



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO
EN INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELACIÓN Y SIMULACIÓN
CINEMÁTICA DE UN ROBOT
DELTA PLANAR TIPO RR**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

ING. MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

P R E S E N T A:

PEDRO AGUSTÍN OJEDA ESCOTO

TUTOR: Dr. LUIS A. FERRER ARGOTE

COASESOR: M.I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ

2006



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. López Parra Marcelo

Secretario: M.I. González González Leopoldo A.

Vocal: Dr. Ferrer Argote Luis Alejandro

1^{er.} Suplente: M.I. Cuenca Jiménez Francisco

2^{do.} Suplente: M.I. Méndez Banda Jacinto

Lugar donde se realizó la tesis:

Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México, D. F.

TUTOR DE TESIS

Dr. Ferrer Argote Luis Alejandro

Firma

Agradecimientos

A DIOS

Por concederme inmerecidamente de tus bendiciones y permitirme concluir un ciclo más en mi vida.

A ERIKA

Por darme tu amor, paciencia y apoyo incondicional durante todo este tiempo. Y para quien, las palabras nunca me serán suficientes para demostrarle todo el amor que siento por ella. Te amo.

A MIS PADRES

Por su apoyo y consejo y porque sin ustedes no sería lo que soy. Deseo de todo corazón que mi triunfo profesional lo sientan como suyo.

A MIS HERMANOS

Por estar en mi vida y ser parte de este esfuerzo. Y como muestra de que las metas que uno se fija se pueden lograr.

A MIS TUTORES

Por ser piezas fundamentales en todo el desarrollo y culminación de la presente investigación, pero sobre todo por ser unas grandes personas.

AL CONACYT

Por brindarme la oportunidad de seguir adelante en mi formación profesional. Gracias por su valioso apoyo.

Índice

RESUMEN	IV
INTRODUCCIÓN	V
Capítulo 1 Modelación de posición	1
1.1 Arquitectura del robot DELTA	1
1.2 Análisis de configuración	2
1.3 Análisis de desplazamiento en la configuración Inicial (no deformada)	5
1.3.1 Las ecuaciones de lazo	5
1.3.2 Análisis y modelación de los cambios de base	7
1.3.3 Formulación de los problemas cinemáticos directo e inverso	11
1.3.3.1 Problema directo	12
1.3.3.2 Problema inverso	12
1.4 Análisis de desplazamiento en la configuración	

Deformada	13
1.4.1 Formulación de los problemas cinemáticos directo e inverso en la configuración deformada	21
1.4.1.1 Problema directo	21
1.4.1.2 Problema inverso	22
Capítulo 2 Modelación de velocidad	24
2.1 Ecuaciones de lazo como funciones del tiempo	24
2.2 Las ecuaciones de velocidad	25
2.2.1 Ecuaciones de velocidad instantáneas	31
2.3 Formulación de los problemas cinemáticos directo e inverso de velocidad	36
2.3.1 Problema directo de velocidad	36
2.3.2 Problema inverso de velocidad	37
Capítulo 3 Modelación de aceleración	39
3.1 El modelo de aceleración	39
3.1.1 Ecuaciones de aceleración instantáneas	42

3.1.2 Relaciones entre las dobles derivadas de los complejos y las componentes de las aceleraciones angulares	43
3.2 Formulación de los problemas cinemáticos	45
3.2.1 Formulación del problema cinemático directo de aceleración	45
3.2.2 Planteamiento del problema cinemático inverso de aceleración	46
CONCLUSIONES	47
APÉNDICE A PARAMETRIZACIÓN DEL ÁLGEBRA USUAL DE COMPLEJOS	50
APÉNDICE B CÓDIGO DEL PROGRAMA DE SIMULACIÓN	62
REFERENCIAS	70

Resumen

En este trabajo de tesis se utiliza una rotación usual definida en el espacio vectorial de números complejos para construir los modelos cinemáticos de un robot delta planar tipo RR. Fueron generados los modelos de posición, velocidad y aceleración y se analizaron dos configuraciones del robot en estudio. El sistema general de ecuaciones e incógnitas fue de 8×8 para el caso de los problemas cinemáticos inversos y de 6×6 para el caso de los problemas cinemáticos directos. Solo se programó y simuló el modelo de posición en visual basic.

Palabras claves: Modelación, robot delta, números complejos, álgebra hipercompleja.

Introducción

A través de este trabajo de tesis se cumplirán los objetivos siguientes:

- 1) Mostrar las configuraciones del robot delta y sus aplicaciones generales.
- 2) Generar los modelos cinemáticos del robot usando la parametrización de los números complejos.
- 3) Programar y simular el modelo de posición.

I.1 El motivo de la investigación

De acuerdo con [1], el motivo de toda investigación es un problema y la función de la investigación es determinar si dicho problema tiene solución o bien no la tiene. A continuación se describe, en forma sintética, el motivo de la investigación en este trabajo de tesis.

“La robótica es un área que ha estado creciendo continua y sostenidamente. Dentro del estudio de la robótica, Los robots paralelos son modelados porque algunas de sus propiedades los hacen ser más eficientes que los robots de cadena abierta. Algunas de dichas propiedades son la precisión, la exactitud, la capacidad de carga entre otras. Dentro de

la robótica paralela se estudian los robots tipo Delta los cuales son usados para múltiples aplicaciones [3]. En este trabajo de tesis se presentará algunas de las aplicaciones industriales del robot Delta. El interés en este trabajo de tesis, es modelar la cinemática de un robot delta planar y programar uno de los modelos. Para desarrollar el modelado cinemático, se usará la parametrización de los números complejos [4 ,5]. Lo que motiva a la investigación e indagación en este trabajo de tesis, es mostrar las aplicaciones de la parametrización del álgebra de los números complejos en la modelación de la cinemática de multicuerpos rígidos; en este caso, la cinemática del robot delta y con ello mostrar la consistencia del método de modelación y la sistematización en las aplicaciones de tal álgebra.

I.2 Generalidades

Los robots paralelos tienen una alta rigidez, exactitud de posición y traslado de carga. Estos robots pueden operar a velocidades y aceleraciones altas. En años recientes, se ha puesto gran atención a un número creciente de posibles aplicaciones industriales, tal como: manipulación, empacamiento, procesos de ensamble, simulación de movimiento y máquinas de fresado.

Hay muchas otras aplicaciones prometedoras en el ramo de la medicina robótica y la industria de máquinas-herramientas, donde se requiere una exactitud alta de posicionamiento. En otras palabras, la repetibilidad más precisa del extremo final, la cual esta estrictamente relacionada con la alta precisión de manufactura.

Los robots paralelos, a diferencia de los seriales, tienen su extremo final

conectado a la base por medio de varias cadenas cinemáticas en paralelo. La investigación documentada en el campo de los robots paralelos tiene sus inicios en el año de 1942, cuando Pollard patentó su mecanismo para el pintado de automóviles. En 1947 McCough propuso una plataforma de 6 grados de libertad, la cual fue usada después por Stewart en su simulador de vuelo.

Estos manipuladores son particularmente ubicados en una gran variedad de típicas aplicaciones industriales y han presentado mucho interés en los investigadores a lo largo del tiempo [Clavel, 1988; Pierrot, 1991; Badano, 1993; Arai and Tanikawa, 1996; Tsumaki et al. 1998]. En años recientes, varias estructuras y mecanismos han sido propuestos, el desarrollo de estos han establecido aplicaciones específicas, tales como: empaquetamiento, ensambles, manipulación de pequeñas piezas u objetos, etc. Tales manipuladores poseen un gran número de ventajas con respecto a los tradicionales brazos seriales. Ofrecen generalmente una mayor rigidez y movimiento de masas pequeñas en comparación con sus colegas seriales. Estas características permiten tener una alta precisión en manipulaciones.

El robot delta es un diseño original que surgió de la necesidad de tener en los sectores de producción y manufactura, manipuladores de alta precisión y que presentaran gran velocidad y repetibilidad de las tareas que realizaban. Por ser capaz de lograr velocidades de hasta 500m/s, el robot delta es uno de los robots más veloces del mundo.

I.3 Antecedentes

Fue en la época de los 80's cuando Reymond Clavel (profesor de EPFL, École Polytechnique Fédérale de Lausanne) propone la idea de usar paralelogramos para construir un robot paralelo con tres grados de libertad de translación y uno de rotación. (Figura I.1).

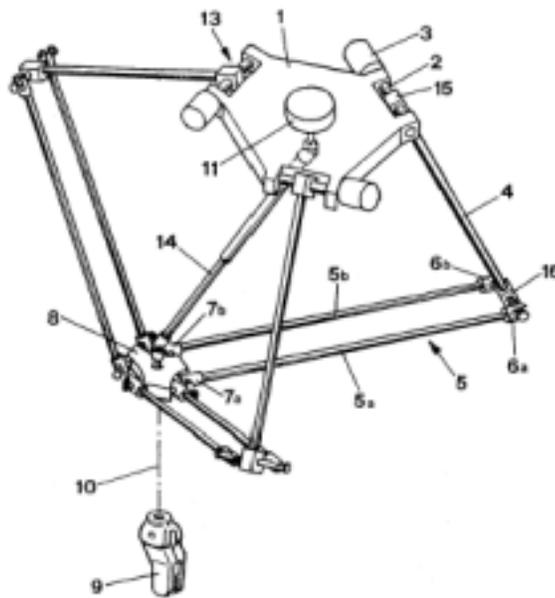


Figura I.1 Esquema del robot Delta.

Contrariamente a opiniones publicadas en otra parte, su inspiración era verdaderamente original y no viene de un mecanismo paralelo patentado por Willard L. Pollard en 1942, quien en ese tiempo no fue reconocido por el Profesor Clavel.

El robot Delta es considerado como uno de los robots paralelos que más éxito han tenido en cuanto a su diseño. Varios centenares de este tipo de robot se encuentran trabajando en la industria actualmente.

El dispositivo comprende un elemento base (1) y un elemento móvil (8). Tres brazos de control (4) están rígidamente montados en sus extremos (15) con tres flechas (2), las cuales pueden rotar. Los tres ensambles, cada uno formado por una flecha y un brazo, son las partes móviles de tres actuadores (13) en los cuales las partes fijas (3) están en conjunto con el elemento base. Los otros extremos (16) de cada brazo de control están en conjunto con el elemento móvil por medio de dos eslabones (5a, 5b), donde en uno de sus extremos están montados con una articulación de cada uno de los brazos de control y del otro extremo están montados en el elemento móvil. La inclinación y orientación en el espacio del elemento móvil permanecen inertes hasta que los brazos de control se pongan en movimiento. El elemento móvil soporta un elemento de trabajo (9), donde la rotación o movimiento es controlada por un actuador (11) montado en el elemento base. Un brazo telescópico (14) conecta el actuador al elemento de trabajo (ver figura I.1).

La idea básica detrás del diseño del robot paralelo Delta es el uso de paralelogramos. Un paralelogramo ofrece a un eslabón rendimiento para permanecer en una orientación fija con respecto a un eslabón de entrada.

El uso de tales paralelogramos ubica la orientación de la plataforma móvil que sólo permanece con los tres grados de libertad de translación.

Las juntas de revoluta de las palancas de rotación están actuando de dos maneras diferentes: con motores rotatorios (servos de DC o CA) o con actuadores lineales. Finalmente, un cuarto dispositivo se usa para transmitir movimiento rotatorio de la base a un extremo final, montado en la plataforma móvil.

El uso de actuadores de base montados y eslabones de baja masa permite a la plataforma móvil lograr aceleraciones de 50 G en ambientes experimentales y 12 G en aplicaciones industriales. Esto hace un candidato perfecto al robot Delta para el manejo y operaciones de objetos ligeros. (Figura I.2).

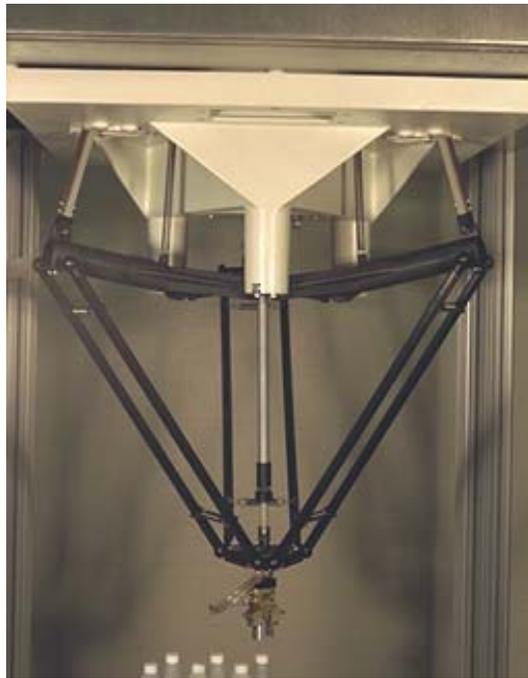


Figura I.2 Colocación de tapas a botellas.

I.4 Aplicaciones

La historia de mercadotecnia del robot Delta es larga, complicada e intrigante. Todo inició en 1983 con la creación de la compañía *Demaurex*. Después de comprar una licencia para el robot Delta en 1987, su objetivo mayor se convirtió en comercializar el robot para la industria del empaquetamiento.

Después de varios años, Demarex tuvo éxito ocupando un lugar mayor en este nuevo y difícil mercado. Se comercializaron cuatro versiones de la aplicación bajo los nombres de: Pack-Placer, Line-Placer, Top-Placer y Presto.

La aplicación más exitosa de Demarex para el robot delta es la instalación Line-Placer (ver figura I.3). El robot cuenta con pequeños motores de entre 100 y 200 W. A pesar del bajo poder de los motores, el robot tiene control y reflejo perfectos del extremo final y alcanza una cadencia superior a los 2.5 objetos por segundo.



Figura I.3 Instalación Line-Placer para el empaquetamiento de bocadillos (Bretzels).

Automatización Flexible ABB lanzó su robot Delta en 1999 bajo el nombre IRB 340 FlexPicker. Se apuntaron tres sectores de la industria: alimentos, farmacéutica e industrias electrónicas.

El FlexPicker está provisto de un sistema integrado de vacío capaz de mover y descargar rápidamente objetos que pesan hasta 1 kg.

El robot es guiado mediante una máquina, con un sistema de visión Cognex y un controlador ABB S4C. Opcionalmente, el robot puede equiparse con un controlador de movimiento y un sistema de visión de Tecnología Avanzada. Las velocidades logradas son 10 m/s y 3.6 grados por segundo (aproximadamente 150 tomas por minuto); las aceleraciones son arriba de 100 m/s² y 1.2 rad/s². (Figura I.4). Esta versión del robot esta diseñada para tener una gran resistencia a la corrosión en ambientes húmedos y se recomienda su uso especialmente en ambientes altamente limpios.



Figura I.4 IRB 340 FlexPicker de automatización flexible ABB.

La École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) patentó su diseño del robot delta para su distribución en laboratorios y aplicaciones industriales, llamado MicroDelta 240. (Figura I.5). La principal función de este robot es el manejo de pequeños objetos y componentes electrónicos.

El movimiento de cada uno de los brazos de este pequeño robot está asegurado por un sistema estándar motor-reductor-sensor. La resolución varía entre 0.01 y 0.02 mm con respecto al área de trabajo. Este robot puede alcanzar una cadencia de tres transferencias por segundo en distancias de 100 a 150 mm y con una precisión de alrededor de 0.1 mm.



Figura I.5 MicroDelta 240 de EPFL.

CSEM desarrolló un robot delta compacto basado en la cinemática paralela. (Figura I.6). El robot se ha diseñado para resolver tareas

exigentes en el campo del microensamble, tales como alta velocidad, alta precisión de posición y planificación de rutas flexibles.

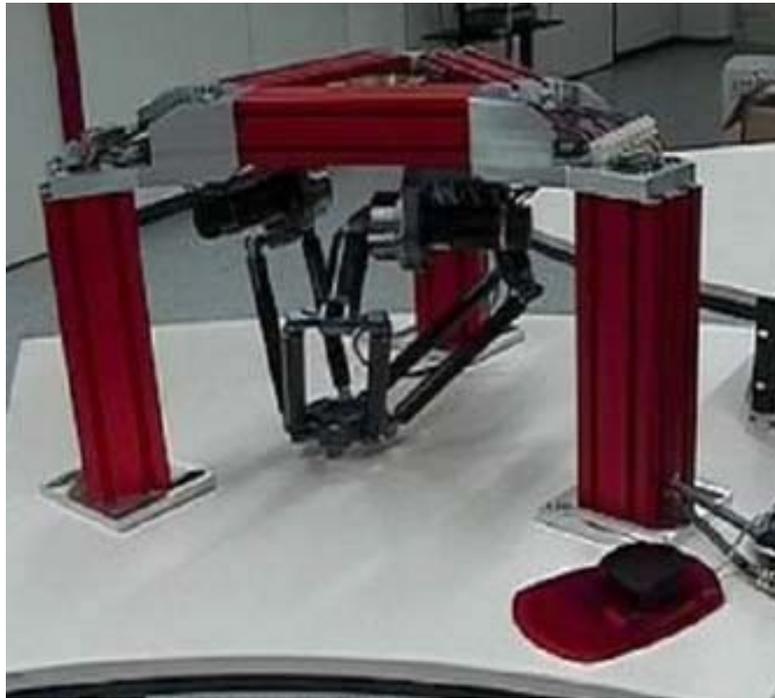


Figura I.6 Robot delta de CSEM.

El robot combina perfectamente su diseño compacto y su gran área de trabajo. El uso de materiales ligeros facilitan el movimiento de la estructura paralela del robot, mientras que los motores están unidos a la estructura de soporte.

Pueden combinarse varios robots de este tipo para formar una célula de producción. Esto ofrece soluciones a una gran variedad de tareas de microensamble. El robot puede usarse para el ensamble de sistemas micromecánicos, MEMS, MOEMS, etc. (ver figura I.7).

La funcionalidad del robot puede optimarse usando herramientas

especiales, como microgrippers o micro sistemas de distribución. Se pueden también integrar sistemas de visión para realizar tareas de guía visual.

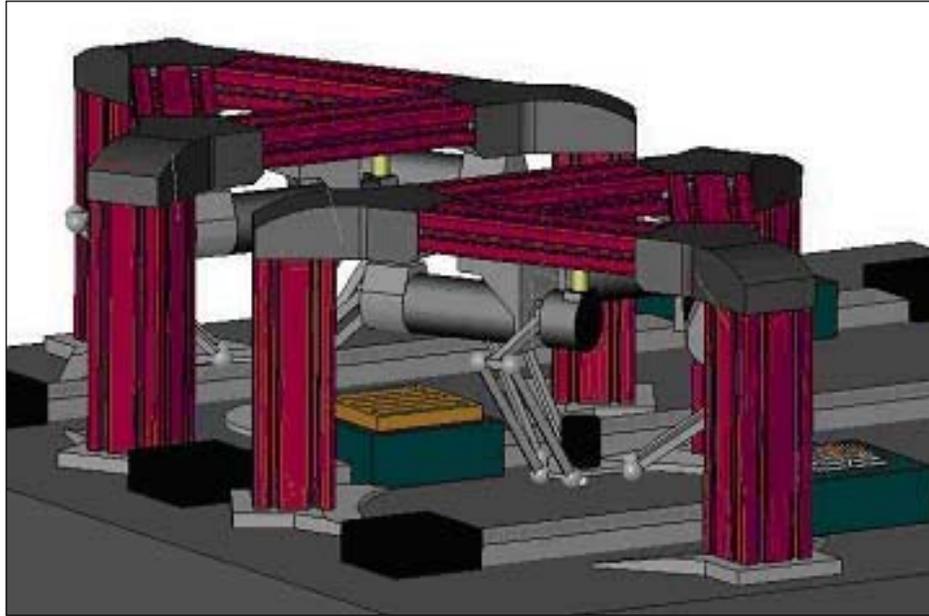


Figura I.7 Microensamble de piezas mecánicas.

El Delta 720 (ver figura I.8), uno de los diseños mejor desarrollados del robot delta, se caracteriza por su orientación directa; esto significa que cada uno de los brazos del robot se acopla directamente con la flecha de dirección.

La potencia que puede usarse permite el traslado de objetos ligeros en distancias de más de 250 mm, con cadencia superior a 4 objetos por segundo y con una exactitud de entre 0.1 y 0.2 mm. Las aceleraciones pueden exceder los 500 m/s².



Figura I.8 Delta 720.

Demaurex negoció con la Compañía Alemana GROB-Werke sobre la licencia para producir su propio modelo. El sistema es básicamente una modificación del diseño del popular robot Delta. La diferencia es que los actuadores son guías de movimiento lineales que están unidos en forma paralela unos de otros. (Figura I.9).

Este prototipo da un alcance mayor del área de trabajo. La forma de prisma rectangular incluida en esta área tiene las siguientes dimensiones: 900x350x150 mm. Un cinturón cronometrado permite la transmisión entre el motor y la plataforma de trabajo. La resolución varía entre 0.01 y 0.04 mm con respecto a los movimientos y posiciones del robot.



Figura I.9 Robot delta con actuadores lineales.

Dentro de los usos de la robótica en la industria se encuentra la aplicación a las máquinas-herramientas.

El dispositivo llamado Hexabot Serie 1 (ver figura I.10), se puede combinar con un sistema de cabezal rotatorio multiherramientas y puede realizar diversas operaciones de maquinado sobre piezas.

El Hexabot, por su facilidad de operación es uno de los manipuladores más usados en la mayoría de las industrias automatizadas (hasta de 5 GDL).



Figura I.10 Robot Hexabot Serie 1.

La estructuración de la programación del robot Hexabot es relativamente simple. Esto permite que se puedan adoptar diversos códigos de control numérico generados bajo el software computacional CAM (Computer Aided Manufacturing) a la programación del robot logrando con esto la fabricación de piezas de alta calidad, mientras que, puede reducirse el número de operaciones requeridas en una máquina de sólo tres ejes.

En lugar de permanecer este dispositivo en un área mayor, se posiciona en un pequeño espacio dentro del área de trabajo. Esto reduce el tiempo, complejidad y errores potenciales de una máquina convencional de cinco ejes.

Dentro de las amplias aplicaciones que se le han dado al modelo original del robot delta se encuentra la Industria Médica. La compañía Sueca Electa, se especializa en el dominio quirúrgico y fabricó un robot que porta un microscopio que esta situado encima de una mesa de operación (ver figura I.11).

El controlador compensa el efecto de gravedad que lleva el dispositivo. El cirujano puede mover fácilmente esta masa importante (alrededor de 20 kg) y lo posiciona en el punto de posicionamiento. El microscopio puede ser también posicionado sobre un punto preciso de función en base a información recibida por un sistema de diagnóstico (por ejemplo: un escáner).



Figura I.11 Robot delta utilizado en aplicación quirúrgica.

Las características del robot delta y modificaciones de este concepto permiten imaginar otras aplicaciones como:

- Manufactura personalizada de mosaicos cerámicos.
- Empaquetamiento de ampollas o muestras en la industria farmacéutica.
- Trabajo en cuartos limpios.
- Composición de tabletas de acuarelas.
- Manipulación de componentes electrónicos.
- Ensamble de contenedores electrónicos.
- Ensamble de mecanismos.
- Desvastado de piezas.
- Control de objetos ligeros.
- Rápido control dimensional utilizando al robot como dispositivo de medición.
- Corte por medio de inyección de agua y láser.

I.5 El álgebra de complejos sistematizada y aplicaciones

Para modelar las rotaciones y traslaciones de multicuerpos rígidos acoplados se ha utilizado la parametrización descrita en [4]. En dicho trabajo fueron desarrolladas 4 transformaciones lineales que resultaron ser dos rotaciones y dos reflexiones en el plano. Los resultados de la parametrización fueron usados para extender la parametrización al álgebra de cuaterniones [6] y también para modelar robots de cadena abierta, mecanismos y robots paralelos, así como problemas de evasión de obstáculos.

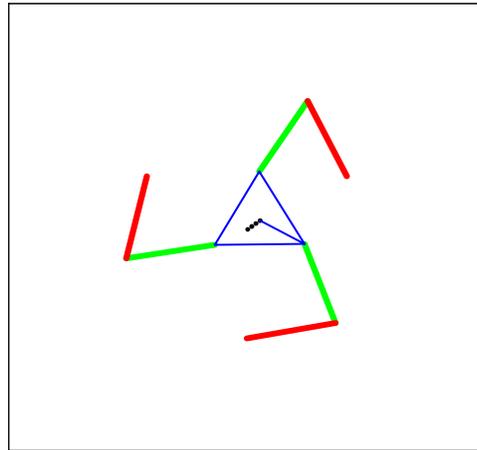


Figura I.13 Simulación.

En los trabajos presentados por [5, 9] se usaron las rotaciones y reflexiones para modelar la cinemática de posicionamiento de un robot de cadena abierta de dos grados de libertad. Dicho robot es mostrado en la figura I.14.

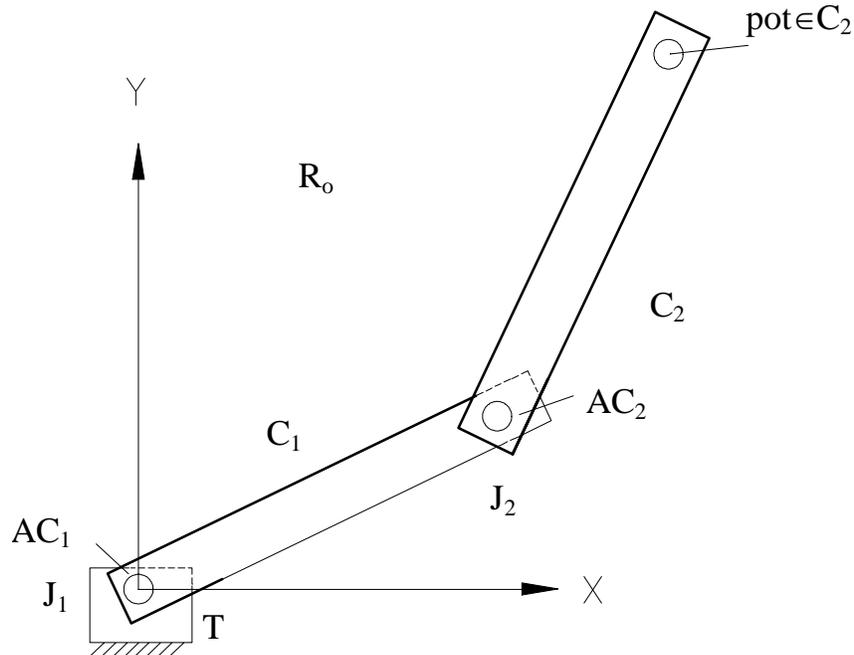
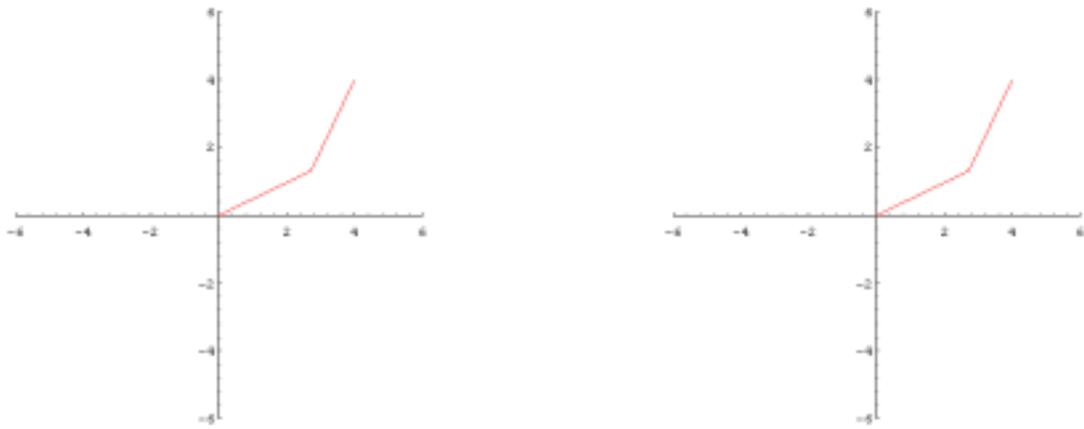
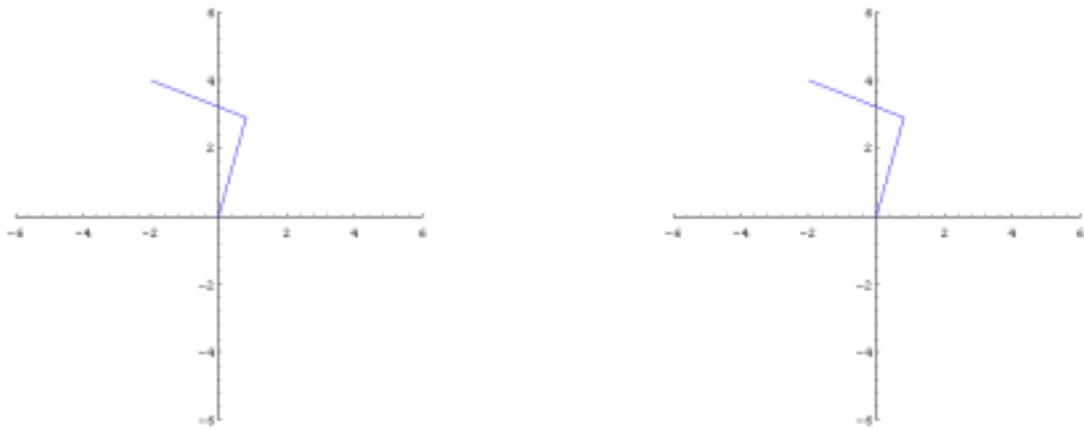


Figura I.14 Robot de dos grados de libertad.

Las salidas gráficas de la modelación se presentan en la figura I.15.



Configuraciones no deformadas



Configuraciones deformadas

Figura I.15 Simulación del Robot de dos grados de libertad.

En este trabajo de tesis se aplicará la rotación usual para modelar la cinemática de un robot delta planar como el que se muestra en la figura I.16.

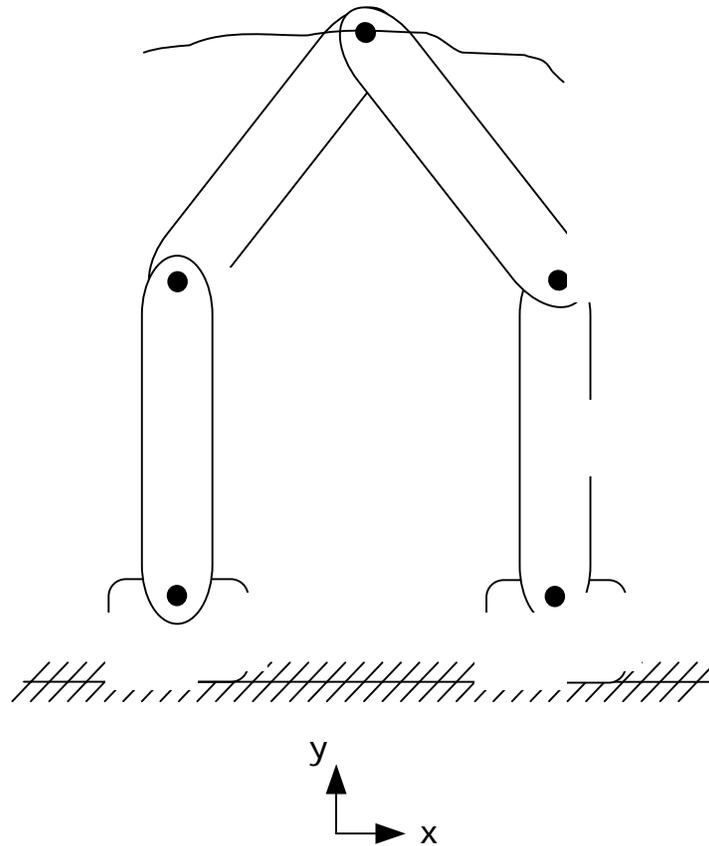


Figura I.16 Robot delta.

I.6 Resumen del capitulado de la tesis

En este trabajo de tesis se modelará la cinemática de un robot delta planar tipo RR. Para tal propósito, se usará la rotación usual parametrizada en el espacio vectorial de números complejos. Esta tesis está dividida en tres capítulos y dos apéndices, los cuales se resumen a continuación:

En el capítulo 1 se modela el posicionamiento del robot delta en dos configuraciones y se plantea y formula los problemas cinemáticos inversos y directos en ambas configuraciones.

En el capítulo 2 se modela, a partir de modelo de posicionamiento, el modelo de velocidad, usando funciones en el tiempo. Se formulan los problemas cinemáticos inversos y directos.

En el capítulo 3 se modela la aceleración y se plantean los problemas cinemáticos inversos y directos.

Finalmente se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo y dos apéndices. En el primero se muestra la sistematización completa de la rotación usual y en el segundo el código de programación en visual Basic.

Capítulo 1

Modelación de posición

Introducción. En esta parte se construyen los modelos de posición relacionados con el robot delta planar motivo de estudio en esta tesis. Para ello, se usará la rotación $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida en el Apéndice A de este trabajo. Se formulan los problemas cinemáticos directo e inverso asociados con dos configuraciones fijas del robot: 1) no deformada o inicial y 2) la deformada o final.

1.1 Arquitectura del robot DELTA

En esta sección se presenta la arquitectura del robot motivo de estudio en esta tesis. De acuerdo con la figura 1.1, el multicuerpo está formado por 5 eslabones rígidos llamados E_1 , E_2 , E_3 , E_4 y T siendo T la tierra del sistema. Dichos eslabones están conectados por juntas rotacionales denominadas J_1 , J_2 , J_3 , J_4 , y J_5 según se muestra en la figura 1.1. Sobre las juntas J_1 y J_2 se localizan los actuadores M_1 y M_2 los cuales producirán el movimiento del robot motivo de estudio. Sobre la conexión de los eslabones E_3 y E_4 se localiza una herramienta con la cual se realizará una operación específica. El movimiento del robot y las trayectorias de la herramienta están restringidas a moverse en el plano (x, y) .

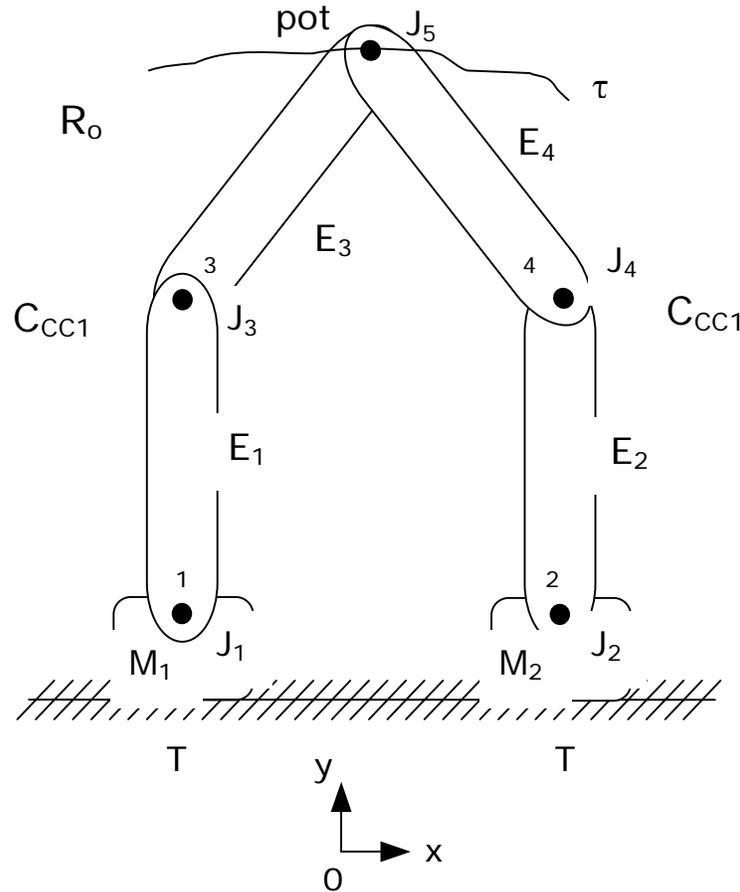


Figura 1.1 Arquitectura del robot DELTA planar.

1.2 Análisis de configuración

De acuerdo con la figura 1.1, el robot (R_0) está compuesta por dos cadenas cinemáticas llamadas C_{cc1} y C_{cc2} . Por lo tanto, al fijar el multicuerpo motivo de estudio en el tiempo, es posible representar el robot de la manera siguiente:

$$R_0 = C_{cc1} \cup C_{cc1} \tag{1.1}$$

o, de forma equivalente:

$$R_0 = (T \cup E_1 \cup E_3) \cup (T \cup E_2 \cup E_4) \quad (1.2)$$

pues,

$$1) C_{CC1} = \{T, E_1, E_3\}$$

$$2) C_{CC2} = \{T, E_2, E_4\}$$

Obsérvese que, las juntas rotacionales que conectan los eslabones que componen el robot delta mostrado en la figura 1.1 se pueden escribir en términos de intersecciones; esto es:

$$1) J_1 = E_1 \cap T \quad ; \quad J_2 = E_2 \cap T \quad (1.3)$$

$$2) J_3 = E_1 \cap E_3 \quad ; \quad J_4 = E_2 \cap E_4$$

$$3) J_5 = E_3 \cap E_4$$

Considere ahora que sobre cada cadena cinemática se asocia una circunferencia con centros en los puntos "1" y "2" y radios Γ_{CC1} y Γ_{CC2} definidas por:

$$1) \Gamma_{CC1} = l_{E1} + l_{E3} \quad (1.4)$$

$$2) \Gamma_{CC2} = l_{E2} + l_{E4}$$

Aquí, l_{E1} , l_{E2} , l_{E3} , l_{E4} son las distancias principales de los eslabones E_1 , E_2 , E_3 y E_4 , respectivamente.

Sean C_{CC1} y C_{CC2} dos circunferencias las cuales son mostradas en la figura 1.2.

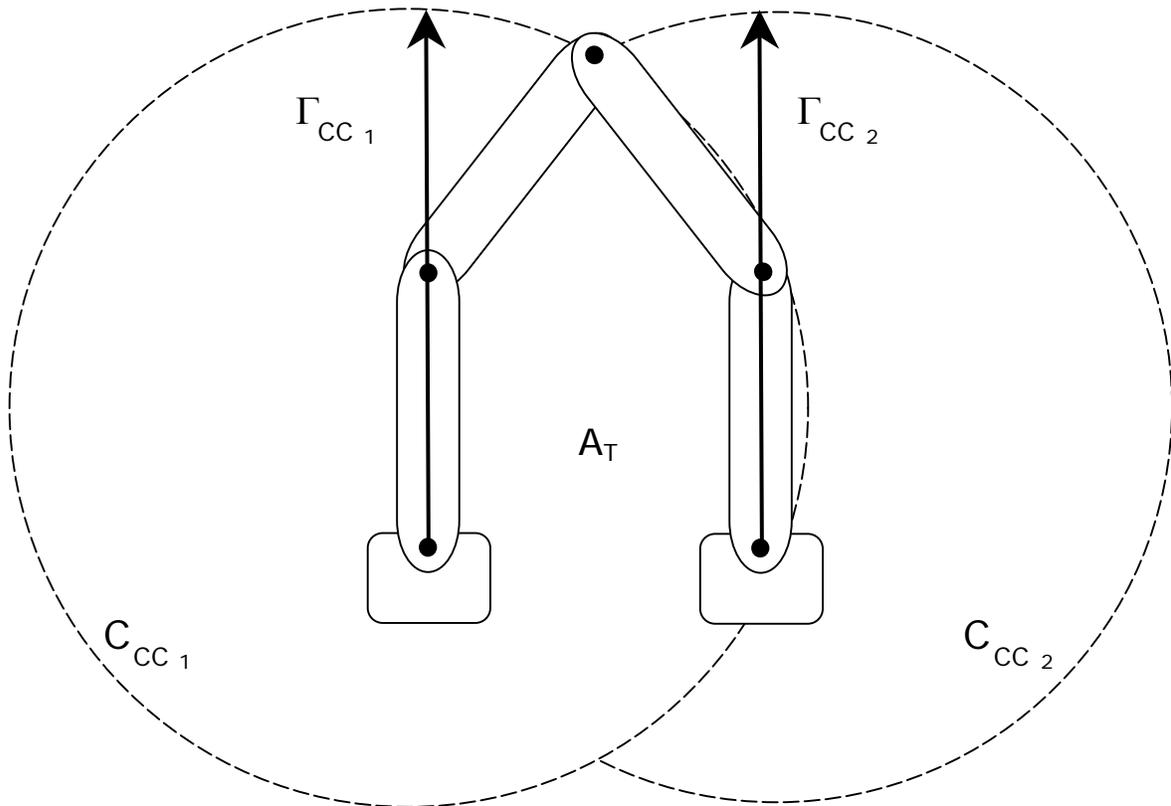


Figura 1.2 Área de trabajo.

El área de trabajo A_T asociada con el robot delta motivo de estudio es el conjunto de puntos tales que:

$$A_T = A_{C_{CC1}} \cap A_{C_{CC2}} \quad (1.5)$$

Aquí, $A_{C_{CC1}}$ y $A_{C_{CC2}}$ son las áreas relacionadas con las circunferencias C_{CC1} y C_{CC2} , respectivamente.

1.3 Análisis de desplazamiento en la configuración inicial (no deformada)

En esta sección se procederá a construir el modelo de posición en la configuración inicial asociada con el robot Delta motivo de estudio. Para ello se usará la transformación lineal $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cual es una rotación definida en el apéndice A de este trabajo. El objetivo es, una vez determinadas las ecuaciones que modelan la posición del robot, formular los problemas cinemática inverso y cinemática directo, respectivamente.

1.3.1 Las ecuaciones de lazo

Considérese que se desea determinar las coordenadas del punto "pot" denominado punto terminal del robot, medidas desde el punto "0" asociado con el origen de coordenadas. Para ello, se definen vectores de posición en los eslabones que componen el robot como se muestra en la figura 1.3. Dichos vectores se definen de la manera siguiente:

$$1) \underline{L}_{3,1} = (3) - (1) \quad (1.6)$$

$$2) \underline{L}_{4,2} = (4) - (2)$$

$$3) \underline{L}_{\text{pot},3} = (\text{pot}) - (3)$$

$$4) \underline{L}_{\text{pot},4} = (\text{pot}) - (4)$$

$$5) \underline{\Gamma}_{\text{pot},0} = (\text{pot}) - (0)$$

$$6) \underline{\Gamma}_{1,0} = (1) - (0)$$

$$7) \underline{\Gamma}_{2,0} = (2) - (0)$$

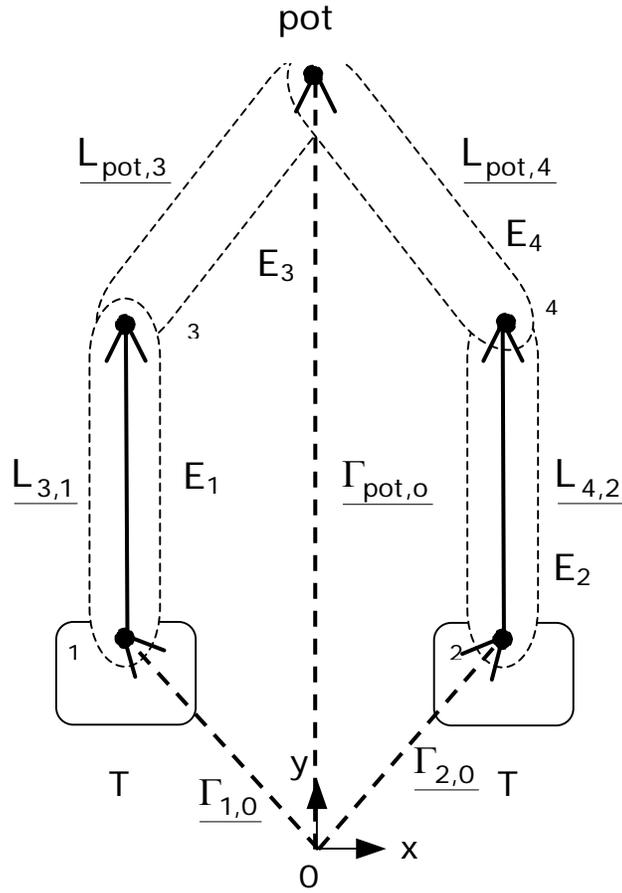


Figura 1.3 Vectores de posición.

De acuerdo con la figura 1.3 las coordenadas del punto "pot" se pueden determinar por medio de las siguientes expresiones:

$$1) \underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{3,1} \oplus \underline{L}_{pot,3} \quad (1.7)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{pot,0} = \underline{\Gamma}_{2,0} \oplus \underline{L}_{4,2} \oplus \underline{L}_{pot,4}$$

Las ecuaciones (1.7) son conocidas como “ecuaciones de lazo cerrado”. Obsérvese que la operación $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es la suma usual definida en los números complejos (ver apéndice A).

1.3.2 Análisis y modelación de los cambios de base

En esta sección se modelarán las rotaciones de la base inercial fija, asociada con el origen de coordenadas, sobre las bases móviles localizadas sobre los eslabones que componen el robot motivo de estudio. El objetivo es modelar la posición o desplazamiento angular de los eslabones y, para ello, se utilizan sistemas ortonormales o bases móviles las cuales son mostradas en la figura 1.4.

De acuerdo con la figura 1.4 los vectores de posición asociados con los eslabones que componen el robot DELTA se pueden escribir en términos de las bases locales de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \underline{L}_{3,1} &= l_{3,1} \cdot \underline{e}_2^I & (1.8) \\
 2) \underline{L}_{4,2} &= l_{4,2} \cdot \underline{e}_2^{II} \\
 3) \underline{L}_{\text{pot},3} &= l_{\text{pot},3} \cdot \underline{e}_2^{III} \\
 4) \underline{L}_{\text{pot},4} &= l_{\text{pot},4} \cdot \underline{e}_2^{IV}
 \end{aligned}$$

Aquí, $l_{3,1}, l_{4,2}, l_{\text{pot},3}, l_{\text{pot},4} \in \mathfrak{R}$ son las dimensiones principales de los eslabones. Por lo tanto, las expresiones (1.7) se escriben, al utilizar las expresiones (1.8), en términos de las bases locales, de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{\text{pot},0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{l}_{3,1} \cdot \underline{e}_2^I \oplus \underline{l}_{\text{pot},3} \cdot \underline{e}_2^{\text{III}} \quad (1.9)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{\text{pot},0} = \underline{\Gamma}_{2,0} \oplus \underline{l}_{4,2} \cdot \underline{e}_2^{\text{II}} \oplus \underline{l}_{\text{pot},4} \cdot \underline{e}_2^{\text{IV}}$$

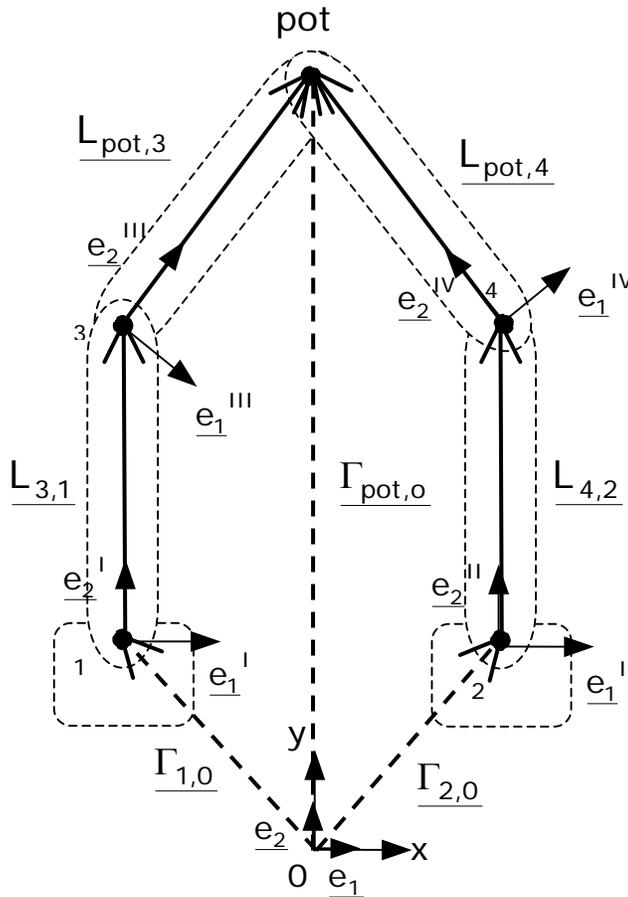


Figura 1.4 Bases móviles en la configuración no deformada.

Considere ahora que las rotaciones de la base inercial $\underline{e}_j = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ localizada en el origen de coordenadas mostrado en la figura 1.4 sobre las bases móviles se pueden representar o, más bien dicho, modelar usando

la rotación (transformación lineal) $\rho : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida en el apéndice A de esta tesis. Tales rotaciones se modelan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \underline{e}_2^I &= \rho(p, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|p\|} \bullet p \otimes \underline{e}_2 & (1.10) \\
 2) \underline{e}_2^{II} &= \rho(q, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|q\|} \bullet q \otimes \underline{e}_2 \\
 3) \underline{e}_2^{III} &= \rho(r, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|r\|} \bullet r \otimes \underline{e}_2 \\
 4) \underline{e}_2^{IV} &= \rho(s, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|s\|} \bullet s \otimes \underline{e}_2
 \end{aligned}$$

Aquí, $p, q, r, s \in \mathfrak{R}^2$ son números complejos. Considérese ahora que las normas asociadas con los números complejos son unitarias; esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \|p\| &= p_0^2 + p_1^2 = 1 & (1.11) \\
 2) \|q\| &= q_0^2 + q_1^2 = 1 \\
 3) \|r\| &= r_0^2 + r_1^2 = 1 \\
 4) \|s\| &= s_0^2 + s_1^2 = 1
 \end{aligned}$$

Por tanto, las expresiones (1.9) se escriben en términos de la base inercial fija y complejos de norma unitaria; esto es, con base a las expresiones (1.10) y (1.11) de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{\text{pot},0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus I_{3,1} \bullet \{p \otimes \underline{e}_2\} \oplus I_{\text{pot},3} \bullet \{r \otimes \underline{e}_2\} \quad (1.12)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{\text{pot},0} = \underline{\Gamma}_{2,0} \oplus I_{4,2} \cdot \{q \otimes \underline{e}_2\} \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \{s \otimes \underline{e}_2\}$$

Por otro lado, las relaciones geométricas definidas entre los componentes de las rotaciones y los parámetros asociados con los números complejos $p, q, r, s \in \mathfrak{R}^2$ son las siguientes:

$$1) p = \{p_0, p_1\} ; \quad \begin{aligned} p_0 &= \text{Cos } \theta_1 \\ p_1 &= \pm \text{Sen } \theta_1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$2) q = \{q_0, q_1\} ; \quad \begin{aligned} q_0 &= \text{Cos } \theta_2 \\ q_1 &= \pm \text{Sen } \theta_2 \end{aligned}$$

$$3) r = \{r_0, r_1\} ; \quad \begin{aligned} r_0 &= \text{Cos } \theta_3 \\ r_1 &= \pm \text{Sen } \theta_3 \end{aligned}$$

$$4) s = \{s_0, s_1\} ; \quad \begin{aligned} s_0 &= \text{Cos } \theta_4 \\ s_1 &= \pm \text{Sen } \theta_4 \end{aligned}$$

Aquí, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y $\theta_4 \in \mathfrak{R}$ son los desplazamientos angulares relacionados con las posiciones de los eslabones y el eje cartesiano x como se muestra en la figura 1.5.

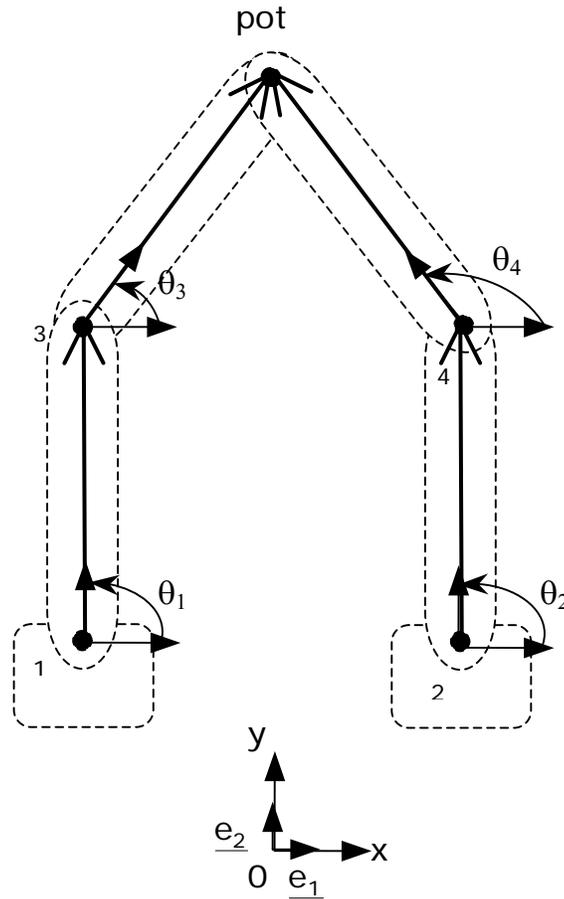


Figura 1.5 Desplazamientos angulares.

1.3.3 Formulación de los problemas cinemáticos directo e inverso

En esta sección se formulan dos problemas de fundamental importancia en la cinemática; el problema directo y el problema inverso. Ambos problemas están relacionados con la configuración no deformada asociada con el robot DELTA motivo de estudio mostrado en la figura 1.3.

1.3.3.1 Problema directo

Dados $\underline{\Gamma}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{\Gamma}_{2,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{3,1}$, $l_{4,2}$, $l_{pot,3}$, $l_{pot,4} \in \mathfrak{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$ con $\|p\| = \|r\| = 1$, encuentre $\underline{\Gamma}_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$ y $q = \{q_0, q_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$ tal que las expresiones de lazo (1.12) sean satisfechas y,

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_1^2 = 1$$

El modelo asociado con el problema cinemático directo asociado con el robot estudiado en esta tesis consiste en un sistema de 6 ecuaciones no lineales polinomiales y 6 incógnitas.

1.3.3.2 Problema inverso

Dados $\underline{\Gamma}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{\Gamma}_{2,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{3,1}$, $l_{4,2}$, $l_{pot,3}$, $l_{pot,4} \in \mathfrak{R}^+$, $\underline{\Gamma}_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$, encuentre: $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$ y $s = \{s_0, s_1\}$ tal que las expresiones de lazo (1.12) sean satisfechas y,

$$p_0^2 + p_1^2 = 1$$

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_1^2 = 1$$

El modelo relacionado con el problema cinemática inverso consiste en un sistema de 8 ecuaciones no lineales polinomiales y 8 incógnitas.

1.4 Análisis de desplazamiento en la configuración deformada

En esta sección se analizarán y modelarán los movimientos del robot motivo de estudio en esta tesis en una nueva configuración obtenida al desplazar rígidamente el multicuerpo por medio de los actuadores M_1 y M_2 de la configuración inicial fija a la configuración final. Dicha configuración es llamada deformada y es mostrada en la figura 1.6.

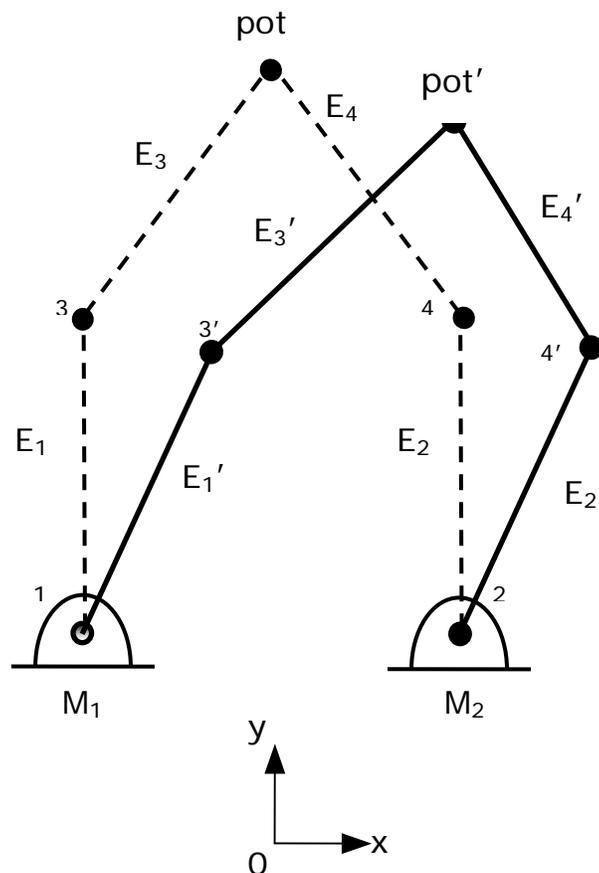


Figura 1.6 Configuración deformada.

Obsérvese en la figura 1.6 que el movimiento del robot se ha desplazado de una configuración a otra por medio de rotaciones rígidas. El objetivo ahora es determinar un modelo que permita determinar las nuevas coordenadas del punto terminal (pot') y las rotaciones asociadas con los movimientos de los eslabones. Para lograr dicho objetivo, se procederá, al igual que en el modelado de la configuración no deformada, a generar las ecuaciones de lazo. Para ello, es necesario definir vectores de posición sobre los eslabones del robot en la configuración deformada. Dicha configuración es fijada en el tiempo. La figura 1.7 muestra los vectores de posición relacionados con la configuración deformada.

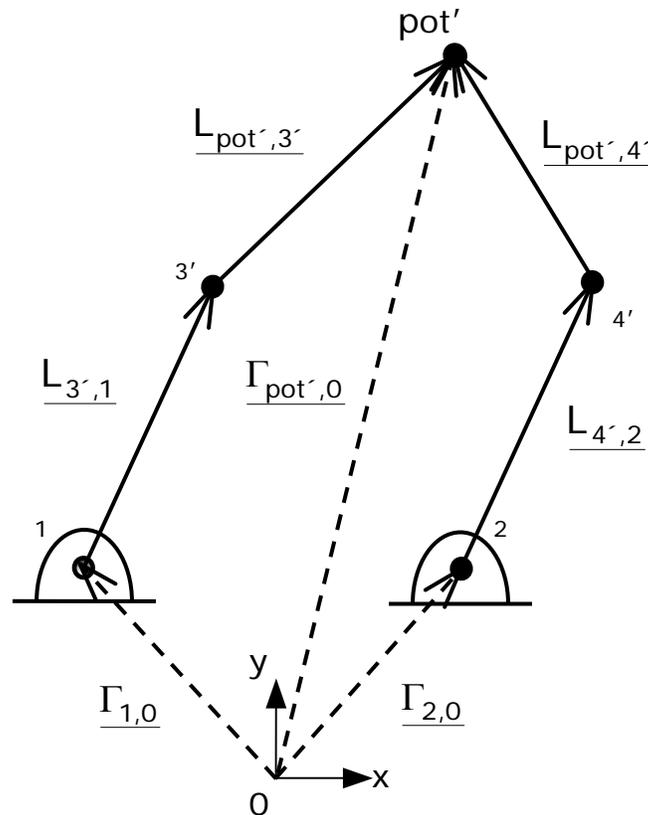


Figura 1.7 Definición de vectores en la configuración deformada.

Los vectores de posición mostrados en la figura 1.7 se definen de la manera siguiente:

$$1) \underline{L}_{3',1} = (3') - (1) \quad (1.14)$$

$$2) \underline{L}_{\text{pot}',3'} = (\text{pot}') - (3')$$

$$3) \underline{L}_{4',2} = (4') - (2)$$

$$4) \underline{L}_{\text{pot}',4'} = (\text{pot}') - (4')$$

Las coordenadas del punto pot' se pueden determinar desde el punto "0" que caracteriza el origen de coordenadas de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{3',1} \oplus \underline{L}_{\text{pot}',3'} \quad (1.15)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0} = \underline{\Gamma}_{2,0} \oplus \underline{L}_{4',2} \oplus \underline{L}_{\text{pot}',4'}$$

Las expresiones (1.15) son las ecuaciones de lazo asociadas con la configuración deformada. Sin embargo, dichas expresiones no muestran información relativa de los nuevos desplazamientos angulares de los eslabones. Es necesario, por tanto, asociar, como en el caso de la configuración no deformada, sistemas locales sobre los eslabones que componen el robot delta. Dichas bases serán llamadas bases móviles y se muestran en la figura 1.8.

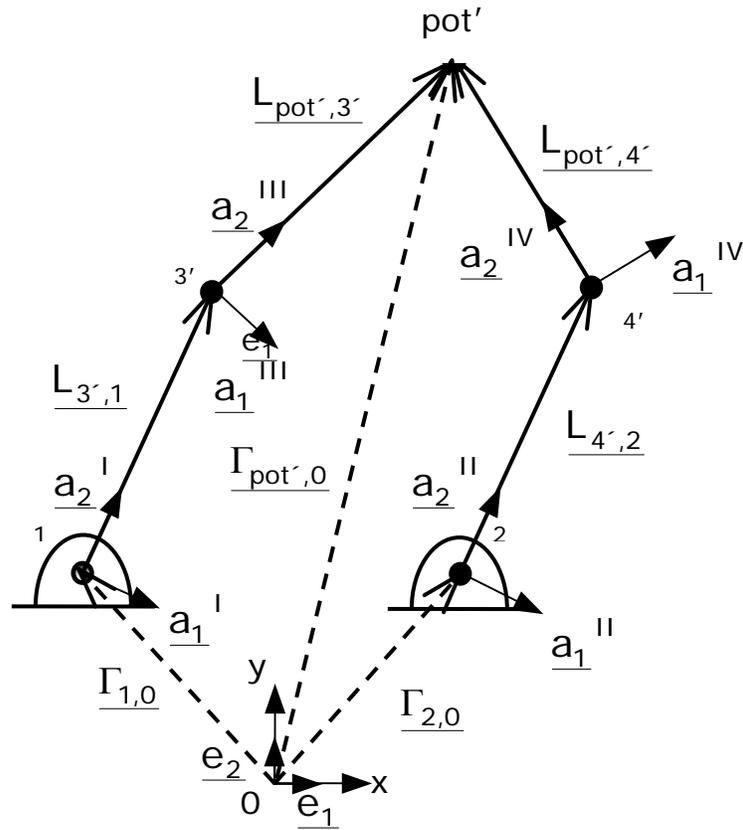


Figura 1.8 Sistemas locales en la configuración deformada.

Obsérvese en la figura 1.8 que los vectores de posición relacionados con los eslabones pueden ser escritos en términos de los sistemas locales deformados; esto es:

$$1) \underline{L}_{3',1} = l_{3',1} \cdot \underline{a}_2^I \tag{1.16}$$

$$2) \underline{L}_{pot',3'} = l_{pot',3'} \cdot \underline{a}_2^{III}$$

$$3) \underline{L}_{4',2} = l_{4',2} \cdot \underline{a}_2^{II}$$

$$4) \underline{L}_{pot',4'} = l_{pot',4'} \cdot \underline{a}_2^{IV}$$

Note también que al considerar rígidos los eslabones, entonces las siguientes relaciones se satisfacen:

$$1) I_{3',1} \equiv I_{3,1} \quad (1.17)$$

$$2) I_{\text{pot}',3'} \equiv I_{\text{pot},3}$$

$$3) I_{4',2} \equiv I_{4,2}$$

$$4) I_{\text{pot}',4'} \equiv I_{\text{pot},4}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de lazo (1.15) se escriben en términos de las bases locales deformadas de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus I_{3,1} \cdot \underline{a}_2^I \oplus I_{\text{pot},3} \cdot \underline{a}_2^{III} \quad (1.18)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0} = \underline{\Gamma}_{2,0} \oplus I_{4,2} \cdot \underline{a}_2^{II} \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \underline{a}_2^{IV}$$

El objetivo ahora es modelar las rotaciones de la base inercial fija asociada con el sistema cartesiano sobre las bases deformadas. Esto se realiza, al igual que en la sección 1.3, mediante la transformación lineal $\rho : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, la cual según el apéndice A de esta tesis, es una rotación. Para poder proseguir con el modelado de la configuración deformada, es necesario integrar al análisis, la configuración no deformada. Esto es posible si se toma en cuenta la siguiente consideración:

“ Las bases locales deformadas representan las rotaciones de las bases locales no deformadas y éstas, a su vez, son representaciones de la base inercial. ”

El modelo que representa tales rotaciones entre las bases, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \underline{a}_2^I &= \rho(P, \underline{e}_2^I) = \rho(P, \rho(p, \underline{e}_2)) = & (1.19) \\
 &= \frac{1}{\|P\|} \cdot \frac{1}{\|p\|} \cdot P \otimes p \otimes \underline{e}_2 \\
 2) \underline{a}_2^{II} &= \rho(Q, \underline{e}_2^{II}) = \rho(Q, \rho(q, \underline{e}_2)) = \\
 &= \frac{1}{\|Q\|} \cdot \frac{1}{\|q\|} \cdot Q \otimes q \otimes \underline{e}_2 \\
 3) \underline{a}_2^{III} &= \rho(R, \underline{e}_2^{III}) = \rho(R, \rho(r, \underline{e}_2)) = \\
 &= \frac{1}{\|R\|} \cdot \frac{1}{\|r\|} \cdot R \otimes r \otimes \underline{e}_2 \\
 4) \underline{a}_2^{IV} &= \rho(S, \underline{e}_2^{IV}) = \rho(S, \rho(s, \underline{e}_2)) = \\
 &= \frac{1}{\|S\|} \cdot \frac{1}{\|s\|} \cdot S \otimes s \otimes \underline{e}_2
 \end{aligned}$$

Aquí, $P, Q, R, S \in \mathfrak{R}^2$ son los números complejos relacionados con la configuración deformada. Dichos números son de norma unitaria; esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \|P\| &= P_0^2 + P_1^2 = 1 & (1.20) \\
 2) \|Q\| &= Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\
 3) \|R\| &= R_0^2 + R_1^2 = 1 \\
 4) \|S\| &= S_0^2 + S_1^2 = 1 \\
 5) \|p\| &= p_0^2 + p_1^2 = 1
 \end{aligned}$$

$$6) \|q\| = q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$7) \|r\| = r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$8) \|s\| = s_0^2 + s_1^2 = 1$$

Por tanto, las ecuaciones de lazo (1.18) se escriben en términos de la base inercial fija, al considerar las expresiones (1.19) y (1.20), de la manera siguiente:

$$1) \Gamma_{\text{pot},0} = \Gamma_{1,0} \oplus I_{3,1} \cdot \{P \otimes p \otimes \underline{e}_1\} \oplus I_{\text{pot},3} \cdot \{R \otimes r \otimes \underline{e}_{21}\} \quad (1.21)$$

$$2) \Gamma_{\text{pot},0} = \Gamma_{2,0} \oplus I_{4,2} \cdot \{Q \otimes q \otimes \underline{e}_2\} \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \{S \otimes s \otimes \underline{e}_2\}$$

Por otro lado, las relaciones geométricas definidas entre las componentes de las rotaciones y los parámetros asociados con los números complejos de la configuración deformada son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1) P = \{P_0, P_1\} ; \quad P_0 \in \mathfrak{R} ; \quad P_0 = \text{Cos } \alpha_1 & \quad (1.22) \\ \quad \quad \quad \quad \quad P_1 \in \mathfrak{R} ; \quad P_1 = \pm \text{Sen } \alpha_1 \\ 2) Q = \{Q_0, Q_1\} ; \quad Q_0 \in \mathfrak{R} ; \quad Q_0 = \text{Cos } \alpha_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad Q_1 \in \mathfrak{R} ; \quad Q_1 = \pm \text{Sen } \alpha_2 \\ 3) R = \{R_0, R_1\} ; \quad R_0 \in \mathfrak{R} ; \quad R_0 = \text{Cos } \alpha_3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad R_1 \in \mathfrak{R} ; \quad R_1 = \pm \text{Sen } \alpha_3 \\ 4) S = \{S_0, S_1\} ; \quad S_0 \in \mathfrak{R} ; \quad S_0 = \text{Cos } \alpha_4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad S_1 \in \mathfrak{R} ; \quad S_1 = \pm \text{Sen } \alpha_4 \end{aligned}$$

Aquí, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathfrak{R}$ son los desplazamientos angulares definidos entre la configuración no deformada y la configuración deformada como se muestra en la figura 1.9.

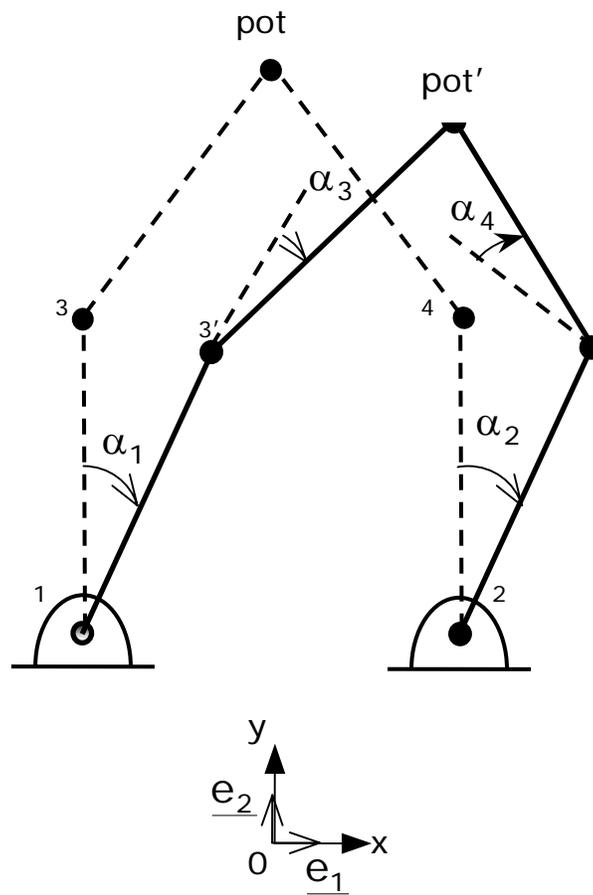


Figura 1.9 Desplazamientos angulares en la configuración deformada.

1.4.1 Formulación de los problemas cinemáticos directo e inverso en la configuración deformada

En esta sección se formularán dos problemas relacionados con la cinemática del robot delta motivo de estudio en esta tesis: 1) el problema directo y 2) el problema inverso. Ambos problemas están relacionados con la configuración deformada del robot mostrada en la figura 1.7.

1.4.1.1 Problema directo

Dados $P = \{P_0, P_1\}$, $R = \{R_0, R_1\}$ con $\|P\| = \|Q\| = 1$, $\Gamma_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$, $\Gamma_{2,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{3,1}$, $l_{4,2}$, $l_{pot,3}$, $l_{pot,4} \in \mathfrak{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$ con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1$, encuentre $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$ y $Q = \{Q_0, Q_1\}$, $S = \{S_0, S_1\}$ tal que las expresiones de lazo (1.21) sean satisfechas y,

$$Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$S_0^2 + S_1^2 = 1$$

El problema de la cinemática directa relacionado con el robot delta motivo de estudio tiene asociado un sistema de 6 ecuaciones no lineales polinomiales y 6 incógnitas.

1.4.1.2 Problema inverso

Dados $\Gamma_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$, $\Gamma_{2,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{3,1}$, $l_{4,2}$, $l_{pot,3}$, $l_{pot,4} \in \mathfrak{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$ y $s = \{s_0, s_1\}$ con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1$ y $\Gamma_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$, encuentre: $P = \{P_0, P_1\}$, $Q = \{Q_0, Q_1\}$, $R = \{R_0, R_1\}$ y $S = \{S_0, S_1\}$ tal que las expresiones (1.21) sean satisfechas y,

$$P_0^2 + P_1^2 = 1$$

$$Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$R_0^2 + R_1^2 = 1$$

$$S_0^2 + S_1^2 = 1$$

El problema de la cinemática inversa asociado con el robot delta motivo de estudio genera un modelo de 8 ecuaciones no lineales polinomiales y 8 incógnitas.

La figura 1.10 muestra la salida gráfica del simulador de posicionamiento hecho en Visual Basic.

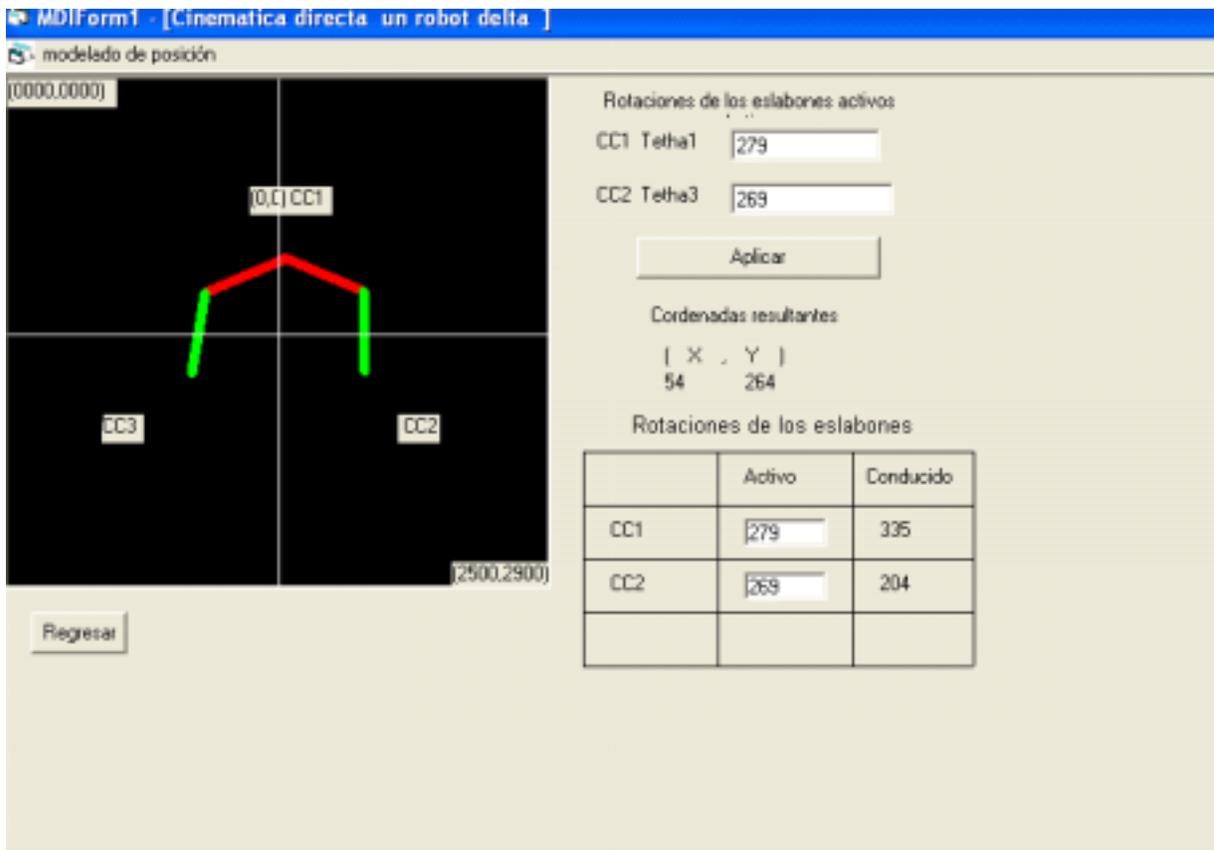


Figura 1.10 Salida gráfica del simulador del robot delta.

Capítulo 2

Modelación de velocidad

Introducción. En esta parte se construye el modelo de velocidad asociado con el robot delta motivo de estudio en esta tesis. El objetivo es determinar, a partir del modelo de posicionamiento desarrollado en el capítulo 1 de esta tesis, un modelo por medio del cual sea posible encontrar las relaciones entre la velocidad del punto p_0 y las velocidades angulares relacionadas con los eslabones del robot.

Al igual que en el capítulo 1 de esta tesis, se determinarán un conjunto de ecuaciones por medio de los cuales se pueden formular los problemas directo e inverso de velocidad.

2.1 Ecuaciones de lazo como funciones del tiempo

Para poder determinar las ecuaciones que gobiernan el movimiento del robot delta motivo de estudio en este informe en términos de los cambios de posición con respecto al tiempo; es decir, de la velocidad, es necesario utilizar funciones del tipo $\mathbf{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $l : J \rightarrow \mathbb{R}$ donde $J \in [0, +\infty]$ es un intervalo de tiempo.

Considere las ecuaciones de lazo (1.15); estas son:

$$1) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0} = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{3',1} \oplus \underline{L}_{\text{pot}',3'}$$

$$2) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0} = \underline{\Gamma}_{2,0} \oplus \underline{L}_{4',2} \oplus \underline{L}_{\text{pot}',4'}$$

Las expresiones anteriores se pueden escribir como funciones del tiempo; esto es, funciones del tipo $\underline{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la manera siguiente:

$$1) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0}(t) = \underline{\Gamma}_{1,0} \oplus \underline{L}_{3',1}(t) \oplus \underline{L}_{\text{pot}',3'}(t) \quad (2.1)$$

$$2) \underline{\Gamma}_{\text{pot}',0}(t) = \underline{\Gamma}_{2,0} \oplus \underline{L}_{4',2}(t) \oplus \underline{L}_{\text{pot}',4'}(t)$$

Nótese de las expresiones anteriores que los vectores $\underline{\Gamma}_{1,0} \in \mathbb{R}^2$ y $\underline{\Gamma}_{2,0} \in \mathbb{R}^2$ no dependen del tiempo.

2.2 Las ecuaciones de velocidad

Para obtener las coordenadas de velocidad relacionadas con el punto pot' localizado en el extremo final del robot delta motivo de estudio (ver figura 1.6), es necesario derivar las expresiones (2.1) en función del tiempo $t \in J$ o, en su caso, cada término que las compone; esto es,

$$1) \underline{V}_{\text{pot}',0}(t) = (\underline{\Gamma}_{\text{pot}',0}(t))^\bullet \quad (2.2)$$

$$2) \underline{\dot{\Gamma}}_{1',0} = \underline{0}$$

$$3) \underline{\dot{\Gamma}}_{2',0} = \underline{0}$$

$$4) \dot{\underline{L}}_{3',1}(t) = (\underline{L}_{3',1}(t))^\bullet$$

$$5) \dot{\underline{L}}_{\text{pot}',3'}(t) = (\underline{L}_{\text{pot}',3'}(t))^\bullet$$

$$6) \dot{\underline{L}}_{4',2}(t) = (\underline{L}_{4',2}(t))^\bullet$$

$$7) \dot{\underline{L}}_{\text{pot}',4'}(t) = (\underline{L}_{\text{pot}',4'}(t))^\bullet$$

Por lo tanto, la velocidad del punto pot' se obtiene por medio de las siguientes expresiones:

$$1) \underline{V}_{\text{pot}',0}(t) = \dot{\underline{L}}_{3',1}(t) \oplus \dot{\underline{L}}_{\text{pot}',3'}(t) \quad (2.3)$$

$$2) \underline{V}_{\text{pot}',0}(t) = \dot{\underline{L}}_{4',2}(t) \oplus \dot{\underline{L}}_{\text{pot}',4'}(t)$$

Considere ahora que se desea obtener una representación de las ecuaciones de velocidad (2.3) en términos de las bases locales deformadas. Para ello, se reescribirán las expresiones (1.16) como funciones del tiempo; es decir, como funciones del tipo $\underline{a} : J \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y $l : J \rightarrow \mathfrak{R}^+$, esto es:

$$1) \underline{L}_{3',1}(t) = l_{3',1}(t) \bullet \underline{a}_2^I(t) \quad (2.4)$$

$$2) \underline{L}_{\text{pot}',3'}(t) = l_{\text{pot}',3'}(t) \bullet \underline{a}_2^{III}(t)$$

$$3) \underline{L}_{4',2}(t) = l_{4',2}(t) \bullet \underline{a}_2^{II}(t)$$

$$4) \underline{L}_{\text{pot}',4'}(t) = l_{\text{pot}',4'}(t) \bullet \underline{a}_2^{IV}(t)$$

Nótese que en realidad las funciones:

$$1) I_{3',1}(t) = I_{3,1}(t) = I_{3,1} \quad (2.5)$$

$$2) I_{\text{pot}',3'}(t) = I_{\text{pot},3}(t) = I_{\text{pot},3}$$

$$3) I_{4',2}(t) = I_{4,2}(t) = I_{4,2}$$

$$4) I_{\text{pot}',4'}(t) = I_{\text{pot},4}(t) = I_{\text{pot},4}$$

son constantes y, por lo tanto, las expresiones (2.4) se reescriben de la manera siguiente:

$$1) \underline{L}_{3',1}(t) = I_{3,1} \cdot \underline{a}_2^I(t) \quad (2.6)$$

$$2) \underline{L}_{\text{pot}',3'}(t) = I_{\text{pot},3} \cdot \underline{a}_2^{III}(t)$$

$$3) \underline{L}_{4',2}(t) = I_{4,2} \cdot \underline{a}_2^{II}(t)$$

$$4) \underline{L}_{\text{pot}',4'}(t) = I_{\text{pot},4} \cdot \underline{a}_2^{IV}(t)$$

Por otro lado, al tomar las derivadas con respecto al tiempo de las expresiones (2.6) se llega al resultado siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \dot{\underline{L}}_{3',1}(t) &= (\underline{L}_{3',1}(t))^\bullet = (I_{3,1} \cdot \underline{a}_2^I(t))^\bullet = \\ &= \dot{I}_{3,1} \cdot \underline{a}_2^I(t) \oplus I_{3,1} \cdot \dot{\underline{a}}_2^I(t) = \\ &= I_{3,1} \cdot \dot{\underline{a}}_2^I(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$2) \dot{\underline{L}}_{\text{pot}',3'}(t) = (\underline{L}_{\text{pot}',3'}(t))^\bullet = (I_{\text{pot},3} \cdot \underline{a}_2^{III}(t))^\bullet =$$

$$\begin{aligned}
 &= \dot{I}_{\text{pot},3} \cdot \underline{a}_2^{\text{III}}(t) \oplus I_{\text{pot},3} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{III}}(t) = \\
 &= I_{\text{pot},3} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{III}}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \underline{\dot{L}}_{4',2}(t) &= (\underline{L}_{4',2}(t))^\bullet = (I_{4,2} \cdot \underline{a}_2^{\text{II}}(t))^\bullet = \\
 &= \dot{I}_{4,2} \cdot \underline{a}_2^{\text{II}}(t) \oplus I_{4,2} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{II}}(t) = \\
 &= I_{4,2} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{II}}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \underline{\dot{L}}_{\text{pot},4'}(t) &= (\underline{L}_{\text{pot},4'}(t))^\bullet = (I_{\text{pot},4} \cdot \underline{a}_2^{\text{IV}}(t))^\bullet = \\
 &= \dot{I}_{\text{pot},4} \cdot \underline{a}_2^{\text{IV}}(t) \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{IV}}(t) = \\
 &= I_{\text{pot},4} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{IV}}(t)
 \end{aligned}$$

Note que $\dot{I}_{3,1} = \dot{I}_{\text{pot},3} = \dot{I}_{4,2} = \dot{I}_{\text{pot},4} = 0$. Por tanto, las expresiones (2.3) se escriben en términos de las derivadas de las bases locales deformadas de la manera siguiente:

$$1) \underline{V}_{\text{pot},0}(t) = I_{3,1} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{I}}(t) \oplus I_{\text{pot},3} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{III}}(t) \quad (2.8)$$

$$2) \underline{V}_{\text{pot},0}(t) = I_{4,2} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{II}}(t) \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{IV}}(t)$$

El objetivo ahora es representar las expresiones de velocidad (2.8) en términos de los números complejos de tal manera que sus derivadas proporcionen información de las velocidades angulares de los eslabones que componen el robot delta motivo de estudio en esta tesis. Para ello,

considere que las ecuaciones (1.19) se expresan como funciones del tipo $t \in J$; esto es, como funciones del tipo $\underline{a} : J \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y $\rho : J \rightarrow \mathfrak{R}^2$:

$$1) \underline{a}_2^I(t) = \rho(P(t), \underline{e}_2^I) = \rho(P(t), \rho(p, \underline{e}_2)) = \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{\|P(t)\|} \cdot \frac{1}{\|p\|} \cdot P(t) \otimes p \otimes \underline{e}_2$$

$$2) \underline{a}_2^{II}(t) = \rho(Q(t), \underline{e}_2^{II}) = \rho(Q(t), \rho(q, \underline{e}_2)) =$$

$$= \frac{1}{\|Q(t)\|} \cdot \frac{1}{\|q\|} \cdot Q(t) \otimes q \otimes \underline{e}_2$$

$$3) \underline{a}_2^{III}(t) = \rho(R(t), \underline{e}_2^{III}) = \rho(R(t), \rho(r, \underline{e}_2)) =$$

$$= \frac{1}{\|R(t)\|} \cdot \frac{1}{\|r\|} \cdot R(t) \otimes r \otimes \underline{e}_{21}$$

$$4) \underline{a}_2^{IV}(t) = \rho(S(t), \underline{e}_2^{IV}) = \rho(S(t), \rho(s, \underline{e}_2)) =$$

$$= \frac{1}{\|S(t)\|} \cdot \frac{1}{\|s\|} \cdot S(t) \otimes s \otimes \underline{e}_2$$

Cabe señalar que los complejos $p, q, r, s \in \mathfrak{R}^2$ y las bases $\underline{e}_2^I, \underline{e}_2^{II}, \underline{e}_2^{III}, \underline{e}_2^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ no dependen del tiempo por estar asociadas con la configuración no deformada. Además,

$$1) \|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1 \quad (2.10)$$

$$2) \|P(t)\| = \|Q(t)\| = \|R(t)\| = \|S(t)\| = 1$$

Por lo tanto, las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las expresiones (2.9) son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1) \dot{\underline{a}}_2^I(t) &= (\underline{a}_2^I(t))^\bullet = (P(t) \otimes \underline{e}_2^I)^\bullet = & (2.11) \\ &= \dot{P}(t) \otimes \underline{e}_2^I = \dot{P}(t) \otimes p \otimes \underline{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \dot{\underline{a}}_2^{II}(t) &= (\underline{a}_2^{II}(t))^\bullet = (Q(t) \otimes \underline{e}_2^{II})^\bullet = \\ &= \dot{Q}(t) \otimes \underline{e}_2^{II} = \dot{Q}(t) \otimes q \otimes \underline{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \dot{\underline{a}}_2^{III}(t) &= (\underline{a}_2^{III}(t))^\bullet = (R(t) \otimes \underline{e}_2^{III})^\bullet = \\ &= \dot{R}(t) \otimes \underline{e}_2^{III} = \dot{R}(t) \otimes r \otimes \underline{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \dot{\underline{a}}_2^{IV}(t) &= (\underline{a}_2^{IV}(t))^\bullet = (S(t) \otimes \underline{e}_2^{IV})^\bullet = \\ &= \dot{S}(t) \otimes \underline{e}_2^{IV} = \dot{S}(t) \otimes s \otimes \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Las expresiones de velocidad (2.8) se escriben en términos de las expresiones (2.11) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \underline{V}_{pot',0}(t) &= I_{3,1} \bullet \{ \dot{P}(t) \otimes \underline{e}_2^I \} \oplus I_{pot,3} \bullet \\ & \{ \dot{R}(t) \otimes \underline{e}_2^{III} \} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} 2) \underline{V}_{pot',0}(t) &= I_{4,2} \bullet \{ \dot{Q}(t) \otimes \underline{e}_2^{II} \} \oplus I_{pot,4} \bullet \\ & \{ \dot{S}(t) \otimes \underline{e}_2^{IV} \} \end{aligned}$$

O, explícitamente:

$$1) \underline{V}_{\text{pot},0}(t) = I_{3,1} \cdot \{ \dot{P}(t) \otimes p \otimes \underline{e}_2 \} \oplus I_{\text{pot},3} \cdot \{ \dot{R}(t) \otimes r \otimes \underline{e}_2 \} \quad (2.13)$$

$$2) \underline{V}_{\text{pot},0}(t) = I_{4,2} \cdot \{ \dot{Q}(t) \otimes q \otimes \underline{e}_2 \} \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \{ \dot{S}(t) \otimes s \otimes \underline{e}_2 \}$$

2.2.1 Ecuaciones de velocidad instantáneas

De acuerdo con las expresiones (2.12), la velocidad $\underline{V}_{\text{pot},0}(t) \in \mathfrak{R}^2$ está en función de las bases locales asociadas con la configuración no deformada relacionada con el robot delta motivo de estudio en esta tesis. Es necesario, por tanto, expresar dichas ecuaciones en términos de los sistemas locales deformados. Para ello, considere las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} 1) \underline{a}_2^I(t) &= P(t) \otimes \underline{e}_2^I \\ 2) \underline{a}_2^{II}(t) &= Q(t) \otimes \underline{e}_2^{II} \\ 3) \underline{a}_2^{III}(t) &= R(t) \otimes \underline{e}_2^{III} \\ 4) \underline{a}_2^{IV}(t) &= S(t) \otimes \underline{e}_2^{IV} \end{aligned} \quad (2.14)$$

y las identidades siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & P(t) \otimes \overline{P(t)} = \overline{P(t)} \otimes P(t) = I & (2.15) \\
 2) \quad & I \otimes P(t) = P(t)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, al multiplicar por los complejos conjugados $\overline{P(t)}$, $\overline{Q(t)}$, $\overline{R(t)}$, $\overline{S(t)} \in \mathfrak{R}^2$ de $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $S(t)$ las relaciones (2.14) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \overline{P(t)} \otimes \underline{a}_2^I(t) = \overline{P(t)} \otimes P(t) \otimes \underline{e}_2^I = I \otimes \underline{e}_2^I = \underline{e}_2^I & (2.16) \\
 2) \quad & \overline{Q(t)} \otimes \underline{a}_2^{II}(t) = \overline{Q(t)} \otimes Q(t) \otimes \underline{e}_2^{II} = I \otimes \underline{e}_2^{II} = \underline{e}_2^{II} \\
 3) \quad & \overline{R(t)} \otimes \underline{a}_2^{III}(t) = \overline{R(t)} \otimes R(t) \otimes \underline{e}_2^{III} = I \otimes \underline{e}_2^{III} = \underline{e}_2^{III} \\
 4) \quad & \overline{S(t)} \otimes \underline{a}_2^{IV}(t) = \overline{S(t)} \otimes S(t) \otimes \underline{e}_2^{IV} = I \otimes \underline{e}_2^{IV} = \underline{e}_2^{IV}
 \end{aligned}$$

Al considerar las relaciones (2.16), las ecuaciones (2.12) adquieren la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \underline{V}_{\text{pot},0}(t) = I_{3,1} \cdot \{ \dot{P}(t) \otimes \overline{P(t)} \otimes \underline{a}_2^I(t) \} \oplus I_{\text{pot},3} \cdot & (2.17) \\
 & \cdot \{ \dot{R}(t) \otimes \overline{R(t)} \otimes \underline{a}_2^{III}(t) \} \\
 2) \quad & \underline{V}_{\text{pot},0}(t) = I_{4,2} \cdot \{ \dot{Q}(t) \otimes \overline{Q(t)} \otimes \underline{a}_2^{II}(t) \} \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \\
 & \cdot \{ \dot{S}(t) \otimes \overline{S(t)} \otimes \underline{a}_2^{IV}(t) \}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, considere funciones del tipo $\rho : J \rightarrow \mathfrak{R}$ para expresar las ecuaciones (1.20)_{1,2,3,4} en función del tiempo; esto es:

$$1) \|\dot{P}(t)\| = P_0^2(t) + P_1^2(t) = 1 \quad (2.18)$$

$$2) \|\dot{Q}(t)\| = Q_0^2(t) + Q_1^2(t) = 1$$

$$3) \|\dot{R}(t)\| = R_0^2(t) + R_1^2(t) = 1$$

$$4) \|\dot{S}(t)\| = S_0^2(t) + S_1^2(t) = 1$$

Nótese que al derivar las expresiones (2.18) en función del tiempo $t \in J$ y usando la regla de la cadena se llega a las siguientes expresiones:

$$1) \|\dot{P}(t)\| = 2\dot{P}_0(t)P_0(t) + 2\dot{P}_1(t)P_1(t) = \quad (2.19)$$

$$= \dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$$

$$2) \|\dot{Q}(t)\| = 2\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + 2\dot{Q}_1(t)Q_1(t) =$$

$$= \dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$$

$$3) \|\dot{R}(t)\| = 2\dot{R}_0(t)R_0(t) + 2\dot{R}_1(t)R_1(t) =$$

$$= \dot{R}_0(t)R_0(t) + \dot{R}_1(t)R_1(t) = 0$$

$$4) \|\dot{S}(t)\| = 2\dot{S}_0(t)S_0(t) + 2\dot{S}_1(t)S_1(t) =$$

$$= \dot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_1(t)S_1(t) = 0$$

Finalmente, es necesario obtener las derivadas entre los parámetros de los números complejos y las variaciones de los desplazamientos angulares.

Para ello, es necesario escribir las relaciones (1.22) en función del tiempo; es decir, usando funciones del tipo $\alpha : J \rightarrow \mathfrak{R}$. Dichas expresiones son:

$$\begin{aligned}
 1) \ P(t) &= \{P_0(t), P_1(t)\} ; P_0(t) \in \mathfrak{R} ; P_0(t) = \text{Cos } \alpha_1(t) & (2.20) \\
 &P_1(t) \in \mathfrak{R} ; P_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_1(t) \\
 2) \ Q(t) &= \{Q_0(t), Q_1(t)\} ; Q_0(t) \in \mathfrak{R} ; Q_0(t) = \text{Cos } \alpha_2(t) \\
 &Q_1(t) \in \mathfrak{R} ; Q_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_2(t) \\
 3) \ R(t) &= \{R_0(t), R_1(t)\} ; R_0(t) \in \mathfrak{R} ; R_0(t) = \text{Cos } \alpha_3(t) \\
 &R_1(t) \in \mathfrak{R} ; R_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_3(t) \\
 4) \ S(t) &= \{S_0(t), S_1(t)\} ; S_0(t) \in \mathfrak{R} ; S_0(t) = \text{Cos } \alpha_4(t) \\
 &S_1(t) \in \mathfrak{R} ; S_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_4(t)
 \end{aligned}$$

Las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las relaciones (2.20) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \ \dot{P}(t) &= \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\} ; & (2.21) \\
 \dot{P}_0(t) &= (P_0(t))^\bullet = (\text{Cos}\alpha_1(t))^\bullet = \\
 &= -\dot{\alpha}_1(t)\text{Sen}\alpha_1(t) \\
 \dot{P}_1(t) &= (P_1(t))^\bullet = (\pm\text{Sen}\alpha_1(t))^\bullet = \\
 &= \pm (\dot{\alpha}_1(t)\text{Cos}\alpha_1(t)) \\
 2) \ \dot{Q}(t) &= \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\} ; \\
 \dot{Q}_0(t) &= (Q_0(t))^\bullet = (\text{Cos}\alpha_2(t))^\bullet =
 \end{aligned}$$

$$= -\dot{\alpha}_2(t)\text{Sen}\alpha_2(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1(t) &= (Q_1(t))^\bullet = (\pm\text{Sen}\alpha_2(t))^\bullet = \\ &= \pm(\dot{\alpha}_2(t)\text{Cos}\alpha_2(t))\end{aligned}$$

$$3) \dot{R}(t) = \{\dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t)\} \quad ;$$

$$\begin{aligned}\dot{R}_0(t) &= (R_0(t))^\bullet = (\text{Cos}\alpha_3(t))^\bullet = \\ &= -\dot{\alpha}_3(t)\text{Sen}\alpha_3(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{R}_1(t) &= (R_1(t))^\bullet = (\pm\text{Sen}\alpha_3(t))^\bullet = \\ &= \pm(\dot{\alpha}_3(t)\text{Cos}\alpha_3(t))\end{aligned}$$

$$4) \dot{S}(t) = \{\dot{S}_0(t), \dot{S}_1(t)\} \quad ;$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_0(t) &= (S_0(t))^\bullet = (\text{Cos}\alpha_4(t))^\bullet = \\ &= -\dot{\alpha}_4(t)\text{Sen}\alpha_4(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_1(t) &= (S_1(t))^\bullet = (\pm\text{Sen}\alpha_4(t))^\bullet = \\ &= \pm(\dot{\alpha}_4(t)\text{Cos}\alpha_4(t))\end{aligned}$$

Aquí, $\dot{\alpha}_1(t)$, $\dot{\alpha}_2(t)$, $\dot{\alpha}_3(t)$, $\dot{\alpha}_4(t) \in \Re$ son los cambios de posición angulares.

2.3 Formulación de los problemas cinemáticos directo e inverso de velocidad

En esta sección serán formulados dos problemas de fundamental importancia en la cinemática de cuerpos rígidos: el problema directo de velocidad y el problema inverso. Tales problemas están relacionados con la configuración deformada del robot Delta motivo de estudio mostrado en la figura 1.7.

2.3.1 Problema directo de velocidad

Dados $l_{3,1}, l_{4,2}, l_{pot,3}, l_{pot,4} \in \mathfrak{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$ con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1$, $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$ con $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = \|R(t)\| = \|S(t)\| = 1$, $\overline{P(t)} = \{P_0(t), -P_1(t)\}$, $\overline{Q(t)} = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$, $\overline{R(t)} = \{R_0(t), -R_1(t)\}$, $\overline{S(t)} = \{S_0(t), -S_1(t)\}$; $\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$ y $\dot{R}(t) = \{\dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t)\}$, encuentre: $\underline{V_{pot',0}(t)} \in \mathfrak{R}^2$, $\dot{Q}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$ y $\dot{S}(t) = \{\dot{S}_0(t), \dot{S}_1(t)\}$ tal que las expresiones (2.17) sean satisfechas y:

$$\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$$

$$\dot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_1(t)S_1(t) = 0$$

El problema directo de velocidad asociado con el robot delta motivo de estudio consiste en resolver un sistema de 6 ecuaciones diferenciales ordinarias y 6 incógnitas.

2.3.2 Problema inverso de velocidad

Dados $l_{3,1}, l_{4,2}, l_{pot,3}, l_{pot,4} \in \mathfrak{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$ con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1$, $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$ con $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = \|R(t)\| = \|S(t)\| = 1$, $\overline{P(t)} = \{P_0(t), -P_1(t)\}$, $\overline{Q(t)} = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$, $\overline{R(t)} = \{R_0(t), -R_1(t)\}$, $\overline{S(t)} = \{S_0(t), -S_1(t)\}$; y $V_{pot,0}(t) \in \mathfrak{R}^2$; encuentre: $\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$, $\dot{Q}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$, $\dot{R}(t) = \{\dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t)\}$ y $\dot{S}(t) = \{\dot{S}_0(t), \dot{S}_1(t)\}$ tal que las expresiones (2.17) sean satisfechas y,

$$\dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$$

$$\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$$

$$\dot{R}_0(t)R_0(t) + \dot{R}_1(t)R_1(t) = 0$$

$$\dot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_1(t)S_1(t) = 0$$

El problema inverso de velocidad relacionado con el robot Delta motivo de estudio en esta tesis consiste en resolver un sistema de 8 ecuaciones diferenciales ordinarias y 8 incógnitas.

Capítulo 3

Modelación de aceleración

Introducción. En este capítulo se analiza y modela el problema de aceleración relacionado con el robot delta motivo de estudio en este trabajo de tesis. El objetivo es determinar un modelo que permita relacionar las aceleraciones angulares asociadas con los movimientos de los eslabones del robot y la aceleración del punto pot' localizado en el extremo final del multicuerpo estudiado. Son formulados los problemas cinemáticos directo e inverso de aceleración a partir de las ecuaciones generadas. Ambos problemas están relacionados con la configuración deformada del robot delta mostrado en la figura 1.7.

3.1 El modelo de aceleración

Para poder determinar el modelo que permita obtener las coordenadas de aceleración relacionadas con el punto pot' (ver figura 1.7) medidas desde el origen de coordenadas "0", es necesario reescribir las expresiones de velocidad (2.3); esto es:

$$1) \underline{V}_{pot',0}(t) = \underline{\dot{L}}_{3',1}(t) \oplus \underline{\dot{L}}_{pot',3'}(t)$$

$$2) \underline{V}_{pot',0}(t) = \underline{\dot{L}}_{4',2}(t) \oplus \underline{\dot{L}}_{pot',4'}(t)$$

Las ecuaciones de aceleración se obtienen al derivar con respecto al tiempo $t \in J$ cada uno de los términos que componen las expresiones (2.3). Esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{a}_{\text{pot},0} (t) &= (\underline{V}_{\text{pot},0} (t))^\bullet & (3.1) \\
 2) \quad \underline{\ddot{L}}_{3',1} (t) &= (\underline{\dot{L}}_{3',1} (t))^\bullet \\
 3) \quad \underline{\ddot{L}}_{\text{pot},3'} (t) &= (\underline{\dot{L}}_{\text{pot},3'} (t))^\bullet \\
 4) \quad \underline{\ddot{L}}_{4',2} (t) &= (\underline{\dot{L}}_{4',2} (t))^\bullet \\
 5) \quad \underline{\ddot{L}}_{\text{pot},4'} (t) &= (\underline{\dot{L}}_{\text{pot},4'} (t))^\bullet
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de aceleración son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{a}_{\text{pot},0} (t) &= \underline{\ddot{L}}_{3',1} (t) \oplus \underline{\ddot{L}}_{\text{pot},3'} (t) & (3.2) \\
 2) \quad \underline{a}_{\text{pot},0} (t) &= \underline{\ddot{L}}_{4',2} (t) \oplus \underline{\ddot{L}}_{\text{pot},4'} (t)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, las expresiones explícitas en términos de las bases móviles de las ecuaciones (3.1) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 2) \quad \underline{\ddot{L}}_{3',1} (t) &= (\underline{\dot{L}}_{3',1} (t))^\bullet = \\
 &= \left(I_{3,1} \bullet \underline{\dot{a}}_2^1(t) \right)^\bullet = I_{3,1} \bullet \underline{\ddot{a}}_2^1(t) & (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \ddot{\underline{L}}_{\text{pot},3} (t) &= \left(\dot{\underline{L}}_{\text{pot},3} (t) \right)' \\
 &= \left(I_{\text{pot},3} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{III}} (t) \right)' = I_{\text{pot},3} \cdot \ddot{\underline{a}}_2^{\text{III}} (t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \ddot{\underline{L}}_{4,2} (t) &= \left(\dot{\underline{L}}_{4,2} (t) \right)' \\
 &= \left(I_{4,2} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{II}} (t) \right)' = I_{4,2} \cdot \ddot{\underline{a}}_2^{\text{II}} (t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \ddot{\underline{L}}_{\text{pot},4} (t) &= \left(\dot{\underline{L}}_{\text{pot},4} (t) \right)' \\
 &= \left(I_{\text{pot},4} \cdot \dot{\underline{a}}_2^{\text{IV}} (t) \right)' = I_{\text{pot},4} \cdot \ddot{\underline{a}}_2^{\text{IV}} (t)
 \end{aligned}$$

Las expresiones (3.2) toman la forma siguiente:

$$1) \quad \underline{a}_{\text{pot},0} (t) = I_{3,1} \cdot \ddot{\underline{a}}_2^{\text{I}}(t) \oplus I_{\text{pot},3} \cdot \ddot{\underline{a}}_2^{\text{III}} (t) \quad (3.4)$$

$$2) \quad \underline{a}_{\text{pot},0} (t) = I_{4,2} \cdot \ddot{\underline{a}}_2^{\text{II}} (t) \oplus I_{\text{pot},4} \cdot \ddot{\underline{a}}_2^{\text{IV}} (t)$$

Por otro lado, la representación explícita de las derivadas de las bases móviles son:

$$1) \quad \ddot{\underline{a}}_2^{\text{I}}(t) = \left(\dot{\underline{a}}_2^{\text{I}}(t) \right)' = \left(\dot{\underline{P}}(t) * \underline{e}_2^{\text{I}} \right)' = \ddot{\underline{P}}(t) * \underline{e}_2^{\text{I}} \quad (3.5)$$

$$2) \quad \ddot{\underline{a}}_2^{\text{II}}(t) = \left(\dot{\underline{a}}_2^{\text{II}}(t) \right)' = \left(\dot{\underline{Q}}(t) * \underline{e}_2^{\text{II}} \right)' = \ddot{\underline{Q}}(t) * \underline{e}_2^{\text{II}}$$

$$3) \underline{\underline{\ddot{a}}}_2^{III}(t) = \left(\underline{\underline{\dot{a}}}_2^{III}(t) \right)^{\cdot} = \left(\underline{\underline{\dot{R}}}(t) * \underline{e}_2^{III} \right)^{\cdot} = \underline{\underline{\ddot{R}}}(t) * \underline{e}_2^{III}$$

$$4) \underline{\underline{\ddot{a}}}_2^{IV}(t) = \left(\underline{\underline{\dot{a}}}_2^{IV}(t) \right)^{\cdot} = \left(\underline{\underline{\dot{S}}}(t) * \underline{e}_2^{IV} \right)^{\cdot} = \underline{\underline{\ddot{S}}}(t) * \underline{e}_2^{IV}$$

Las expresiones (3.4) se escriben de la manera siguiente:

$$1) \underline{\underline{a}}_{\text{pot},0}(t) = I_{3,1} \bullet \underline{\underline{\ddot{P}}}(t) * \underline{e}_2^I \oplus I_{\text{pot},3} \bullet \underline{\underline{\ddot{Q}}}(t) * \underline{e}_2^{III} \quad (3.6)$$

$$2) \underline{\underline{a}}_{\text{pot},0}(t) = I_{4,2} \bullet \underline{\underline{\ddot{R}}}(t) * \underline{e}_2^{II} \oplus I_{\text{pot},4} \bullet \underline{\underline{\ddot{S}}}(t) * \underline{e}_2^{IV}$$

3.1.1 Ecuaciones de aceleración instantáneas

Observe que las ecuaciones (3.6), están definidas sobre las bases locales no deformadas. Por tanto, es necesario utilizar las relaciones (2.16) para representar las ecuaciones de aceleración en la configuración deformada, esto es:

$$1) \underline{\underline{a}}_{\text{pot},0}(t) = I_{3,1} \bullet \left\{ \underline{\underline{\ddot{P}}}(t) * \bar{P}(t) * \underline{a}_1^I(t) \right\} \oplus \quad (3.7)$$

$$I_{\text{pot},3} \bullet \left\{ \underline{\underline{\ddot{Q}}}(t) * \bar{Q}(t) * \underline{a}_1^{III}(t) \right\}$$

$$2) \underline{\underline{a}}_{\text{pot},0}(t) = I_{4,2} \bullet \left\{ \underline{\underline{\ddot{R}}}(t) * \bar{R}(t) * \underline{a}_1^{II}(t) \right\} \oplus$$

$$I_{\text{pot},4} \bullet \left\{ \underline{\underline{\ddot{S}}}(t) * \bar{S}(t) * \underline{a}_1^{IV}(t) \right\}$$

En esta sección se representarán de forma explícita las ecuaciones de norma doblemente derivadas. Para ello, se derivarán con respecto al tiempo $t \in J$ las expresiones (2.19) descritas en el capítulo 2, esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0 \\
 2) \quad & \ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0 \\
 3) \quad & \ddot{R}_0(t)R_0(t) + \dot{R}_0^2(t) + \ddot{R}_1(t)R_1(t) + \dot{R}_1^2(t) = 0 \\
 4) \quad & \ddot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_0^2(t) + \ddot{S}_1(t)S_1(t) + \dot{S}_1^2(t) = 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.1.2 Relaciones entre las dobles derivadas de los complejos y las componentes de las aceleraciones angulares

En esta sección se presentan las relaciones existentes entre las aceleraciones angulares de los eslabones y las componentes de las dobles derivadas de complejos; esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \ddot{P}(t) = \left\{ \ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t) \right\} ; \\
 & \ddot{P}_0(t) \in \Re ; \quad \ddot{P}_0(t) = -\ddot{\alpha}_1(t)\text{Sen}\alpha_1(t) - \dot{\alpha}_1^2(t)\text{Cos}\alpha_1(t)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\ddot{P}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \ddot{P}_1(t) = -\ddot{\alpha}_1(t)\text{Cos}\alpha_1(t) + \dot{\alpha}_1^2(t)\text{Sen}\alpha_1(t)$$

$$2) \ddot{Q}(t) = \left\{ \ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t) \right\} ;$$

$$\ddot{Q}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \ddot{Q}_0(t) = -\ddot{\alpha}_2(t)\text{Sen}\alpha_2(t) - \dot{\alpha}_2^2(t)\text{Cos}\alpha_2(t)$$

$$\ddot{Q}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \ddot{Q}_1(t) = -\ddot{\alpha}_2(t)\text{Cos}\alpha_2(t) + \dot{\alpha}_2^2(t)\text{Sen}\alpha_2(t)$$

$$3) \ddot{R}(t) = \left\{ \ddot{R}_0(t), \ddot{R}_1(t) \right\} ;$$

$$\ddot{R}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \ddot{R}_0(t) = -\ddot{\alpha}_3(t)\text{Sen}\alpha_3(t) - \dot{\alpha}_3^2(t)\text{Cos}\alpha_3(t)$$

$$\ddot{R}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \ddot{R}_1(t) = -\ddot{\alpha}_3(t)\text{Cos}\alpha_3(t) + \dot{\alpha}_3^2(t)\text{Sen}\alpha_3(t)$$

$$4) \ddot{S}(t) = \left\{ \ddot{S}_0(t), \ddot{S}_1(t) \right\} ;$$

$$\ddot{S}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \ddot{S}_0(t) = -\ddot{\alpha}_4(t)\text{Sen}\alpha_4(t) - \dot{\alpha}_4^2(t)\text{Cos}\alpha_4(t)$$

$$\ddot{S}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \ddot{S}_1(t) = -\ddot{\alpha}_4(t)\text{Cos}\alpha_4(t) + \dot{\alpha}_4^2(t)\text{Sen}\alpha_4(t)$$

Aquí, $\ddot{\alpha}_1(t)$, $\ddot{\alpha}_2(t)$, $\ddot{\alpha}_3(t)$, $\ddot{\alpha}_4(t) \in \mathfrak{R}$, son las aceleraciones angulares. Para obtener las relaciones anteriores se han derivado con respecto al tiempo $t \in J$ las ecuaciones (2.21).

3.2 Formulación de los problemas cinemáticos

En esta sección se formulan los problemas cinemáticos de aceleración relacionados con el robot delta motivo de estudio en este trabajo de tesis.

3.2.1 Formulación del problema cinemático directo de aceleración

Dados $l_{3,1}, l_{4,2}, l_{pot,3}, l_{pot,4} \in \mathbb{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$ con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1$, $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$ con $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = \|R(t)\| = \|S(t)\| = 1$, $\overline{P(t)} = \{P_0(t), -P_1(t)\}$, $\overline{Q(t)} = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$, $\overline{R(t)} = \{R_0(t), -R_1(t)\}$, $\overline{S(t)} = \{S_0(t), -S_1(t)\}$;
 $\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$ y $\dot{R}(t) = \{\dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t)\}$; $\ddot{P}(t) = \{\ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t)\}$,
 $\ddot{R}(t) = \{\ddot{R}_0(t), \ddot{R}_1(t)\}$, encuentre: $a_{pot,0} \in \mathbb{R}^2$, $\ddot{Q}(t) = \{\ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t)\}$,
 $\ddot{S}(t) = \{\ddot{S}_0(t), \ddot{S}_1(t)\}$, tal que las expresiones (3.7) sean satisfechas y,

$$\ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0$$

$$\ddot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_0^2(t) + \ddot{S}_1(t)S_1(t) + \dot{S}_1^2(t) = 0$$

3.2.1 Planteamiento del problema cinemático inverso de aceleración

En esta sección es planteado un problema de fundamental importancia en la cinemática de multicuerpos rígidos: “el problema inverso de aceleración”. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del robot delta mostrado en la figura 1.7.

Dados, $l_{3,1}, l_{4,2}, l_{pot,3}, l_{pot,4} \in \mathfrak{R}^+$, $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$, $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$, $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$, $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$ con $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{s}\| = 1$, $\mathbf{P}(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $\mathbf{Q}(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$, $\mathbf{R}(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $\mathbf{S}(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$ con $\|\mathbf{P}(t)\| = \|\mathbf{Q}(t)\| = \|\mathbf{R}(t)\| = \|\mathbf{S}(t)\| = 1$, $\overline{\mathbf{P}(t)} = \{P_0(t), -P_1(t)\}$, $\overline{\mathbf{Q}(t)} = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$, $\overline{\mathbf{R}(t)} = \{R_0(t), -R_1(t)\}$, $\overline{\mathbf{S}(t)} = \{S_0(t), -S_1(t)\}$;
 $\dot{\mathbf{P}}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$, $\dot{\mathbf{Q}}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$, $\dot{\mathbf{R}}(t) = \{\dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t)\}$,
 $\dot{\mathbf{S}}(t) = \{\dot{S}_0(t), \dot{S}_1(t)\}$ y $\underline{a_{pot,0}} \in \mathfrak{R}^2$, encuentre: $\ddot{\mathbf{P}}(t) = \{\ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t)\}$,
 $\ddot{\mathbf{Q}}(t) = \{\ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t)\}$, $\ddot{\mathbf{R}}(t) = \{\ddot{R}_0(t), \ddot{R}_1(t)\}$, $\ddot{\mathbf{S}}(t) = \{\ddot{S}_0(t), \ddot{S}_1(t)\}$, tal

que las expresiones (3.7) sean satisfechas y,

$$\ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0$$

$$\ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0$$

$$\ddot{R}_0(t)R_0(t) + \dot{R}_0^2(t) + \ddot{R}_1(t)R_1(t) + \dot{R}_1^2(t) = 0$$

$$\ddot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_0^2(t) + \ddot{S}_1(t)S_1(t) + \dot{S}_1^2(t) = 0$$

Conclusiones

En este trabajo de tesis los objetivos siguientes fueron alcanzados:

- Se describió al robot delta y algunas de sus aplicaciones.
- Se modeló la cinemática del robot en estudio usando la rotación usual de los números complejos.
- Se programó el modelo de posicionamiento.

En este trabajo de tesis se han construido las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento, velocidad y aceleración de un robot delta tipo RR usando una rotación usual del álgebra de los números complejos. Fueron analizadas dos configuraciones: 1) la no deformada y 2) la deformada.

En ambas configuraciones se formularon los problemas directos e inversos. Los resultados obtenidos en esta tesis se resumen en los siguientes incisos:

- 1) El sistema de ecuaciones para el problema inverso de posicionamiento tanto en la configuración no deformada como en la deformada fue de 8 ecuaciones con 8 incógnitas.

- 2) El sistema de ecuaciones para el problema inverso de velocidad 8 ecuaciones con 8 incógnitas.
- 3) El sistema de ecuaciones para el problema inverso de aceleración 8 ecuaciones con 8 incógnitas.
- 4) El sistema de ecuaciones para el problema directo de posicionamiento tanto en la configuración no deformada como en la deformada fue de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.
- 5) El sistema de ecuaciones para el problema directo de velocidad 6 ecuaciones con 6 incógnitas.
- 6) El sistema de ecuaciones para el problema directo de aceleración 6 ecuaciones con 6 incógnitas.

El análisis y modelación realizado al robot delta usando la rotación usual parametrizada en el espacio vectorial de números complejos muestra la consistencia de las aplicaciones en la diversidad de multicuerpos rígidos usando distintas álgebras y distintas transformaciones lineales que se caracterizan por ser rotaciones y reflexiones.

Finalmente, futuros trabajos por desarrollar relacionados con esta tesis son los siguientes:

- Modelación de posicionamiento de un robot delta usando la rotación variante de los números complejos.

- Modelación dinámica de un robot paralelo tipo RRR usando una rotación variante.
- Síntesis plana de mecanismos usando rotaciones del espacio vectorial de números complejos.

Apéndice A

Parametrización del álgebra usual de complejos

1. El espacio vectorial de complejos

Se definirán dos operaciones binarias sobre el conjunto \mathfrak{R}^2 , el cual como es bien sabido, es el conjunto de parejas ordenadas de números reales, una es la operación aditiva $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ usual en \mathfrak{R}^2 y la otra una operación multiplicativa $\otimes : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$. Se demostrará que mediante estas operaciones la pareja (\mathfrak{R}^2, \oplus) y la terna $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes)$ forman un grupo aditivo conmutativo y un campo conmutativo, respectivamente. Al utilizar la multiplicación escalar $\bullet : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y el producto interno $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ usuales, se mostrará que el conjunto $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno conocido como el conjunto de números complejos. Considere entonces el conjunto \mathfrak{R}^2 sobre el cual se definen las operaciones siguientes:

$$\text{i) } (a, b) \oplus (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta)$$

$$\text{ii) } (a, b) * (\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$$

$$\forall (a, b), (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2,$$

de hecho la operación $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es la suma usual en \mathfrak{R}^2 y es bien conocido que la pareja (\mathfrak{R}^2, \oplus) es un grupo aditivo conmutativo.

Teorema 1. La terna $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes)$ es un campo conmutativo.

Demostración. Puesto que la pareja (\mathfrak{R}^2, \oplus) es un grupo aditivo conmutativo, falta únicamente mostrar que $(\mathfrak{R}^2, \otimes)$ es un grupo multiplicativo conmutativo excepto por la existencia del inverso multiplicativo del elemento nulo aditivo, y que además, la operación aditiva y la multiplicativa satisfacen las correspondientes propiedades distributivas. En efecto, de acuerdo con la conmutatividad de la multiplicación de los números reales, la operación $* : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es conmutativa además:

i) la operación $* : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es asociativa. Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$ tal que

$$\mathbf{p} = (a, b); \quad \mathbf{q} = (\alpha, \beta); \quad \mathbf{r} = (c, d), \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} * (\mathbf{q} * \mathbf{r}) &= (a, b) \otimes ((\alpha, \beta) \otimes (c, d)) \\ &= (a, b) \otimes (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \\ &= (a(\alpha c - \beta d) - b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(\alpha c - \beta d)) \\ &= (a\alpha c - a\beta d - b\alpha d - b\beta c, a\alpha d + a\beta c + b\alpha c - b\beta d) \\ &= ((a\alpha - b\beta)c - (a\beta + b\alpha)d, (a\beta + b\alpha)c + (a\alpha - b\beta)d) \\ &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) \otimes (c, d) \\ &= ((a, b) \otimes (\alpha, \beta)) \otimes (c, d) \end{aligned}$$

$$= (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r}$$

ii) Se construirá ahora el elemento identidad de la operación multiplicación.

Se sabe que $\mathbf{1} \in \mathfrak{R}^2$ es la identidad multiplicativa de \mathfrak{R}^2 si y solo si $\mathbf{1} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \mathbf{1} = \mathbf{p}$, $\forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$. Por tanto, siendo $\mathbf{p} = (a, b)$ y $\mathbf{1} = (\alpha, \beta)$, entonces, $\mathbf{1} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \mathbf{1} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b)$. Esto es,

$$a\alpha - b\beta = a \quad ; \quad a\beta + b\alpha = b.$$

El elemento identidad multiplicativo de $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ con respecto a la operación $*$: $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, se obtiene al resolver este último sistema de ecuaciones. Es decir, siendo $a \neq 0$, las dos ecuaciones se reducen a:

$$\alpha = \frac{1}{a} (a + b\beta) \quad ; \quad a\beta + \frac{b}{a} (a + b\beta) = b.$$

Por tanto, de la segunda de estas últimas ecuaciones se obtiene que:

$$(a^2 + b^2) \beta = 0.$$

Por tanto, $\beta = 0$ y $\alpha = 1$. Esto es $\mathbf{1} = (1, 0)$.

iii) Se verá ahora que para toda $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ existe $\mathbf{p}' \in \mathfrak{R}^2$, tal que $\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}' = \mathbf{p}' \otimes \mathbf{p} = \mathbf{1}$. En efecto, siendo $\mathbf{p} = (a, b)$ y $\mathbf{p}' = (\alpha, \beta)$, entonces,

$$\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (1, 0).$$

Por tanto,

$$a\alpha - b\beta = 1 \quad ; \quad a\beta + b\alpha = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene primeramente que,

$$\alpha = \frac{1}{a} (1 + b\beta) \quad ; \quad a\beta + \frac{b}{a} (1 + b\beta) = 0.$$

Esto es, $(a^2 + b^2)\beta = -b$, equivalentemente $\beta = -\frac{b}{a^2 + b^2}$. Además, $\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2}$.

Por tanto, el elemento inverso multiplicativo de $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$, está dado por:

$$\mathbf{p}' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

iv) Sean ahora $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$, y $\mathbf{r} = (c, d) \in \mathfrak{R}^2$, entonces las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$1) \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r}$$

$$2) (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a, b) \otimes ((\alpha, \beta) \oplus (c, d)) = (a, b) \otimes (\alpha + c, \beta + d) \\ &= (a(\alpha+c) - b(\beta + d), a(\beta + d) + b(\alpha+c)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a\alpha + ac - b\beta - bd, a\beta + ad + b\alpha + bc) \\
 &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (ac - bd, ad + bc) \\
 &= (a, b) * (\alpha, \beta) \oplus (a, b) \otimes (c, d) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 2) \quad (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} &= ((a, b) \oplus (\alpha, \beta)) \otimes (c, d) \\
 &= (a + \alpha, b + \beta) \otimes (c, d) \\
 &= ((a + \alpha)c - (b + \beta)d, (a + \alpha)d + (b + \beta)c) \\
 &= (ac + \alpha c - bd - \beta d, ad + \alpha d + bc + \beta c) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \\
 &= (a, b) * (c, d) \oplus (\alpha, \beta) \otimes (c, d) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}
 \end{aligned}$$



Es igualmente bien conocido que la operación $\bullet : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida por:

$$\begin{aligned}
 \alpha \bullet (a, b) &= (\alpha a, \alpha b) \\
 \forall \alpha \in \mathfrak{R}, (a, b) &\in \mathfrak{R}^2,
 \end{aligned}$$

es una multiplicación escalar y por consecuencia \mathfrak{R}^2 es un espacio vectorial real. Además con esta multiplicación escalar el inverso multiplicativo de $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{\mathbf{p}},$$

donde el elemento $\bar{\mathbf{p}} = (a, -b) \in \mathfrak{R}^2$ es llamado el conjugado de $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$.



Es también bien conocido, que la transformación $\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida, siendo $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$, por:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a\alpha + b\beta,$$

es un producto interno en \mathfrak{R}^2 , de tal suerte que el conjunto $\mathcal{C} = (\mathfrak{R}^2, \oplus, \otimes, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno y la función $\|\bullet\|: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por:

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2}$$

$$\forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2,$$

es una norma, por tanto \mathcal{C} es un espacio vectorial normado, y sus elementos son llamados comúnmente números complejos.



Observación 1. Se observa que al tomar en cuenta la definición de la operación aditiva, el elemento $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathcal{C}$ puede expresarse como la suma siguiente:

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus (0, b).$$

Es decir, al definir los subespacios

$$\mathcal{C}_R = \{(a, 0) : a \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^2 \quad ; \quad \mathcal{C}_V = \{(0, b) : b \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^2,$$

del espacio vectorial de números complejos, éste puede expresarse mediante la siguiente suma directa de subespacios:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_R \dot{\times} \mathcal{C}_V \equiv \{\mathbf{p} \in \mathcal{C} : \mathbf{p} = \mathbf{p}_R \oplus \mathbf{p}_V ; \mathbf{p}_R \in \mathcal{C}_R, \mathbf{p}_V \in \mathcal{C}_V\} .$$

También al definir los isomorfismos $T_R: \mathcal{C}_R \rightarrow \mathfrak{R}; T_V: \mathcal{C}_V \rightarrow \mathfrak{R}$ por:

$$T_R(a,0) = a \quad ; \quad T_V(0,b) = b,$$

y, siendo $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathcal{C}$, entonces,

$$\mathbf{p} = T_R^{-1}(a) \oplus T_V^{-1}(b).$$

Al observar finalmente que, siendo $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$,

$$\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} = 2(a\alpha + b\beta, 0),$$

el producto interno de los elementos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2$ puede expresarse en la siguiente forma:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \equiv \frac{1}{2} T_R \{ \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} \} .$$



Observación 2. Obsérvese que el elemento $\underline{e}_2 = (0, 1) \in \mathfrak{R}^2$ de la base canónica, satisface que:

$$i^2 = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 = (0,1) \otimes (0,1) = (-1,0) \equiv T_{\mathbb{R}}^{-1}(-1).$$

Además, siendo $\mathbf{p} = (a, b)$, entonces,

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus b\underline{e}_2 = T_{\mathbb{R}}^{-1}(a) \oplus b\underline{e}_2.$$

Estas dos últimas expresiones han sido utilizadas para interpretar los números complejos como la suma de una parte real, más una parte imaginaria. En realidad el número imaginario i , comúnmente utilizado en el álgebra compleja, es el vector \underline{e}_2 de la base canónica y la representación algebraicamente correcta de la pareja $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, está dada por la última ecuación de esta observación.

2. Representación paramétrica de la rotación usual

Se construirá con la operación $*$: $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, estudiada anteriormente, una transformación lineal $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, con $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ fijo, que preserva el producto interno y cuya matriz con respecto a la base canónica posea determinante positivo, con lo cual dicha transformación de parámetro $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$, es una rotación. Sea $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$, fijo definida por:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \tag{1}$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2.$$

Las propiedades de la transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definida anteriormente se resumen en los resultados siguientes.

Teorema 2. La transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida en la ecuación (1) es lineal y ortogonal de determinante positivo.

Demostración: En efecto, siendo $\mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$, y de acuerdo con la distributividad de la operación $*$: $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{s}\} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} \otimes \mathbf{s}\} \\ &= \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho(\mathbf{p}, \mathbf{s}), \end{aligned}$$

también, $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} \otimes (\alpha \bullet \mathbf{q})\} \\ &= \frac{\alpha}{\|\mathbf{p}\|} \bullet \{\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\} = \alpha \bullet \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Además, $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es ortogonal, pues:

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \overline{\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \otimes \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \rho(\overline{\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}}) \otimes \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{Tr} \{ \overline{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})} \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) \oplus \overline{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{r})} \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{Tr} \{ \bar{\mathbf{q}} (\bar{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{p}) \otimes \mathbf{r} \oplus \bar{\mathbf{r}} \otimes (\bar{\mathbf{p}} \otimes \mathbf{p}) \otimes \mathbf{q} \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \bar{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{r} \oplus \bar{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{q} \} = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.$$

Se demostrará finalmente que el determinante de la transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es positivo, en efecto, siendo $B = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathfrak{R}^2$ la base canónica en \mathfrak{R}^2 , la matriz de $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ con respecto a esta base resulta ser,

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pues,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (1, 0) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) \\ \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_2) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (0, 1) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-b, a). \end{aligned}$$

El resultado buscado se obtiene al observar que $\det M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = 1$.



Teorema 3. La transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = \{ \tilde{T}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2: \tilde{T} \text{ es lineal} \}$, puede ser representada en la forma siguiente:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ a \tilde{\mathbf{I}} + b \tilde{\mathbf{W}} \} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ b \tilde{\mathbf{W}} - a \tilde{\mathbf{W}}^2 \},$$

donde $\tilde{\mathbf{I}} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es la transformación identidad y $\tilde{\mathbf{W}} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ está dado por:

$$\tilde{\mathbf{W}} = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$$

Demostración. En efecto, se observa que:

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I} + b \mathbf{W}\},$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y la matriz antisimétrica \mathbf{W} está dada por:

$$\mathbf{W} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda igualdad del teorema se obtiene al observar que:

$$\mathbf{W}^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -\mathbf{I}.$$

■

La parte antisimétrica $\tilde{\mathbf{W}} \in A(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = \{\tilde{\mathbf{B}} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2 : \tilde{\mathbf{B}} = -\tilde{\mathbf{B}}^T\}$ del teorema anterior, satisface el siguiente resultado:

Teorema 4. La transformación $\tilde{\mathbf{W}} \in A(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ es tal que

$$\tilde{\mathbf{W}}^{2n-1} = (-1)^{n-1} \tilde{\mathbf{W}} ; \quad \tilde{\mathbf{W}}^{2n} = (-1)^{n-1} \tilde{\mathbf{W}}^2 ; \quad n = 2,3,4,\dots$$

Demostración. Para demostrar este teorema se procederá por inducción, mostrando primeramente que para $n = 2$ el resultado es satisfecho. En efecto,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}^3 &= \tilde{\mathbf{W}}^2 \cdot \tilde{\mathbf{W}} = -\tilde{\mathbf{I}} \cdot \tilde{\mathbf{W}} \equiv -\tilde{\mathbf{W}} \\ \tilde{\mathbf{W}}^4 &= \tilde{\mathbf{W}}^3 \cdot \tilde{\mathbf{W}} = -\tilde{\mathbf{W}} \cdot \tilde{\mathbf{W}} = -\tilde{\mathbf{W}}^2, \end{aligned}$$

por tanto para $n = 2$, el resultado es obtenido. Supóngase ahora que para $n-1$ el resultado se satisface, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}^{2n-1} &= \tilde{\mathbf{W}}^{2n-2} \cdot \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{W}}^{2(n-1)} \cdot \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{W}}^{2(n-1)-1} \cdot \tilde{\mathbf{W}}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \tilde{\mathbf{W}} \cdot \tilde{\mathbf{W}}^2 = (-1)^{n-2} \tilde{\mathbf{W}}^3 = -(-1)^{n-2} \tilde{\mathbf{W}} \\ &= (-1)^{n-1} \tilde{\mathbf{W}}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}^{2n} &= \tilde{\mathbf{W}}^{2n-2} \cdot \tilde{\mathbf{W}}^2 = \tilde{\mathbf{W}}^{2(n-1)} \cdot \tilde{\mathbf{W}}^2 = (-1)^{n-2} \tilde{\mathbf{W}}^2 \cdot \tilde{\mathbf{W}}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \tilde{\mathbf{W}}^4 = (-1)^{n-2} (-1) \tilde{\mathbf{W}}^2 = (-1)^{n-1} \tilde{\mathbf{W}}^2. \end{aligned}$$

Apéndice B

Código del programa de simulación

```
'banderas de estado de solucion inversa de cadenas cinematicas
```

```
Dim banderacc1, banderacc2 As Boolean
```

```
Dim tetha1, tetha3 As Single
```

```
Dim Xsol, Ysol As Single
```

```
Dim incremento As Integer
```

```
'aplica nuevas cordenada para modelar su posicion
```

```
Private Sub aplicar_Click()
```

```
    'Nueva orientacion
```

```
    cinematicadirecta Int(Trim(Text4.Text)), Int(Trim(Text5.Text))
```

```
End Sub
```

```
Private Sub Form_Load()
```

```
'pocion Home de refrencia Borrar>rango de 307, 112, 238
```

```
    Text4.Text = "279"
```

```
    Text5.Text = "269"
```

```
    cinematicadirecta 279, 269
```

```
End Sub
```

```
'sale de la ventana de modelacion de posicion
```

```
Private Sub salir_Click()
```

```
Unload Me
```

```
End Sub
```

```
'Determinacion de la pocion de la cinematica directa del robot
```

```
Public Sub cinematicadirecta(angulo1 As Single, angulo3 As Single)
```

```
'aqui me quede
```

```
'definicion de angulos temporales
```

```
Dim angulot1 As Single
```

```
Dim angulot2 As Single
```

```
Dim angulot3 As Single
```

```
Dim angulot4 As Single
```

```
'definicion de los elementos temporales de solucion
```

```
Dim e36(1) As Single
```

```
Dim e39(1) As Single
```

```
Dim epot(1) As Single
```

```
Dim tem(1) As Single
```

```
Dim LL36t(1) As Single
```

```
Dim LL39t(1) As Single
```

```
Dim solucion(1) As Single
```

```
Dim incremento As Single
```

```
'Tolerancia
```

```
rango = 10
```

```
'base de referencia
```

```
e1(0) = 1
```

```
e1(1) = 0
```

'definicion de los vectores que componen al robot

Lpot = 400

L1 = Lpot * 2

L2 = L1

L3 = L1

L4 = L1

L = 2 * L1

'Modelo referido a P1

p1(0) = 0

p1(1) = 0

'dato que depende de la resolucion del actuador mecanico del sistema

incremento = 0.9

'Formulación del problema DADOS:

tetha1 = angulo1

tetha3 = angulo3

'base de referencia

e1(0) = 1

e1(1) = 0

'determinacion de la orientacion del eslabon activo CC1

'determinación de la tierra de cc1

L17(0) = -1 * L * Cos(GtoR(60))

$$L17(1) = L * \text{Sin}(\text{GtoR}(60))$$

'Modelo referido a P1

$$P(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$$

$$P(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$$

'determinacion de las bases moviles

$$e11(0) = \text{ropq}(P(), e1()).x(0)$$

$$e11(1) = \text{ropq}(P(), e1()).x(1)$$

'determinacion de vector de L1

$$L11(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$$

$$L11(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$$

'determinacion de la orientacion del eslabon activo de CC2

'determinación de la tierra de cc2

$$L14(0) = L * \text{Cos}(\text{GtoR}(60))$$

$$L14(1) = L * \text{Sin}(\text{GtoR}(60))$$

'derterminacion de la orientaciòn del vector

$$R(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo3}))$$

$$R(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo3}))$$

'determinacion de las bases moviles

$$e13(0) = \text{ropq}(R(), e1()).x(0)$$

$$e13(1) = \text{ropq}(R(), e1()).x(1)$$

'determinacion de vector de L1

$$L33(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$$

$$L33(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$$

'***** aqui me quede *****

'formulacion de la ecuacion de lazo $L17+L11+L22- L14+L33+L44=0$

'Determinacion del vector L2 temporal

For angulot1 = 360 To 0 Step -1 * incremento

Q(0) = Cos(GtoR(angulot1))

Q(1) = Sin(GtoR(angulot1))

e12(0) = ropq(Q(), e1()).x(0)

e12(1) = ropq(Q(), e1()).x(1)

LL2t(0) = Int(L2 * e12(0))

LL2t(1) = Int(L2 * e12(1))

'Determinacion del vector L4 temporal

For angulot2 = 0 To 360 Step incremento

S(0) = Cos(GtoR(angulot2))

S(1) = Sin(GtoR(angulot2))

e14(0) = ropq(S(), e1()).x(0)

e14(1) = ropq(S(), e1()).x(1)

LL4t(0) = Int(L4 * e14(0))

LL4t(1) = Int(L4 * e14(1))

' aqui me quede en esta

'Verificaciòn de la solucion de la ecuacion L11+L22-

(L14+L33+L44)=0

solucion(0) = L17(0) + L11(0) + LL2t(0) - (L14(0) + L33(0) +
LL4t(0))

solucion(1) = L17(1) + L11(1) + LL2t(1) - (L14(1) + L33(1) +
LL4t(1))

If (solucion(0) + rango > 0 And solucion(1) + rango > 0) And
(solucion(0) - rango < 0 And solucion(1) - rango < 0) Then

'asignacion de cordenadas resultantes

Xsol = L17(0) + L11(0) + LL2t(0)

Ysol = L17(1) + L11(1) + LL2t(1)

```

'determinacion de las rotaciones de los eslabones
conducidos

tetha2 = angulot1
tetha4 = angulot2
'determinacion de los vectores conducidos
L22(0) = Int(L2 * e12(0))
L22(1) = Int(L2 * e12(1))
L44(0) = Int(L4 * e14(0))
L44(1) = Int(L4 * e14(1))

'*****
*****

'Se verifica que cumpla con condicion de los cuadrados
Q(),S(),U() Y V()
If ((Q(0) * Q(0) + Q(1) * Q(1) = 1) And (S(0) * S(0) +
S(1) * S(1) = 1)) Then
    Graficarobot
    Exit Sub
End If
End If

Next
Next

MsgBox ("no se encontro soluciòn")
End Sub

'Grafica el robot en el la caja de dibujo
Private Sub Graficarobot()
'Variables temporales para el sistema de la pantalla

```

Dim ofsetx As Single

Dim ofsety As Single

Dim Rtpot(1) As Single

'ofset en x+2500 ofset en y -2100, centrado referido a CC1

ofsetx = 2500

ofsety = 1500

'adecuacion al sistema en de pantalla

Rtpot(0) = Rpot(0) + ofsetx

Rtpot(1) = Rpot(1) + ofsety

'caracteristicas de la figura del robot

Line9.BorderWidth = 6

Line10.BorderWidth = 6

Line11.BorderWidth = 6

Line12.BorderWidth = 6

Line9.BorderColor = vbGreen

Line10.BorderColor = vbRed

Line11.BorderColor = vbGreen

Line12.BorderColor = vbRed

'graficacion de CC1

'vector L1

Line11.X1 = ofsetx + L17(0)

Line11.Y1 = ofsety + L17(1)

Line11.X2 = ofsetx + L17(0) + L11(0)

Line11.Y2 = ofsety + L17(1) + L11(1)

'vector L2

Line12.X1 = ofsetx + L17(0) + L11(0)

```
Line12.Y1 = ofsety + L17(1) + L11(1)
Line12.X2 = ofsetx + L17(0) + L11(0) + L22(0)
Line12.Y2 = ofsety + L17(1) + L11(1) + L22(1)
```

```
'graficacion de CC2
```

```
'vector L3
```

```
Line9.X1 = ofsetx + L14(0)
Line9.Y1 = ofsety + L14(1)
Line9.X2 = ofsetx + L14(0) + L33(0)
Line9.Y2 = ofsety + L14(1) + L33(1)
```

```
'vector L4
```

```
Line10.X1 = ofsetx + L14(0) + L33(0)
Line10.Y1 = ofsety + L14(1) + L33(1)
Line10.X2 = ofsetx + L14(0) + L33(0) + L44(0)
Line10.Y2 = ofsety + L14(1) + L33(1) + L44(1)
```

```
'valores de los controles
```

```
Label2.Caption = Int(Xsol)
Label18.Caption = Int(Ysol)
```

```
'valores de los angulos de las cadena cinematica
```

```
Label13.Caption = Int(tetha1)
Label16.Caption = Int(tetha2)
Label14.Caption = Int(tetha3)
Label17.Caption = Int(tetha4)
End Sub
```

Referencias

- ¹ Cohen M., Nagel E. Introducción a la lógica y al método científico: Lógica aplicada y método científico I. Harcour, Brace World Inc., Argentina, 1961.
- ² Cohen M., Nagel E. Introducción a la lógica y al método científico: Lógica aplicada y método científico II. Harcour, Brace World Inc., Argentina, 1961.
- ³ Parallel Kinematic Machines: Theoretical Aspects and Industrial Requirements, C. R. Boër, L. Molinari-Tosatti, and K.S. Smith (Eds), Springer-Verlag, 1999.
- ⁴ Reyes, Luis. "Sobre la parametrización de las Rotaciones y Reflexiones de Multicuerpos Rígidos en el plano". Estudios Ocasionales. Universidad Anahuac del Sur. ISBN 968-64-02-08-X (1998).
- ⁵ Jiménez L. Eusebio. "Sobre la parametrización de las Rotaciones y Reflexiones de Multicuerpos Rígidos en el plano: Modelación Cinemática de un robot de dos grados de libertad". Informe Interno de Investigación No. DEPFI-SME-MME-DMEC-CDMR-01-2002. UNAM, Facultad de Ingeniería (2002).

- ⁶ Reyes Ávila Luis. Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies. Partie 1: Le Cadre Theorique. Rapport de Recherche INRIA Rocquencourt. France, 1990.
- ⁷ Pérez C. J. Alejandro. "Caracterización y prueba de las secuencias simultáneas de un robot paralelo experimental tipo RRR". Tesis de grado de Maestro en Ingeniería Mecánica. DEPMI, UNAM (2001).
- ⁸ Ojeda E. Pedro A., "Modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo planar tipo rrr usando una variante de los números complejos". Tesis de licenciatura en Ingeniería Mecánica Eléctrica. FES Aragón, UNAM (2003).
- ⁹ Vega M. "Simulación Computacional de cadenas cinemáticas abiertas tridimensionales". Tesis de grado de Maestro en Ingeniería Mecánica. DEPMI, UNAM (2001).
- ¹⁰ Clavel, R., "Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté," Ph.D. Thesis, EPFL, Lausanne, Switzerland, 1991.
- ¹¹ Clavel, R., "Device for the Movement and Positioning of an Element in Space," US Patent No. 4,976,582, December 11, 1990.
- ¹² "Demaurex change de mains mais reste suisse," ROBAUT, J'automatise, No. 8, January-February 2000.
- ¹³ Miller, K., "Model-Based Control of DELTA Direct Drive Parallel Robot; Trajectory Tracking Experiments," 26th International Symposium of

- Industrial Robots (ISIR'95), Singapore, pp. 491-496, October 4-6, 1995.
- ¹⁴ Vischer, P., and Clavel, R., "Kinematic Calibration of the Parallel Delta Robot," *Robotica*, Vol. 16, pp. 207-218, 1998.
- ¹⁵ Miller, K., "Modeling of Dynamics and Model-Based Control of DELTA Direct-Drive Parallel Robot," *Journal of Robotics and Mechatronics*, Vol. 17, No. 4, pp. 344-352, 1995.
- ¹⁶ Miller, K., "On Accuracy and Computational Efficiency of DELTA Direct Drive Robot Dynamics Mode," *International Symposium on Microsystems, Intelligent Materials and Robots*, Sendai, Japan, pp. 568-571, September 27-29, 1995.
- ¹⁷ Clavel, R. 1988. DELTA: A fast robot with parallel geometry . In *Proceedings of the 18th International Symposium on Industrial Robots*, Sydney, Australia, 91–100.
- ¹⁸ Neugebauer R. *Development Methods and Application Experience of Parallel Kinematics*. Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau (Germany) 2002.
- ¹⁹ Khalil W., Dombre E.: *Modélisation identification et commande des robots*, Collection Robotique, Hermes, Paris 1999.
- ²⁰ Clavel R.: *Device for displacing and positioning an element in space*. Patent EP0250470 B1, 07.01.1988.

- ²¹ Baradat C. and all. : Artefact Based Calibration of Parallel Kinematics Machines. The 35th International Symposium on Robotics (ISR-2004), March 23-26, Paris (to be published).
- ²² Wolfram Stephen. "Mathematica: A System for doing Mathematics by computer". Addison-Wesley, 1992.
- ²³ S. Wolfram. The Mathematica Book, Cambridge University Press. Cambridge, UK.
- ²⁴ <http://www.parallemic.org/Reviews/Review002.html>
- ²⁵ <http://www.parallemic.org/WhosWho/Companies/Profile001.html>
- ²⁶ <http://www.roboticonline.com/public/articles/index.cfm?cat=315>
- ²⁷ http://www.csem.ch/detailed/a_611-microdelta.htm
- ²⁸ <http://lsro.epfl.ch/prd/applications.php>
- ²⁹ http://www-lms.univ-poitiers.fr/robot_old/adelta.html
- ³⁰ <http://ijr.sagepub.com/cgi/content/refs/23/1/89>
- ³¹ <http://www-sop.inria.fr/coprin/equipe/merlet/Archi/node7.html>
- ³² http://www.cimetrix.com/launch.cfm?file_load=SIGAgreement.html
- ³³ http://www.mech.uwa.edu.au/~kmiller/NuwarWebPages-Zeike99/Web_Pages/Literature1.html

- ³⁴ <http://www.roboticonline.com/public/articles/archivedetails.cfm?id=797>
- ³⁵ http://fluid.ippt.gov.pl/ictam04/text/sessions/docs/SM16/10553/SM16_10553.pdf
- ³⁶ <http://www.parallemic.org/Reviews/Review010.html>
- ³⁷ <http://www-sop.inria.fr/coprin/equipe/merlet/Archi/node16.html>
- ³⁸ <http://www.elekta.com/contentinternational.nsf>
- ³⁹ <http://www.srl-berlin.de/>
- ⁴⁰ <http://www.hexel.com/hexabot.htm>
- ⁴¹ <http://www.hia.rwth-aachen.de/research/cht/indexE.html>
- ⁴² http://www.physikinstrumente.com/newsletter/ausgaben_e/25/hexapod_operation_robot.html
- ⁴³ [http://www-sop.inria.fr/coprin/equipe/merlet/Archi/node19.html#goudali95\[Bibliography\]](http://www-sop.inria.fr/coprin/equipe/merlet/Archi/node19.html#goudali95[Bibliography])