = 0$, como se hace en (Khalil, 2002) para definir las condiciones de sector

Figura 5.1: No linealidad $\psi(u)$.

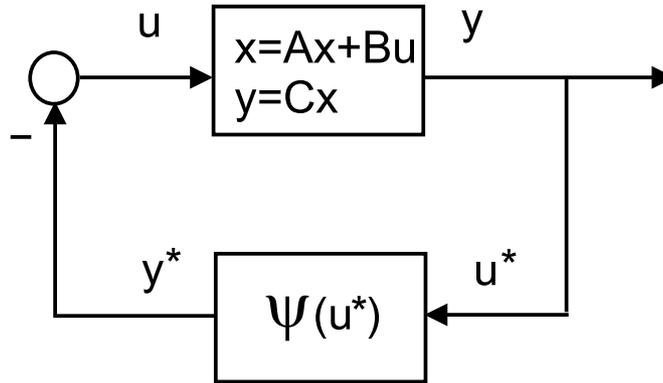
o abreviando $D\{Q, S, R\}$, si para todo $t \geq 0$ y $u^* \in \mathbb{R}^p$

$$\omega(y^*, u^*) = \omega(\psi(u^*), u^*) \geq 0$$

Es importante mencionar que las condiciones clásicas de sector para no linealidades (Khalil, 2002) pueden ser expresadas con esta definición. Por ejemplo, para no linealidades cuadradas, es decir cuando $m = p$, las condiciones son: si ψ está en el sector $[K_1, K_2]$, es decir $(y^* - K_1 u^*)^T (K_2 u^* - y^*) \geq 0$, es equivalente a que sea $D\{Q, S, R\}$ con $(Q, S, R) = (-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1))$; si ψ está en el sector $[K_1, \infty)$, es decir $(y^* - K_1 u^*)^T u^* \geq 0$, es equivalente a ser $D\{0, \frac{1}{2}I, -\frac{1}{2}(K_1 + K_1^T)\}$.

Por eso, el siguiente lema se puede ver como una generalización al caso no cuadrado del criterio del círculo de la estabilidad absoluta.

Lema 2 (Hill y Moylan, 1980; Moreno, 2004) *Considérese la interconexión en retroalimentación entre Σ_L (5.2) y ψ*

Figura 5.2: Retroalimentación entre Σ_L y $\psi(u)$.

es decir, $u = -y^*$, $u^* = y$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx, \\ u &= -\psi(t, y), \end{aligned} \tag{5.4}$$

tal que la no linealidad ψ es $D\{Q, S, R\}$. Si la parte lineal es $EDE\{-R, S^T, -Q\}$, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de (5.4) es global y exponencialmente estable para toda no linealidad $D\{Q, S, R\}$.

Nótese que la disipatividad de la no linealidad ψ o su pertenencia a un sector es una forma de caracterizarla, y una forma de restringir la clase de funciones para la cual una propiedad de estabilidad como la del Lema 2 se satisface. Esto indica a su vez que en la Definición 13 no es de utilidad el uso de funciones de potencia suministrada (Q, S, R) que sean semipositivas definidas, dado que cualquier no linealidad ψ sería disipativa en el sentido mencionado. Por tanto, se asumirá que (Q, S, R) no es semipositiva definida.

5.2. Planteamiento del problema

De acuerdo con la Definición 3, se dice que un *observador con entradas desconocidas (OED)* del sistema Σ (5.1) es un sistema que utiliza información de las entradas conocidas $u(t)$ y las salidas $y(t)$ y proporciona un estimado del estado $\hat{x}(t)$, que converge asintóticamente al estado real de Σ a pesar de no conocer nada de w , es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$.

En este caso se propone el siguiente observador

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\zeta} = A\zeta + G\psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) + L(\hat{y} - y) + \varphi(t, y, u), & \zeta(0) = \zeta_0, \\ \hat{y} = C\zeta, \\ \hat{\sigma} = H\zeta, \\ \hat{x} = E\zeta + Fy, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $\zeta \in \mathbb{R}^n$, con dos inyecciones de salida, una de la forma usual como parte de la ecuación de estado y una inyección de salida dentro del argumento de la no linealidad $\psi(\cdot)$. Las matrices de inyección de salida $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $N \in \mathbb{R}^{r \times m}$, así como las matrices $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son entonces los elementos a diseñar. Así, el valor estimado del estado \hat{x} depende en general no sólo del estado del observador ζ sino también de la salida de la planta y .

Cabe señalarse que (5.5) no es un observador identidad, pues el estado del observador ζ no es el estado estimado \hat{x} .

5.2.1. Error de estimación

Tomando la planta Σ y el observador Ω , se puede generar el error de estimación de acuerdo a lo propuesto en la Sección 3.1.1. Defínase el error en el estado como $\epsilon \triangleq \zeta - x$, el error en la salida

como $e \triangleq \hat{y} - y$, el error en σ como $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ y una variable auxiliar $z \triangleq (H + NC)\epsilon = \tilde{\sigma} + Ne$.

La dinámica del error de estimación es entonces

$$\Sigma_e^{obs} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\psi(\sigma) + \varphi(t, y, u) - Dw, \\ \dot{\epsilon} = A_L\epsilon + G\nu + Dw, \\ z = H_N\epsilon, \\ e = C\epsilon, \\ \sigma = Hx, \\ \nu = -\phi(z, \sigma), \end{cases} \quad (5.6)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\epsilon(0) = \epsilon_0$ y donde $\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z)$, $A_L = A + LC$, $H_N = H + NC$. Nótese que $\phi(0, \sigma) = 0$ para toda σ . Cabe señalar que la ecuación dinámica de x se incluye en la ecuación de error porque su solución participa en la ecuación dinámica de ϵ por medio de σ . Sólo en algunos casos, como por ejemplo en los sistemas lineales, esta dependencia no existe y la dinámica del error consiste en dos sistemas desacoplados.

5.2.2. Disipatividad por inyección de la salida de la ecuación de error

Para el tipo de sistemas (5.1), se hace la siguiente definición.

Definición 14 *Se dice que el tipo de sistemas*

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\psi(\sigma) + \varphi(t, y, u) - Dw, \\ \dot{\epsilon} = A\epsilon + G\nu + Dw, \\ e = C\epsilon, \\ \tilde{\sigma} = H\epsilon, \\ \nu = -\phi(\tilde{\sigma}, \sigma), \end{cases} \quad (5.7)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\epsilon(0) = \epsilon_0$, es Parcialmente Estrictamente Disipativo por Inyección Lineal Parcial de la Salida (PEDILPS) si existen:

(a) matrices L y N en (5.6);

(b) una función de almacenamiento continuamente diferenciable $V(\epsilon, x)$, positiva definida en ϵ , uniformemente en x , es decir, se satisface para todo $(\epsilon, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\alpha_1(\|\epsilon\|) \leq V(\epsilon, x) \leq \alpha_2(\|\epsilon\|) \quad (5.8)$$

para algunas funciones $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ ; y

(c) una matriz de rango fila completo $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^{q \times m}$;

tal que a lo largo de las trayectorias de (5.6) se cumple que

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|\epsilon\|) + w^T \mathbb{S}e, \quad (5.9)$$

para una función $\alpha_3(\cdot)$ de clase \mathcal{K} .

Se dice que Σ_e (5.7) es parcialmente disipativo porque las funciones $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ que acotan la función de almacenamiento $V(\cdot)$ pueden depender solo de ϵ . La inyección de la salida se denomina parcial y lineal porque solo afecta al subsistema ϵ y lo hace linealmente. Nótese que si el sistema Σ_e es PEDIPS entonces Σ_e^{obs} es (parcialmente) $EDE\{0, \mathbb{S}, 0\}$.

Así como en el caso general, esta condición implica la existencia de un OED, pero en este caso permite además proponer un método de diseño de los observadores.

5.3. Diseño del OED basado en disipatividad

5.3.1. Existencia del OED

En esta sección se proponen condiciones suficientes y constructivas para la existencia de un OED para la planta Σ (3.1), y que representa una aplicación del resultado general proporcionado en el Capítulo 3.

Teorema 4 *Supóngase que*

(a) *La no linealidad ϕ en (5.6) es $D\{Q, S, R\}$ para alguna forma cuadrática $\omega(\phi, z) = \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z$ para toda σ , con $Q \leq 0$.*

(b) *Existen matrices constantes $P = P^T > 0$, L , N , \mathbb{S} y una constante $\lambda > 0$, tal que*

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \lambda P & PG & PD \\ G^T P & 0 & 0 \\ D^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -H_N^T R H_N & H_N^T S^T & C^T \mathbb{S}^T \\ S H_N & -Q & 0 \\ \mathbb{S} C & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.10)$$

donde $A_L = A + LC$, $H_N = H + NC$.

Entonces existe un OED para (5.1).

Demostración.

i) *Propiedad de Disipatividad:* Para empezar, se demostrará que el hecho de que (a) y (b) se satisfacen implica que Σ_e (5.7) es PEDILPS. Para esto, considérese la función de almacenamiento

$V(\epsilon, x) = \epsilon^T P \epsilon$, que satisface (5.8). La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (5.6) puede ser escrita como sigue

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \nu \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P & PG & PD \\ G^T P & 0 & 0 \\ D^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \nu \\ w \end{bmatrix}$$

Si (5.10) se satisface, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \begin{bmatrix} \epsilon \\ \nu \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -H_N^T R H_N - \lambda P & H_N^T S^T & C^T S^T \\ S H_N & -Q & 0 \\ S C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \nu \\ w \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \phi \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ z \end{bmatrix} - \lambda V(\epsilon) + 2e^T S^T w \end{aligned}$$

Debido ahora a la suposición (a), se llega a que

$$\dot{V} \leq -\lambda V(\epsilon) + 2w^T S e, \quad (5.11)$$

y (5.9) en la Definición 14 se satisface.

ii) Transformación de Coordenadas: Nótese que si $w = 0$ ó $S e = 0$ entonces (5.11) implica que $\zeta \rightarrow x$. Sin embargo, si $w \neq 0$ entonces $\zeta \not\rightarrow x$ y es necesario desacoplar el efecto de la perturbación w sobre el estado estimado \hat{x} . Esto puede realizarse mejor en coordenadas especiales. Para ello, nótese primero que la satisfacción de (5.10) implica que $S C = D^T P$, y por lo tanto que

$$S C D = D^T P D > 0. \quad (5.12)$$

Como $\det(S C D) \neq 0$ existe una matriz $M \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ de rango fila completo tal que $T = \begin{bmatrix} S C \\ M \end{bmatrix}$, $\det T \neq 0$ y $M D = 0$. T define una transformación de estados $(\chi, \xi) = (T x, T \epsilon)$ para (5.6) con

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S C x \\ M x \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S C \epsilon \\ M \epsilon \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

En estas nuevas coordenadas, la dinámica del error (5.6) tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}_1 &= \bar{A}_{11}\chi_1 + \bar{A}_{12}\chi_2 + \bar{G}_1\psi + \bar{\varphi}_1 - D^T PDw \\
\dot{\chi}_2 &= \bar{A}_{21}\chi_1 + \bar{A}_{22}\chi_2 + \bar{G}_2\psi + \bar{\varphi}_2 \\
\dot{\xi}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{L}_1\bar{C}_1)\xi_1 + (\bar{A}_{12} + \bar{L}_1\bar{C}_2)\xi_2 + \bar{G}_1\nu + D^T PDw \\
\dot{\xi}_2 &= (\bar{A}_{21} + \bar{L}_2\bar{C}_1)\xi_1 + (\bar{A}_{22} + \bar{L}_2\bar{C}_2)\xi_2 + \bar{G}_2\nu \\
z &= (\bar{H} + N\bar{C})\xi = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 + N\bar{C}_1 & \bar{H}_2 + N\bar{C}_2 \end{bmatrix} \xi, \\
e &= \bar{C}\xi, \quad \mathbb{S}e = \xi_1, \\
\nu &= -\phi(z, \sigma),
\end{aligned} \tag{5.14}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = TD = \begin{bmatrix} D^T PD \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = TG = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{bmatrix}, \\
\bar{L} &= TL = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{S}\bar{C} = \mathbb{S}CT^{-1} = [I, 0] \\
\bar{H} &= HT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\varphi} = T\varphi = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De acuerdo con el Teorema 2 (Capítulo 3) el hecho de que las condiciones i) y ii) se satisfagan es suficiente para la existencia de un OED. El OED será construido en la Sección 5.3.3. ■

5.3.2. Desigualdad Matricial (Lineal)

A pesar de que en general la desigualdad (5.10) es no lineal en los parámetros de diseño, bajo ciertas condiciones se vuelve una LMI con restricciones en forma de igualdades matriciales, para cuya solución existen algoritmos numéricos eficientes. Por ejemplo, reemplazando el término λP en (5.10) por λI , (5.10) es una LMI en $P, PL, \lambda, \mathbb{S}$, pero no en N , excepto cuando $R = 0$. Si $\phi \in [K_1, K_2]$ ó $[K_1, \infty]$, siempre es posible utilizar una transformación de lazo (Khalil, 2002) para hacer que $R = 0$. Este es el caso por ejemplo cuando ψ es Lipschitz o está en el sector $[0, \infty]$, así como para no linealidades monótonas.

Considérese una no linealidad $\phi \in [K_1, K_2]$. Como se mencionó antes, esta no linealidad es $D\{Q, S, R\}$ para una forma cuadrática no positiva semidefinida $\omega(\phi, z) = \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z$ y

$$(Q, S, R) = \left(-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1) \right). \tag{5.15}$$

Considérese ahora una transformación de lazo como la de la Figura 5.3.

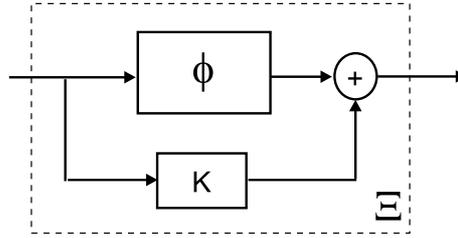


Figura 5.3: Transformación de lazo para hacer $R=0$.

La nueva no linealidad es $\Xi = \phi + Kz$ y su forma cuadrática correspondiente,

$$\begin{aligned}
 \omega_{\Xi}(\Xi, z) &= \Xi^T \bar{Q} \Xi + \Xi^T \bar{S} z + z^T \bar{S}^T \Xi + z^T \bar{R} z \\
 &= (\phi + Kz)^T \bar{Q} (\phi + Kz) + (\phi + Kz)^T \bar{S} z + z^T \bar{S}^T (\phi + Kz) + z^T \bar{R} z \\
 &= \phi^T \bar{Q} \phi + \phi^T \bar{Q} K z + z^T K^T \bar{Q} \phi + z^T K^T \bar{Q} K z + \phi^T \bar{S} z + z^T \bar{S}^T \phi + z^T K^T \bar{S} z + z^T \bar{S}^T K z + z^T \bar{R} z \\
 &= \phi^T \bar{Q} \phi + 2\phi^T (\bar{Q} K + \bar{S}) z + z^T (K^T \bar{Q} K + K^T \bar{S} + \bar{S}^T K + \bar{R}) z \\
 &= \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z
 \end{aligned}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, se encuentra que

$$\begin{aligned}
 \bar{Q} &= Q \\
 \bar{S} &= S - QK \\
 \bar{R} &= R - K^T S - S^T K + K^T Q K
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las matrices (Q, S, R) de (5.15) y considerando $K = K_1$ se puede probar que $\bar{R} = 0$. Por tanto, siempre es posible utilizar una transformación de lazo (que implica también una transformación de lazo de la planta) para obtener un problema con $R = 0$.

5.3.3. Construcción del OED

En el Teorema 4 se demuestra la existencia de un OED si dos condiciones se satisfacen: una condición de sector de la no linealidad ϕ expresada por medio de una función cuadrática y una desigualdad matricial. La satisfacción de esta desigualdad matricial implica la propiedad de disipatividad que se requiere para la existencia del observador; las incógnitas más importantes de esta desigualdad matricial son las matrices de inyección de salida L y N y la matriz P con la que se construye la función de almacenamiento asociada a la propiedad de disipatividad.

Un punto importante que no se presenta en el teorema es la forma como debe diseñarse el OED. A continuación se realizará este diseño, en el cual se muestra que el OED se diseña con inyecciones

de salida L_T y N_T , distintas a las inyecciones de salida L y N que satisfacen la desigualdad matricial. La idea fundamental en este caso es que las inyecciones de salida L y N satisfacen la desigualdad matricial, mas no necesariamente generan un desacoplamiento de la entrada desconocida en el error de observación. Sin embargo, encontrando las matrices L y N , siempre se pueden encontrar matrices L_T y N_T que satisfacen la desigualdad matricial y al mismo tiempo realizan el desacoplamiento. En otras palabras, de todas las posibles matrices de inyección de salida L y N que satisfacen la desigualdad matricial, se deben seleccionar (o construir en este caso) otras que además realicen el desacoplamiento deseado.

Proposición 2 *El sistema Ω (5.5) es un OED de orden completo con matrices de inyección de salida L_T , N_T que están dadas por (5.23), (5.24), respectivamente, y matrices E y F definidas por (5.25).*

Demostración. En esta prueba se construyen matrices de inyección de salida deacopladoras L_T y N_T utilizando las matrices L y N que se obtienen como solución a (5.10) con el fin de construir el observador. Por simplicidad, para el diseño del OED se trabajará con el sistema transformado (5.14).

Desacoplamiento de la entrada desconocida: Con el fin de obtener un observador asintótico, independiente de la entrada desconocida, es necesario desacoplar su efecto sobre ξ_2 en (5.14), pues ésta es la parte del error de estimación que corresponde a los estados no medibles. Con el fin de obtener este desacoplamiento, se utilizarán matrices de desacoplamiento denotadas por L_D y N_D y que se suman a las soluciones de (5.10) obteniéndose inyecciones de salida totales L_T y N_T

$$\begin{aligned} L_T &= L + L_D \\ N_T &= N + N_D \end{aligned} \tag{5.16}$$

Si ahora L_T de (5.16) toma el lugar de L en (5.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{L}_1\bar{C}_1 + \bar{L}_{D1}\bar{C}_1) \xi_1 + (\bar{A}_{12} + \bar{L}_1\bar{C}_2 + \bar{L}_{D1}\bar{C}_2) \xi_2 + \bar{G}_1\nu + D^T P D w \\ \dot{\xi}_2 &= (\bar{A}_{21} + \bar{L}_2\bar{C}_1 + \bar{L}_{D2}\bar{C}_1) \xi_1 + (\bar{A}_{22} + \bar{L}_2\bar{C}_2 + \bar{L}_{D2}\bar{C}_2) \xi_2 + \bar{G}_2\nu \\ z &= (\bar{H}_1 + N\bar{C}_1 + N_D\bar{C}_1) \xi_1 + (\bar{H}_2 + N\bar{C}_2 + N_D\bar{C}_2) \xi_2 . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Puede verse que los términos adicionales en esta última expresión con respecto a (5.14) son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \bar{L}_{D1}\bar{C}_1\xi_1 + \bar{L}_{D1}\bar{C}_2\xi_2 &= \bar{L}_{D1}\bar{C}\xi \\ \bar{L}_{D2}\bar{C}_1\xi_1 + \bar{L}_{D2}\bar{C}_2\xi_2 &= \bar{L}_{D2}\bar{C}\xi \\ N_D\bar{C}_1\xi_1 + N_D\bar{C}_2\xi_2 &= N_D\bar{C}\xi \end{aligned} \tag{5.18}$$

Si además se propone que

$$\begin{aligned}\bar{L}_{D1} &= \bar{K}_1 \mathbb{S} \\ \bar{L}_{D2} &= \bar{K}_2 \mathbb{S} \\ N_D &= K_N \mathbb{S},\end{aligned}\tag{5.19}$$

la ecuación (5.17) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{L}_1 \bar{C}_1 + \bar{K}_1) \xi_1 + (\bar{A}_{12} + \bar{L}_1 \bar{C}_2) \xi_2 + \bar{G}_1 \nu + D^T P D w \\ \dot{\xi}_2 &= (\bar{A}_{21} + \bar{L}_2 \bar{C}_1 + \bar{K}_2) \xi_1 + (\bar{A}_{22} + \bar{L}_2 \bar{C}_2) \xi_2 + \bar{G}_2 \nu \\ z &= (\bar{H}_1 + N \bar{C}_1 + K_N) \xi_1 + (\bar{H}_2 + N \bar{C}_2) \xi_2.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Como puede verse, la inclusión de las matrices de desacoplamiento se pueden traducir como una inyección de las salidas pasivas, es decir, sólo afectan a los términos de ξ_1 en (5.14) por medio de las matrices \bar{K}_1 , \bar{K}_2 y \bar{K}_N .

Seleccionando ahora

$$\begin{aligned}\bar{K}_2 &= -(\bar{A}_{21} + \bar{L}_2 \bar{C}_1), \\ K_N &= -(\bar{H}_1 + N \bar{C}_1),\end{aligned}\tag{5.21}$$

y \bar{K}_1 tal que $A_{11}^* \triangleq (\bar{A}_{11} + \bar{L}_1 \bar{C}_1 + \bar{K}_1)$ es Hurwitz, lo cual evidentemente siempre es posible, (5.20) se puede escribir entonces como

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= A_{11}^* \xi_1 + (\bar{A}_{12} + \bar{L}_1 \bar{C}_2) \xi_2 + \bar{G}_1 \nu + D^T P D w, \\ \dot{\xi}_2 &= (\bar{A}_{22} + \bar{L}_2 \bar{C}_2) \xi_2 + \bar{G}_2 \nu, \\ z &= (\bar{H}_2 + N \bar{C}_2) \xi_2, \\ \nu &= -\phi(z, \sigma).\end{aligned}$$

Nótese que el subsistema ξ_2 está completamente desacoplado de w .

En estas coordenadas, la función de almacenamiento $V(\epsilon, x) = \epsilon^T P \epsilon$ se puede escribir $V(\xi_1, \xi_2, x) = \xi^T \Pi \xi = \xi_1^T \Pi_1 \xi_1 + \xi_2^T \Pi_2 \xi_2 = V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2)$, donde $\Pi = T^{-T} P T^{-1}$ es una matriz diagonal por bloques. Este último hecho puede derivarse de escribir $\mathbb{S} C = D^T P$ en las nuevas coordenadas, es decir, $\bar{D}^T \Pi = [I, 0]$.

Nótese que si $\mathbb{S} e = \xi_1 = 0$, entonces de (5.11)

$$\dot{V}_2(\xi_2) \leq -\lambda V_2(\xi_2),$$

considerando (5.18) y (5.19), y junto con (5.14) el subsistema

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2 &= (\bar{A}_{22} + \bar{L}_2 \bar{C}_2) \xi_2 + \bar{G}_2 \nu \\ z &= (\bar{H}_2 + N \bar{C}_2) \xi_2, \\ \nu &= -\phi(z, \sigma),\end{aligned}\tag{5.22}$$

tiene $\xi_2 = 0$ como un punto de equilibrio que es exponencialmente estable, uniformemente en σ .

Debido a la estabilidad de (5.22) $\xi_2 \rightarrow 0$ exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$, y como A_{11}^* es Hurwitz, $\xi_1 \rightarrow 0$ cuando $w \rightarrow 0$, o ξ_1 es acotada cuando w lo es también.

Por tanto, en las coordenadas originales, la inyección total de salida L_T es

$$L_T = L + T^{-1}\bar{L}_D \quad (5.23)$$

y la inyección total N

$$N_T = N + N_D \quad (5.24)$$

donde \bar{L}_D y N_D satisfacen (5.19) y (5.21) y $A_{11}^* \triangleq (\bar{A}_{11} + \bar{L}_{E1}\bar{C}_1 + \bar{L}_{D1}\bar{C}_1)$ es Hurwitz.

Además, si se seleccionan las matrices E y F del observador de acuerdo a

$$E = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}, \quad F = T^{-1} \begin{bmatrix} SC \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

se sigue fácilmente que $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$ exponencialmente rápido y uniformemente en w . ■

Comentario 12 *Este resultado se presentó en el 16o. Congreso Mundial Triannual del IFAC, 2005 (Rocha-Cózatl y Moreno, 2005a) llevado a cabo en Praga, Rep. Checa.*

Comentario 13 *Este procedimiento de cómputo es una desigualdad matricial a la que se le pueden agregar algunas restricciones (igualdades matriciales) con el fin de seleccionar las matrices correctas L_T y N_T a partir del conjunto de soluciones que satisfacen únicamente la desigualdad. En otras palabras, la desigualdad matricial puede tener diversas soluciones para L y N , pero no todas producen el desacoplamiento deseado. Ya en la Sección 4.2.1, donde se presenta el diseño de un OED para sistemas lineales por medio de una LMI, se realizó un comentario similar.*

Comentario 14 *La estructura de los sistemas no lineales considerados en este capítulo consiste en un término lineal en los estados y dos términos no lineales, uno que depende de entradas y salidas exclusivamente y otro que depende de estados no medibles. Por tanto, resulta claro que este método de diseño generaliza el presentado en el caso lineal e invariante en el tiempo.*

Comentario 15 *Nótese que (5.10) implica $Q \leq 0$, y la forma cuadrática de la no linealidad $\omega(\phi, z)$ es no positiva semidefinida, evitando este caso trivial.*

Comentario 16 *Si no existe entrada desconocida ($w = 0$), el diseño del OED sigue siendo válido, reduciéndose al presentado en (Moreno, 2004), que aplica el criterio del círculo generalizado en el Lema 2 a sistemas sin entradas desconocidas.*

5.4. Ejemplo

Se considera el sistema mecánico de la Figura 5.4

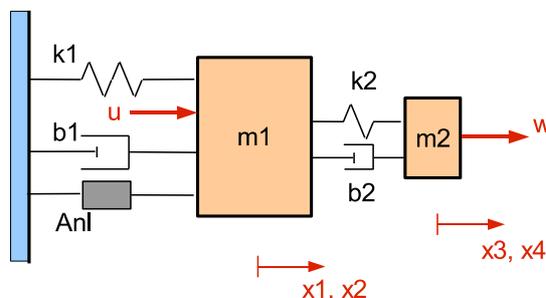


Figura 5.4: Sistema mecánico con amortiguador no lineal A_{nl} .

En él, x_1, x_2 representan respectivamente la posición y velocidad lineales de la masa m_1 y x_3, x_4 la posición y velocidad lineales de la masa m_2 , respectivamente. Se considera una fuerza conocida u aplicada a m_1 y una fuerza desconocida w aplicada a m_2 . Se asume que se miden las variables (x_1, x_4) , por lo que se construirá un OED para estimar las variables (x_2, x_3) .

El elemento A_{nl} es un amortiguador no lineal cuya ecuación es $F_{A_{nl}} = c_{nl} \text{sign}(x_2) \ln(1 + |x_2|)$, donde $c_{nl} \geq 0$. En la Figura 5.5 se muestra la forma de esta fuerza con respecto a x_2 , la cual se ve acotada por una recta con pendiente c_{nl} .

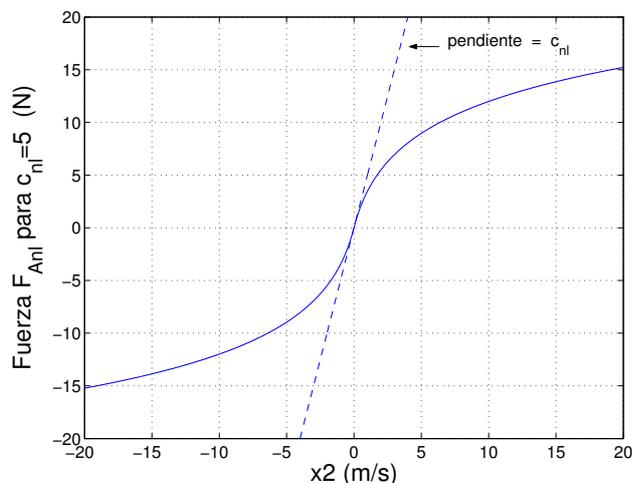


Figura 5.5: Forma de la fuerza $F_{A_{nl}}$ con respecto a x_2 .

Las ecuaciones en espacio de estados son

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \psi(\sigma) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} w$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_4, \quad (5.26)$$

$$\psi(\sigma) = c_{nl} \operatorname{sign}(\sigma) \ln(1 + |\sigma|), \quad \sigma = x_2,$$

En este caso, ψ es la fuerza del amortiguador no lineal y a partir de ella se encuentra la función ϕ de (5.6), que es

$$\phi(z, \sigma) = c_{nl} \operatorname{sign}(\sigma) \ln(1 + |\sigma|) - c_{nl} \operatorname{sign}(\sigma + z) \ln(1 + |\sigma + z|)$$

Esta no linealidad, que se construye a partir de la que se muestra en la Figura 5.5, se encuentra en el sector $[-c_{nl}, 0]$ con respecto a z , es decir, es $D\{-1, -\frac{1}{2}c_{nl}, 0\}$, satisfaciendo la suposición (a) del Teorema 4 para $Q = -1$, $S = -\frac{1}{2}c_{nl}$ y $R = 0$.

Como $R = 0$, la desigualdad (5.10) es una LMI en los parámetros de diseño P , PL , λ , \mathbb{S} , y N si λI reemplaza a λP , como se mencionó antes. Utilizando los valores siguientes para los parámetros $m_1 = 5$ (kg), $m_2 = 1$ (kg), $k_1 = 30$ (N/m), $k_2 = 10$ (N/m), $b_1 = 4$ (Ns/m), $b_2 = 2$ (Ns/m), $c_{nl} = 5$ (N), y con la ayuda del *LMI Toolbox* del Matlab[©], se obtuvieron los siguientes resultados que satisfacen la desigualdad (5.10)

$$\lambda = 0.85, \quad N = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} -1.7 & 0 \\ 3.5 & -0.4 \\ -1.6 & -1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 12 & -0.6 & -8.1 & 0 \\ -0.6 & 3.7 & -1.8 & 0 \\ -8.1 & -1.8 & 13.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, las matrices E y F son²

$$E = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El observador diseñado se implementó en simulación, considerando $u = 5$ (N) y $w = 4 \sin(t) + 2$ (N), apareciendo esta última a partir de los 10 (seg). Estas entradas y la no linealidad ψ se muestran en la Figura 5.6. Por otro lado, en la Figura 5.7 se muestran los resultados obtenidos:

²donde $0_{b \times c}$ es una matriz de ceros de dimensión $b \times c$.

la evolución de los estados en el tiempo y del error de observación. Los estados son evidentemente afectados por la entrada desconocida a partir de los 10 (*seg*), pero el error de estimación converge a cero independientemente de ella.

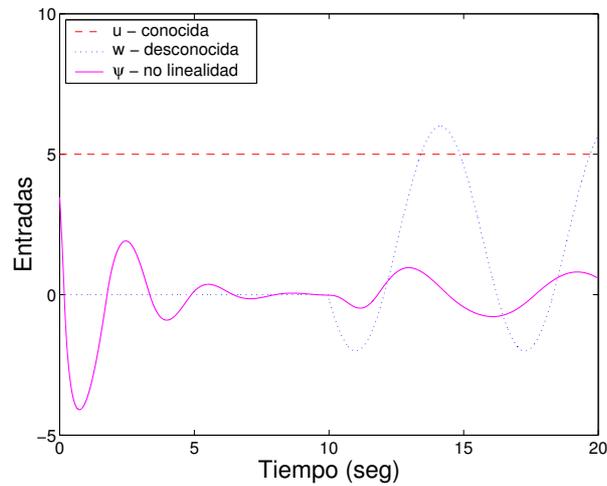


Figura 5.6: Simulación del OED diseñado. Evolución de las entradas u , w y de la no linealidad ψ

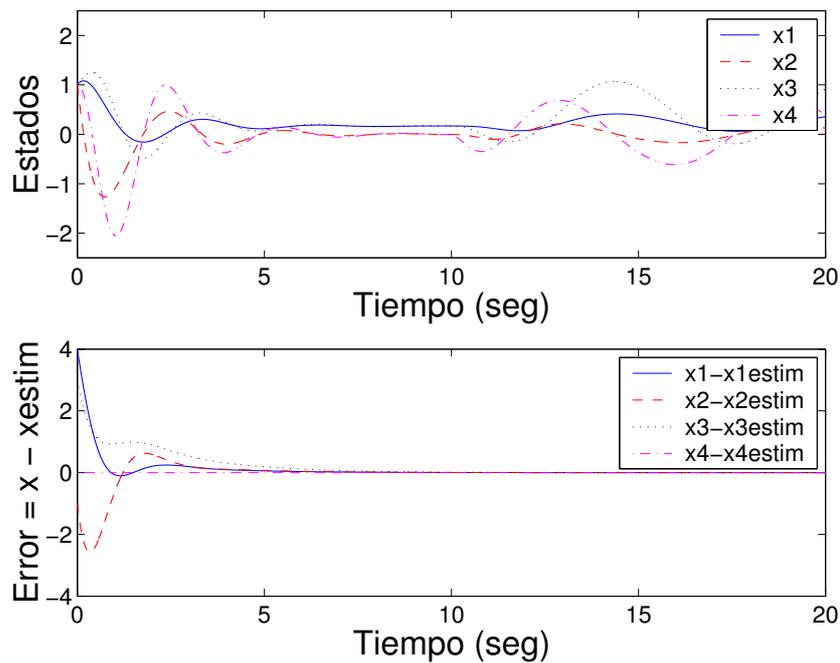


Figura 5.7: Simulación del OED diseñado. Evolución de los estados del sistema y del error de estimación, donde x_1 , x_3 están en (m) y x_2 , x_4 en (m/s)

5.5. Mejoramiento del diseño del OED

Para el diseño presentado en la Sección 5.3 se asumió que la no linealidad satisface sólo una condición de sector; sin embargo, eso conduce algunas veces a resultados conservadores. En algunos casos, más de una condición de sector puede satisfacerse simultáneamente, lo cual permite obtener una mejor descripción de la no linealidad y con ello resultados mejores. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

5.5.1. Ejemplo ilustrativo

Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Psi(x) \\ \dot{y}_2 &= w \\ y_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $x_T = [x, y_2]^T$ y

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x_2) \\ \Psi_2(x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan(x_2) \\ \sin(x_2) + \frac{x_3}{1+x_3^2} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Este sistema ya está en la forma dada por el subsistema χ en (5.14) con el subsistema x desacoplado de w . Como x_1 es medible, cualquier método de diseño puede ser utilizado para diseñar un observador para x .

La no linealidad $\Psi(x)$ es $D\{Q, S, R\}$, dado que satisface una condición de Lipschitz

$$\|\Psi(x^1) - \Psi(x^2)\| \leq 2\|x^1 - x^2\| \quad (5.29)$$

Sin embargo, utilizando esta condición de sector sencilla, la desigualdad matricial (5.10) no tiene solución por lo mal restringida que resulta la condición de sector dada por (5.29) y por tanto, el Teorema 4 no puede ser utilizado para diseñar un OED. Es decir, como la condición de Lipschitz (5.29) no toma en cuenta la estructura triangular de los elementos de Ψ , una no linealidad como $\Psi_1^* = \arctan(x_2) + f(x_3)$ podría satisfacerla si $|f(x_3)| \leq 1$. El peor caso ocurre cuando, por ejemplo, $f(x_3) = -x_3$, pues la condición de Lipschitz se satisface, pero en contrapartida, la observabilidad del sistema se pierde y entonces el OED no puede existir.

Una forma de definir de mejor manera el sector al cual pertenece la no linealidad (un sector más restringido) es aprovechando la estructura triangular de la no linealidad y definir una condición de

Lipschitz por separado por cada componente de Ψ , tal como las que se muestran a continuación

$$\|\Psi_1(x_2^1) - \Psi_1(x_2^2)\| \leq k_1 \|(x_2^1) - (x_2^2)\|$$

$$\|\Psi_2(x_2^1, x_3^1) - \Psi_2(x_2^2, x_3^2)\| \leq k_2 \|(x_2^1, x_3^1) - (x_2^2, x_3^2)\|$$

Estas dos condiciones de Lipschitz pueden ser expresadas como dos tripletas independientes (Q_i, S_i, R_i) , $i = 1, 2$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = 0_{2 \times 2}, \quad R_1 = k_1^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = 0_{2 \times 2}, \quad R_2 = k_2^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, el sector al cual pertenece la no linealidad Ψ queda mejor definido por medio de dos condiciones de sector, de forma tal que no linealidades como Ψ_1^* no pertenecen a ese sector.

En resumen, dos condiciones por separado describen de mejor manera el sector que el vector de no linealidades debe satisfacer.

5.5.2. Diseño de OED cuando las no linealidades se definen por medio de múltiples sectores

Se realiza ahora la siguiente suposición.

Suposición 1 La no linealidad ϕ en (5.6) es $D\{Q_i, S_i, R_i\}$ para un conjunto finito de formas cuadráticas no positivas semidefinidas $\omega_i(\phi, z) = \phi^T Q_i \phi + 2\phi^T S_i z + z^T R_i z \geq 0$ para todo σ , para $i = 1, 2, \dots, n_\theta$.

Es claro que sin pérdida de generalidad, se puede asumir que las formas cuadráticas son independientes³. Se puede ver también que entonces ϕ es $D\{\sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i (Q_i, S_i, R_i)\}$ para cada $\theta_i \geq 0$, es decir, ϕ es disipativa con respecto a la función de potencia suministrada $\omega(\phi, z) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i \omega_i(\phi, z)$.

Como puede verse del ejemplo, la caracterización de la no linealidad ϕ por medio de una sola función de potencia suministrada ω puede resultar un tanto burda o en algunos casos conservadora. Una caracterización más precisa de ϕ aumentará las posibilidades de satisfacer la desigualdad. En otras palabras, el vector $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}]$ es de hecho un grado de libertad más en el diseño del OED.

³Considérese por ejemplo una no linealidad escalar en el sector $[1, 10]$. Decir que está también en el sector $[0, \infty)$ resulta inútil, pues no aporta nueva o mayor información. En ese caso, las formas cuadráticas correspondientes no son independientes.

Teorema 5 *Asúmase que la Suposición 1 se satisface. Asúmase también que existen matrices constantes $P = P^T > 0$, L , N , \mathbb{S} , un vector $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}]$, $\theta_i \geq 0$ y una constante $\lambda > 0$, tal que*

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \lambda P & PG & PD \\ G^T P & 0 & 0 \\ D^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -H_N^T R_\theta H_N & H_N^T S_\theta^T & C^T \mathbb{S}^T \\ S_\theta H_N & -Q_\theta & 0 \\ \mathbb{S} C & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.30)$$

donde $(Q_\theta, S_\theta, R_\theta) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i (Q_i, S_i, R_i)$

Entonces existe un OED para (5.1). Además, Ω (5.5) es un OED de orden completo con matrices de salida L_T , N_T que están dadas por (5.23), (5.24), respectivamente, y matrices E y F definidas por (5.25).

Demostración. La demostración sigue el mismo camino que aquélla del Teorema 4, pero considerando $(Q_\theta, S_\theta, R_\theta)$ como la forma cuadrática de la no linealidad. ■

Como se mencionó antes para (5.10), bajo ciertas condiciones, la desigualdad (5.30) es lineal. Sustituyendo λP por λI en (5.30), si $R_\theta = 0$, entonces (5.30) es una LMI en P , PL , λ , \mathbb{S} , N y θ . Por otro lado, si $N = 0$, entonces (5.30) es una LMI en P , PL , λ , \mathbb{S} y θ .

5.5.3. Un OED para el ejemplo ilustrativo

Para verificar que cuando se definen múltiples sectores si se puede diseñar un OED para el sistema (5.27), se utilizará el Teorema 5 para ello.

La dinámica del error en este caso es

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \nu + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} w \\ \tilde{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \\ \tilde{\sigma} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e \\ \nu &= -\phi(z, \sigma) \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde $\phi(z, \sigma) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ y

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arctan(\sigma_2) - \arctan(\sigma_2 + z_2) \\ \phi_2 &= \sin(\sigma_2) - \sin(\sigma_2 + z_2) + \frac{\sigma_3}{1 + \sigma_3^2} - \frac{\sigma_3 + z_3}{1 + (\sigma_3 + z_3)^2}\end{aligned}$$

La primera no linealidad ϕ_1 está en el sector $[-1, 0]$ y puede ser definida por medio de la tripleta (Q_1, S_1, R_1) con

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 0_{2 \times 2}$$

Para ϕ_2 el sector es $[-1, 1]$ con respecto a ambas variables, σ_2 y σ_3 , por lo que la tripleta (Q_2, S_2, R_2) es

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = 0_{2 \times 2}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, las matrices $(Q_\theta, S_\theta, R_\theta)$ son entonces

$$Q_\theta = \begin{bmatrix} -\theta_1 & 0 \\ 0 & -\theta_2 \end{bmatrix}, \quad S_\theta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_\theta = \theta_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}$.

Por simplicidad, en este ejemplo se considera $N = 0$, y de esta forma (5.30) es una LMI en P , PL , λ , \mathbb{S} y θ , si λI reemplaza a λP , como se mencionó antes. Con la ayuda del *LMI Toolbox* del software Matlab[®], se encontraron los siguientes valores que satisfacen la desigualdad (5.30):

$$\begin{aligned}\lambda &= 1, \quad \mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.73 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} -17 & 0 \\ -687 & 0 \\ -2770.7 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1707.8 & -40.94 & 0.19 & 0 \\ -40.94 & 6.88 & -0.95 & 0 \\ -0.19 & -0.95 & 0.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Finalmente, las matrices E y F son

$$E = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En las Figuras 5.8 y 5.9 se muestran resultados de la simulación del observador diseñado.

En la Figura 5.8 se muestra la evolución de las no linealidades del vector Ψ (5.28) del sistema 5.27 y la entrada desconocida $w = \sin(5t) + v$, donde v es una señal diente de sierra con amplitud 1 y frecuencia 3.5 (*rad/sec*).

En la Figura 5.9 se muestra la evolución en el tiempo de los estados del sistema para las no linealidades y la entrada desconocida consideradas. También se muestra el porcentaje de error de estimación, el cual se observa que tiende a cero independientemente de la entrada desconocida w .

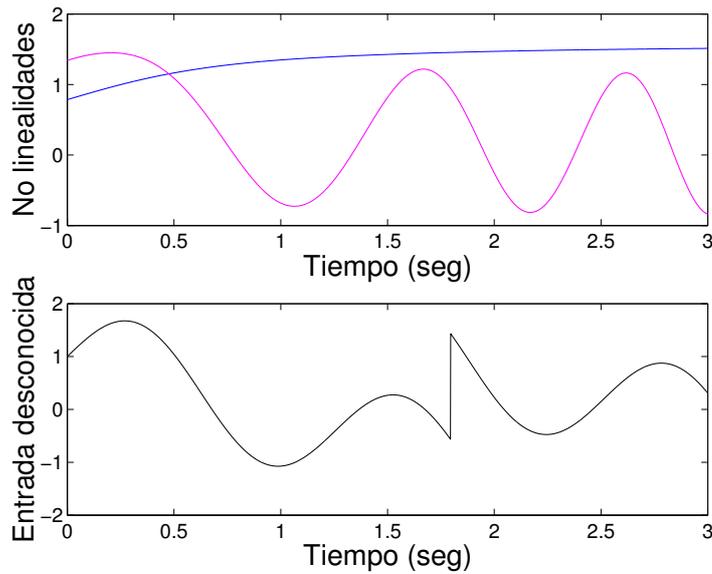


Figura 5.8: Salidas de las no linealidades y la entrada desconocida.

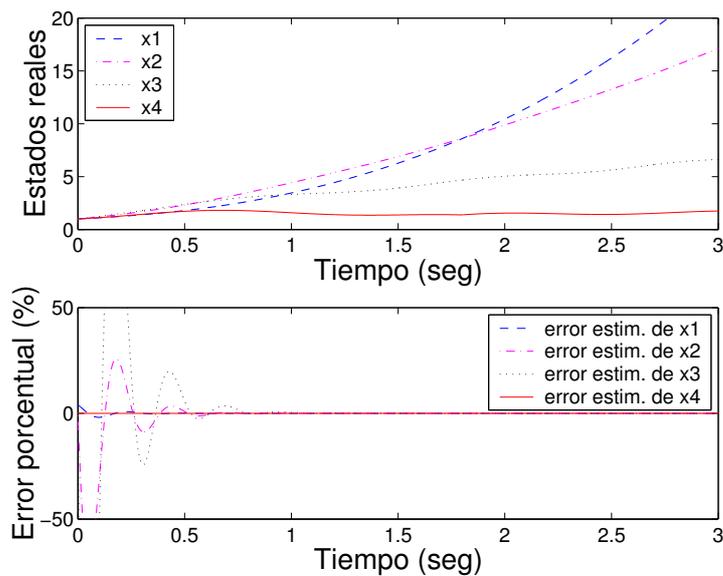


Figura 5.9: Simulación del OED diseñado para (5.27).

5.6. Resumen

En este capítulo se han propuesto dos métodos de diseño de observadores con entradas desconocidas para una clase especial de sistemas no lineales. Estos métodos de diseño son sencillos y fácilmente computables, pues se basan en la solución de una desigualdad matricial que en muchos casos es lineal (LMI), la cual se puede obtener por medio de diversos algoritmos numéricos muy eficientes.

Los métodos de diseño propuestos representan una aplicación directa de la caracterización disipativa de las condiciones de existencia de los OED para sistemas no lineales generales realizada en el Capítulo 3.

Capítulo 6

Conclusiones

El estudio de los observadores con entradas desconocidas (OED) presentado en este documento fue motivado por la falta de condiciones constructivas para el diseño de OED para sistemas no lineales.

En este trabajo se concretó la profundización de trabajos anteriores (Rocha-Cózatl, 2001) con el fin de incluir un concepto con una interpretación física clara como el de disipatividad en el diseño de OED.

De esta forma, el resultado más importante de este trabajo es la caracterización de la existencia de Observadores con Entradas Desconocidas (OED) en términos de propiedades de disipatividad.

Entre los logros que se han alcanzado al realizar esta caracterización, se pueden mencionar los siguientes:

1. Se ha encontrado que una propiedad de disipatividad incremental de la planta implica una condición de detectabilidad necesaria para la existencia de los OED.
2. Esta caracterización de la existencia de los OED basada en disipatividad, permite proponer un diseño de un observador de orden reducido para sistemas no lineales generales.
3. Para una clase amplia de sistemas no lineales (que incluyen a los sistemas LIT) se pudo proponer un método de diseño basado en la solución de una desigualdad matricial, la cual es lineal en muchos casos. Esta forma de plantear el diseño resulta fácilmente computable utilizando eficientes algoritmos especializados como por ejemplo los que se incluyen en el *LMI Toolbox* del software Matlab[©].
4. Si se conoce la naturaleza de la entrada desconocida, gracias a la caracterización basada en disipatividad que se realizó, se sabe que para construir el observador debe medirse la variable

complementaria a la entrada desconocida, de tal manera que su multiplicación tenga unidades de potencia.

Cuando la entrada desconocida w es considerada una entrada externa (perturbadora), la única exigencia que se hace sobre ella es que sea tal que el sistema no lineal considerado sea completo, es decir, que sus soluciones existan para todo tiempo positivo y sean únicas.

De esta forma, una característica importante de los métodos de diseño de los OED presentados, es que al desacoplar el efecto de la entrada desconocida de la parte de los estados que se estiman, se obtiene una independencia absoluta de esa entrada, pudiendo ser incluso no acotada. Esta última consideración es relevante al comparar este OED con diseños basados en otras técnicas, como por ejemplo los observadores por modos deslizantes, en los cuales la entrada desconocida debe ser acotada, al igual que todos los estados.

Por otro lado, la entrada desconocida w puede ser considerada como incertidumbre paramétrica en el modelo de la planta. En este caso, si el sistema puede ponerse en una forma en la cual una parte de la ecuación de estado depende de esa incertidumbre y otra parte de ella no, el OED que se puede construir por el método propuesto será entonces un observador robusto. Sin embargo, es claro que si se puede llevar a esa forma, implícitamente se estaría asumiendo que existe incertidumbre sólo en algunos parámetros de la planta.

También debe destacarse que el método de diseño planteado en el Capítulo 5 generaliza varios métodos de diseño para sistemas sin entradas desconocidas, como por ejemplo los observadores de alta ganancia, los observadores Lipschitz y los observadores diseñados con base en una extensión del criterio del círculo al caso no lineal. El hecho de que la aportación de este trabajo generalice este tipo de diseños muy conocidos y vastamente aplicados, la ubica en una buena posición dentro de la teoría general de estimación de estados.

Otro aspecto que es importante abordar es la clase de sistemas físicos a los cuales se pueden aplicar los resultados de este trabajo.

En un principio, se planteó la posibilidad de encontrar aplicaciones en sistemas mecánicos y electromecánicos, tomando en cuenta el antecedente que planteó el diseño de un OED para el motor de inducción. Sin embargo, existen diferencias entre el planteamiento usual de los problemas de estimación de estados en sistemas mecánicos y el planteamiento que ofrece la técnica aquí desarrollada. Es decir, usualmente en los sistemas mecánicos las variables medidas son posiciones (lineales o angulares), las velocidades (lineales o angulares) son las variables a estimar y las entradas desconocidas podrían ser fuerzas o pares perturbadores. Se ha mostrado mediante ejemplos que si se conoce la naturaleza de la entrada desconocida, se sabe qué variable medir para construir

un OED completamente independiente de dicha entrada. La interpretación del resultado para este tipo de sistemas es entonces que las velocidades deberían ser medidas para obtener un término con unidades de potencia mediante el producto velocidad por fuerza, lo cual no resulta compatible con el planteamiento usual.

Sin embargo, existen aplicaciones importantes en otro tipo de sistemas tales como procesos químicos, biológicos (biorreactores) y en sistemas eléctricos, entre otros.

Dentro este mismo ámbito de aplicaciones, se realizó una aplicación de los OED lineales en la detección de fallas de un sistema hidráulico de tres tanques, pero bajo la suposición de que las perturbaciones (o fallas en ese caso) no son del todo desconocidas, es decir, son entradas “*cuasidesconocidas*” (Rocha-Cózatl y Moreno, 2002). Los detalles de este trabajo no se incluyeron en este documento porque en él solamente se quiso incluir el análisis cuando las entradas son **completamente** desconocidas.

Apéndice A

Nomenclatura y Glosario

Nomenclatura

$x(t)$: vector de estados
$y(t)$: vector de salidas
$u(t)$: vector de entradas conocidas o de control
$w(t)$: vector de entradas desconocidas
n	: número de estados
p	: número de salidas
m	: número de entradas conocidas
q	: número de entradas desconocidas
A, B, D, C	: matrices de estado de una representación de estados lineal, pertenecientes a $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{R}^{n \times q}$, $\mathbb{R}^{p \times n}$, respectivamente
$f(x, u)$: campo vectorial que forma parte de la representación del sistema no lineal
$g(x)$: campo vectorial que forma parte de la representación del sistema no lineal
$h(x)$: función no lineal que define la salida
$\hat{x}(t)$: vector de estados estimados
$\zeta(t)$: estado del observador con entradas desconocidas
$\epsilon(t)$: estado del sistema error $\epsilon = x - \zeta$
$e(t)$: error de salida $e = y - \hat{y}$
$L(\cdot)$: inyección de salida (en el observador)
$\omega(u, y)$: función de potencia suministrada
\mathbb{S}	: matriz que define la función de potencia suministrada $\omega(u, y) = u^T \mathbb{S} y$ y la transformación de desacoplamiento. Utilizada en los Capítulos 2, 3 y 4
(Q, S, R)	: matrices que definen una función de potencia suministrada cuadrática $\omega(u, y) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u$, con $Q \leq 0$, utilizada en el Capítulo 5
$V(x)$: función de almacenamiento de energía
$\psi(\sigma)$: función no lineal de una funcional (no medible) del estado $\sigma = Hx$
$\varphi(t, u, y)$: función no lineal dependiente del tiempo, de las entradas y las salidas del sistema

Glosario

OED	:	Observador con Entradas Desconocidas
Sistema LIT	:	Sistema Lineal e Invariante en el Tiempo
LMI	:	Desigualdad matricial lineal, por sus siglas en inglés (<i>Linear Matrix Inequality</i>)
\mathbb{C}^-	:	Semiplano complejo izquierdo abierto
\mathbb{C}_0^+	:	Semiplano complejo derecho cerrado
Función de clase \mathcal{K}	:	(Khalil, 2002) Se dice que $\alpha(r)$ es una función de clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$ (Pág. 14)
Función de clase \mathcal{K}_∞	:	(Khalil, 2002) Se dice que $\alpha(r)$ es una función de clase \mathcal{K}_∞ si es de clase \mathcal{K} y si $\alpha(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$ (Pág. 14)
Función de clase \mathcal{KL}	:	(Khalil, 2002) Se dice que $\beta(r, s)$ es de clase \mathcal{KL} si, para cada s fija, $\beta(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r y, si para cada r fija, $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$ (Pág. 14)
Sistema $EDE \{Q, S, R\}$:	Sistema Estrictamente Disipativo en el Estado con respecto a una $\omega(u, y)$ cuadrática (Pág. 57)
Función $D \{Q, S, R\}$:	Función Disipativa con respecto a una $\omega(u, y)$ cuadrática (Pág. 57-58)

Bibliografía

- Aldeen, M. y J.F. Marsh (1999). Decentralised observer-based control scheme for interconnected dynamical systems with unknown inputs. *IEE Proceedings Control Theory and Applications* **146 (5)**, 349 – 358.
- Angeli, D. (2002). A Lyapunov approach to incremental stability properties. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47 (3)**, 410 – 421.
- Arcak, M. y P. Kokotovic (2001a). Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica* **37 (12)**, 1923–1930.
- Arcak, M. y P. Kokotovic (2001b). Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46 (7)**, 1146–1150.
- Arcak, M., M. Larsen y P. Kokotovic (2003). Circle and Popov criteria as tools for nonlinear feedback design. *Automatica* **39 (4)**, 643–650.
- Besançon, G. (1999a). Further results on high gain observers for nonlinear systems. *Proceedings of the 38th. Conference on Decision and Control* pp. 2904–2909.
- Besançon, G. (1999b). A viewpoint on observability and observer design for nonlinear systems. *Chapter in "New directions in nonlinear observer design". Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, H. Nijmeijer, T.I. Fossen, eds.*
- Bornard, G. y H. Hammouri (1991). A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Proceedings of the 30th. Conference on Decision and Control* pp. 1494–1496.
- Byrnes, C.I., A. Isidori y J.C. Willems (1991). Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**, 1228–1240.
- Chellaboina, V.S. y W.M. Haddad (2002). A unification between partial stability and stability theory for time-varying systems. *IEEE Control Systems Magazine* **22 (issue 6)**, 66–75.

- Chen, C.-T. (1984). *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston. New York.
- Chu, D. (2000). Disturbance decoupled observer design for linear time-invariant systems: a matrix pencil approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**, 1569–1575.
- Darouach, M., M. Zasadzinski y S.J. Xu (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control* **39** (3), 606–609.
- Dassanake, S.K., G.L. Balas y J. Bokor (2000). Using unknown input observers to detect and isolate sensor faults in a turbofan engine. *The 19th Digital Avionics Systems Conferences, 2000. Proceedings. DASC*. **2**, 6E5/1 – 6E5/7.
- Desoer, C.A. y M. Vidyasagar (1975). *Feedback Systems: Input-Output Properties*. Electrical Science Series. Academic Press Inc.
- Ding, X., P.M. Frank y L. Guo (1990). Robust observer design via factorization approach. *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control* **6**, 3623–3628.
- Fattouh, A., O. Sename y J.-M. Dion (1999). An unknown input observer design for linear time-delay systems. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999* **4**, 4222–4227.
- Floquet, T., J.P. Barbot, W. Perruquetti y M. Djemai (2004). On the robust fault detection via a sliding mode disturbance observer. *International Journal of Control* **77** (7), 622–629.
- Fradkov, A.L. y D.J. Hill (1998). Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems. *Automatica* **34**, 697–703.
- Frank, P., G. Schreier y E. Alcorta (1999). Nonlinear observers for fault detection and isolation. *Lecture Notes in Control and Information Science 244*, eds H. Nijmeijer y T. I. Fossen pp. 399–466.
- Gaddouna, B.O. y M. Ouladsine (1997). Fault diagnosis in a hydraulic process using unknown input observers. *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications, 1997* pp. 490 – 495.
- Gauthier, J.P., H. Hammouri y S. Othman (1992). A simple observer for nonlinear systems. applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**, 875 – 880.
- Hautus, M. L. J. (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications* **50**, 353–368.

- Hill, D.J. y P.J. Moylan (1980). Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. *Journal of the Franklin Institute* **309**, 327–357.
- Hou, M. y A.C. Pugh (1998). Observer design for nonlinear systems by output injection. *UKACC International Conference on control, IEE Conf. publ. num. 455*, 543 – 548.
- Hou, M. y P.C. Müller (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**, 871–875.
- Hou, M. y P.C. Müller (1994). Disturbance decoupled observer design: a unified viewpoint. *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**, 1338–1341.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. third ed. Springer Verlag. Berlin.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. third ed. Prentice Hall. Upper Saddle River, N.J.
- Koenig, D. y S. Mammar (2001). Design of a class of reduced order unknown input observer for fault diagnosis. *Proceedings of the American Control Conference* **3**, 2143–2147. Arlington, VA, USA.
- Kokotovic, P. y M. Arcak (2001). Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica* **37** (5), 637–662.
- Lin, W. (1995). Feedback stabilization of general nonlinear control systems: a passive system approach. *Automática* **25**, 41 – 52.
- Lin, W. (1996). Global asymptotic stabilization of general nonlinear systems with stable free dynamics via passivity and bounded feedback. *Automática* **32**, 915 – 924.
- Lin, W. y T. Shen (1999). Robust passivity and feedback design for minimum-phase nonlinear systems with structural uncertainty. *Automática* **35**, 35 – 47.
- Lin, Y., E.D. Sontag y Y. Wang (1996). A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. *SIAM Journal on Control and Optimization* **34**, 124 – 160.
- Luenberger, D.G. (1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **2**, 190 – 197.
- Marino, R. y P. Tomei (1995). *Nonlinear Control Design; Geometric, Adaptive & Robust*. second ed. Prentice Hall. London.

- Moreno, J. (2000a). Observadores con entradas desconocidas para sistemas no lineales. *Memorias del Primer Taller Nacional de Observación y Estimación de Sistemas No Lineales y sus Aplicaciones*. (J. Moreno y C. Verde, Eds.). Instituto de Ingeniería - UNAM. pp. 117–135. Mexico City, Mexico.
- Moreno, J. (2000b). Unknown input observers for SISO nonlinear systems. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control* pp. 790–795. Sidney, Australia.
- Moreno, J. (2001). Existence of unknown input observers and feedback passivity for linear systems. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control* pp. 3366–3371. Orlando, Florida, USA.
- Moreno, J. (2004). Observer design for nonlinear systems: a dissipative approach. *Proceedings of the 2nd. IFAC Symposium on systems, structure and control (SSSC 2004), Dec. 8-10, 2004. Oaxaca, Mexico*. pp. 735–740.
- Ortega, R., A. Loria, P.J. Nicklasson y H. Sira-Ramirez (1998). *Passivity-based control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer Verlag. London.
- Patton, R., P.M. Frank y R.N. Clark (2000). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. first ed. Springer Verlag. London.
- Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**, 397–401.
- Rocha-Cózatl, E. y J. Moreno (2001). Passification by output injection of nonlinear systems. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications* pp. 1141–1146. Mexico City, Mexico.
- Rocha-Cózatl, E. (2001). *Relaciones entre los Observadores con Entradas Desconocidas y la Pasivización de Sistemas No Lineales*. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería. Tesis de Maestría.
- Rocha-Cózatl, E. y J. Moreno (2002). Diseño de observadores lineales con perturbaciones cuasi-desconocidas para detección de fallas. *Memorias del Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA), IFAC-AMCA, 2002*.

- Rocha-Cózatl, E. y J. Moreno (2004). Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems. *Preprint of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS) 2004*. Stuttgart, Alemania
- Rocha-Cózatl, E. y J. Moreno (2005a). Constructive design of unknown input nonlinear observers by dissipativity and LMIs. *16th Triennial World Congress, IFAC 2005*. Archivo 04045.pdf Praga, Rep. Checa.
- Rocha-Cózatl, E. y J. Moreno (2005b). Dissipative characterization of the existence of unknown input observers for nonlinear systems. Sometido a la revista *Automatica* en Abril de 2005.
- Seliger, R. y P. Frank (1991). Fault-diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control* pp. 2248–2253. Brighton, England.
- Sename, O., A. Fattouh y J.-M. Dion (2001). Further results on unknown input observers design for time-delay systems. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001* **5**, 4635 – 4636.
- Sepulchre, R., M. Jankovic y P. Kokotovic (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer Verlag. London.
- Shim, H., J.H. Seo y A.R. Teel (2003). Nonlinear observer design via passivation of error dynamics. *Automatica* **39**, 885 – 892.
- Shishkin, S.L. y A.L. Fradkov (1997). Solvability of passivity equation for nonlinear systems. *Proceedings of the American Control Conference* pp. 2581 – 2582.
- Tsui, C-C. (1996). A new design approach to unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **41** (3), 464 – 468.
- Willems, J.C. (1972a). Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **45**, 321–351.
- Willems, J.C. (1972b). Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **45**, 352–393.
- Xiong, Y. y M. Saif (1999). Robust fault isolation observer design. *Proceedings of the American Control Conference* **3**, 2077–2081.

- Xiong, Y. y M. Saif (2001). Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46** (12), 2012–2017.
- Yang, H. y M. Saif (1996). Monitoring and diagnostics of a class of nonlinear systems using a nonlinear unknown input observer. *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications* pp. 1006–1011. Dearborn, USA.
- Yeu, T.K. y S. Kawaji (2001). Decentralised observer-based control scheme for interconnected descriptor systems with unknown inputs. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2001, Proceedings* **3**, 1702 – 1707.
- Zeitz, M. (1987). The extended luenberger observer for nonlinear systems. *System & Control Letters* **9**, 149–156.
- Zhou, K., J.C. Doyle y K. Glover (1995). *Robust and Optimal Control*. first ed. Prentice-Hall.