



APUNTES  
DE PRINCIPIOS DE ENERGÉTICA

Rogelio González Oropeza  
Félix Núñez Orozco

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

1985





**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE INGENIERIA**

**APUNTES DE  
PRINCIPIOS DE ENERGETICA**

**ROGELIO GONZALEZ OROPEZA  
FELIX NUÑEZ OROZCO**

**DIVISION DE CIENCIAS BASICAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA**

**FI/DCB/85-003**

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES

RESEARCH REPORT

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS DEPARTMENT  
5720 S. UNIVERSITY AVE.  
CHICAGO, ILL. 60637

PHYSICS DEPARTMENT  
5720 S. UNIVERSITY AVE.  
CHICAGO, ILL. 60637

## P R O L O G O

El presente trabajo tiene como objetivo primordial que los alumnos de Principios de Energética cuenten con un material bibliográfico que se apegue al programa vigente, tanto en profundidad como en extensión.

Esperamos que también los profesores se beneficien con esta obra pues representa un elemento que los auxiliará en el desarrollo del curso, el cual, manejado convenientemente, les permitirá desarrollar sus exposiciones en forma dinámica y objetiva.

Esta nueva versión de los apuntes es el resultado de una revisión minuciosa de la versión original aparecida en 1982. En este trabajo se han tomado en cuenta las opiniones de profesores y alumnos, quienes han tenido la amabilidad de comunicar sus observaciones, comentarios y sugerencias a los autores.

Se ha procurado que la presentación de los temas sea clara y sencilla, sin renunciar por ello a la seriedad y el rigor que debe encontrarse en un texto universitario.

Para que el lector obtenga el máximo beneficio de este trabajo, se le recomienda que al leerlo trabaje los desarrollos algebraicos, las deducciones y los ejemplos resueltos en un cuaderno o en una hoja de papel. De esta manera podrá darse cuenta de las limitaciones o suposiciones que se hacen para lle-

gar a un resultado y será consciente de las situaciones en que una ecuación es válida. Actuando de esta manera, el lector dominará el contenido de la asignatura y se dará cuenta de un aumento en su habilidad para plantear y resolver problemas afines, que debe ser a final de cuentas, la meta de un buen ingeniero.

Estos apuntes no tienen la intención de ser un sustituto de los libros de texto; por el contrario, se desea que al despertar el interés por los temas mencionados el lector acuda a otros libros y fuentes bibliográficas donde encuentre un desarrollo más profundo.

Al final se presenta una lista de títulos que se han consultado para la elaboración de este escrito y que se recomiendan ampliamente.

Finalmente se desea invitar al lector a comunicar sus comentarios, observaciones, sugerencias o quejas a los autores, a través de la coordinación de Termodinámica de esta Facultad, con el fin de que estos apuntes se adecuen en lo posible a las necesidades de los estudiantes.

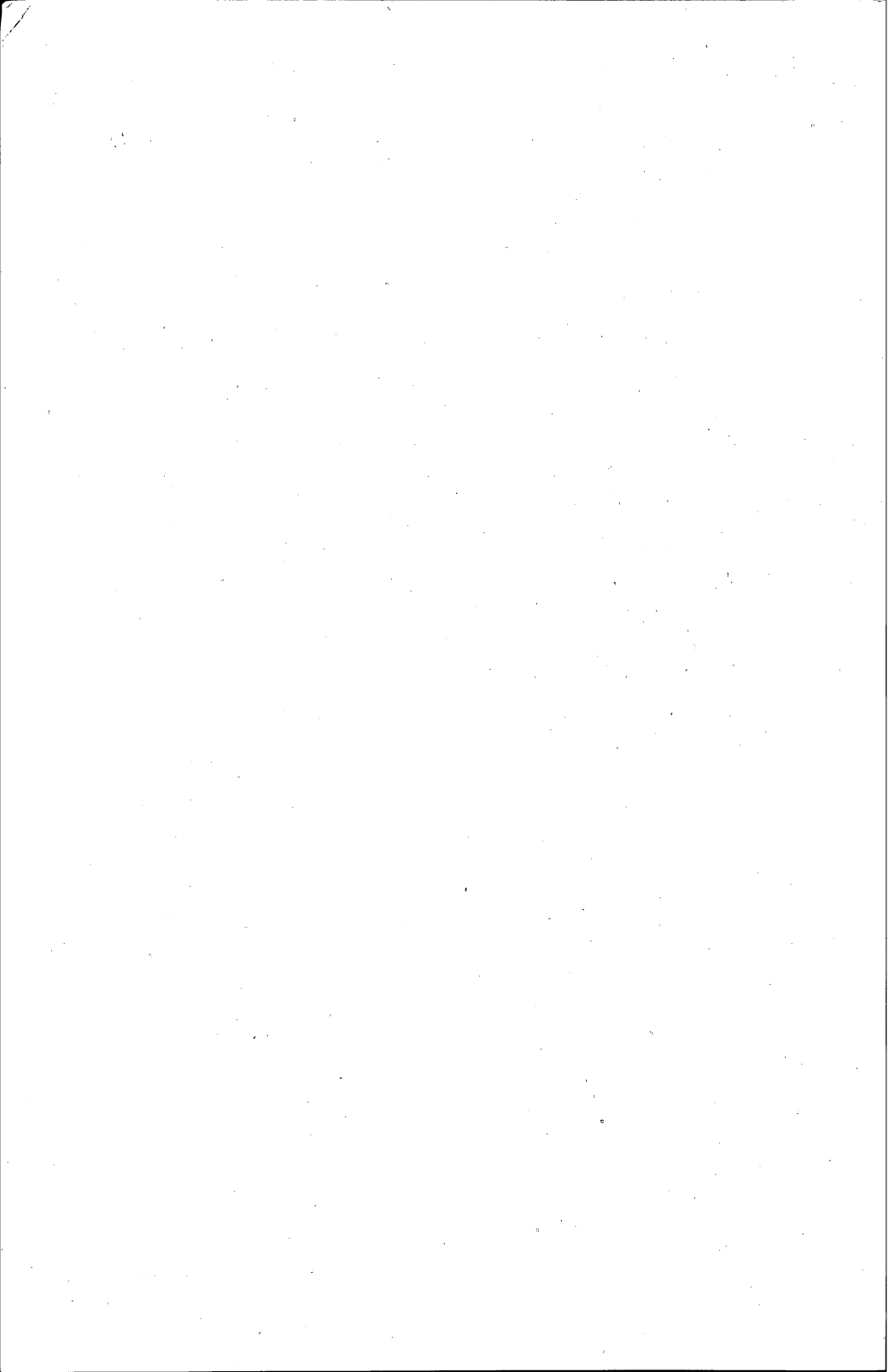
Los autores agradecen de antemano toda comunicación con los usuarios y ofrecen tomar en cuenta toda opinión que se les exprese.

Asimismo, agradecen profundamente los comentarios que han recibido hasta el momento y que han permitido la transformación de este trabajo, esperando cumplir satisfactoriamente con el fin para el que fue creado.

*Rogelio González Oropeza  
Félix Núñez Orozco  
Marzo de 1985.*

## CONTENIDO

I.	CONCEPTOS FUNDAMENTALES .....	1
II.	PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA .....	51
III.	SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA .....	121
IV.	CICLOS TERMODINÁMICOS .....	183
V.	ELECTROSTÁTICA .....	234
VI.	CIRCUITOS ELECTRICOS .....	280
VII.	MAGNÉTISMO .....	317
	BIBLIOGRAFÍA .....	360



# CAPITULO I

## CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En la Ingeniería y en la Física se estudian fenómenos que ocurren en la naturaleza. Estos fenómenos involucran distintas *magnitudes físicas* que difieren unas de otras por su carácter intrínseco. Por ejemplo, es evidente que un volumen es diferente a una distancia o a un intervalo de tiempo, aunque algún fenómeno natural relacione a estas magnitudes.

Además, la Ingeniería requiere de un conocimiento cuantitativo de los fenómenos naturales y de sus consecuencias para expresar sus resultados en forma unívoca: la Ingeniería entrega como respuesta valores numéricos. Son estos los que importan al cliente que ha recurrido al ingeniero. Jamás se da el caso que se construya una presa que requiera una cortina de altura "A", de grosor "G" y de superficie "S", sino que es la misión del ingeniero dar valores numéricos a estas magnitudes.

La manera de asociar valores numéricos con las magnitudes físicas conduce a la definición de los sistemas de unidades.

Un sistema de unidades es un conjunto de "valores arbitrarios" (o unidades) con los que se miden las magnitudes físicas. Es decir, mediante la comparación entre una "unidad arbitraria" y una magnitud física se le puede asignar a esta última un valor numérico.

En cada sistema de unidades se clasifica a las magnitudes físicas en dos grupos: las primarias y las secundarias.



Las *magnitudes primarias* se consideran fundamentales. Su medición se obtiene mediante una comparación directa con ciertos patrones convencionales, elegidos arbitrariamente.

El número que resulta de esta comparación recibe el nombre de la *medida* de la magnitud física, en términos de la *unidad fundamental* elegida en el sistema de unidades.

Las magnitudes físicas secundarias son aquellas que no se encuentran entre las escogidas como primarias. Su medición se obtiene mediante la aplicación de relaciones que involucran a las magnitudes primarias. El número que se asocia a las magnitudes físicas secundarias se expresa con *unidades derivadas*.

Los sistemas de unidades difieren unos de otros en tres aspectos: la elección del número de unidades fundamentales, la elección de la *naturaleza física* de las unidades fundamentales y la elección del "tamaño" de las unidades fundamentales.

El "tamaño" de las unidades fundamentales se obtiene principalmente de los sistemas "métrico" y "británico". Las unidades de los sistemas métricos se definen mediante convenios internacionales, mientras que las unidades de los sistemas británicos se relacionan con éstas mediante factores de conversión arbitrarios.

Con respecto a la naturaleza física de las unidades fundamentales, todos los sistemas incluyen una unidad de longitud y una de tiempo. Dependiendo de la elección de la tercera unidad, los sistemas se dividen

en absolutos (físicos) y gravitacionales (ingenieriles): en los primeros se escoge a la unidad de masa como fundamental, mientras que en los segundos la tercera unidad fundamental que se escoge es la fuerza. (Para ser precisos, lo que se escoge es una unidad de peso patrón).

Tomando en cuenta lo anterior, los sistemas de unidades que se manejan hoy en día son:

- a) El sistema CGS absoluto, con *tres* unidades fundamentales: el centímetro (cm), el gramo (g) y el segundo (s).
- b) El sistema MKSA absoluto, con *cuatro* unidades fundamentales: el metro (m), el kilogramo (kg), el segundo (s) y el ampere (A\*).
- c) El sistema internacional\*\* S. I., con *siete* unidades fundamentales: el metro (m), el kilogramo (kg), el segundo (s), el ampere (A), el kelvin (K), la candela (cd) y el mol (mol).
- d) El sistema métrico gravitacional con *tres* unidades fundamentales: el metro (m), el kilogramo fuerza ( $\text{kg}_f$  o  $\overline{\text{kg}}^+$ ) y el segundo (s).

\* Es un convenio internacional que los símbolos de las unidades bautizadas con los nombres de científicos notables se escriban con mayúsculas. Todos los otros símbolos se escriben con minúscula. En todos los casos se ha acordado escribir los símbolos sin punto final (m y no m.) y nunca se pluralizan (metros se abreviará m y no ms).

\*\* Systeme Internationale

+ En varios países europeos se emplea el nombre de kilopond (kp), para evitar las confusiones entre kg (para masa) y kg (para fuerza).

- e) El sistema británico absoluto, con *tres* unidades fundamentales: el pie (ft), la libra masa ( $lb_m$ ) y el segundo (s).
- f) El sistema británico gravitacional, con *tres* unidades fundamentales: el pie (ft), la libra fuerza ( $lb_f^{++}$ ) y el segundo (s).

Las unidades de estos sistemas se basan en tres patrones fundamentales, elegidos en convenciones internacionales: el metro patrón, el kilogramo patrón y el segundo.

El metro patrón se define como 1,650,763.73 veces la longitud de onda de la línea rojo-anaranjada del kriptón 86.

Las unidades de masa en los sistemas absolutos y las de fuerza en los sistemas gravitacionales se definen haciendo referencia a un bloque de metal (platino iridiado) llamado el kilogramo patrón. La intención original era que la masa de este bloque fuera igual a la masa de un decímetro cúbico de agua a 4°C y sometido a una presión de una atmósfera. Sin embargo, al avanzar las técnicas de medición se descubrió que el verdadero volumen que ocupa una masa de agua igual a la del kg patrón es - 1,000.028 dm<sup>3</sup>, por lo que la intención original ha fallado.

El *segundo* se definía como la 1/31,556,925.975 parte del año tropical 1900.0 .

++ En el caso de la  $lb_f$  no se tiene ningún nombre alternativo para evitar las confusiones entre la  $lb_f$  y  $lb_m$ .

En vista que las mediciones astronómicas del tiempo son complicadas, actualmente se define al segundo en términos de vibraciones atómicas. Según esta definición atómica, un segundo es la duración de 9,192,631,770 períodos de la radiación que corresponde a la transición entre dos niveles energéticos del estado fundamental del cesio 133 ( $\text{Cs}^{133}$ ).

Es curioso notar que la unidad fundamental de fuerza en los sistemas gravitacionales se defina haciendo referencia a un patrón que forma parte de otro sistema de unidades. Por ejemplo, el  $\text{kg}_f$  (kilopond) se define como la fuerza atractiva que la tierra ejerce sobre el kilogramo patrón cuando se le sitúa en un lugar en el que la aceleración gravitacional tiene el valor patrón de  $9.80665 \text{ m/s}^2$  \*.

Las unidades de temperatura y corriente eléctrica se discutirán en capítulos posteriores.

La manera de establecer las unidades en los sistemas británicos es mediante la definición de unos factores de conversión adecuados.

El pie (ft)\*\* se relaciona con el metro según:

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

\* A las constantes que se definen por convención y que son por tanto números exactos, se les subraya el último dígito.

\*\* Como estos sistemas de unidades se emplean en países angloparlantes los símbolos corresponden a esta lengua.

La libra masa se relaciona con el kilogramo según:

$$1 \text{ lb}_m = 0.45359237 \text{ kg}$$

El segundo es común a todos los sistemas de unidades.

Ahora que se ha visto al conjunto de los sistemas de unidades, se puede definir un término muy empleado en la literatura: el concepto de dimensión.

Se dice que todas las unidades para medir una determinada magnitud física tienen la misma dimensión. El concepto de dimensión proporciona un nombre a una clase de unidades. Por ejemplo, el centímetro, el pie y el metro miden una misma magnitud física y por lo tanto tienen la misma dimensión. A esta dimensión se le llama longitud y se le representa mediante el símbolo L.

De la misma manera, a los otros conjuntos de unidades se les puede asignar una dimensión, siendo el resultado que a las unidades fundamentales de cada sistema les corresponden dimensiones fundamentales.

En los sistemas absolutos las dimensiones fundamentales son L, M y T, mientras que en los gravitacionales son F, L y T.

A las magnitudes secundarias (o derivadas) se les mide en términos de unidades derivadas, las que a su vez se obtienen a partir de las unidades fundamentales de cada sistema mediante las mismas operaciones algebraicas que se emplean para valuar a las magnitudes físicas secundarias en términos de las magnitudes físicas fundamentales.

Estas operaciones algebraicas pueden ser, o bien una definición o bien una ley física. Considérese por ejemplo el caso de la aceleración; sus dimensiones se obtienen de la definición:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

en donde  $x$  indica un desplazamiento y  $t$  indica tiempo. En consecuencia, las dimensiones de la aceleración son:

$$[a] = LT^{-2}$$

Las unidades de la aceleración en el sistema internacional se obtienen de la misma expresión

$$\{a\} = \text{ms}^{-2}$$

En general, las definiciones de las magnitudes físicas derivadas involucran únicamente operaciones de multiplicación y división. Como estas operaciones se emplean repetidamente se tiene que los exponentes que surgen son números racionales.

Además, cuando se definen magnitudes derivadas no se emplea la adición ni la sustracción.

Por tanto, las dimensiones de una magnitud física derivada se expresan como un monomio de las dimensiones fundamentales, cada una de las cuales puede encontrarse elevada a un exponente positivo, cero o negativo. Por ejemplo, todas las dimensiones derivadas en un sistema absoluto tienen la forma.

$$M^a L^b T^c$$

y todas las dimensiones derivadas en un sistema gravitacional tienen la forma

$$F^d L^e T^f$$

donde los exponentes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  y  $f$  son números racionales.

*Se debe tener presente que en la Física y en la Ingeniería todas las ecuaciones que involucran magnitudes físicas deben ser consistentes tanto en unidades como en dimensiones.*

Cuando se hacen operaciones con las magnitudes físicas se debe recordar que éstas se representan mediante el producto de un factor numérico (la medida de la magnitud física) y la unidad en términos de la cual se ha medido.

Estos lineamientos se aplicarán posteriormente, cuando se examinen ejemplos de conversión de unidades.

#### CONCEPTOS GENERALES

En esta sección daremos las definiciones de algunos conceptos con los que el lector se ha encontrado en los cursos precedentes de física.

La masa es un concepto del que todos tenemos una idea intuitiva: "es la cantidad de materia que tiene un cuerpo". Sin embargo, esta es una definición circular pues cabe preguntarse: ¿Qué es la materia?

En lugar de pretender hallar una respuesta a esta pregunta, y

debido a que en este curso se seguirá una orientación macroscópica, se -  
prefiere dar una definición operativa de la masa.

*La masa es la propiedad de un cuerpo que se puede determinar colo-  
cándolo en uno de los platillos de una balanza, al tiempo que en el otro  
platillo se colocan múltiplos o submúltiplos del kilogramo patrón.*

La masa es una característica de cada cuerpo que determina su  
comportamiento cuando interactúa con otros cuerpos y que es independiente  
de su ubicación.

Resulta evidente de la definición operativa que la masa se mi  
de en kg en el S. I.. En las condiciones que interesan para los fines -  
del presente curso, se despreciarán los efectos relativísticos que pu-  
dieran afectar el valor de la masa de un cuerpo, pues todas las velocida  
des que se consideran serán mucho menores que la velocidad de la luz.

Para definir lo que es fuerza, resulta de utilidad definir al  
momento (o cantidad de movimiento) como el producto de la velocidad de -  
un cuerpo por su masa:  $\bar{p} = m \bar{v}$ .

Ahora consideraremos las leyes de la mecánica de Newton. La -  
ley de la inercia dice que: "Una partícula libre se mueve siempre con mo  
mento constante". Se entiende por partícula libre aquella que no inter-  
actúa con otras partículas (la interacción entre las partículas es la -  
causa de la alteración de sus movimientos respectivos).

Es un hecho experimental que la cantidad de movimiento de un -



conjunto de partículas se mantiene constante. Si dos partículas o cuerpos interactúan, su interacción será tal que si una disminuye su cantidad de movimiento, la otra lo aumenta en una proporción exactamente equivalente para que la suma de ambas magnitudes sea constante.

Las interacciones entre los cuerpos tienen como consecuencia un cambio en la cantidad de movimiento. Estas interacciones se describen adecuadamente con un concepto denominado fuerza.

El cambio del momento de una partícula con respecto al tiempo es la magnitud que llamamos fuerza ( $\bar{F}$ ).

$$\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

ya que el momento se define como  $m\bar{v}$ ,

$$\bar{F} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}$$

En el caso en que la masa del cuerpo sea constante

$$\bar{F} = m \frac{d(\bar{v})}{dt}$$

Al recordar la definición de la aceleración queda:

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

Esta es la expresión más conocida de la Segunda Ley de Newton. De esta expresión se ve que en el S. I. la fuerza tiene dimensiones de

$$[F] = M L T^{-2}$$

y unidades de

$$\{F\} = \text{kg ms}^{-2}$$

a esta agrupación de unidades se le llama newton (N).

En algunas ramas de la física conviene distinguir entre las - fuerzas que **afectan** a un cuerpo según su modo de actuar; se llaman *fuerzas de cuerpo* aquellas que resultan al introducir el cuerpo en un campo externo (centrífugo, gravitacional, eléctrico o magnético). Las *fuerzas de superficie* son aquellas que se aplican "directamente" sobre el cuerpo en cuestión, digamos por contacto físico directo (empujar, jalar, - etc.).

En la primera parte del curso se considera una sola fuerza de cuerpo: el peso. De acuerdo con la expresión de Newton, el peso  $F_g$  es:

$$F_g = mg$$

En donde  $g$  es la aceleración con que la tierra atrae al cuerpo. El valor del peso de un cuerpo varía, pues  $g$  no posee un valor - constante, sino que es una función de la posición. Esta es una desventaja que tiene la elección de peso (fuerza) como dimensión fundamental.

En el S. I. sus unidades son:

$$\{F_g\} = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$$

Cuando se divide el peso de un cuerpo entre el volumen que ocupa, resulta una nueva magnitud física llamada peso específico ( $\gamma$ ).

$$\gamma = \frac{F}{V}$$

En el S. I. sus dimensiones son:

$$[\gamma] = \text{MLT}^{-2}/\text{L}^3 = \text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$$

y sus unidades son:

$$\{\gamma\} = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Cuando se expresa el cociente del volumen que ocupa un cuerpo entre su masa, se define la propiedad llamada volumen específico:

$$v = \frac{V}{m}$$

sus dimensiones en el S. I. son:

$$[v] = \text{L}^3 \text{M}^{-1}$$

y sus unidades en el S. I. son:

$$\{v\} = \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

El volumen específico es una propiedad particularmente importante en el estudio de la Termodinámica; sin embargo, en otras ramas de la Física (en la mecánica de fluidos por, ejemplo) se prefiere el manejo de una propiedad que se define como el inverso del volumen específico, - la densidad. Su símbolo es la letra griega  $\rho$  :

$$\rho = \frac{1}{v}$$

sus dimensiones en el S. I. son:

$$[\rho] = M L^{-3}$$

mientras que sus unidades en el S. I. son:

$$\{\rho\} = \text{kg m}^{-3}$$

En algunas ramas de la Ingeniería resulta conveniente definir el cociente de la densidad de una sustancia entre la densidad de otra sustancia de referencia. En general, la densidad relativa de una sustancia se denota con la letra griega ( $\delta$ ) y se define como la densidad de la sustancia en cuestión (a las condiciones en que se encuentre) dividida entre la densidad del agua a 4°C y una atm de presión\*:

$$\delta = \frac{\rho_{\text{sust.}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}$$

Como se ha dicho antes, las operaciones algebraicas operan sobre las unidades y las dimensiones así como operan sobre los números. Entonces, la densidad relativa resulta ser una propiedad adimensional.

Cuando se tiene la acción de fuerzas de superficie sobre un cuerpo, se puede definir el esfuerzo como el cociente de la fuerza entre el área sobre la que actúa.

\* En algunas ocasiones se escoge otro valor para la temperatura del agua. Por ejemplo, se puede elegir 20°C o aún la misma temperatura a la que se encuentre la sustancia de interés.

Cuando la fuerza actúa perpendicularmente sobre el área, el esfuerzo se llama esfuerzo normal o presión. De esta definición se ve que la presión tiene las dimensiones en el S. I. :

$$[P] = \frac{ma}{A}$$

$$[P] = M L T^{-2} L^{-2} = M L^{-1} T^{-2}$$

y las unidades en el S. I.

$$\{P\} = \frac{N}{m^2}$$

A esta unidad derivada se le llama pascal (Pa). Como el metro cuadrado es un área muy grande, el pascal es una unidad inconvenientemente pequeña. Por ello se prefiere emplear un múltiplo llamado bar - (se usa también otro múltiplo del Pa, el megapascal, MPa).

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ M Pa} = 10^6 \text{ Pa}$$

Cuando se estudia la distribución de la presión en los fluidos se encuentran resultados muy interesantes. Véase en la figura una pequeña porción de algún fluido de densidad  $\rho$  en reposo, de tamaño  $\Delta_x$   $\Delta_y$   $\Delta_z$  y  $\Delta_1$ . Por la simetría de la figura,  $P_y$  es la misma en ambas caras.

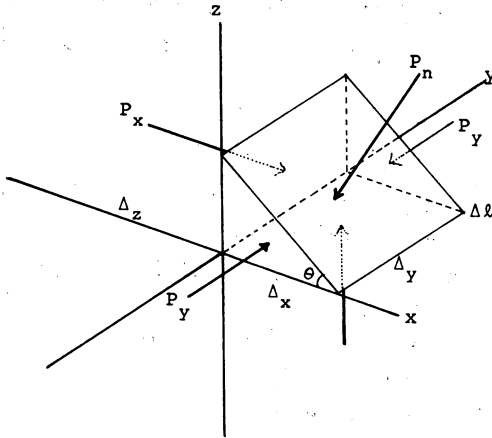


Fig. 1.1

Considérese para mayor generalidad que los valores de las presiones  $P_x$ ,  $P_z$  y  $P_n$  son distintos entre sí y que el peso del elemento del fluido está dado por  $\rho g(\Delta x \Delta y \Delta z)/2$ . Debido a la suposición de equilibrio se debe cumplir que

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_z = 0$$

para cada una se tiene:

$$\Sigma F_x = P_x \cdot \Delta y \Delta z - P_n \cdot \Delta y \Delta l \text{sen} \theta = 0$$

$$\Sigma F_z = P_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y - P_n \cdot \Delta y \cdot \Delta l \cdot \text{cos} \theta - \rho \cdot g \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z / 2$$

usando trigonometría se comprueba que:

$$\Delta x = \Delta l \cdot \text{cos} \theta \quad ; \quad \Delta z = \Delta l \cdot \text{sen} \theta$$

al sustituir a  $\Delta z$  en la suma de fuerzas ~~en  $\Delta x$~~  en la suma de fuerzas en  $z$  queda

$$1) \quad P_x - P_n = 0$$

$$2) \quad P_z - P_n - \rho \cdot g \cdot \Delta z / 2 = 0$$

En el límite en que se considera  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  y  $\Delta l \rightarrow 0$  la porción del fluido se convierte en un punto y se tiene:

$$3) \quad P_x = P_n = P_z$$

(comportamiento isotrópico, igual en todas direcciones).

Estas tres últimas ecuaciones arrojan unos resultados muy importantes:

- 1) En un fluido en reposo no hay cambio de presión a lo largo de una línea horizontal. Esto quiere decir que *dentro de un fluido, a iguales alturas, iguales presiones.*
- 2) En un fluido en reposo hay una variación de la presión en la dirección vertical que es proporcional a la densidad, a la aceleración gravitacional y a la profundidad.
- 3) En un fluido en reposo la presión en un punto es independiente de la orientación.

Para observar cómo cambia la presión, considérese nuevamente una porción de fluido en equilibrio. Las componentes horizontales sobre el cubo de lado  $dz$  y área  $A$  no se toman en cuenta debido a la conclusión 1. Se considera que en la dirección vertical una variación en  $dz$

conduce a una variación en  $dp$  (debido a la conclusión 2).

La condición de equilibrio requiere que:

$$\Sigma F_z = 0 = - P_z A - dP_z A + \rho g A dz + P_z A$$

$$dP_z = \rho g dz$$

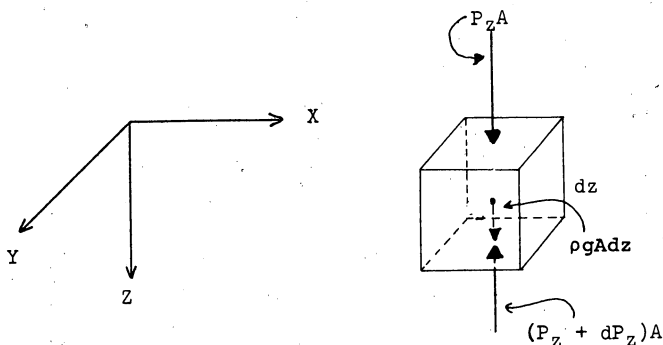


Fig.1.2

(la dirección de  $z$  va hacia el fondo del recipiente de tal manera que al aumentar  $z$ ,  $p$  va en sentido contrario).

Si se integra desde la superficie ( $z = 0$ ) donde la presión es  $P_0$  hasta una profundidad  $z$ , donde  $p_z = p$

$$\int_{P_0}^P dP_z = \int_{z=0}^z \rho g dz$$



Para el caso de un fluido con densidad constante

$$P - P_0 = \rho g z$$

De esta última expresión puede deducirse que la presión aumenta con la profundidad, un resultado que coincide con la experiencia.

Las ecuaciones que se han deducido en esta sección tienen una gran aplicación en la manometría.

La medición de la presión en una región determinada se puede hacer relativa a cualquiera de dos valores de referencia.

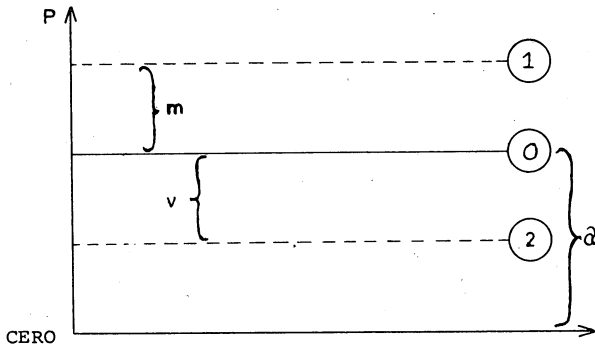


Fig.13

Si se mide con respecto a un vacío absoluto (a presión igual a cero) la lectura se denomina presión absoluta.

Si la medición es con respecto a la presión ambiental (llamada presión atmosférica o barométrica) se puede tener cualquiera de los dos casos que se señalan en la figura: la línea (1) representa una presión superior a la presión ambiental (0). Se le llama sobrepresión y su medida se representa por "m". La lectura m se llama presión manométrica.

La línea (2) representa una presión inferior a la presión ambiental (0). Se le llama presión de vacío y su medida se representa por "v". La lectura v se llama presión vacuométrica.

La relación entre estas presiones determinadas con respecto a la presión ambiental (que cambia día con día en una localidad determinada y que es diferente para posiciones distintas) y las presiones absolutas se observa claramente en la figura anterior:

$$P_{abs} (1) = a + m$$

$$P_{abs} (1) = P_{barométrica} + P_{manométrica}$$

para la presión de vacío

$$a = P_{abs} (2) + v$$

$$P_{abs} (2) = a - v$$

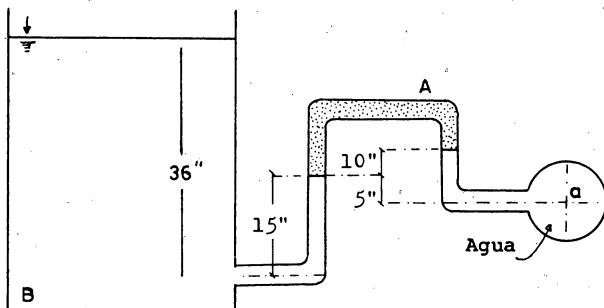
$$P_{abs} (2) = P_{bar} - P_{vac}$$

Las aplicaciones de estas ecuaciones se ilustran en los siguientes ejemplos:

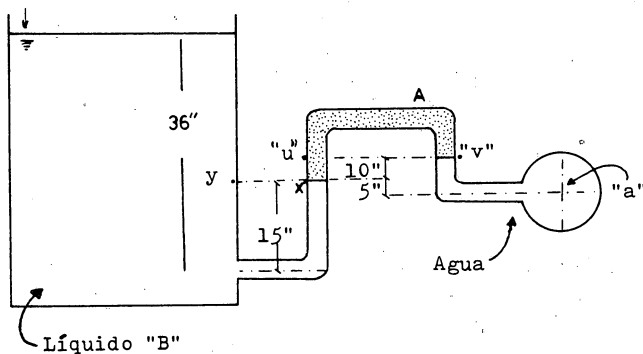
#### EJEMPLO 1.1

Calcule la presión manométrica en bar,  $N/m^2$  y  $lb_f/in^2$  en el -

punto "a", si las densidades relativas de los líquidos A y B son 0.75 y 1.20, respectivamente. El líquido que rodea al punto "a" es agua, con una densidad de  $1000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ . El tanque está abierto a la atmósfera. - Considere que la aceleración gravitacional es  $9.78 \text{ (m/s}^2\text{)}$ .



Solución



Las presiones en los puntos x e y son iguales entre sí: -

$$P_x = P_y.$$

Las presiones entre los puntos u y v también son iguales -  
entre sí:

$$p_u = p_v$$

$$P_y = \rho_B \cdot g(36'' - 15'') = \rho_B \cdot g(21'')$$

$$P_x = P_u + \rho_A \cdot g(10'') = P_v + \rho_A \cdot g(10'')$$

••

$$P_v = P_x - \rho_A \cdot g(10'')$$

La presión en "a" es:

$$P_a = P_v + \rho_{\text{Agua}} \cdot g(15'')$$

$$P_a = P_x - \rho_A \cdot g(10'') + \rho_{\text{Agua}} \cdot g(15'')$$

$$P_a = P_y - \rho_A \cdot g(10'') + \rho_{\text{Agua}} \cdot g(15'')$$

$$P_a = \rho_B \cdot g(21'') - \rho_A \cdot g(10'') + \rho_{\text{Agua}} \cdot g(15'')$$

sustituyendo valores y sabiendo que

$$1'' = 2.54 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$P_a = \delta_B \cdot \rho_{\text{Agua}} \cdot g(21'') - \delta_A \cdot \rho_{\text{Agua}} \cdot g(10'') + \rho_{\text{Agua}} \cdot g(15'')$$

$$= g \cdot \rho_{\text{Agua}} (\delta_B \cdot (21'') - \delta_A \cdot (10'') + (15''))$$

$$= 9.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (1.20 \cdot (21'') - 0.75 \cdot (10'') + 15'') \times \frac{2.54 \times 10^{-2} \text{ m}}{1''}$$

$$= 8123.0724 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 8.1231 \times 10^{-2} \text{ bar}$$

para encontrar el valor de  $\text{lb}_f/\text{in}^2$  se requiere del factor de conversión

$$1.01325 \text{ bar} = 14.696 \text{ lb}_f/\text{in}^2$$

El factor de conversión se expresa como un cociente igual a 1

$$1 = \frac{14.696 \text{ lb}_f/\text{in}^2}{1.01325 \text{ bar}}$$

$$P_a = 8.1231 \times 10^{-2} \text{ bar} \times \frac{14.696 \text{ lb}_f/\text{in}^2}{1.01325 \text{ bar}} = \underline{\underline{1.1782 \text{ lb}_f/\text{in}^2}}$$

### EJEMPLO 1.2

Suponga que la relación entre la presión y la densidad del aire atmosférico se representa mediante la expresión  $p \cdot \rho^{-k} = \text{cte}$ . Si los valores de la presión y de la densidad del aire sobre la superficie de la tierra son  $14.7 (\text{lb}_f/\text{in}^2)$  y  $7.4074 \times 10^{-2} \text{ lbm}/\text{ft}^3$  respectivamente, estime la altura de la atmósfera en pies y en metros. El valor de  $k = 1.4$  y la aceleración gravitacional tiene el valor constante de  $32.174 \text{ ft}/\text{s}^2$ .

### SOLUCION:

Primeramente se convierten las unidades de los datos al S. I.

$$P_0 = 14.7 (\text{lb}_f/\text{in}^2) \times \left[ \frac{1.01325 \text{ bar}}{14.696 \text{ lb}_f/\text{in}^2} \right] = 1.01353 \text{ bar}$$

$$\rho_0 = 7.4074 \times 10^{-2} \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3} \times \left[ \frac{1 \text{ ft}^3}{(0.3048)^3 \text{ m}^3} \right] \times \left[ \frac{0.45359237 \text{ kg}}{1 \text{ lbm}} \right] = 1.1866 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$g = 32.174 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \times \left[ \frac{0.3048 \text{ m}}{1 \text{ ft}} \right] = 9.8066 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

la expresión que relaciona a la presión con la altura es:

$$dP = \rho g dz$$

la expresión que relaciona a la presión con la densidad es:

$$P\rho^{-k} = C$$

$$\rho = (P/C)^{1/k}$$

entonces

$$dP = (P/C)^{1/k} g dz$$

$$P^{-1/k} dP = \frac{g}{C^{1/k}} dz$$

En esta expresión  $dz$  representa una profundidad. Se mide desde arriba hacia abajo; cuando  $z = 0$ ,  $P = P_0$  (en la parte superior de la atmósfera).

$$z = z$$

$$P = P_0 = 1.01353 \text{ bar}$$

al integrar entre estos límites:

$$\int_0^{P_0} P^{-1/k} dP = \int_0^z \frac{g}{C^{1/k}} dz$$

$$\left. \frac{P^{(g - 1/k)}}{1 - \frac{1}{k}} \right|_0^{P_0} = \left. \frac{g}{C^{1/k}} z \right|_0^z$$

$$z = \frac{C^{1/k}}{g} \frac{P_0^{(1-1/k)}}{(1-1/k)}$$

C se valúa con los valores de  $P_0$  y  $\rho_0$

$$C = \frac{P_0}{\rho_0^k} = \frac{1.01353 \text{ bar}}{(1.1866)^{1.4} (\text{kg}^{1.4}/\text{m}^{(3)(1.4)})} \times \frac{10^5 \text{ N/m}^2}{1 \text{ bar}} =$$

$$= 7.97647 \times 10^4 \frac{\text{N m}^{(3)(1.4)}}{\text{m}^2 \text{ kg}^{1.4}}$$

$$z = (7.97647 \times 10^4)^{1/1.4} \frac{\text{N}^{1/1.4} \text{ m}^3}{\text{m}^{2/1.4} \text{ kg}} \times \frac{\text{s}^2}{9.8066 \text{ m}} \times \frac{(1.01353)^{(1-1/1.4)} \times 10^{5(1-1/1.4)} \text{ N}^{(1-1/1.4)}}{\text{m}^{2(1-1/1.4)}} \times$$

$$\times \frac{1}{(1-1/1.4)}$$

$$z = 3.04847 \times 10^4 \text{ N} \frac{\text{s}^2}{\text{kg}} = 3.04847 \times 10^4 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\text{s}^2}{\text{kg}} = 3.04847 \times 10^4 \text{ m}$$

$$z = 3.04847 \times 10^4 \text{ m} \times \frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} = \underline{\underline{1.00015 \times 10^5 \text{ ft}}}$$

De lo visto anteriormente, se puede deducir que la presión que ejerce un fluido en reposo sobre un cuerpo sumergido en él depende únicamente de la profundidad a la que se encuentre el cuerpo.

Considérese una cantidad de un cierto fluido en reposo. Escogamos como sistema\* una parte del fluido y aislémosla del resto mediante una superficie arbitraria, como se ve en la figura 1.4 .

Cada flecha representa la fuerza que el fluido exterior ejerce sobre la superficie en cada punto. Esta fuerza "puntual" se define como

$$dF = p \cdot dA$$

donde  $dA$  es un elemento del área de la superficie que hemos elegido como frontera entre nuestro sistema y el resto del fluido.

Como la presión del fluido estático aumenta con la profundidad, las fuerzas van aumentando desde la parte superior hasta la parte inferior, lo que se representa con una mayor longitud de las flechas.

Ya que el fluido se encuentra en reposo, la suma de fuerzas sobre el sistema debe ser nula. En la dirección horizontal las fuerzas de la parte izquierda contrarrestan a las fuerzas de la parte derecha.

En la dirección vertical la suma de fuerzas también debe ser nula. En esta dirección actúa el peso del sistema además de las fuerzas que ejerce el fluido exterior, por lo que debe cumplirse que

$$- F_{gs} + \sum_{i=1}^n p \cdot dA_i = 0$$

\* La definición rigurosa de sistema se da en el capítulo siguiente.



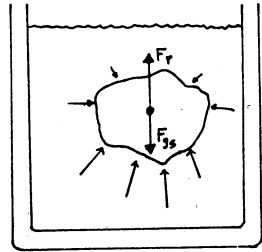
La resultante de las fuerzas que el fluido exterior ejerce sobre la superficie contrarresta al peso del fluido contenido dentro de la superficie. Evidentemente, esta resultante debe actuar en la misma línea en que actúa el peso y en consecuencia su línea de acción debe pasar por el centro de gravedad del sistema.

Sea

$$\sum_{i=1}^n p \, dA_i \equiv F_r$$

y

$$F_{gs} = \rho_f \cdot gV$$



donde  $V$  es el volumen encerrado por la superficie arbitraria y  $\rho_f$  es la densidad del fluido.

Suponga que se extrae el sistema y se le sustituye por un cuerpo de naturaleza distinta ( $\rho_c \neq \rho_f$ ) pero encerrado en una superficie de igual forma que la del sistema.

La presión en cada punto debe ser exactamente la misma que antes, de tal manera que la fuerza resultante que el fluido ejerce sobre el nuevo cuerpo es también la misma que antes,  $F_{gs} = F_r$

Esto debe ser así porque la presión que el fluido exterior ejerce sobre una superficie depende únicamente de la profundidad.

Entonces se tiene que el fluido ejerce sobre el cuerpo una fuerza vertical, dirigida hacia arriba, igual al peso del fluido que ocupaba el volumen limitado por la superficie.

Como la densidad del cuerpo es en general distinta a la densidad del fluido, resulta que el cuerpo *no* se encontrará en equilibrio sino que ascenderá o descenderá dependiendo si su densidad es menor o mayor que la del fluido.

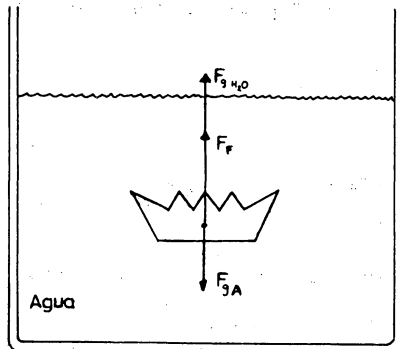
La conclusión que un cuerpo sumergido en un fluido reciba una fuerza ascensional igual al peso del fluido que desaloja fue establecida por primera vez por Arquímedes de Siracusa. En su honor, esta afirmación se conoce como el principio de Arquímedes.

### EJEMPLO 1.3

Se dice que Arquímedes descubrió el principio que lleva su nombre cuando el rey de Siracusa le pidió que comprobara si su corona era de oro puro.

Arquímedes midió el peso de la corona sumergida en agua y en aire, encontrando unos valores equivalentes a 11.8N y 13.0N. Sabía además que la densidad relativa del oro era 19.3 ¿La corona era de oro o no?

SOLUCION:



- A = aire
- o = oro
- C = corona
- F = flotación
- P = plata

$$F_{gA} = 13.0 \text{ N} \quad ; \quad F_{g_{H_2O}} = 11.8 \text{ N} \quad \delta_o = 19.3$$

$$V_C = \frac{m_c}{\rho_c} = \frac{F_{gA}}{\delta_o \rho_{H_2O} g}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \bullet \bullet \quad T + F_F - F_{gA} = 0$$

donde:

$$T = F_{g_{H_2O}}$$

$$\bullet \bullet \quad F_F = F_{gA} - F_{g_{H_2O}}$$

Además:

$$F_F = V_C \rho_{H_2O} g$$

Al sustituir  $V_C$  queda:

$$F_F = \frac{F_{gA} \cdot \rho_{H_2O} g}{\delta_o \rho_{H_2O} g}$$

$$F_F = \frac{F_{gA}}{\delta_o}$$

Al sustituir en la suma de fuerzas queda:

$$\frac{F_{gA}}{\delta_o} = F_{gA} - F_{g_{H_2O}}$$

$$\delta_o = \frac{F_{gA}}{F_{gA} - F_{g_{H_2O}}} = \frac{13.0 \text{ N}}{13.0 \text{ N} - 11.8 \text{ N}} = 10.8333$$

La corona no puede ser de oro puro, pues 10.8333 es diferente de 19.3.

Si se sabe que la densidad relativa de la plata es 10.5 y suponiendo que la corona haya sido fabricada con una aleación de oro y plata, calcule el porcentaje de oro que tiene la corona.

$$F_{gA} = 13.0 \text{ N} \quad F_{g_{H_2O}} = 11.8 \text{ N} \quad \delta_o = 19.3 \quad \delta_p = 10.8$$

La suma de fuerzas debe ser nuevamente

$$F_F = F_{gA} - F_{g_{H_2O}}$$

$$\delta_C = 10.8333$$

La masa de la corona debe ser la suma de las masas del oro y de la plata.

$$m_C = m_o + m_p \quad \text{I}$$

El volumen de la corona debe ser la suma de los volúmenes del oro y de la plata.

$$V_C = V_o + V_p \quad \text{II}$$

La masa de la corona es:

$$m_C = \frac{F_{gA}}{g}$$

Los volúmenes de la corona, del oro y de la plata son:

$$V_C = \frac{m_C}{\rho_C} = \frac{F_{gA}}{g} \times \frac{1}{\delta_C \rho_{H_2O}}$$

$$V_o = \frac{m_o}{\rho_o} = \frac{m_o}{\delta_o \rho_{H_2O}}$$

$$V_p = \frac{m_p}{\rho_p} = \frac{m_p}{\delta_p \rho_{H_2O}}$$

Las ecuaciones I y II se transforman entonces en:

$$\frac{F_{gA}}{g} = m_0 + m_p \quad \text{I'}$$

y

$$\frac{F_{gA}}{g \delta_c \rho_{H_2O}} = \frac{m_0}{\delta_0 \rho_{H_2O}} + \frac{m_p}{\delta_p \rho_{H_2O}} \quad \text{II'}$$

Despeje la masa de la plata de I

$$m_p = \frac{F_{gA}}{g} - m_0$$

sustituya este valor en II'

$$\frac{F_{gA}}{g \delta_c \rho_{H_2O}} = \frac{m_0}{\delta_0 \rho_{H_2O}} + \frac{F_{gA}}{g \delta_p \rho_{H_2O}} - \frac{m_0}{\delta_p \rho_{H_2O}}$$

$$\frac{F_{gA}}{g \delta_c} = m_0 \cdot \left[ \frac{1}{\delta_0} - \frac{1}{\delta_p} \right] + \frac{F_{gA}}{g \delta_p}$$

$$m_0 \cdot \left[ \frac{\delta_p - \delta_0}{\delta_0 \cdot \delta_p} \right] = \frac{F_{gA}}{g} \cdot \left[ \frac{1}{\delta_c} - \frac{1}{\delta_p} \right] = \frac{F_{gA}}{g} \cdot \left[ \frac{\delta_p - \delta_c}{\delta_0 \cdot \delta_p} \right]$$

$$m_0 = \frac{F_{gA}}{g} \cdot \left[ \frac{\delta_p - \delta_c}{\delta_0 \cdot \delta_p} \right] \cdot \left[ \frac{\delta_0 \cdot \delta_p}{\delta_p - \delta_0} \right]$$

El porcentaje de oro que contiene la corona es:

$$\%_O = \frac{m_0}{m_c} \times 100 = \frac{m_0}{(F_{gA}/g)} \times 100$$

entonces

$$\begin{aligned} \%_o &= \left[ \frac{\delta_p - \delta_c}{\delta_p - \delta_o} \right] \cdot \frac{\delta_o}{\delta_c} \times 100 \\ &= \left[ \frac{10.8 - 10.8333}{10.8 - 19.3} \right] \cdot \frac{19.3}{10.8333} \times 100 \\ &= 0.6979\% \end{aligned}$$

La temperatura representa un concepto menos "concreto" que el de presión, pero que tiene una gran importancia en la Termodinámica. Como en el caso de otros conceptos examinados hasta ahora, todos poseemos una cierta idea de ella. En este caso, la temperatura es aquel número - que nos permite clasificar objetivamente a los cuerpos dependiendo si están "calientes", "tibios" o "fríos". Ahora bien, se puede hacer una "clasificación" cuando nos guiamos por el sentido del tacto, pero este procedimiento no da una idea cuantitativa de la calidad de "frío" o "caliente" de los cuerpos, mientras que el concepto de temperatura sí nos da esa idea cuantitativa.

Antes de proceder a una definición de temperatura es conveniente examinar los tipos de materiales que se pueden emplear para contener a una sustancia.

Se ha visto anteriormente que las interacciones entre partículas o sistemas se pueden representar mediante fuerzas. Estas interacciones son de tipo mecánico.

Por la experiencia se sabe que existe otro tipo de interacciones diferente del tipo mecánico, un ejemplo concreto de la cual consiste en acercar una flama a una sustancia. Se sabe que este es una interacción, pues luego del experimento el cuerpo sufre una variación en sus propiedades.

Dependiendo de las características del material que conforma las paredes de dicho recipiente, las modificaciones que se producen en la sustancia se presentarán más o menos rápidamente. Si las paredes se construyen de aluminio (A) se observa que la sustancia cambia sus propie

dades en muy poco tiempo

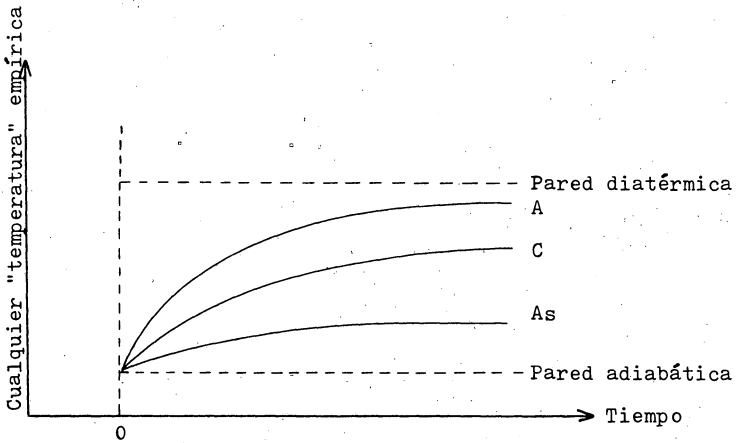


Fig.1.5

Si las paredes se construyen con vidrio (C), el cambio en las propiedades no será tan rápido como en el caso precedente.

Si las paredes se contruyen con asbesto, el cambio será aún - más lento (As).

Se pueden ensayar con distintos materiales, hasta que se pueda considerar "lógica" la extrapolación a dos casos extremos:

- a) El de aquella pared que permite que el cambio en las propiedades se lleve a cabo instantáneamente, llamada pared *diatérmica* (aproximada por materiales metálicos como el aluminio y el cobre).



b) El de aquella pared que impide completamente el cambio en las propiedades. Esto quiere decir que las propiedades originales de la sustancia se mantienen durante un tiempo infinito. A esta pared se le llama *adiabática* (se puede aproximar empleando un vaso de Dewar, que consiste en dos recipientes entre los cuales se ha practicado el vacío y cuyas caras se han plateado en el interior).

Ahora bien, se sabe que cuando se ponen en contacto dos cuerpos con diferente calidad de "caliente" o "frío", encerrados en recipientes con paredes diatérmicas, se desencadena una serie de cambios en ambos hasta que finalmente se estabilizan sus propiedades. Cuando esto ocurre, se sabe que ambos tienen la misma calidad de "calidez" o "frialidad" y se dice que están en "equilibrio térmico".

Considérese ahora que se tienen tres cuerpos encerrados en recipientes con paredes diatérmicas: A, B y C.

Es también un hecho experimental que si los sistemas A y C están en equilibrio térmico entre sí y el cuerpo B está también en equilibrio térmico con C, entonces, al ponerse en contacto los sistemas A y B no ocurre ningún cambio en las propiedades de ninguno de ellos, lo que quiere decir que A y B están también en equilibrio térmico.

Este resultado que parece evidente (refleja la transitividad, propiedad de los números reales) no lo es tanto. En verdad, se ha reconocido que no depende de ningún principio o ley de la Física y en 1932 se le designó como la "Ley Cero de la Termodinámica".

Ahora bien, la propiedad que tienen en común los tres sistemas es la que llamamos *temperatura*.

La asignación de valores a esta propiedad se ha hecho desde hace dos siglos aproximadamente, aún antes de definir claramente el concepto que representa. Entonces se sabía que los líquidos encerrados en capilares cambiaban su altura al cambiar su temperatura y que este cambio era prácticamente lineal.

$$T = a h + b$$

Esta ecuación se conoce como una ecuación termométrica, pues - relaciona la temperatura con una propiedad que varía con ella (llamada - propiedad termométrica).

Usualmente se asignan dos valores arbitrarios de temperatura - para poder valuar las dos constantes desconocidas a y b. En la escala - de Celsius (centígrada, como se le conocía antiguamente) los puntos que se eligen son el punto de ebullición del agua bajo una presión de - 1.01325 bares, al cual se le asigna el valor de 100°C y el punto de fusión del hielo bajo la misma presión, al cual se le asigna el valor de - 0°C. Se divide el espacio entre estos dos puntos en 100 partes iguales y a cada una se le llama un grado Celsius.

Como los valores de temperatura se escogen arbitrariamente, es ta escala (y otras similares a ella, como la de Fahrenheit) se denomina *empírica*.

Además, por la manera de definirla, se ha observado experimen-

talmente que los valores de la temperatura dependen de la naturaleza física del fluido termométrico (por ejemplo, se ha visto que al medir una misma temperatura, un termómetro de alcohol da un valor distinto que uno de mercurio).

Existe otra escala de temperatura, llamada absoluta o de Kelvin, que se fundamenta en criterios termodinámicos y cuyos valores *no* dependen del fluido termométrico. La unidad en esta escala se llama Kelvin (K) y se ha definido de tal manera que:

$$1 \text{ K} = 1^\circ\text{C}$$

El cero de esta escala está en  $-273.15^\circ\text{C}$  y se ha visto que esta es una constante natural. La justificación de esta escala se examina en el capítulo III.

Considérese un sistema sobre el que actúa una fuerza  $F$ , la cual está equilibrada por una fuerza igual y de sentido opuesto  $-F$ .

El sistema está en equilibrio; para provocarle un desplazamiento, es necesario aumentar la fuerza  $F$  en una pequeña cantidad  $\Delta F$ . El sistema se acelerará ahora, bajo la acción las dos fuerzas  $(F + \Delta F)$  y  $(-F)$ , y la aceleración será menor conforme el valor de  $\Delta F$  se aproxime a cero.

En el límite se dice que el sistema, que está infinitamente cerca del equilibrio, se desplaza infinitamente despacio o en forma cuasiestática.

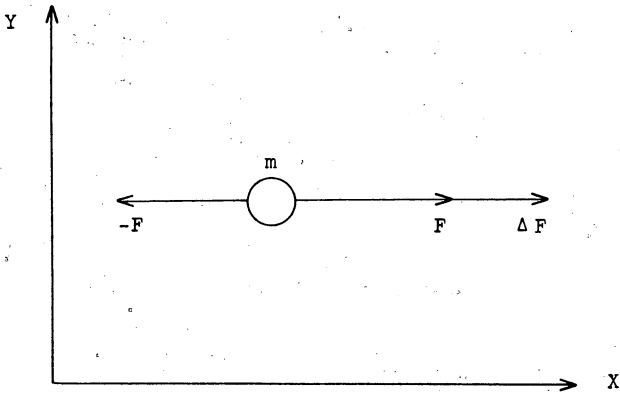


Fig.1.6

El producto  $F \cdot x$  de la fuerza y el desplazamiento se define como el trabajo que hace la fuerza  $F$  venciendo la resistencia de la fuerza  $-F$ .

Es posible generalizar esta definición para incluir sistemas mecánicos cada vez más complejos. En particular, es necesario definir el trabajo mediante conceptos vectoriales, puesto que tanto la fuerza como el desplazamiento poseen las propiedades matemáticas de los vectores.

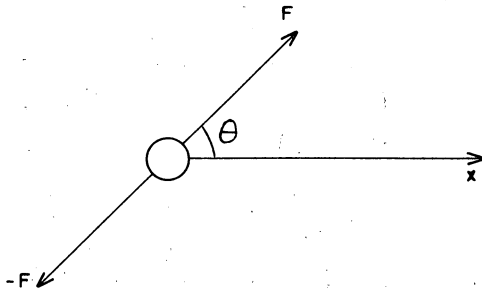


Fig.1.7

Al obtener la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento que provoca, se obtiene el trabajo como se definió anteriormente:

$$W = F \cdot x \cos \theta$$

Se define a esta magnitud escalar  $W$  como:

$$W = \underline{F} \cdot \underline{x}$$

donde  $W$  es el producto punto o producto escalar de los vectores  $\underline{F}$  y  $\underline{x}$ .

Si el sistema se desplaza a lo largo de una cierta curva  $C$ , so metido a la acción de una fuerza conocida pero variante  $\underline{F}(\underline{r})^*$  donde  $\underline{r}$

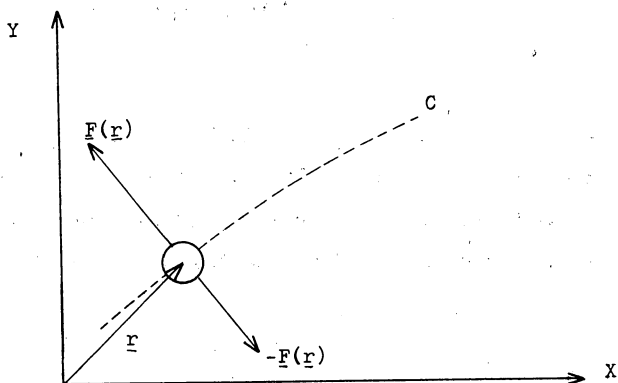


Fig.1.8

\* La expresión  $\underline{F}(\underline{r})$  quiere decir que la fuerza ( $F$ ) es una función del argumento ( $\underline{r}$ ) aunque no se indica la naturaleza de la relación funcional. Este es un procedimiento muy usual en la Física.

es el vector de posición del sistema con respecto de un origen arbitrario y la fuerza que se opone se define como  $-F = (F_x, F_y, F_z)$ , el trabajo se define como el límite:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

donde la integración se efectúa a lo largo de la curva C.

Esta es la definición de trabajo que se encuentra dentro de los dominios de la mecánica; sin embargo, en este curso se pretende estudiar sistemas más complejos que los puntos materiales que analiza la mecánica.

Consideremos un sistema típico en Termodinámica, un cilindro provisto de un pistón que encierra a un gas, y veamos como adecuar la definición de trabajo mecánico a nuestras necesidades.

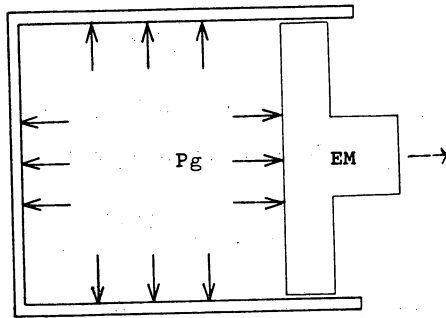


Fig. 19

$dz$

Consideremos la expansión del gas contenido en el cilindro provisto de un pistón y rodeado por la atmósfera. Si se escoge el gas como sistema, el trabajo que hace el sistema sobre los alrededores es:

$$\delta W = \bar{F}_g \cdot dz = P_g \cdot A_{EM} \cdot dz_g$$

donde  $F_g$  es la fuerza que ejerce el gas contra la frontera que se desplaza, y  $A_{EM}$  es su área.

Se parte de la definición general, pero en Termodinámica se manejan las variables presión  $P$  y volumen  $V$  (junto con la Temperatura  $T$ ) como las variables importantes, mientras que este papel lo desempeñan la fuerza  $F$ , el tiempo  $t$  y el desplazamiento  $x$  cuando se estudia la mecánica.

Se aprecia claramente que cuando el émbolo se desplaza la distancia  $dz$ , el volumen del gas cambia en la magnitud

$$A_{EM} \cdot dz = dV_g$$

Entonces, la expresión para el trabajo queda, en términos de las variables propias de la Termodinámica, como

$$\delta W = P_g \cdot dV_g$$

Se escribe la diferencial del trabajo con el símbolo  $\delta W$  para distinguirlo de las diferenciales totales (por ejemplo  $dV$ ), puesto que por su definición, resulta que al integrar se obtiene el trabajo total que se realiza y no una diferencia de una propiedad valuada en los lími-

tes de integración. Acerca del carácter del trabajo se hablará más ampliamente en el capítulo II.

En este momento es oportuno subrayar que el trabajo existe solamente si se realiza un desplazamiento contra una fuerza que se opone. En el capítulo siguientes se estudiará un experimento en donde se tiene una expansión contra una fuerza opositora igual a cero. A pesar de que la frontera se desplaza, el trabajo es cero, de acuerdo con la definición que se da aquí.

Un concepto ligado estrechamente al de trabajo es el de *potencia*, pues si bien es cierto que al ingeniero le importa saber el trabajo que se requiere para satisfacer ciertas necesidades, también lo es que resulta más importante el tiempo que demora realizar ese trabajo. Esto es aún más importante en nuestros días en los cuales todos los trabajos de ingeniería se realizan en un plazo perfectamente definido.

Considere, por ejemplo, que se requiera transportar unos ladrillos al décimo piso de un edificio en construcción: esta es una labor que pueden desempeñar perfectamente los albañiles, pero el tiempo que les tome efectuarlo será bastante largo si disponen solamente de andamios y su propia fuerza. Si se emplea una de las grandes grúas con las que ahora se cuenta, se realizará exactamente el mismo trabajo que el que realizarían los albañiles, pero en un tiempo sensiblemente menor.

En la ingeniería se define a la importantísima relación entre el trabajo y el tiempo que toma efectuarlo como la potencia, según la expresión:

$$W = \frac{\delta W}{\delta t}$$



En este caso se habla de la potencia instantánea.

Cuando se efectúa cierto trabajo  $W$  y se relaciona directamente con el tiempo que ha tomado hacerlo  $\Delta t$  se obtiene una potencia promedio.

$$\hat{W} = \frac{W}{\Delta t}$$

Cuando se integra la potencia instantánea y se le compara con la potencia promedio se observa que no siempre coinciden. Por ello se debe tener la certeza de cuál de ambos conceptos se está manejando.

De acuerdo con su definición, las dimensiones del trabajo en el S. I. son:

$$[W] = MLT^{-2} \cdot L$$

$$[W] = ML^2 T^{-2}$$

y sus unidades en el S. I. son:

$$\{W\} = N \cdot m$$

$$\{W\} = \text{joule} = J$$

donde el joule se define como el trabajo que realiza una fuerza de un newton que provoca un desplazamiento de un metro.

Las dimensiones de la potencia en el S. I. son:

$$\left[ \frac{\circ}{W} \right] = ML^2 T^{-2} \cdot T^{-1} = ML^2 T^{-3}$$

y sus correspondientes unidades en el S. I. son:

$$\left\{ \frac{J}{s} \right\} = \frac{J}{s} \equiv \text{watt} = W$$

Considérese ahora un cuerpo rígido que sufre la actuación de - fuerzas superficiales y de cuerpo.

La Segunda Ley de la Mecánica de Newton asegura que :

$$F_s - mg = m \frac{dv}{dt}$$

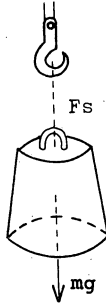
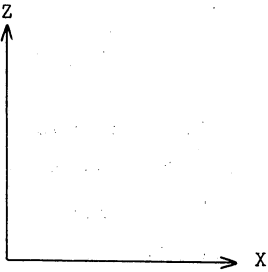


Fig.1.10



en donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $dv/dt$  es la aceleración resultante,  $g$  es la aceleración gravitacional y  $F_s$  es la fuerza superficial.

El trabajo diferencial que se hace sobre el cuerpo en un instante determinado se debe a la fuerza  $F_s$ . En este caso la fuerza que se opone es el peso del cuerpo:

$$\delta W = F_s \cdot dz = mg \, dz + m \frac{dv}{dt} dz$$

$$\delta W = mg \, dz + mv \cdot dv$$

puesto que  $dz/dt = v$ .

El trabajo total que se hace entre las posiciones  $z_1$  y  $z_2$  es:

$$W = mg(z_2 - z_1) + \frac{m}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

Al primer término del lado derecho se le ha llamado la diferencia en energía potencial. Ese término fue bautizado así por William Rankine en 1853.

Al segundo término del lado derecho se le llama la diferencia en energía cinética. Este término fue identificado en 1807 por Thomas Young, quien le llamó simplemente energía. Parece ser que esta fue la primera vez que se empleó ese término que definiremos más adelante.

En 1856, William Thomson (Lord Kelvin) le llamó por primera vez la diferencia en energía cinética. Es este nombre el que se ha conservado hasta la fecha.

Para definir lo que entendemos por energía es necesario emplear los conceptos de pared adiabática y de trabajo. Es un hecho experimental que si se hace una cierta cantidad de trabajo sobre un sistema encerrado en paredes adiabáticas, los valores de sus propiedades (temperatura, densidad, presión, etc.) se alteran en una cierta magnitud. Es decir, antes de efectuar trabajo sobre el sistema las propiedades tienen (cada una) un cierto valor, establecido con respecto a un sistema de unidades. Al efectuar el trabajo, al menos una de las propiedades adquiere un valor diferente.

A mediados del siglo pasado, James P. Joule realizó una serie de experimentos en los cuales hacía trabajo por diferentes medios sobre un sistema encerrado en paredes adiabáticas. Las propiedades de la sustancia al comienzo de cada experimento tenían el mismo valor, para poder comparar las variaciones que sufrirían al recibir las distintas formas de trabajo.

Además, aunque las formas de realizar el trabajo eran diferentes, Joule se aseguraba que la magnitud del trabajo fuera siempre la misma.

Su resultado fue que la variación de las propiedades de la sustancia era la misma en cada caso.

Esto conduce a pensar en la existencia de una propiedad de la sustancia, que sólo depende del valor de las otras propiedades al principio y al final del experimento, y que se ha acordado llamar *energía*.

La manera de definir una propiedad señalando cómo se manifiesta o cómo se mide se llama operativa. Se ha empleado una definición operativa para la masa y se empleará otra para definir una nueva propiedad en el capítulo III, la entropía.

Para ser más específicos, llamaremos a la energía que se puede hacer variar con el trabajo adiabático la energía total. Esta energía total incluye los términos que se han introducido previamente, el de energía cinética y el de energía potencial.

Estos términos tienen un significado definido en la mecánica. Por ejemplo, se sabe que para acelerar un cuerpo se requiere de la aplicación de una cierta cantidad de trabajo. Se ha observado que cuando un cuerpo se desacelera es capaz de efectuar trabajo sobre sus alrededores. También se sabe que para cambiar la elevación de un cuerpo en un campo gravitacional se requiere de la aplicación de cierta cantidad de trabajo y cuando este cuerpo regresa a su posición original, es capaz de efectuar trabajo sobre sus alrededores.

Por estas razones, el concepto de energía en mecánica está muy ligado a la idea de aplicación de trabajo.

Etimológicamente, la palabra energía significa *fuera en acción*, lo que reafirma aún más la tendencia "mecánica".

A la suma de las energías cinética y potencial se le llama energía mecánica. Este concepto tuvo una gran importancia, pues se comprobó experimentalmente que bajo ciertas condiciones la energía mecánica se conservaba.

Los principios de conservación han desempeñado un papel muy importante a lo largo de la historia, y para el ingeniero resulta confortante saber que hay magnitudes que se conservan a lo largo de los fenómenos, que son susceptibles de ser seguidos en un "balance".

Lamentablemente, la sola energía mecánica no es una propiedad que se conserve en todas las situaciones a las que debe enfrentarse un ingeniero. Basta citar el ejemplo típico de la caída de un cuerpo desde el reposo: al comienzo, toda la energía se reconoce como energía potencial. Al iniciar la caída, la energía potencial va disminuyendo y la velocidad (es decir, la energía cinética) va aumentando. Los cambios son tales, que su suma es constante. Esto se desenvuelve normalmente hasta que el cuerpo choca con una superficie dura y queda inmóvil. En este momento la conservación de la energía mecánica deja de poseer la utilidad que tenía en los instantes precedentes.

También experimentalmente se ha comprobado que la energía total sí se mantiene constante en (hasta ahora) todas las situaciones a las que puede enfrentarse un ingeniero.

Una aplicación más detallada acerca de la conservación de la energía puede encontrarse en el capítulo siguiente.

Ahora se definirá a la *energía interna* como la diferencia entre la energía total (a la que denotaremos como  $E$ ) y la energía mecánica. A esta energía interna la denotaremos con la letra  $U$ .

De acuerdo a la definición, la manera de alterar la energía de

un cuerpo en un recipiente adiabático es intercambiando trabajo. Seremos más estrictos en el concepto de trabajo y a partir de ahora, consideraremos como trabajo aquella transmisión de energía que cruce la frontera del cuerpo bajo observación. Se entenderá que el trabajo es una forma de energía en transferencia.

Se recordará que al discutir las paredes diatérmicas y adiabáticas se mencionó una manera de alterar las propiedades de un cuerpo sin efectuar un trabajo sobre él. Para lograrlo se requiere que el cuerpo esté encerrado en paredes diatérmicas.

También se ha indicado al definir la temperatura que cuando se ponían en contacto dos cuerpos con temperaturas distintas, encerrados en paredes diatérmicas, sufrían una serie de cambios en sus propiedades hasta que los valores de sus temperaturas se igualaban.

Ahora bien, al poner en contacto a un cuerpo con cierto valor en sus propiedades con otro cuerpo a una temperatura mayor, podemos provocar un cambio de igual magnitud que el logrado al efectuar una cierta cantidad de trabajo adiabático. Podemos entonces postular que existe una forma alternativa de transmitir energía; a esta forma la llamaremos calor.

La cantidad de energía en forma de calor que se transmite hacia un cuerpo se puede determinar únicamente al medir la cantidad de trabajo adiabático que provoca el mismo cambio en el valor de las propiedades del cuerpo.

Similarmente al trabajo, consideraremos al calor como una forma de energía de transición. Esta forma de transmisión de la energía se lleva a cabo cuando existe una diferencia de temperatura entre los cuerpos emisor y receptor.

La relación entre las magnitudes energía, calor y trabajo nos permite deducir que en el S. I. las tres magnitudes tienen las mismas dimensiones y unidades; es decir

$$\{E\} = \{Q\} = \{W\} = ML^2 T^{-2}$$

$$\{E\} = \{Q\} = \{W\} = \text{joule} = J$$

Hasta la fecha se conocen tres mecanismos para la transmisión de calor: la radiación, la convección y la conducción. La radiación es la transmisión de calor mediante ondas electromagnéticas y es mediante este mecanismo que la energía calorífica del sol llega a la tierra. Debe notarse que este mecanismo de transmisión no requiere que los cuerpos estén en contacto íntimo.

La convección es un mecanismo combinado de transmisión de energía y de masa. Este mecanismo tiene lugar únicamente en los fluidos (líquidos y gases) y se debe a que al variar la temperatura de una cierta región se modifica el valor de la densidad. Se provoca entonces la circulación de porciones de fluido con baja densidad (y alta temperatura) hacia regiones de alta densidad y baja temperatura.

La conducción ocurre tanto en sólidos como en fluidos. Este mecanismo requiere de un contacto íntimo entre los cuerpos. El estudio



de la transmisión de calor ocupa un lugar propio dentro de la Física Matemática.

En este curso contabilizaremos la energía en forma de calor que intercambie el cuerpo que estudiemos, sin reparar en el mecanismo que siga en dicha transmisión.

## CAPITULO II

### PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

El primer capítulo de estos apuntes tiene como función plantear los antecedentes necesarios para el tratamiento de temas posteriores, asimismo, estableceremos a continuación algunos tópicos que harán más accesible el concepto de, "La Primera Ley de la Termodinámica".

En primer término, el significado etimológico de la palabra Termodinámica (Thermos - caliente y Dynamikos de Dynamis-fuerza) no satisface el concepto que debemos tener de esta disciplina, así que intentaremos explicarla basándonos en los antecedentes académicos del alumno de "Principios de Energética", esto es, si decimos que Termodinámica es la ciencia que estudia la ENERGIA y al ENTROPIA, habremos dado una definición breve y categórica pero que resulta inapropiada, ya que sólo es clara para quienes ya conocen la materia. De otra manera, y tomando en cuenta los antecedentes que se mencionan anteriormente, intentaremos explicar lo que es la Termodinámica en las siguientes palabras:

*TERMODINAMICA.- Es la parte de la Física que estudia a la Energía y sus manifestaciones, la dirección y las formas de transmisión de ésta, y las propiedades que guardan alguna relación con dicha energía.*

Esto es, si mezclamos 1 kilogramo de agua a 50°C con 1 kilogramo de alcohol a 20°C, tendremos una temperatura final diferente que si mezclamos 2 cantidades de agua exclusivamente (en las mismas cantidades y con las mismas temperaturas). Además, se puede observar que --

existirá un flujo de energía de la sustancia de mayor a la de menor temperatura y no al contrario.

Se puede agregar a lo dicho anteriormente que, uno de los objetivos primordiales de la Termodinámica es el de contabilizar la energía que entra, sale y permanece dentro de los sistemas termodinámicos, y para esto es necesario escoger un sistema definido y considerarlo dentro de una envolvente real o imaginaria, que en este último caso puede cambiar su forma, tamaño o posición pero que siempre contiene al sistema. A esta envolvente se le denomina FRONTERA del sistema y todo aquello que quede fuera de la frontera del sistema se le llama, MEDIO AMBIENTE.

Los balances energéticos y/o de masa deben establecerse bajo ciertas condiciones y convenciones establecidas previamente. Para lograrlo debemos definir lo que hemos llamado sistema termodinámico, su clasificación y características de los mismos.

Sistema Termodinámico, es la porción limitada del espacio de volumen no necesariamente constante, en el que se estudian las variaciones de energía y/o masa para el análisis de un problema.

En las siguientes figuras (bomba de agua) se observan dos sistemas termodinámicos, en el 2.1.b. la frontera es real (coraza de la bomba) y en 2.1.a. la frontera es una envolvente imaginaria que limita la reducción de la tubería y el manómetro diferencial.

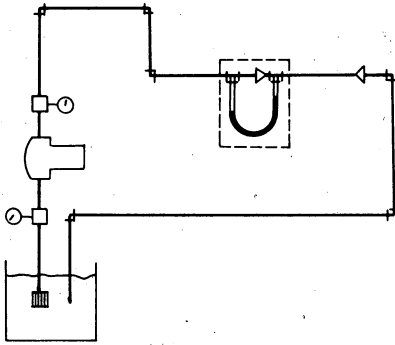


FIG. 2.1.a. frontera imaginaria

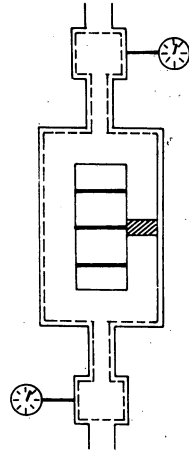


FIG. 2.1.b. frontera real

Los sistemas termodinámicos se clasifican en: cerrados y abiertos. Un sistema cerrado, es aquel que contiene una cantidad fija e invariable de masa y solamente la energía es quien puede cruzar la frontera del sistema. Un caso particular del sistema cerrado, es el sistema aislado en el cual no puede haber transferencia de masa ni transmisión de energía a través de su frontera.

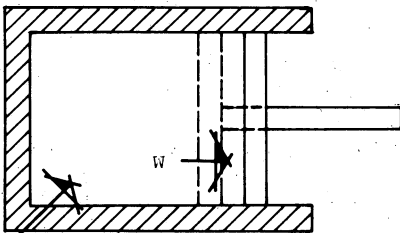


FIG. 2.2.a Sistema cerrado

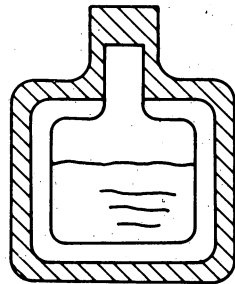


FIG. 2.2.b Sistema aislado

Sistema abierto, es aquel que permite el paso no sólo de energía sino también de masa a través de su frontera. El término VOLUMEN DE CONTROL, es equivalente al de sistema abierto y el término SUPERFICIE DE CONTROL es equivalente al de frontera de un sistema abierto.

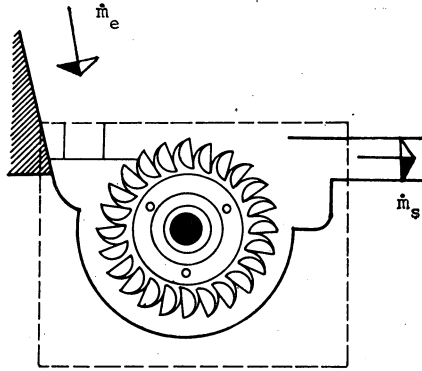
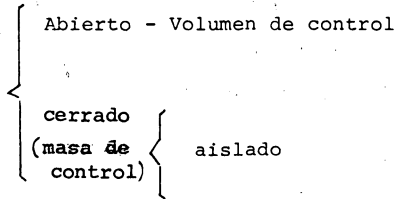


FIG. 2.3 Sistema abierto

Turbina hidráulica

Sistemas

Termodinámicos



PROPIEDADES TERMODINAMICAS

Se conoce como propiedad termodinámica, cualquier característica o atributo que un sistema posee y que esté relacionada con la energía de dicho sistema, por ejemplo: masa, volumen, temperatura, presión, velocidad, etc. Desde el punto de vista matemático, dichas propiedades

son funciones puntuales y no de trayectoria, esto es, si un recipiente con agua tiene una temperatura de 20°C, es indistinto que se haya alcanzado dicha temperatura extrayendo o añadiendo energía al sistema.

Estas propiedades han sido clasificadas en INTENSIVAS Y EXTENSIVAS. Una propiedad intensiva es independiente de la masa y una propiedad extensiva varía directamente con la masa del sistema en cuestión.

Clasificación de Propiedades Termodinámicas	}	Extensivas: masa, volumen, energía cinética, etc.
		Intensivas: densidad, presión, temperatura, etc.

#### EQUILIBRIO TERMODINAMICO, ESTADO, FASE, PROCESO Y CICLO.

Es frecuente escuchar a alguien expresar: "el hielo es el estado sólido del agua y el vapor el estado gaseoso de la misma"....\*

Consideremos un sistema cilindro émbolo instrumentado como se muestra en la figura 2.4., el sistema propiamente dicho, es una masa - de hielo que sufrirá transformaciones en sus propiedades por la acción de la fuente energética. (Mechero de Bunsen).

\* Se concluye más adelante.

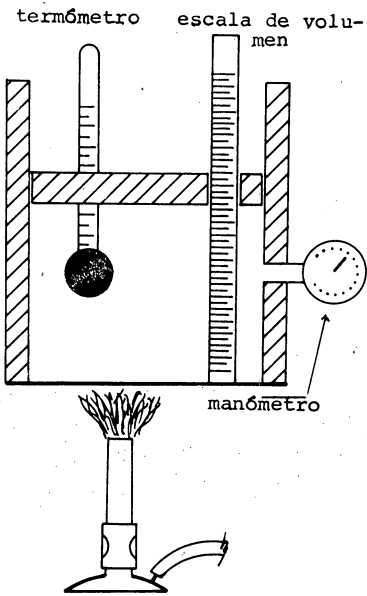


FIG. 2. 4

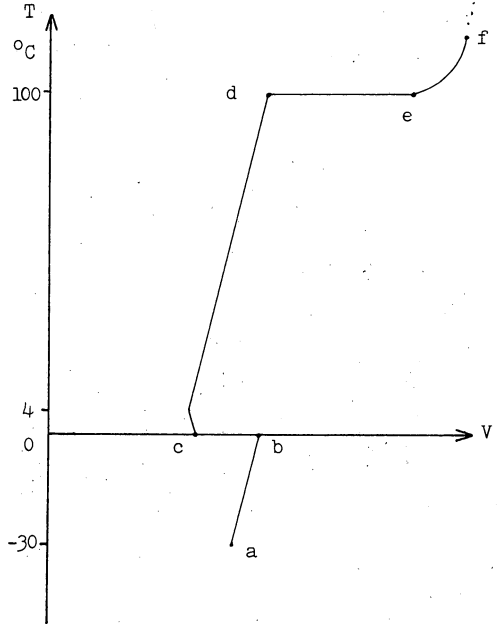


FIG. 2. 5

El hielo se encuentra inicialmente a una presión de 1.0132 - bar y una temperatura de  $-30^{\circ}\text{C}$ , despreciando el aumento de presión debido al peso del émbolo se observa que al suministrarle energía calorífica, la temperatura aumenta al igual que el volumen del hielo hasta que alcanza un valor de  $0^{\circ}\text{C}$ . La energía suministrada al hielo ha incrementado la energía interna del mismo. Como se puede observar en la Figura 2.5, la trayectoria que sigue este proceso es una línea recta que parte de "a" y termina en "b" (considerando constante a la capacidad térmica específica, antes llamada calor específico).

Si se proporciona más energía al hielo, se podrá observar que la temperatura no aumenta, permanece en  $0^{\circ}\text{C}$ , pero el hielo empieza a fundirse hasta que se transforma totalmente en líquido, tramo b-c. La energía suministrada al agua fue suficiente para romper la estructura cristalina del hielo, de tal manera que las moléculas resbalan unas sobre otras, sometidas todavía a fuerzas de cohesión.

La particularidad del agua estriba en que la distancia que hay entre la molécula de  $\text{H}_2$  y el átomo de  $\text{O}$  se acortó de tal forma que, el volumen que ocupa la molécula de  $\text{H}_2\text{O}$  se reduce al pasar de sólido a líquido.

De lo anteriormente descrito, vemos que se puede identificar con claridad en el diagrama el inicio de la trayectoria recorrida ( $T = -30^{\circ}\text{C}$ ,  $v = v_1$ ). Este punto es el estado inicial del proceso, de aquí que, el ESTADO TERMODINAMICO de una sustancia será el conjunto de valores de propiedades termodinámicas que describan a un sistema (véanse en la fig. 2.5, los puntos a, b, c, d, e). Por tanto, PROCESO TERMODINAMICO viene a ser un conjunto de estados que implican cambios en una o varias de las propiedades de un sistema (véanse trayectorias a-b, b-c, c-d y d-e).

Si alguno de los procesos descritos en la figura anterior, se efectúen muy lentamente de tal forma que no se apreciaran los cambios en las propiedades del sistema, diríamos que dicho sistema estaría siempre en EQUILIBRIO TERMODINAMICO. Un proceso como éste, se llama PROCESO CUASIEQUILIBRIO O CUASIESTATICO y viene a ser una idealización de los procesos reales. Dicho de otra forma, PROCESO QUASIEQUILIBRIO es



aquel en el que los cambios de estado son desviaciones infinitesimales del EQUILIBRIO TERMODINAMICO.

Volvamos al ejemplo anterior e imaginemos que por algún método o acción exterior al sistema, una vez que se llegue al estado final (punto "f"), regresemos nuevamente a las condiciones iniciales (punto "a") por cualquier trayectoria que incluso puede ser la misma, en este caso tendremos un proceso en el cual el estado inicial es el estado final, a este tipo de procesos se les llama CICLO TERMODINAMICO, que con más detalle, podemos decir que es una serie de cambios de estado tales que, el punto o estado de inicio del proceso, es el mismo al final de dicho proceso. La observación de un sistema, antes y después de la ejecución de un ciclo no revela diferencias en ninguna de las propiedades, aunque todas ellas hayan podido tener diferentes valores en algún momento durante la ejecución del ciclo.

Ahora bien, hemos visto (en la fig. 2.5) que en el proceso a-b el sistema presenta una estructura física homogénea, así como en la trayectoria c-d; estos 2 procesos se han realizado cuando el agua es sólida y líquida respectivamente. Ya no podemos decir que se trata de los "estados" sólido y líquido del agua (como se dijo en un principio) por que ahora ya sabemos lo que es un estado termodinámico, pero entonces debemos decir que esa *estructura física homogénea que presentan las sustancias* (SOLIDA, LIQUIDA Y GASEOSA) se conoce como, FASE.

Podemos observar también del proceso completo (a-f), que el agua a pasado por sus tres fases (a-b, c-d y e-f) y en cualquiera de ellas, la estructura química de las sustancias se ha conservado, es de

cir. como hielo, agua líquida y vapor, la molécula sigue siendo  $H_2O$ . Las sustancias que tienen una composición química homogénea e invariable en todas las fases, se llaman SUSTANCIAS PURAS.

En contraste con lo mencionado anteriormente, podríamos observar que la atmósfera terrestre compuesta por la mezcla de varios gases cambia su composición química cuando pasa de la fase gaseosa a la líquida, pues primero se licúa el oxígeno, quedando en la fase gaseosa otros gases, en estas condiciones el aire ya no se puede considerar como sustancia pura, sin embargo, podemos asegurar que el aire de la atmósfera terrestre es una SUSTANCIA SIMPLE COMPRESIBLE, ya que se define como SUSTANCIA SIMPLE aquella que tiene una sola forma relevante de realizar trabajo y SUSTANCIA SIMPLE COMPRESIBLE, como aquella que la forma relevante de realizar trabajo es mediante variaciones en su volumen.

Existen otro tipo de sustancias simples, como las *sustancias simples magnéticas y sustancias simples dieléctricas*, en las cuales, esa forma relevante de realizar trabajo es mediante la magnetización en una, y la polarización en la otra.

En la realidad no existe ninguna sustancia que pueda considerarse totalmente simple, así por ejemplo en las sustancias simples magnéticas que generalmente se encuentran como sólidos, el trabajo producido por el cambio de volumen suele ser pequeño, siendo relevante entonces, el trabajo realizado mediante la magnetización de la sustancia.

En la primera parte del curso, pondremos especial énfasis al es

tudio de las sustancias simples compresibles ya que en gran medida, - la Termodinámica se ocupa de estudiar el comportamiento de los gases y sus aplicaciones en algunos dispositivos térmicos, tales como las máquinas de combustión interna y externa, turbinas de gas y de vapor, - compresores, etc.

Ha resultado de la experiencia y conocimiento de las propiedades de las sustancias un postulado, llamado **POSTULADO DE ESTADO** que establece lo siguiente:

El número de propiedades independientes necesarias para determinar el estado termodinámico de un sistema, es igual al número de formas relevantes de realizar trabajo (el sistema), más uno.

$$N_0 = F_R + 1 \quad (2.1)$$

$N_0$             número de propiedades independientes necesarias para determinar el estado Termodinámico de un sistema.

$F_R$             número de formas relevantes que tiene el sistema de realizar trabajo.

Así pues, conociendo dos de las propiedades independientes del sistema podemos conocer el valor de las demás propiedades, utilizando gráficas, tablas de propiedades termodinámicas o ecuaciones de estado.

Una de las propiedades termodinámicas más importantes de las sustancias es la **CAPACIDAD TERMICA ESPECIFICA** (antes calor específico)

que de alguna manera nos indica la facilidad o dificultad que tienen las sustancias para variar su temperatura a partir de una transmisión de energía.

Consideremos dos bloques en los que la masa de cada uno de ellos es de 1 kg, el material del primero es cobre y del segundo asbesto. Se le suministra energía calorífica por igual a cada uno (véase figura 2.6) y al final del proceso se detecta en el cobre una temperatura distinta a la del asbesto.

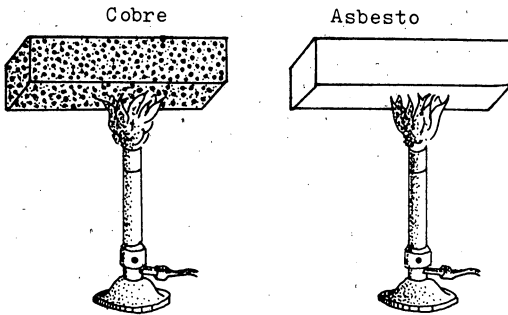


Fig. 2.6 Se suministra igual cantidad de energía calorífica tanto al Cobre como al Asbesto.

Esto se debe fundamentalmente a que LA CAPACIDAD TERMICA ESPECIFICA de estos materiales es distinta, para el cobre:  $C_{Cu} = 389.3$  (J/kg·K), para el asbesto:  $C_{asb} = 1046.5$  J/(kg·K). Se puede observar que la unidad de masa de asbesto necesita más energía que el cobre para elevar su temperatura, esto es:

$$C_e = \frac{\Delta E}{m \Delta T} \quad (2.2)$$

LA CAPACIDAD TERMICA ESPECIFICA de una sustancia, es la energía que hay que suministrar o retirar a la unidad de masa de dicha sustancia, para que su temperatura varíe un grado.

Respecto a las unidades de esta propiedad cabe hacer notar que es indistinto usar J/kg·°C o J/(kg·K) y lo mismo para el sistema inglés; BTU/(lb·°R) que BTU/(lb °F) ya que se trata de una diferencia de temperaturas en el denominador de la expresión 2.2. Bien, para encontrar una aplicación de este concepto  $C_e$ , regresemos a la descripción que en un principio se hacía de las transformaciones sufridas por un trozo de hielo. Calcularemos la energía que se suministra a dicho sistema en la siguiente forma:

La energía que ha ganado el agua durante cada uno de los procesos ya antes descritos: a-b, c-d, y e-f (ver fig. 2.5) se puede expresar en función del aumento de temperatura, de la cantidad de masa y de la capacidad térmica específica de la fase en que se encuentre la sustancia, luego entonces, de la expresión 2.2:

$$\Delta E = m C_e (T_f - T_i)$$

y como este incremento de energía se ha producido por una transmisión de calor.

$$Q = m C_e (T_f - T_i) \quad , \quad \text{así:}$$

$${}_a Q_b = m C_{\text{hielo}} (T_b - T_a)$$

$${}_c Q_d = m C_{\text{agua líq}} (T_d - T_c)$$

$${}_c Q_f = m C_{\text{vapor}} (T_f - T_e)$$

Considerando que la Capacidad Térmica Específica es constante en estos rangos de temperaturas.

De la figura 2.5 podemos observar que los cálculos anteriores no son aplicables a los procesos b-c y d-e, en donde la sustancia cambia de fase y en los cuales la temperatura permanece constante. Lo que sucede en estas circunstancias, es que la energía que entra al sistema se aplica en liberar las moléculas de la estructura cristalina - cuando el cambio es de sólido a líquido, y para vencer las fuerzas de cohesión sí el cambio es de líquido a gas.

La cantidad de energía, necesaria para vencer estas fuerzas se ha determinado experimentalmente y se puede calcular por medio de las relaciones termodinámicas entre las propiedades que varían esencialmente en el cambio de fase.

Esta cantidad de energía tiene un valor específico para cierta presión a la que se efectúe el cambio de fase y se llama ENTALPIA DE TRANSFORMACION, este mismo concepto suele ser llamado por algunos autores como CALOR LATENTE, nosotros creemos más apropiado el primer nombre y así lo mencionaremos en lo sucesivo.

A continuación damos unos valores de las entalpías de fusión, vaporización y sublimación del agua, bajo ciertas condiciones de presión y temperatura.

Entalpía de fusión  $h_{sf} = 334.88 \text{ kJ/kg}$  a 1.0135 bar y  $0^\circ\text{C}$

Entalpía de vaporización  $h_{fg} = 2257 \text{ kJ/kg}$  a 1.0135 bar y  $100^\circ\text{C}$

Entalpía de sublimación  $h_{sg} = 2834.8 \text{ kJ/kg}$  a 0.006113 bar y  $0.01^\circ\text{C}$

La entalpía por sí misma, es decir, sin asociarla a un cambio de fase, se define como la relación:

$$H = U + PV \quad (2.3)$$

en donde como ya sabemos, U, P y V son propiedades termodinámicas y por tanto, la entalpía también lo es.

En la expresión 2.3, H es la entalpía total y las unidades de esta nueva propiedad en el SI. serán las de U, y los del producto PV (joules).

La entalpía expresada de esta manera, es una propiedad extensiva ya que así lo son U y V, sin embargo, la energía interna y el vo-

lumen pueden volverse propiedades intensivas si las tomamos o consideramos por unidad de masa, así:

$$\frac{H}{m} = \frac{U}{m} + \frac{P V}{m}$$

$$h = u + pv \quad (\text{J/kg}) \quad (2.3)$$

En esta propiedad termodinámica, lo mismo que en la energía interna, sólo se pueden establecer diferencias y no valores absolutos, ya que se asigna un valor arbitrario en un estado de referencia para cada sustancia en particular.

Regresando al concepto de capacidad térmica específica, cabe mencionar que, básicamente en los gases existen capacidades térmicas específicas de acuerdo a los procesos a que se sometan, siendo las más relevantes, la capacidad térmica específica a presión constante y la capacidad térmica específica a volumen constante.

$$C_p = \frac{dh}{dT} \quad (2.4)$$

$C_p$ .- capacidad térmica específica a presión constante

$$C_v = \frac{du}{dT} \quad (2.5)$$

$C_u$ .- capacidad térmica específica a volumen constante

ambas expresiones para gases ideales.



## CONSERVACION DE LA MASA Y LA ENERGIA

Los principios de conservación de la masa y la energía son fundamentales en la Física Clásica, uno de ellos constituye la Primera Ley de la Termodinámica (conservación de la energía) además, la energía es inherente a la materia, por tanto, consideramos adecuado estudiar estos dos principios conjuntamente.

La equivalencia entre la energía mecánica y térmica fue formulada por primera vez\* en forma precisa, por un médico alemán llamado Robert Mayer, calculó el equivalente mecánico del calor empleando los valores de calores específicos determinados y publicados por Gay-Lussac.

Los artículos de Mayer fueron rechazados por el editor de la *Annalen Der Physik, Poggendorff*. Fueron publicados por primera vez por J. Von Liebig en la revista *Annalen Der Chemie Und Pharmazie* en el año de 1842.

Este principio tan importante se enuncia como: LA ENERGIA EN EL UNIVERSO ES CONSTANTE, esto es, no es posible la creación o destrucción de la energía, ésta sólo sufre transformaciones de una forma a otra. Para confirmarlo, Joule ideó un experimento que consiste básicamente en lo siguiente:

\* Leon Brillouin, en su libro: La información y la incertidumbre en la ciencia, dice que fue Sadi Carnot quién descubrió el principio de conservación de la energía e hizo mediciones del equivalente mecánico del calor con un error del 15%.

Se tiene una cierta sustancia contenida en un recipiente aislado térmicamente, en él existe un agitador que a su vez es movido por una masa suspendida como se muestra en la figura 2.7.

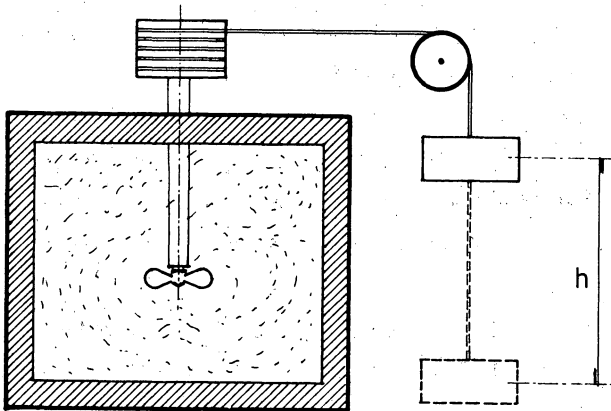


Figura 2.7 Experimento de Joule para comprobar el principio de conservación de la energía.

Suponiendo despreciable la fricción entre la masa suspendida y el aire y entre poleas y cuerda, podemos observar que la variación de energía potencial sufrida por la masa suspendida, será transmitida o aprovechada por la sustancia que se encuentra en el recipiente, incrementando su temperatura y por ende su energía interna.

Se comprobó pues, en el siglo pasado que la energía no se perdía, sino se transformaba de una forma a otra.

El balance anterior, descrito en forma cualitativa, hace refe-

rencia únicamente a la energía que se transmite de uno a otro sistema - sin hacer referencia a posibles variaciones de masa, ya que es fácil de observar que ésta permanece constante. No es así cuando tenemos un volumen de control en el cual, como ya sabemos existe flujo de masa y por - tanto, al hacer un balance energético, también lo debemos hacer de la masa que entra y sale del sistema.

De aquí se desprende la necesidad de que conozcamos el principio de conservación de la masa. Este, al igual que el de la energía, se enuncia como: *LA MASA NO SE CREA NI SE DESTRUYE, SOLO SE TRANSFORMA.*

Durante una reacción química los reactivos forman nuevas sustancias pero, la masa total permanece constante.

Se puede argumentar que la masa puede convertirse en - energía y viceversa mediante la ecuación:

$$E = mc^2$$

donde:

E, es energía

m, masa

c, velocidad de la luz

Efectivamente, el efecto de la conversión de masa en energía se aplica en procesos por ejemplo, de **fisión y fusión** nucleares sin embargo, en este estudio no consideramos efectos relativísticos, **siendo nuestro enfoque puramente clásico.**

Consideremos un volumen de control, que es donde nos será útil este principio.

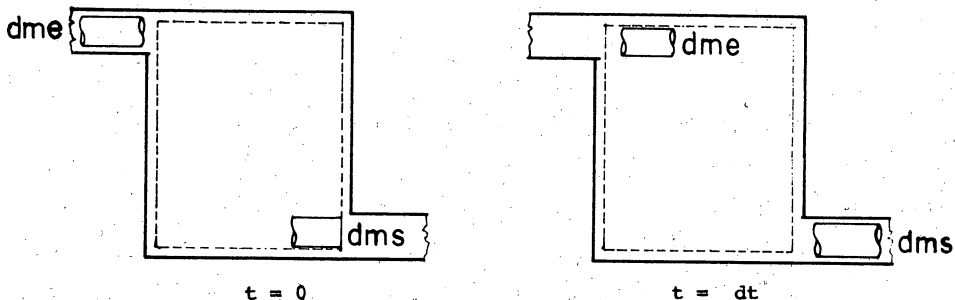


Figura 2.8

Aplicando el principio de la conservación de la masa, observamos que la variación de masa del sistema (ver figura 2.8) en el tiempo  $- dt$ , es la diferencia entre la masa que entra y la que sale.

$$(dm) \text{ v. c.} = dm_e - dm_s \quad (2.6)$$

$(dm) \text{ v. c.}$  = variación diferencial de masa que sufre el volumen de control.

$dm_e$  - diferencial de masa que entra al sistema

$dm_s$  - diferencial de masa que sale del sistema.

Si tomamos dicha variación con respecto al tiempo  $t$ , la ecuación 2.4 queda:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right) \text{ v. c.} = \frac{dm_e}{dt} - \frac{dm_s}{dt} \quad (2.6.1)$$

además, adoptando la notación

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

$$(\dot{m}) \text{ v. c.} = \dot{m}_e - \dot{m}_s \quad (2.6.2)$$

Debemos añadir que pueden haber varios accesos al sistema y varias salidas también, y los términos  $\dot{m}_e$  y  $\dot{m}_s$  involucran esas posibilidades también.

Si consideramos ahora que el sistema en cuestión funciona bajo *régimen estable*, el cual es un caso particular de la ecuación anterior - pero de mayor aplicación, la ecuación (2.6.2) se transforma en:

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s \quad (2.6.3)$$

es decir, el régimen estable nos dice que se conserva un flujo constante sin haber acumulación o disminución de masa en el volumen de control.

$$(\dot{m}) \text{ v. c.} = 0$$

Establezcamos ahora, la ecuación para un flujo estable tomando en cuenta algunas propiedades del fluido que circula.

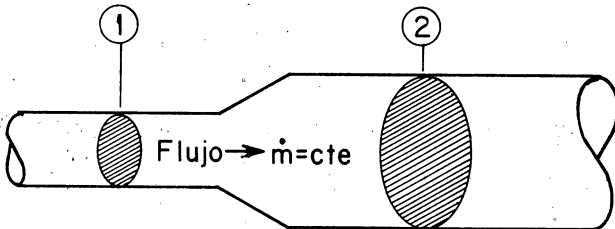


Figura 2.9 Flujo de masa bajo régimen estable

Tomemos un volumen diferencial de cualquier parte de la figura anterior, por ejemplo:

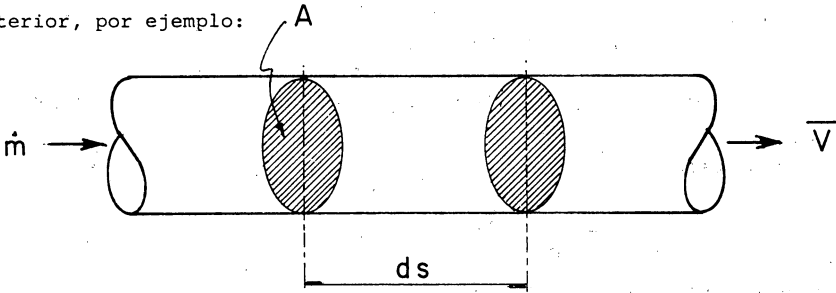


Figura 2.10 Ilustración de una diferencial de volumen que circula por un ducto.

el volumen diferencial podemos expresarlo como

$$dV = A ds$$

o bien usando la velocidad con la que se traslada el fluido, también en un tiempo diferencial

$$dV = A \bar{V} dt$$

además como ya sabemos que  $v = \frac{V}{m} \Rightarrow dV = v dm$ , sustituyendo esta expresión en la anterior:

$$v dm = A \bar{V} dt$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{A \bar{V}}{v} ; \frac{1}{v} = \rho$$

$$\dot{m} = A \bar{V} \rho$$

y además como  $\dot{m} = \text{cte}$  en todas las secciones (ver figura 2.9)

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \text{cte}$$

$$A_1 \bar{V}_1 \rho_1 = A_2 \bar{V}_2 \rho_2 = \text{cte} \quad (2.6.4)$$

siendo las unidades

$$\text{m}^2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

en caso de que el fluido sea incompresible

$$\rho_1 = \rho_2 \quad , \quad \text{entonces}$$

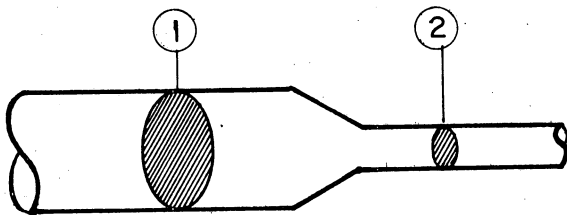
$$A_1 \bar{V}_1 = A_2 \bar{V}_2 \quad (2.6.5)$$

Las ecuaciones 2.6, 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4 y 2.6.5 son expresiones del *Principio de Conservación de la masa*.

### Ejemplo 2.1

Por la reducción de cierta tubería, circula gas natural como se muestra en la figura

Se han medido algunas propiedades del fluido en las secciones 1 y 2:



1 y 2 :

SECCIONES ① Y ②

$$\phi_1 = 12.7 \text{ cm} = 5" \quad \phi_2 = 5.08 \text{ cm} = 2"$$

$$\rho_1 = 0.95 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_2 = 4.6 \text{ kg/m}^3$$

$$\bar{V}_1 = 3.5 \text{ m/s}$$

Calcular la velocidad del fluido en la sección 2 ( $\bar{V}_2$ ), si el sistema se conserva bajo régimen estable.

Solución:

$$A_1 \bar{V}_1 \rho_1 = A_2 \bar{V}_2 \rho_2$$

$$\bar{V}_2 = \frac{A_1 \bar{V}_1 \rho_1}{A_2 \rho_2} = \frac{(12.7)^2 \times 3.5 \times 0.95}{(5.08)^2 \times 4.6} = 4.517$$

$$\bar{V}_2 = 4.517 \text{ m/s}$$

Supongamos ahora que el fluido es agua, calculemos  $\bar{V}_2$ :

$$A_1 \bar{V}_1 = A_2 \bar{V}_2$$

$$\bar{V}_2 = \frac{A_1 \bar{V}_1}{A_2} = \frac{(12.7)^2}{(5.08)^2} \times 3.5 = 21.875 \text{ m/s}$$

En Hidráulica, es común el uso del término "GASTO", dicho término se refiere al volumen de agua que circula por alguna tubería y se calcula:

$$G = A\bar{V} \quad \text{m}^2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Así mismo, CAUDAL se emplea para el gasto que maneja una bomba

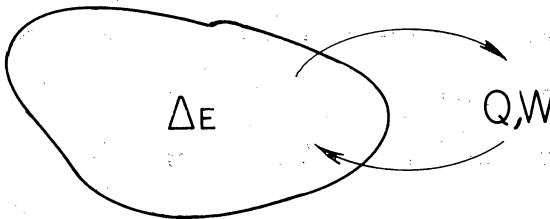


o un canal por ejemplo y viene en realidad a ser el mismo concepto de GASTO.

PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA PARA CICLOS Y PROCESOS EN SISTEMAS CERRADOS

La Primera Ley de la Termodinámica es la aplicación del principio de conservación de la energía, establece que ésta es una magnitud que se conserva y se puede expresar como sigue: "La diferencia de energía que entra y sale en un sistema termodinámico, permanece en el mismo".

Se ha visto que calor y trabajo son las dos formas de transmisión de energía, por lo tanto, una ilustración de lo enunciado anteriormente es:



Primera Ley de la Termodinámica

Sin embargo, debemos tomar una convención de que signos debemos asociar a la energía que "llega" y a la que "sale" del sistema.

Recordando que cuando aplicamos una fuerza a un cuerpo cualquiera y lo desplazamos a una cierta distancia  $x$  en la dirección de la fuerza, denotamos este trabajo como positivo, asimismo la fuerza de fricción que es aplicada en dirección contraria al movimiento, realiza un trabajo negativo, es decir, es una energía que no aprovecha el cuerpo para desplazarse, produce una elevación de temperatura en las superficies en contacto existiendo una transmisión de calor al medio ambiente.

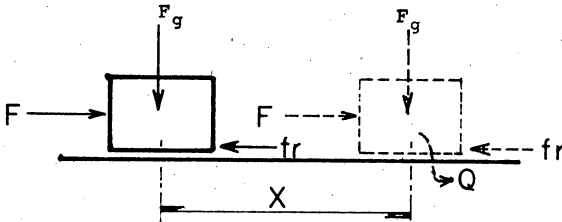


Figura 2.11 El trabajo entregado al sistema es positivo.

En resumen, la energía que llegue a un sistema termodinámico - la consideraremos positiva y la que salga como negativa, esto es:

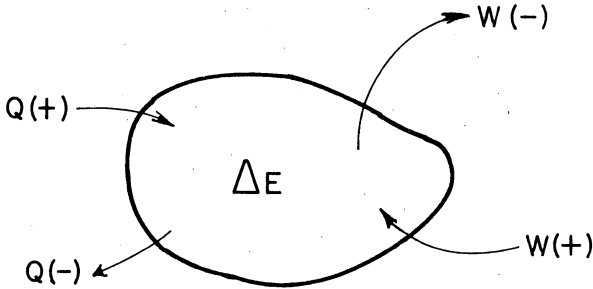


Figura 2.12 Convención de signos para La Primera Ley de la Termodinámica.

De esta forma, La Primera Ley **podrá** expresarse como la suma algebraica:

$$\Delta E = Q + W \quad (2.7)$$

donde:  $\Delta E$  es la diferencia de energía que permanece en el sistema y - que puede ser positiva o negativa, es decir, podemos tener un incremento o decremento de dicha energía en el sistema.

Q.-es el calor transmitido al, o del sistema

W.-es el trabajo transmitido al, o del sistema

Debemos aclarar que el término  $\Delta E$  involucra a las 3 manifestaciones de energía que ya conocemos, energía cinética ( $E_c$ ), energía potencial gravitacional ( $E_p$ ) y energía interna (U), esto es:

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U = Q + W \quad (2.7.1)$$

Ahora bien, si consideramos a un sistema cerrado estacionario (que no se mueve respecto a un cierto marco de referencia), los términos  $\Delta E_c$  y  $\Delta E_p$  serán nulos y la variación de la energía será exclusivamente interna.

$$\Delta U = Q + W$$

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (2.8)$$

primera ley para sistemas cerrados estacionarios.

Aún más, si particularizamos la ecuación anterior para aquellos sistemas que realizan ciclos, la expresión 2.8 quedará:

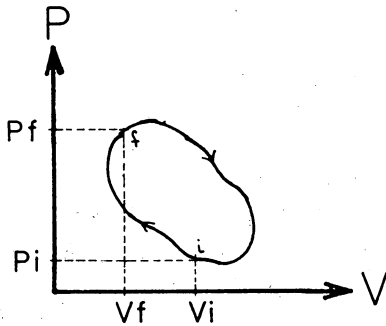
$$0 = Q + W$$

$$\oint_{\text{ciclo}} \delta Q = - \oint_{\text{ciclo}} \delta W \quad (2.9)$$

o en forma integral

$$\oint \delta Q = - \oint \delta W$$

Si consideramos por **ejemplo** un sistema con variaciones de presión y volumen (ver figura 2.12), nos daremos cuenta de que en el estado "i", el sistema tenía una energía  $U_i$  y al regresar al mismo estado, - tendrá nuevamente  $U_i$ .



**Figura 2.12** Una masa de gas sufre variaciones de P y V desde sus valores iniciales ( $P_i V_i$ ) hasta los finales ( $P_f V_f$ ) y completa el ciclo al regresar a su estado inicial nuevamente.

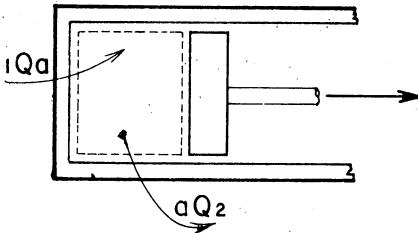
La energía interna estará asociada a los cambios de volumen

v presión que, al regresar al estado inicial el cambio neto de energía del sistema será cero,  $\Delta U = 0$

$$(Q)_{\text{ciclo}} = -(W)_{\text{ciclo}}$$

### Ejemplo 2.2

Un pistón y cilindro confinan un sistema gaseoso como se muestra en la figura, calcular la variación de energía interna entre los estados 1 y 2.

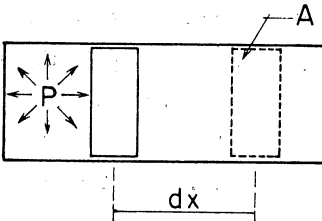


$${}_1Q_a = 50 \text{ J}$$

$${}_aQ_2 = 25 \text{ J}$$

Al resolver este problema, debemos encontrar una expresión para calcular el trabajo de esa sustancia simple compresible, veamos:

Si el pistón se está moviendo, habrá una fuerza por unidad de área del émbolo que lo haga desplazarse.



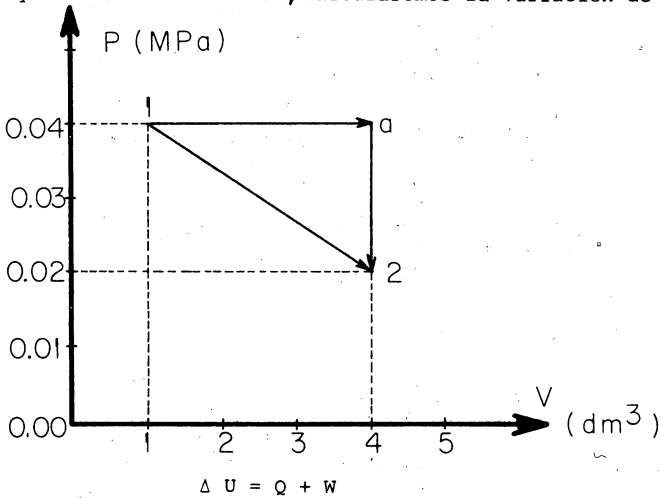
sabemos que  $W = F \cdot x$  y que  $P = \frac{F}{A}$  luego entonces

$$dW = P A dx = P dV$$

pero debemos recordar de acuerdo a nuestra convención que, el trabajo que sale de un sistema es negativo por tanto, el trabajo que desarrolle una sustancia simple compresible será:

$$dW = -P dV \quad (2.10)$$

Ahora, regresando al problema y ayudados por el diagrama de los procesos que realiza el sistema, calcularemos la variación de su energía interna.



Para llegar de 1 a 2 podemos hacerlo por la trayectoria 1-a-2 o simplemente por la 1-2, lo haremos en este caso por la 1-a-2

$$\Delta U_{1-a-2} = \Delta U_{1-a} + \Delta U_{a-2}$$

$${}_1Q_{a2} = {}_1Q_a + {}_aQ_2$$

$${}_1W_{a2} = {}_1W_a + {}_aW_2$$

$${}_1\Delta U_a = {}_1Q_a + {}_1W_a = 50 + \left(- \int_1^a P dV\right)$$

$$\begin{aligned} - \int_1^a P dV &= - (\text{área bajo la curva 1-a}) = - (0.04 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-3}) = \\ &= - 120 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{m}^3 \right] = - 120 \text{ J (trabajo que sale del sistema)} \end{aligned}$$

$${}_1\Delta U_a = 50 - 120 = - 70 \text{ J}$$

$${}_a\Delta U_2 = {}_aQ_2 + {}_aW_2$$

$${}_a\Delta U_2 = - 25 + 0 \quad \text{ya que el área bajo la curva a-2 es nula}$$

$$\Delta U_{1-a-2} = {}_1\Delta U_a + {}_a\Delta U_2 = - 70 - 25 = - \underline{\underline{95 \text{ J}}}$$

Las preguntas que siguen, se dejan como ejercicio para el estudiante:

- Si el sistema sigue la trayectoria recta 1-2, ¿qué cantidad de calor se transmite durante el proceso?
- Si el sistema regresa al estado inicial, compruebe que  $W_{\text{neto}} = - Q_{\text{neto}}$  en el ciclo.

## GAS IDEAL

El gas ideal, también se conoce como gas perfecto y es una idealización del comportamiento de los gases reales aunque en algunas condiciones de presión y temperatura, dichos gases reales tienen un comportamiento semejante al modelo de gas ideal.

Se define al gas ideal como, aquel que se comporta de acuerdo a las leyes de:

Boyle-Mariotte

Charles

Gay-Lussac

Joule

Avogadro

*Ley de Boyle-Mariotte (1627 - 1691)*

"Si en un gas mantenemos la temperatura constante, la variación de la presión será inversamente proporcional a la variación de volumen", - esto es:

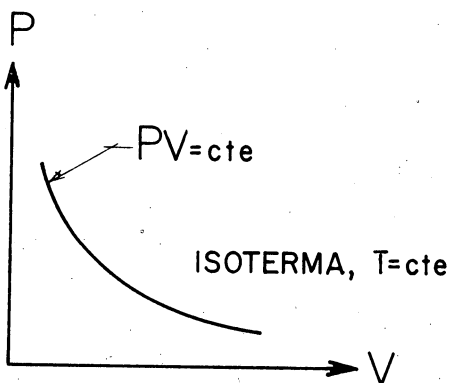
$$P \propto \frac{1}{V} \text{ a } T \text{ cte}$$

introduciendo una constante de proporcionalidad

$$P = \frac{C}{V} \Rightarrow P V = C$$

que, en un plano  $V - P$  sería la ecuación de una hipérbola equilátera.





Ley de Charles (1746 - 1823)

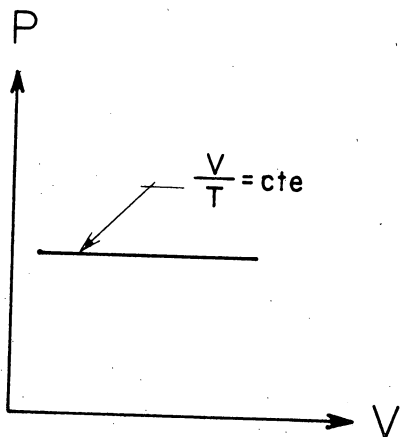
"Las variaciones de volumen de un gas, son directamente proporcionales a las variaciones de su temperatura, cuando la presión de éste permanece constante"

$$V \propto T$$

$$P = cte$$

$$V = c T$$

$$\frac{V}{T} = c$$



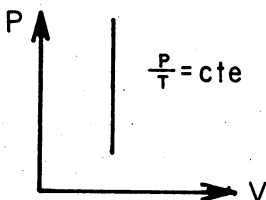
Existe un segundo enunciado de esta Ley:

" Cuando el volumen de un gas permanece constante, la presión de éste varía proporcionalmente a su temperatura "

$$P \propto T \quad V = \text{cte}$$

$$P = c T$$

$$\frac{P}{T} = c$$



Ley de Gay - Lussac (1778 - 1850)

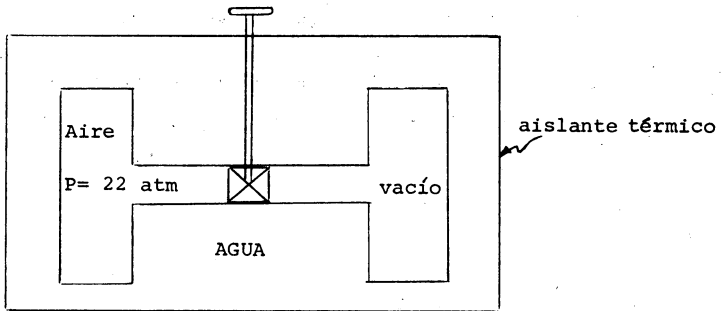
Esta ley coincide con el segundo enunciado de Charles, de tal forma que se puede enunciar también como:

$$\frac{P}{T} = C$$

Cabe mencionar que en estas tres leyes enunciadas anteriormente, se hace alusión a presiones y temperaturas ABSOLUTAS.

Ley de Joule (1818 - 1889)

James Presscott Joule, utilizando un experimento ya efectuado por Gay-Lussac, dispuso 2 recipientes de cobre unidos por una válvula e inmersos en agua, todo esto aislado térmicamente. Uno de los recipientes conteniendo aire a 22 atmósferas y el otro al vacío, cuando se tenía equilibrio térmico en todo este sistema, se dejó fluir libremente el aire de uno a otro recipiente hasta que se estableció una presión de 11 atmósferas.



Joule observó que la temperatura del agua que rodeaba a los recipientes era la misma, antes y después del experimento, esto lo condujo a una deducción importante:

"La energía interna (U) de los gases depende exclusivamente de la temperatura  $U = U(T)$ " T.- temperatura absoluta.

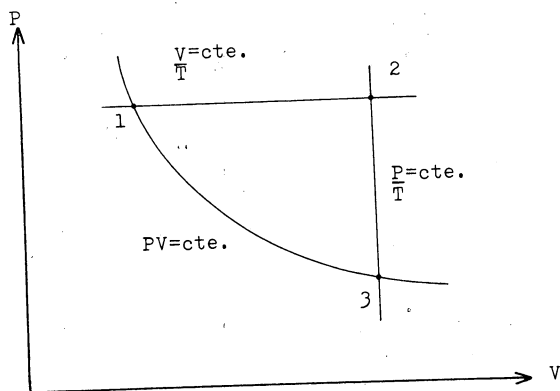
*Ley de Avogadro (1776 - 1856)*

El físico italiano, Amadeo Avogadro estableció que: "gases ideales con la misma temperatura y presión que, ocuparan volúmenes iguales, tendrían el mismo número de moléculas".

Para medir el número de moléculas, se estableció un número que se conoce como número de Avogadro ( $6.022 \times 10^{23}$ )

En el sistema Internacional de Medidas, esta cantidad se conoce como mol (cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales como existen átomos en 12 gramos de carbono 12) y que puede ser usada para contabilizar: átomos, moléculas, iones, electrones de grupos específicos de partículas, etc.

Considerando ahora, cada uno de los procesos descritos anteriormente por las leyes que rigen a los gases ideales:



$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \text{y como} \quad P_1 = P_2 \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (a)$$

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \quad \text{y como} \quad V_2 = V_3 \quad \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \quad (b)$$

$$P_1 V_2 = P_3 V_3 \quad \text{y como} \quad T_1 = T_3 \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \quad (c)$$

se observa de (a), (b) y (c) que

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} = \text{cte}$$

es decir, el producto de la presión por el volumen entre la temperatura absoluta, arroja siempre un mismo resultado, o bien es siempre una constante.

El valor de dicha constante es función de la masa de gas con

que se esté experimentando, ahora que si tomamos el volumen del gas por unidad de masa, el resultado será independiente de la masa de gas con que se experimente, esto es:

$$\frac{P_1 v_1}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{T_2} = \frac{P_3 v_3}{T_3} = \text{cte} = R$$

siendo R, la constante particular de cada gas, así pues R tendrá un valor específico para cada gas, por ejemplo:

$$R_{\text{aire}} = 286.7 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} , R_{\text{O}_2} = 259.8 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$R_{\text{CH}_4} = 510.6 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} , R_{\text{N}_2} = 296.93 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} , \text{ etc.}$$

Para verificar las unidades de esta constante se puede despejar de la ecuación de estado

$$P v = R T , \quad R = \frac{P v}{T} \quad \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^3}{\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}} \right]$$

$$[R] = \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$$

La ecuación de gas ideal, considerando a cada gas en particular se puede escribir como

$$P v = R t \quad (2.11)$$

bien como

$$P V = m R T \quad (2.11.1)$$

Ejemplo 2.3

2 Kg de un gas efectúan un proceso partiendo de un estado inicial en el que  $P = 1$  bar,  $V = 0.2 \text{ m}^3$  y  $T = 300 \text{ K}$ , hasta un estado final en el que  $P = 4$  bars y  $V = 0.15 \text{ m}^3$ , encuentre la temperatura final y el valor de la constante particular del gas.

Datos:

$$\begin{aligned} m &= 2\text{Kg} & P_2 &= 4 \text{ bars} \\ P_1 &= 1 \text{ bar} & V_2 &= 0.15 \text{ m} \\ V_1 &= 0.2 \text{ m} \\ T_1 &= 300 \text{ K} \end{aligned}$$

Solución:

$$R = \frac{P_1 V_1}{m T_1} = \frac{1(0.2)10^5}{2(300)}$$

$$R = 33.334 \frac{\text{Joule}}{\text{Kg}^\circ\text{K}}$$

$$T_2 = \frac{P V}{m R} = \frac{4(0.15)10^5}{2(33.334)}$$

$$T = 399.98 \text{ K}$$

Continuando con el desarrollo de la ecuación de estado para el gas perfecto, la ley de Avogadro establece que:

Si dos gases diferentes (por ejemplo A y B) ocupan el mismo volumen, tienen la misma temperatura y presión, tendrán el mismo número

le moléculas, es decir el mismo número de moles

$$\begin{aligned}P_A &= P_B \\V_A &= V_B = n_A = n_B \\T_A &= T_B\end{aligned}$$

Además, de la definición que se ha dado de mol se infiere que:

$$n = \frac{m}{M} \quad \text{donde } m.- \text{ masa en gramos}$$

M.- masa molecular (también llamado peso molecular, o peso atómico si se trata de un solo elemento)

$$(n) = (\text{g/g/mol}) = (\text{mol}) \text{ o bien; } (\text{kg/kg/k mol}) = (\text{k mol})$$

Bien, recordando que  $PV = n R T$  y que  $n_A = n_B$ , se puede escribir:

$$\frac{m_A}{M_A} = \frac{P V}{R_A T M_A} = \frac{P V}{R_B T M_B} = \frac{m_B}{M_B}$$

Como P, V y T son iguales, se pueden cancelar de la igualdad, quedando:

$$\frac{1}{R_A M_A} = \frac{1}{R_B M_B} \Rightarrow R_A M_A = R_B M_B = \text{cte}$$

el valor de esta constante, es siempre el mismo para cualquier gas que se comporte idealmente.

$$\bar{R} = R M \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11.1)

$$PV = n \bar{R} T \quad (2.13)$$

$$\bar{R} = \frac{P V}{n T} \left[ \frac{N}{m^2} m^3 \frac{1}{\text{mol}} \frac{1}{K} \right]$$

$$\left[ \bar{R} \right] = \left[ \frac{J}{\text{mol K}} \right] ; \text{ el valor de } \bar{R} \text{ en el S. I.}$$

es

$\bar{R} = 8,314 \frac{J}{\text{mol K}}$  es decir, el valor de  $\bar{R}$  dependerá de las unidades en que se mida.

#### Ejemplo 2.4

Determinar la constante particular  $R$  y el número de moles "n" de los siguientes gases:

Hidrógeno  $H_2$ ;  $m = 1.36 \text{ kg}$ ;  $M = 2.01 \text{ kg/k mol}$

Nitrógeno  $N_2$ ;  $m = 7.29 \text{ kg}$ ;  $M = 28.0 \text{ kg/k mol}$

Oxígeno  $O_2$ ;  $m = 15.9 \text{ kg}$ ;  $M = 32.0 \text{ kg/k mol}$

Helio  $He$ ;  $m = 11.3 \text{ kg}$ ;  $M = 4.0 \text{ kg/k mol}$

Neón  $Ne$ ;  $m = 17.82 \text{ kg}$ ;  $M = 20.18 \text{ kg/k mol}$

$$\bar{R} = 8\,314 \text{ Joule/k mol} \cdot K$$

Solución:

$$R_{H_2} = \frac{\bar{R}}{M_{H_2}} = \frac{8314}{2.01} = 4136.3 \frac{J}{\text{kg K}} ; n_{H_2} = \frac{m}{M_{H_2}} = \frac{1.36}{2.01} = 0.676 \text{ k mol.}$$

$$R_{N_2} = \frac{\bar{R}}{M_{N_2}} = \frac{8314}{28} = 296.93 \frac{J}{\text{kg K}} ; n_{N_2} = \frac{m}{M_{N_2}} = \frac{7.29}{28} = 0.26 \text{ k mol}$$



Los demás cálculos se dejan al estudiante como ejercicio.

Ejemplo 2.5

Un tanque que contiene 5 K mol de  $H_2$  a 10 bars, man y 303 K - tiene una válvula de seguridad que abre cuando la presión en - el tanque alcanza un valor de 11 bars, man.

- ¿Cuál es el volumen del tanque?
- ¿A qué temperatura llegará el hidrógeno cuando se abra la válvula de seguridad?

$$P_{\text{atm}} = 1.01 \text{ bar} ; \quad \bar{R} = 8 \ 314 \text{ Joule/k mol}\cdot\text{K}$$

Solución:

$$a) \quad P_1 V_1 = n \bar{R} T_1 \quad ; \quad V = \frac{n \bar{R} T}{P} = \frac{5 \times 8314 \times 303}{(10 + 1.01) \times 10^5}$$

$$V_1 = 11.44 \text{ m}^3 \left[ \frac{\text{k mol}\cdot\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{K}\cdot\text{m}^2}{\text{k mol}\cdot\text{K}\cdot\text{N}} \right] = \left[ \text{m}^3 \right]$$

$$b) \quad T_2 = \frac{P_2 V_1}{n \bar{R}} = \frac{(11 + 1.01) \times 10^5 \times 11.44}{5 \times 8314} = 330.52 \text{ K}$$

$$\left[ \frac{\text{N} \cdot \text{k mol}\cdot\text{K}\cdot\text{m}^3}{\text{m}^2 \cdot \text{k mol}\cdot\text{N} - \text{m}} \right]$$

### PROCESOS CON GAS IDEAL

Antes de iniciar con el primer proceso, se debe aclarar que todos ellos (los que aquí se exponen) son procesos reversibles, por lo que su representación gráfica y ecuaciones que las definen, tendrán esa característica.

#### PROCESO ISOCORICO O ISOMETRICO

La característica esencial de este proceso, es que el sistema (gas ideal) mantenga su volumen constante. En el plano  $v - P$  su representación es como se observa a continuación.

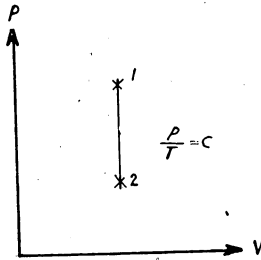


Fig. 2.13 Proceso Isocórico o Isométrico

Aplicando la Primera Ley de la Termodinámica a un sistema cerrado estacionario que siga este proceso, se tiene:

$$\Delta U = Q + w$$

donde

$\Delta U = m C_v \Delta T$  por la definición de calor específico a volumen constante

$$C_v = \frac{du}{dT} \Rightarrow du = C_v dT$$

$Q = m C_v \Delta T$  ya que el proceso es a volumen constante.

$w = -\int PdV = 0$  por la misma razón, si  $v = \text{constante} \Rightarrow dV = 0$   
así,

$$\Delta U = Q \quad (2.14)$$

En un proceso isocórico, la variación de la energía interna - se debe exclusivamente a la transmisión de calor.

#### PROCESO ISOBARICO

En este proceso, el sistema mantiene la presión constante, su representación en un plano  $v - P$  se observa en la figura 2.14

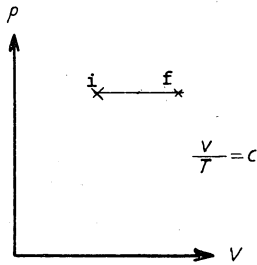


Fig. 2.14 Proceso Isobárico

Aplicando un balance energético de acuerdo a la Primera Ley, -  
a un sistema que sufre un proceso como éste,

$$\Delta U = Q + w$$

$$w = - \int_1^2 P \, dV = - P (V_2 - V_1)$$

sustituyendo

$$U_2 - U_1 = {}_1Q_2 - P (V_2 - V_1)$$

$$(U_2 + P V_2) - (U_1 + P V_1) = {}_1Q_2$$

$$H_2 - H_1 = {}_1Q_2 \quad \text{resultado que era de}$$

esperarse ya que:

$${}_1Q_2 = m C_p (T_2 - T_1) \quad \text{por ser un proceso a presión constante}$$

Y además

$$C_p = \frac{dh}{dT} \Rightarrow dh = C_p \, dT$$

El cálculo de  $\Delta U$  y  $\Delta H$  se debe hacer usando  $C_v$  y  $C_p$   
respectivamente e independientemente del proceso que siga el sistema

Por otra parte, estableciendo nuevamente el balance en forma  
diferencial para este proceso,

$$dU = \delta Q + \delta w$$

esto es,

$$m C_v \, dT = m C_p \, dT - P \, dV$$

de la ecuación de estado y tomando su diferencial

$$d(PV) = d(m R T)$$

$$P \, dV + V \, dP = m R \, dT$$

como la presión es constante

$$P dV = m R dT$$

luego sustituyendo en la ecuación de la primera ley

$$m C_v dT = m C dT - m R dT$$

que se reduce a la expresión

$$C_v = C_p - R$$

$$R = C_p - C_v \quad (2.15)$$

(2.15) es importante ya que podemos obtener el valor de una de estas propiedades del gas, en función de las otras dos.

Si el desarrollo anterior se hace con la ecuación

$$P V = n \bar{R} T$$

el resultado que obtendremos será,

$$\bar{R} = \bar{C}_p - \bar{C}_v \quad (2.15.1)$$

en donde  $\bar{C}_p$  y  $\bar{C}_v$  son capacidades térmicas específicas cuyas unidades en el S.I. son:

$$\frac{J}{\text{mol} \cdot K}$$

#### PROCESO ISOTERMICO

En este proceso, la temperatura permanece constante y su representación en un plano  $v - P$ , como ya se vió en Ley de Boyle-Mariotte,

es una hipérbola equilátera

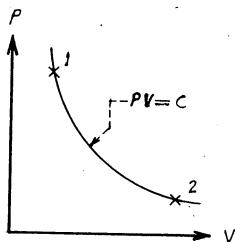


Fig. 2.15 Proceso Isotérmico

De acuerdo a la Primera Ley

$$\Delta U = Q + w$$

y tomando en cuenta que la Ley de Joule establece  $U = U(T)$ , no existirá variación de energía interna ya que si

$$T = c \Rightarrow U = c$$

así

$$Q = -w$$

y como

$$w = - \int P dV$$

habrá que expresar a  $P$  en función de  $V$ , o bien,  $V$  en función de  $P$  para efectuar la integral ya que  $P$  y  $V$  varían durante el proceso. (véase

figura 2.15).

Recordando que la ecuación del proceso es,

$P_1 V_1 = P_2 V_2 = PV = C$  donde  $C$  es una constante, podemos expresar a  $P$  en función de  $V$ , esto es,

$$P = \frac{C}{V}$$

sustituyendo en la ecuación del trabajo:

$${}_1W_2 = - \int_1^2 \frac{C}{V} dV$$

$${}_1W_2 = - C \operatorname{Ln} V \Big|_1^2 \quad \text{y como } C = P_1 V_1 = P_2 V_2$$

$${}_1W_2 = - P_1 V_1 \operatorname{Ln} \frac{V_2}{V_1}$$

$${}_1W_2 = - P_2 V_2 \operatorname{Ln} \frac{V_2}{V_1}$$

así pues, tenemos que

$$Q_{i f} = - {}_i w_f = P_i V_i \operatorname{Ln} \frac{V_f}{V_i} \quad (2.16)$$

$$Q_{i f} = - w = P_f V_f \operatorname{Ln} \frac{V_f}{V_i} \quad (2.16.1)$$

#### PROCESO ADIABATICO

Un proceso adiabático, es aquel en el cual no existe transmisión de calor (hacia el sistema, ni del sistema hacia otros). Este

proceso también se conoce como isentrópico, ya que de acuerdo a la variación de entropía en procesos reversibles (vista en el capítulo III):

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} \quad \text{y si } Q = 0$$

$$\Delta S = 0 \Rightarrow S_i = S_f$$

Así pues, un proceso adiabático reversible, es un proceso -  
ISENTROPICO.

Por ahora no podemos representar este proceso gráficamente ya que no conocemos la ecuación que lo define, para obtenerla, aplicamos -  
la Primera Ley.

$$dU = \delta W + \delta Q$$

$$\delta Q = 0 \quad \text{para este proceso,}$$

$$dU = \delta W$$

esto es

$$m C_v dT = - P dv$$

de la ecuación de estado

$$d(PV) = d(m R T)$$

$$P dV + V dP = m R dT \quad (a)$$

$$P dV = m R dT - V dP \quad (b)$$

de (a)

$$dT = \frac{P dv + v dP}{m R} \quad (c)$$



sustituyendo (b) en:  $dU = \delta W$

$$m C_v dT = -m R dt + V dP$$

$$dT (m C_v + m R) = V dP$$

y como

$$R = C_p - C_v$$

$$dT (m C_p) = V dP$$

$$dT = \frac{V dP}{m C_p} \quad (d)$$

igualando (c) con (d)

$$\frac{P dV + V dP}{m R} = \frac{V dP}{m C_p}$$

o bien

$$\frac{P dV + V dP}{m (C_p - C_v)} = \frac{V dP}{m C_p}$$

$$C_p P dV + C_p V dP = C_p V dP - C_v V dP$$

$$C_p P dV + C_v V dP = 0$$

haciendo  $k = \frac{C_p}{C_v}$  (k se conoce como índice adiabático)

$$k P dV + V dP = 0$$

separando variables

$$k \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

integrando

$$k \ln V + \ln P = \ln C \quad (\ln C, \text{ es la constante de integración})$$

por propiedades de los logaritmos

$$\ln PV^k = \ln C$$

finalmente, tomando antilogaritmos

$$PV^k = C \quad (2.17)$$

La expresión 2.17 es la ecuación de la curva que representa - procesos isentrópicos o adiabáticos reversibles.

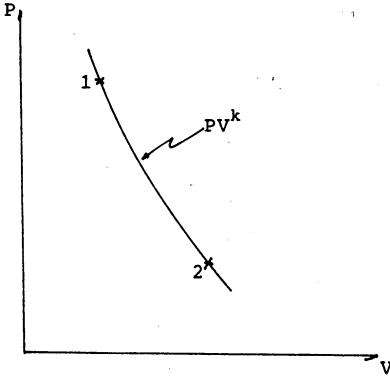


Fig. 2.16 Proceso Isentrópico o Adiabático Reversible

Esto es

$$P_1 V_1^k = P_2 V_2^k = PV^k = C$$

Bien, para encontrar una expresión que nos permita calcular el trabajo desarrollado por una sustancia simple compresible (gas ideal) en un proceso isentrópico, obtengamos  $P$  en función de  $V$  como en el caso del proceso isotérmico.

$${}_1W_2 = - \int_1^2 P \, dV$$

$$P V^k = C \quad , \quad P = \frac{C}{V^k}$$

sustituyendo,

$${}_1W_2 = - \int_1^2 \frac{C}{V^k} \, dV$$

o bien

$${}_1W_2 = - \int_1^2 C V^{-k} \, dV$$

integrando

$${}_1W_2 = - \left[ \frac{C V^{-k+1}}{-k+1} \right]_1^2$$

o bien

$${}_1W_2 = \left[ \frac{C V^{-k+1}}{k-1} \right]_1^2$$

evaluando de 1 a 2 y como  $C = P_1 V_1^k$  y también  $C = P_2 V_2^k$

$${}_1W_2 = \frac{P_2 V_2^{-k+1} V_2 - P_1 V_1^{-k+1}}{k-1}$$

$${}_1W_2 = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{k-1}$$

en general

$$W = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{k - 1} \quad (2.18)$$

### PROCESO POLITROPICO

El proceso politrópico es aquel que cumple la ecuación  $PV^n = C$  o bien,  $P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$  donde "n" se conoce como índice politrópico. En teoría este exponente puede tener cualquier valor entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . En la práctica, el valor de n no difiere mucho de "k" (índice adiabático).

Matemáticamente,  $PV^k = C$  no difiere de  $PV^n = C$ , sin embargo, a n la podemos hacer variar sustancialmente de tal forma que todos los procesos anteriores los podamos representar con  $PV^n = C$ , seleccionando valores adecuados de n.

- si  $n = 0$  ,  $PV^0 = C$  ,  $P = C$       Proceso Isobárico
- si  $n = 1$  ,  $PV^1 = C$  ,  $PV = C$       Proceso Isotérmico
- si  $n = k$  ,  $PV^k = C$  ,  $PV^k = C$       Proceso Adiabático
- si  $n \rightarrow \infty$  ,  $PV^\infty = C$  ,  $V = C$       Proceso Isotérmico

(Este último, lo demostraremos en forma más explícita más adelante).

La representación de estos procesos se observa en la figura

2.17.

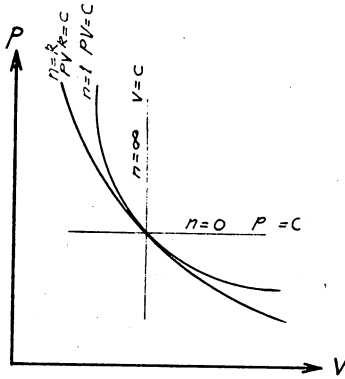


Fig. 2.17 Descripción de procesos para diferentes valores de  $n$

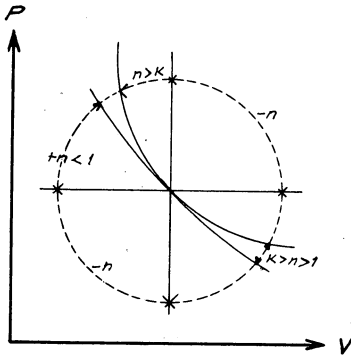


Fig. 2.18 Rangos de la variación de  $n$ .

La obtención, para este proceso, de una expresión que nos permita calcular el trabajo realizado por un gas o suministrado a él, la podemos copiar de la del adiabático ya que matemáticamente  $PV^n = C$  es lo mismo que  $PV^k = C$ .

Así pues, el resultado final será:

$$w = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{n - 1} \quad (2.19)$$

Asimismo, la obtención de las relaciones entre  $P$ ,  $T$  y  $V$  serán iguales para un proceso adiabático, que para un politrópico.

- Relación entre  $P$  y  $V$

$$P_i V_i^n = P_f V_f^n$$

$$\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^n = \frac{P_f}{P_i} \quad \text{así también,} \quad \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^k = \frac{P_f}{P_i} \quad (2.20)$$

- Relación entre  $P$  y  $T$

de la ecuación 2.20

$$\frac{V_i}{V_f} = \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (a)$$

y de la ecuación de estado para el estado inicial y final del proceso

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = m r$$

$$\frac{P_f V_f}{T_f} = m r$$

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{P_f}{P_i} \frac{T_i}{T_f} \quad (b)$$

igualando (a) con (b)

$$\left( \frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{P_f}{P_i} \frac{T_i}{T_f}$$

$$\left( \frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{T_i}{T_f} \quad \text{así también,} \quad \left( \frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{1}{k}-1} = \frac{T_i}{T_f} \quad (2.21)$$

Hacemos un paréntesis para señalar que, cuando  $n \rightarrow \infty$  :

$$\left( \frac{P_f}{P_i} \right)^{-1} = \frac{T_i}{T_f} \Rightarrow \frac{P_i}{P_f} = \frac{T_i}{T_f} \Rightarrow \frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f} = C$$

ecuación que describe un proceso isométrico

∴ cuando  $n \rightarrow \infty$   $V = C$

- Relación entre V y T

de 2.20 y de la ecuación de estado

$$\frac{P_f}{P_i} = \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^n, \quad \frac{P_f}{P_i} = \frac{V_i}{V_f} \frac{T_f}{T_i}$$

igualándolas:

$$\left( \frac{V_i}{V_f} \right)^n = \frac{V_i}{V_f} \frac{T_f}{T_i}$$

$$\left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{n-1} = \frac{T_f}{T_i}, \quad \text{así también,} \quad \left( \frac{V_i}{V_f} \right)^{k-1} = \frac{T_f}{T_i} \quad (2.22)$$

Ahora bien, para condensar las fórmulas y expresiones vistas en este subtema, *Procesos con Gases Ideales*, se construye la siguiente tabla:

Proceso ↓	$\Delta U$	Q	W	$\Delta H$	* $\Delta S$	Relaciones		
						P - V	P - T	V - T
Isométrico o Isocórico	$m C_V \Delta T$	$m C_V \Delta T$	0	$m C_P \Delta T$	$m C_V \ln \frac{T_f}{T_i}$	$V = C$	$\frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}$	$V = C$
Isobárico	$m C_V \Delta T$	$m C_P \Delta T$	$-P(V_f - V_i)$	$m C_P \Delta T$	$m C_P \ln \frac{T_f}{T_i}$	$P = C$	$P = C$	$\frac{V_i}{T_i} = \frac{V_f}{T_f}$
Isotérmico	0	-W	$-\frac{P_i V_i}{k-1} \ln \frac{V_f}{V_i}$ o $-\frac{P_f V_f}{k-1} \ln \frac{V_f}{V_i}$	0	$m r \ln \frac{V_f}{V_i}$	$P_i V_i = P_f V_f$	$T = C$	$T = C$
Adiabático o Isentrópico	$m C_V \Delta T$	0	$\frac{P_f V_f - P_i V_i}{k-1}$	$m C_P \Delta T$	0	$\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^k = \frac{P_f}{P_i}$	$\left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{\frac{1}{k}-1} = \frac{T_i}{T_f}$	$\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{k-1} = \frac{T_f}{T_i}$
Politrópico	$m C_V \Delta T$	$\Delta U - W$	$\frac{P_f V_f - P_i V_i}{n-1}$	$m C_P \Delta T$	** $m C_n \ln \frac{T_f}{T_i}$	$\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^n = \frac{P_f}{P_i}$	$\left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{T_i}{T_f}$	$\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{n-1} = \frac{T_f}{T_i}$

Tabla 2.1 Condensación de fórmulas, Procesos con Gases Ideales

\* El estudio de la entropía corresponderá al tema III.

\*\* La deducción de esta ecuación en particular no se hará en estos apuntes.



EJEMPLO 2.6

Dos Kg de oxígeno se comprimen politrópicamente según la relación  $PV^n = C$  ;  $n = 1.3$

$$P_1 = 200 \text{ bar} ; T_1 = 300 \text{ K}$$

$$P_2 = 1400 \text{ bar} ; C_p = 0.918 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} ; C_v = 0.658 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$$

Hallar:

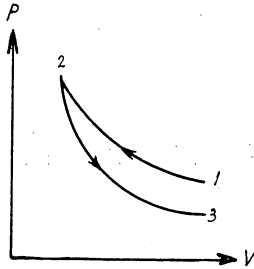
- a) El volumen inicial y final
- b) Temperatura final
- c) Trabajo suministrado al gas
- d) Cambio de energía interna
- e) La transmisión de calor
- f) Cambio de entalpía

Después del proceso anterior, el oxígeno sufre una expansión isentrópica con  $k = 1.4$  desde el estado 2 hasta una presión  $P_3 = 150 \text{ bar}$ , hallar:

- a) Temperatura  $T_3$
- b) El cambio de entalpía
- c) El cambio de energía interna
- d) El trabajo hecho por el gas

SOLUCION:

Representemos los procesos gráficamente para conocer en una forma más objetiva, las transformaciones que sufre el sistema.



Para el proceso inicial 1-2

a) El volumen inicial, se calcula mediante

$$V_1 = \frac{m r T_1}{P_1} \quad ; \quad R = \frac{\bar{R}}{M} = \frac{8.314}{32} = 0.2598 = 0.26$$

o bien

$$R = C_p - C_v = 0.918 - 0.658$$

$$R = 0.26 \quad \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$R = 260 \quad \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$V_1 = \frac{2 \times 260 \times 300}{200 \times 10^5}$$

$$V_1 = 7.8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

el volumen final será:

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n \Rightarrow V_2 = V_1 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{n}} = 7.8 \times 10^{-3} \left( \frac{200}{1400} \right)^{\frac{1}{1.3}} =$$
$$V_2 = 1.746 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

b) La temperatura final es,

$$T_2 = \frac{V_2 P_2}{m R} = \frac{1.746 \times 10^{-3} \times 1400 \times 10^5}{2 \times 260} = 470 \text{ K}$$

o bien

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} = 300 \left( \frac{7.8}{1.746} \right)^{1.3-1} = 470 \text{ K}$$

c) Trabajo suministrado al gas,

$${}_1W_2 = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{n - 1} = \frac{(1400 \times 1.746 - 200 \times 7.8) \times 10^2}{1.3 - 1} = 2.948 \times 10^5$$

$${}_1W_2 = 2.948 \times 10^5 \text{ J.}$$

d) Cambio de energía interna

$$\Delta U = m C_V (T_2 - T_1) = 2 \times 658 (470 - 300) = 2.2372 \times 10^5 \text{ J}$$

e) La transmisión de calor

$$Q = \Delta U - W = (2.2372 - 2.948) \times 10^5 = -0.7108 \times 10^5$$

$$Q = -0.7108 \times 10^5 \text{ J}$$

f) Cambio de entalpía

$$\Delta H = m C_p (T_2 - T_1) = 2 \times 918 \times (470 - 300) = 3.1212 \times 10^5 \text{ J}$$

Para el proceso 2 - 3

$$a) T_3 = \frac{T_2}{\left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{1}{k}-1}} = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{1-\frac{1}{k}} = 470 \left(\frac{150}{1400}\right)^{1-\frac{1}{1.4}} = 248.3 \text{ K}$$

$$T_3 = 248.3 \text{ K}$$

b) El cambio de entalpía

$$\Delta H = m C_p (T_3 - T_2) = 2 \times 918 (248.3 - 470) = - 4.07041 \times 10^5$$

$$\Delta H = - 4.07041 \times 10^5 \text{ J}$$

c) El cambio de energía interna

$$\Delta U = m C_v (T_3 - T_2) = 2 \times 658 (248.3 - 470) = - 2.91757 \times 10^5$$

$$\Delta U = - 2.91757 \times 10^5 \text{ J}$$

d) El trabajo hecho por el gas

$${}_2W_3 = \frac{P_3 V_3 - P_2 V_2}{k - 1} ; V_3 = \frac{m R T_3}{P_3} = \frac{2 \times 260 \times 248.3}{150 \times 10^5} = 8.3 \times 10^{-3}$$

$$V_3 = 8.3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$${}_2W_3 = \frac{(150 \times 8.3 - 1400 \times 1.746) \times 10^2}{1.4 - 1} = - 2.9985 \times 10^5$$

$${}_2W_3 = - 2.9985 \times 10^5 \text{ J}$$

El análisis de unidades se deja como ejercicio para el alumno.

PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA PARA SISTEMAS ABIERTOS

Hasta ahora hemos estudiado únicamente sistemas en los cuales, la sustancia que existe en dichos sistemas, no se desplaza a través de su frontera.

Tal situación, es inversa en un volumen de control o sistema abierto. En principio, esta transferencia de masa parece incongruente con los balances energéticos efectuados en un sistema cerrado; alguien podría preguntar. ¿Cómo sabremos el estado final e inicial de la sustancia que fluye por el volumen de control, ya en condiciones de equilibrio termodinámico? La respuesta es que, se hacen algunas consideraciones para determinar los estados termodinámicos del flujo másico al entrar y salir respectivamente del sistema.

Para realizar un balance energético y de masa en un volumen de control, consideremos la figura 2.19 en un intervalo de tiempo diferencial (de  $t = 0$  a  $t = dt$ ).

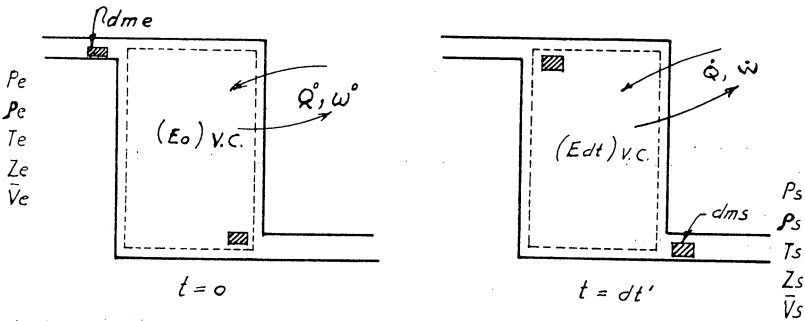


Figura 2.19 Volumen de Control en un intervalo de tiempo diferencial

- donde: P.- presión del elemento diferencial de masa a  
ρ.- densidad la entrada si tiene el subíndice "e"  
T.- temperatura y a la salida, si el subíndice es "s".  
z.- posición  
 $\bar{v}$ .- velocidad

$\dot{Q}dt$ .- Es la transmisión de calor que se lleva a cabo durante el intervalo de tiempo de  $t = 0$  a  $t = dt$

$\dot{W}dt$ .- Es la otra forma de transmisión de energía (trabajo) durante el mismo intervalo de tiempo. A este término también se le llama trabajo de eje o trabajo de flecha porque se transmite a través de estos elementos mecánicos.

$(E_0)_{v.c.}$ - Es la energía interna que tiene toda la masa que en ese momento ( $t = 0$ ) existe dentro del volumen de control.

$(E_{dt})_{v.c.}$ - Es la energía interna que tiene toda la masa existente en el volumen de control, en el tiempo  $t = dt$ .

$dm$ .- Es la diferencial de masa que "entra" (e) o "sale" (s) del volumen de control y que lleva consigo: energía interna, energía cinética y energía potencial gravitacional.

Además, la masa que entra y sale del volumen de control realiza un trabajo denominado, trabajo de flujo. Nótese que debe existir una fuerza que impulse a la masa al entrar y al salir respectivamente del sistema, tal fuerza la suministra la presión exterior si la masa es impulsada hacia el sistema e interior (del sistema), si es impulsada hacia el exterior.

Si se piensa en una masa que tiene un área transversal A, y ocupa una longitud  $d\ell$ , independientemente de la cantidad de masa,  $d\ell$  se expresa como:  $d\ell = \frac{dV}{A}$  ( $m^3/m^2$ ) de manera que, el

trabajo para impulsar a la masa o bien, el trabajo de flujo es:

$$F \, dl = PA \frac{dV}{A} = PdV \left( \frac{N}{m^2} \cdot m^3 \right)$$

$$PdV \text{ (joules)} \qquad (2.23)$$

Bien, una vez que se han aclarado los términos involucrados en este tipo de sistemas, el primer principio de la Termodinámica o de la conservación de la energía (en el intervalo de tiempo ya mencionado) se establece como sigue:

La energía interna, cinética y potencial gravitacional asociada a la masa que entra al volumen de control .

Incremento de energía interna de la masa que existe en el volumen de control.

+

+

El calor suministrado al volumen de control.

La energía interna, cinética y potencial gravitacional que asocia-

+

=

da a la masa, sale del volumen de control.

El trabajo de eje realizado sobre la masa a medida que pasa a lo largo del volumen de control.

+

El trabajo de flujo que realiza la masa que sale del volumen de control.

+

El trabajo de flujo que realiza la masa cuando entra al volumen de control.

$$dm_e \left( u_e + \frac{1}{2} \bar{V}_e^2 + g z_e \right) + \dot{Q} \, dt + \dot{W} dt + P_e dV_e = (E_{dt} - E_o) +$$

$$dm_s \left( u_s + \frac{1}{2} V_s^2 + g z_s \right) + P_s dV_s \qquad (2.24)$$

Dividiendo (2.24) entre  $dt'$  y reordenando términos:

$$\dot{Q} + \dot{W} = (\dot{E})v.c. + \dot{m}_s \left( \frac{1}{2} \bar{V}_s^2 + g z_s + u_s + P_s v_s \right) - \dot{m}_e \left( \frac{1}{2} V_e^2 + g z_e + u_e + P_e v_e \right) \quad (2.25)$$

donde:

$$(\dot{E})v.c. = \left( \frac{dE}{dt} \right) v.c. = \left( \frac{E_{dt} - E_0}{dt} \right) v.c.$$

es la variación de la energía interna del volumen de control, en el intervalo de tiempo  $dt'$ .

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad \text{es la rapidez con que fluye la masa.}$$

Pv es el trabajo de flujo por unidad de masa ya que,

$$v = \frac{V}{m}$$

Analizando las unidades de cada uno de los términos de la ecuación (2.25):

$$(\dot{Q}) = (J/s) = (W)$$

$$(\dot{W}) = (J/s) = (W)$$

$$(\dot{E}) = (J/s) = (W)$$

$$\left( \frac{1}{2} \dot{m} \bar{V}^2 \right) = (kg/s) (m^2/s^2) = \left( \frac{kg \cdot m}{s^2} \right) \left( \frac{m}{s} \right) = \left( \frac{N \cdot m}{s} \right) = (J/s) = (W)$$

$$(\dot{m} g z) = (kg/s) (m/s^2) (m) = (W)$$

$$(\dot{m} u) = (kg/s) (J/kg) = (J/s) = (W)$$

$$(\dot{m} Pv) = (kg/s) (N/m^2) (m^3/kg) = \left( \frac{N \cdot m}{s} \right) = (J/s) = (W)$$



Esta ecuación es el resultado del balance de energías que intervienen en un sistema termodinámico abierto. Al plantearla, se ha tratado de generalizar esta situación aunque debemos comentar que, todas las cantidades involucradas tomadas por unidad de tiempo ( $\dot{Q}$ ,  $\dot{W}$ ,  $\dot{E}$ ,  $\dot{m}$ ), se han considerado con una rapidez de cambio constante.

La mayoría de los equipos y sistemas de ingeniería operan en régimen permanente o estable, esto es:

1. No existe disminución o acumulación de masa en el volumen de control, de aquí que:  $\dot{m}_s = \dot{m}_e$
2. La energía del volumen de control es constante.

$$E_{v.c.} = \text{cte} \rightarrow \dot{E}_{v.c.} = 0$$

Así pues, tomando en cuenta las consideraciones anteriores, la ecuación 2.25 queda como:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \dot{m} \left[ \frac{1}{2} (\bar{V}_s^2 - \bar{V}_e^2) + g(z_s - z_e) + u_s - u_e + P_s v_s - P_e v_e \right] \quad (2.26)$$

además, de la definición de entalpfa  $h = u + p v$

$$\dot{Q} + \dot{W} = \dot{m} \left[ \frac{1}{2} (\bar{V}_s^2, \bar{V}_e^2) + g (z_s - z_e) + h_s - h_e \right] \quad (2.26.1)$$

Las ecuaciones 2.26 y 2.26.1, son aplicables a sistemas abier-  
tos que operan bajo régimen estable, permanente o estacionario.

### ECUACION DE BERNOULLI

Considérese un ducto por el que circula agua en régimen esta-  
ble, la frontera del sistema estará limitando las secciones 1 y 2 entre  
los cuales se efectuará el balance energético (ver figura 2.21 ).

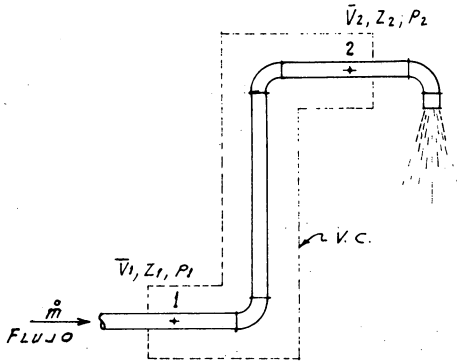


Fig. 2.21 Balance energético entre las secciones 1 y 2.

Aplicando la ecuación de la Primera Ley para sistemas abiertos que operan bajo régimen permanente:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \dot{m} \left[ \frac{1}{2} (\bar{V}_2^2 - \bar{V}_1^2) + g(z_2 - z_1) + u_2 - u_1 + P_2 v_2 - P_1 v_1 \right]$$

y estableciendo las siguientes consideraciones.

- a) La variación de temperatura del fluido (entre 1 y 2) es despreciable, por lo que  $u_1 = u_2$ .
- b) No existe transmisión de calor al sistema, ni de éste al medio ambiente,  $\dot{Q} = 0$ .
- c) No hay trabajo de flecha.
- d) El fluido es incompresible,  $v_1 = v_2$

$$0 = \dot{m} \left[ \frac{1}{2} (\bar{V}_2^2 - \bar{V}_1^2) + g(z_2 - z_1) + (P_2 - P_1) v \right]$$

dividiendo entre  $\dot{m}$  y reordenando términos,

$$\frac{1}{2} \bar{V}_1^2 + g z_1 + P_1 v = \frac{1}{2} \bar{V}_2^2 + g z_2 + P_2 v$$

multiplicando por la densidad ( $\rho = \frac{1}{v}$ ) del fluido

$$\frac{1}{2} \rho \bar{V}_1^2 + \rho g z_1 + P_1 = \frac{1}{2} \rho \bar{V}_2^2 + \rho g z_2 + P_2 \quad (2.27)$$

en el S. I.

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3 \text{ s}^2} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

Esta ecuación (2.27), es aplicable a fluidos no viscosos incompresibles y estacionarios.

Fue establecida en 1735 por Daniel Bernoulli (1700-1782), un joven contemporáneo de Newton. No incluía términos de calor ni de energía interna ya que el principio de la conservación de la energía fue aceptado hasta 1850.

Las propiedades del fluido que en ella se evalúan están sobre una línea de corriente, en nuestro caso, dicha línea se encuentra a lo largo del eje de la tubería.

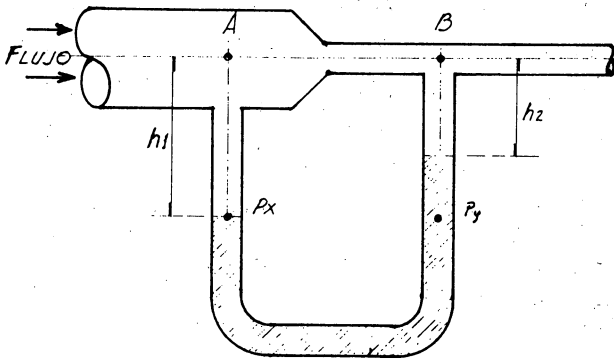
Cada término puede ser y es interpretado como una carga de presión en metros de agua, nombre corrientemente usado en Hidráulica.

El término,  $\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$  se llama carga de velocidad (o debida a la velocidad);  $P$  se llama carga de presión y  $\rho g z$  la debida a la energía potencial.

#### EJEMPLO 2.7

En la reducción de un ducto, por el que circula agua, se coloca un manómetro diferencial como se muestra en la figura. Si las condiciones del fluido en las secciones A y B respectivamente son,  $\varnothing_A = 5$  cm,  $\varnothing_B = 2$  cm y  $\rho_{H_2O} = 1000$  kg/m<sup>3</sup>  
 $\rho_{Hg} = 13600$  kg/m<sup>3</sup>,  $h_1 = 40$  cm,  $h_2 = 20$  cm.

Calcúlese el gasto en litros por segundo.



SOLUCION:

De la ecuación de continuidad,

$$\dot{m}_A = \dot{m}_B, \text{ esto es: } \rho_A \bar{V}_A A_A = \rho_B \bar{V}_B A_B$$

y como

$$\rho_A = \rho_B \Rightarrow \bar{V}_A A_A = \bar{V}_B A_B \quad (a)$$

de la ecuación de Bernoulli,

$$\frac{1}{2} \rho \bar{V}_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho \bar{V}_B^2 + \rho g z_B + P_B$$

$$z_A = z_B$$

$$\frac{1}{2} \rho (\bar{V}_A^2 - \bar{V}_B^2) = P_B - P_A$$

$$\bar{V}_A^2 - \bar{V}_B^2 = \frac{2}{\rho} (P_B - P_A) \quad (b)$$

de (a)

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B \frac{A_B}{A_A} = \bar{V}_B \frac{\varnothing_B^2}{\varnothing_A^2} \quad (c)$$

sustituyendo (c) en (b)

$$\left( \bar{V}_B \frac{\varnothing_B^2}{\varnothing_A^2} \right)^2 - \bar{V}_B^2 = \frac{2}{\rho} (P_B - P_A)$$

$$\bar{V}_B^2 \left( \frac{\varnothing_B^4}{\varnothing_A^4} - 1 \right) = \frac{2}{\rho} (P_B - P_A)$$

$$\bar{V}_B = \sqrt{\frac{2 (P_B - P_A)}{\rho \left( \frac{\varnothing_B^4}{\varnothing_A^4} - 1 \right)}} \quad (d)$$

sustituyendo (d) en (a), el gasto será:

$$G = A_B \bar{V}_B = A_B \sqrt{\frac{2 (P_B - P_A)}{\rho \left( \frac{\varnothing_B^4}{\varnothing_A^4} - 1 \right)}}$$

Para encontrar  $P_B - P_A$ , obsérvese de la figura que,

$$P_x = P_y$$

donde

$$P_x = P_A + \rho_{H_2O} g h_1$$

$$P_y = P_B + \rho_{H_2O} g h_2 + \rho_{Hg} (h_1 - h_2)$$

luego

$$P_B - P_A = g \left[ \rho_{H_2O} (h_1 - h_2) - \rho_{Hg} (h_1 - h_2) \right]$$

$$P_B - P_A = 9.81 \left[ 1000 (0.20) - 13600 (0.20) \right] = - 24721.2 \text{ Pa}$$

además:

$$A_B = \frac{\pi \delta_B^2}{4} = \frac{0.0013}{4} \text{ m}^2 \quad \text{y} \quad \frac{\delta_B^4}{\delta_A^4} = 0.0256$$

$$\therefore G = \frac{0.0013}{4} \sqrt{\frac{2 (- 24721.2)}{1000 (0.0256-1)}} = 0.0023 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$G = 2.3 \frac{\text{lt}}{\text{s}}$$

El análisis de unidades, se deja como ejercicio al alumno.

### CAPITULO III

#### SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

En la vida cotidiana se observa una gran cantidad de cambios - que tienen lugar independientemente de la voluntad humana; puede decirse que ocurren por sí mismos de una manera incontrolable. Como ejemplo de estos procesos se puede citar el de la fusión de un cubo de hielo colocado en una habitación a la temperatura ambiente, la solidificación de argamasa colocada en la intemperie, la caída de agua en una cascada, la igualación de temperaturas de dos cuerpos puestos en contacto con temperaturas diferentes originalmente, etc.

A todos estos procesos que ocurren a nuestro alrededor se les llama procesos naturales. Son tan comunes, que su observación no despierta el interés, y casi nadie se pregunta, pasada la infancia, por qué ocurren así y no de otra manera; es decir, por qué tienen una "dirección preferida". A nadie le causa sorpresa la caída de una pelota sobre una superficie dura, pues todo mundo sabe lo que ocurre; se escucha el sonido característico al hacer contacto con la superficie y se ve que la pelota rebota hacia arriba hasta alcanzar una altura muy cercana a la altura desde donde cae. Dependiendo de la elasticidad de la pelota, continuará rebotando durante un tiempo más o menos prolongado, hasta que eventualmente quede inmóvil sobre la superficie dura. Si se levanta la pelota y se le deja caer nuevamente, se puede tener la certeza que se sucederán los mismos pasos ya relatados, pues es lo que corresponde a la experiencia que se ha ido acumulando a fuerza de ver la caída de una pelota. Sin embargo, un hecho que sorprendería al observador sería el que una pelota comenzara a rebotar por sí misma, alcanzando alturas cada vez mayores hasta regresar a la altura desde donde se le ha dejado caer. Lo sor



prendente del caso consiste en que nunca nadie lo ha visto ocurrir jamás. Aunque, pensándolo bien, parece ser que no existe ninguna imposibilidad para que la pelota se comportara de esta manera, siempre y cuando cumpliera con el principio de la conservación de la energía, uno de los más generales en la naturaleza.

El descubrimiento de que sí existe una razón que proscribe el comportamiento de la pelota "rebelde", o los procesos contrarios a los citados anteriormente (como serían la formación de hielo a temperatura ambiente a partir de agua líquida, el ablandamiento de arcilla y su separación en agua, cal, arena y grava, el paso del agua hacia lo alto de una cascada, el proceso de intercambio de energía entre dos cuerpos puestos en contacto para que sus temperaturas se hicieran cada vez más distintas, etc.) conduce a la formulación de la Segunda Ley de la Termodinámica.

#### MAQUINAS TERMICAS

La motivación que tuvieron los científicos del siglo XIX fue la de comprender y perfeccionar el funcionamiento de la maquinaria necesaria para obtener trabajo mecánico a partir de calor.

Estas maquinarias reciben el nombre de *máquinas térmicas* y se pueden definir de una manera general como *aquellos sistemas que operan cíclicamente y por cuyas fronteras solamente circulan calor y trabajo*. Con la finalidad de simplificar el análisis, conviene definir un *depósito térmico* como un sistema que es incapaz de efectuar o de recibir trabajo, que mantiene una temperatura constante en toda su extensión y que cuenta solamente con la transmisión de calor para interactuar con otros sistemas. Debido a la Primera Ley de la Termodinámica, esta transmisión

de calor es igual al incremento en la energía interna del sistema. Un ejemplo de tales depósitos térmicos es la atmósfera, capaz de intercambiar grandes cantidades de calor sin cambiar su temperatura apreciablemente.

De ahora en adelante, se considera que la máquina térmica intercambia calor únicamente con depósitos térmicos. Si el depósito térmico cede calor a la máquina térmica, entonces se dice que ese depósito es una *fente de calor*; si por el contrario, la máquina le cede calor al depósito entonces este último se llama un *sumidero o captador de calor*.

La máquina térmica contiene una *sustancia de trabajo o agente de transformación*, que sufre cambios cíclicos; toma calor de una fuente externa, convierte una parte en trabajo y cede el resto a un depósito exterior. Es justamente la condición de una operación cíclica la que obliga al sistema a rechazar una cierta cantidad de calor al exterior y la que crea la necesidad de contar con *por lo menos dos sistemas exteriores* para el intercambio de calor.

Se puede objetar que es posible transformar calor en trabajo - mediante la expansión isotérmica de un gas; se puede tomar un recipiente lleno con el gas, ponerlo en contacto con un depósito térmico a la misma temperatura que el gas y permitir su expansión mediante un dispositivo adecuado, como un pistón. Este trabajo puede emplearse para accionar un generador y obtener así energía eléctrica. Al aplicar la Primera Ley de la Termodinámica a este proceso, se observa que el calor recibido es - igual al trabajo desarrollado  $|\delta Q| = |\delta W|$  y parece ser que basta el intercambio de calor con una fuente térmica solamente. Pero al pensar más detenidamente en la situación, resulta que este procedimiento no suministra energía eléctrica en una manera uniforme y continua, pues el gas -

ideal llega eventualmente a un estado en donde no puede seguir expandiéndose. En ese instante cesa la producción de trabajo y por tanto el suministro de energía eléctrica; para hacer que el dispositivo sea capaz de seguir efectuando trabajo se requiere de una compresión que genere la diferencia de presiones necesaria para la expansión. Este es entonces un proceso poco práctico de transformar el calor en trabajo. Piénsese por un instante que los motores de los automóviles no actuaran cíclicamente. El conductor echaría a andar su vehículo y gracias al movimiento de los pistones lograría avanzar una cierta distancia, aquella que le permita el paso de generación de trabajo de su máquina; en ese instante el conductor deberá bajar y lograr que de alguna manera los pistones regresaran a una posición apta para la generación de trabajo. Una vez logrado esto, el conductor puede volver a subir el vehículo y así avanzar otra cierta distancia, luego de la cual se tendría que repetir la operación.

Se puede concluir entonces que una manera de obtener trabajo en una forma uniforme es teniendo una máquina térmica que opere cíclicamente, tal como se pide en la definición.

En un diagrama  $(v, p)$  se ve claramente la necesidad de que el paso generador de trabajo  $(i \rightarrow m)$  se encuentre por encima del paso que se use para retornar al sistema a su estado original, puesto que en este diagrama el trabajo corresponde al área bajo la curva; y si se desea recibir trabajo, entonces el proceso generador de trabajo debe encerrar un área

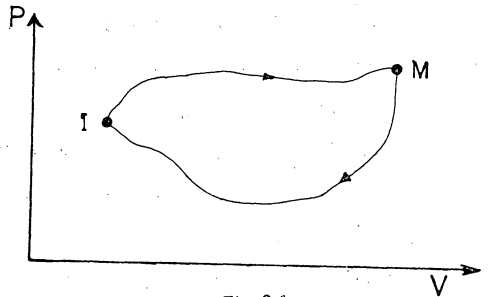


Fig 3.1

mayor que el proceso de restauración de las propiedades originales, el cual consume energía. Solamente de esta manera se consigue que el trabajo *neto* sea aprovechable.

De esta suerte, para una máquina térmica cualquiera se tendrán tres cantidades: el calor suministrado al agente de transformación ( $Q_A$ ), el trabajo entregado por el agente de transformación ( $W$ ) y el calor rechazado por el agente de transformación ( $Q_B$ ). Con estas magnitudes se puede definir un concepto muy útil para conocer la habilidad de la máquina en su misión de transformar calor en trabajo: la *eficiencia térmica*. Se define igual que las utilidades en una inversión económica, esto es, lo que se desea obtener (las ganancias, en el caso de la inversión de capital) entre lo que ha costado conseguir ese resultado (la inversión de capital): a esta razón se le denota con la letra griega eta ( $\eta$ ).

Al aplicar la Primera Ley de la Termodinámica a la máquina térmica se concluye que:  $Q_A = W + Q_B \therefore W = Q_A - Q_B$ . De esta expresión se

aprecia que el calor suministrado -  $Q_A$  NO puede ser transformado íntegramente en trabajo. La eficiencia queda:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A - Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{Q_B}{Q_A}$$

Se aprecia que la eficiencia térmica debe ser menor que la unidad.

En caso de que dichas máquinas funcionaran en forma inversa, como en el caso de los refrigeradores en los que se desea extraer la mayor

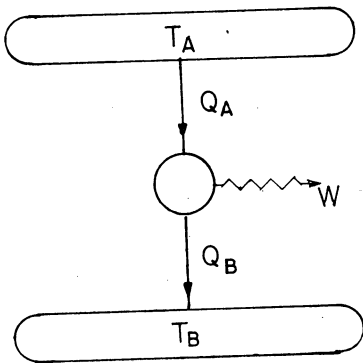


Fig.32

cantidad posible de calor de una región de temperatura "baja" mediante - el consumo de la mínima cantidad de trabajo que sea posible; entonces, - el resultado apetecido es extraer calor a temperatura baja ( $Q_B$ ) y lo - que cuesta este propósito es el trabajo que hay que proporcionar ( $W$ ). Para este caso, se emplea la letra griega  $\beta_R$  y la "utilidad" (en el - sentido de un inversionista) se denomina *coeficiente de operación*:

$$\beta_R = \frac{Q_B}{W}$$

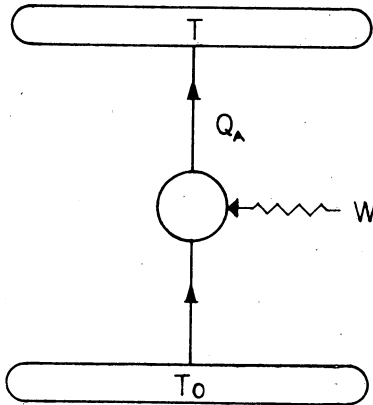


Fig 3.3.

Debido a la Primera Ley de la Termodinámica,  $W = Q_A - Q_B$ , que dando:

$$\beta_R = \frac{Q_B}{Q_A - Q_B} = \frac{Q_A - W}{W} ; \quad Q_A = (\beta_R + 1) W$$

De la expresión de la derecha se observa que  $\beta_R$  puede ser ma yor que la unidad y que en una máquina refrigeradora el calor rechazado a una temperatura alta es  $(\beta_R + 1)$  veces el trabajo empleado.

En la tercera opción, que es usar la máquina refrigeradora para proporcionar calor a un sistema que se encuentre a una temperatura elevada, el resultado apetecido es, por ejemplo, mantener un clima confortable en una habitación durante el invierno. Lo que cuesta lograrlo es el suministro de trabajo del exterior ( $W$ ). La relación entre estas dos magnitudes también se llama coeficiente de operación.

$$\beta_c = \frac{Q_A}{W}$$

A las máquinas que se usan de esta manera se les llama calefactores.

### Ejemplo 3.1

Una máquina de Haldane (1927) puede funcionar como refrigerador (en el verano) o como calefactor (en el invierno) para mantener un clima agradable en una habitación .

Unos valores típicos de las cantidades que maneja esta máquina son  $Q_B = 1250 \text{ W}$  y  $Q_A = 1500 \text{ W}$

- Calcule el coeficiente de operación en el verano y haga un esquema de la máquina.
- Calcule el coeficiente de operación en el invierno y haga un esquema de la máquina.

Solución:

Por la Primera Ley

$$W + Q_B = Q_A$$

$$W = Q_A - Q_B$$

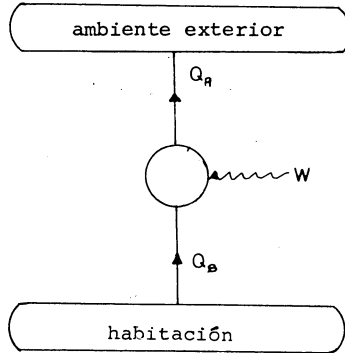
$$W = 1500 \text{ W} - 1250 \text{ W}$$

$$W = 250 \text{ W}$$

a) 
$$\beta_R = \frac{Q_B}{W} = \frac{1250 \text{ W}}{250 \text{ W}} = 5$$

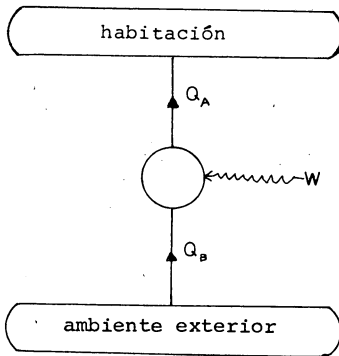
b) 
$$\beta_C = \frac{Q_A}{W} = \frac{1500 \text{ W}}{250 \text{ W}} = 6$$

(v)



Las figuras (v) e (I) representan la situación en verano e invierno respectivamente.

(I)



## LOS ENUNCIADOS DE KELVIN - PLANCK Y CLAUDIUS

En vista de lo anterior, se aprecia que para las máquinas térmicas que producen trabajo se requiere de (al menos) dos depósitos térmicos, siendo uno de ellos un captador de calor. *Hasta la fecha ha sido imposible diseñar una máquina térmica que solamente intercambie calor con un depósito, lo transforme íntegramente en trabajo y además opere cíclicamente.* Esta imposibilidad es el resultado de la experiencia de los ingenieros a lo largo de la historia (en particular, en los tres últimos siglos). Aunque en los párrafos precedentes se trata de justificar racionalmente la necesidad de tener dos depósitos térmicos por lo menos, en verdad no hay ninguna ley en la naturaleza que imponga esta clase de restricciones, pues la Primera Ley de la Termodinámica, uno de los principios más generales que se conoce, no lo prohíbe. Esta experiencia ha sido expresada en varias formas: William Thomson (Lord Kelvin) lo hizo de esta manera: "Es imposible conseguir, mediante el empleo de alguna sustancia inanimada, un efecto mecánico con el enfriamiento de una porción de materia hasta una temperatura más baja que la del más frío de los objetos circundantes\*.

Max Planck hizo una formulación semejante: "Es imposible la construcción de una máquina que opere en ciclos y que no produzca otro efecto que el de la elevación de una masa y el enfriamiento de un depósito térmico".

Actualmente se emplea un enunciado equivalente a los precedentes, que es una combinación de ambos: se llama el enunciado de Kelvin - Planck: "Es imposible cualquier proceso que tenga como resultado único la absorción de calor de un depósito térmico y su conversión completa en trabajo".

\*Este enunciado es casi incomprensible y por ello se requiere su combinación con el aserto de Planck.



En el caso de los refrigeradores y de los calefactores se observa que para operarlos se requiere siempre del suministro de trabajo y aunque sería muy provechoso para la humanidad que no ocurriera así, la experiencia indica que siempre se requiere del suministro de trabajo desde el exterior. Esta observación (negativa) condujo a Rudolph - Clausius a la siguiente formulación: "No es posible ningún proceso cuyo único resultado sea la transmisión de calor desde un cuerpo con una temperatura baja hacia otro cuerpo con una temperatura alta".

Estas formulaciones expresan un hecho que no puede ser deducido de ningún principio científico, pero que se desprende de la experiencia. En consecuencia, estas formulaciones constituyen los postulados de una ley natural, llamada la SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA.

Hasta este momento puede parecer que existe poca relación, o ninguna, entre las formulaciones de Kelvin - Planck y Clausius, y entre éstas y la "dirección preferida" que tienen los procesos naturales; sin embargo, un análisis sencillo y lógico puede mostrar que su relación es bastante estrecha.

Primeramente se verá la equivalencia entre las dos maneras de formular la Segunda Ley de la Termodinámica. Para hacerlo, se demostrará que el incumplimiento de un postulado conduce al incumplimiento del otro.

Supóngase que *si* es posible construir un dispositivo  $\bar{C}$  que opere cíclicamente y que tenga como *única consecuencia* la extracción de una cantidad de calor  $Q_B$  de un depósito térmico con  $T_B$  y su posterior - transmisión a un depósito térmico con  $T_A$  ( $T_A > T_B$ ), oponiéndose al - postulado de Clausius. Una vez construido  $\bar{C}$  no hay ningún impedimento

para colocar una máquina térmica entre los dos depósitos térmicos, tal que admita una cantidad de calor  $Q_B$  del depósito térmico a  $T_A$ , produzca un trabajo  $W$  y rechace una cantidad de calor  $Q'_B$  al sumidero a  $T_B$ . Esta última máquina no contradice el principio de Kelvin - Planck, pero al observar al conjunto de los dos dispositivos, resulta que la consecuencia de su funcionamiento acoplado es la transmisión de trabajo hacia el exterior al tiempo que intercambia calor con un sólo depósito térmico, a  $T_B$ , pues el depósito a  $T_A$  no sufre ningún cambio luego de un número ente

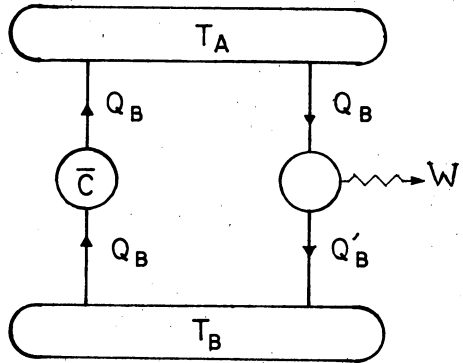


Fig.3.4

$$|Q_B| > |Q'_B|$$

ro de ciclos del dispositivo. Esto es así pues capta y cede simultáneamente  $Q_B$ . Se concluye entonces que esta máquina sí contradice el principio de Kelvin - Planck. Esto comprueba que el incumplimiento del postulado de Clausius conduce al incumplimiento del postulado de Kelvin - Planck.

Queda ahora por mostrar la relación entre la Segunda Ley de la Termodinámica y la "dirección preferida" de los procesos naturales. Para hacerlo, es necesario considerar un cierto tipo de proceso que no ocurre en la realidad y por tanto no es un proceso natural, pero que se

puede aproximar "tanto como se quiera": el proceso reversible. *Un proceso es reversible si, una vez efectuado, es posible lograr que tanto el sistema como sus alrededores retornen a sus estados iniciales respectivos* En términos llanos es una sucesión de procesos que no dejan su "marca" - en la historia, puesto que una vez invertido no queda ninguna evidencia de que haya en verdad ocurrido alguna vez.

Sea por ejemplo el caso de un automóvil que circula por una calle haciendo ruido y expulsando humo por el tubo de escape, que parte de una posición inicial y llega a una posición determinada. El proceso inverso para retornar al sistema y sus alrededores a sus estados iniciales es algo más complicado que simplemente hacer que el automóvil circule en reversa, puesto que no hace que regrese al aire puro a la atmósfera ni la energía eléctrica a la bobina, ni la gasolina al tanque, aunque el automóvil sí regrese a su posición inicial. Una buena manera de observar el retorno del universo a sus condiciones iniciales consiste en la filmación del proceso en sentido directo y luego su proyección en sentido inverso; ahí se vería no solamente al automóvil regresar sobre sus pasos hacia su posición inicial, sino que se vería el humo penetrar por el tubo de escape y el indicador de gasolina regresar a su nivel inicial. De esta manera se ve lo que ocurre cuando un proceso regresa completamente sobre sus pasos. Esta observación de un proceso reversible resulta tan extraordinaria y sorprendente en nuestra vida cotidiana, que la proyección inversa de una película es un recurso empleado en la comedia.

El hecho de que todos los procesos o cambios que conocemos (aquellos que ocurren naturalmente) sean irreversibles, implica que existen algunas causas que alejan a los procesos de la reversibilidad. Como se ha visto al examinar los procesos cuasiestáticos, todos los fenómenos

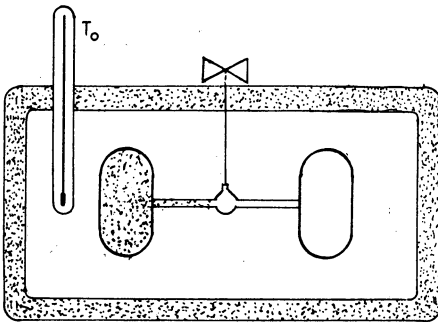
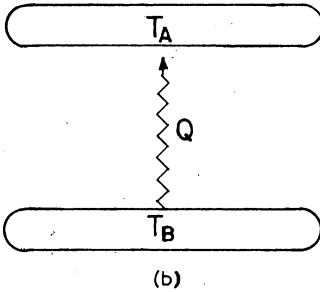
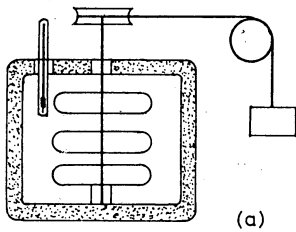
se desencadenan cuando se produce una diferencia de valor en alguna propiedad: un gas se expande solamente cuando existe una diferencia de presiones, la corriente eléctrica circula cuando existe una diferencia de potencial eléctrico, un cuerpo cae cuando hay una diferencia de alturas, el calor se transmite únicamente cuando existe una diferencia de temperatura, etc. También se ha visto que la magnitud de la diferencia en los "potenciales" que provocan un fenómeno es de suma importancia: si la diferencia es finita, el cambio viene acompañado de irregularidades. Considérese el caso típico de un gas encerrado en un cilindro provisto de un pistón, inicialmente en equilibrio con su alrededores. Este estado se caracteriza porque el valor de las propiedades del gas es uniforme en toda su extensión (esto quiere decir que si se hace una medición de las propiedades en distintos lugares del sistema se obtienen resultados iguales).

Si entonces se eleva súbitamente el pistón (lo que involucra que se provoque una diferencia finita de presiones entre el interior y el exterior) ocurre que se forma un enrarecimiento en las capas del gas cercanas al émbolo, mientras que no ocurre ningún cambio en las capas más alejadas (es decir, estas últimas capas no se han "enterado" que ha habido una expansión). Si ahora se hace una determinación de la presión del gas en las capas alejadas del émbolo y en las cercanas a él, se encuentra que los valores son distintos. Como una propiedad de estado no tiene un valor único en el interior del sistema, el estado Termodinámico no está definido. Eventualmente la presión se hará uniforme en todo el interior del gas y el equilibrio se alcanzará, luego de un tiempo más o menos largo.

La termodinámica proporciona un criterio para saber si un pro-

ceso es reversible o irreversible; el razonamiento que se emplea es similar al que ha sido utilizado para verificar que los postulados de Clausius y Kelvin - Planck son equivalentes. Se supone que un determinado proceso efectuado bajo ciertas restricciones o condiciones puede invertirse por alguna trayectoria; si esta suposición conduce a una violación de la Segunda Ley de la Termodinámica, entonces el proceso es irreversible. - Si la suposición no viola a la Segunda Ley, entonces el proceso es reversible. Este tipo de razonamiento se ilustrará con tres ejemplos que son particularmente importantes en Termodinámica: un proceso con fricción, - una transmisión de calor provocada por una diferencia finita de temperatura y una expansión incontrolada.

Los procesos que involucran a la fricción son conocidos al estudiar la mecánica. En general se culpa a la fricción del incumplimiento al principio de conservación de la energía mecánica, por lo que se espera que los procesos que involucran a la fricción sean irreversibles. Para comprobar esta aseveración considere el experimento de Joule (véase el capítulo II). El sistema consiste en un recipiente que contiene a un fluido viscoso (agua, aceite o cualquier otro líquido). Las paredes del recipiente son construidas de un material adiabático para evitar el intercambio de calor con los alrededores (véase la figura 3.5a). De esta manera, el único intercambio energético que puede obtenerse es mediante el giro de un eje con paletas que se encuentra en el interior del tanque y que se acciona desde el exterior mediante un dispositivo de poleas y un cuerpo suspendido. Cuando el cuerpo se deja caer desde un nivel inicial alto hasta un nivel final más bajo, provoca el movimiento del eje con paletas, que por la viscosidad del fluido se traduce en un aumento de su temperatura.



(c)  
Fig.3.5

El único resultado visible de este proceso es un incremento en la temperatura del fluido y un descenso en el nivel del cuerpo suspendido. Supóngase ahora que existe algún proceso cíclico I que pueda lograr el enfriamiento del fluido a su temperatura inicial y la elevación del cuerpo a su nivel inicial, sin dejar ningún otro efecto en el universo (es decir que el experimento de Joule sea reversible) y examinemos la consecuencia de esta suposición.

Colóquese en el recipiente una muestra nueva del fluido de la misma masa y a la misma temperatura inicial que el fluido que se usa en el experimento normal de Joule. Sustitúyase una pared adiabática del recipiente por una pared diatérmica y póngase en contacto con un depósito térmico de temperatura elevada, tal que permita que el fluido alcance la temperatura final del experimento normal. De esta manera se logra que el fluido aumente su temperatura al valor necesario para la aplicación del proceso cíclico I sin emplear para ello la caída de algún cuerpo.

Cuando se permite la acción del proceso (hipotético) I se consigue que el fluido retorne a su temperatura inicial (con lo que completa un ciclo) y que algún cuerpo se eleve hasta una cierta altura. La suma del

proceso de intercambio de calor con un sólo depósito térmico y la consecución de trabajo mecánico constituye una violación a la Segunda Ley de la Termodinámica según el enunciado de Kelvin Planck. Entonces se saca en conclu-

si6n que no puede haber ning6n proceso c6clico I que invierta al proceso que involucra a la fricci6n y por tanto se puede afirmar que *cualquier proceso que involucre fuerzas de fricci6n es irreversible.*

Considere ahora la transmisi6n de calor provocada por una diferencia finita de temperatura, entre un dep6sito t6rmico a temperatura  $T_A$  y un sumidero a temperatura  $T_B$ . Este proceso implica que la energa interna del dep6sito t6rmico a  $T_A$  sufre una disminuci6n y que la energa interna del sumidero sufre un aumento en la misma proporci6n. Si este proceso fuera reversible, se podrfa dise1ar un procedimiento para extraer energa interna de un sumidero a  $T_B$  y proporcion6rsela a un dep6sito t6rmico a  $T_A$  sin dejar ninguna otra consecuencia en el universo. Pero esto contradice al postulado de la Segunda Ley de la Termodin6mica seg6n el enunciado de Clausius. Entonces se concluye que *la transmisi6n de calor debida a una diferencia finita de temperatura es irreversible.*

Por 6ltimo, considere la expansi6n incontrolada de un gas, originalmente a unas ciertas condiciones  $P_0$  y  $T_0$  contenido en un recipiente conectado mediante una v6lvula con otro tanque en donde se ha hecho el vacio (este experimento es conocido como el experimento de Joule, aunque Gay - Lussac lo realiz6 algunos a1os antes, v6ase el capitulo 2). Al abrir la v6lvula el gas disminuye su presi6n (al llenar ahora los dos recipientes) sin sufrir cambio alguno en su energa interna, ni provocar ning6n cambio en los alrededores. Para que este proceso fuera reversible se deberfa encontrar alg6n otro proceso c6clico F que lograrara que el gas redujera su volumen y aumentara su presi6n hasta los valores originales, manteniendo constante su energa interna y dejando inalterados a los alrededores. Suponga que este proceso c6clico F existe. Entonces se podrfa hacer

que el gas se expandiera empleando un pistón, haciendo trabajo. Para que la energía interna del gas se mantenga constante, se puede disponer de un depósito térmico que le proporcione calor al gas. Si se aplica ahora el proceso F se completaría un ciclo que intercambiara calor con un sólo depósito térmico y que efectuara trabajo. Pero esto constituye una violación a la Segunda Ley de la Termodinámica según el enunciado de Kelvin - Planck. Se concluye que el proceso F no existe y por lo tanto, la expansión incontrolada de un gas es un proceso irreversible. (Figura 3.5 c).

El hecho de que haya procesos irreversibles indica que en la naturaleza se tiene una dirección preferida hacia la que conducen los procesos naturales. Esta dirección coincide con una variación en la "calidad" que se le puede asignar a la energía. Si la energía de que se dispone puede ser empleada en lo que uno quiera, se dice que es de gran "calidad". Esta "calidad" va disminuyendo si la energía presenta dificultades para su utilización. Por ejemplo, la energía eléctrica es de primera "calidad", pues puede emplearse para efectuar trabajo mecánico empleando un motor eléctrico para (digamos) aumentar la elevación de un cuerpo; si se desea calentar una habitación, o cualquier otro sistema, la energía eléctrica también puede lograrlo empleando un calentador eléctrico (un conductor de alta resistencia). En ambos casos la cantidad de energía eléctrica que se emplea aparece íntegramente en los resultados: se convierte completamente en energía mecánica en el primer caso o en calor en el segundo caso.

En la escala más baja de la "calidad" se encuentra el calor, (para ser precisos, el calor disponible a baja temperatura) pues no puede emplearse en todo lo que uno desee. Se ve claramente que es muy adecuado para aumentar la temperatura de un sistema dado, en donde se apro-



vecha totalmente. Pero si se desea transformarlo en trabajo mecánico se observa que *no* puede aprovecharse íntegramente en esta misión, debido a la restricción impuesta por la Segunda Ley de la Termodinámica.

Ahora bien, en la naturaleza se observa cotidianamente la transformación espontánea del trabajo en calor y no la transformación del calor en trabajo. El caso más evidente es aquel en que se estudia la caída de un cuerpo sometido al campo gravitacional de la tierra. Todos los cuerpos caen "hacia abajo". Al hacerlo, disminuye su energía potencial y aumenta su energía cinética en tal proporción que su suma permanece constante (el principio de conservación de la energía mecánica). Esto ocurre así hasta que el cuerpo llega al suelo, en donde su energía potencial vale cero (si se toma al suelo como el nivel de referencia arbitrario) y, como no se sigue moviendo, su energía cinética también vale cero. La energía mecánica (energía de gran calidad) se transforma en calor (energía de poca calidad) y esto ocurre en un proceso del que nadie ha visto jamás que ocurra en una "dirección" distinta a la señalada antes. La conclusión inmediata que surge de este comentario es que la *dirección preferida de los procesos coincide con la degradación de la energía (la transformación de energía de alta calidad a energía de baja calidad)*.

En las secciones que siguen se deducirá la existencia de una propiedad de la materia cuyas variaciones a lo largo de los procesos nos permiten determinar la dirección de los mismos.

En consecuencia, a esta propiedad de las sustancias (hasta ahora desconocida por el lector) se le puede asociar el significado "físico" de ser la indicadora de la "calidad" de la energía.

Esta "nueva" propiedad es diferente de la mayoría de las propiedades de la materia que se han estudiado hasta ahora, pues no impresiona directamente a nuestros sentidos como lo hacen el olor, el color, la temperatura, la presión, etc.

Es por esta razón que en la mayoría de los textos de termodinámica se dice que esta propiedad "surge" como consecuencia de la 2a. Ley de la Termodinámica, así como se dice que la energía interna "surge" como consecuencia de la 1a. Ley de la Termodinámica.

Estas dos propiedades carecen de una manifestación directa ante nuestros sentidos y es por ello que resultan tan difíciles de comprender para el principiante.

## EL CICLO DE CARNOT

Como se ha señalado anteriormente, el interés del ingeniero es tá en la transformación del calor (energía de baja "calidad") en trabajo (energía de alta "calidad"). Esta transformación se efectúa de una mane ra continua únicamente cuando se tiene un dispositivo que opera cíclica- mente. Ahora, luego de ver los enunciados de la Segunda Ley de la Termo- dinámica y sabiendo que ésta prohíbe que el intercambio de calor sea - con un sólo depósito térmico, es posible diseñar el ciclo más sencillo, es decir, aquel que interactúa con el número mínimo de depósitos tér- micos que se permite: este ciclo se conoce como el ciclo de Carnot.

Debido a la Segunda Ley, se sabe que la producción continua de trabajo a partir de calor es imposible si se tiene un sólo depósito tér- mico; entonces se debe contar con dos depósitos térmicos por lo menos. Siendo de esta manera, sea  $t$  la temperatura de un depósito y  $t_0$  la - temperatura del otro depósito (y consideraremos por conveniencia que -  $t > t_0$ ).

Entonces el sistema que va a efectuar el ciclo debe tener dos procesos isotérmicos: uno a  $t$  y otro a  $t_0$ , y si se desea que el ci- clo sólo intercambie calor con dos depósitos, se necesita de dos proce- sos adiabáticos que lo completen, uniendo a las dos isoterms.

Si estos procesos se efectúan reversiblemente, entonces en los procesos isotérmicos se encuentra que la temperatura del sistema que - efectúa el ciclo debe ser  $t$  y  $t_0$ . Si no, la temperatura del siste ma será menor y mayor que esos valores respectivamente, puesto que en la transmisión irreversible de calor se tiene una diferencia finita de tem- peraturas.

Cuando los cuatro procesos que componen el ciclo son reversibles se tiene un Ciclo Reversible de Carnot. Si al menos uno de los cuatro procesos es irreversible se tiene un Ciclo Irreversible de Carnot.

Como es evidente, un ciclo de Carnot se puede hacer operar en sentido "directo" para producir trabajo  $W$  recibiendo una cierta cantidad de calor del depósito a  $t$  y rechazando  $(Q-W)$  de calor a  $t_0$ ; o bien, puede operarse en sentido "inverso" para extraer  $(Q' - W')$  de calor del depósito a  $t_0$ , admitiendo trabajo  $W'$  y cediendo calor  $Q'$  al depósito a  $t$ . La inversión de sentido se puede efectuar tanto con un ciclo irreversible como con uno reversible, pero únicamente en éste último caso se tienen las igualdades  $Q = Q'$  y  $W = W'$ .

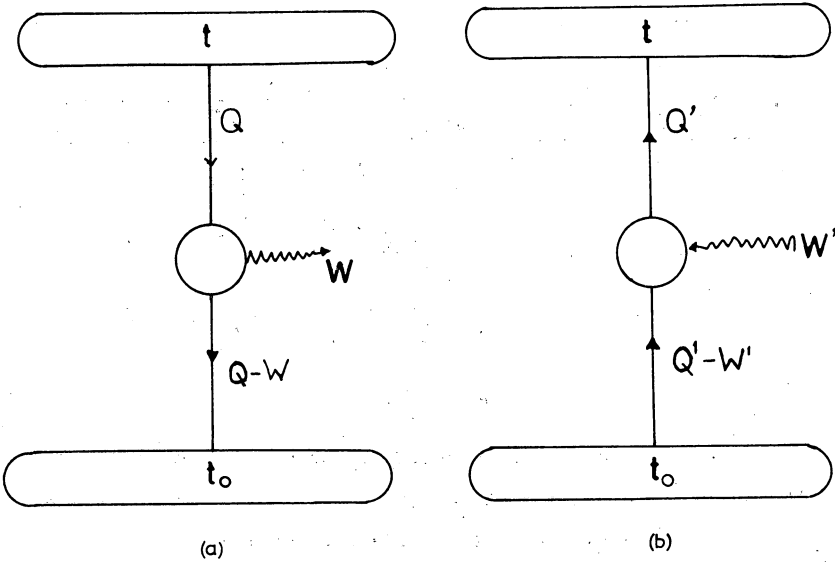


Fig.36

En la práctica, la función del sumidero es desempeñada por la naturaleza (representada por el aire atmosférico o por el agua de mares, ríos o lagos) que mantiene una temperatura constante, la cual podemos denominar  $t_a$ .

Este conocimiento nos permite hacer una diferencia un poco más formal entre los papeles que desempeñan los ciclos de las máquinas térmicas en sentido "inverso"; cuando la temperatura  $t_c$  coincide con la temperatura ambiente, se tiene un calefactor. Cuando la temperatura  $t_c$  coincide con la temperatura ambiente se tiene un refrigerador.

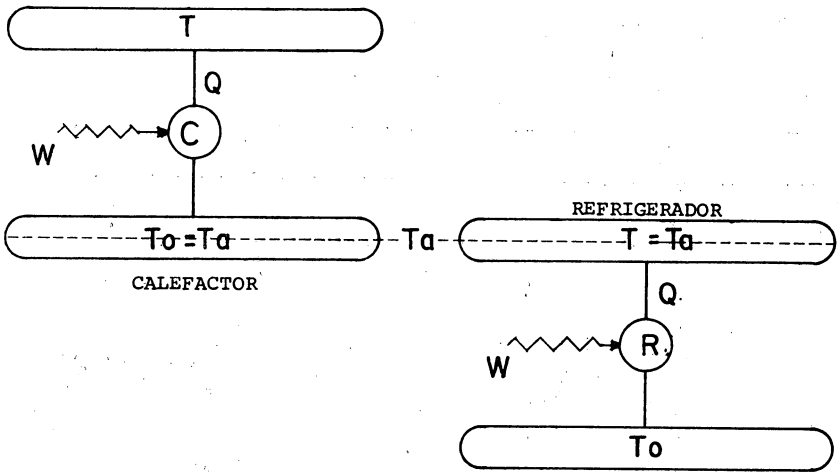


Fig.37

Al hablar ahora del ciclo directo de Carnot, el resultado apetecido es la obtención de trabajo  $W$  a partir de calor que se debe suministrar (y que cuesta suministrar). La eficiencia térmica para un ciclo de Carnot se escribe, de acuerdo a lo señalado anteriormente:

$$\eta = \frac{Q - Q_0}{Q} = 1 - \frac{Q_0}{Q}$$

Con la finalidad de completar la descripción del Ciclo de Carnot (de ahora en adelante, cuando se hable del Ciclo de Carnot, nos referiremos al Ciclo Reversible de Carnot y cuando se requiera analizar el - Ciclo Irreversible de Carnot se le identificará explícitamente) resulta conveniente trazar los diagramas que representan los procesos que conforman el ciclo. Por ejemplo, para un gas ideal se ha visto (en el tema II) que las isothermas en un diagrama (v, p) se representan mediante las hipérbolas  $p v = \text{constante}$  y las adiabáticas son líneas con una inclinación mayor que las isothermas. En las figuras las isothermas son las líneas 1-2 y 3-4 y las adiabáticas son las líneas 2-3 y 4-1.

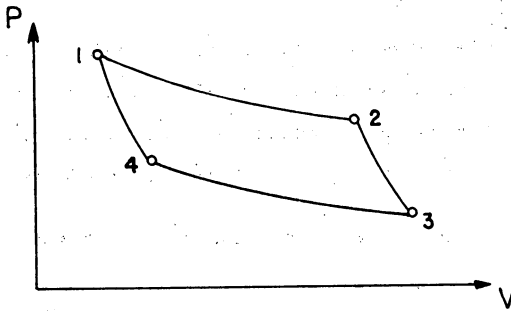


Fig.3.8

En el caso de una sustancia de trabajo que se encuentre en dos fases en equilibrio el diagrama es más sencillo, puesto que en estas condiciones las isotermas son isobaras al mismo tiempo.

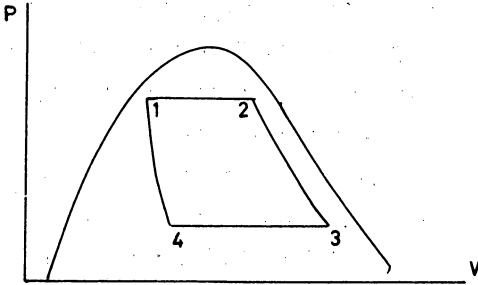


Fig.39

En los diagramas precedentes no se indica el sentido en que se efectúa el ciclo. Si la secuencia es 1-2-3-4, el ciclo es productor de trabajo; en caso contrario, se trata de un ciclo inverso. En esta última circunstancia se tienen dos posibilidades: refrigerador o calefactor.

La efectividad con que se desempeña la bomba de calor es, como se ha visto antes:

a) para el refrigerador:

$$\beta_R = \frac{Q - W}{W}$$

b) para el calefactor: Véase la figura 3.7

$$\beta_c = \frac{Q}{W}$$

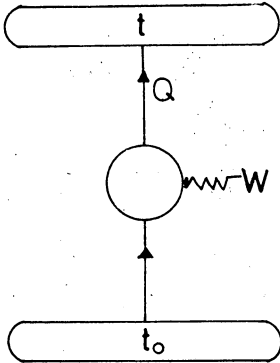
Ambas pueden ser mucho mayores que la unidad, característica que contrasta notoriamente con la máquina térmica, cuya efectividad o -

eficiencia debe ser menor que la unidad.

Ejemplo 3.2

Una máquina ideal de Carnot trabaja entre un par de temperaturas constantes de tal manera que el calor retirado a temperatura baja ( $t_0$ ) es un tercio del calor rechazado a temperatura alta ( $t$ ).

- a) Calcule  $\beta_R$  si la máquina funciona como refrigerador.
- b) Calcule  $\beta_C$  si la máquina funciona como calefactor.



$$Q - W = \frac{1}{3} Q \therefore W = \frac{2}{3} Q$$

$$a) \beta_R = \frac{Q - W}{W} = \frac{(1/3) Q}{(2/3) Q} = 0.50$$

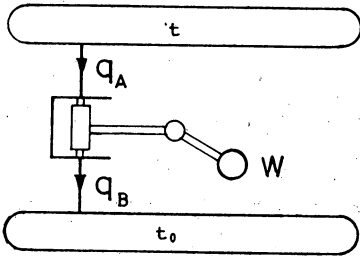
$$b) \beta_C = \frac{Q}{W} = \frac{Q}{(2/3) Q} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1.5}}$$

Considérese ahora que se tienen ciclos (reversibles) de Carnot que trabajan entre los mismos valores de temperatura:

$$t \text{ y } t_0 \quad (t > t_0)$$

Con la finalidad de hacer la exposición lo más general posible, considere que una de las máquinas tiene un gas ideal como sustancia de trabajo y que la otra emplea una batería electroquímica que acciona a un motor eléctrico. (Figuras 3.10 (a) es 3.10 (b) respectivamente.)





(a)

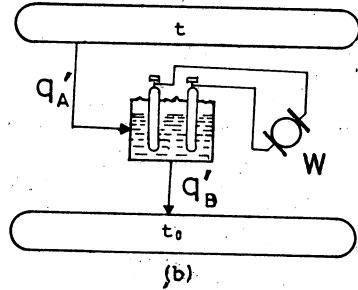


Fig 3.10

Considere además que ambas proporcionan la misma cantidad de trabajo por cada ciclo:  $(W) * : W = q_A - q_B$  y  $W = q'_A - q'_B$ .

Como además de ser reversibles no se tiene mayor información acerca del funcionamiento de las máquinas en cuestión, supóngase que  $|q'_B| > |q_B|$ . El lector puede comprobar que esta afirmación implica que

$$|q'_A| > |q_A|.$$

Ambas desigualdades quieren decir que  $q'_B - q_B > 0$  y  $q'_A - q_A > 0$ .

\* Para todos los ciclos se considera que el signo del calor y del trabajo es positivo si coincide con la dirección de la flecha que se emplea en las figuras. En caso contrario, el signo es negativo.

Aprovechando el carácter reversible, inviértase el sentido de la segunda máquina y acóplese a la primera:

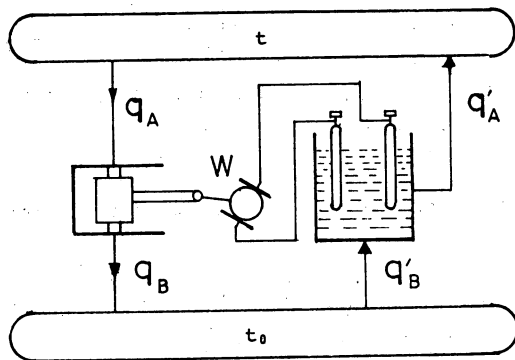


FIG. 3.11

Como las máquinas operan cíclicamente los cambios en el universo deben ocurrir únicamente en los depósitos térmicos. El que está a  $t$  gana energía  $q'_A - q_A$ , mientras que el que está a  $t_0$  pierde energía  $q'_B - q_B$ . Este resultado contradice al postulado de Clausius, por lo que resulta imposible de encontrar en la práctica. Ya que la causa de esta contradicción radica en la suposición  $|q'_A| > |q_A|$ , ésta debe rechazarse, quedando solamente la opción  $|q'_A| \leq |q_A|$  (por la tricotomía de los números reales) que implica  $|q'_B| \leq |q_B|$ .

Ahora, aprovechando una vez más que las máquinas térmicas son reversibles, inviértanse los sentidos que se ven en la figura 3.11 y suponga que  $|q'_B| < |q_B|$  y  $\therefore |q'_A| < |q_A|$ . Nuevamente se observa que el único resultado del acoplamiento es la pérdida de energía del depósito a

$t_0$ , en magnitud  $q_B - q'_B$ , y la ganancia de la misma cantidad de energía por parte del depósito a  $t$ , que de nuevo se contraponen con el postulado de Clausius de la Segunda Ley de la Termodinámica. La causa de la contradicción se encuentra en la suposición, por lo que debe rechazarse.

De esto se sigue que solamente puede ser posible la tercera opción:  $|q_A| = |q'_A|$  y en consecuencia  $|q_B| = |q'_B|$ .

Al examinar los razonamientos anteriores en términos de las eficiencias se tiene:

La primera opción:  $\frac{q'_A}{W} > \frac{q_A}{W}$  o bien  $\eta' > \eta$  . Descartada

La segunda opción:  $\frac{q_A}{W} > \frac{q'_A}{W}$  o bien  $\eta > \eta'$  . Descartada

La tercera opción:  $\frac{q_A}{W} = \frac{q'_A}{W}$  o bien  $\eta = \eta'$  . Aceptada

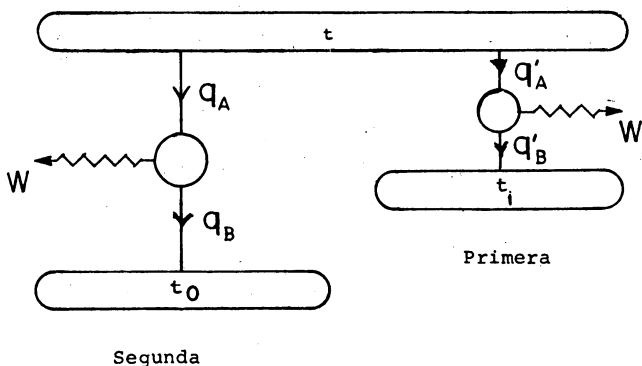
La conclusión que puede desprenderse de esta discusión es que la eficiencia de un ciclo reversible de Carnot es la misma para todos los agentes de transformación y para todas las formas de operación. Como no es función de las características de las máquinas, la eficiencia de be depender únicamente de las temperaturas  $t$  y  $t_0$  de los depósitos térmicos. Esto se conoce como el teorema de Carnot.

### Ejemplo 3.3

Demuestre que la eficiencia de las máquinas reversibles de Carnot es función de las temperaturas  $t$  y  $t_0$  .

Solución:

Suponga que no es verdad que la eficiencia depende de ambas - temperaturas y establezca que dos máquinas reversibles que trabajan con un depósito térmico común a  $t$ , pero con sumideros distintos, a  $t_i$  y  $t_0$ , pueden tener eficiencias iguales. Además, sin pérdida en la genera lidad, suponga que ambas desarrollan el mismo trabajo  $W$  y  $t > t_i > t_0$



La suposición de igualdad en las eficiencias implica:  $q_A = q'_A$  y  $q_B = q'_B$ . Aprovechese ahora la cualidad de reversibilidad de las máquinas e inviértase el sentido de la segunda máquina y acópsele con la primera. Con esto se consigue que el único efecto en el universo se encuentre en los depósitos térmicos, puesto que no se intercambia trabajo con los alrededores: el producido por la primera lo aprovecha íntegramente la segunda.

El depósito a  $t$  no sufre alteración alguna ( $q'_A = q_A$ ). El -

depósito a  $t_i$  recibe energía  $q_B'$ , que es la que pierde el depósito a  $t_0$ . La única consecuencia del arreglo ideado es la transmisión de energía de un depósito a  $t_0$  hacia un depósito a  $t_i$  ( $t_i > t_0$ ) que está en franca desavenencia con el postulado de Clausius. Se concluye entonces que la eficiencia de una máquina térmica reversible es función de las temperaturas entre las cuales trabaja:  $\eta = g(t, t_0)$

De acuerdo con lo anterior,  $\eta = g(t, t_0)$ \* o usando la definición:

$$\eta = \frac{q_A - q_B}{q_A} = 1 - \frac{q_B}{q_A} = g(t, t_0)$$

$$\frac{q_B}{q_A} = 1 - g(t, t_0) = f(t, t_0)$$

Si se escoge la función  $f$  tal que  $f(t, t_0) = \frac{b(t_0)}{b(t)}$  y  $b(t) \equiv T$

$$\frac{q_B}{q_A} = \frac{b(t_0)}{b(t)} = \frac{T_B}{T_A} ; \quad \frac{q_B}{T_B} = \frac{q_A}{T_A} ; \quad \frac{q_A}{T_A} - \frac{q_B}{T_B} = 0$$

donde  $T_A$  es la temperatura absoluta que corresponde a  $t$  y  $T_B$  la que corresponde a  $t_0$ . La eficiencia de cualquier máquina reversible de Carnot que trabaja entre  $T_A$  y  $T_B$  se puede escribir:

$$\eta = 1 - \frac{q_B}{q_A} = 1 - \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_A - T_B}{T_A}$$

\* Esto indica que  $\eta$  es una función (hasta ahora desconocida) de  $t$  y  $t_0$ .

Similarmente, para las bombas de calor reversibles:

Calefactor:

$$\beta_c = \frac{q_A}{q_A - q_B} = \frac{q_A/q_B}{q_A/q_B - 1} = \frac{T_A/T_B}{T_A/T_B - 1} = \frac{T_A}{T_A - T_B}$$

Refrigerador:

$$\beta_R = \frac{q_B}{q_A - q_B} = \frac{q_B/q_A}{1 - q_B/q_A} = \frac{T_B/T_A}{1 - T_B/T_A} = \frac{T_B}{T_A - T_B}$$

Examínese ahora el caso de las máquinas irreversibles. De éstas se sabe que al echarse en "reversa" cambian la magnitud de los flujos de calor y de trabajo, además de cambiar sus direcciones. Sea una máquina irreversible I que acepte  $q_a$  de un depósito a  $T_A$ , haga un trabajo  $W$  y rechace calor  $q_b$  a  $T_B$ . Al invertir su operación suponga que consume la misma cantidad de trabajo  $W$ , que toma calor  $q'_b$  del depósito a  $T_B$  y que cede  $q'_a$  al depósito a  $T_A$  ( $T_A > T_B$ ).

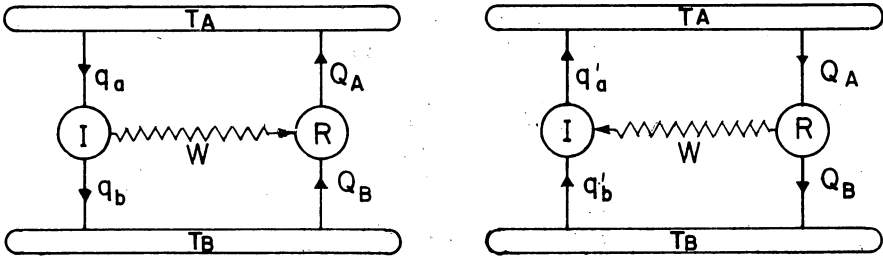


Fig. 3.12

En principio se sabe únicamente que  $q_A \neq q'_A$  y  $q_B \neq q'_B$ . Al examinar a la máquina I se tiene que:

$$W = q_A - q_B = q'_A - q'_B \quad ; \quad q_A - q'_A = q_B - q'_B$$

Además, para la máquina reversible R: (Fig.3.12)

$$W = Q_A - Q_B$$

Para no contravenir a la Segunda Ley de la Termodinámica, el depósito de temperatura elevada debe perder calor\* al tiempo que lo gana el depósito de temperatura baja (enunciado de Clausius).

Entonces, de la primera figura,  $Q_A < q_A$  y  $Q_B < q_B$ . Las eficiencias quedan:

$$\frac{W}{q_A} = \eta_I \quad ; \quad \frac{W}{Q_A} = \eta_R \quad ; \quad q_A \eta_I = Q_A \eta_R \quad ; \quad \frac{Q_A}{q_A} < 1 \quad \therefore \eta_I < \eta_R$$

De la segunda figura  $Q_A > q'_A$  y  $Q_B > q'_B$ . Los coeficientes de operación quedan:

$$\beta_{R_{irrev}} = \frac{q'_B}{W} \quad ; \quad \beta_{R_{rev}} = \frac{Q_B}{W}$$

$$\frac{q'_B}{\beta_{R_{irrev}}} = \frac{Q_B}{\beta_{R_{rev}}}$$

$$\frac{Q_B}{q'_B} > 1 \quad \therefore \beta_{R_{rev}} > \beta_{R_{irrev}}$$

\* La Segunda Ley queda a salvo también si el flujo neto de calor es cero, pero esto implicaría que I fuera reversible, contrario a la suposición que  $q_A \neq q'_A$ .

Si se desea examinar a los calefactores:

$$\beta_{C \text{ irrev}} = \frac{q_A'}{W} ; \beta_{C \text{ rev}} = \frac{Q_A}{W} ; \frac{q_A'}{\beta_{C \text{ irrev}}} = \frac{Q_A}{\beta_{C \text{ rev}}} ; \beta_{C \text{ rev}} > \beta_{C \text{ irrev}}$$

Se puede observar que para obtener una cantidad dada de trabajo  $W$ , la máquina irreversible necesita tomar una cantidad de calor  $q_A$  mayor que la requerida por una máquina reversible  $Q_A$ .

Similarmente, al echar en reversa a la máquina irreversible - consumiendo una cantidad dada de trabajo  $W$ , proporciona un calentamiento  $q_A$  menor que el  $Q_A$  que proporciona una máquina reversible.

También proporciona un efecto refrigerante menor que una máquina reversible, pues  $q_B' < Q_B$ .

No es muy difícil concluir que la máquina reversible resulta - más ventajosa que cualquier máquina irreversible, tanto en sentido directo como en sentido inverso.

Combinando los resultados de la sección anterior, se puede resumir el hallazgo de la presente:

$$\eta_{I \text{ irrev}} = \frac{W}{q_A} = \frac{q_A - q_B}{q_A} < \frac{T_A - T_B}{T_A} = \eta_R$$



$$\beta_C = \frac{q_A}{W} = \frac{q_A}{q_A - q_B} < \frac{T_A}{T_A - T_B} = \beta_{C_{rev}}$$

irrev      irrev                      irrev.

$$\beta_R = \frac{q_B}{W} = \frac{q_B}{q_A - q_B} < \frac{T_B}{T_A - T_B} = \beta_{R_{rev}}$$

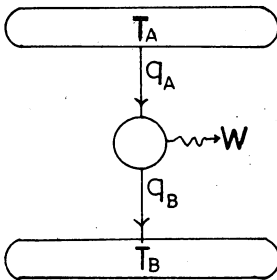
irrev      irrev                      irrev

La combinación de los razonamientos manejados hasta ahora, combinados con los conceptos ligados a las máquinas térmicas permiten traducir los enunciados verbales de la Segunda Ley de la Termodinámica a un lenguaje matemático riguroso, que permite que su contenido sea empleado más directa y sencillamente en las aplicaciones.

Ejemplo 3.4

Una máquina ideal de Carnot trabaja con una diferencia de temperatura de 200°C. Se sabe que un tercio del calor absorbido a la temperatura alta ( $T_A$ ) se retira como calor a la temperatura baja ( $T_B$ ). Si el ciclo produce 400 J de trabajo, calcule  $q_A$ ,  $q_B$ ,  $T_A$  y  $T_B$ .

Solución:



$$T_A - T_B = 200^\circ\text{C} ; \frac{1}{3} q_A = q_B$$

$$W = 400 \text{ J}$$

$$\eta = \frac{q_A - q_B}{q_A} = \frac{q_A - (1/3) q_A}{q_A} = \frac{2}{3}$$

$$\eta = \frac{T_A - T_B}{T_A} = \frac{2}{3} \therefore T_A = \frac{3}{2} (T_A - T_B) = \frac{3}{2} (200\text{K})$$

Esto es porque la diferencia en temperatura absoluta expresada en kelvines tiene el mismo valor numérico que la diferencia de temperatura expresada en °C:  $|\Delta t| \text{ °C} = |\Delta T| \text{ K}$ ;

$$T_B = 300 \text{ K} - 200 \text{ K} = 100 \text{ K};$$

$$T_A = 300 \text{ K}$$

$$\eta = \frac{W}{q_A} \quad q_A = \frac{W}{\eta} = \frac{400 \text{ J}}{(2/3)} = 600 \text{ J} \quad \therefore q_B = \frac{1}{3} q_A = \underline{\underline{200 \text{ J}}}$$

### Ejemplo 3.5

A un estudiante de ingeniería civil se le ocurre la idea de emplear un refrigerador para enfriar su habitación durante el caluroso verano. Así, lleva al refrigerador hasta el centro de su cuarto y abre su puerta para beneficiarse de la "máquina productora de frío". (Concepto erróneo que ha ido adquiriendo al estudiar arduamente).

La temperatura del cuarto es de 25°C, y se puede suponer que el refrigerador es ideal, operando entre 25°C y 0°C.

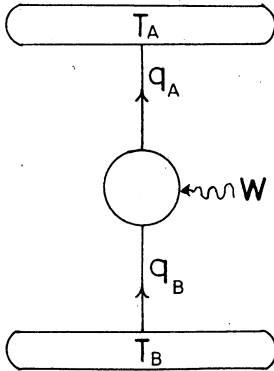
Esta máquina es capaz de formar un kilogramo de hielo por hora, a partir de un kilogramo de agua a 0°C.

Calcule el cambio de temperatura en la habitación (es decir, la nueva temperatura) luego de una hora de operación del refrigerador.

Se puede suponer que éste opera idealmente y que la capacidad calorífica del cuarto es 400 kJ/K.

La entalpía de fusión del hielo es 335J/g.

Solución:



En una hora de operación:

$$q_B = 1 \text{ kg} \times 335 \frac{\text{J}}{\text{g}} = 3.35 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\beta_R = \frac{T_B}{T_A - T_B} = \frac{273.15 \text{ K}}{25 \text{ K}} = 10.926 = \frac{q_B}{W}$$

$$W = \frac{q_B}{\beta_R} = \frac{3.35 \times 10^5 \text{ J}}{10.926} = 3.0661 \times 10^4 \text{ J}$$

$$q_A = q_B + W = 3.35 \times 10^5 \text{ J} + 3.0661 \times 10^4 \text{ J} = 3.6566 \times 10^5 \text{ J}$$

$q_A$  es cedido a la habitación  $\therefore$  el calor neto que intercambia la habitación es  $q_A - q_B = W$

$$W = C_p (T_f - T_i)$$

$$T_f = W/C_p + T_i$$

$$= 3.0661 \times 10^4 \text{ J} / (400 \times 10^3 \text{ J/K}) + 298.15 \text{ K}$$

$$T_f = 7.6653 \times 10^{-2} \text{ K} + 298.15 \text{ K}$$

$$T_f = 298.2267 \text{ K} = 25.0767 \text{ } ^\circ\text{C}$$

El refrigerador no sólo no enfría la habitación, sino que la calienta.

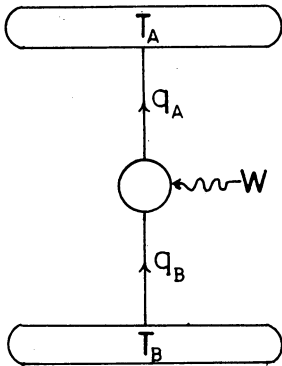
Ejemplo 3.6

Un refrigerador trabaja con un 50% del coeficiente ideal (es decir, el trabajo ideal es el 50% del trabajo real).

Si el refrigerador funciona entre 0°C y 25°C calcule:

- a) El trabajo que requiere para congelar un kilogramo de agua a 0°C (la entalpía de fusión es 335 J/g) y
- b) La cantidad de calor que rechaza a 25°C.

Solución:



$$q_B = 1 \text{ kg} \times 335 \frac{\text{J}}{\text{g}} = 3.35 \times 10^5 \text{ J}$$

a)

$$\beta_{R_{\text{ideal}}} = \frac{T_B}{T_A - T_B} = \frac{273.15 \text{ K}}{25 \text{ K}} = 10.9260$$

$$\beta_{R_{\text{ideal}}} = \frac{q_B}{W_{\text{ideal}}} \therefore W_{\text{ideal}} = \frac{q_B}{\beta_{\text{ideal}}} = \frac{3.35 \times 10^5 \text{ J}}{10.9260}$$

$$W_{\text{ideal}} = 30660.8091 \text{ J} \text{ pero } W_{\text{ideal}} = 0.5 W_{\text{real}}$$

$$W_{\text{real}} = \frac{30660.8091 \text{ J}}{0.5} = 61321.6182 \text{ J}$$

$$\text{b) } q_A = W_{\text{real}} + q_B = 61321.6182 \text{ J} + 3.35 \times 10^5 \text{ J} = 396321.6182 \text{ J}$$

LA DESIGUALDAD DE CLAUSIUS

Sea un sistema que intercambia calor y trabajo al tiempo que cumple un ciclo en que todos los procesos son reversibles.

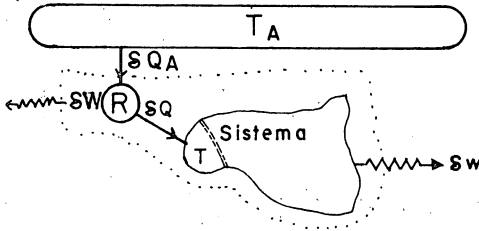


Fig.3.13

No es necesario pedir que el sistema esté a una temperatura constante, pero sí que se use una máquina térmica reversible para intercambiar calor isotérmicamente con el sistema. Se requiere de tantas máquinas térmicas reversibles como haya regiones a temperatura constante dentro del sistema.

Según lo visto inmediatamente después del ejemplo 3.3.

$$\frac{\delta Q_A}{T_A} = \frac{\delta W + \delta Q}{T_A} = \frac{\delta Q}{T} ; \quad \delta W = \left(\frac{T}{T_A} - 1\right) \cdot \delta Q$$

El trabajo total que intercambia el acoplamiento de la figura es:

$$W_{\text{Total}} = \oint w + \oint W$$

Para el sistema:

$$\oint \delta w = \oint \delta Q \quad \text{por lo que, al sustituir}$$

$$W_{\text{Total}} = \oint \delta Q + \oint \left(\frac{T}{T_A} - 1\right) \cdot \delta Q = \oint \frac{T}{T_A} \cdot \delta Q = T_A \cdot \oint \frac{\delta Q}{T}$$

Al observar lo que se encuentra dentro de la línea punteada en la figura, se descubre que si la dirección de las flechas es la dibujada, se tiene una violación a la Segunda Ley de la Termodinámica (al enunciado de Kelvin - Planck). Por tanto, la dirección de las interacciones de trabajo (y  $W_{\text{Total}}$ ) deben cambiar de signo o anularse, es decir, hacerse negativas o cero. Entonces:

$$W_{\text{Total}} \leq 0 ; \quad T_A \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 ; \quad \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Esta conclusión es la Desigualdad de Clausius. Se puede expresar en palabras: Cuando un sistema realiza un proceso cíclico, la integral de línea de  $\delta Q/T$  alrededor del ciclo es menor que (o en el límite igual a) cero.

En este punto puede adelantarse un poco el análisis al observar la ecuación (en la página 77) que resultó del estudio de un ciclo reversible de Carnot. En ese caso se tiene

$$\frac{q_A}{T_A} - \frac{q_B}{T_B} = \sum_i \frac{q_i}{T_i} = 0$$

Parecería que para un ciclo reversible  $\int \frac{\delta Q}{T} = 0$ , aunque conviene confirmar esta aseveración para darle un carácter general.

Sea un sistema cualquiera que intercambia con sus alrededores una cantidad de calor  $\delta Q$  y suponga que es el sistema el que gana energía con este intercambio. Esto implica que los alrededores disminuyen su energía en la misma cantidad, pues el sistema y sus alrededores están

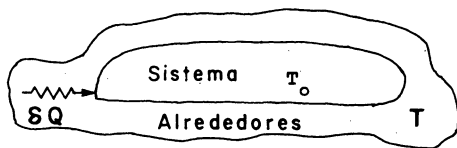


Fig3.14

aislados con respecto al resto del universo y según la Primera Ley de la Termodinámica la energía se mantiene constante.

Como la transmisión de calor es desde los alrededores hacia el sistema, se infiere que la temperatura de los alrededores debe ser mayor que la temperatura del sistema,  $T > T_0$ , lo que conduce a escribir  $|\frac{\delta Q}{T}| \leq |\frac{\delta Q}{T_0}|$ . La igualdad aplica solamente en el límite en que  $\delta Q$  sea cero.

Supóngase ahora que el sistema ejecuta un proceso cíclico reversible. Debido a la condición de reversibilidad, la porción del universo en contacto con el sistema debe también ejecutar un proceso cíclico reversible para poder retornar también a su estado inicial luego que concluya el proceso.

Si se toma la integral cíclica de la desigualdad anterior:

$$\oint \frac{|\delta Q|}{T} \leq \oint \frac{|\delta Q|}{T_0}$$

$$\oint \left( \frac{|\delta Q|}{T} - \frac{|\delta Q|}{T_0} \right) \leq 0 \quad A$$

Ahora bien, si se aplica la desigualdad de Clausius para el sistema y los alrededores, se tiene para cada uno:

$$\oint \frac{|\delta Q|}{T} \leq 0 \quad \text{y} \quad \oint \frac{|\delta Q|}{T_0} \leq 0$$

Al sumar ambas expresiones:

$$\oint \left( \frac{|\delta Q|}{T} + \frac{|\delta Q|}{T_0} \right) \leq 0 \quad B$$

La única opción para que se cumplan las desigualdades simultáneas A y B es que:

$$\oint \frac{|\delta Q|}{T} = 0 = \oint \frac{|\delta Q|}{T_0}$$

En consecuencia, para cualquier ciclo reversible:

$$\oint_{\text{rev.}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$



Por tanto, la parte de la desigualdad de Clausius debe corresponder a un ciclo irreversible.

Cuando se tiene que la integral de línea de alguna cierta magnitud se anula sobre una trayectoria cíclica se dice que esa magnitud no depende de dicha trayectoria, sino que es función únicamente de los estados entre los que se haga variar.

Esta es una característica de los potenciales (por ejemplo la energía potencial gravitatoria goza de esta característica) y, como se ha visto en la sección II, también de las propiedades termodinámicas (como U, H, P, V, T).

Se puede inferir entonces que el integrando de  $\oint (\delta Q/T)_{\text{rev}}$  es la diferencial de una propiedad termodinámica. A esta propiedad se le llama Entropía, y fue reconocida por primera vez y bautizada por Rudolph Clausius.

Sea:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}}$$

Si se integra desde un estado inicial hasta un estado final

$$S_f - S_i = \int_i^f \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rev}}$$

En este caso se ha seguido una trayectoria reversible. Debe notarse que el cambio en entropía entre dos estados señalados no depende de si el cambio se hace reversible o irreversiblemente, puesto que la entropía es una propiedad de estado. Pero debe recordarse siempre que solamente a lo largo de la trayectoria reversible es posible conocer la variación de la entropía mediante la integral de línea de  $\frac{\delta Q}{T}$ .

Este es un caso similar al examinado durante el estudio de la Primera Ley de la Termodinámica. Se observó ahí que el valor del cambio en la energía interna podía calcularse analíticamente si y sólo si la trayectoria entre los estados inicial y final era reversible. En caso contrario, seguía siendo posible calcular el cambio en energía interna a partir del calor y del trabajo intercambiados, pero ahora resultaba indispensable *medir* estas magnitudes directamente.

Entonces, nuestra capacidad para conocer analíticamente el cambio en los valores de la energía interna y de la entropía depende en nuestra habilidad para idear trayectorias reversibles entre los estados inicial y final.

Veamos ahora una característica que posee la entropía que la hace particularmente valiosa en el estudio de los procesos irreversibles (es decir, aquellos que tienen una dirección preferida). Sea un sistema que pase de un estado A a un estado D a lo largo de una trayectoria reversible  $R_0$

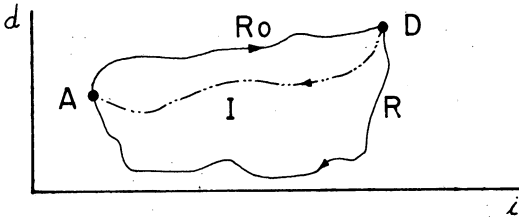


Fig.3.15

y regrese al estado A mediante cualquiera de las trayectorias R (reversible) o I (irreversible)\*. Al aplicar ahora la desigualdad de Clausius para los dos procesos cíclicos que son posibles: A→R<sub>0</sub>→D→R→A - (reversible) y A→R<sub>0</sub>→D→I→A (irreversible) se tiene:

Para el irreversible:

$$\int_{A, R_0}^D \frac{\delta Q}{T} + \int_D^A \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Para el reversible:

$$\int_{A, R_0}^D \frac{\delta Q}{T} + \int_D^A \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Al restar el caso reversible del irreversible:

$$\int_D^A \frac{\delta Q}{T} - \int_D^A \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

De la definición de entropía

$$dS = \frac{\delta Q}{T}_{\text{Rev}}$$

$$S_A - S_D = \int_{D, R}^A \frac{\delta Q}{T}$$

Sustituyendo:

$$\int_D^A \left( \frac{\delta Q}{T} \right) - (S_A - S_D) \leq 0$$

Nótese que esta trayectoria se esquematiza mediante una línea discontinua, pues no es posible representar un proceso irreversible en un diagrama de propiedades.

$$\int_D^A \left( \frac{\delta Q}{T} \right) \leq S_A - S_D$$

Al diferenciar, manteniendo constante el estado D

$$\left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{irrev.}} \leq ds$$

En particular, para el caso de un sistema aislado\*.

$$0 \leq dS_{\text{aislado}}$$

Este es el principio de aumento de la entropía. Expresado en palabras, el cambio de entropía de un sistema aislado es mayor que cero durante un proceso irreversible o es igual que cero durante un proceso reversible.

Al observar que el principio de incremento de la entropía se refiere únicamente a sistemas aislados, parece ser que su aplicación es - bastante restringida. Sin embargo, esta es una observación errónea, pues siempre que se estudia un cambio en algún sistema de interés se debe conocer el medio ambiente con el que interactúa ; entonces, no hay ninguna dificultad\*\* en formar un nuevo sistema, ahora aislado, con el sistema original más sus alrededores y beneficiarnos de las características - de la entropía.

\* Recuérdese que un sistema aislado no intercambia masa ni energía con los alrededores por lo que  $\delta Q = 0$ .

\*\* En algunos casos conviene manejar únicamente las características del sistema. En este caso resultan de suma utilidad unas funciones que se definen arbitrariamente, pero que proporcionan la misma información que la entropía, sin necesidad de confeccionar un sistema aislado. Estas funciones son la energía libre de Gibbs o función de Gibbs y la energía libre de Helmholtz, o función de Helmholtz. Véase por ejemplo "Apuntes de Termodinámica".

Como un ejemplo en la técnica de formar sistemas aislados, considérese que ocurriera una explosión en la Facultad de Ingeniería que generara una onda de choque, desprendimiento de calor y todas las características que corresponden al caso. El sistema de interés donde ocurre el proceso es la Facultad de Ingeniería (más bien sus restos) y los alrededores con los que se interactúa son las otras facultades y escuelas (es una explosión bastante pequeña).

Considere que los efectos de la explosión pasen inadvertidos - en Copilco, Av. Universidad, Insurgentes y el Pedregal. Por tanto, todos los cambios que se presentan tienen lugar única y exclusivamente en C.U. La manera de formar el sistema aislado consiste en reunir al sistema de interés (la Facultad de Ingeniería) y los alrededores que se ven afectados por el proceso (las demás facultades).

Con unos razonamientos semejantes se puede siempre formar un sistema aislado y comprobar de una manera concisa y elegante, además de económica, todos los razonamientos previos.

Se deja como ejercicio que se examinen los razonamientos en los casos de los procesos irreversibles con el auxilio de la entropía. Si un proceso en un sistema aislado conduce a una disminución en la entropía, entonces el proceso es imposible.

Se comprobará que los procesos que conducen a alguna violación de la Segunda Ley de la Termodinámica conducen también a la disminución de la entropía en un sistema aislado.

En vista de lo anterior, la Segunda Ley de la Termodinámica se puede expresar en términos matemáticos precisos:

$$\begin{array}{l} \Delta S \geq 0 \\ \text{sist} \\ \text{aislado} \end{array} ; \begin{array}{l} dS \geq 0 \\ \text{sist.} \\ \text{aislado} \end{array}$$

De aquí se observan dos puntos importantes: 1ª. la definición es diferencial. Esto quiere decir que se puede determinar el cambio de entropía entre dos estados pero *no* se puede conocer el valor absoluto - que tiene la entropía en ninguno de ellos\*.

Como en el caso de la energía interna y de la entalpía, esto no importa, pues para las aplicaciones basta conocer únicamente los cambios en las propiedades.

2ª De la definición se deduce que las unidades de la entropía son las de energía por unidad de temperatura. Debe tenerse presente *siempre* que la temperatura que aparece en el denominador tiene que ser absoluta (veáse la página 75). Así en el Sistema Internacional la entropía se expresa en joule/kelvin. En el sistema británico, la entropía se expresa en BTU/(grados Rankine) y en el antiguo sistema MKS se expresaba en calorías/kelvin. Esta última unidad recibe el nombre de *unidad entrópica*.

En vista de que la energía es una propiedad extensiva y la temperatura es intensiva, la entropía es una *propiedad extensiva*. Dicho en otros términos, la masa posee por sí misma cierta entropía, así como posee cierto volumen o cierta entalpía. Por tanto, y como estas propiedades, la entropía puede expresarse por unidad de masa. Se le llama entonces *entropía específica* y se le denota mediante una *s* minúscula.

\* Existe un postulado descubierto por Nernst que permite asignar el valor de cero a la entropía de un cristal perfecto cuando  $T = 0 \text{ K}$ . Este postulado se conoce como la Tercera Ley de la Termodinámica.

Como en un sistema aislado se mantienen constantes la energía interna y el volumen, la expresión diferencial puede escribirse más rigurosamente como:

$$(dS)_{u, v} \geq 0$$

La conclusión importante de la Segunda Ley de la Termodinámica es que los procesos irreversibles o naturales tienen lugar mientras la entropía pueda aumentar.

Cuando la entropía llega a su valor máximo, dependiendo de las condiciones impuestas al proceso, se dice que el sistema ha llegado a su estado de equilibrio.

Como se ha visto antes, cuando un sistema está en equilibrio dejan de efectuarse cambios o procesos. Para sacar a un sistema de este estado es necesario actuar desde el exterior, alterando las condiciones del sistema, de tal suerte que la entropía pueda alcanzar otro valor máximo (mayor que el anterior).

Se aprecia que los procesos reversibles ocurren a lo largo de estados de equilibrio (lo que caracteriza a los procesos cuasiestáticos) pues no provocan ninguna variación en la entropía del universo (sistema + alrededores).

Ahora que se conocen las virtudes de la entropía, y antes de pasar a la manera de calcular sus cambios conviene examinar más cuidadosamente su definición.

$$dS \equiv \frac{\delta Q}{T}_{\text{rev.}}$$

## VARIACION DE LA ENTROPIA

En las secciones precedentes de este capítulo se han presentado una serie de fenómenos y observaciones que han conducido finalmente al establecimiento de una propiedad termodinámica llamada entropía.

Se han visto también las características que la hacen tan importante en las aplicaciones y se ha bosquejado una cierta estrategia para analizar las situaciones en donde se requiere de un análisis termodinámico.

En esta sección se hará la deducción de las expresiones que nos permitan valuar los cambios de la entropía en procesos que involucren dos tipos de sustancias: los gases ideales y las sustancias incompresibles.

En ambas circunstancias, el punto de partida es la definición de entropía:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \text{ rev}$$

Además, nos será de utilidad recordar que en este curso solamente nos interesa el trabajo de expansión, definido por

$$\delta W = - P dV$$

Sustancias Incompresibles.-Para la mayor parte de las aplicaciones en que intervienen los sólidos y los líquidos se observa que sus respectivos volúmenes permanecen prácticamente constantes,  $dV = 0$ , o cuando menos, el valor del término  $P dV$  es muy pequeño.



Entonces, como una buena aproximación, se puede escribir la Primera Ley de la Termodinámica de la manera siguiente:

$$\delta Q = dU + P \cdot dV$$

$$\delta Q = dU$$

De la definición de la energía interna

$$dU = m C dT$$

Entonces, de la definición de la entropía:

$$\frac{\delta Q}{T} \text{ rev} = \frac{m C dT}{T}$$

En el caso de los líquidos y los sólidos se tiene que, debido a su carácter de incompresibilidad, las capacidades térmicas específicas a presión y volumen constantes tienen prácticamente el mismo valor:  $C_p = C_v = C$ .

Se elige una trayectoria reversible que una los estados inicial y final, se investiga el valor de la capacidad térmica específica (que puede obtenerse como un polinomio en temperatura del tipo

$$C = a + bT + cT^2 + \dots + )$$

y luego se procede a la integración.

**GASES IDEALES.**- La Primera Ley se expresa para un sistema cerrado.

$$\delta Q + \delta W = dU$$

para el trabajo

$$\delta W = - P dV$$

debido a la Ley de Joule (véase el capítulo II)

$$dU = mC_v dt$$

en consecuencia

$$\delta Q = mC_v dT + P dV$$

de la definición de la entropía

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \text{ rev}$$

$$dS = \frac{mC_v dT}{T} + \frac{P}{T} dV$$

De la ecuación de estado de los gases ideales

$$P \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

$$\frac{P}{T} = \frac{mR}{V}$$

Al sustituir en el segundo término del lado derecho

$$dS = \frac{mC_v}{T} dT + \frac{mR}{V} dV$$

Al integrar entre un estado inicial y un estado final considerando que el  $C_v$  es constante.

$$* \quad S_f - S_i = mC_v \cdot \ln \frac{T_f}{T_i} + mR \cdot \ln \frac{V_f}{V_i}$$

\* En los apuntes de Termodinámica se puede encontrar una deducción más general y rigurosa de estas expresiones.

Esta expresión se puede escribir en términos de  $C_p$  y de las presiones empleando las igualdades

$$C_p - C_v = R$$

$$v = \frac{m R T}{P}$$

Al sustituir y emplear las reglas de los logaritmos se obtiene

$$S_f - S_i = mC_v \ln \frac{T_f}{T_i} + m R \cdot \left[ \ln \frac{m R}{m R} \left[ \frac{f}{i} \right] + \ln \frac{T_f}{T_i} + \ln \frac{P_i}{P_f} \right]$$

$$S_f - S_i = (mC_v + m R) \cdot \ln \frac{T_f}{T_i} - m R \cdot \ln \frac{P_f}{P_i}$$

$$* \quad S_f - S_i = mC_p \ln \frac{T_f}{T_i} - m R \cdot \ln \frac{P_f}{P_i}$$

Debe observarse que las propiedades  $P$  y  $T$  son funciones de estado que dependen únicamente de los estado inicial y final, sin importar el camino que se siga para efectuar el proceso.

Con los ejemplos siguientes se ilustrará la aplicación de los - métodos que se acaban de deducir.

\* En los Apuntes de Termodinámica se puede encontrar una deducción más general y rigurosa de estas expresiones.

EJEMPLO 3.7

Calcúlese la variación de la entropía de un gramo de aluminio cuando se le calienta desde 25 hasta 600°C. La capacidad térmica específica del aluminio se expresa por:  $C_p = 20.9451 \text{ (J/(gK))} + T \times 0.010728 \text{ (J/gK}^2\text{)}$ .

SOLUCION:

De la definición de entropía

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{m C_p dt}{T}$$

$$\int_1^2 dS = \int_{298.15K}^{873.15K} 1 \text{ g} \times 20.9451 \frac{\text{J}}{\text{gK}} \frac{dT}{T} + \int_{298.15K}^{873.15K} 0.010728 \frac{\text{J} \times 1 \text{ g}}{\text{gK}^2} dt$$

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= 1\text{g} \times 20.9451 \frac{\text{J}}{\text{gK}} \ln \frac{873.15\text{K}}{298.15\text{K}} + 1\text{g} \times 0.010728 \frac{\text{J}}{\text{gK}^2} \times (873.15\text{K} - 298.15\text{K}) \\ &= 22.5057 \frac{\text{J}}{\text{K}} + 6.1686 \frac{\text{J}}{\text{K}} \\ &= 28.6743 \frac{\text{J}}{\text{K}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.8

Se añaden 200 (g) de mercurio a 100°C a un calorímetro que contiene agua a 20°C. La masa de agua es 80 (g) y la masa del calorímetro equivale a 20 (g) de agua\*. Encuentre el cambio de entropía (a) del mercurio, (b) del agua y del calorímetro, (c) del agua, del calorímetro y mer

\* Esto quiere decir que si el material de que está construido el calorímetro cambia su temperatura  $\Delta T$  cuando recibe un calor  $Q$ , una masa de 20 (g) de agua que recibe este mismo calor también aumenta su temperatura en  $\Delta T$ . Véase por ejemplo "Prácticas de Termodinámica", páginas 61 y 62.

curio. Las capacidades térmicas específicas del agua y del mercurio tienen los valores constantes de 4.184 (J/gK) y 0.140 (J/gk)), respectivamente.

SOLUCION:

El primer paso es encontrar la temperatura de equilibrio.

El mercurio, el agua y el calorímetro forman un sistema aislado.

La Primera Ley de la Termodinámica queda para este caso

$$0 = m_{\text{Hg}} C_{\text{Hg}} (T_f - T_i)_{\text{Hg}} + (m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{eq}}) C_{\text{H}_2\text{O}} (T_f - T_i)_{\text{H}_2\text{O}}$$

$$T_f = \frac{m_{\text{Hg}} C_{\text{Hg}} T_{i\text{Hg}} + (m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{eq}}) C_{\text{H}_2\text{O}} T_{i\text{H}_2\text{O}}}{m_{\text{Hg}} C_{\text{Hg}} + (m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{eq}}) C_{\text{H}_2\text{O}}}$$

$$T_f = \frac{200(\text{g}) \times 0.140 \left[ \frac{\text{J}}{\text{gK}} \right] \times 373.15\text{K} + (80(\text{g}) + 20(\text{g})) \times 4.184 \left( \frac{\text{J}}{\text{gk}} \right) \times 293.15\text{K}}{200(\text{g}) \times 0.140 \left( \frac{\text{J}}{\text{gK}} \right) + (80(\text{g}) + 20(\text{g})) \times 4.184 \left( \frac{\text{J}}{\text{gK}} \right)}$$

$$T_f = 298.1679 \text{ K} = 25.0179^\circ\text{C}$$

De la definición de entropía

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

a) Para el mercurio:

$$\int_{i_n}^{f_n} dS = \int_{T_{i_n}}^{T_{f_n}} m C_p \frac{dT}{T}$$

$$S_f - S_i = 200(\text{g}) \times 0.140 \left[ \frac{\text{J}}{\text{gK}} \right] \times \ln \frac{298.1679 \text{ K}}{373.15\text{K}}$$

$$= - 6.2811 \text{ (J/K)}$$

b) Para el agua y el calorímetro

$$S_f - S_i = (m_{H_2O} + m_{eq}) C_{H_2O} \ln \frac{T_f}{T_i}$$

$$S_f - S_i = 100(g) \times 4.184 (J/gK) \times \ln \frac{298.1679 K}{293.15K}$$

$$= 7.1012 (J/K)$$

c) Para el mercurio, el agua y el calorímetro

$$S_f - S_{i, Total} = - 6.2811 (J/K) + 7.1012 (J/K)$$

$$= 0.8201 (J/K)$$

---

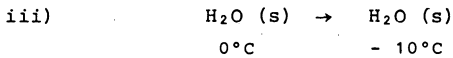
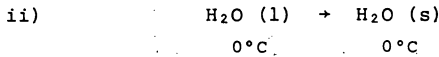
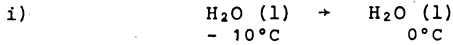
EJEMPLO 3.9

Calcule el cambio de entropía (a) del agua, (b) de los alrededores, cuando un gramo-mol de agua subenfriada se congela a  $-10^{\circ}\text{C}$ . Considere que las capacidades específicas del agua y del hielo tienen los valores constantes de 75 y 38 (J/(gmol K)) respectivamente y que la entalpía de fusión a  $0^{\circ}\text{C}$  es 6026 (J/gmol).

SOLUCION:

El proceso que ocurre es:  $\text{H}_2\text{O}(l) \rightarrow \text{H}_2\text{O}(s)$   
 $- 10^{\circ}\text{C} \qquad \qquad - 10^{\circ}\text{C}$

a) No tenemos la información necesaria para calcular directamente el cambio de entropía para este proceso irreversible, por lo que se propone una trayectoria reversible para ir del estado inicial al final:



Proceso i)

$$\Delta S = n C_{(l)} \ln \frac{T_f}{T_i} = 1 \text{ (gmol)} \times 75 \text{ (J/gmolK)} \times \ln \frac{273.15\text{K}}{263.15\text{K}}$$

$$\Delta S = 2.7973 \text{ (J/K)}$$

Proceso ii)

$$\Delta S = \frac{\Delta H_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}} = \frac{- 6026 \text{ (J/gmol)} \cdot 1 \text{ gmol}}{273.15\text{K}} = - 22.0611 \text{ (J/K)}$$

Proceso iii)

$$\Delta S = n C_{(s)} \ln \frac{T_f}{T_i} = 1 \text{ (gmol)} \times (38) \text{ (J/gmolK)} \times \ln \frac{263.15\text{K}}{273.15\text{K}}$$

$$= - 1.4173 \text{ (J/K)}$$

El cambio total de entropía para el agua es la suma de los tres valores precedentes.

$$\Delta S = - 20.6811 \text{ (J/K)}$$

b) Suponiendo que los alrededores estén a la temperatura constante de 263.15 K, el calor que deben intercambiar los alrededores es el mis-

mo que intercambia el agua. La Primera Ley de la Termodinámica aplicada al agua queda:

$$Q = U_f - U_i - W \quad (\text{para cada proceso})$$

$$Q_{\text{tot}} = U_{L(0^\circ\text{C})} + \Delta H_{\text{fus}} + U_{S(-10^\circ\text{C})} - U_{S(0^\circ\text{C})} - U_{L(-10^\circ\text{C})}$$

$$Q_{\text{tot}} = 1 \text{ (gmol)} \times 75 \frac{\text{J}}{\text{gmolK}} \times (273.15 - 263.15)\text{K} + 1 \text{ (gmol)} \times (-6026 \frac{\text{J}}{\text{gmol}}) +$$

$$+ 1 \text{ (gmol)} \times 38 \frac{\text{J}}{\text{gmol}} \times (263.15 - 273.15)\text{K}$$

$$Q_{\text{tot}} = 750 \text{ J} - 6026 \text{ J} - 380 \text{ J} = - 5656.00 \text{ J}$$

Los alrededores reciben calor del agua = 5656.00 (J)

El cambio de entropía de los alrededores es

$$\Delta S_{\text{amb}} = \frac{Q}{T} = \frac{5656.00 \text{ (J)}}{273.15 \text{ K}} = 21.4934 \text{ (J/K)}$$

Es conveniente notar que aún cuando el congelamiento del líquido sub-enfriado es un proceso irreversible, el cambio de entropía para el agua es negativo.

Este resultado no se contrapone a las deducciones de la sección precedente, pues éstas se refieren al cambio de entropía de un sistema aislado. En el ejemplo, el sistema aislado se forma con el agua que sufre el proceso y con los alrededores que intercambian calor con ella.

Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{Total}} &= \Delta S_{\text{amb}} + \Delta S_{\text{H}_2\text{O}} \\ &= 21.4934 \text{ J/K} - 20.6811 \text{ J/K} \\ &= 0.8123 \text{ (J/K)} \end{aligned}$$

Que está de acuerdo con el principio de aumento de la entropía.



EJEMPLO 3.10

Calcule el cambio de entropía de 3 kg de nitrógeno en un proceso reversible y politrópico, cuando la temperatura se eleva desde 100 hasta 300°C. El exponente politrópico es 1.2. La capacidad térmica específica a presión constante tiene el valor constante de 1.0393 (J/(gK)), la constante particular del nitrógeno es:  $2.9694 \times 10^{-1}$  (J/gK).

SOLUCION:

En un proceso politrópico

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$$

o bien

$$T_1^n P_1^{(1-n)} = T_2^n P_2^{(1-n)}$$

El cambio de entropía para un gas ideal es:

$$\Delta S = mC_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - m R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left[ \frac{T_1}{T_2} \right]^{n/(1-n)}$$

$$\Delta S = 3 \times 10^3 \text{ (g)} \times 1.0393 \text{ (J/gK)} \times \ln \left\{ \frac{573.15\text{K}}{373.15\text{K}} \right\} -$$

$$- 3 \times 10^3 \text{ (g)} \times 2.9694 \times 10^{-1} \text{ (J/gK)} \times \ln \left[ \frac{573.15\text{K}}{373.15\text{K}} \right]^6$$

$$= - 9 55.7634 \text{ (J/K)}$$

Obsérvese que el cambio de entropía para el gas en este proceso reversible es negativo. La Segunda Ley de la Termodinámica asegura que para un proceso reversible en un sistema aislado,  $\Delta S = 0$ . Por lo

tanto los alrededores deben tener un aumento de entropía de exactamente 955.7634 (J/K).

Debe hacerse la observación que un enunciado de "proceso reversible" no indica que el cambio de entropía sea 0 para el sistema.

---

### EJEMPLO 3.11

Se tienen dos recipientes rígidos conectados mediante una válvula y sumergidos en un baño de agua a una temperatura constante.

Uno de los recipientes tiene un volumen que es precisamente el doble del otro. El recipiente pequeño contiene hidrógeno, mientras que en el otro se ha hecho un vacío absoluto. Calcule el cambio de entropía por kg de hidrógeno cuando se abre la válvula y se permite que se establezcan las propiedades. Considere que el hidrógeno es un gas ideal con una constante particular de 4.1572 (J/(gK)) y un  $C_p = 14.5502$  (J/(gK)).

### SOLUCION:

Este es un proceso irreversible estudiado por Joule.

Como el agua no sufre cambio alguno en sus propiedades, su estado permanece invariable. El gas sufre un proceso adiabático, isotérmico e irreversible.

Ignoramos los estados intermedios que conectan al estado ini-

cial con el final, pero como la entropía es una propiedad de estado, esto no importa.

El cambio de la entropía del gas es el cambio de la entropía del universo: según el principio de aumento de la entropía, se espera que sea positivo.

$$\Delta S = mC_v \ln \frac{T_f}{T_i} + mR \cdot \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Al ocupar los dos recipientes, el volumen final es:

$$V_f = V_i + 2 V_i = 3 V_i$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta S &= m R \ln \frac{V_f}{V_i} \\ &= m R \ln \frac{(3 V_i)}{V_i} \end{aligned}$$

$$\Delta s = R \ln (3)$$

$$= 4.1572 \text{ (J/gK)} \times \ln 3$$

$$= 4.5672 \text{ (J/(gK))} \times 10^3 \text{ (g/kg)}$$

$$= 4\,567.1510 \text{ (J/(kgK))}$$

EJEMPLO 3.11

Una corriente de aire pasa por un tubo aislado térmicamente. En la sección 1 sus propiedades son:  $T_1 = 320^\circ\text{F}$  y  $P_1 = 20 \text{ lb/in}^2$ . En 2,  $P_2 = 23 \text{ lb/in}^2$  y  $T_2 = 375^\circ\text{F}$ . Suponga que el aire es un gas ideal con  $R = 2.8680 \times 10^{-1} \text{ (J/(gK))}$  y  $C_p = 1.0038 \text{ (J/gK)}$ .

Indique la dirección del flujo.

SOLUCION:

Primeramente (como se ha señalado en el capítulo I) se deben convertir las unidades de los datos al S. I.

$$P_1 = 20 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \left[ \frac{1.01325 \text{ bar}}{14.696 \text{ lb/in}^2} \right] = 1.3789 \text{ bares}$$

$$P_2 = 23 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \left[ \frac{1.01325 \text{ bar}}{14.696 \text{ lb/in}^2} \right] = 1.5858 \text{ bares}$$

$$T_1 = (320^\circ\text{F} - 32^\circ\text{F}) \frac{1^\circ\text{C}}{1.8^\circ\text{F}} + 273.15^\circ\text{C} = 433.15\text{K}$$

$$T_2 = (375^\circ\text{F} - 32^\circ\text{F}) \frac{1^\circ\text{C}}{1.8^\circ\text{F}} + 273.15^\circ\text{C} = 463.7056\text{K}$$

Supóngase que la corriente va de (1) a (2) y calcúlese el cambio de entropía del aire. Si da mayor, o a lo sumo igual que 0, el flujo será en esa dirección. Si el cambio de entropía resulta negativo, el flujo será en la dirección contraria.

Esto debe ser así porque en este proceso es el aire el único que sufre un cambio en la entropía, pues el tubo aislante impide que los alrededores interactúen con el aire. El cambio de entropía del aire es igual al cambio de entropía del universo, la cual debe ser mayor o igual que 0.

Se tiene:

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \\ &= 1.0038 \text{ (J/gK)} \times \ln \left\{ \frac{463.7056\text{K}}{433.15\text{K}} \right\} - 2.8680 \times 10^{-1} \text{ J/(gK)} \ln \left\{ \frac{1.5858 \text{ bar}}{1.3789 \text{ bar}} \right\} \\ &= 0.0283 \text{ (J/(gK))} > 0 \end{aligned}$$

El flujo va de (1) a (2). Debe notarse que el flujo va de una presión baja hacia una presión mayor, contrariamente a lo que se espera comúnmente.

## CAPITULO IV

### CICLOS TERMODINAMICOS

#### INTRODUCCION

El hombre, a lo largo de su historia ha ido incrementando el consumo de energía; aprendió a usar la hidráulica y la eólica que, junto con el fuego y la tracción animal constituyeron durante cientos de años las fuentes de energía de las cuales se sirvió para su progreso. En este capítulo examinaremos las características de los ciclos termodinámicos - que son el principio de operación de algunas máquinas, ya que en la época contemporánea ha surgido la necesidad de encontrar fuentes alternativas de dicha energía y de diseñar dispositivos que la transformen más eficientemente en trabajo útil.

La Termodinámica adquiere una gran importancia en el estudio de cualquier sistema que implique un intercambio de energía, utilizando un agente de transformación que fluye o circula a través de dicho sistema.

Los fundamentos de esta disciplina fueron sentados en el siglo XIX, cuando, debido al desarrollo de las máquinas térmicas, se planteó la necesidad de estudiar las leyes de la transformación del calor en trabajo. En años más recientes se empezaron a idear mecanismos que le facilitaran su trabajo y su transporte, y fue así como surgió la máquina de vapor y posteriormente los motores de combustión como el de gasolina, el diesel, etc. Estas máquinas dieron pie a la Revolución Industrial y al despegue de la humanidad hacia un crecimiento explosivo, mismo que la

ha conducido a la posible amenaza de la extinción de la fuente de energía más popular en los últimos 90 años: el petróleo. Afortunadamente el hombre siempre ha demostrado tener la inventiva necesaria para salir de sus problemas y es así como empieza a dar sus primeros pasos en el campo de dos fuentes de energía muy importantes: la energía nuclear y la energía solar. Sin embargo, de la aplicación de los conceptos de la Segunda Ley de la Termodinámica se sabe que existen limitaciones a la cantidad de energía que de dichas fuentes puede transformarse en trabajo. Actualmente se tienen muchas máquinas para transformar ciertos tipos de energía en trabajo y éste a su vez en energía mecánica. Otros dispositivos transforman la energía de la fuente directamente en energía eléctrica o en energía luminosa, pero muchos se encuentran todavía en la fase experimental.

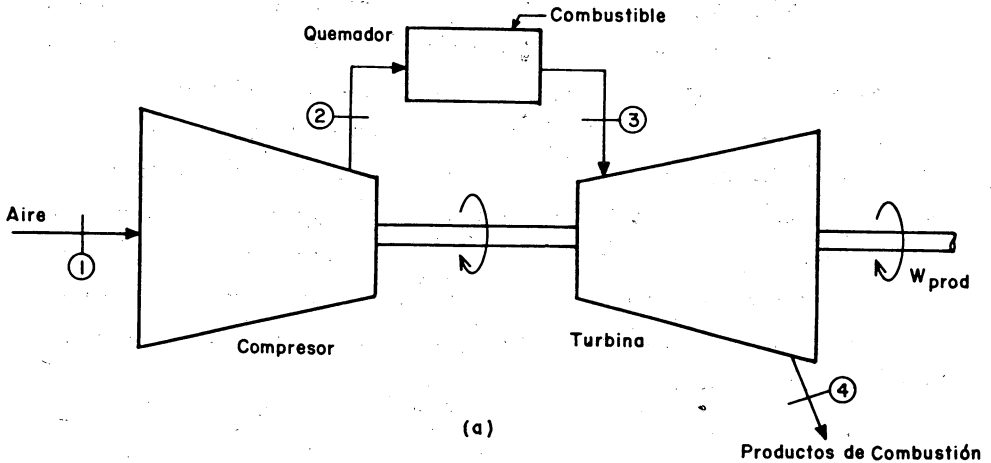
En el presente capítulo vamos a analizar algunos de los ciclos termodinámicos en los cuales están basadas las máquinas más usadas en la actualidad para obtener trabajo, así como sus posibles modificaciones.

Salvo dos de las máquinas que se van a analizar, las otras no trabajan en lo que llamamos un ciclo termodinámico, ya que constantemente renuevan la sustancia de trabajo, pero el considerar que trabajan realmente en un ciclo termodinámico constituye una simplificación muy grande en su análisis.

A los ciclos en los cuales se basan estas máquinas se les da también el nombre de ciclos de potencia, pues trabajan en forma continua entregando energía de manera constante por lo cual desarrollan una potencia determinada.

### CICLO BRAYTON

Joule y Brayton propusieron independientemente el ciclo en el que se basa el funcionamiento de la turbina de gas moderna. La primera turbina de gas que funcionó con éxito se construyó en 1906; en la actualidad se le dan muy variados usos, desde la generación estacionaria de energía eléctrica hasta el popular uso como medio de propulsión de los aviones modernos. En estas máquinas se usa tanto el ciclo abierto, en los aviones y en las plantas termoeléctricas, como el ciclo cerrado en las centrales nucleares, en las cuales se suministra calor al sistema por medio de otro fluido. En la figura 4.1 podemos observar los principales elementos de las turbinas de gas, tanto de ciclo abierto como de ciclo cerrado.





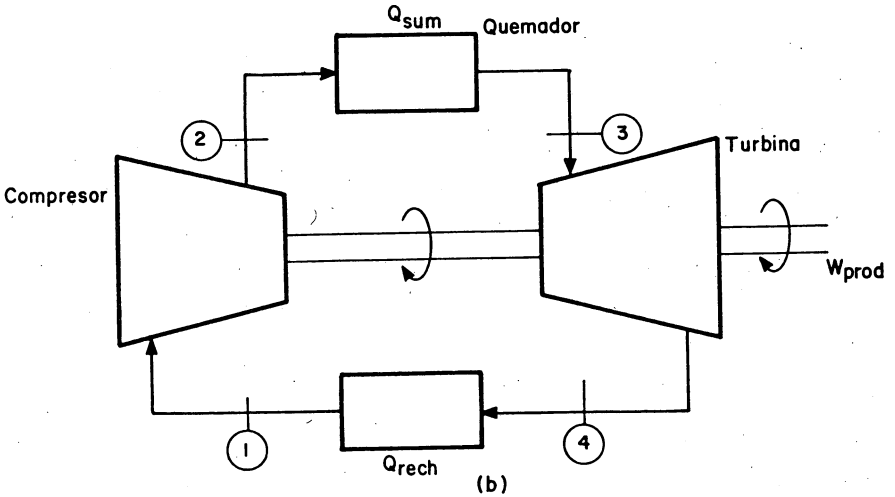


Fig. 4.1, Ciclo Brayton, a) Abierto, b) Cerrado

Sus partes principales son: el compresor, en el cual se lleva a cabo la compresión del aire; la cámara de combustión, donde se produce la combustión a presión constante; la turbina, donde los gases se expanden y se aprovecha su energía para mover el compresor y un excedente hacia el exterior del sistema. En el ciclo abierto los gases se tiran al medio ambiente; en el ciclo cerrado los gases que salen de la turbina se llevan a un cambiador de calor donde se les enfría para ser llevados de nuevo al compresor y reiniciar el ciclo. El ciclo ideal en el cual se basan estas turbinas está representado en la figura 4.2, donde podemos ver cuatro procesos.

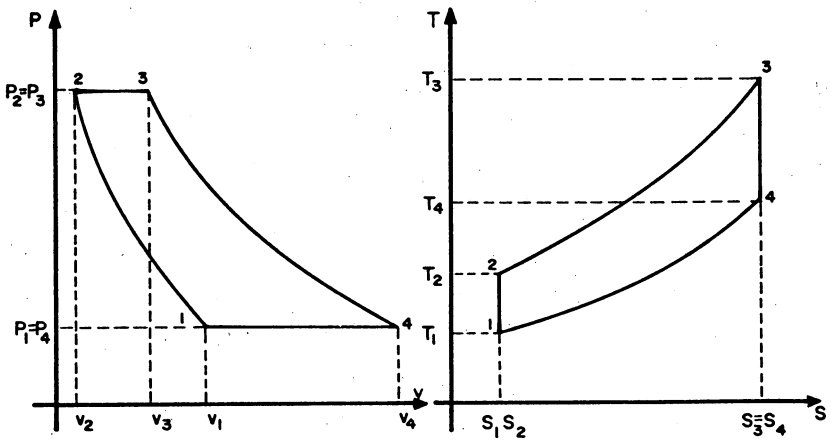


Figura 4.2 Diagramas presión-volumen y temperatura-entropía en un ciclo Brayton de aire normal.

Del estado 1 al 2, un proceso de compresión isentrópica; de 2 a 3, un proceso a presión constante en el cual se le suministra calor al sistema; de 3 a 4 se tiene una expansión isentrópica en la cual el sistema entrega trabajo. Por último, en el proceso de 4 a 1 el sistema cede calor al medio ambiente a presión constante. Suponiendo que la capacidad térmica específica ( $C_p$ ) del aire permanece constante, el calor suministrado es:

$${}_2Q_3 = m C_p \cdot (T_3 - T_2) \quad (4.1)$$

y el calor rechazado:

$${}_4Q_1 = m C_p \cdot (T_1 - T_4) \quad (4.2)$$

entonces, la expresión de la eficiencia del ciclo estará dada por:

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{\text{sum}}} \quad (4.3)$$

o bien

$$\eta = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \quad (4.3.1)$$

Podemos dar otras formas a la ecuación de la eficiencia utilizando la relación de compresión y la relación de presiones:  $r$  y  $r_p$ , respectivamente.

Así, la ecuación (4.3) se puede escribir:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \quad (4.4)$$

o con la relación de presiones:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^{(k-1)/k}} \quad (4.5)$$

donde

$$r = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{y} \quad r_p = \frac{P_3}{P_4} = \frac{P_2}{P_1}$$

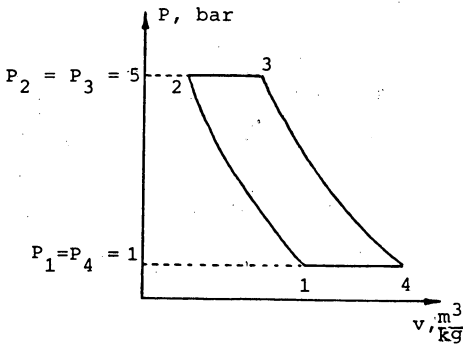
En los ciclos abiertos, los gases que salen de la turbina representan una pérdida sustancial de energía por el calor que se desperdicia. En general estos gases se usan en un regenerador para calentar el aire comprimido antes de que entre a la cámara de combustión, con lo cual se requiere menos combustible para el ciclo global. Por tanto, se aumenta la eficiencia.

EJEMPLO 4.1

El aire suministrado al compresor de un ciclo Brayton ideal se encuentra a una presión de 1 bar y a una temperatura de 40°C. Si la relación de presiones es 5,  $T_2 = 495.73$  K,  $T_4 = 677.47$  K y el aire a la entrada de la turbina se encuentra a 800°C, calcular: a) Los calores suministrado y rechazado en el ciclo, b) el trabajo neto en el ciclo, c) la eficiencia del ciclo, d) la variación de entropía en cada proceso y e) dibujar el diagrama T-s del ciclo.

SOLUCION:

Dibujemos un diagrama P-v con los datos del problema:



$$C_p \text{ aire} = 1004 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$T_1 = 40^\circ\text{C} = (40 + 273) \text{ K} = 313 \text{ K}$$

$$T_2 = 495.73 \text{ K}$$

$$T_3 = 800^\circ\text{C} = (800 + 273) \text{ K} = 1073 \text{ K}$$

$$T_4 = 677.47 \text{ K}$$

$$r_p = 5$$

a) Calores suministrado y rechazado

$$q_{\text{sum}} = {}_2q_3 = C_p \cdot (T_3 - T_2)$$

$${}_2q_3 = 1004 (1073 - 495.73) = \underline{5.79 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}$$

$${}_4q_1 = {}_4q_1 = C_p (T_1 - T_4)$$

$${}_4q_1 = 1004 (313 - 677.47) = - \underline{3.65 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}$$

b) Para el trabajo neto, se tiene:

$$\oint \delta q = {}_1q_2 + {}_2q_3 + {}_3q_4 + {}_4q_1 = - \oint \delta w$$

pero

$${}_1q_2 = {}_3q_4 = 0$$

por ser procesos adiabáticos.

$$\oint \delta q = {}_2q_3 + {}_4q_1 = (5.79 - 3.65) \times 10^5 = 2.14 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$\therefore w_{\text{neto}} = - \oint \delta w = - \underline{2.14 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}$$

c) Cálculo de la eficiencia:

$$\eta = \frac{|w_{\text{neto}}|}{{}_2q_3} = \frac{2.14 \times 10^5}{5.79 \times 10^5} = 0.369$$

$$\underline{\eta = 36.9\%}$$

d) La variación de entropía en cada proceso:

$$\Delta s_{1-2} = \Delta s_{3-4} = 0$$

pues son procesos adiabáticos reversibles:

$$\Delta s_{2-3} = C_p \ln \frac{T_3}{T_2} - R \ln \frac{P_3}{P_2}$$

pero

$$P_2 = P_3$$

$$\Delta s_{2-3} = C_p \ln \frac{T_3}{T_2} = 1004 \ln \left( \frac{1073 \text{ K}}{495.73 \text{ K}} \right)$$

$$\Delta s_{2-3} = 775.27 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$\Delta s_{4-1} = C_p \ln \frac{T_1}{T_4} - R \ln \frac{P_1}{P_4}$$

pero

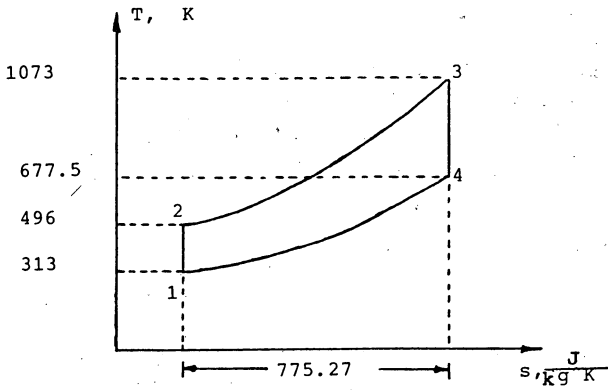
$$P_1 = P_4$$

$$\Delta s_{4-1} = C_p \ln \frac{T_1}{T_4}$$

se observa que:

$$\Delta s_{4-1} = - \Delta s_{2-3} \quad \text{Y} \quad \Delta s_{\text{ciclo}} = 0$$

e) Diagrama T-s del ciclo



### CICLO DE OTTO

Este ciclo fue ideado por Nikolaus A. Otto en 1876, año en que se construyó la primera máquina de 4 tiempos o carreras que funcionaba con este ciclo. Posteriormente, en 1881 apareció una máquina basada en el mismo ciclo, pero que utilizaba sólo 2 tiempos o carreras. Esto quiere decir que los eventos mecánicos (tiempos o carreras) no corresponden necesariamente a los procesos termodinámicos del ciclo.

Para comprender como opera una máquina de ciclo Otto observaremos la siguiente figura (4.3).

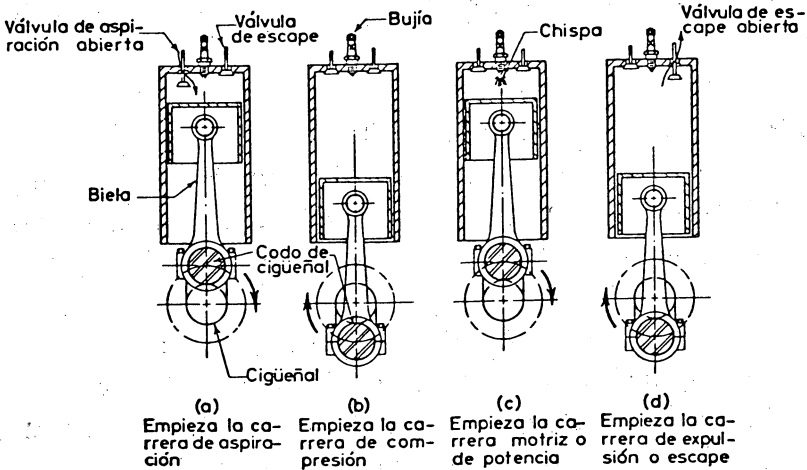


Figura 4.3 Máquina de 4 tiempos o carreras que se opera con un ciclo Otto.



- 1.- Se abre la válvula de admisión para permitir el paso a la mezcla - aire-combustible, simultáneamente el émbolo (pistón) inicia la *carrera de aspiración* desde el punto muerto superior hasta el punto - muerto inferior. Este es un evento mecánico, ya que el gas introducido a la cámara de combustión no modifica sus propiedades termodinámicas (densidad, presión, temperatura, etc.).
  
- 2.- Una vez que ha concluido la carrera de aspiración, se cierra la - válvula de admisión y se inicia la *carrera de compresión* desde el punto de muerto inferior hasta el punto muerto superior. Este es el primer proceso termodinámico, que viene a ser una compresión adiabática la que, por ser tan rápida, no da tiempo a que se establezca la transmisión de calor y por tanto, no existe flujo de calor.
  
- 3.- Cuando el émbolo llega al punto muerto superior, salta la chispa de la bujía, incendiando la mezcla aire-combustible. Este es el segundo proceso termodinámico, el cual consiste en una transmisión de calor al sistema cuando el gas mantiene su volumen constante.
  
- 4.- Después de que se ha encendido la mezcla aire-combustible y se ha - elevado la presión y la temperatura, se inicia la *carrera de potencia* desde el punto muerto superior hasta el punto muerto inferior. Este es el tercer proceso termodinámico, que es esencialmente una - expansión adiabática.
  
- 5.- Cuando el émbolo ya se encuentra en el punto muerto inferior, se - abre la válvula de escape dando lugar a un descenso de la presión y

la temperatura del sistema. Este es el cuarto proceso termodinámico que viene a ser una transmisión de calor al medio ambiente, manteniéndose el volumen del sistema constante.

- 6.- Una vez abierta la válvula de escape, se inicia la *carrera de barrido* o *expulsión* de los gases producto de la combustión. Este es un evento mecánico, ya que, como se dijo en 1, no existen modificaciones de las propiedades del gas. Concluida esta carrera, se inicia nuevamente el ciclo.

Como se podrá observar, efectivamente los tiempos o carreras no corresponden estrictamente a los procesos termodinámicos del ciclo.

En la figura 4.4 podemos ver este ciclo representado en los planos V-P y S-T.

- |     |  |   |
|-----|--|---|
| 1-2 | Compresión adiabática                    | (suministro de trabajo).                  |
| 2-3 | Combustión a volumen constante           | (suministro de calor).                    |
| 3-4 | Expansión adiabática                     | (realización de trabajo).                 |
| 4-1 | Transmisión de calor a volumen constante | (transmisión de calor al medio ambiente). |

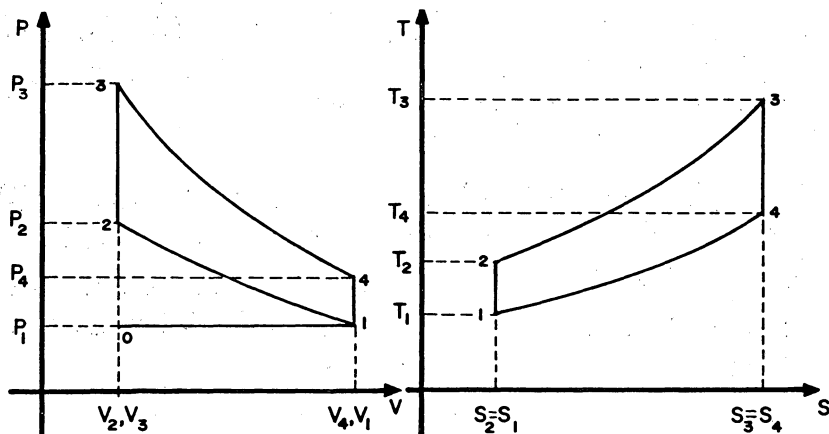


Figura 4.4 Diagramas volumen-presión y entropía temperatura de un ciclo Otto ideal.

Consideraremos que los procesos termodinámicos de este ciclo son reversibles, de aquí que el 1-2 y el 3-4 son isentrópicos. El diagrama V-P representa el trabajo que entrega el sistema en la carrera de expansión o de potencia (proceso 3-4), menos el trabajo entregado al sistema mediante la carrera de compresión (proceso 1-2). Esto es, el área encerrada por los procesos 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 será el trabajo neto que desarrolla el sistema por ciclo.

Análogamente en el diagrama s-T, el área encerrada por el ciclo representa el calor "aprovechado" por el sistema para ser convertido en trabajo.

.En los ciclos ideales que se analizan aquí, se supone que la -

sustancia de trabajo es un gas ideal y no una mezcla aire-combustible como ocurre en la realidad. A continuación vamos a analizar los procesos a fin de encontrar la eficiencia del ciclo. En el proceso 2-3, el sistema recibe calor

$${}_2Q_3 = mCv(T_3 - T_2) \quad (4.6)$$

En el proceso de 4-1, el sistema transmite calor al medio ambiente

$${}_4Q_1 = mCv(T_1 - T_4) \quad (4.7)$$

y la eficiencia está dada por:

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{\text{sum}}} \quad (4.8)$$

y como

$$W_{\text{neto}} = |{}_2Q_3| - |{}_4Q_1|$$

$$\eta = \frac{|{}_2Q_3| - |{}_4Q_1|}{|{}_2Q_3|} ; \quad \eta = \frac{mCv(T_3 - T_2) - mCv(T_4 - T_1)}{mCv(T_3 - T_2)}$$

como la masa y Cv son constantes:

$$\eta = \frac{(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \quad (4.9)$$

utilizando la relación de compresión ( $r = \frac{V_1}{V_2}$ ) se puede llegar a expresar la eficiencia como:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \quad (4.10)$$

Donde  $k$  es el índice adiabático del gas.

Podemos ver que mientras más se aumente la relación de compresión, más eficiente es el ciclo. Esto ha conducido a producir motores con una relación de compresión más alta, sin embargo, se presenta el problema de la autoignición del combustible, debido a que alcanza temperaturas y presiones muy altas. Lo anterior lo podemos ver en la figura 4.5.

En la máquina real existen numerosas irreversibilidades como la inevitable fricción del émbolo con las paredes del cilindro y la transmisión de calor en los procesos de compresión y expansión.

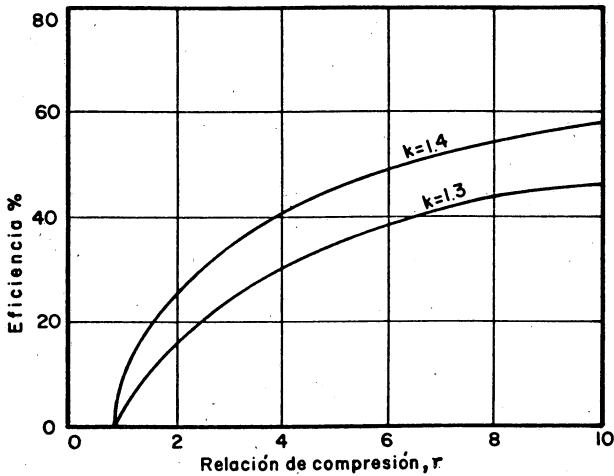


Figura 4.5 Eficiencia de un ciclo Otto en función de  $r$  y  $k$

EJEMPLO 4.2

Un ciclo Otto ideal funciona con aire, la relación de compresión es de 6. Si la máxima temperatura en el ciclo se limita a  $450^{\circ}\text{C}$ , - la presión máxima de operación es de 15.32 bar y las condiciones del - aire al iniciarse el proceso de compresión son de 1 bar y  $10^{\circ}\text{C}$ :

a) Trazar un diagrama del ciclo en el plano V-P.

Calcular:

b) La eficiencia térmica del ciclo.

c) El calor por unidad de masa suministrado al ciclo.

d) El trabajo por unidad de masa desarrollado por el ciclo.

e) El incremento de entropía por unidad de masa en cada proceso del ciclo.

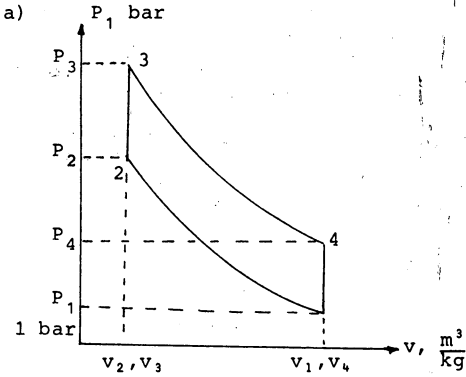
f) Hacer una gráfica del ciclo en el plano s-T.

SOLUCION:

Como se trata de aire, se puede obtener de tablas termodinámicas la siguiente información:

$$C_p = 1004 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}, \quad C_v = 717 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}, \quad R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$k = 1.4$$



$$T_1 = 10 + 273 = 283 \text{ K}$$

$$T_3 = 723 \text{ K}$$

$$P_3 = 15.32 \text{ bar}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = 6$$

b) Por los datos del problema, conviene utilizar la ecuación 4.10

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{k-1}}$$

$$\therefore \eta = 1 - \frac{1}{(6)^{0.4}}$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{2.05} = 0.511$$

$$\eta = 51.1\%$$

c) El calor suministrado será:

$${}_2Q_3 = mC_v(T_3 - T_2)$$

$$\therefore {}_2q_3 = C_v(T_3 - T_2)$$

por lo que se requiere calcular  $T_2$ .

Como el proceso 1-2 es un proceso adiabático reversible se tiene que:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ \frac{V_1}{V_2} \right]^{k-1}$$

$$2Q_3 = 717 (723 - 579.5)$$

$$\therefore T_2 = T_1 \left[ \frac{V_1}{V_2} \right]^{k-1}$$

$$2Q_3 = \underline{\underline{1.028 \times 10^5 \text{ J/kg}}}$$

$$T_2 = 283 (6)^{0.4} = 579.5 \text{ K}$$

d) Como la eficiencia es:

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{\text{sum}}}$$

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{2Q_3}$$

$$\therefore W_{\text{neto}} = \eta \cdot 2Q_3$$

$$W_{\text{neto}} = 0.511 \times 1.028 \times 10^5$$

$$W_{\text{neto}} = \underline{\underline{5.25 \times 10^4 \text{ J/kg}}}$$

e)  $\Delta s$  en cada proceso.

Proceso 1-2. Adiabático reversible.

$$\Delta s_{1-2} = 0$$

$$\Delta s_{1-2} = 0$$



proceso 2-3. Isométrico.

$$\Delta s_{2-3} = C_v \ln \frac{T_3}{T_2} + R \ln \frac{V_3}{V_2}$$

pero

$$V_3 = V_2$$

$$\Delta s_{2-3} = C_v \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$\Delta s_{2-3} = 717 \ln \frac{723}{579.5}$$

$$\underline{\underline{\Delta s_{2-3} = 158.63 \text{ J/(kg K)}}}$$

proceso 3-4. Adiabático reversible

$$\underline{\underline{\Delta s_{3-4} = 0}}$$

proceso 4-1. Isométrico

$$\Delta s_{4-1} = C_v \ln \frac{T_1}{T_4} + R \ln \frac{V_1}{V_4}$$

$$\Delta s_{4-1} = C_v \ln \frac{T_1}{T_4}$$

además:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ \frac{V_1}{V_2} \right]^{k-1} = \left[ \frac{V_4}{V_3} \right]^{k-1} = \frac{T_3}{T_4}$$

$$\Delta s_{4-1} = C_v \ln \frac{T_2}{T_3} = - \Delta s_{2-3} \quad \therefore \underline{\underline{\Delta s_{4-1} = - \Delta s_{2-3}}}$$

## CICLO DIESEL

Rudolf Diesel obtuvo en 1893 una patente sobre el tipo de motor que ahora lleva su nombre. Este motor funciona con un ciclo muy parecido al de Otto, siendo sus diferencias esenciales las siguientes:

- a) En el motor Diesel se suministra aire en lugar de la mezcla aire-combustible.
- b) El motor Diesel no usa bujías, incendiándose el combustible por la elevación de temperatura ocasionada por una alta compresión.
- c) El suministro de calor se efectúa a presión constante y no a volumen constante como en el ciclo Otto.

Al igual que en el ciclo Otto, las carreras de admisión y escape (barrido de los gases producto de la combustión) son eventos mecánicos y no procesos termodinámicos, ya que el gas contenido en la cámara de combustión no sufre alteraciones en sus propiedades termodinámicas.

Veamos un ciclo Diesel representado en los diagramas  $V-P$  y  $s-T$  (cabe aclarar que los procesos señalados se consideran reversibles y que la sustancia de trabajo es un gas ideal).

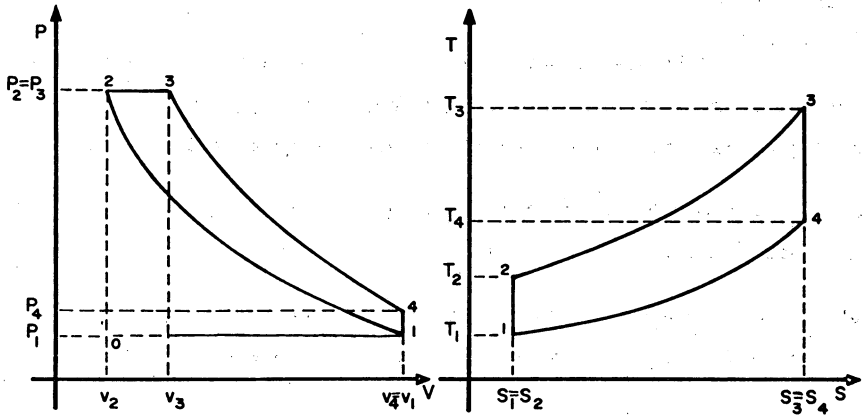


Figura 4.6 Ciclo Diésel de aire normal

- Proceso 1-2      Compresión adiabática (entropía constante) se proporciona trabajo al sistema.
- Proceso 2-3      Transmisión de calor al sistema a presión constante (en este proceso varía el volumen del sistema, ya que se inyecta el combustible).
- Proceso 3-4      Expansión adiabática (entropía constante) el sistema entrega trabajo.
- Proceso 4-1      Transmisión de calor del sistema al medio ambiente a volumen constante (esto ocurre cuando se abre la válvula de escape).

Para obtener la eficiencia de este ciclo recordamos nuevamente que:

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{\text{sum}}} = \frac{|Q_A| - |Q_B|}{|Q_A|} = \frac{|2Q_3| - |4Q_1|}{|2Q_3|} \quad (4.11)$$

$$\eta = 1 - \frac{|4Q_1|}{|2Q_3|} = 1 - \frac{m C_v (T_4 - T_1)}{m C_p (T_3 - T_2)} \quad (4.12)$$

Utilizando la relación de compresión  $r = \frac{V_1}{V_2}$ , la relación de admisión de combustible  $r_a = \frac{V_3}{V_2}$  y el índice adiabático  $k = \frac{C_p}{C_v}$

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \left[ \frac{r_a^k - 1}{k(r_a - 1)} \right] \quad (4.13)$$

La ecuación 4.13 difiere de la del ciclo Otto en el factor encerrado entre paréntesis, el cual siempre es mayor que 1, pues  $r_a$  siempre es mayor a la unidad y por lo tanto, para una relación de compresión dada, el ciclo Otto es más eficiente que el Diesel lo cual se debe a que se alcanza más alta temperatura en el ciclo Otto que en el Diesel, para una  $r$  igual. Sin embargo, la máquina Diesel no tiene problemas de detonación y puede trabajar con relaciones de compresión más altas y el combustible que utiliza es hasta ahora más barato. La máquina Diesel tiene el problema de que la inyección del combustible debe estar muy bien calibrada y por tanto la máquina no puede operar en un rango de velocidad muy amplio. Es por eso que esta máquina tiene aplicación en dispositivos que requieren velocidades aproximadamente constantes como las

locomotoras, tractores, generadores eléctricos, etc.

De la ecuación 4.13 es obvio que mientras menor sea la relación de admisión de combustible más eficiente será el ciclo Diesel, lo cual podemos ver en la figura 4.7.

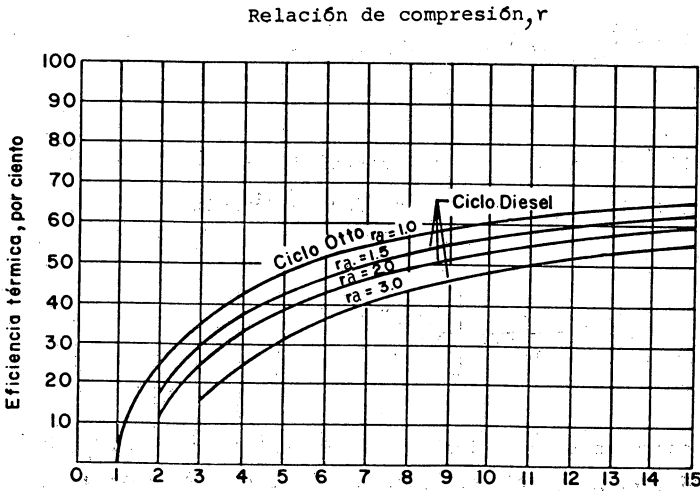


Figura 4.7 Comparación entre ciclo Otto y ciclo Diesel para  $k = 1.4$

EJEMPLO 4.3

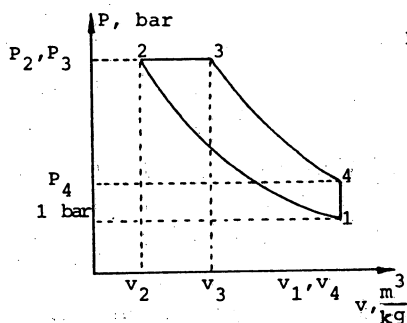
Una máquina que opera con el ciclo Diesel tiene una relación de compresión de 10, el volumen en el estado 3 es de  $0.151 \text{ m}^3/\text{kg}$ , la presión y temperatura del aire suministrado al cilindro son de 1 bar y de  $-5^\circ\text{C}$ , respectivamente. Calcule:

- a) La temperatura al finalizar el proceso de suministro de calor

- b) El calor suministrado
- c) El trabajo por unidad de masa que entrega el ciclo.
- d) La eficiencia térmica del ciclo.
- e) El incremento de entropía en cada proceso.
- f) Trazar el diagrama s-T del ciclo.

SOLUCION:

Para resolver este problema es conveniente auxiliarse del diagrama presión-volumen del ciclo.



$$R_{\text{aire}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$C_{p \text{ aire}} = 1004 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$T_1 = 5^\circ\text{C} = (273 + 5) \text{ K} = 278 \text{ K}$$

$$r = \frac{v_1}{v_2} = 10 \quad v_3 = 0.151 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

A partir de las propiedades del estado 1, podemos calcular  $v_1$ :

$$v_1 = \frac{R T_1}{P_1} = \frac{287 \times 278}{1 \times 10^5} = 0.797 \text{ m}^3/\text{kg}$$

y de la relación de compresión:

$$v_2 = \frac{v_1}{10}$$

$$V_2 = 0.079 \text{ m}^3/\text{kg}$$

por otra parte, como el proceso 1-2 es adiabático reversible, se tiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ \frac{V_1}{V_2} \right]^{k-1}$$

y en función de la relación de compresión:

$$T_2 = T_1 r^{k-1} = 698.3 \text{ K}$$

el proceso 2-3 es a presión constante:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

de donde:

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2}$$

sustituyendo los valores respectivos

$$T_3 = 698.3 \times \frac{0.151}{0.079} = 1334.7 \text{ K}$$

$$\underline{T_3 = 1334.7 \text{ K}}$$

que es la temperatura al finalizar el proceso de suministro de calor.

b) El calor es suministrado al ciclo durante el proceso 2-3

$$\therefore {}_2Q_3 = m C_p (T_3 - T_2)$$

y por unidad de masa

$${}_2q_3 = C_p (T_3 - T_2)$$

$${}_2q_3 = 1004 (1334.7 - 698.13)$$

$$2q_3 = 6.39 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

c) De la primera ley para un ciclo

$$\oint \delta w = - \oint \delta q$$

de donde:

$$\oint \delta w = W_{\text{neto}} \quad \therefore W_{\text{neto}} = - \oint \delta q$$

y

$$\oint \delta q = 1q_2 + 2q_3 + 3q_4 + 4q_1$$

pero

$$1q_2 = 3q_4 = 0$$

por ser procesos adiabáticos

$$4q_1 = C_v (T_1 - T_4)$$

además

$$\frac{T_4}{T_3} = \left[ \frac{V_3}{V_4} \right]^{k-1} \quad T_4 = T_3 \left[ \frac{V_3}{V_4} \right]^{k-1}$$

$$\text{y como } v_4 = v_1, \quad T_4 = (1334.71) \left( \frac{0.151}{0.797} \right)^{0.4} = 686.1 \text{ K}$$

$$\text{entonces } 4q_1 = 717(278 - 686.1) = -2.92 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

$$\therefore \oint \delta q = 6.39 \times 10^5 - 2.92 \times 10^5 = 3.47 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

$$\text{finalmente } W_{\text{neto}} = -3.47 \times 10^5 \text{ J/kg}$$



d) Calcularemos la eficiencia a partir de la ecuación

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{k-1}} \left[ \frac{r_a^k - 1}{k(r_a - 1)} \right]$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{10^{0.4}} \left[ \frac{\left[ \frac{0.151}{0.079} \right]^{1.4} - 1}{1.4(1.91 - 1)} \right] = 0.538$$

$$\underline{\underline{\eta = 53.8\%}}$$

por otra parte, la eficiencia también es

$$\eta = \frac{|W_{\text{neto}}|}{|Q_{\text{sum}}|} = \frac{|W_{\text{neto}}|}{|2Q_3|}$$

$$\eta = \frac{3.47 \times 10}{6.39 \times 10^5} = .543$$

$$\underline{\underline{\eta = 54.3\%}}$$

e) Como se vió en el ciclo Otto, el incremento de entropía de un gas ideal durante un proceso adiabático reversible es nulo; esto es:

$$\underline{\underline{\Delta s_{1-2} = 0}}$$

y

$$\underline{\underline{\Delta s_{3-4} = 0}}$$

$$\Delta s_{2-3} = C_p \ln \frac{T_3}{T_2} - R \ln \frac{P_3}{P_2}$$

pero

$$P_3 = P_2$$

$$\Delta s_{2-3} = 1004 \ln \frac{1334.7}{698.3} = 1004 (0.648)$$

$$\underline{\underline{\Delta s_{2-3} = 650.4 \text{ J/(kg K)}}}$$

y

$$\Delta s_{4-1} = C_v \ln \frac{T_1}{T_4} + R \ln \frac{V_1}{V_4}$$

pero

$$v_1 = v_4$$

$$\therefore \Delta s_{4-1} = C_v \ln \frac{T_1}{T_4}$$

$$C_v = C_p - R = 1004 - 287 = 717$$

$$C_v = 717 \text{ J/(kg K)}$$

$$\Delta s_{4-1} = 717 \ln \frac{278}{686.1} = -647.74 \text{ J/(kg K)}$$

$$\underline{\underline{\Delta s_{4-1} = -647.74 \text{ J/(kg K)}}}$$

Haciendo la suma de las variaciones de entropía en el ciclo:

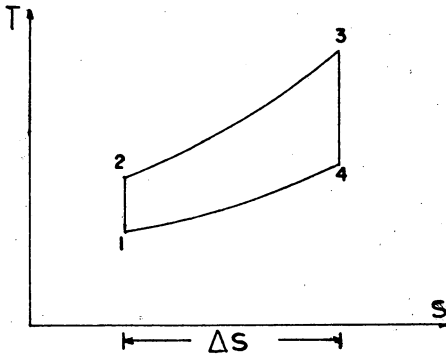
$$\Delta s_{1-2} + \Delta s_{2-3} + \Delta s_{3-4} + \Delta s_{4-1} = 0 + 650.4 + 0 - 647.74 = 2.66 \text{ J/(kg K)}$$

La diferencia entre  $\Delta s_{2-3}$  y  $\Delta s_{4-1}$  es prácticamente cero, ya que al efectuar operaciones no se consideran todas las cifras decimales. Esto es:

$$\Delta s_{4-1} = - \Delta s_{2-3}$$

$$\Delta s_{\text{ciclo}} = 0$$

f) Diagrama s-T del ciclo



## CICLO RANKINE

William John M. Rankine (1820-1872) fue contemporáneo de aquellos gigantes de la Termodinámica: Joule, Maxwell, Kelvin y Clausius.

Este ciclo que lleva su nombre es la base de la generación de energía en plantas termoeléctricas y nucleoelectricas, las cuales constituyen en la actualidad la mayor fuente de energía eléctrica; también es la base sobre la cual se diseñó la máquina de vapor que tan popular fue en las locomotoras que hasta hace algunos años se usaron en nuestro país.

El esquema simplificado de los equipos que constituyen un ciclo Rankine y su arreglo se puede ver en la figura 4.8

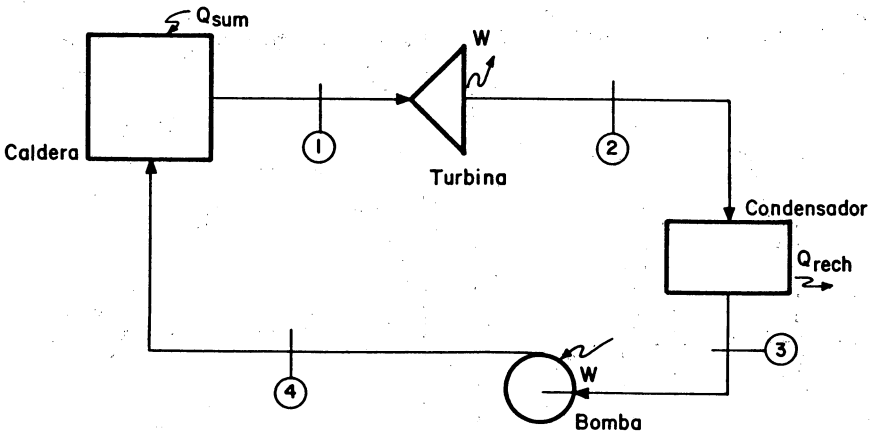


Figura 4.8 Diagrama de flujo del ciclo Rankine

Básicamente está formado por una turbina, donde el vapor saturado se expande y realiza un trabajo haciendo girar el rotor de la turbina; un condensador después de la turbina, donde el vapor expandido húmedo y a baja presión se condensa hasta transformarse en líquido saturado y a la misma presión. La condensación se realiza debido a que se le retira energía al vapor, generalmente por medio de agua a menor temperatura. Después del condensador se tiene una bomba, la cual eleva la presión del líquido saturado hasta tener la presión necesaria para que entre a la caldera como líquido subenfriado (se llama líquido subenfriado a aquel que no está saturado; en otras palabras, aquel líquido cuyo estado no se encuentra sobre la curva de saturación). La caldera suministra calor al líquido subenfriado a presión constante hasta que se transforma en vapor saturado y en condiciones de volver a entrar en la turbina y reiniciar el ciclo.

En la figura 4.9 podemos ver los distintos procesos que compo-

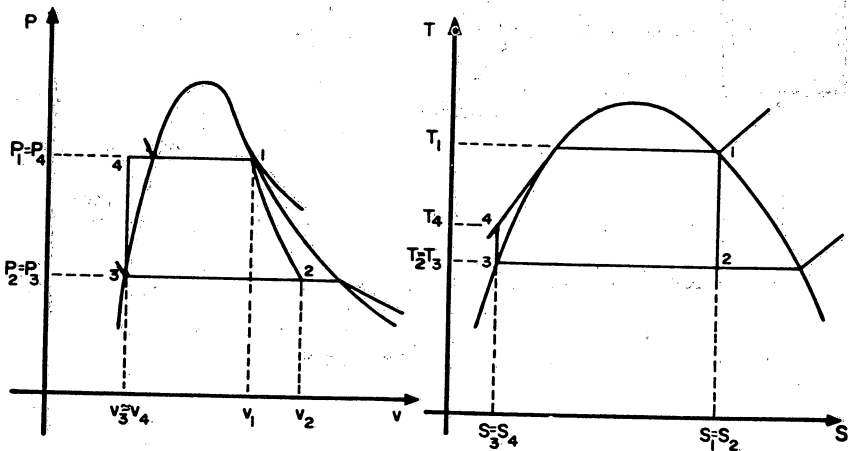


Figura 4.9 Diagramas presión-volumen y temperatura-entropía del Ciclo Rankine

nen el ciclo Rankine ideal, tanto en el diagrama volumen-presión como en el entropía-temperatura. El proceso 1-2 que se lleva a cabo en la turbina es un proceso de expansión isentrópica, donde la presión baja de  $P_1$  a  $P_2$ ; el proceso 2-3 es un cambio de fase y por lo tanto es isotérmico e isobárico, y se realiza en el condensador; el proceso 3-4 es isentrópico donde la presión del líquido se aumenta de  $P_3$  a  $P_4$ ; por último, en el proceso 4-1 se transmite calor al sistema a presión constante, llevando primero el líquido subenfriado hasta su temperatura de saturación y después evaporando el líquido saturado hasta tener vapor saturado y reiniciar el ciclo.

Especialmente en el diagrama T-s se puede ver que este ciclo tiene un gran parecido con el ciclo de Carnot, pero su eficiencia es menor debido a que el proceso de adición de calor no se realiza a temperatura constante. Esto último se debe a la imposibilidad de diseñar una bomba que maneje una mezcla de líquido y vapor que resulte práctica.

Ahora bien, mientras más pendiente tengan las líneas de saturación del diagrama T-s de la sustancia, más se podrá aproximar el ciclo de Rankine al ciclo de Carnot. Además el fluido debe tener una alta entalpía de vaporización para que la sustancia pueda recibir más energía a la temperatura alta. Es por estas propiedades, por su abundancia y bajo costo, por lo que el fluido que más se usa para este ciclo es el agua, aunque en algunos casos especiales se usan otros fluidos como mercurio, sodio, etc.

Para obtener la eficiencia del ciclo ideal basta encontrar el trabajo neto que es la suma algebraica del trabajo de la turbina y del trabajo de la bomba, mediante la aplicación de la Primera Ley Termodinámica.

mica, en condiciones de flujo y estado estables o permanentes,

$$\dot{Q} + \dot{W} = \dot{m} \left[ \frac{1}{2} (\bar{V}_2^2 - \bar{V}_1^2) + g(z_2 - z_1) + (h_2 - h_1) \right]$$

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} + \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \frac{1}{2} (\bar{V}_2^2 - \bar{V}_1^2) + g(z_2 - z_1) + (h_2 - h_1)$$

$$q + w = \Delta ec + \Delta ep + \Delta h$$

donde,  $\Delta ec$  y  $\Delta ep$  son variaciones de energía específica cinética y potencial respectivamente.

$$q = 0 \quad \text{para la turbina y para la bomba}$$

$$w = 0 \quad \text{para la caldera y el condensador}$$

$\Delta ec$  y  $\Delta ep$  son despreciables para todos los equipos que componen el ciclo, de tal forma que:

$$w_{tur} = h_1 - h_2$$

$$w_{bom} = h_4 - h_3$$

$$w_{neto} = w_{tur} - w_{bom}$$

$$w_{neto} = (h_1 - h_2) - (h_4 - h_3)$$

En la caldera, de igual forma que para la turbina y la bomba, se tiene:

$$q_{sum} = q_1 = h_1 - h_4$$

siendo la eficiencia:

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_{\text{sum}}}$$

sustituyendo:

$$\eta = \frac{(h_1 - h_2) - (h_4 - h_3)}{(h_1 - h_4)} \quad (4.14)$$

la cual podemos escribir como:

$$\eta = \frac{(h_1 - h_2) - (h_4 - h_3)}{(h_1 - h_3) - (h_4 - h_3)}$$

generalmente el trabajo de la bomba es despreciable y finalmente podemos escribir la eficiencia de la bomba como:

$$\eta = \frac{(h_1 - h_2)}{(h_1 - h_3)} \quad (4.15)$$

Sin embargo, si se quiere calcular el trabajo de la bomba:

$$W_{\text{bom}} = h_4 - h_3 = (u_4 + P_4 v_4) - (u_3 + P_3 v_3)$$

pero como la temperatura del agua en el proceso de bombeo no varía apreciablemente:  $u_4 = u_3$ ; además siendo un fluido incompresible  $v_4 = v_3$

$$W_{\text{bom}} = v (P_4 - P_3) \quad (4.16)$$

#### EJEMPLO 4.4

Considere un ciclo Rankine ideal que utiliza vapor de agua: la presión en la caldera es de 20 bar y la presión en el condensador es de 0.075 bar; considerando que a la entrada de la turbina el vapor es saturado, calcular:

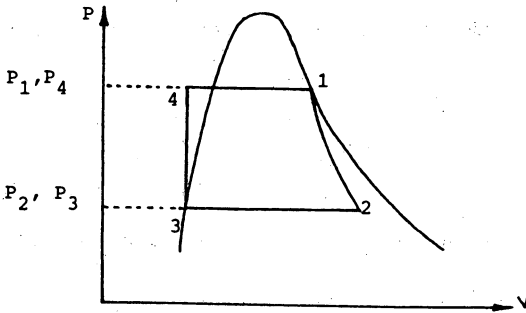
- Trabajo realizado por la bomba



- b) Trabajo en la turbina
- c) Calor recibido por el sistema en la caldera
- d) Eficiencia del ciclo
- e) El incremento de entropía en cada proceso y en el ciclo

SOLUCION:

Dibujemos un diagrama de presión-volumen del ciclo:



- a) Trabajo en la bomba:

$${}_3W_4 = h_4 - h_3 = v(P_4 - P_3)$$

Necesitamos conocer el volumen específico del agua durante el proceso de bombeo 3-4. Esta y las demás propiedades que se necesitan conocer para efectuar los cálculos se pueden leer de las tablas de propiedades termodinámicas de agua. Sin embargo, por no contemplarse el uso de tablas y diagramas en el programa de ésta asignatura, los daremos como -

datos anexos al problema.

$$h_1 = 2799.5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$v_3 = 1.008 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$h_2 = 1975.7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$s_1 = 6.3409 \text{ kJ/kg K}$$

$$h_3 = 168.79 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$s_2 = 5.764 \text{ kJ/kg K}$$

$$W_{\text{bom}} = 1.008 \times 10^{-3} (20 - 0.075) \times 10^5 = 2008.4 \text{ J/kg}$$

$$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \frac{\text{bar Pa}}{\text{bar}} = \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$\underline{\underline{W_{\text{bom}} = 2.0084 \text{ J/kg}}}$$

b) Trabajo entregado por la turbina.

$${}_1W_2 = h_2 - h_1$$

$$W_{\text{turb}} = 1975.7 - 2799.5 = - 823.8 \text{ kJ/kg}$$

$$\underline{\underline{W_{\text{tur}} = - 823.8 \text{ kJ/kg}}}$$

c) Calor recibido por el sistema en la caldera

$${}_1q_1 = h_1 - h_4$$

como

$$h_4 - h_3 = v_3 (P_4 - P_3) = {}_3W_4$$

$$h_4 = h_3 + {}_3W_4 = 168.79 + 2.0082$$

$$h_4 = 170.798 \text{ kJ/kg}$$

$$q_{\text{cal}} = q_{\text{sum}} = 2799.5 - 170.798 \qquad q_{\text{sum}} = \underline{\underline{2628.7 \text{ kJ/kg}}}$$

d) Eficiencia (considerando el trabajo de la bomba, que como se puede observar, es despreciable).

$$\eta = \frac{W_{\text{neto}}}{q_{\text{sum}}} = \frac{W_{\text{tur}} - W_{\text{bom}}}{q_{\text{sum}}} = \frac{{}_1W_2 - {}_3W_4}{{}_4q_1}$$

$$\eta = \frac{823.8 - 2.008}{2628.7} = 0.3126$$

$$\eta = 31.26\%$$

Sin considerar el trabajo de la bomba:

$$\eta = \frac{823.8}{2628.7} = 0.3134$$

$$\eta = 31.34\%$$

## CICLO DE REFRIGERACION POR COMPRESION DE VAPOR

El ciclo ideal de refrigeración por compresión de vapor tuvo su inspiración en el ciclo invertido de Carnot. Este ciclo aprovecha la entalpía de transformación de las sustancias al cambiar de fase líquida a fase vapor. Entonces puede usarse en teoría cualquier sustancia para producir refrigeración por compresión de vapor. En la práctica se busca que la sustancia tenga ciertas propiedades: estabilidad química, no toxicidad, olor, una alta entalpía de vaporización, una baja temperatura de vaporización para una presión dada, bajo costo, etc.

En cualquier hogar existe un refrigerador que utiliza este ciclo, por lo cual nos vamos a servir de su popularidad para explicarlo. En la figura 4.10 podemos ver las partes que componen un refrigerador sencillo; el evaporador que se ve en el diagrama es correspondiente a lo que llamamos congelador o hielera en nuestro refrigerador, el condensador es un serpentín con tubos aletados que se encuentra en la parte posterior del refrigerador, el compresor es un aparato cilíndrico que se encuentra en la parte inferior del refrigerador y la válvula de expansión es un tubo capilar que va desde el condensador hasta el evaporador.

A grandes rasgos el ciclo consiste en lo siguiente: en el compresor se eleva la presión de la sustancia que se encuentra en su fase gaseosa y por consiguiente se eleva también su temperatura. Esta compresión se supone isentrópica; después de salir del compresor, la sustancia, todavía en su fase gaseosa, entra al condensador, donde se transmite calor del gas al medio ambiente debido a la diferencia de temperatura que guarda con éste. Debido a esta disminución en su energía la

sustancia se condensa, cambiando de la fase gaseosa a la fase líquida. En todo este proceso se considera que la presión permanece constante; una vez que la sustancia en la fase líquida sale del condensador, entra a la válvula de expansión produciéndose un estrangulamiento que baja la presión de la sustancia y por el efecto de Joule-Thomson disminuye su temperatura a un valor menor que la temperatura ambiente, en un estado cercano al líquido saturado correspondiente a esa presión y temperatura.

Aunque la expansión provoca que el ciclo sea inherentemente -- irreversible y por lo tanto que no sea tan eficiente como debiera, se prefiere mantener un equipo sin partes móviles (como la válvula de expansión o un tubo capilar) que no requiere mantenimiento a pretender hacer la expansión reversiblemente con un equipo que sí requiera mantenimiento (como una turbina) y que además tiene un costo inicial elevado.

La sustancia se ha empezado a evaporar en la válvula de expansión, pero se procura que la mayor parte de la evaporación se lleve a cabo en el evaporador donde la sustancia toma la energía necesaria para su evaporación del medio que se desea refrigerar, Este proceso es a presión y temperatura constantes, Una vez que la sustancia se ha evaporado total mente entra en el compresor para iniciar un nuevo ciclo al comprimir el gas y llevarlo al estado de vapor sobrecalentado con un aumento en su presión y su temperatura.

En el diagrama s-T vemos cada uno de estos procesos; el proceso 1-2 se lleva a cabo en la región de vapor sobrecalentado, el proceso 2-3 es un cambio de fase a presión constante desde la región de vapor sobrecalentado hasta la línea de líquido saturado, el proceso 3-4 es una disminución de presión a entalpía constante que, según se ve en el diagrama T-s, termina en un punto de la región de coexistencia de la fase líquida con la fa-

se vapor, el proceso 4-1 es un cambio de fase que termina en la línea de vapor saturado y que se realiza a presión constante.

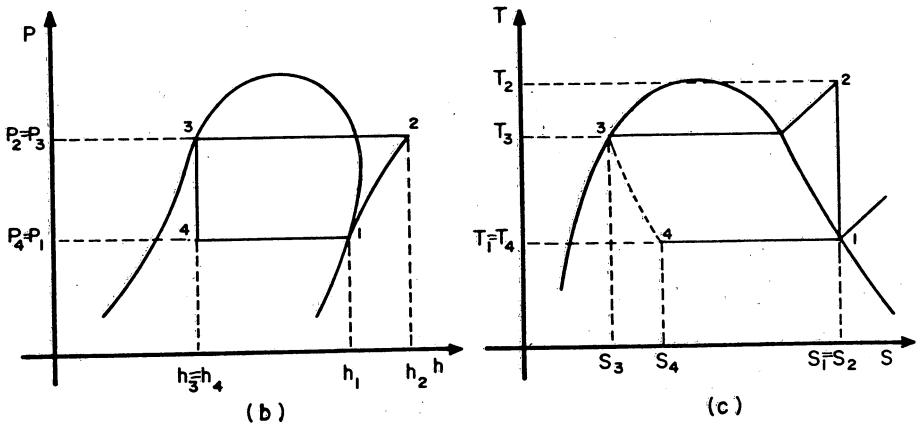
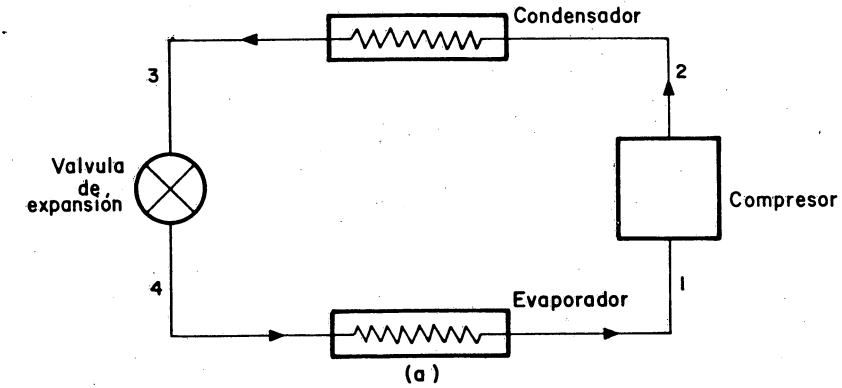


Figura 4.10 Ciclo de refrigeración por compresión de vapor.

- a) Diagrama de flujo
- b) Diagrama entalpía-presión
- c) Diagrama entropía-temperatura

El coeficiente de operación de este refrigerador, como ya se vio en el capítulo III, es el cociente entre el calor obtenido del depósito térmico que se quiere refrigerar y el trabajo suministrado en el compresor.

$$\beta_R = \frac{{}_4q_1}{{}_1W_2} \quad (4.17)$$

$${}_4q_1 = C_p (T_1 - T_4) = h_1 - h_4$$

De la aplicación al compresor de la 1a. ley para sistemas abiertos en el caso de flujo estable y estado estable, despreciando las variaciones de energías cinética y potencial, se tiene:

$${}_1W_2 = h_2 - h_1$$

Sustituyendo en el coeficiente de funcionamiento  $\beta_R$ , nos queda

$$\beta_R = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} = \frac{h_1 - h_3}{h_2 - h_1} ; \text{ ya que } h_3 = h_4 \quad (4.18)$$

Una unidad para medir la capacidad de enfriamiento de un sistema de refrigeración muy usada en la industria es la tonelada de refrigeración, que vale 12,000 BTU/h y que en el sistema internacional de unidades vale 3,517 watts.

#### EJEMPLO 4.5

Un ciclo ideal de refrigeración por compresión de vapor utiliza Freón 12 (diclorodifluorometano,  $CCl_2F_2$ ) como fluido de trabajo. La unidad de refrigeración se emplea para un acondicionador de aire, de

manera que la temperatura del evaporador es de 4.44 °C y la temperatura de saturación es en el condensador de 32.3 °C, las entalpías y entropías en cada uno de los cuatro estados señalados en los diagramas, son:

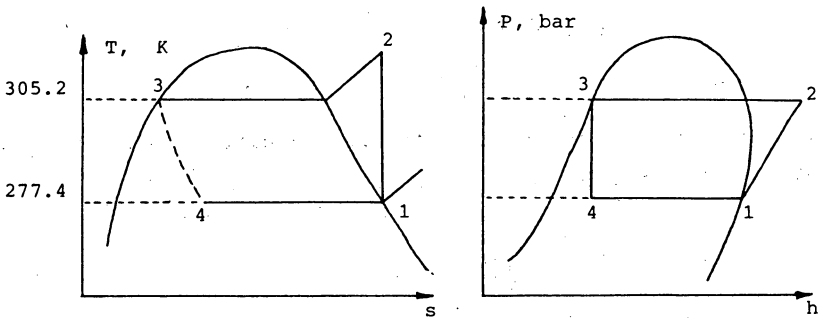
$h_1 = 189420 \text{ J/kg}$	$s_1 = 694.02 \text{ J/kg K}$
$h_2 = 204800 \text{ J/kg}$	$s_2 = 694.02 \text{ J/kg K}$
$h_3 = 40177 \text{ J/kg}$	$s_3 = 156.8 \text{ J/kg K}$
$h_4 = 66784.44 \text{ J/kg}$	$s_4 = 252.66 \text{ J/kg K}$

Calcular:

- La energía absorbida por el Freón en el evaporador.
- El trabajo realizado por el compresor.
- El coeficiente de funcionamiento del ciclo.
- La potencia requerida por tonelada de refrigeración.
- El incremento de entropía en cada proceso y en el ciclo.

SOLUCION:

Tracemos como medio auxiliar los diagramas s-T y h-P





- a) Calcularemos ahora la energía absorbida por el Freón en el evaporador:

$${}_4q_1 = h_1 - h_4$$

$${}_4q_1 = 189.420 - 66,786.44$$

$${}_4q_1 = 122,633.5 \text{ J/kg}$$

---

---

esta energía se retira del espacio por refrigerar.

- b) El trabajo realizado por el compresor

$${}_1W_2 = h_2 - h_1$$

$${}_1W_2 = 204,800 - 189,420$$

$${}_1W_2 = 15,380 \text{ J/kg}$$

---

---

- c) El coeficiente de funcionamiento  $\beta_R$  del ciclo

$$\beta_R = \frac{{}_4q_1}{{}_1W_2} = \frac{122,633.5}{15,380} = 7.97$$

$$\beta_R = 7.97$$

---

---

d) La potencia requerida por tonelada de refrigeración (recordamos que una tonelada de refrigeración es 3,517 watts).

como

$$\beta_R = \frac{Q_{ABS}}{W_{sum}}$$

$$\beta_R = \frac{Q_{ABS}}{W_{sum}}$$

por lo tanto:

$$\dot{W}_{\text{sum}} = \frac{\dot{Q}_{\text{abs}}}{A_R}$$

Y

$$\dot{Q}_{\text{abs}} = 3,517 \text{ watts}$$

$$\dot{W}_{\text{sum}} = \frac{3,517}{7.97} = 441.28 \text{ watts} \quad \dot{W} = \underline{\underline{441.28 \text{ watts por tonelada de refrigeración}}}$$

esto significa que, para extraer 3517 joules de energía en cada segundo del espacio por refrigerar, se requiere de 441.28 joules de trabajo en cada segundo.

e) El incremento de entropía en cada proceso y en el ciclo.

$$\underline{\underline{\Delta s_{1-2} = s_2 - s_1 = 0}}$$

$$\Delta s_{2-3} = s_3 - s_2 = 247.02 - 694.42$$

$$\underline{\underline{\Delta s_{2-3} = - 447.4 \text{ J/(kg K)}}}$$

$$\Delta s_{3-4} = s_4 - s_3 = 252.66 - 247.02, \quad \underline{\underline{\Delta s_{3-4} = 5.58 \text{ J/(kg K)}}}$$

con este resultado, se observa que el proceso en la válvula de expansión no es isentrópico.

$$\Delta s_{4-1} = s_1 - s_4 = 694.42 - 252.66 = \underline{\underline{441.76 \text{ J/(kg K)}}}$$

Y

$$\begin{aligned} \Delta s_{\text{ciclo}} &= (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + (s_4 - s_3) + (s_1 - s_4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## CICLO MECANICO DE COMPRESION

Este es un ciclo mecánico fundamentalmente, ya que la sustancia que se comprime, de hecho, sufre un solo proceso y no retorna necesariamente a su estado inicial. En otras palabras, el ciclo describe el movimiento del émbolo y no del gas que se comprime (ver figuras 4.11 y 4.12).

Este ciclo tiene algunas aplicaciones en la industria entre las que podemos contar las siguientes: se usa para almacenar energía por medio de la compresión de un gas, generalmente aire, energía que se utiliza después para mover una gran cantidad de herramientas neumáticas; también se utiliza el aire comprimido para llevar la energía necesaria al accionar las válvulas y controles de muchos procesos industriales; se usa también para mejorar la combustión, tanto en el caso de calderas como en el caso de los motores de combustión interna (Diesel), se usa también en los procesos de aceración y, en general, en todo proceso donde se requiera de aire a presión mayor que la atmosférica. Este ciclo se usa no sólo para comprimir aire, sino también para comprimir cualquier gas y tiene gran utilidad en los procesos de licuefacción de gases.

Existen varios tipos de compresores, los centrífugos, reciprocantes, etc., con variaciones según sea el medio que utilicen para realizar la compresión. También se tiene un amplio rango de presiones que se pueden alcanzar, pudiendo hacerse combinaciones entre compresores según se requiera mayor presión o mayor flujo de gas. A continuación vamos a analizar el ciclo mecánico ideal de compresión y vamos a obtener el trabajo que hay que suministrar a un sistema para poder obtener un gas -

ideal a una determinada presión. Por sencillez vamos a servirnos de un compresor recíprocante (cilindro-émbolo).

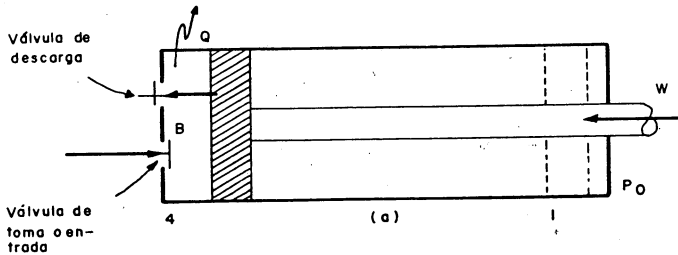


Figura 4.11 Compresor recíprocante

Como se muestra en la figura 4.11 y cuyo ciclo mecánico correspondiente se muestra en la figura 4.12, en el proceso 1-2 se tiene la - compresión de un gas. En este proceso las válvulas permanecen cerradas; en el proceso 2-3 se lleva a cabo la descarga o impulsión; el proceso 3-4 es un evento en el que la presión dentro del cilindro baja hasta tener el valor necesario para aspirar nuevamente el gas y que se inicie el proceso 4-1. En este proceso se abre la válvula de admisión y el sistema recibe gas para iniciar de nuevo el ciclo.

El trabajo neto que se suministra al sistema es la suma de los trabajos de cada proceso:

$$W_{\text{neto}} = {}_1W_2 + {}_2W_3 + {}_3W_4 + {}_4W_1$$

$${}_4W_1 = - P_1 (V_1 - V_4) = - P_1 V_1$$

ya que  $V_4 = 0$  (idealmente, ya que se considera que no existe volumen muerto).

$${}_3W_4 = 0 \quad \text{por ser} \quad V = \text{cte.}$$

$${}_2W_3 = - P_2 (V_3 - V_2) = P_2 V_2$$

porque  $V_3 = 0$

En general, el proceso de 1-2 es politrópico.

$${}_1W_2 = \frac{(P_2 V_2 - P_1 V_1)}{n - 1}$$

por lo que el trabajo neto obtenido es:

$$W_{\text{neto}} = \frac{(P_2 V_2 - P_1 V_1)}{n - 1} + P_2 V_2 - P_1 V_1 ; \quad W_{\text{neto}} = \frac{n (P_2 V_2 - P_1 V_1)}{n - 1}$$

haciendo uso de la ecuación de gas ideal  $PV = nRT$

$$W_{\text{neto}} = \frac{n n R (T_2 - T_1)}{n - 1} \quad (4.19)$$

recordando las relaciones del gas ideal para un proceso politrópico:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ \frac{V_1}{V_2} \right]^{n-1} = \left[ \frac{P_2}{P_1} \right]^{\frac{(n-1)}{n}}$$

podemos escribir (4.19) en función de las propiedades iniciales y de la

presión de descarga:

$$W_{\text{neto}} = \frac{n}{n-1} P_1 V_1 \left[ \left[ \frac{P_2}{P_1} \right]^{\frac{n}{n-1}} - 1 \right] \quad (4.20)$$

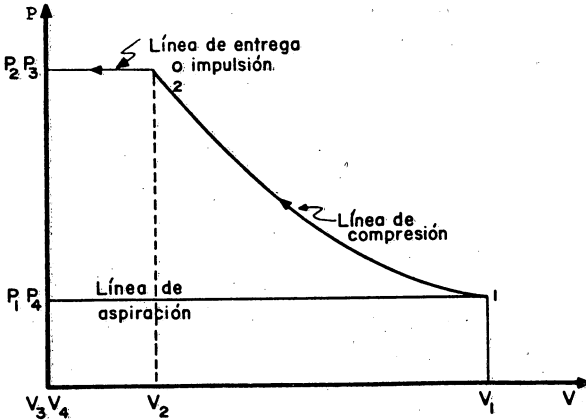


Figura 4.12 Diagrama volumen-presión del ciclo mecánico de compresión de Gas Ideal.

En el ciclo real con el que trabajan los compresores, el volumen 3 y 4 no es cero, pues no se expulsa completamente todo el aire de la cámara.

EJEMPLO 4.6

Un compresor de pistón recibe aire a 1 bar y 293 K, lo descarga a 3 bar y 352 K, el diámetro del cilindro es de 0.1 m, la carrera

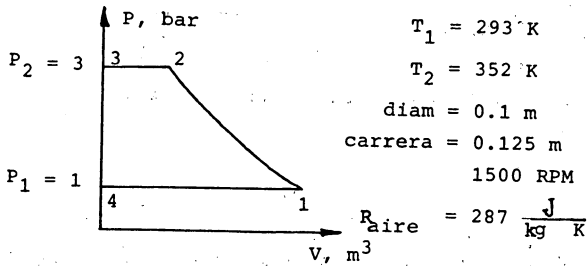
es de 0.125 m y gira a 1,500 RPM, realizando un ciclo en cada revolución.

Calcular:

- a) Trabajo necesario en el proceso de compresión
- b) El trabajo neto en el ciclo
- c) Potencia necesaria en el ciclo

SOLUCION:

Con auxilio de un diagrama presión-volumen del ciclo:



- a) Trabajo de compresión ( ${}_1W_2$ )

$${}_1W_2 = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{n - 1} = \frac{mR(T_2 - T_1)}{n - 1}$$

en donde se requiere calcular m y n

$$m = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{10^5 \times \frac{\pi (0.1)^2}{4} \times 0.125}{287 \times 293} = 0.00117 \text{ kg}$$

Y

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{0.00117 \times 287 \times 352}{3 \times 10^5} = 0.00039 \text{ m}^3$$

$$V_1 = \frac{\pi (0.1)^2}{4} \times 0.125 = 0.00098 \text{ m}^3$$

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n ; \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n = \frac{P_1}{P_2} \quad \text{Al tomar logaritmos queda:} \quad n \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{P_1}{P_2}$$

$$n = \frac{\ln \left[ \frac{P_1}{P_2} \right]}{\ln \left[ \frac{V_2}{V_1} \right]} = \frac{\ln \left[ \frac{1}{3} \right]}{\ln \left[ \frac{390}{980} \right]} = \frac{-1.098}{-0.921} = 1.19 \quad \therefore \quad {}_1W_2 = \frac{1.17 \times 10^{-3} \times 287 (352 - 293)}{1.19 - 1}$$

$$\underline{{}_1W_2 = 104.27 \text{ J}}$$

b) De la ecuación (4.20)

$$W_{\text{neto}} = \frac{n}{n-1} \cdot P_1 \cdot V_1 \cdot \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

$$W_{\text{neto}} = \frac{1.19}{1.19-1} \times 10^5 \times 98 \times 10^{-5} \left[ \left( \frac{3}{1} \right)^{\frac{1.19-1}{1.19}} - 1 \right] ; \quad \underline{W_{\text{neto}} = 117.68 \text{ J}}$$

c) Potencia necesaria para el ciclo

$$\overset{\circ}{W} = \frac{W_{\text{neto}}}{\text{ciclo}} \quad \frac{\text{ciclos}}{\text{s}}$$

$$\overset{\circ}{W} = \frac{117.68 \times 1500}{60}$$

$$\underline{\underline{\overset{\circ}{W} = 2,942 \text{ W}}}$$



## CAPITULO V

### ELECTROSTATICA

Ya en la antigüedad se tenía conocimiento de algunos fenómenos eléctricos como los rayos y la atracción de pequeños pedazos de paja o tela por una barra de ámbar. Era sin embargo, un conocimiento de carácter cualitativo ya que no se conocía (por ejemplo) la magnitud y demás características de esas fuerzas de atracción.

El avance de esta disciplina científica fue realmente lento hasta fines del siglo XVIII, ya que en este tiempo, y principalmente en el siglo XIX, se le dió un impulso notable; de hecho, las bases o fundamentos del Electromagnetismo que se conocen, fueron desarrollados y establecidos por notables investigadores como: Volta, Galvani, Joule, Ampère, Maxwell, Faraday, etc. en dicha época.

Una de las propiedades más importantes de la materia es la *carga eléctrica* y no fue sino hasta el siglo XIX que Benjamín Franklin estableció una convención que se sigue aceptando hasta nuestros días. Dicha convención, fue denominar a los dos tipos de carga existentes como *positiva* a uno y *negativa* al otro.

La carga eléctrica al igual que la masa son propiedades intrínsecas de la materia de las cuales, dar una definición detallada resulta muy difícil tomando en cuenta además que, esta asignatura se estudia desde el punto de vista clásico.

Se conoce como carga positiva a aquella que queda en una barra de vidrio después de haberse frotado con seda; si la barra es de hule duro o ebonita y ésta ha sido frotada con piel (por ejemplo de conejo) el

tipo de carga que queda en la barra de ebonita es negativa.

De hecho, lo que ocurre en estos fenómenos de frotamiento es que se transfieren electrones del vidrio a la seda en el primer caso y, de la piel a la ebonita en el segundo caso.

Para comprender con mayor claridad los fenómenos eléctricos y magnéticos, es necesario conocer algunos conceptos básicos sobre la teoría atómica de la materia.

Desde tiempos muy remotos los griegos consideraron que la materia estaba formada de elementos muy pequeños llamados átomos; ésto fue comprobado siglos después por el físico Niels Bohr el cual, apoyado en las teorías de Planck y Einstein formuló las leyes que rigen el comportamiento del modelo del átomo ideado por este investigador. Presenta a los electrones girando alrededor del núcleo en órbitas que pueden ser circulares o elípticas.

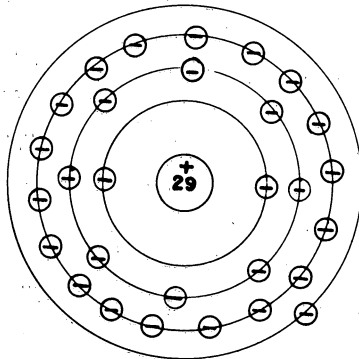


Figura (5.1) Modelo del Atomo de Bohr  
(Atomo de Cobre)

Los electrones son partículas que poseen carga eléctrica negativa y los protones, carga positiva. Los protones y neutrones se encuentran en el núcleo del átomo, éstos últimos tienen una magnitud de carga positiva igual a la negativa, de aquí que su carga neta sea nula o neutra (neutrones), es decir, la partícula no posee exceso de carga.

En la siguiente tabla se resumen las características principales de estas partículas:

Partícula	Símbolo	Carga	Masa
Protón	p	+e	$1.6 \times 10^{-27}$ kg
Neutrón	n	0	$1.6 \times 10^{-27}$ kg
Electrón	e	-e	$9.1 \times 10^{-31}$ kg

$$(e = 1.6021892 \times 10^{-19} \text{ C})$$

A la fecha, no se ha descubierto una magnitud de carga eléctrica más pequeña que la del electrón. En 1891 el físico irlandés G. Johnstone Stoney sugirió el nombre de electrón para la magnitud indivisible de carga eléctrica (que entonces era una mera hipótesis) y que ya con anterioridad (1874) había estimado en  $1 \times 10^{-20}$  C utilizando algunos datos electroquímicos y el número de Avogadro (que por aquel entonces era muy inexacto).

En 1909, el físico norteamericano Robert A. Millikan confirmó que la carga del electrón es negativa y obtuvo un valor muy cercano al aceptado y que para muchos propósitos es suficientemente exacto.

Ahora bien, regresando al punto donde al frotar vidrio con seda y ebonita con piel, aparecía un excedente de carga positiva o un excedente de carga negativa, se puede concluir con base a lo ~~ex~~ puesto anteriormente que: LA CARGA ELECTRICA SE TRASLADA DE UN CUERPO A OTRO, PERO NO SE DESTRUYE NI TAMPOCO SE CREA, este enunciado se conoce como el principio de conservación de la carga.

#### LEY DE COULOMB (1736-1806)

En 1784 el físico francés Charles Augustin de Coulomb enunció la ley de las fuerzas existentes entre *cargas puntuales*.

*Las fuerzas de atracción o repulsión entre cargas puntuales (cuerpos cargados, muy pequeños en comparación con la separación en ellos, en esencia se considera que la carga está concentrada en un punto) es directamente proporcional a la magnitud de cada una e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, además la fuerza que se ejerce está en la dirección de la recta que une a las cargas.*

$$\vec{F} \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

F.- Fuerza de atracción (cuando las cargas son de signos con trarios) o de repulsión (cuando las cargas son de igual signo).

q<sub>1</sub>.- Carga puntual 1

q<sub>2</sub>.- Carga puntual 2

r.- Distancia entre sus centros

$\hat{r}$ .- Vector unitario en la dirección de la recta que une a las 2 cargas.

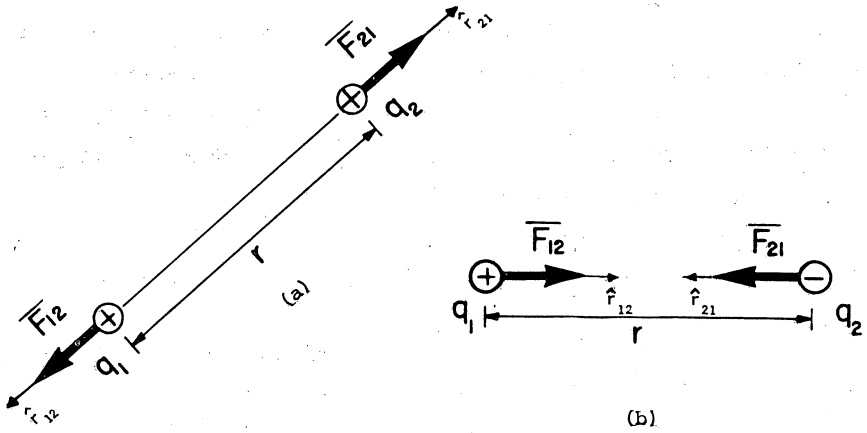


Figura 5.2 Fuerzas coulombianas de repulsión (a), y de atracción (b).

Coulomb llegó a establecer la proporcionalidad mencionada anteriormente utilizando una balanza de torsión como la que se muestra a continuación.

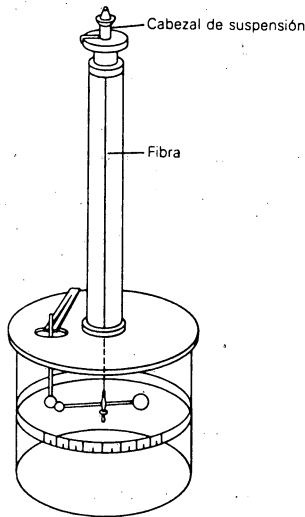


Figura 5.3 Balanza de torsión de Coulomb.

Para convertir a una igualdad, la proporcionalidad planteada por Coulomb, se puede optar por alguno de los 2 procedimientos siguientes:

- 1.- Escoger la unidad de medición de la carga, de tal manera que la constante de proporcionalidad sea unitaria.
- 2.- Utilizar la unidad de medida de la carga (coulomb = ampere · segundo) que adopta el Sistema Internacional de Medidas, y entonces dicha constante de proporcionalidad tendrá que obtenerse en forma experimental.

Como de hecho ya se ha escogido el 2o. procedimiento, la constante de proporcionalidad es:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

es decir:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (5.1)$$

donde:

$\epsilon_0$ .- Permitividad del vacío

$4\pi$ .- Factor introducido en la constante para que pueda cancelarse en otras expresiones corrientemente usadas en esta disciplina.

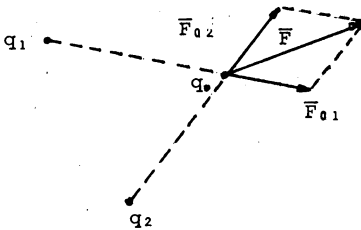
$$\epsilon_0 = 8.8541878 \times 10^{-12} \text{ s} = 8.85 \times 10^{-12} \left( \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987518 \times 10^9 \text{ s} = 9 \times 10^9 \left( \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right)$$

Si tenemos dos o más cargas afectando a una carga en estudio, la fuerza resultante sobre esta misma será la suma vectorial de todas las fuerzas que le esten afectando, esto se conoce como PRINCIPIO DE SUPERPOSICION.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (5.2)$$

Es decir, las fuerzas entre cargas puntuales se suman vectorialmente; por lo tanto, la fuerza total resultante sobre una carga puntual podrá ser calculada mediante la expresión (5.2).



- $q_1, q_2, q_3 =$  cargas puntuales
- $\vec{F}_{01} =$  fuerza que experimenta  $q_0$  debido a  $q_1$
- $\vec{F}_{02} =$  fuerza que experimenta  $q_0$  debido a  $q_2$
- $\vec{F} =$  fuerza total resultante

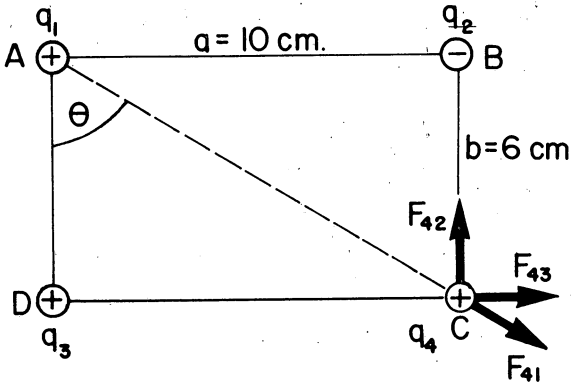
Fig. 5.4. Suma vectorial de fuerzas de origen eléctrico.

$$\vec{F} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{r_{01}^2} \hat{r}_{01} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_2}{r_{02}^2} \hat{r}_{02}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

EJEMPLO 5.1

En el arreglo de cargas mostrado en la figura (5.5) determine:  
La fuerza resultante que ejercen  $q_1, q_2$  y  $q_3$  sobre la carga  $q_4$



$$q_1 = 1.0 \times 10^{-6} \text{C}$$

$$q_2 = -3.0 \times 10^{-6} \text{C}$$

$$q_3 = 2.0 \times 10^{-6} \text{C}$$

$$q_4 = 5.0 \times 10^{-6} \text{C}$$

Fig. (5.5)

SOLUCION:

Primero determinaremos el sentido de las fuerzas:

$\vec{F}_{43}$  y  $\vec{F}_{41}$  (fuerzas de repulsión) y la fuerza  $\vec{F}_{42}$  que es una fuerza de atracción.

Para obtener la magnitud de las fuerzas  $\vec{F}_{43}$ ,  $\vec{F}_{41}$  y  $\vec{F}_{42}$  aplicamos la Ley de Coulomb, obteniendo:

$$|\vec{F}_{41}| = K \frac{q_1 q_4}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9) (1.0 \times 10^{-6}) (5.0 \times 10^{-6})}{[\sqrt{a^2 + b^2}]^2} = \frac{45 \times 10^{-3}}{a^2 + b^2}$$



$$|\bar{F}_{4,1}| = \frac{45 \times 10^{-3}}{13.6 \times 10^{-3}} = 3.30 \quad \left[ \frac{\text{N m}^2 \text{ C}^2}{\text{C}^2 \text{ m}^2} \right] = \left[ \text{N} \right]$$

$$|\bar{F}_{4,2}| = \frac{(9 \times 10^9) (3.0 \times 10^{-6}) (5.0 \times 10^{-6})}{(6 \times 10^{-2})^2} = \frac{135 \times 10^{-3}}{36 \times 10^{-4}} = 37.50 \text{ N}$$

$$|\bar{F}_{4,3}| = \frac{(9 \times 10^9) (2.0 \times 10^{-6}) (5.0 \times 10^{-6})}{(10 \times 10^{-2})^2} = \frac{90 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-4}} = 9 \text{ N}$$

para obtener la fuerza resultante aplicamos el principio de superposición.

La sumatoria de fuerzas sobre el eje "x" es:

$$\Sigma F_x = |\bar{F}_{4,3}| + |\bar{F}_{4,1}| \cos \theta \quad \text{en donde } \theta = \tan^{-1} \frac{6}{10} = 31^\circ$$

$$\Sigma F_x = 9 + 3.30 \cos 31^\circ = 11.82 \text{ N}$$

la sumatoria de fuerzas sobre el eje "Y" es:

$$\Sigma F_y = |\bar{F}_{4,2}| - |\bar{F}_{4,1}| \cos 59^\circ = 37.50 - 3.30 (0.5150) = 35.80 \text{ N}$$

finalmente la fuerza resultante será:

$$F_R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

$$F_R = \sqrt{(11.82)^2 + (35.80)^2}$$

$$F_R = \sqrt{139.71 + 1281.64} = 37.7 \text{ N}$$

el ángulo  $\alpha$  que forma la fuerza resultante con el eje "x" es:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \tan^{-1} \frac{35.80}{11.82} = 71.72^\circ$$

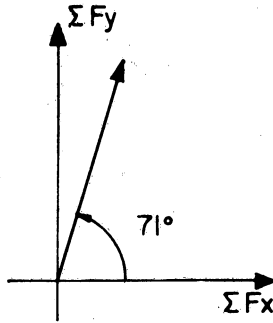


FIG. 5.6

CAMPO ELECTRICO.- Se puede definir al campo eléctrico en un punto determinado, como la fuerza por unidad de carga que actuaría sobre una carga dada, situada en dicho punto.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \left[ \frac{N}{C} \right] \text{-----} \quad (5.3)$$

Siendo la fuerza un vector, el campo eléctrico deberá ser también un vector.

En el siguiente arreglo de cargas se requiere calcular el campo eléctrico resultante sobre una carga de prueba  $q$ .

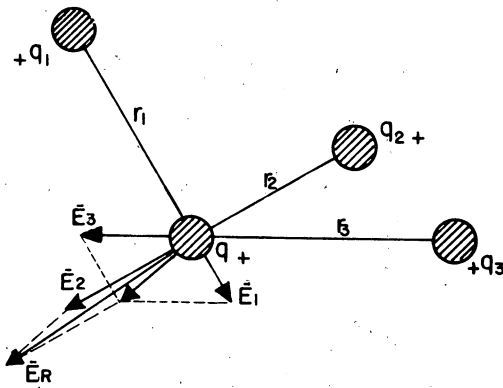


FIGURA 5.7

aplicando el principio de superposición para obtener la fuerza resultante sobre la carga en estudio tenemos:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_3q}{r_3^2} \hat{r}_1 + \frac{q_1q}{r_1^2} \hat{r}_2 + \frac{q_2q}{r_2^2} \hat{r}_3 \right]$$

sustituyendo el valor de la fuerza en la expresión del campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_3q}{r_3^2} \hat{r}_1 + \frac{q_1q}{r_1^2} \hat{r}_2 + \frac{q_2q}{r_2^2} \hat{r}_3 \right]}{q}$$

Finalmente tenemos que el campo eléctrico resultante es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\lambda} \frac{q_{\lambda}}{r_{\lambda}^2} \hat{r}_{\lambda} \quad (5.4)$$

Para observar la dirección del campo eléctrico analizaremos

los siguientes casos:

a) Carga positiva  $q_1$  que está afectando a una carga de prueba  $q$ .

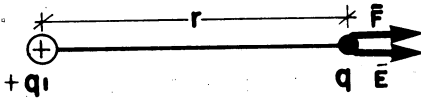


Fig. 5.8

En la figura (5.8) observamos que el vector  $\vec{F}$  y el vector  $\vec{E}$  tienen la misma dirección, y por lo tanto el ángulo formado entre ellos es cero.

b) Carga negativa  $q_1$  que esta afectando a una carga de prueba  $q$ .

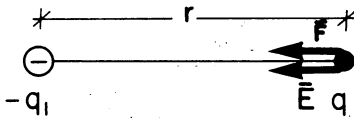


Fig. 5.9

También en este caso observamos que el vector  $\vec{F}$  y el vector  $\vec{E}$  tienen la misma dirección, y en consecuencia el ángulo formado entre ambos es nulo.

c) Carga positiva,  $q_1$  afectada por un campo eléctrico externo.

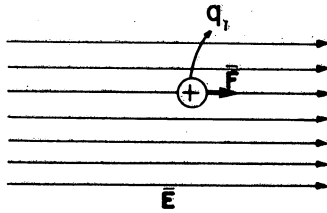


Fig. 5.10

Quando aplicamos un campo eléctrico externo a una carga positiva, la fuerza tiene la misma dirección que el campo, y aquí también el ángulo formado entre el campo y la fuerza es cero.

d) Carga negativa  $q_1$  afectada por un campo eléctrico externo.

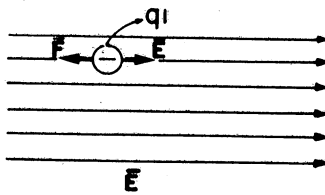
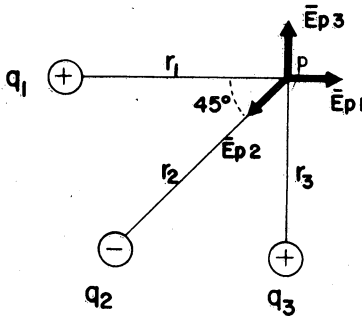


Fig. 5.11

En este caso  $\vec{F}$  es de dirección contraria a  $\vec{E}$ , y por lo tanto el ángulo existente entre ambos vectores es de  $180^\circ$ .

EJEMPLO 5.2

Encuentre el campo eléctrico resultante en el punto "p" debido a las cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ .



- $q_1 = 4 \mu\text{C}$
- $q_2 = -2 \mu\text{C}$
- $q_3 = 6 \mu\text{C}$
- $r_1 = 10 \text{ cm}$
- $r_2 = 12 \text{ cm}$
- $r_3 = 10 \text{ cm}$

FIGURA 5.12

SOLUCION:

El campo eléctrico en el punto "p" es producido por el efecto de las 3 cargas eléctricas; en primer lugar, obtendremos la magnitud del campo eléctrico producido por cada una de las cargas y finalmente - obtendremos la magnitud del campo eléctrico resultante sobre el punto "p".

El campo eléctrico en "p" debido a  $q_1$ :

$$E_{P_1} = K \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{(9 \times 10^9) (4 \times 10^{-6})}{(10 \times 10^{-2})^2} = \frac{36 \times 10^3}{100 \times 10^{-4}}$$

$$E_{P_1} = 3.6 \times 10^6 \left[ \frac{N}{C} \right]$$

El campo eléctrico en "p" debido a  $q_2$ :

$$E_{P_2} = \frac{(9 \times 10^9) (2 \times 10^{-6})}{(12 \times 10^{-2})^2} = \frac{18 \times 10^3}{144 \times 10^{-4}} = 1.25 \times 10^6 \left[ \frac{N}{C} \right]$$

El campo eléctrico en "p" debido a  $q_3$ :

$$E_{P_3} = \frac{(9 \times 10^9) (6 \times 10^{-6})}{(10 \times 10^{-2})^2} = \frac{54 \times 10^3}{100 \times 10^{-4}} = 5.4 \times 10^6 \left[ \frac{N}{C} \right]$$

la sumatoria de los campos sobre el eje "x" es:

$$\Sigma E_x = \left| \vec{E}_{P_1} \right| - \left| \vec{E}_{P_2} \right| \cos 45^\circ = (3.6 \times 10^6) - (1.25 \times 10^6)(.707)$$

$$\Sigma E_x = 2.716 \times 10^6 \left[ \frac{N}{C} \right]$$

la sumatoria de campos sobre el eje "y" será:

$$\Sigma E_y = \left| \vec{E}_{P_3} \right| - \left| \vec{E}_{P_2} \right| \cos 45^\circ = (5.4 \times 10^6) - (1.25 \times 10^6)(.707)$$

$$\Sigma E_y = 4.51 \times 10^6 \left[ \frac{N}{C} \right]$$

finalmente el campo eléctrico resultante será:

$$E_p = \sqrt{(\Sigma E_x)^2 + (\Sigma E_y)^2}$$

$$E_p = \sqrt{(2.716 \times 10^6)^2 + (4.51 \times 10^6)^2}$$

$$E_p = 5.26 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

ahora bien:

$$\tan \theta = \frac{\Sigma E_y}{\Sigma E_x} \text{ de donde } \theta = \tan^{-1} \frac{4.51 \times 10^6}{2.716 \times 10^6} = 59^\circ$$

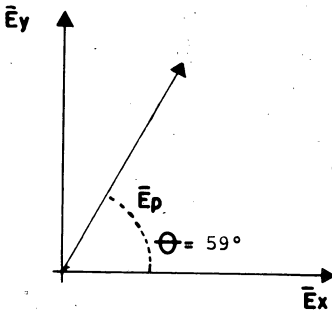


FIGURA 5.13

EJEMPLO 5.3

Encuentre el punto entre las cargas  $q_1 = 16 \mu C$  y  $q_2 = 49 \mu C$  en donde el campo eléctrico es nulo.

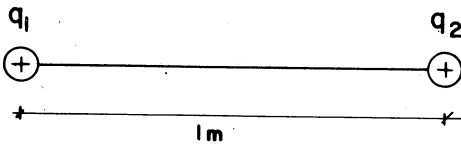


FIGURA 5.14



SOLUCION:

Supongamos que el punto entre las cargas en donde se anule el campo eléctrico este a una distancia  $x$  de la carga  $q_1$  y a una distancia  $(1 - x)$  de la carga  $q_2$  como se muestra en la figura (5.15).

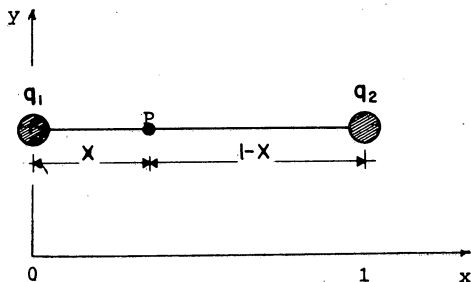


Fig. 5.15

para que el campo eléctrico sea nulo en el punto "p" los campos eléctricos producidos por ambas cargas deben ser iguales, es decir:

$$E_{p_1} = E_{p_2}$$

$$K \frac{q_1}{(x)^2} = K \frac{q_2}{(1-x)^2} \quad ; \quad \frac{q_1}{(x)^2} = \frac{q_2}{(1-x)^2}$$

en donde tenemos:

$$q_1 (1-x)^2 = q_2 (x)^2$$

Sacando raíz cuadrada a ambos miembros se tiene

$$\sqrt{16 (1 - x)^2} = \sqrt{49 (x)^2}$$

$$4 (1 - x) = 7 (x)$$

$$4 - 4 x = 7 x$$

$$4 = 11 x$$

$$x = \frac{4}{11} = 0.36 \text{ m}$$

por lo tanto, el campo eléctrico se anulará a 36 cm a la derecha de la carga  $q_1$ .

### CONFIGURACIONES DE CAMPO ELECTRICO.

Los esquemas de campo eléctrico, tienen como finalidad visualizar:

- La dirección del campo.
- La magnitud de éste en las regiones de interés, más intenso (líneas de campo muy juntas) y menos intenso (líneas de campo separadas).
- Que las líneas de campo no se cruzan y tienen su origen en las cargas positivas y concluyen en las negativas.

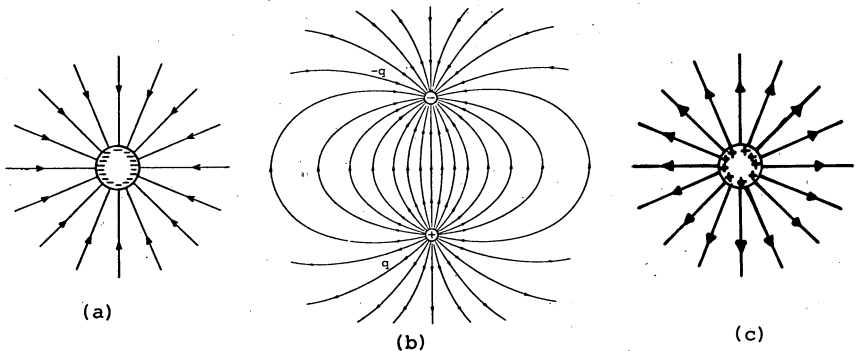


Figura 5.15 Configuraciones de Campo Eléctrico.

- Esfera con carga negativa,
- Dipolo eléctrico,
- Esfera con carga positiva.

Aunado con el t3pico anterior, es conveniente abordar el concepto de FLUJO ELECTRICO, ya que se puede hacer una analogía con el flujo de agua que circula por un ducto imaginando que, las líneas de corriente son líneas de campo eléctrico.

De la siguiente figura (5.16) se puede observar un perfil de velocidades que tienen una dirección paralela al del eje de la tubería, en cambio, el vector de un área diferencial forma un ángulo  $\theta$  con dicho eje, si se quiere calcular el flujo de agua que circula por ahí, se debe emplear la expresión:

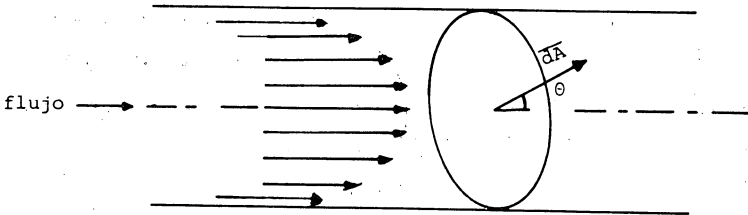


Fig. 5.16 Perfil de velocidades en el interior de un ducto.

$$\phi = \vec{V} \cdot \vec{A} = |\vec{V}| |\vec{A}| \cos \theta \quad \left(\frac{m}{s} \cdot m^2\right) \text{ o } \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

que con mayor rigor matemático se debe expresar como

$$\phi = \iint \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (5.5)$$

donde,  $\vec{V}$  es el campo vectorial de velocidades

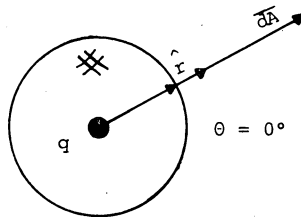
$d\vec{A}$  el vector de un área diferencial

y  $\iint$  es una integral de área o superficie.

Bien, si ahora se considera al campo eléctrico  $\vec{E}$ , el flujo eléctrico estará dado por una expresión como la (5.5)

$$\phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (5.5.1)$$

Supongamos que existe una carga puntual positiva y, concéntrica a ésta se tiene una superficie esférica de radio  $r$ ; se nos pide calcular el flujo eléctrico que atraviesa dicha superficie.



Para una carga puntual:  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$

$$\phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \iint \hat{r} \cdot d\vec{A}$$

$$\hat{r} \cdot d\vec{A} = (1) (dA) \cos \theta = dA$$

$$\iint dA = 4\pi r^2$$

$$\phi = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2)$$

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \left( \frac{C}{C^2} \cdot N \cdot m^2 \right) \quad \circ \quad \left( \frac{N \cdot m^2}{C} \right)$$

Nuevamente, de aquí se desprende un tópicó de relevante importancia, la LEY DE GAUSS, que enuncia lo siguiente:

El flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada, es igual a la carga neta encerrada por dicha superficie dividida entre  $\epsilon_0$

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_n}{\epsilon_0} \quad (5.6)$$

Esta ecuación es de una gran ayuda para calcular campos eléctricos, sin embargo sólo es conveniente utilizarla cuando se tienen condiciones de simetría.

### ENERGIA POTENCIAL Y POTENCIAL ELECTRICOS

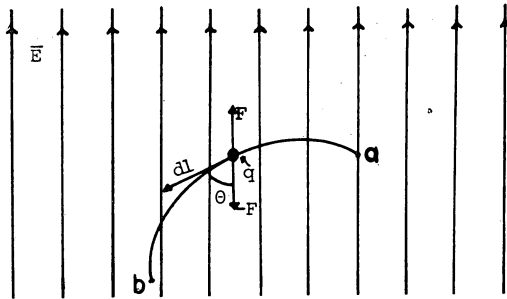


Fig. 5.16 Trabajo hecho por un agente externo sobre una carga, en presencia de un campo eléctrico.

El campo eléctrico puede describirse no sólo como una cantidad vectorial  $\vec{E}$ , sino también como una cantidad escalar  $V$  (potencial eléctrico).

Considérese la pasada figura (5.16) donde se observa la existencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ ; supóngase que un agente externo desplaza una carga  $q$  (positiva) por la trayectoria mostrada también en la figura, del punto "a" al punto "b".

Para lograr esto, es necesario aplicar una fuerza que sea igual y opuesta a la ocasionada por el campo eléctrico, y desde luego se tendrá un desplazamiento cuasi-equilibrio o cuasiestático.

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad - \vec{F} = - q \vec{E}$$

Es decir, para calcular el trabajo  ${}_a W_b$ , se debe dividir la trayectoria en elementos diferenciales de longitud ( $d\vec{l}$ ) y sumar todas estas contribuciones ( $- \vec{F} \cdot d\vec{l}$ ) para obtener el trabajo total.

$${}_a W_b = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (5.7)$$

donde el producto de  $\vec{F}$  por  $d\vec{l}$  se expresa como producto punto o producto escalar para proyectar la fuerza  $\vec{F}$  en la dirección del desplazamiento.

$${}_a W_b = - q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) no es otra cosa que la variación de la energía potencial eléctrica de la carga "q", al ser transferida del punto *a* al punto *b*. Esta variación de energía será la misma para cualquier trayectoria debido al carácter conservativo del campo eléctrico; de esta manera, podemos escribir:

$$E_{P_b} - E_{P_a} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.9)$$

$E_{P_b}$  = Energía potencial eléctrica final

$E_{P_a}$  = Energía potencial eléctrica inicial

$$(E_p) = (C \cdot \frac{N}{C} \cdot m) = (N \cdot m) = (J)$$

Si se quiere calcular no una diferencia sino la energía potencial en un punto, entonces deberá elegirse una referencia donde dicha energía valga cero y ese punto existe donde no hay influencia del campo eléctrico (se dice que es en el infinito).

$${}_{\infty}W_b = E_{P_b} = -q \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.10)$$

Por consiguiente, la energía potencial eléctrica de una carga en un punto puede definirse como, el trabajo realizado para llevar una carga desde el infinito hasta el punto, contra la acción de un campo eléctrico  $\vec{E}$ .

De la ecuación anterior (5.10) se tiene que para diferentes valores de carga existirá, en consecuencia, una energía potencial eléctrica diferente; sin embargo dividiendo la ecuación (5.10) entre *q*, se tiene:

$$\frac{E_{P_b}}{q} = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Esta nueva magnitud física escalar se conoce como POTENCIAL

ELECTRICO:

$$V_b = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (5.11)$$

$$(V_b) = \left(\frac{N}{C} \cdot m\right) = \left(\frac{J}{C}\right) = \text{volt (V)}$$

En el caso que se desee calcular una diferencia de potencial (lo más común), 5.11 se modifica en:

$$V_{ba} = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{W_{ab}}{q} \quad (5.12)$$

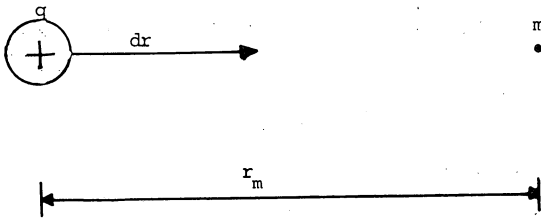
Obsérvese la diferencia de notación entre el trabajo y la diferencia de potencial eléctrico.

$$V_{ba} = - V_{ab}$$

$$W_{ab} = - V_{ba}$$

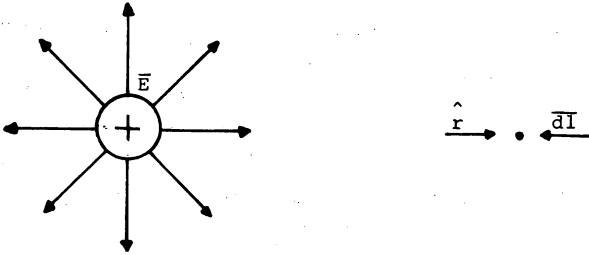
A continuación se examinarán algunos casos particulares de potencial eléctrico y diferencia de potencial .

1o. Potencial en un punto "m" en la vecindad de una carga puntual q.





El potencial en un punto es  $V_m = - \int_{\infty}^m \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , debemos elegir una trayectoria desde  $\infty$  hasta el punto  $m$  y la más sencilla será una recta.



Para una carga puntual

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$V_m = - \int_{\infty}^m \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} ; \hat{r} \cdot d\vec{l} = (dl) \cos \theta$$

$$\theta = 180^\circ, \cos \theta = -1 \Rightarrow \hat{r} \cdot d\vec{l} = -dl$$

Y a su vez  $-dl = dr$

$$V_m = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{\infty}^m \frac{dr}{r^2} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( -\frac{1}{r_m} + \frac{1}{r_{\infty}} \right)$$

$$V_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_m} \tag{5.13}$$

en la expresión (5.13) se observa que el potencial debido a la carga  $q$  sobre el punto "m" disminuye a razón de  $1/r_m$  en donde  $r_m$  es la distancia que existe entre la carga "q" y el punto "m".

20.- Potencial en un punto debido a varias cargas puntuales.

Se quiere calcular el potencial eléctrico en el punto "p" originado por las cargas puntuales  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  que, respectivamente es tñ separadas del punto las distancias  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ .

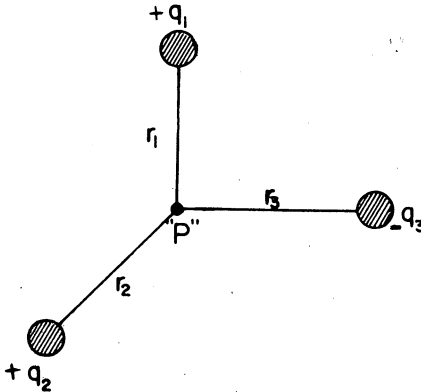


Fig. 5.17 Potencial eléctrico originado por varias cargas puntuales.

Usando la expresión (5.13), se puede escribir:

$$V_{P_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} \quad \text{Potencial en "p" debido a } q_1$$

$$V_{P_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \quad \text{Potencial en "p" debido a } q_2$$

$$V_{P_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q_3}{r_3} \quad \text{Potencial en "p" debido a } q_3$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} - \frac{q_3}{r_3} \right)$$

que generalizando para  $n$  cargas, se tiene:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (5.14)$$

30.- Diferencia de potencial entre 2 puntos en la vecindad de una carga puntual.

El potencial en cada punto (ver fig. 5.18), de acuerdo con la ecuación 5.13 será:

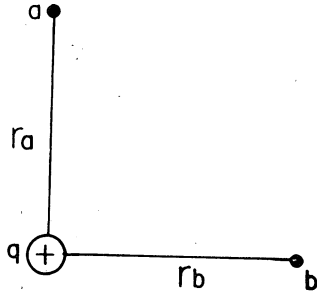


Fig. 5.18 Potencial eléctrico en los puntos a y b originado por la carga puntual q.

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_a}$$

$$V_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_b}$$

De aquí que la diferencia de potencial  $V_{ab}$  sea:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (5.15)$$

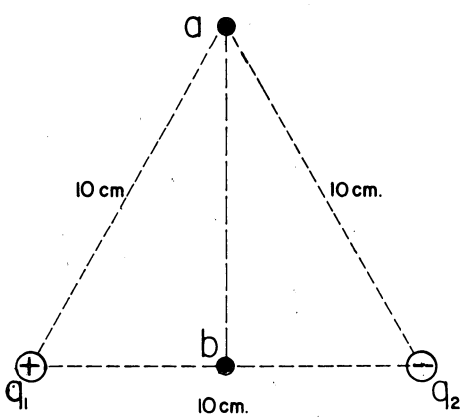
o bien

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \right)$$

EJEMPLO 5.

Con referencia a la siguiente figura, determine:

- a) Los potenciales  $V_a$  y  $V_b$
- b) La diferencia de potencial  $V_{ab}$
- c) El trabajo necesario para llevar una carga de  $2 \times 10^{-6} \text{C}$  del punto "a" a el punto "b".
- d) La energía potencial en el punto "b" considerando que en ese punto se encuentra la carga de  $2 \times 10^{-6} \text{C}$ .



$$q_1 = 4 \times 10^{-6} \text{C.}$$

$$q_2 = -8 \times 10^{-6} \text{C.}$$

SOLUCION:

- a) Para calcular los potenciales en el punto "A" y el punto "b" haremos uso de la fórmula

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = (9 \times 10^9) \left( \frac{4 \times 10^{-6}}{.10} - \frac{8 \times 10^{-6}}{.10} \right) \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

$$V_a = -360 \times 10^3 = -0.36 \times 10^6 \text{ V}$$

$$V_a = -0.36 \text{ M V}$$

$$V_b = (9 \times 10^9) \left( \frac{4 \times 10^{-6}}{.05} - \frac{8 \times 10^{-6}}{.05} \right) = -720 \times 10^3 \text{ V}$$

$$V_b = -0.72 \text{ MV}$$

b) La diferencia de potencial  $V_{ab}$  será entonces:

$$V_{ab} = V_a - V_b = -0.36 - (-0.72)$$

$$V_{ab} = 0.36 \text{ MV}$$

c) El trabajo necesario para llevar una carga desde un punto a otro que tienen diferente potencial se puede calcular mediante:

$$W_{ab} = V_{ba} (q)$$

Del inciso anterior obtuvimos que  $V_{ab} = 0.36 \times 10^6 \text{ V}$  por tanto:

$$V_{ba} = -0.36 \times 10^6 \text{ V}$$

$$W_{ab} = -0.36 \times 10^6 (2 \times 10^{-6}) = -0.72 \left( \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} \cdot \text{C} \right) = (\text{J})$$

$$W_{ab} = -0.72 \text{ J}$$

d) Energía potencial en el punto "b".

$$E_{pb} = V_b q = -0.72 \times 10^6 (2 \times 10^{-6}) = -1.44 \text{ J}$$

### CAMPO Y POTENCIAL ELECTRICO EN MATERIALES CONDUCTORES

Cuando se aplica un campo eléctrico a un material conductor, los portadores de carga de éste se moverán en la dirección del campo si son positivos y, en dirección contraria si son negativos, este movimiento dará por resultado una acumulación de carga que en estado estable o electrostático se opondrá al movimiento original creando un campo eléctrico contrario al aplicado.

El equilibrio estático de carga se logra entonces, cuando el campo eléctrico inducido cancela exactamente al aplicado y esto implica que, EL CAMPO ELECTRICO DENTRO DE CUALQUIER MATERIAL CONDUCTOR CARGADO O DESCARGADO, EN PRESENCIA O NO DE OTROS CUERPOS CARGADOS CERCANOS, SERA SIEMPRE CERO.

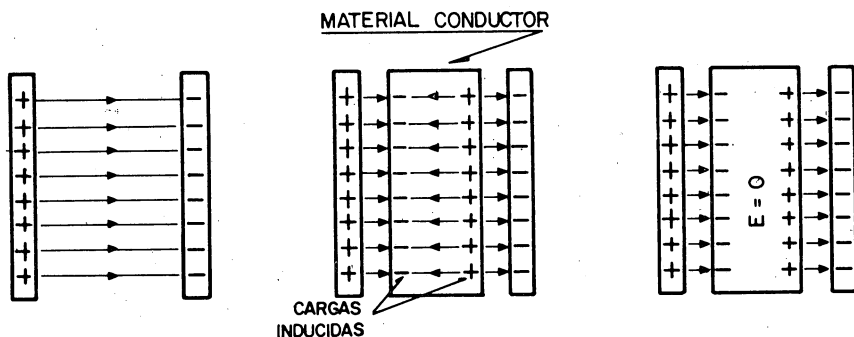


Fig. 5.19. Ilustración del fenómeno de inducción cuando se aplica un campo eléctrico a un material conductor.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, el exceso de carga en los conductores y la carga inducida, en condiciones electrostáticas, residen en su superficie.

Se puede asegurar también que, la dirección del campo electrostático es normal a la superficie del conductor ya que, si existiera una componente en la dirección tangente a la superficie, ésta ocasionaría movimiento de cargas.

Una conclusión más de esta observación del fenómeno es que, si  $\vec{E} = 0$  en el interior de un conductor, de acuerdo con

$$V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

y como  $\vec{E} = 0 \Rightarrow V = \text{cte}$

ya que  $dV = 0$

Esto es, el potencial eléctrico en un material conductor, en condiciones electrostáticas es constante o bien, dicho de otra manera, un conductor es un volumen equipotencial.

Una última observación al respecto es la que, debido al exceso de carga en la superficie ésta se distribuye de tal forma que la energía potencial sea mínima, las cargas tratan de alejarse lo más posible unas de otras y como las zonas de menor radio de curvatura son las más lejanas, ahí existe una mayor densidad superficial de cargas, por lo tanto, el campo eléctrico será más intenso en las puntas o prominencias.

#### Efectos de un Campo Eléctrico sobre un Dieléctrico.

En los dieléctricos, las cargas de sus moléculas no pueden sufrir desplazamientos semejantes a los que experimentan los electrones de conducción en los metales. La magnitud de dichos desplazamientos es muy pequeña y dependerá de la mayor o menor rigidez con la que las cargas de un átomo o molécula estén unidas.

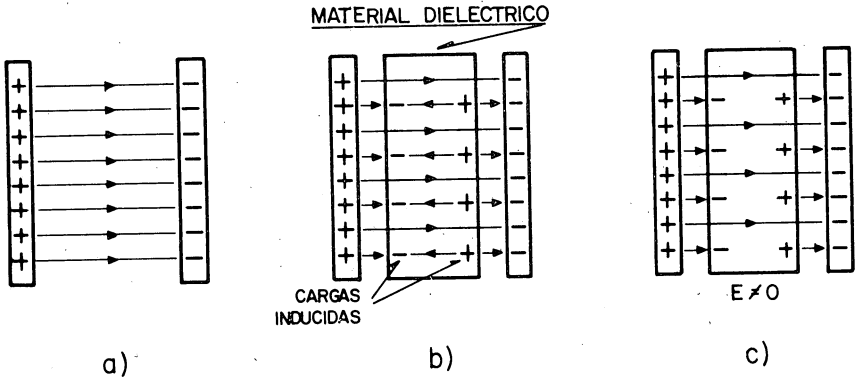


Fig. 5.20. Comportamiento de un material dieléctrico al aplicársele un campo eléctrico: a) Campo eléctrico entre 2 placas cargadas. b) Superposición de los campos eléctricos producidos por las placas cargadas y por las cargas inducidas en el dieléctrico. c) Campo resultante en el interior del dieléctrico.

Existen, en los dieléctricos, 2 tipos de moléculas:

1. Las polares, cuyos centros de carga no coinciden en un mismo punto y que forman un dipolo permanente.

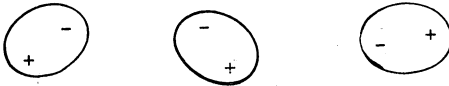


Fig. 5.21. Moléculas polares

Estos dipolos se orientan al aplicárseles un campo eléctrico y dicha orientación cesa al dejar de aplicársele el campo.



2. Las no polares, tienen sus centros de carga coincidentes en un mismo punto

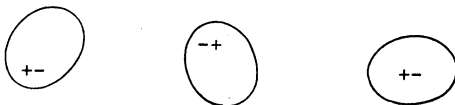
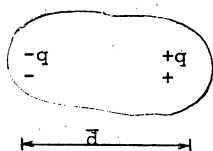


Fig. 5.22. Moléculas no polares

Cuando se les aplica un campo eléctrico, sus centros de carga se separan y forman dipolos como en el caso de las moléculas polares. En fin; ya sean moléculas polares o no polares en presencia de un campo eléctrico, forman dipolos orientados que originan una polarización de la materia.



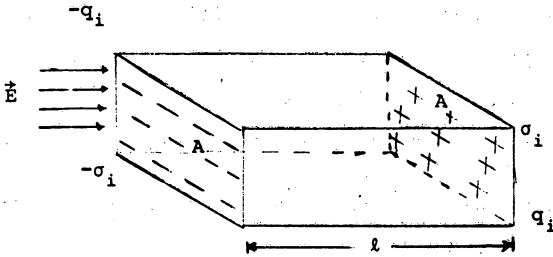
$$\bar{p} = q \bar{d} \quad (5.16)$$

Fig. 2.23. Momento dipolar de un dipolo.

Se define el momento dipolar de un dipolo como el producto de la carga por la distancia que existe entre los centros de carga.

Como el momento dipolar  $\bar{p}$  no es medible ya que esto sería a nivel molecular, se utiliza un promedio de estos momentos dipolares entre el volumen de un dieléctrico dado, esto es:

Considérese el bloque de un dieléctrico mostrado en la fig. 2.24 al cual se le ha aplicado un campo eléctrico.



$\sigma_i$  Densidad superficial de carga inducida  
 A Area o superficie

Fig. 2.24. Dieléctrico bajo la acción de un campo eléctrico.

Es posible cuantificar el momento dipolar del bloque, considerándolo como un dipolo.

$$\bar{p} = q_i \bar{l}$$

donde  $q_i = \sigma_i A$  , por tanto:

$$\bar{p} = \sigma_i A \bar{l}$$

Ahora, dividiendo la expresión anterior entre el volumen del bloque, queda la ecuación que define al vector de polarización

$$\frac{\bar{p}}{V} = \frac{\sigma_i A \bar{l}}{V} = \bar{P} \quad (5.17)$$

Además, de la figura también se puede observar que:

$$V = A l$$

Así que  $\bar{P} = \frac{\sigma_i A \bar{l}}{A l}$

$$|\bar{P}| = \sigma_i \quad (5.18)$$

Ahora bien, ¿qué sucede si se incrementa el campo eléctrico apli

cado al dieléctrico?. La respuesta es que seguirá polarizándose hasta un cierto valor máximo, pero no indefinidamente ya que existe un valor de campo eléctrico para el cual, cada dieléctrico se destruye o se vuelve conductor, este valor se conoce como campo de ruptura ( $E_R$ ) o rigidez dieléctrica.

La polarización del material es proporcional con el campo eléctrico en la medida de la susceptibilidad dieléctrica ( $\chi$ )

$$\vec{P} \propto \chi \vec{E} \quad (5.19)$$

que es una característica muy peculiar de cada dieléctrico y que, para hacer de (5.19) una igualdad, de acuerdo con el sistema de unidades que se han utilizado, se introduce una constante.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (5.20)$$

$$(\chi) = \frac{(\vec{P})}{(\epsilon_0) \cdot (\vec{E})} = \frac{(C/m^2)}{(C^2/N \cdot m^2) \cdot (N/C)} = \frac{C^2 \cdot N \cdot m^2}{C^2 \cdot N \cdot m^2}$$

$$(\chi) = \text{adimensional}$$

Regresamos nuevamente a la fig. (5.20) pero ahora considérese la superficie gaussiana que se muestra con líneas punteadas:

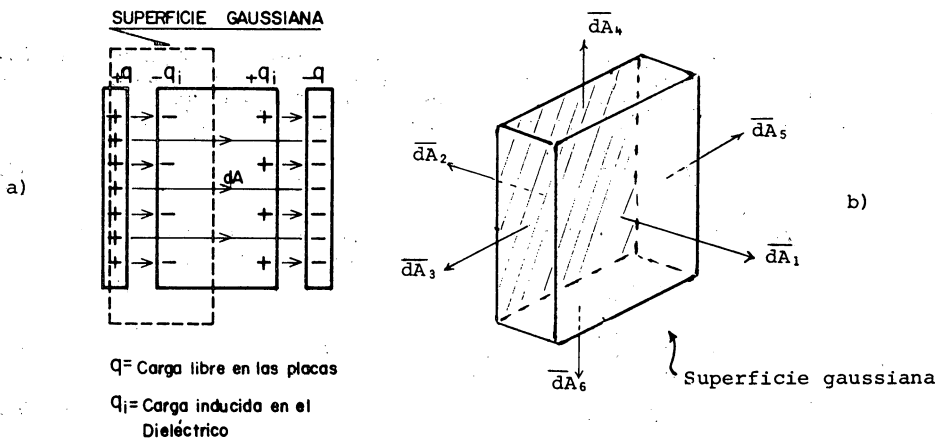


Fig. 5.25 Aplicación del Teorema de Gauss a un dieléctrico inmerso en un campo eléctrico.

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

se ve que  $\vec{E}$  es perpendicular a los vectores de las áreas 3,4,5 y 6 por lo que  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$  y además,  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  en la cara 2 también es cero pero aquí porque no hay campo eléctrico. (recordar que en interior de un conductor  $\vec{E} = 0$ ), así que:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = |\vec{E}| |\vec{A}_1| \cos 0^\circ = E A_1$$

además,  $q_n = (\sigma_l - \sigma_i) A_1$  ya que el área de la superficie gaussiana, de las placas y del dieléctrico, es igual.

$$\text{Por tanto } E A_1 = \frac{(\sigma_l - \sigma_i) A_1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma_l - \sigma_i}{\epsilon_0} \quad (5.21)$$

sustituyendo (5.20) en (5.21) ya que  $|\vec{P}| = \sigma_i$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_0 \chi \vec{E}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0 (\chi + 1)}$$

Al término  $(\chi + 1)$  se le conoce como permitividad relativa (K) porque se relaciona con la susceptibilidad eléctrica y es una comparación entre la permitividad del dieléctrico y la del vacío, así pues:

$$E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0 K} = \frac{\sigma_l}{\epsilon} \quad (5.22)$$

$$k = \chi + 1 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (5.23)$$

donde  $\epsilon =$  es la permitividad eléctrica del material dieléctrico.

TABLA 2.1

Propiedades de algunas sustancias dieléctricas.

Dieléctrico	Susceptibilidad $\chi_e$	Permitividad relativa $K_e$	Campo eléctrico de ruptura MV/m
aire	0.00059	1.00059	0.8
bakelita	3.8	4.8	12
mica	2-5	3-6	160
neopreno	5.9	6.9	12
papel	2.5	3.5	14
polietileno	1.3	2.3	50
porcelana	5.5	6.5	4
vacío	0	1	$\infty$
vidrio	3.5	4.5	13

### CAPACITANCIA

La capacitancia es una propiedad que tienen los conductores para almacenar carga a una diferencia de potencial determinada. Esta propiedad es utilizada en los circuitos eléctricos mediante elementos o dispositivos eléctricos, llamados CAPACITORES.

La siguiente figura, muestra 2 materiales conductores (metales) que no poseen exceso de carga, es decir, están eléctricamente neutros o bien, tienen la misma cantidad de carga positiva como negativa.

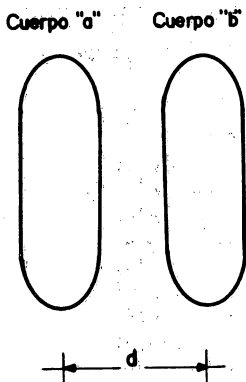


Fig. 5. Electrodos originalmente neutros.

Por ser cuerpos descargados, el potencial eléctrico de cada uno es cero. Empleando un agente externo que traslade un electrón del electrodo "a" al "b" se puede tener un potencial positivo en "a" y un potencial negativo en "b".

$$V_a > 0 \quad , \quad V_b < 0 \quad , \quad V_{ab} > 0$$

Si se trasladan más electrones de "a" a "b", la diferencia de

potencial ( $V_{ab}$ ) irá incrementándose proporcionalmente.

$$Q \propto V_{ab}$$

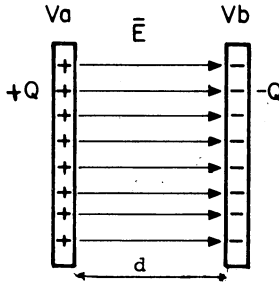
Esta expresión es una relación de proporcionalidad entre las magnitudes  $Q$  y  $V_{ab}$ . Si se introduce una constante de proporcionalidad dicha expresión quedará como la ecuación:

$$Q = C V_{ab} \tag{5.26}$$

donde  $C = \frac{Q}{V_{ab}}$  es la capacitancia

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} = \text{farad (F)}$$

Consideremos que dos placas planas paralelas han sido cargadas siguiendo el procedimiento descrito anteriormente (Ver figura).



La capacitancia para este arreglo será:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

se sabe que para dos placas planas paralelas  $V_{ab} = Ed$ , que  $\sigma = Q/A$  y  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ; sustituyendo estos valores en la fórmula de capacitancia tenemos:

$$C = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{5.27}$$

La expresión anterior nos dice que el valor de la capacitancia entre dos placas planas paralelas depende del área de las placas y la distancia de separación entre las mismas.

Para calcular la capacitancia entre dos placas planas paralelas que contienen un dieléctrico, el procedimiento que se sigue es análogo al anterior y obtenemos que:

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \tag{5.28}$$

donde  $\epsilon$ , es la permitividad del dieléctrico.

La importancia de un capacitor radica en que es un dispositivo que permite almacenar carga eléctrica y, como veremos más adelante, también almacena energía.

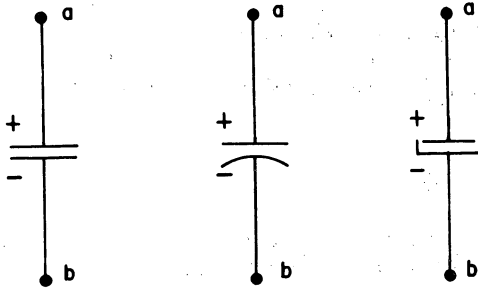


Fig. 5.24 Símbolos utilizados para representar un capacitor.

#### ENERGIA QUE PUEDE ALMACENAR UN CAPACITOR

Considérese el capacitor de placas planas de la siguiente figura

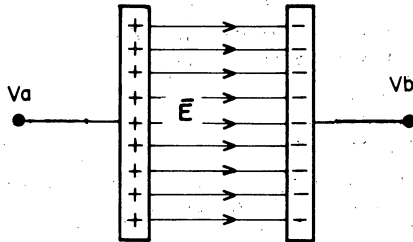


Fig. 5.25. Capacitor de placas planas.

El trabajo para trasladar una carga  $q$  de "b" a "a" a través del campo eléctrico  $\vec{E}$  es:

$${}^b W_a = q V_{ab} \text{ o en forma diferencial}$$
$$dW = V_{ab} dq$$

de la expresión de capacitancia  $C = \frac{q}{V_{ab}} \Rightarrow V_{ab} = \frac{q}{C}$



así que  $dW = \frac{q}{C} dq$

$$\int_b^a dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

$$W_a = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

y como el trabajo efectuado es igual a la energía almacenada en el capacitor

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (5.29)$$

(5.29) puede transformarse en

$$\Delta U = \frac{1}{2} C V_{ab}^2 \quad \text{sustituyendo (5.26) en (5.29) o bien en}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q V_{ab}$$

#### Conexión de Capacitores

Es importante que se conozcan las formas de conectar a los capacitores, en la práctica sólo se fabrican unos cuantos valores para éstos y cuando se necesita uno de valor muy especial, hay que mandar a fabricarlo ó conectar varios capacitores para lograr uno equivalente.

Las conexiones entre capacitores son dos básicamente:

- a) Conexiones en serie.
- b) Conexiones en paralelo.

a) Conexiones en serie.- Una conexión en serie nos indica que se conectan los elementos uno tras de otro de tal manera, que la misma corriente que circule por uno, también circule por los demás.

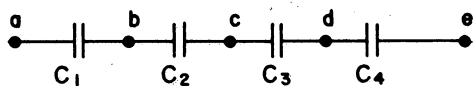
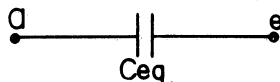


Fig. 5.26 Conexión de capacitores en serie.

El arreglo de capacitores de la figura (5.26) puede reducirse a un sólo capacitor que haga los mismos efectos que los cuatro capacitores en conjunto, a este capacitor le llamaremos capacitor equivalente.



Capacitor equivalente a  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ .

La relación entre el capacitor equivalente y los capacitores conectados en serie se obtiene a través de las siguientes expresiones:

$$V_{ae} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{de}$$

aplicando la definición de capacitancia se tiene:

$$V_{ab} = \frac{q_1}{C_1} ; V_{bc} = \frac{q_2}{C_2} ; V_{cd} = \frac{q_3}{C_3} ; V_{de} = \frac{q_4}{C_4}$$

así que el potencial entre los puntos a y e es:

$$V_{ae} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4}$$

Además, se puede pensar que por el fenómeno de inducción, en

una conexión en serie, la carga es la misma para cada uno de los capacitores.

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = q_4$$

con lo que:

$$V_{ac} = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} (q)$$

$$\frac{V_{ac}}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_{eq}}$$

luego entonces el capacitor equivalente se calculará mediante la expresión:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}$$

o bien:

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{C_i}} \quad (5.30)$$

b) Conexiones en paralelo

Una conexión de capacitores, o en general de elementos eléctricos; está en paralelo cuando las terminales de cada uno se conectan al mismo par de puntos.

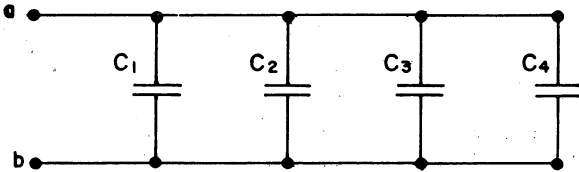
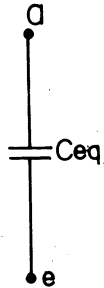


Fig. 5.27 Conexión de capacitores en paralelo.

Como podemos observar las terminales de cada capacitor están conectadas entre los puntos a y b, en consecuencia la diferencia de potencial  $V_{ab}$  es la misma para cada uno de los capacitores. Para este tipo de arreglo existe también un capacitor equivalente que hace los mismos -

efectos que los cuatro capacitores en conjunto (Ver figura)



Capacitor que equivale a conectar los que se muestran en la figura anterior.

Analizando el circuito de la figura 5.27 se puede concluir lo siguiente:

- i) los 4 capacitores están a la misma diferencia de potencial ( $V_{ab}$ )
- ii) si,  $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq C_4$ , entonces  $q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq q_4$
- iii) la carga total almacenada en el arreglo (o bien del capacitor equivalente) es la suma de los cargos parciales

$$q_T = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

de estas observaciones se puede escribir lo siguiente:

$$q_T = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

$$q_1 = C_1 V_{ab} ; q_2 = C_2 V_{ab} ; q_3 = C_3 V_{ab} ; q_4 = C_4 V_{ab}$$

$$q_T = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) V_{ab}$$

recordando que la carga total es la carga del capacitor equivalente, y que la capacitancia del arreglo es la misma que la del capacitor equivalente.

$$q_{Ceq} = C_{eq} V_{ab}$$

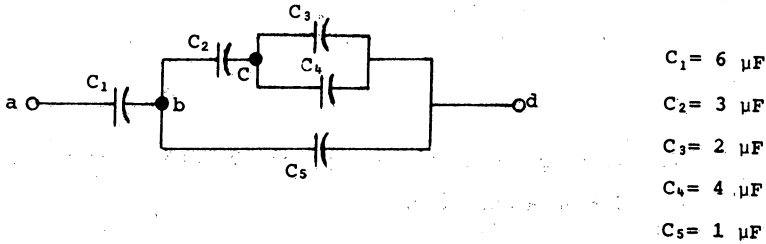
$$\therefore C_{eq} = \sum_i C_i \quad (5.31)$$

para conexiones en paralelo.

Ejemplo 5.

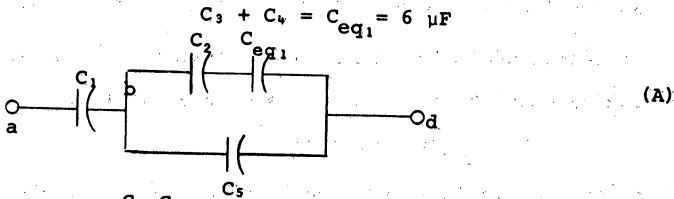
Para la conexión de capacitores, mostrada en la figura y una diferencia de potencial  $V_{ad} = 100 \text{ V}$ , calcular:

- La capacitancia entre los puntos a y d.
- La carga en el capacitor 5.
- La energía total almacenada en el arreglo.

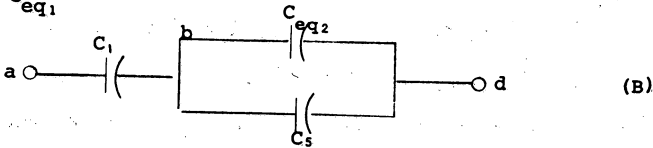


SOLUCION:

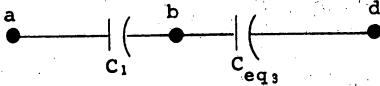
a)  $C_{a-d}$



$$C_{eq_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{eq_1}}} = \frac{C_2 \cdot C_{eq_1}}{C_2 + C_{eq_1}} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \mu\text{F}$$



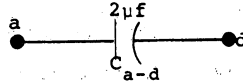
$$C_{eq_3} = C_{eq_2} + C_5 = 2 + 1 = 3 \mu\text{F}$$



(C)

$$C_{a-d} = \frac{C_1 C_{eq_3}}{C_1 + C_{eq_3}} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2 \mu F$$

$$C_{a-d} = 2 \mu F$$



(D)

b)  $C_5 = \frac{q_5}{V_{bd}} \Rightarrow q_5 = C_5 V_{bd}$

para calcular  $V_{bd}$  necesitamos observar lo siguiente:

de (c)  $V_{bd} = \frac{q_{Ceq_3}}{C_{eq_3}}$

además  $q_{Ceq_3} = q_{C_1} = q_{TOTAL}$

$$q_{TOTAL} = q_{a-d} = C_{a-d} (V_{ad}) = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$$

regresando a calcular  $V_{bd}$ :

$$V_{bd} = \frac{q_{Ceq_3}}{C_{eq_3}} = \frac{2 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-6}} = 66.667 \text{ volt}$$

$$\therefore q_5 = C_5 V_{bd} = 1 \times 10^{-6} (66.667) = 66.667 \mu C$$

c)  $\Delta U_{TOTAL} = \frac{1}{2} C_{a-d} V_{ad}^2 = \underline{\underline{0.01 \text{ J}}}$

## CAPITULO VI

### CIRCUITOS ELECTRICOS

#### TRANSFORMACIONES DE ENERGIA EN LAS FUENTES DE FUERZA ELECTROMOTRIZ

En el capítulo anterior nos ocupamos básicamente del estudio de las cargas eléctricas en reposo, considerando las fuerzas que se ejercen y la energía potencial originada por dichas cargas.

En el presente capítulo estudiaremos los conceptos y leyes fundamentales que rigen a las cargas en movimiento.

Para poner en movimiento a las cargas y mantener dicho movimiento, es necesario contar con ciertos dispositivos que sirven como fuente de energía, los más comunes o que tienen un uso más generalizado son las baterías y los generadores.

En la actualidad, casi todas las fuentes de energía (biomasa, magnetohidrodinámica, nuclear, solar, química, térmica, eólica, geotérmica, etc.) están encaminadas a producir energía eléctrica, ya sea mediante una transformación directa, como en el caso de las fotoceldas y el de las baterías o, en forma indirecta como en el caso de las grandes centrales eléctricas.

Se puede pensar de lo mencionado anteriormente que, el hecho de convertir una forma de energía a otra (térmica a eléctrica por ejemplo) implica 2 cosas:

1. Respetar ciertas leyes de la naturaleza (Segunda Ley de Termodinámica:  $\eta \neq 100\%$ ).
2. Conocer las condiciones en que se utilizará en forma versátil y óptima dicha energía (Electromagnetismo y la Segunda Ley de la Termodinámica).

En general, una fuente de fuerza electromotriz (ffem) se define como aquel dispositivo capaz de transformar algún tipo de energía en energía eléctrica.

En la siguiente tabla se presenta una lista de los dispositivos más conocidos que cumplen con la definición antes mencionada.

Fuente de fuerza electromotriz (ffem)	Tipo de energía, transformada en energía eléctrica.
Celda química	Química
Celda de combustible	Química
Celda fotovoltaica	Luminosa
Celda térmica (termopar)	Térmica
Generador	Mecánica
Cristal piezoeléctrico	Mecánica

La característica común de estos dispositivos es que al recibir energía en alguna de las formas antes mencionadas, producen una diferencia de potencial conocida como fem (fuerza electromotriz,  $\epsilon$ ).

Se emplean diversos signos para representar una ffem, siendo las más comunes las siguientes:

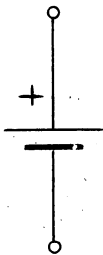


Fig. 6.4 Celda Química

Generador



CORRIENTE ELECTRICA

Al existir un movimiento de cargas en un conductor, ya sea continuo o discontinuo, se establece una corriente eléctrica; dicha corriente depende del campo eléctrico aplicado al material conductor.

Para ejemplificar lo anterior, consideremos un conductor metálico que está afectado por un campo eléctrico. (ver figura 6.5).

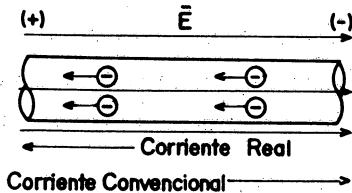


Figura 6.5

Los electrones libres se desplazan hacia el extremo izquierdo del conductor estableciendo una corriente eléctrica que va en dirección opuesta a la del campo eléctrico; por convención, el sentido de la corriente eléctrica se toma en la misma dirección que la del campo eléctrico, es decir, el sentido de la corriente convencional es de dirección contraria al de la corriente real (en los conductores sólidos).

Bien, examinemos ahora que sucede cuando hay fluctuaciones de corriente; esto es que el campo eléctrico o la diferencia de potencial que origina la corriente, varíe o no con el tiempo.

- 1.- Si el campo eléctrico  $\bar{E}$  o la diferencia de potencial  $V_{ab}$  que se establece entre los extremos de un conductor es constante, entonces se tendrá una CORRIENTE CONTINUA

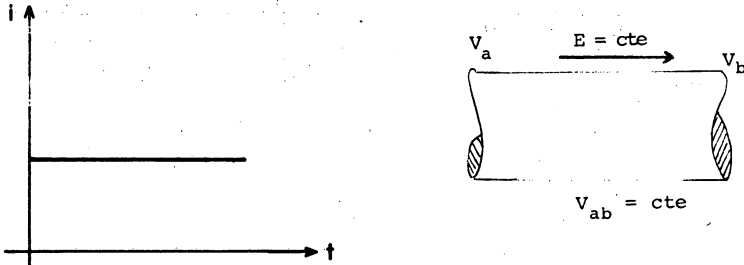


Fig. 6.6 Corriente Continua

- 2.- Si el campo eléctrico  $\bar{E}$  varía, pero siempre se mantiene una diferencia de potencial positiva ( $V_{ab} > 0$ ), entonces se tiene una CORRIENTE DIRECTA.

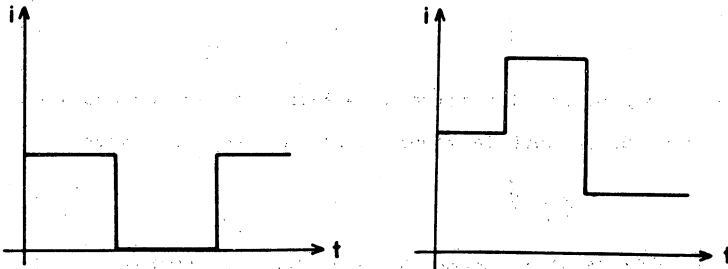


Fig. 6.7 Corriente Directa

3.- Si el campo eléctrico  $\vec{E}$  varía no sólo en cuanto a su magnitud sino también en su dirección o bien, en un intervalo de tiempo  $V_{ab} > 0$  y en otro  $V_{ab} < 0$ , entonces se tiene una CORRIENTE ALTERNA.

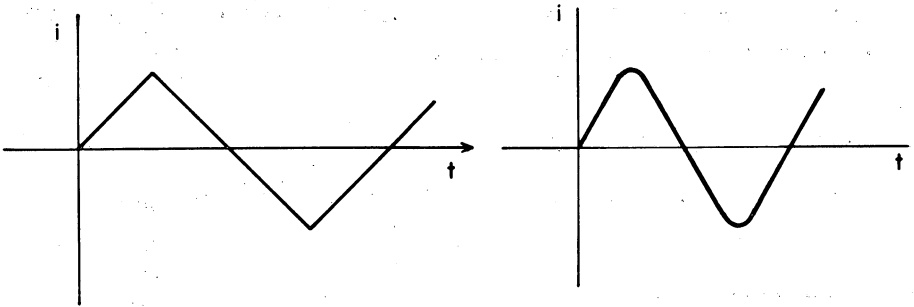


Fig. 6.8 Corriente Alterna

Considérese el conductor de la figura 6.5 e imaginemos que se pueden observar las cargas que atraviesan el área transversal de dicho conductor en un cierto intervalo de tiempo. Si el intervalo de tiempo es muy corto, digamos una diferencial de tiempo, entonces la carga que se traslada a través del área será también de una magnitud diferencial, esto es:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (6.1)$$

Por otra parte, si el intervalo de tiempo es de una magnitud macroscópica, también lo será la magnitud de la carga, entonces

$$i = \frac{q}{t} \quad (6.1.1)$$

La expresión (6.1) se denomina CORRIENTE INSTANTANEA y (6.1.1)

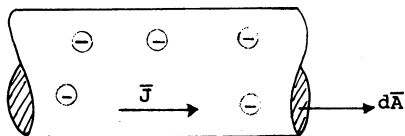
CORRIENTE PROMEDIO, en ambas la unidad correspondiente será :

$$\frac{C}{s} = \text{ampere (A)}$$

También se puede expresar a la corriente eléctrica en función de 2 vectores: la densidad de corriente  $\vec{J}$  y el área transversal del conductor  $\vec{A}$ , esto es, como la corriente es un flujo de cargas

$$i = \phi = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (6.2)$$

y si el vector  $d\vec{A}$  es paralelo a  $\vec{J}$ , el producto escalar  $\vec{J} \cdot d\vec{A}$  será:



$$|\vec{J}| \cdot |d\vec{A}| \cos 0^\circ = J dA$$

$$i = \int_A J dA = JA$$

$$i = JA \quad \left( \frac{A}{m^2} \cdot m^2 \right) = (A) \quad (6.2.1)$$

#### LEY DE OHM

El físico alemán George Simon Ohm (1787-1854) fue el primero en realizar una investigación sistemática sobre la relación entre el potencial a través de un conductor y la corriente eléctrica que fluía por él.

Por entonces (1826) las pilas no eran muy estables y Ohm utili

z6 entonces un termopar de bismuto - cobre como fuente de fem.

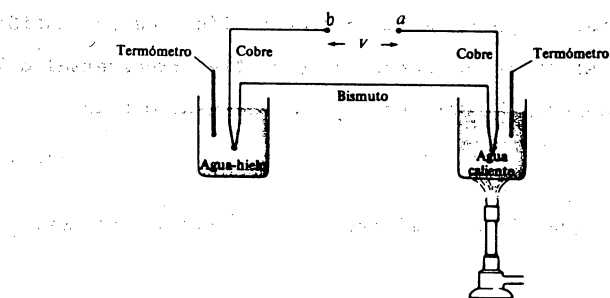


Fig. 6.9 Uso de un termopar como fuente de fuerza electromotriz.

La relación lineal que encontró Ohm es aplicable solamente a conductores metálicos sólidos y homogéneos; en éstos, la densidad de corriente es proporcional con el campo eléctrico aplicado

$$\vec{J} \propto \vec{E} \quad (6.3)$$

introduciendo una constante de proporcionalidad en (6.3):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (6.4)$$

(6.4) Se conoce como la Ley de Ohm en su forma vectorial, donde  $\sigma$  es una propiedad de los materiales llamada conductividad

$$(\sigma) = \frac{(J)}{(E)} = \frac{A \cdot m}{m^2 \cdot V} = \frac{A}{V \cdot m}$$

al inverso de la conductividad se le conoce como resistividad del material.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad ; \quad (\rho) = \frac{V \cdot m}{A}$$

La ecuación (6.4) se puede escribir como

$$\bar{E} = \rho \bar{J}$$

y si se considera un conductor de área transversal constante (A) y longitud (l):

$$V_{ab} = - \int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{l} \Rightarrow V_{ab} = E l$$

además

$$J = \frac{i}{A}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en  $E = \rho J$

$$\frac{V_{ab}}{l} = \rho \frac{i}{A} \Rightarrow V_{ab} = \rho \frac{l}{A} i$$

$$\rho \frac{l}{A} = R \tag{6.5}$$

$$(R) = (\rho) \frac{(l)}{(A)} = \frac{V \cdot m}{A} \cdot m \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (ohm)}$$

finalmente

$$V_{ab} = R i \tag{6.6}$$

Esta expresión de la Ley de Ohm fue obtenida primero que la ecuación (6.4) y además, es la que tiene una mayor aplicación práctica.

Sabiendo que  $R = \rho \frac{l}{A}$ , la resistencia de un conductor la podemos determinar si conocemos su resistividad, su longitud y su área de sección transversal.

Como habíamos mencionado anteriormente, la resistividad es una propiedad del material y nos indica el grado de oposición que presentan los conductores a que circule una corriente por los mismos, es decir, a mayor resistividad habrá menor paso de corriente y el material

será un mal conductor, y a menor resistividad habrá mayor paso de corriente y el material será un buen conductor.

Otra forma de expresar las unidades de  $\rho$  es:

$$(\rho) = \left(\frac{RA}{l}\right) = \Omega \cdot \frac{m^2}{m} = \Omega \cdot m$$

A continuación presentamos una tabla de la resistividad de los conductores más comunes.

<u>Material</u>	(Temperatura de referencia T=20°C) <u>Resistividad (<math>\Omega \cdot m</math>)</u>
Aluminio	$2.824 \times 10^{-8}$
Constantán	$49.0 \times 10^{-8}$
Cobre	$1.771 \times 10^{-8}$
Hierro	$10.0 \times 10^{-8}$
Latón	de 6 a $8 \times 10^{-8}$
Manganina	$44.0 \times 10^{-8}$
Mercurio	$95.783 \times 10^{-8}$
Nicróm	$100.0 \times 10^{-8}$
Plata	$1.59 \times 10^{-8}$
Plomo	$22.0 \times 10^{-8}$
Wolfarmio	$5.56 \times 10^{-8}$

Tabla 6. Resistividad de materiales conductores.

#### EJEMPLO 6.1

Una barra de cobre de sección cuadrada tiene 1 m de largo y 1 cm de lado. Dicha barra se encuentra a temperatura ambiente que es de 20°C.

a) ¿Cuál es la resistencia entre sus extremos?

b) ¿Cuál debe ser el diámetro de una barra circular de cobre de 1 m. de longitud para que tenga la misma resistencia?

SOLUCION

a) De la tabla podemos ver que la resistividad del cobre a 20°C es:

$$\rho = 1.771 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = \text{Resistencia de la barra cuadrada de cobre a } 20^\circ\text{C.}$$

$$A = (0.01)^2 = .0001 \text{ m}^2$$

$$R = 1.771 \times 10^{-8} \times 1 \times \frac{1}{0.0001} = 1.771 \times 10^{-4} \Omega$$

$$R = 1.771 \times 10^{-4} \Omega$$

R = Resistencia de la barra circular de cobre

$$1.771 \times 10^{-4} = 1.771 \times 10^{-8} \frac{1}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = 1 \times 10^{-4}$$

$$d^2 = \frac{4 \times 10^{-4}}{\pi}$$

$$d = 1.1283 \times 10^{-2} \text{ m}$$



### CONEXIONES SERIE Y PARALELO DE RESISTORES

La resistencia es una propiedad de los materiales que en algunas situaciones se desea minimizar y en otras, por el contrario, se requiere aumentar su valor.

A los dispositivos que se fabrican especialmente con el fin de emplear tal propiedad se les conoce como RESISTORES.

Presentamos a continuación la forma de obtener el resistor equivalente de un arreglo de resistores conectados, ya sea en SERIE o en PARALELO.

La figura 6.10 muestra un arreglo de 3 resistores conectados en serie.

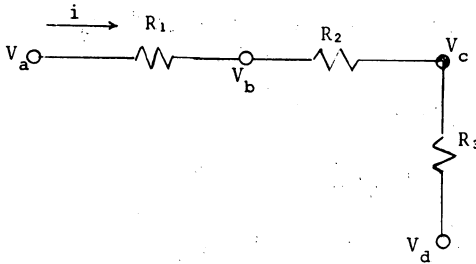


Fig. 6.10 Resistores en serie.

Se puede observar que la corriente  $i$  que circula por bién lo hace por  $R_2$  y  $R_3$ , no así el potencial que existe en terminales de cada resistor.

Imaginemos que la figura anterior representa un circuito hidráulico en el que la corriente eléctrica  $i$  es el gasto, el potencial eléctrico ( $V$ ) es la presión y los resistores ( $R$ ) son válvulas o accesorios que ocasionan una caída de presión. De esta manera podemos identificar una conexión en serie sabiendo que, la corriente que circula por un elemento también lo hace por los demás, o bien, el mismo gasto que circula por una válvula también lo hace por las otras. Asimismo, la caída de presión desde el punto "a" hasta el punto "d" es la suma de caídas  $a-b + b-c + c-d$ .

Esto referido al potencial eléctrico es:

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} \quad (6.7)$$

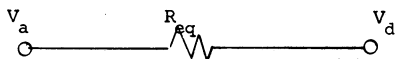
a su vez, de acuerdo con la Ley de Ohm

$$V_{ab} = R_1 i \quad ; \quad V_{bc} = R_2 i \quad ; \quad V_{cd} = R_3 i$$

Sustituyendo estas expresiones en (6.7)

$$V_{ad} = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

de donde se puede concluir que el resistor equivalente ( $R_{eq}$ ) del arreglo mostrado en la figura 6.10 es:



$$R_{eq} = \sum_i R_i \quad (6.8)$$

en general (6.8) es la expresión que permite calcular el resistor equivalente cuando se tiene un arreglo en serie.

Consideremos ahora la figura 6.11, la cual muestra un arreglo de resistores en paralelo y la reducción de éstos al resistor equivalente.

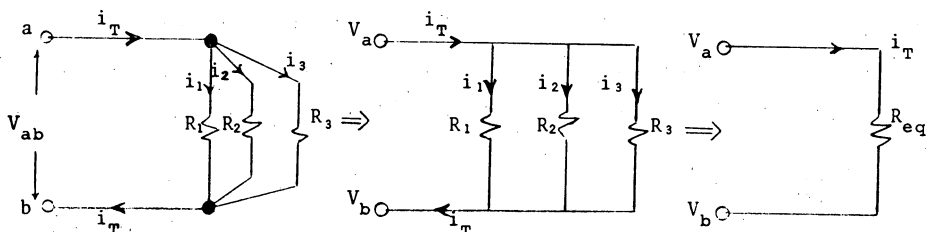


Fig. 6.11 Conexión de resistores en paralelo.

Haciendo nuevamente la analogía con un circuito hidráulico,  $i_T$  debe ser el gasto total;  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  los gastos parciales que circulan por las válvulas o accesorios  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  respectivamente y finalmente,  $V_a$  y  $V_b$  las presiones en las tuberías principales que, en la parte superior debe ser un cabezal y en la inferior, un colector.

Bien, el gasto total debe ser la suma de los gastos parciales así que:

$$i_T = i_1 + i_2 + i_3 \quad (6.9)$$

nuevamente, de acuerdo a la Ley de Ohm

$$i = \frac{V}{R}$$

y sustituyéndola en (6.9)

$$i_T = V_{ab} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

se puede concluir que el resistor equivalente, mostrado en la figura 6.11 es:

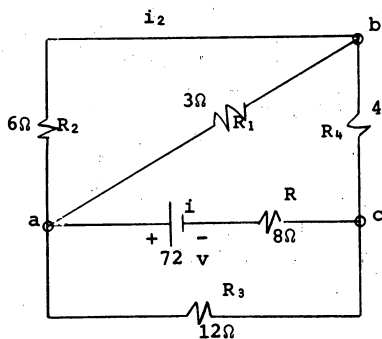
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

En general, el cálculo del resistor equivalente para un arreglo en paralelo se efectúa mediante:

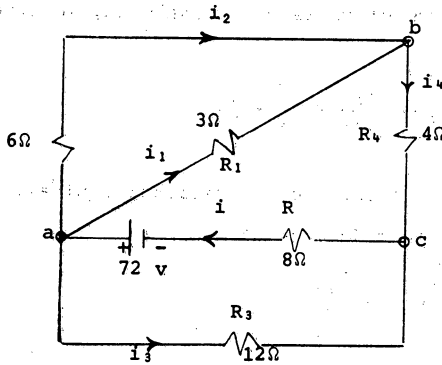
$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \quad (6.10)$$

### EJEMPLO 6.2

Para el siguiente circuito encuentre el resistor equivalente, así como  $i_1$  e  $i_2$ .

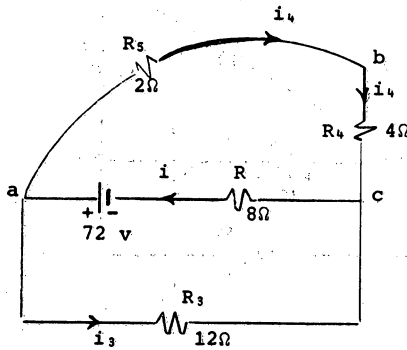


Debido a la fuente y puesto que a través de una resistencia se tiene caída de potencial, podemos indicar el sentido de la corriente para los resistores.



1

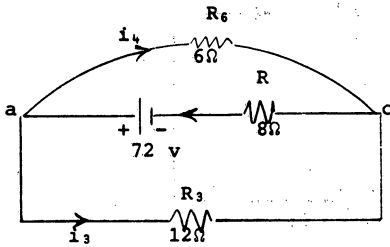
Comencemos a reducir el circuito para encontrar el resistor equivalente.



2

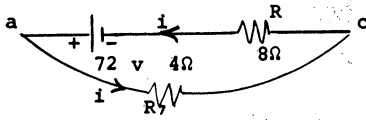
$$R_5 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3(6)}{3 + 6} = 2\Omega$$

Para el resistor  $R_5$  equivalente, la corriente que pasa por el tendrá que ser la misma que pasa por  $R_4$ , por estar en serie con este último.



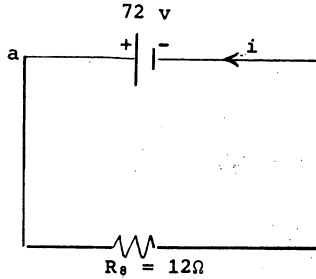
3

$$R_6 = R_4 + R_5 = 4 + 2 = 6\Omega$$



4

$$R_7 = \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6} = \frac{12(6)}{12 + 6} = 4\Omega$$



5

$$R_8 = 12\Omega$$

$$R_8 = R_{eq} = R + R_7$$

$$R_{eq} = 12\Omega$$

$$i = \frac{72V}{12\Omega}$$

$$i = 6A$$

Para poder determinar el valor de la corriente  $i_1$ , necesitamos regresar por los circuitos 4, 3, 2 hasta 1 por las razones que se exponen en los siguientes pasos:

10. Para encontrar el valor de la corriente  $i_1$ , necesitamos saber cuanto vale la diferencia de voltaje entre los puntos "a" y "b", o sea  $V_{ab}$  a través del resistor  $R_1$ . (Circuito 1).

$$i_1 = \frac{V_{ac}}{R_1} = \frac{8}{3} = 2.66A$$

20. Para determinar  $V_{ab}$ , que es el voltaje en el resistor  $R_5$ , se requiere conocer la corriente  $i_4$ . (Circuito 2)

$$V_{ab} = R_5 i_4 = 2(4) = 8V$$

30. La corriente  $i_4$  se puede calcular conociendo la diferencia de voltaje entre los puntos "a" y "c", o sea  $V_{ac}$  a través del resistor  $R_6$ . (Circuito 3).

$$i_4 = \frac{V_{ac}}{R_6} = \frac{24}{6} = 4A$$

40. La diferencia  $V_{ac}$ , es el voltaje entre los extremos del resistor  $R_7$ , que por estar en serie con  $R$  y la fuente  $V$ , pasa por ella la corriente  $i$ . (Circuito 4).

$$V_{ac} = R_7 i = 4(6) = 24V$$

Por tanto, al regresar por los pasos expuestos tenemos que:

$$i_1 = 2.66A$$



## LEY DE JOULE

El movimiento de cargas dentro de un conductor origina que existan choques entre los portadores de carga, dando como resultado que la energía cinética que llevan éstos se convierta en energía calorífica y a su vez, esto se manifieste como una elevación de temperatura del conductor.

Efectivamente, se conoce como EFECTO JOULE a la conversión de energía eléctrica en energía térmica, o bien, dicho de otra manera, la energía eléctrica que es transmitida en forma de calor se conoce como EFECTO JOULE.

Joule utilizó este fenómeno (entre otros) para comprobar la validez del principio de conservación de la energía o también llamado, Primera Ley de la Termodinámica.

Recordando que la fuerza de origen eléctrico que hace mover a los portadores de carga es:

$$F = E q$$

se puede calcular la energía que se proporciona a un conductor para establecer una corriente eléctrica.

Dicha energía será igual al trabajo que desarrollan los portadores de carga al moverse a través de un conductor.

$$dW = dF \cdot l$$

$$dW = E d q \cdot l$$

$$dW = E l d q$$

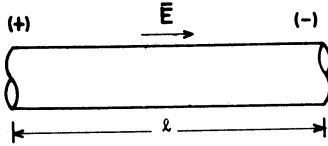


Fig. 6.10. Trabajo desarrollado por los portadores de carga.

como  $E l = V_{ab} = V$  es la diferencia de potencial aplicada entre los extremos del conductor

$$dW = V d q$$

Además  $dq$  se puede expresar como

$$dq = i d t$$

por lo que, sustituyendo esta expresión en la anterior

$$dW = V i d t$$

y dividiendo entre  $dt$

$$\frac{dW}{dt} = V i \tag{6.11}$$

donde:  $\frac{dW}{dt} =$  potencia eléctrica ( $P_e$ )

$$P_e = V i \quad (V \cdot A = W) \tag{6.11.1}$$

La ecuación (6.11) ó (6.11.1) se conoce como Ley de Joule.

Se puede concluir que la potencia eléctrica no depende del dispositivo empleado, sino únicamente de la corriente que circula por él y la diferencia de potencial que se establece en sus extremos.

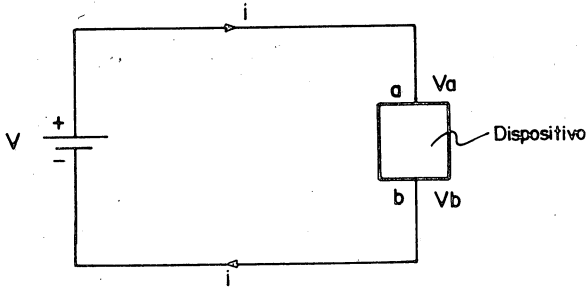


Fig. 6.11. Potencia eléctrica suministrado a un cierto dispositivo.

Finalmente, es válido comentar que la Ley de Joule al igual que la Ley de Ohm expresa propiedades especiales de ciertas sustancias y no propiedades generales de la materia.

Un material que obedece a la Ley de Ohm también obedece la Ley de Joule ya que ambas son dependientes:

$$P_e = V i$$

y como de la Ley de Ohm establece que  $V = R i$

$$P_e = R i^2 \tag{6.11.2.}$$

o bien  $P_e = \frac{V^2}{R}$  (6.11.3.)

(6.11.1) , (6.11.2) y (6.11.3) son expresiones de la Ley de Joule.

Ejemplo 6.3

En un experimento de conversión de energía eléctrica en calor se obtuvo la información que sigue: la resistencia del calentador era 55 ohms, el voltaje que se aplicó fue 110 V, la masa de agua (donde estaba inmersa la resistencia) fue 153 g, la del calorímetro fue 60 g, el calor específico del calorímetro es  $0.10 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$ , las temperaturas inicial y final del sistema fueron  $10.0^\circ\text{C}$  y  $35.0^\circ\text{C}$  respectivamente. El calor específico del agua es  $1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ . El proceso duró un minuto con quince segundos. ¿Cuántos joules encuentra el experimentador que equivalen a una caloría?

SOLUCION

Aplicando la 1a. Ley de la Termodinámica a un sistema cerrado, y considerando a la masa de agua más la del calorímetro como el sistema en estudio

$$Q + W = (\Delta U)_{\text{sistema}}$$

$$W = 0$$

$$Q = (\Delta U)_{\text{sistema}} = \Delta U_{\text{agua}} + \Delta U_{\text{calorímetro}}$$

La potencia en forma de calor transmitida a nuestro sistema fue

$$\dot{Q} = P_e = V^2/R = (110)^2/55 = 220 \text{ W}$$

$$\left(\frac{V^2}{R}\right) = \left(\frac{V^2}{V/A}\right) = (V \cdot A) = (W)$$

$$Q = \dot{Q} \Delta t = 220(75) = 16\,500 \text{ J}$$

$$(W \cdot s) = \left(\frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot \text{s}\right) = (\text{J})$$

$$\Delta U_{\text{agua}} + \Delta U_{\text{calorímetro}} = (m_a C_a + m_c C_c) \Delta T = 16500$$

$$153 (1) + 60 (0.1) \quad 25 = 16500$$

$$3975 \text{ cal} = 16500 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4.1509 \text{ J}$$

NOTA: El experimento antes descrito ha arrojado un resultado muy cercano a la equivalencia entre calorías y joules. En realidad se ha verificado con diferentes experimentos que -  
1 cal = 4.1868 J y el pequeño error (4.1868-4.1509) creemos que se debe al haber considerado las capacidades térmicas específicas, del agua y del calorímetro, constantes.

### VALORES EFICACES DE CORRIENTE Y VOLTAJE ALTERNOS

Es de conocimiento general que la energía eléctrica que se distribuye desde las plantas generadoras hasta los centros de consumo (ya sea para uso industrial o en una casa-habitación) es de corriente y voltaje alternos; esto es debido a que históricamente, cuando se inició la generación de energía eléctrica no se conocían transformadores de voltaje continuo (al distribuir la energía eléctrica se debe elevar el voltaje y disminuir la corriente para evitar pérdidas por efecto joule), además se han encontrado algunas ventajas tanto al generar como al transmitir corriente alterna en lugar de corriente continua.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, es de suma importancia conocer el comportamiento de la corriente y voltaje alternos.

En la figura 6.12 se muestra la curva de una corriente alterna senoidal cuya ecuación es:

$$i = I_m \text{ sen } \omega t$$

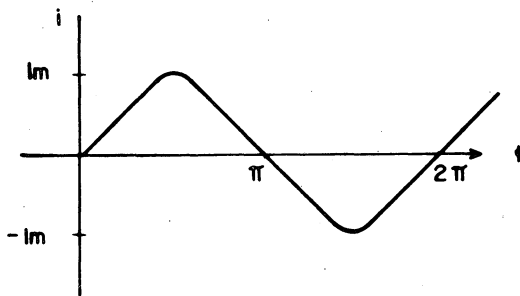


Fig. 6.12 Corriente Alterna Senoidal

donde:

$I_m$ , es la amplitud máxima (valor máximo de corriente).

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ , es la frecuencia angular

$f = \frac{1}{T}$ , es la frecuencia.

y  $T$ , es el periodo

Analizando el efecto de la corriente alterna sobre una resistencia eléctrica y después lo comparamos con el efecto que le produce una corriente continua, se encontrará una relación entre ambas que permitirá conocer la equivalencia entre ellos.

Partiendo de que la potencia debida a ambas corrientes debe ser la misma, se tiene:

$$P_{ca} = P_{cc}$$

$P_{ca}$ .- Potencia de la corriente alterna

$P_{cc}$ .- Potencia de la corriente continua.

$$P_{ca} = R (\text{Im sen } \omega t)^2$$

$$P_{cc} = R I^2$$

$$(\text{Im sen } \omega t)^2 = \text{Im}^2 \text{sen}^2 \omega t$$

de acuerdo a la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2 A = \frac{1}{2} (1 - \cos 2A)$$

$$\text{Im}^2 \text{sen}^2 \omega t = \text{Im}^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \omega t)$$

sustituyendo la expresión anterior en la de potencia de la corriente alterna:

$$P_{ca} = \frac{1}{2} \text{Im}^2 R - \frac{1}{2} \text{Im}^2 R \cos 2 \omega t$$

donde se puede observar que el término  $\frac{1}{2} \text{Im}^2 R \cos 2 \omega t$  es una curva sinusoidal con valores positivos y negativos de corriente, dichos valores se cancelan periódicamente y el resultado neto es nulo

$$\frac{1}{2} \text{Im}^2 R \cos 2 \omega t = 0$$

$$\therefore P_{ca} = \frac{1}{2} \text{Im}^2 R$$

regresando a la igualdad original

$$P_{ca} = P_{cc}$$

$$\frac{1}{2} I_m^2 R = R I^2$$

$$I = \frac{1}{2} I_m = 0.7071 I_m$$

Esta magnitud que es el 70.71% del valor máximo de la corriente alterna, se conoce como VALOR EFICAZ DE LA CORRIENTE ALTERNA.

$$I_{ef} = 0.7071 I_m \quad (6.12)$$

La potencia eléctrica calculada con este valor será la misma que si se suministra corriente continua; por esta razón también se el conoce como potencia promedio

$$P_{cc} = P_{ca} = R(0.7071 I_m)^2 = R I_{cc}^2 \quad (6.13)$$

El voltaje alterno se puede obtener aplicando la Ley de Ohm.

$$V = R I$$

$$V_{ef} = R I_{ef}$$

$$V_{ef} = R (0.7071 I_m)$$

$$\delta \quad V_{ef} = 0.7071 V_m$$

NOTA: Si el lector pretende cerciorarse de estos valores utilizando un multímetro para medir corriente o potencial en su casa, dicho multímetro sólo detectará 0.7071 Vm ó 0.7071 Im respectivamente.



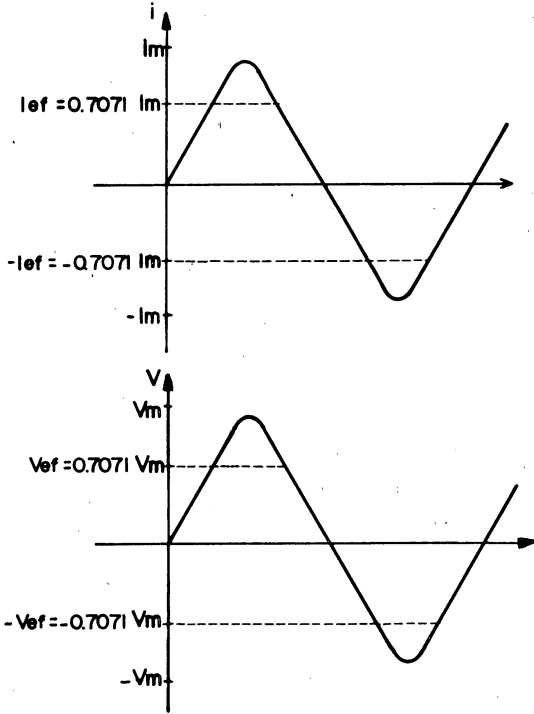


Fig. 6.13 Valores eficaces de corriente y voltaje alternos.

### LEYES DE KIRCHHOFF

Las leyes establecidas por Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) son aplicaciones directas del Principio de Conservación de la Carga, la 1a. y, del Principio de Conservación de la Energía la 2a.; ambas representan una excelente herramienta para el análisis de los circuitos eléctricos.

A continuación se explican algunos términos que son empleados en las leyes de Kirchhoff.

Nodo.- Punto en el cual se conectan 3 o más elementos (ver puntos A, B, C, D y E en la figura 6.14).

Rama.- Trayectoria que puede seguir la corriente a través de los elementos que se encuentran entre 2 nodos. (Ver por ejemplo ramas A-B, A-C y A-D).

Malla.- Conjunto de ramas que forman una trayectoria cerrada. (Ver mallas A-B-C-A y A-B-E-D-A, por ejemplo).

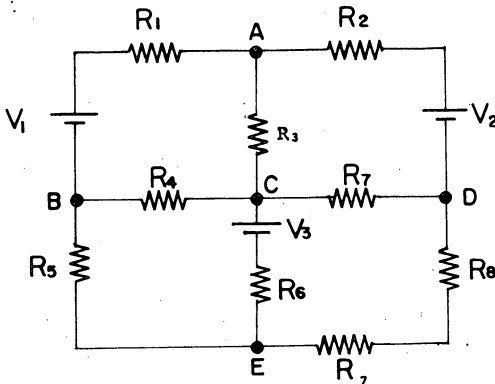


Figura 6.14 Ejemplo de nodos, ramas y mallas en un circuito.

La aplicación de estas leyes permite calcular las corrientes de rama y la diferencia de potencial en cada elemento de un cierto circuito.

PRIMERA LEY DE KIRCHHOFF O LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (LCK)

En cualquier instante, la suma algebraica de las corrientes en un nodo es cero.

(Principio de conservación de la carga en cada nodo).

Al aplicar esta ley, primero se deben asignar sentidos a las corrientes de cada rama y considerar positivas a las que entran al nodo y, negativas a las que salen o viceversa.

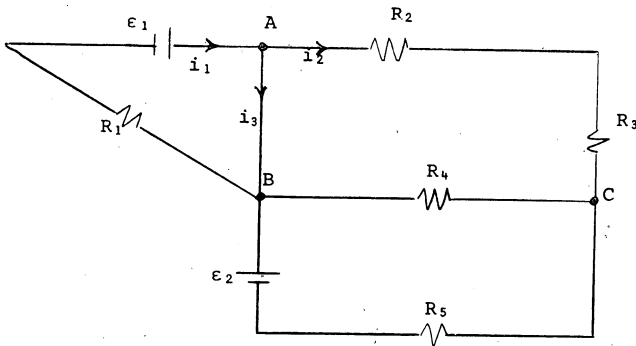


Figura 6.15 Suma de corrientes en el nodo A.

$$\sum_{j=1}^n i_j = 0 \quad (6.14)$$

o bien

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Si se hace un análisis de cuántas ecuaciones de corriente se pueden establecer en un circuito se concluirá que, debido a que por cada rama circula una misma corriente, existirán tantas corrientes distintas como ramas principales haya en el circuito y por lo tanto, en general: EL NUMERO DE ECUACIONES INDEPENDIENTES DE NODO QUE SE PUEDEN PLANTEAR PARA UN CIRCUITO, ES IGUAL AL NUMERO DE NODOS MENOS UNO.

SEGUNDA LEY DE KIRCHHOFF O LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOF (LVK).

*En cualquier instante, la suma algebraica de las diferencias de potencial (voltajes) a lo largo de una malla es cero.*

(Principio de conservación de la energía en cada malla).

Al aplicar esta ley a una malla cualquiera se deben asignar polaridades a los elementos que existan en cada rama, esto en relación con el sentido de la corriente establecida.

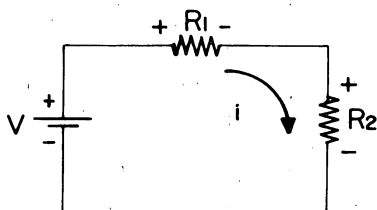


Figura 6.16 Suma de voltajes en una malla.

De acuerdo con la figura anterior, se asignaron polaridades a los resistores  $R_1$  y  $R_2$  en relación con el sentido de la corriente.

Se considera que los aumentos de potencial son positivos (+) y las disminuciones o caídas son negativas (-).

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0 \text{ (en cada malla)} \quad (5.15)$$

Si se recorre la malla en sentido horario:

$$V - i R_1 - i R_2 = 0$$

Si se recorre en sentido antihorario:

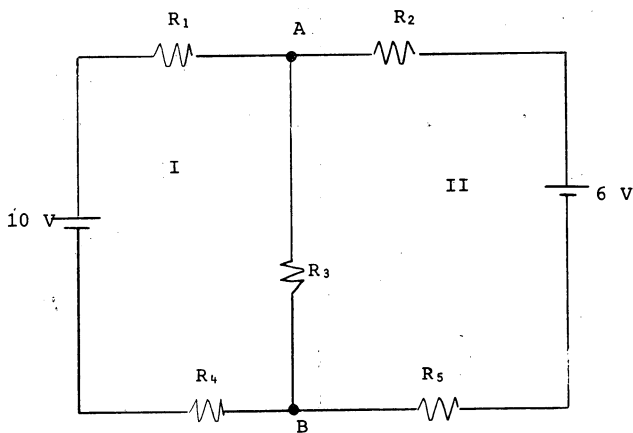
$$-V + i R_2 + i R_1 = 0$$

EL NUMERO DE ECUACIONES DE MALLA INDEPENDIENTES ES IGUAL AL NUMERO DE RAMAS MENOS EL NUMERO DE NODOS INDEPENDIENTES (NUMERO DE NODOS MENOS UNO).

#### Ejemplo 6.4

De acuerdo con el circuito de la siguiente figura, determine:

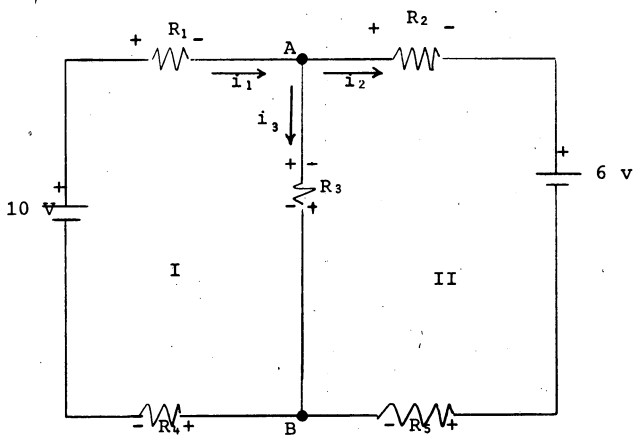
- Las corrientes que circulan por  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  respectivamente.
- Las caídas de potencial en cada resistor.
- La potencia suministrada por cada fuente.
- La potencia disipada en cada resistencia.



- $R_1 = 2\Omega$
- $R_2 = 1\Omega$
- $R_3 = 3\Omega$
- $R_4 = 4\Omega$
- $R_5 = 1\Omega$

SOLUCION:

En primer lugar, se deben proponer sentidos a las corrientes de cada rama y en base a estas corrientes, asignar polaridades a cada resistor.



Se observan sólo 2 nodos en el circuito (A y B); se pueden plantear entonces  $n - 1 = 1$  ecuaciones de corrientes.

Existen 3 ramas en el circuito y  $n - 1 = 1$  nodos independientes así que se pueden plantear  $3 - 1 = 2$  ecuaciones de voltajes.

En el nodo A:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (1)$$

En la malla I:

$$- R_1 i_1 - R_3 i_3 - R_4 i_1 + 10 = 0$$

$$(R_1 + R_4) i_1 + 0 i_2 + R_3 i_3 = 10$$

sustituyendo los valores de los resistores

$$6 i_1 + 0 i_2 + 3 i_3 = 10 \quad (2)$$

En la malla II:

$$- R_2 i_2 - 6 - R_5 i_2 + R_3 i_3 = 0$$

$$0 i_1 - (R_2 + R_5) i_2 + R_3 i_3 = 6$$

$$0 i_1 - 2 i_2 + 3 i_3 = 6 \quad (3)$$

Resolviendo simultáneamente (1), (2) y (3)

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$6 i_1 + 0 i_2 + 3 i_3 = 10$$

$$0 i_1 - 2 i_2 + 3 i_3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 & -(-6) \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 18 & -0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -12 & -0 \end{bmatrix}$$
$$= 6 + 18 + 12 = 36$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 10 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{36} = -(-1) \cdot \frac{[30 - 18] - 1[-20 - 0]}{36} = \frac{12 + 20}{36} = \frac{32}{36} = 0.889$$

$$i_1 = 0.889 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & 10 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{36} = 1 \cdot \frac{[30 - 18] - 1[36 - 0]}{36} = \frac{12 - 36 - 24}{36} = -0.667$$

$$i_2 = -0.667 \text{ A}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1)

$$0.889 - (-0.667) = i_3$$

$$i_3 = 1.556 \text{ A}$$

a) La corriente que circula por:

- $R_1$  es  $i_1 = 0.889 \text{ A}$  y en la dirección propuesta (ver figura anterior).
- $R_2$  es  $i_2 = 0.667 \text{ A}$  pero en sentido opuesto al señalado en el diagrama correspondiente.
- $R_3$  es  $i_3 = 1.556 \text{ A}$  y en la dirección propuesta en el diagrama.

b) Las caídas o diferencias de potencial en cada resistor son:

- En  $R_1$  :  $V_1 = i_1 R_1 = (0.889) (2) = 1.778 \text{ V}$
- En  $R_2$  :  $V_2 = i_2 R_2 = (0.667) (1) = 0.667 \text{ V}$
- En  $R_3$  :  $V_3 = V_{ab} = i_3 R_3 = (1.556) (3) = 4.668 \text{ V}$
- En  $R_4$  :  $V_4 = i_1 R_4 = (0.889) (4) = 3.556 \text{ V}$
- En  $R_5$  :  $V_5 = i_2 R_5 = (0.667) (1) = 0.667 \text{ V}$



c) La potencia suministrada por cada fuente es:

- En la de 10V :  $P_e = V i_1 = 10(0.889) = 8.89 \text{ W}$

- En la de 6V :  $P_e = V i_2 = 6(0.667) = \underline{4.0 \text{ W}}$

Potencia total suministrada al circuito = 12.89 W

d) La potencia disipada en los resistores es:

- En  $R_1$   $P_{e_1} = R_1 i_1^2 = (2) (0.889)^2 = 1.58 \text{ W}$

- En  $R_2$   $P_{e_2} = R_2 i_2^2 = (1) (0.667)^2 = 0.445 \text{ W}$

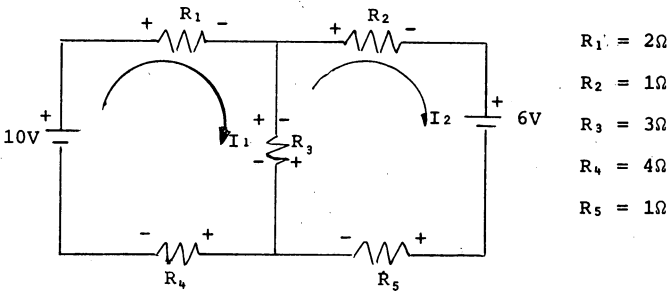
- En  $R_3$   $P_{e_3} = R_3 i_3^2 = (3) (1.556)^2 = 7.263 \text{ W}$

- En  $R_4$   $P_{e_4} = R_4 i_1^2 = (4) (0.889)^2 = 3.161 \text{ W}$

- En  $R_5$   $P_{e_5} = R_5 i_2^2 = (1) (0.667)^2 = \underline{0.445 \text{ W}}$

Potencia total disipada = 12.89 W

Bien, existe otro método para analizar circuitos eléctricos llamado Ecuaciones de Malla o Método de Maxwell; a continuación se presenta un ejemplo de este método utilizando el mismo circuito del ejemplo 6.4



1. Se asigna un sentido (horario o antihorario) a la corriente que circula por cada malla.
2. De acuerdo con el sentido asignado a las corrientes de malla, se deben considerar las polaridades de los elementos eléctricos (en este caso, el de los resistores únicamente, ya que las fuentes tienen una polaridad invariante o fija).
3. Se suman algebraicamente las diferencias de potencial a lo largo de toda la malla de la misma forma que en la LVK, pero en este caso con una sola corriente (la de la malla). Debe tenerse cuidado al tomar las polaridades de los resistores de las ramas comunes, ya que en éstos se aplicará el principio de superposición para obtener la diferencia de potencial como la suma de los efectos de cada una de las corrientes.

Solución al problema de la figura anterior por el método de Maxwell o de las mallas.

Para la malla cuya corriente es  $I_1$ :

$$10 - R_1 I_1 - R_3 I_1 + R_3 I_2 - R_4 I_1 = 0$$

sustituyendo valores y reordenando términos

$$9 I_1 - 3 I_2 = 10 \quad (1)$$

para la malla cuya corriente es  $I_2$ :

$$-6 - R_5 I_2 - R_3 I_2 + R_3 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

nuevamente, sustituyendo valores y reordenando términos

$$3 I_1 - 5 I_2 = 6 \quad (2)$$

resolviendo simultáneamente (1) y (2):

$$9 I_1 - 3 I_2 = 10$$

$$3 I_1 - 5 I_2 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -45 + 9 = -36$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}}{-36} = \frac{-50 + 18}{-36} = 0.889 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-36} = \frac{54 - 30}{-36} = -0.667 \text{ A}$$

Si se observa la figura anterior y además se recuerda el sentido de las corrientes de rama, se puede plantear lo siguiente:

$$I_1 = i_1 = 0.889 \text{ A}$$

$$I_2 = i_2 = 0.667 \text{ A en sentido contrario al planteado en el diagrama}$$

$$I_1 - I_2 = i_3$$

$$0.889 - (-0.667) = 1.556 \text{ A} = i_3$$

Los demás incisos se resuelven idénticamente al planteamiento anterior.

## CAPITULO VII

### MAGNETISMO

#### INTRODUCCION

El contacto original que tuvo la humanidad con el magnetismo fue varios siglos antes de nuestra Era, con la percepción de que ciertas rocas poseían la característica de atraer trozos de hierro. A estas rocas se les llama imanes.

Ahora se sabe que esas rocas tienen en general la fórmula  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  y que representan combinaciones en proporciones diversas de los dos óxidos de hierro que se conocen:  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  y  $\text{FeO}$ .

La palabra magnetismo tiene su origen en la región de Magnesia, una ciudad del Asia Menor que es particularmente rica en estos minerales.

Algunos siglos antes de la Era Cristiana los chinos sabían que las rocas "magnéticas" tenían la habilidad de transmitir su característica a los cuerpos que atraían. Esto quiere decir que el carácter magnético es transmisible.

Esta virtud puede comprobarse fácilmente si se toma un imán y con él se atrae algún material ferroso, un clavo por ejemplo. Si al clavo adherido al imán se le acerca otro clavo se observa que este último se adhiere al primero, formando una especie de cadena que puede seguirse extendiendo si se aproximan más clavos. Ahora bien, si se separa un clavo de esta "cadena magnética" y se aproxima a algún metal ferromagnético, se observa que el clavo se ha transformado a su vez en un imán.

Los imanes "fabricados" de esta manera conservan su carácter magnético durante un período de tiempo más o menos largo, dependiendo de su constitución química. A estos imanes se les llama inducidos para diferenciarlos de los imanes que los generan los cuales son imanes naturales o permanentes.

Otro conocimiento que poseían los antiguos chinos es el de la orientación que sufren los imanes. Esto se observa fácilmente de varias maneras. Por ejemplo, tómese una aguja imantada colgada en su centro mediante un hilo; al dejársele suelta suspendida por el mismo, se observa que comienza a girar, hasta que su cuerpo se alinea en una dirección determinada. Si se alinea la aguja arbitrariamente en otra dirección y se deja libre, entonces la aguja volverá rápidamente a su posición original de equilibrio. (Nota: la aguja deberá ser imantada longitudinalmente).

Esta dirección con la cual se alinea la aguja magnetizada coincide con la dirección geográfica norte - sur.

Ya en el siglo VII esta característica de los imanes era aprovechada por los navegantes para orientarse en las situaciones de escasa visibilidad, cuando no era posible observar al sol o a los astros.

Ahora, se sabe que cuando se acercan dos barras imantadas y se sujeta firmemente una dejando suelta a la segunda, esta última se alinea con la primera. Si a cada extremo de las barras se les asignan los nombres de NORTE y SUR respectivamente, dicha alineación se dará cuando el extremo norte de la barra móvil apunte en la misma dirección que el norte de la barra fija.

Conociendo esta evidencia experimental parece sencillo deducir que la aguja imantada de una brújula se alinea en la dirección de un imán

mayor y que, este imán mayor está representado por la tierra. Esta deducción sin embargo se dió hasta el siglo XVI en que William Gilbert, quien era el médico de la corte de Isabel I de Inglaterra, demostró que la tierra era un gran imán. Este imán tiene dos polos: uno norte y otro sur, con la característica que el polo norte geográfico corresponde al polo sur magnético y el polo sur geográfico corresponde al polo norte magnético.

Al igual que en el caso electrostático, en los imanes también se origina un campo, llamado Campo Magnético. La observación de las líneas de campo entre los polos de una barra magnética, se logra situando al imán por debajo de una hoja de papel encerado y espolvoreando limadura de hierro sobre dicho papel. La limadura se orienta de acuerdo al campo magnético de una manera idéntica a la del campo eléctrico, polos distintos (N - S) se atraen y polos iguales se rechazan (N - N o S - S)

Para perpetuar la configuración que toma la limadura basta con calentar el papel y posteriormente, al enfriarse la cera, quedará fija la configuración del campo magnético.

Debe observarse una diferencia notable entre el caso eléctrico y el magnético: en el caso de la barra imantada se tienen siempre dos polos mientras que, en el caso de la carga eléctrica se puede tener uno solo.

Todos los intentos de separar los dos polos magnéticos de la misma barra han fracasado hasta ahora.

Esto se comprueba fácilmente partiendo a la barra magnética por la mitad: se observa que en cada nuevo trozo se manifiestan también dos polos, uno norte y uno sur; y si se procede a cortar nuevamente cada trozo, se observa que la barra resultante vuelve a presentar dos polos y así indefinidamente.

Se dice entonces que toda barra magnética está formada por un dipolo magnético, cuyas líneas de fuerza son del todo similares - con las líneas de fuerza de un dipolo eléctrico.

A pesar de esta analogía, se consideraba al magnetismo como una rama de la Física independiente de las otras. No fué sino hasta el siglo XIX en que se descubrió que el magnetismo está íntimamente relacionado con la electricidad.

#### EXPERIMENTO DE OERSTED

En 1820 el físico danés A. Oersted observó por primera vez, en forma casual, que una brújula situada cerca de un cable portador de corriente eléctrica era influenciada por éste.

Si se deja a la brújula orientarse libremente, sus extremos se alinean en la dirección norte - sur (geográfica). Si se sitúa el cable conductor en la dirección de la brújula, ésta no se perturba hasta que se haga pasar corriente por el conductor.

Cuando esto ocurre, la aguja de la brújula se orienta en la dirección perpendicular al cable. (Véase la figura 7.1.b.)

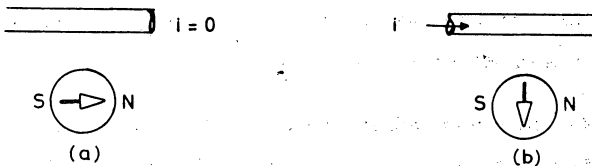


Fig. 7.1

Puesto que los imanes se orientan según las líneas de campo magnético -pensó Oersted- el paso de corriente por un conductor debe generar esas líneas.

Además, el campo magnético generado por el paso de la corriente es bastante más intenso que el de la tierra ya que la aguja de la brújula cambiaba su orientación inicial.

Repitiendo el experimento de Oersted, se puede encontrar otro resultado interesante que tiene que ver con la dirección de las líneas de campo magnético generadas por la corriente eléctrica.

En el siguiente dibujo se observa un conductor a través del cual se hace circular corriente. En (a) se observa la sección transversal de conductor: el punto indica la punta de la flecha que tiene la dirección de la corriente. En (b) se observa la sección transversal del conductor, en donde la X representa la cola de la flecha que apunta en la dirección de la corriente.

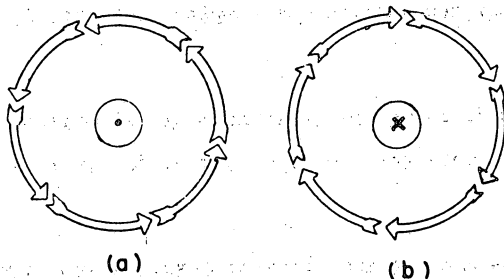


Fig. 7.2. La orientación de las flechas corresponde a la de algunas brújulas que se colocaran alrededor de los conductores.

Como se aprecia, la orientación de las brújulas se invierte en



cada caso: en (a) tienen la dirección contraria a las manecillas del reloj y en (b) su dirección coincide con las mismas.

Como las brújulas se orientan según las líneas de campo magnético, se concluye que la dirección de estas líneas es función de la dirección que tenga la corriente.

Para encontrar la dirección de las líneas de campo magnético generadas por un alambre conductor que transporta una corriente  $i$ , tóme se el alambre con la mano derecha, haciendo que el pulgar apunte en la dirección de la corriente. Entonces, los otros dedos curvados alrededor del conductor darán la dirección de las líneas de campo magnético.

Esta regla se llama la de la mano derecha y el lector la puede comprobar en las figuras 7.1 y 7.2.

#### EL CAMPO MAGNETICO

Al igual que en el caso gravitacional y electrostático, también en el magnético existen fuerzas que permiten detectar la existencia de un campo.

En el caso del campo gravitacional, al colocar una masa en dicho campo, ésta experimenta una fuerza de atracción hacia la masa de mayor tamaño.

En el caso del campo electrostático, al colocar una carga en dicho campo ésta experimentará una fuerza en la dirección del campo eléctrico si es positiva y en dirección opuesta si la carga es negativa.

Finalmente, al observarse como actúa un campo magnético se verá que éste no se detecta si se coloca en dicho campo una carga eléctrica en reposo; es decir, una carga estática no experimentará ninguna fuerza al ser

colocada en un campo magnético ya que la interacción magnética está íntimamente asociada con el movimiento de las cargas.

Para conocer la naturaleza del campo magnético, denotado con la letra B, se tiene que utilizar una carga de prueba móvil.

- Si se hace pasar una carga "q" por un punto dentro de un campo magnético con diferentes velocidades y, se realizan las mediciones convenientes, se encontrará que:

$$F_m \propto v \quad (7.a)$$

donde  $F_m$  es la fuerza de origen magnético  
y  $v$  es la velocidad de la carga q .

- Si ahora se mantiene la velocidad constante, pero variamos la magnitud de la carga, se encontrará que:

$$F_m \propto q \quad (7.b)$$

La magnitud de la fuerza es proporcional con la magnitud de la carga.

- Por último, se variará el campo magnético B manteniéndose constantes la velocidad y la carga. En este caso se encuentra que:

$$F_m \propto B \quad (7.c)$$

Combinando (7.a), (7.b) y (7.c) se tiene que:

$$F_m \propto q v B \quad (7.d)$$

De esta proporcionalidad se puede observar lo siguiente:

- $F_m$  y  $v$  son cantidades vectoriales y q, una magnitud escalar.
- Para conocer la naturaleza del campo magnético, analicemos lo que sucede experimentalmente.

Cuando una misma carga se hace pasar por el mismo punto dentro de un campo magnético, manteniendo constante la magnitud de su velocidad pero variando la dirección de ésta, se observan sobre la carga "q", fuerzas diferentes (en magnitud y dirección) e inclusive existe una dirección de esta velocidad para la cual dicha fuerza es cero, lo que también ocurre cuando la dirección de la velocidad es diametralmente opuesta.

Además, la dirección de la fuerza es siempre perpendicular a la dirección de la velocidad, lo que significa que "B" TIENE CARACTER VECTORIAL, ya que, si fuese de tipo escalar, la fuerza y la velocidad serían paralelas en cualquier punto, así que:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_m &= q \vec{v} \times \vec{B} \\ |\vec{F}_m| &= q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Despejando B de (7.1) y analizando unidades:

$$(B) = \frac{(F_m)}{(q) \cdot (v)} = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N \cdot s}{C \cdot m}$$

Multiplicando numerador y denominador por metros:

$$(B) = \frac{N \cdot s \cdot m}{C \cdot m^2} = \frac{J \cdot s}{C \cdot m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{Wb}{m^2} = T$$

donde Wb se conoce como weber en honor al físico alemán Wilhelm E. Weber (1804-1891) y es la unidad para medir flujo magnético. T, se conoce como tesla en honor al ingeniero norteamericano, nacido en Yugoslavia, Nicholas Tesla (1856 - 1943).

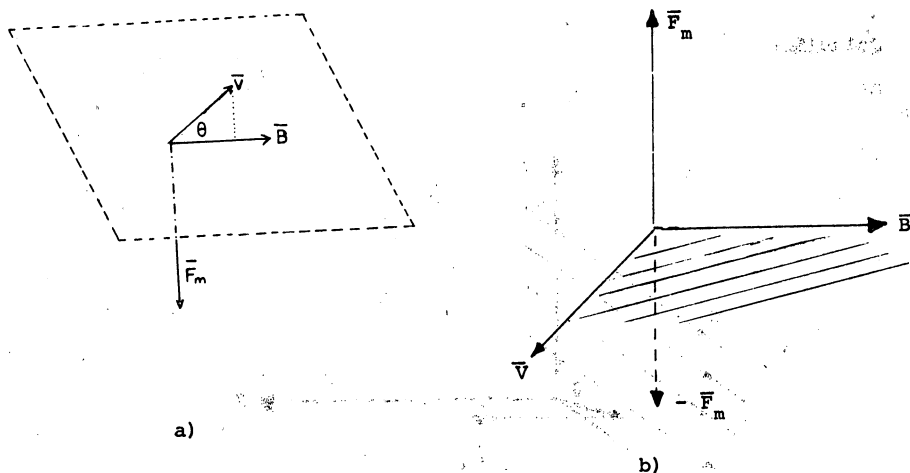


Fig. 7.3  $\vec{F}_m$  es perpendicular al plano formado por  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ .

La dirección de  $\vec{F}_m$  se determina mediante alguna regla para el producto vectorial  $\vec{v} \times \vec{B}$ ; por ejemplo, si se hace girar el vector  $\vec{v}$  hacia el vector  $\vec{B}$  (en ambos casos de la figura 7.3), un tornillo de rosca derecha avanzará en la dirección de  $\vec{F}_m$  como se muestra en la figura 7.3.a) y 7.3.b).

NOTA: Esta regla es aplicable cuando la carga "q" es positiva; en caso que "q" sea negativa,  $\vec{F}_m$  es exactamente opuesta como se muestra en la figura 7.3 (b).

**Ejemplo 7.1**

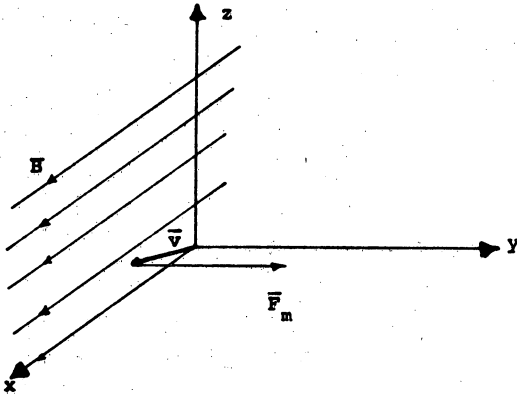
Una partícula alfa (cuya carga es  $q_\alpha = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) se mueve con velocidad constante  $\vec{v} = (4 \hat{i} + 3 \hat{k}) \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  en un campo magnético  $\vec{B} = 6 \hat{i} \times 10^{-18} \text{ T}$

- a) Haga un diagrama cualitativo donde se observen los vectores  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{F}_m$ .

b) Calcule el vector fuerza magnética que experimenta la partícula.

Solución:

a)



$$\begin{aligned}
 \vec{F}_m &= q \vec{v} \times \vec{B} = 3.2 \times 10^{-19} (4 \hat{i} + 3 \hat{k}) \times (6 \hat{i}) 10^{-18} \\
 &= 3.2 \times 10^{-34} (18 \hat{j}) = 0.576 \times 10^{-32} \hat{j} \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$(\vec{F}_m) = C \cdot \frac{m}{s} \cdot T = C \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{W_b}{m^2} = C \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{V \cdot s}{m^2} = C \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{N \cdot m \cdot s}{C \cdot m^2}$$

$$(\vec{F}_m) = N$$

Hasta este momento se ha mencionado la existencia de un cierto campo magnético e incluso se ha comentado que cualquier partícula cargada en movimiento produce un campo magnético, sin embargo no se ha definido propiamente qué es o, en función de qué variables se pue de expresar.

Una definición categórica de lo que es el campo magnético inducido, es decir, el campo magnético que se induce por el movimiento de cargas, es el siguiente:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (7.2)$$

donde:

- $\vec{B}$  Es el campo magnético inducido
- $c$  Es la velocidad de la luz
- $\vec{v}$  Es la velocidad de la carga que induce el campo magnético
- $\vec{E}$  Es el campo eléctrico que produce la carga en movimiento

Desde luego, la expresión (7.2) ha sido el resultado de numerosas experiencias de laboratorio y se ha establecido para velocidades de partículas cargadas, mucho menores que la velocidad de la luz.

#### FLUJO MAGNETICO

El flujo magnético al igual que el flujo eléctrico (visto en el capítulo V), se define según la expresión:

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (7.3)$$

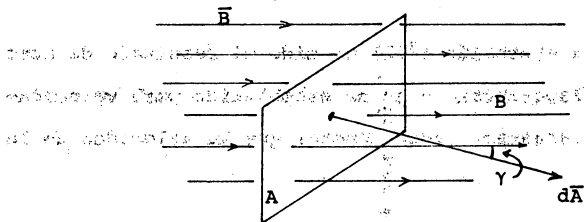
esto es, líneas de campo magnético que atraviesan perpendicularmente una superficie determinada.

El flujo magnético es de particular importancia debido a que el funcionamiento de bobinas, motores, generados, transformadores, solenoides, relevadores, etc. está fundamentado en la variación del flujo magnético con respecto al tiempo. Es común, incluso, referirse a la inducción magnética "B" como, densidad de flujo magnético.

A continuación se analizarán 3 casos de interés en la aplicación de la ecuación (7.3):

1.- Si el campo  $\vec{B}$  es constante en toda el área pero NO perpendicular a ella, entonces el flujo se calculará mediante:

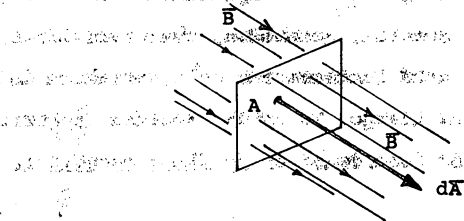
$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B \, dA \cos \gamma = B A \cos \gamma \quad (7.3.1)$$



2.- Líneas de campo NO perpendicular al área A

2.- Si  $\vec{B}$  es constante en toda el área y además paralelo al vector  $d\vec{A}$ :

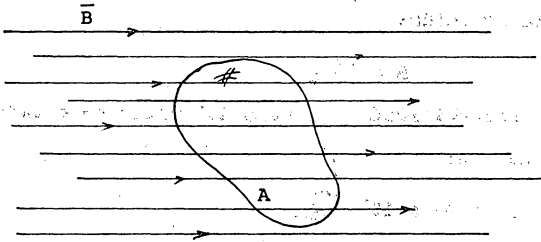
$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B \, dA \cos 0^\circ = BA \left( \frac{W}{m^2} \right) \quad (7.3.2)$$



3.- Si  $\vec{B}$  es variable o constante pero, el cálculo del flujo se efectúa a través de una superficie cerrada, dicho flujo será cero.

Esto es:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (7.4)$$



Esta ecuación (7.4) es conocida como la Ley de Gauss para el magnetismo y viene a corroborar la inexistencia de monopolos magnéticos aislados. (para mayor aclaración de este punto, le recomendamos consultar la bibliografía correspondiente).

#### LEY DE AMPERE

André Marie Ampère (1775-1836), quien hizo contribuciones importantes al Electromagnetismo, realizó algunos experimentos de inducción magnética a raíz de las publicaciones de Oersted (1820).

Descubrió que la corriente que circula por un conductor, induce un campo magnético proporcional a dicha corriente

$$B \propto i$$

además entre más cerca se esté del conductor, más intenso será el campo B.

$$B \propto \frac{1}{r} \quad (\text{proporción inversa})$$



Estas relaciones entre campo - corriente y campo - distancia, se pueden agrupar en:

$$B \propto \frac{1}{r}$$

y ajustando una constante de proporcionalidad a la expresión anterior (que para el Sistema Internacional de Medidas será:  $\frac{\mu_0}{2\pi}$ ), la proporción se convierte en la ecuación:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \quad (7.5)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío cuyo valor y unidades respectivamente son:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{W_b}{A \cdot m}$$

a su vez, el análisis de unidades de la ecuación (7.5) será:

$$(B) = \frac{W_b}{A \cdot m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W_b}{m^2} = T$$

Antes de continuar con el desarrollo de la Ley de Ampere, se comentará brevemente la clasificación de los materiales de acuerdo con el valor de su permeabilidad magnética ( $\mu$ ).

Tomando como referencia el valor de la permeabilidad magnética del vacío ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{W_b}{A \cdot m}$ ), los materiales son llamados:

- **DIAMAGNETICOS** cuando su permeabilidad magnética es menor que  $\mu_0$  (como ejemplo se puede mencionar al agua).
- **PARAMAGNETICOS** cuando su permeabilidad es ligeramente mayor que  $\mu_0$  (como ejemplo se puede mencionar al so dio).
- **FERROMAGNETICOS** cuando  $\mu \gg \mu_0$ , los materiales tales como Hierro, Gadolinio, Disprosio, Níquel, Cobalto y sus diversas aleaciones tienen una permeabi-

lidad magnética centenares o millares de veces mayor que  $\mu_0$ .

Ahora bien, regresando al análisis de la ecuación (7.5) se puede decir que, por el tipo de dependencia radial de la inducción magnética alrededor de un cierto conductor, la magnitud de  $\vec{B}$  es constante sobre un círculo de radio  $r$  centrado sobre el eje del conductor.

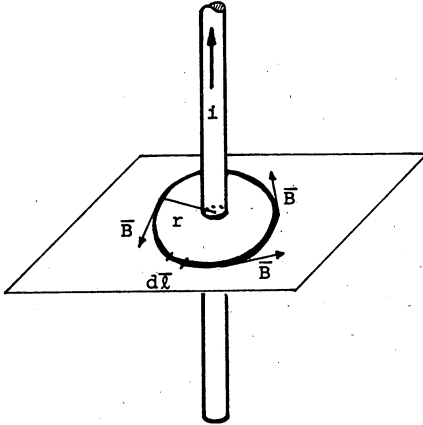


Figura 7.4 Campo magnético inducido por la corriente que circula por un conductor.

Esta situación permite establecer una integral de  $\vec{B}$  en torno a una trayectoria circular cerrada como se ve en la figura 7.4

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0}{2\pi r} dl$$

El ángulo formado por  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  es cero ya que en cualquier punto de la trayectoria los 2 vectores son paralelos, además  $\mu_0$ ,  $i$  y  $r$  son independientes de la variable "l" así que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \oint dl$$

donde  $\oint dl$  es justamente el valor de la circunferencia de radio  $r$ .

$$\oint dl = 2\pi r$$

Así pues:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_n \quad (7.6)$$

Esta expresión se conoce como la LEY DE AMPERE y quiere decir que si se evalúa la integral de  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  a lo largo de una trayectoria cerrada (sea circular o no), el resultado será el valor de  $\mu_0$  multiplicada por el valor de la corriente neta encerrada por dicha trayectoria.

Por ejemplo, si 3 conductores se encuentran alojados en un tubo conduit, 2 de ellos transportan corriente en un mismo sentido ( $i_1 = 3.5A$ ,  $i_2 = 7.9A$ ) y el otro en sentido contrario ( $i_3 = 5A$ ) la corriente neta sera  $i_n = 6.4A$ . Y si se quiere calcular el campo magnético que se induce a una distancia radial (del tubo conduit) de 30 cm, éste se podrá calcular mediante la Ley de Ampere de la siguiente manera:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_n$$

$r = 30\text{cm}$  es una magnitud constante,  $\vec{B}$  también lo es, así que

$$B \oint dl = \mu_0 i_n$$

$$\oint dl = 2\pi r$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i_n$$

$$B = \frac{\mu_0 i_n}{2\pi r} \text{ expresión que era de esperarse ya}$$

que se había mencionado como la ecuación (7.3).

$$r = 0.30 \text{ m}$$

$$i_n = 6.4 \text{ A}$$

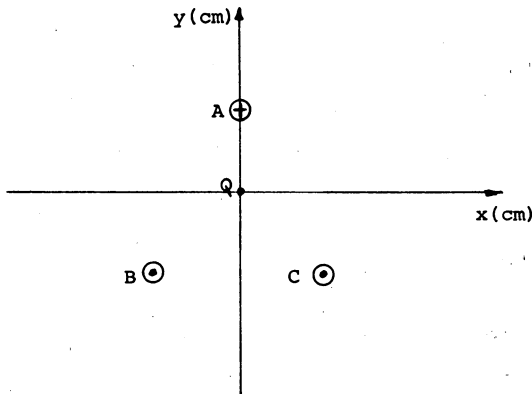
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

$$B = \frac{4 \times 10^{-7}}{2\pi} \frac{6.4}{0.30} = 4.2667 \mu\text{T}$$

$$(B) = \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T}.$$

### Ejemplo 7.2

Tres conductores rectos y paralelos entre sí, transportan cierta corriente eléctrica en dirección perpendicular al plano de la hoja. Se desea calcular el campo magnético resultante en el punto Q y el ángulo que forma con la horizontal.



$$A(0, 5) \quad i_A = 2 \text{ A}$$

$$B(-5, -5) \quad i_B = 4 \text{ A}$$

$$C(5, -5) \quad i_C = 6 \text{ A}$$

Solución:

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  , es la distancia del punto Q a cada uno de los conductores.

Para el conductor A ;  $r = 5$  cm

Para el conductor B ;  $r = \sqrt{50} = 7.07$  cm

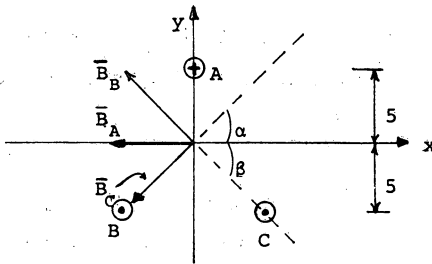
Para el conductor C ;  $r = \sqrt{50} = 7.07$  cm

$$B_A = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{2\pi \times 0.05} = 0.8 \mu\text{T}$$

$$B_B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4}{2\pi \times 0.0707} = 11.315 \mu\text{T}$$

$$B_C = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 6}{2\pi \times 0.0707} = 16.973 \mu\text{T}$$

Aplicando la regla de la mano derecha, las direcciones de los campos parciales será como se muestra en la siguiente figura:



$$\alpha = \sin^{-1} \frac{5}{7.07} = 45^\circ$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{5}{7.07} = 45^\circ$$

y las componentes de  $\vec{B}_B$  y  $\vec{B}_C$  en las direcciones de los ejes x e y serán:

$$\vec{B}_{Bx} = -11.315 \cos 45^\circ = -8 \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_{By} = 11.315 \sin 45^\circ = 8 \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_{Cx} = -16.973 \cos 45^\circ = -12 \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_{Cy} = -16.973 \sin 45^\circ = -12 \mu\text{T}$$

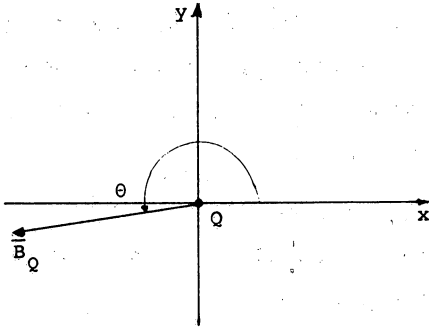
Por lo tanto:

$$\Sigma \vec{B}_x = \vec{B}_A + \vec{B}_{Bx} + \vec{B}_{Cx} = -20.8 \hat{i} \mu\text{T}$$

$$\Sigma \vec{B}_y = \vec{B}_{By} + \vec{B}_{Cy} = -4 \hat{j} \mu\text{T}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{B_y}{B_x} = \tan^{-1} \frac{-4}{-20.8} = 10.89^\circ$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-20.8 \times 10^{-6})^2 + (-4 \times 10^{-6})^2} = 21.18 \times 10^{-6} \mu\text{T} \quad 190.89^\circ$$



#### BOBINA, SOLENOIDE Y TOROIDE

Una vez descubierto el efecto magnético que ocasionaba una corriente al circular por un conductor, se pensó en algunas disposiciones de dicho conductor para mejorar el efecto o multiplicarlo. Así, si uno dobla un conductor para formar un anillo o espira, el efecto magnético en el centro de dicha espira será mayor que el del conductor. (ver figura 7.5)

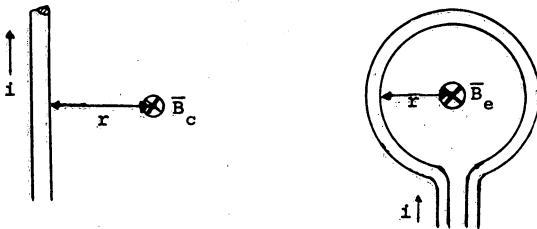


Fig. 7.5. El campo magnético  $\vec{B}_e$  es mayor que el  $\vec{B}_c$  para una  $r$  igual en los 2 casos.

La manera de calcular el campo magnético de inducción en el centro de la espira será:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r} \quad (7.7)$$

La deducción de esta expresión no es complicada pero quizá un poco laboriosa por lo que, los autores han preferido no desviar la atención del lector y continuar con las aplicaciones del fenómeno de inducción magnética.

Bien, pensamos ahora que se puede seguir doblando o "devanando" el conductor para formar N espiras, de esta manera se multiplicará el efecto por un factor N. Esto es:

$$B = N \frac{\mu_0 i}{2r} \quad (7.8)$$

expresión válida para calcular el campo magnético en el centro de una bobina (ver figura 7.6.a).

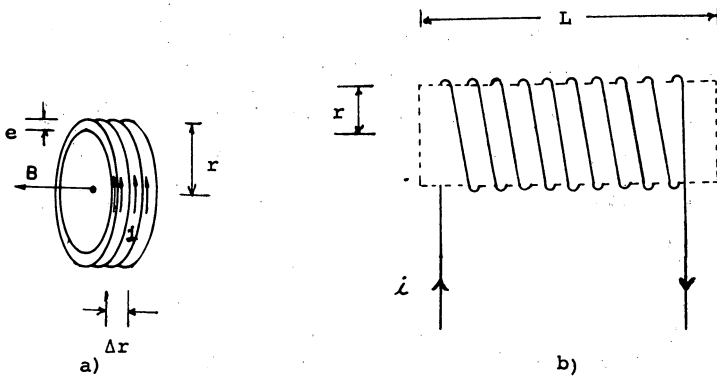


Fig. 7.6. a) Bobina b) Solenoide

Para aclarar la diferencia entre bobina y solenoide se puede decir que la 1a. es un conjunto de espiras, necesariamente con un aislamiento en su superficie que cumple con las siguientes desigualdades:

$$\Delta r \ll r \quad e \ll r$$

en cambio para el solenoide se debe cumplir con:

$$r \ll L$$

Estas desigualdades tienen validez cuando se cumple al menos una relación de 10 a 1, esto es:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \Delta r \leq r \\ 10 e \leq r \end{array} \right\} \text{ para la bobina}$$

y  $10 r \leq L$  para el solenoide

Aplicamos la ley de Ampere al solenoide que aparece en la figura 7.7 esto es,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_n$

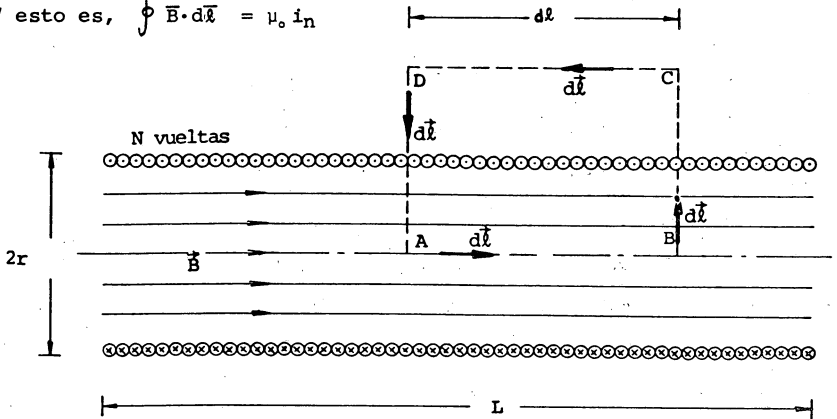


Fig. 7.7 Sección longitudinal de un solenoide.

la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  se puede descomponer en las integrales parciales:

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad \text{y para facilitar el cálculo}$$



lo de estas integrales es conveniente establecer las siguientes consideraciones:

- El campo magnético en el interior del solenoide es uniforme.
- El campo magnético en el exterior es despreciable en comparación con el interior.

De acuerdo con esto, el resultado de cada una de las integrales será:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B L && \text{ya que } \vec{B} \text{ es constante y paralelo a } d\vec{l} \\ \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 0 && \text{porque } \vec{B} \text{ es perpendicular a } d\vec{l} \\ \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 0 && \text{debido a que } \vec{B} = 0 \\ \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 0 && \text{porque } \vec{B} \text{ es perpendicular a } d\vec{l} \\ \therefore \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B L = \mu_0 i_n \end{aligned}$$

donde  $i_n$  es igual a la corriente  $i$  que circula por cada espira multiplicada por  $N$  espiras.

$$B L = \mu_0 i N$$

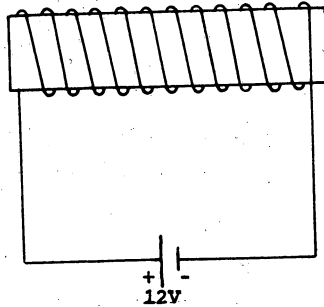
$$B = \frac{\mu_0 i N}{L} \quad (7.9)$$

Expresión utilizada para calcular el campo magnético inducido por un solenoide en su interior y con núcleo de aire.

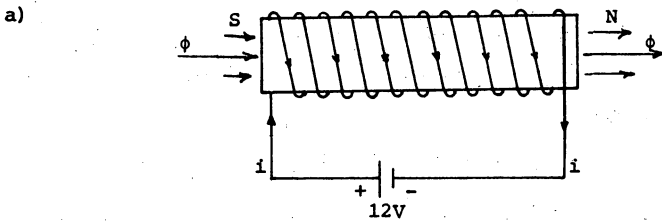
### Ejemplo 7.3

Un solenoide de 314.16 cm de longitud y 2 cm de radio está formado por 4000 espiras devanadas uniformemente. La resistencia total del solenoide es de 8 ohms y se conecta a una batería de 12 V como se muestra en la figura.

- Indique el sentido del flujo magnético así como el polo norte y sur del electroimán.
- Calcule la inducción magnética  $B$  en el centro del solenoide.
- Determine el flujo magnético en una sección del centro del solenoide.



Solución:



b)  $B = \frac{\mu_0 i N}{L}$  ;

$$V = R i$$

$$i = \frac{V}{R}$$

$$i = \frac{12}{8} = 1.5 \text{ A}$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4000 \times 1.5}{3.1416} = 2.4 \text{ } \mu\text{T}$$

$$(B) = \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T}$$

c)  $\phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B A = 2.4 \times 10^{-6} (\pi \times (0.02)^2)$

$$\phi = 3.01 \times 10^{-9} \text{ Wb}$$

Las aplicaciones que tienen los solenoides son más versátiles que aquellas de los imanes permanentes. Sus ventajas son:

- a) La intensidad del campo magnético se puede hacer casi tan grande como se quiera.
- b) El campo magnético se anula a voluntad suprimiendo la corriente que se hace circular.

En particular se mencionarán dos aplicaciones:

- i) los solenoides se pueden emplear para conformar una grúa magnética, capaz de levantar grandes pesos de materiales ferrosos. Cuando la corriente circula, el solenoide posee un campo magnético suficientemente intenso para elevar y transportar esos materiales. Para depositar el metal cargado, se interrumpe la corriente y cesa la atracción al cortarse el campo magnético.
  
- ii) En los edificios de departamentos se acostumbra mantener la puerta cerrada, pero se cuenta con un mecanismo que permite a los inquilinos abrirla desde sus respectivos departamentos. La parte esencial de este dispositivo es un solenoide como se esquematiza en la figura 7.8.

Cuando se hace circular corriente por el solenoide se induce un campo magnético que atrae la placa metálica M y que es capaz de vencer la resistencia del resorte R. En este caso la placa se mueve desatorando la puerta (7.8.b). Cuando se ha entrado se elimina el paso de la corriente y cesa el campo magnético; el resorte jala a la placa metálica a la posición en que la puerta se cierra (7.8.a).

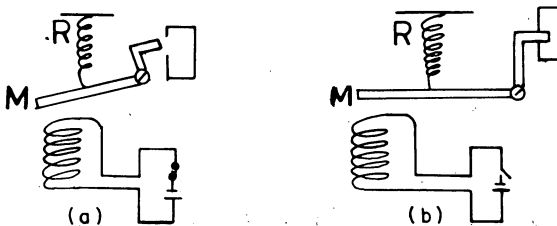


Fig. 7.8. Aplicaciones de los electroimanes.

### TOROIDE

Otro dispositivo que también es empleado, para inducir campos magnéticos es el toroide o bobina anular; se puede ver como el caso límite en que se tome un solenoide y se hace que coincidan sus extremos N-S.

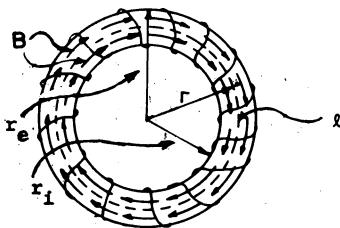


Fig. 7.9. Toroide de sección circular y radio medio  $r$ .

Por razones de simetría, el campo magnético generado por el toroide se encuentra encerrado en el anulo comprendido entre las circunferencias de radios  $r_i$  y  $r_e$ .

Para conocer el valor del campo magnético  $B$  generado por una bobina anular o toroide de radio medio  $r$  ( $r_i < r < r_e$ ), que transporta una corriente  $i$  y que se encuentra devanada uniformemente con  $N$  vueltas, se aplica la Ley de Ampere:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_n$$

El recorrido que se va a seguir está representado por la línea punteada de radio  $r$ , así que

$$dl = 2 \pi r$$

y como  $B$  es constante en el interior del toroide para una  $i$  también constante:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_n$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i_n = \mu_0 N i$$

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r} \quad (7.10)$$

La ecuación 7.10 muestra la analogía con un solenoide, pues  $2\pi r$  es justamente la longitud  $L$  de un solenoide que se enrolla.

#### EJEMPLO 7.4

En una región toroidal que tiene un diámetro medio de 20 cm, se enrollan dos devanados de  $N_1 = 800$  espiras y  $N_2 = 300$  espiras.

Determine el valor de la inducción magnética  $B$  en el centro de la región anular si:

- Los devanados tienen una conexión aditiva, y
- Los devanados están en oposición, la corriente que circula en ambos casos por los devanados es 5 amperes.

SOLUCION:

- a)  $r = D/2 = 10$  cm ;  $N_1 = 800$  ;  $N_2 = 300$ ,  $i = 5$  A. Como la conexión es aditiva el resultado es el de un devanado de  $N_1 + N_2 = 800 + 300 = 1100$  espiras.

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r}$$

$$B = 4 \pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}} \times 1100 \times 5 \text{ A} \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{0.1 \text{ m}} = 1.1 \times 10^{-2} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

- b) Con los devanados en oposición, la dirección del campo magnético generado por un devanado es la contraria a la del campo magnético generado por el otro devanado; sea  $B_1$  generado por  $N_1$  y  $B_2$  generado por  $N_2$ :

$$B_R = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 N_1 i}{2 \pi r} - \frac{\mu_0 N_2 i}{2 \pi r}$$

$$B_R = \frac{\mu_0 i (N_1 - N_2)}{2\pi r}$$

$$B_R = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A-m}} \times 5\text{A} (800 - 300) \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{0.1\text{m}} = 5 \times 10^{-3} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

$$B_R = 5 \text{ m T}$$

Antes de concluir esta sección es necesario establecer que todas las deducciones se han hecho suponiendo que el espacio entre las espiras estaba vacío o con aire. La constante magnética  $\mu_0$  empleada en los resultados corresponde al vacío, pero en la realidad las bobinas y toroides tienen un núcleo de material ferromagnético el cual tiene un valor de permeabilidad magnética centenas o millares de veces mayor que  $\mu_0$ .

Esta característica la presentan el hierro, el cobalto, el níquel, el gadolinio, el disprosio y un gran número de sus aleaciones.

Sean  $B_0$  y  $B$  los valores para el vacío y para un núcleo determinado. Se llama *permeabilidad relativa* ( $k_m$ ) de la sustancia al cociente de:

$$\frac{B}{B_0} = k_m \quad ; \quad B_0 = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}$$

$$B = B_0 k_m = k_m \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}$$

El producto ( $k_m \cdot \mu_0$ ) se denomina, permeabilidad de la sustancia.

$$k_m \mu_0 = \mu \quad (7.11)$$

Algunas sustancias como el aire, el aluminio, etc. Tienen un valor de permeabilidad magnética muy semejante a  $\mu_0$ .

Todas las deducciones de esta sección también se aplican a los casos en que los enrollamientos se hagan en torno a núcleos de materiales ferromagnéticos, simplemente se sustituye  $\mu_0$  por  $\mu$  del material en cuestión.

## INDUCCION ELECTROMAGNETICA

A partir del descubrimiento de la inducción magnética, es decir, la generación de un campo magnético a partir de cargas eléctricas en movimiento, se pensó en una situación recíproca, un campo magnético que originara una corriente (cargas eléctricas en movimiento).

Dos investigadores notables realizaron experimentos al respecto y ambos llegaron a la misma conclusión, estos científicos fueron: Joseph Henry (1797-1878) de Estados Unidos y Michael Faraday (1791-1867) de Inglaterra, éste último descubre y publica la Ley de Inducción Electromagnética en 1831, sin embargo Joseph Henry hace el mismo descubrimiento en 1830 pero no lo publica sino hasta después de Faraday por lo que se le reconoce al inglés, el mérito de este descubrimiento.

Existe una gran variedad de experimentos en los que es posible detectar corrientes inducidas; a continuación se presentarán algunos de ellos.

1.- La figura 7.10 muestra un magneto de barra y una espira de alambre conductor con un vólmeter conectado a sus extremos.

Al existir un movimiento relativo entre magneto y espira, el vólmeter detecta una cierta diferencia de potencial (+ o -) que dependerá del polo (N o S) que se acerque a la espira y del movimiento relativo entre ambos.

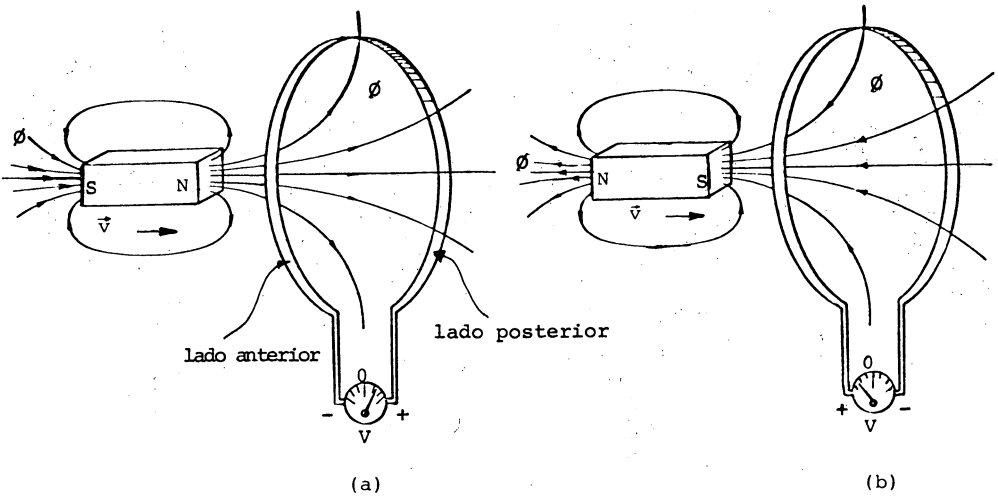


Figura 7.10 Movimiento relativo entre magneto y espira que origina una diferencia de potencial.

2.- Nuevamente, de acuerdo con la descripción de este experimento se observará la inducción de una fuerza electromotriz entre los extremos de la espira. En lugar del magneto se tiene ahora un electroimán y la espira es quien se desplaza acercándose al so lenoide. Para cambiar la polaridad del solenoide, simplemente se hace circular a la corriente por el devanado en sentido inverso (figura 7.11).



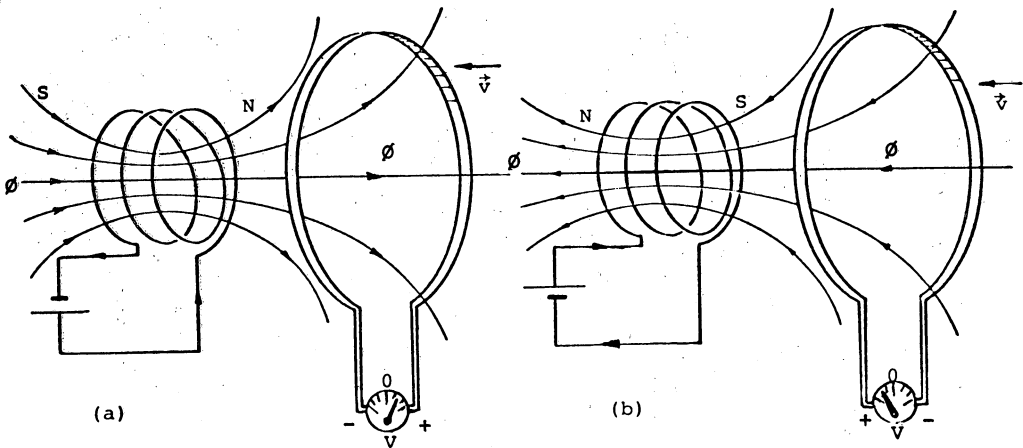


Figura 7.11 a) La espira se acerca al polo norte del electroimán.

b) Se cambia el sentido de la corriente del electroimán y ahora, la espira se acerca al polo sur.

3.- El tercer experimento se tiene cuando, al abrir y cerrar alternativamente un interruptor en el circuito del solenoide, también se detecta una fem inducida en la espira. En este caso no hay movimiento relativo entre espira y electroimán.

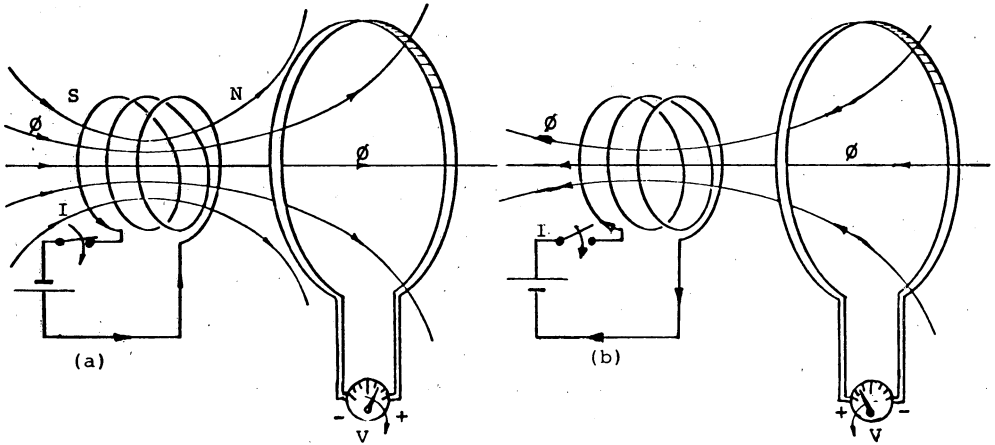


Figura 7.12 Fuerza electromotriz inducida que se presenta en la espira al variar la corriente en el electroimán.

Se podía pensar en un principio que la fuerza electromotriz inducida, se debía exclusivamente al movimiento relativo entre el dispositivo que produce el campo magnético y la espira, pero con el tercer experimento esta tesis no tendría validez.

Aunque los tres experimentos descritos son diferentes, en todos ellos existe una causa común que origina la fuerza electromotriz inducida en la espira y ésta es que, *el flujo que atraviesa a la espira es variable con respecto al tiempo.*

Este efecto producido en una sola espira, se verá multiplicado por un factor  $N$  si en lugar de la espira se usa un devanado que enlace o concatene el flujo que varía con respecto al tiempo.

Expresando matemáticamente la relación entre (la causa) la rapidez de cambio del flujo concatenado ( $N \Phi = \lambda$ ) y la fuerza electromotriz inducida (el efecto), se obtiene la Ley de inducción de Faraday:

$$\epsilon_i = - \frac{d\lambda}{dt} = - \frac{d(N \Phi)}{dt} \quad (7.11)$$

La fuerza electromotriz inducida es originada por la variación del flujo concatenado con respecto al tiempo.

#### PRINCIPIO DE LENZ

Hasta ahora se ha analizado solamente la magnitud de la fem inducida con la Ley de Faraday por lo cual hace falta conocer el sentido de  $\epsilon_i$  o el sentido de la corriente inducida si el circuito o espira donde se induce la fem es cerrado.

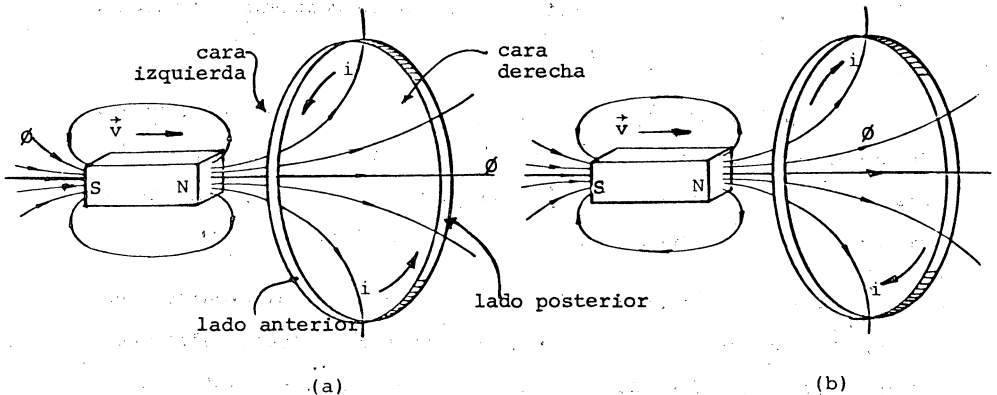


Figura 7.13 Sentido de la corriente inducida .

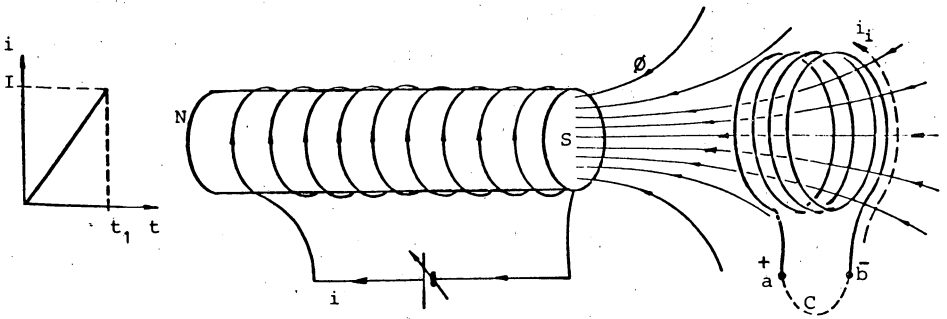


Figura 7.14 Dirección de la fem inducida

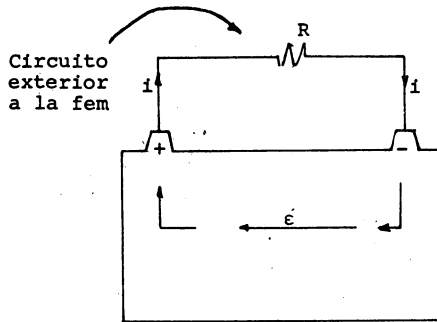


Figura 7.15 Dirección de la fem en su interior.

### GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA

El generador eléctrico toma diferentes formas, pero todas ellas tienen en común la propiedad de convertir energía mecánica en energía eléctrica. Los generadores que se discutirán en esta sección, dependen para su funcionamiento de la Ley de Faraday.

El generador de corriente alterna consta de una bobina de  $N$  vueltas que gira dentro de un campo magnético uniforme. Debido a las variaciones del flujo magnético concatenado por las espiras, en las terminales del embobinado se presenta una fem inducida que, por medio de anillos conductores y escobillas puede ser conectado a un circuito externo a la bobina, ver figura 7.16

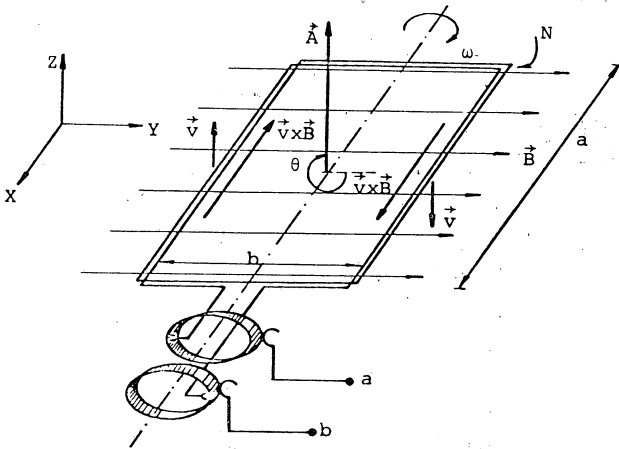


Figura 7.16 Generador de corriente alterna o alternador.

Analicemos lo que sucede al acercar el extremo norte de un imán a una espira cerrada (fig. 7.13), si se supone que el sentido de la corriente inducida es el mostrado en 7.13 a) implica que *la cara izquierda* de la espira se comporta como polo sur magnético y, debido a la atracción entre polos diferentes, esta fuerza sería capaz de desplazar al imán desarrollando un trabajo. Por otra parte, la espira posee cierta resistencia y al circular por ella una corriente eléctrica, existirá una disipación de energía en forma de calor. Más aún, si pensamos que el experimento se lleva a cabo en el vacío no habrá fricción y la fuerza magnética aceleraría al imán produciendo una corriente inducida cada vez mayor, y todo esto *gratuitamente* sin invertir más que un ligero impulso al imán.

Lo anterior viola la Primera Ley de la Termodinámica o principio de conservación de la energía por lo cual, regresando a nuestra suposición inicial, observamos que el sentido de la corriente supuesta está equivocada.

Supongamos ahora que el sentido de la corriente inducida es el de la figura 7.13 b), *la cara izquierda* de la espira se comporta como un polo norte magnético de tal forma que se opone a que se acerque el imán. Visto de otra manera, se opone a que se incremente el flujo que atraviesa a la espira ya que si alejara dicho imán, entonces la corriente inducida tendría tal sentido que se opondría a que disminuyera el flujo.

En estas condiciones, será necesario aplicar una fuerza externa que contrarreste dicha repulsión y permita mover al imán con velocidad constante. Dicha fuerza desarrollaría un trabajo sobre el

imán y en ausencia de efectos disipativos (fricciones), este trabajo sería igual a la energía disipada en forma de calor en la espira, ya que son las únicas transformaciones de energía que ocurren en el fenómeno.

De lo argumentado en los párrafos anteriores, se deduce que *el sentido de la corriente o fem inducida debe ser tal, que se oponga a la causa que la produce.*

Este enunciado se conoce como principio de Lenz en honor al físico germano - estoniano Heinrich F. E. Lenz (1804-1865) quién realizó los mismos experimentos que Henry y Faraday en 1834.

Aplicando el principio de Lenz a la ecuación (7.11) ésta que dará como

$$\epsilon_i = - \frac{d\lambda}{dt} \quad (7.12)$$

Quando un embobinado experimenta una variación en su flujo concatenado ( $\lambda$ ) y no tiene unidas sus terminales, esto es, que no puede circular corriente por sus espiras, sólo se presenta una fem inducida entre sus terminales cuya polaridad se logra saber mediante la aplicación del principio de Lenz. Imaginemos que las terminales (a y b) son unidas por un conductor, siendo la terminal de mayor potencial eléctrico (+) aquella por la cual saldría la corriente para circular por el conductor imaginario (ver figura 7.14).

Para reafirmar lo dicho anteriormente, obsérvese la figura 7.15 donde la fuente de fuerza electromotriz tiene una dirección  $+ \rightarrow -$  en el circuito externo a dicha fem y en el interior de ella la dirección es  $- \rightarrow +$  que es la dirección de la fem inducida en la figura 7.14 .

De acuerdo a la ecuación (7.12), la fem inducida en el alterador será:

$$\epsilon_i = - N \frac{d\phi}{dt}$$

y como el flujo magnético a través de cada espira para una posición cualquiera  $\theta$  del embobinado esta dado por la expresión:

$$\phi = \frac{\vec{B} \cdot d\vec{A}}{A} = \frac{B}{A} dA \cos \theta$$

la cual en este caso es

$$\phi = B A \cos \theta$$

por lo que

$$\epsilon_i = - N \frac{d(B A \cos \theta)}{dt}$$

$$\epsilon_i = - N B A (-\text{sen } \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

donde  $\frac{d\theta}{dt}$  es la velocidad angular ( $\omega$ ) del embobinado

$$V_{ab} = \epsilon_i = N B A \omega \text{ sen } \theta \tag{7.13}$$

$$V_{ba} = - N B A \omega \text{ sen } \theta$$

En la siguiente figura se muestra la fem inducida y la variación del flujo magnético cuando el embobinado gira con velocidad angular constante.

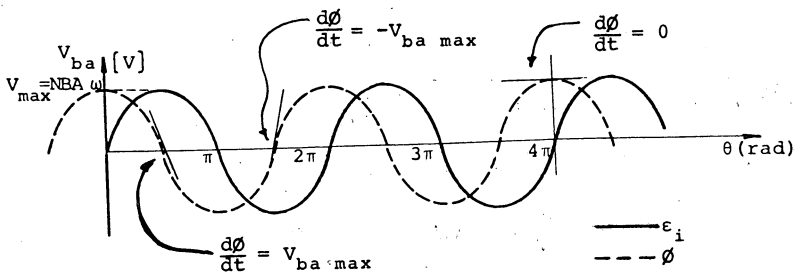


Figura 7.17  $\epsilon_i$  traslapada con  $\phi$



Observe de la figura 7.17 lo siguiente:

- La curva de  $\phi$  esta defasada  $\pi/2$  de la curva de  $\epsilon_i$  por ser funciones del coseno y seno respectivamente.
- El valor de la  $\epsilon_i$  es cero precisamente cuando coincide con la cresta de  $\phi$  ya que en ese punto  $\frac{d\phi}{dt} = 0$
- Los puntos de mayor potencial (positivo y negativo respectivamente) en la curva de  $\epsilon_i$ , coinciden con el valor máximo de la pendiente en la curva de  $\phi$ .

### Ejemplo 7.5

Determinar la fuerza electromotriz inducida que se genera en un alternador cuyo embobinado consta de 200 espiras rectangulares de 10 x 15 cm, que gira a 3600 RPM y se encuentra dentro de un campo magnético constante de 0.21 teslas de dirección perpendicular al eje de giro.

Solución:

Haciendo uso de la ecuación (7.13)

$$\epsilon_i = N B A \omega \text{ sen } \theta$$

$$N = 200$$

$$B = 0.21 \text{ T}$$

$$A = 0.1 \times 0.15 = 0.015 \text{ m}^2$$

$$\omega = 3600 \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} = 3600 \frac{2\pi}{\text{min}} \times \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{s}} = 120 \frac{\pi}{\text{s}}$$

$$N B A \omega = 200 \times 0.21 \times 0.015 \times 120 \pi = 237.5 \text{ V}$$

$$\text{vueltas} \cdot \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{wb}}{\text{s}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{s}} = \text{V}$$

$$\theta = \omega t = 120\pi t.$$

$$\epsilon_i = 237.5 \text{ sen } 120\pi t.$$

### Generador de Corriente Directa.

Una modificación en los anillos y escobillas del alternador de la figura 7.16 permite obtener una fem inducida de corriente directa, ver figura 7.18.a.)

Al eliminar uno de los anillos y seccionar en 2 partes iguales al restante, se evitan los semiciclos negativos obteniéndose una fem de corriente directa como la de la figura 7.18.b).

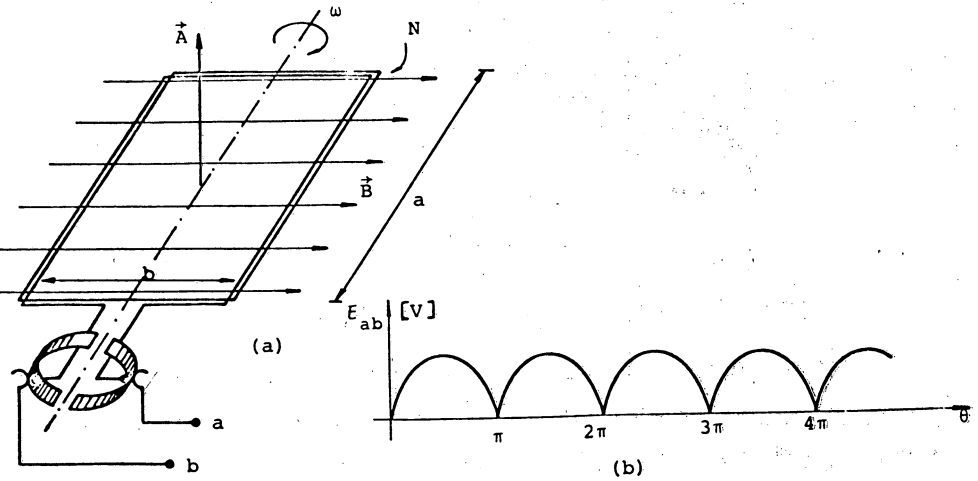


Fig. 7.18. a) Generador de corriente directa.

b) Fuerza electromotriz inducida de corriente directa.

Motor de Corriente Directa

Supóngase que hay una bobina en medio de un campo magnético y se hace circular por cada una de las espiras una corriente  $i$  (ver figura 7.19).

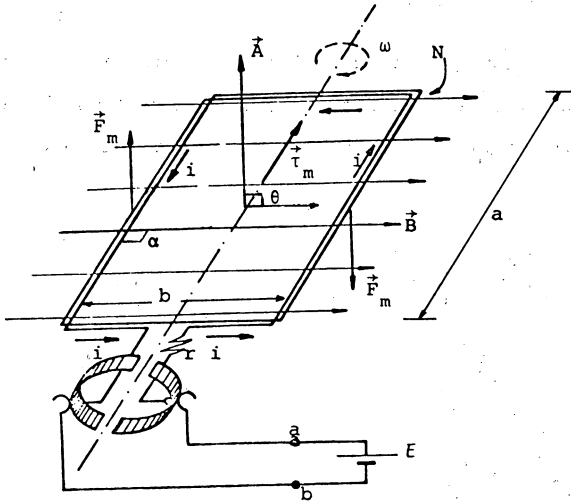


Figura 7.19 Motor de corriente directa

Dicha corriente hará que los conductores del embobinado experimenten fuerzas de origen magnético de acuerdo con la ecuación (7.14) cuya deducción se presenta a continuación:

Recordando la expresión  $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$

y analizando las unidades del producto

$$(q \vec{v}) = C \cdot \frac{m}{s} = \frac{C}{s} \cdot m = A \cdot m$$

éstas nos indican que dicho producto puede cambiarse por una corriente multiplicada por una longitud, esto es:

$$\vec{F}_m = i \vec{l} \times \vec{B} \tag{7.14}$$

donde la dirección de  $\vec{l}$  será de acuerdo con el sentido de  $i$ .

Una vez establecida la expresión 7.14 y recordando la regla del producto vectorial (en este caso  $\vec{l} \times \vec{B}$ ), se observará que un tornillo de rosca derecha avanzará en la misma dirección que el par de fuerzas  $\vec{F}_m$ , originándose un momento ( $\tau$ ) que hace girar a la bobina (rotor).

Para una espira:

$$\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F}_m$$

$$\tau = b F_m \text{ sen } \alpha$$

además

$$|\vec{F}_m| = i |\vec{l} \times \vec{B}| = i l B \text{ sen } \theta$$

donde  $l = a$  de acuerdo con la figura 7.19.

$$\tau = b (i a B \text{ sen } \theta) \text{ sen } \alpha$$

como  $\alpha = 90^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$  (ver figura 7.19)

el momento generado en esa posición geométrica, es máximo

$$\tau_{\text{max}} = b i a B$$

$$A = b a \quad \text{área de la bobina}$$

$$\tau_{\text{max}} = i A B$$

Es claro que esta situación se da cuando los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares entre sí pero, en general el valor de  $\tau$  dependerá de la posición relativa entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es decir, del ángulo que forman.

$$\tau = i A B \text{ sen } \theta$$

o bien 
$$\vec{\tau} = i \vec{A} \times \vec{B}$$

Para  $N$  espiras, la expresión del momento generado en la bobina del rotor será:

$$\vec{\tau} = N i \vec{A} \times \vec{B}$$

(7.15)

$$\tau_{\text{max}} = N i A B$$

Ejemplo 7.6

Un motor de corriente directa tiene un devanado de 100 espiras en su rotor. Dichas espiras son rectangulares de 20 cm de largo - por 15 cm de ancho, el alambre es de cobre ( $\rho = 1.771 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ ), de  $4mm^2$  de sección transversal. Si la corriente que circula por ella es de 9 A y el campo magnético en el que se encuentra es de 0.3 T, encuentre:

- El voltaje de alimentación si el motor desarrolla una potencia de 1.5 hp.
- El voltaje de la fuente
- El par máximo si  $\vec{B}$  es perpendicular al lado más largo de la bobina.
- El momento máximo que desarrolla el motor.
- La disipación de calor por unidad de tiempo en el devanado del motor.

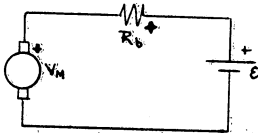
Solución:

$$a) \text{Pot} = V_M i \Rightarrow V_M = \frac{\text{Pot}}{i}$$

$$\text{Pot} = 1.5 \text{ hp} \times 0.7457 \frac{\text{kW}}{\text{hp}} = 1.1186 \text{ kW} = 1118.6 \text{ W}$$

$$V_M = \frac{1118.6}{9} = 124.29 \text{ V}$$

b)



$$V_M + R_b i - \epsilon = 0$$

$$R = \rho \frac{\ell}{A} = 1.771 \times 10^{-8} \times \frac{70}{4 \times 10^{-6}} = 0.3099 \Omega$$

$$\ell = 2(0.15 + 0.20) \cdot 100$$

$$R_b i = 0.3099 \times 9 = 2.7893 \text{ V}$$

$$\epsilon = 124.29 + 2.7893 = 127 \text{ V}$$

$$c) F_m = N i l B = 100 \times 9 \times 0.15 \times 0.3 = 40.5 \text{ N}$$

$$(F_m) = \text{vuel}tas \cdot A \cdot m \cdot T = A \cdot m \cdot \frac{Wb}{m^2} = \frac{A \cdot V \cdot s}{m} = \frac{W \cdot s}{m} = N$$

$$d) \tau_{\max} = N i A B = F_m (0.20) = 8.1 \text{ J}$$

$$e) \dot{Q} = P_e = R_b i^2 = 0.3099 (9)^2 = 25.1019 \text{ W}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. ALONSO, M., FINN, E., "FISICA, VOL. I, MECANICA"  
Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1970  
Traducido por Hernández, C. y La Torre, V.
2. ALVARADO, C.A.A. y JARAMILLO, M. G.A.  
Apuntes de Electricidad y Magnetismo  
1a. Edición  
Ed. Facultad de Ingeniería, UNAM  
México 1983
3. ANDALUZ, J. I. JARAMILLO, G. A., LARIOS, J. E., MARTINEZ, R., SANCHEZ, J.A.  
SANDOVAL, H., TREVIÑO, V., "APUNTES DE TERMODINAMICA"  
3era. edición  
Ed. Facultad de Ingeniería, U. N. A. M., México, 1979.
4. BENT, H. A., "THE SECOND LAW"  
Ed. Oxford University Press, 1965
5. BRILLOUEN, LEON, "LA INFORMACION Y LA INCERTIDUMBRE EN LA CIENCIA"  
1a. edición  
Ed. U.N.A.M., México 1969
6. EISBERG R. M. and LERNER L.S.  
PHYSICS, FOUNDATIONS AND APPLICATIONS VOLUME II  
Ed. Mc. Graw Hill Book Company  
U.S.A. 1981
7. EVDOKIMOV, F. E., "FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA ELECTROTECNIA"  
Ed. Mir, 1978  
Traducido por Grdan, Akop
8. FAIRES, VIRGIL MORING, "TERMODINAMICA"  
2a. edición  
Ed. Uthea, México, 1978
9. FERMI, E., "THERMODYNAMICS"  
Ed. Dover, 1956
10. FOX, R. W., Mc DONALD, A. T., "INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS"  
2nd. edition.  
Ed. John Wiley And Sons, 1978
11. GARCIA-COLIN, L., "INTRODUCCION A LA TERMODINAMICA CLASICA"  
2a. edición  
Ed. Trillas, 1980
12. HOLMAN, J. P., "THERMODYNAMICS"  
2nd. edition  
Ed. Mc Graw-Hill, 1974
13. KEENAN, J. K., "THERMODYNAMICS"  
Ed. M. I. T. Press, 1970 (Originally Published By John Wiley And Sons,  
1941)
14. KESTIN, J., "A COURSE IN THERMODYNAMICS"  
Revised Printing, Ed. Hemisphere Co., 1979

15. KIP, ARTHUR F., "FUNDAMENTALS OF ELECTRICITY AND MAGNETISM"  
2nd. Edition  
Ed. Mc. Graw-Hill, 1969
16. MCKELVEY, J. P., GROTCHE, H., "FISICA PARA CIENCIAS E INGENIERIA"  
Ed. Harla, 1981
17. MODELL, M., REID, R. C., "THERMODYNAMICS AND ITS APPLICATIONS"  
Ed. Prentice-Hall, 1974
18. REYNOLDS, W. C., PERKINS, H. C., "INGENIERIA TERMODINAMICA"  
Ed. Mc. Graw-Hill, 1980  
Traducido por CORRAL, F. R. Revisado por HERCE VIGIL, J. L
19. RESNICK, R., HALLIDAY, D., "FISICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERIA"  
Ed. C. E.C.S.A. 5ta. impresión, 1972  
Traducido por MOSQUEIRA, S.
20. SEARS, F. W., ZEMANSKY, M. W., "FISICA GENERAL"  
10a. Impresión, Ed. AGUILAR  
Traducido por YUSTA, A.
21. SOMMERFELD, A., "THERMODYNAMICS AND STATISTICAL MECHANICS"  
from the Lectures on Theoretical Physics, Vol. V  
Ed. Academic Press, 1965  
Traduced by KESTIN, J
22. WARK, K., "THERMODYNAMICS"  
3ra. edición  
Ed. Mc Graw-Hill, 1977
23. WHITE, F. M., "FLUID MECHANICS"  
Ed. Mc Graw-Hill, 1979
24. WEIDNER, R. T., SELLS, R. L., "ELEMENTOS DE FISICA CLASICA"  
Ed. Publicaciones Cultural, 1980
25. ZEMANSKY, M. W., "HEAT AND THERMODYNAMICS"  
5th. Edition  
Ed. Mc Graw-Hill, 1968



