"UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

# notas de cálculo integral

APUNTE
5-B

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.

G1.- 700796

*700796*

## CAPITULO 5

### LA INTEGRAL DEFINIDA

5.1 INTRODUCCION.- Considérese el siguiente ejemplo para desarrollar los conceptos de la integral indefinida.

Se pretende determinar el valor de un vitral de forma parabólica con las dimensiones indicadas en la figura - 5.1, sabiendo que está construido de cristal de plomo cuyo costo es $10,000.00 por metro cuadrado.

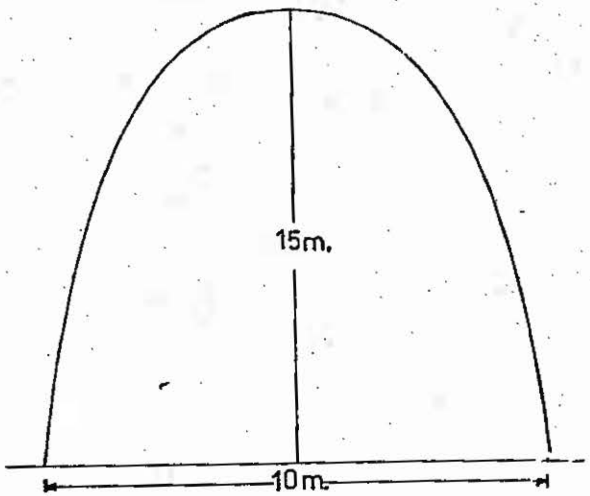



Figura 5.1

La persona encargada de calcular el precio, observa - que necesita primero determinar el área.

¿Cómo podrá determinar el área del vitral, en forma a proximada ? Algunas formas son las siguientes :

Una manera será calcular el área de un triángulo inscrito en la parábola.

Otra forma sera dividir el área en secciones y aproximarlas a trapecios.

Una más, es dividir el área en secciones y aproximarlos a rectángulos.

Para el fin que se persigue se escogerá la última manera, los rectángulos formados tocan a la curva como se ve en la figura 5.2. Son de dos tipos : los A, a los que llamarémos rectángulos interiores y los B, a los que se llaman rectángulos exteriores.

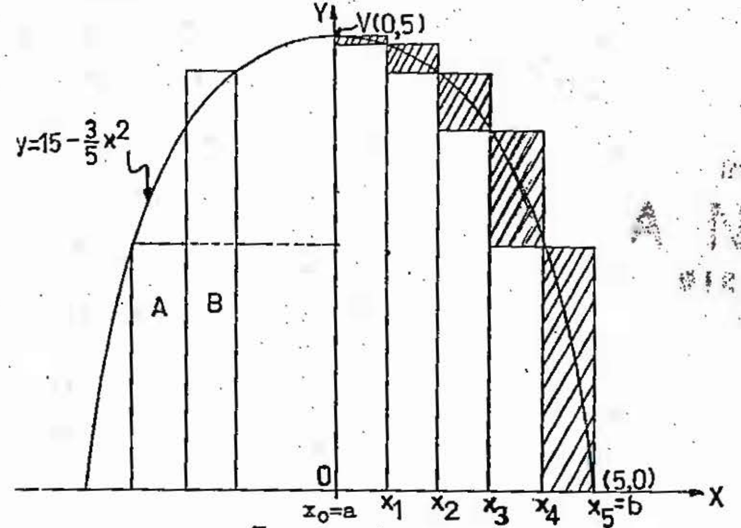



Figura 5.2

Obsérvese que dicha figura tiene como sistema de referencia el XY, de tal forma que el eje Y coincide con el eje d simetría; sujeto a dicho sistema se obtiene la ecuación que define a la parábola $f(x) = 15 - (3/5)x^2$.

Los rectángulos exteriores definen a una ecuación escalon-da que es mayor ó igual que la función que define a la parábola, en cambio los interiores determinan otra función escalonada que es menor que la de la parábola, por lo ...uede afirmar que el ár... exacta $A_t$ queda comprendi... ... las funciones escalonadas

Lo anterior puede expresarse como:

$$A_{int} \leqslant A_T \leqslant A_{ext} \qquad \ldots (1)$$

Donde $A_{int}$ es el área de todos los rectángulos interiores, y $A_{ext}$ es el área de todos los rectángulos exteriores.

5.2 PARTICION.

Como se observa en la figura 5.2, primero se divide el intervalo $[a,b]$ en n partes (que llamaremos sub-intervalos) no necesariamente iguales; por medio de los valores $x_0$, $x_1$, $\ldots, x_n$ donde $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. Estos valores de x determinan n sub-intervalos y no importa en que forma se escojan, siempre tendremos: $x_0 = a$, $x_n = b$. ver figura siguiente:

Sub-intervalo Típico

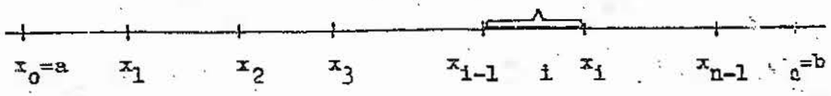



FIGURA 5.3

Los extremos del primer sub-intervalo son los puntos $x_0$ y $x_1$, los del siguiente $x_1$ y $x_2$, los extremos de un sub-intervalo típico son $x_{i-1}$ y $x_i$ (donde $i=1,2,\ldots,n$) con esto se puede establecer la siguiente:

> DEFINICION 5.1
>
> La partición P de un intervalo $[a,b]$ es la división de éste en n sub-intervalos.

$$P = \left\{ (x_i - x_{i-1}) \right\} = \left\{ (x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \ldots, (x_n - x_{n-1}) \right\}$$
$$= \{ \Delta$$

De la fig. 2 se observa que por simetría es suficiente calcular la mitad del área y multiplicar el resultado por dos para encontrar el área total, así tenemos:

Como primer intento divídase la mitad del área a calcular en cinco partes iguales como indica la figura 5.2.

A continuación, calcúlese las áreas exteriores e interiores.

La base de cada rectángulo será $x_1-x_0$, $x_2-x_1$, $x_3-x_2$, $x_4-x_3$ y $x_5-x_4$, y las alturas estarán dadas por:

Para los rectángulos exteriores: $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ $f(x_3)$ y $f(x_4)$.

Para los rectángulos interiores: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ $f(x_4)$ y $f(x_5)$.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} A_{ext} = f(x_0)(x_1-x_0) + f(x_1)(x_2-x_1) + f(x_2)(x_3-x_2) + f(x_3)(x_4-x_3) + f(x_4)(x_5-x_4) =$$

$$\frac{1}{2} A_{ext} = \sum_{i=1}^{5} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2} A_{int} = f(x_1)(x_1-x_0) + f(x_2)(x_2-x_1) + f(x_3)(x_3-x_2) + f(x_4)(x_4-x_3) + f(x_5)(x_5-x_4) =$$

$$\frac{1}{2} A_{int} = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), queda:

$$2\sum_{i=1}^{5} f(x_i)(x_i-x_{i-1}) \leqslant A_t \leqslant 2\sum_{i=1}^{5} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1}) \quad ..(4)$$

Los cálculos correspondientes se observan en la siguiente tabla, donde se han tomado por comodidad todas las bases de los rectángulos $x_i-x_{i-1}$ iguales a uno.

TABLA 1

| RECTANGULOS EXTERIORES | | | | | RECTANGULOS INTERIORES | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})$ | $x_i-x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f(x_i)(x_i-x_{i-1})$ |
| 1 | 0 | 15.0 | 1 | 15.0 | 1 | 14 | 14 |
| 2 | 1 | 14.4 | 1 | 14.4 | 2 | 12 | 12 |
| 3 | 2 | 12.6 | 1 | 12.6 | 3 | 9 | 9 |
| 4 | 3 | 9.6 | 1 | 9.6 | 4 | 5 | 5 |
| 5 | 4 | 5.4 | 1 | 5.4 | 5 | 0 | 0 |
| $\Sigma$ | - | - | 5 | 57 | - | - | 42.0 |

$$\tfrac{1}{2} A_{ext} = 57 \quad ; \quad \tfrac{1}{2} A_{int} = 42$$

$$A_{ext} = 2(57) = 114 \text{ m}^2 \quad ; \quad A_{int} = 2(42) = 84 \text{ m}^2$$

Con los valores anteriores se tiene una estimación del área, la cual debe satisfacer la desigualdad (1), esto es:

$$84 \text{ m}^2 \leqslant A_t \leqslant 114 \text{ m}^2$$

O sea, que el área buscada debe estar comprendida entre 84 y 114 $m^2$ y el precio del vitral $C_T$ está comprendido entre:

$$114 \times 10\,000 \geqslant C_T \geqslant 84 \times 10\,000$$

$$\$\,1\,140\,000 \geqslant C_T \geqslant \$\,840\,000$$

Como se observa, la diferencia \$ 300 000.00 entre ambos valores es muy grande, ¿Cómo podría aproximarse más al costo exacto ?

La respuesta es aproximar más el área a la exacta, y como se vé en la figura (2), la diferencia entre las áreas exterior e interior está representada por las áreas de los rectángulos sombreados, y para minimizar el error es necesario que las funciones escalonadas se aproximen mas a la función que define a la parábola, esto se logra si aumentamos el número de rectángulos.

Al aumentar el número de rectángulos, el error disminuye, y por lo tanto, se tendrá una diferencia menor para estimar el valor del área y por ende del costo. Haciendo los cálculos para media parábola, pero considerando 10 secciones rectangulares, todas de base igual a 0.5, se obtienen los valores anotados en la siguiente tabla:

TABLA 2

| RECTANGULOS EXTERIORES | | | | | RECTANGULOS INTERIORES | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})$ | $x_i-x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f(x_i)(x_i-x_{i-1})$ |
| 1 | 0 | 15 | 0.5 | 7.5 | 0.5 | 14.85 | 7.43 |
| 2 | 0.5 | 14.85 | " | 7.43 | 1.0 | 14.40 | 7.20 |
| 3 | 1.0 | 14.40 | " | 7.20 | 1.5 | 13.65 | 6.83 |
| 4 | 1.5 | 13.65 | " | 6.83 | 2.0 | 12.60 | 6.30 |
| 5 | 2.0 | 12.60 | " | 6.3 | 2.5 | 11.25 | 5.63 |
| 6 | 2.5 | 11.25 | " | 5.63 | 3.0 | 9.6 | 4.80 |
| 7 | 3.0 | 9.6 | " | 4.8 | 3.5 | 7.65 | 3.83 |
| 8 | 3.5 | 7.65 | " | 3.83 | 4.0 | 5.4 | 2.70 |
| 9 | 4.0 | 5.40 | " | 2.7 | 4.5 | 2.85 | 1.43 |
| 10 | 4.5 | 2.85 | " | 1.43 | 5.0 | 0.00 | 0.00 |

$$\tfrac{1}{2} A_{ext} = \sum_{i=1}^{10} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1}) = 53.65 \text{ m}^2$$

$$\tfrac{1}{2} A_{int} = \sum_{i=1}^{10} f(x_i)(x_i-x_{i-1}) = 46.15 \text{ m}^2$$

$$A_{ext} = 107.3\ m^2 \quad ; \quad A_{int} = 92.3\ m^2$$

sustituyendo estos valores en (1), se tiene:

$$92.3\ m^2 \leqslant A_t \leqslant 107.3\ m^2$$

y el costo $C_T$ estará comprendido entre:

$$\$1\ 073\ 000 \geqslant C_T \geqslant \$923\ 000$$

en este caso la diferencia es de \$150 000 y es la mitad de la anterior.

Con el objeto de disminuir el error decide hacer sus cálculos considerando ahora 20 secciones rectangulares de 0.25 de base, como se ilustra en la siguiente tabla:

TABLA 3

| i | $x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})$ | $x_i-x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f(x_i)(x_i-x_{i-1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 15.00 | 0.25 | 3.75 | 0.25 | 14.96 | 3.74 |
| 2 | 0.25 | 14.96 | " | 3.74 | 0.50 | 14.85 | 3.71 |
| 3 | 0.50 | 14.85 | " | 3.71 | 0.75 | 14.66 | 3.66 |
| 4 | 0.75 | 14.66 | " | 3.66 | 1.00 | 14.40 | 3.60 |
| 5 | 1.00 | 14.40 | " | 3.60 | 1.25 | 14.06 | 3.51 |
| 6 | 1.25 | 14.06 | " | 3.51 | 1.50 | 13.65 | 3.41 |
| 7 | 1.50 | 13.65 | " | 3.41 | 1.75 | 13.16 | 3.29 |
| 8 | 1.75 | 13.16 | " | 3.29 | 2.00 | 12.60 | 3.15 |
| 9 | 2.00 | 12.60 | " | 3.15 | 2.25 | 11.96 | 2.99 |
| 10 | 2.25 | 11.96 | " | 2.99 | 2.50 | 11.25 | 2.81 |
| 11 | 2.50 | 11.25 | " | 2.81 | 2.75 | 10.46 | 2.61 |
| 12 | 2.75 | 10.46 | " | 2.61 | 3.00 | 9.60 | 2.40 |
| 13 | 3.00 | 9.60 | " | 2.40 | 3.25 | 8.66 | 2.16 |
| 14 | 3.25 | 8.66 | " | 2.16 | 3.50 | 7.65 | 1.91 |
| 15 | 3.50 | 7.65 | " | 1.91 | 3.75 | 6.56 | 1.64 |
| 16 | 3.75 | 6.56 | " | 1.64 | 4.00 | 5.40 | 1.35 |
| 17 | 4.00 | 5.40 | " | 1.35 | 4.25 | 4.16 | 1.04 |
| 18 | 4.25 | 4.16 | " | 1.04 | 4.50 | 2.85 | 0.71 |
| 19 | 4.50 | 2.85 | " | 0.71 | 4.75 | 1.46 | 0.36 |
| 20 | 4.75 | 1.46 | " | 0.36 | 5.00 | 0 | 0 |
| | | $\frac{1}{2}A_{ext} = 51.8\ m^2$ | | | $\frac{1}{2}A_{int} = 48.05\ m^2$ | | |

$$A_{ext} = 103.6\ m^2 \quad , \quad A_{int} = 96.1\ m^2$$

Sustituyendo en (1), se tiene

$$96.1 \leqslant A_t \leqslant 103.6$$

y el costo $C_T$ estará comprendido entre:

$$\$1\ 036\ 000 \geqslant C_T \geqslant \$961\ 000$$

En este caso la diferencia es de \$75 000.00 y es bastante menor que los dos anteriores.

Comparando los valores obtenidos anteriormente, se observa que la diferencia disminuye conforme aumenta el número de rectangulos en que se dividió el área. ¿Existirá otra manera de formar los rectángulos ?

Se pueden formar los rectángulos tomando como altura la ordenada correspondiente a una abscisa que se encuentre en el punto medio de cada división como se muestra en la siguiente figura :

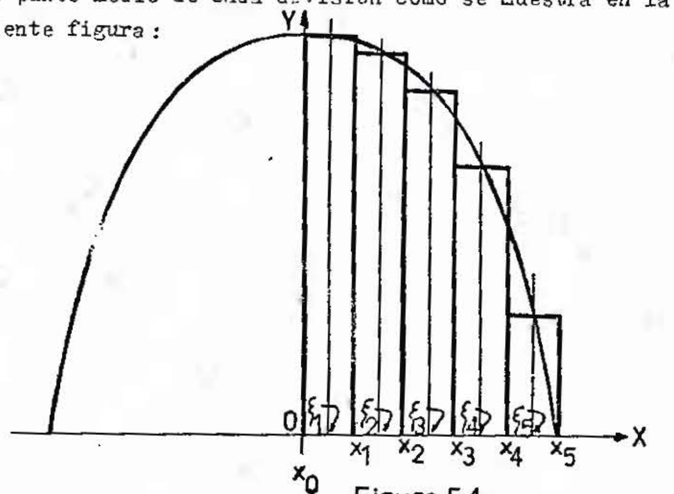



Figura 5.4

Para este caso :

$$\frac{1}{2}A_m = \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

Los cálculos correspondientes a 5, 10 y 20 secciones-rectangulares de este tipo son los que aparecen en las siguientes tablas; los cálculos se han efectuado para media-parábola y luego se han multiplicado por dos.

Las áreas y costos obtenidos se les llamará medios y se les representará por:

$$A_{media} \quad y \quad C_{medio}$$

Para el caso de 5 secciones rectangulares, se tiene

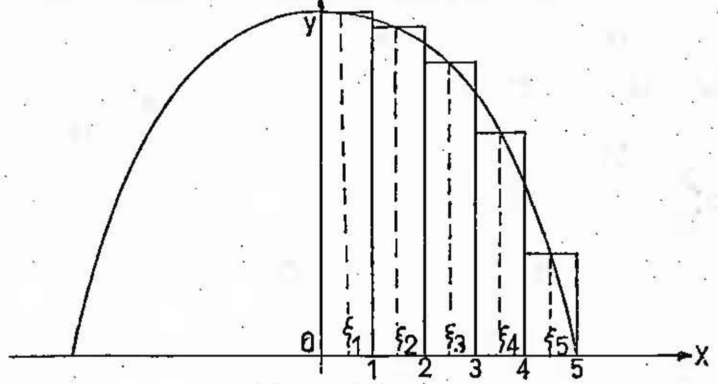



Figura 5.5

TABLA 4

| i | $\xi_i$ | $f(\xi_i)$ | $x_i-x_{i-1}$ | $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 14.85 | 1 | 14.85 |
| 2 | 1.5 | 13.65 | 1 | 13.65 |
| 3 | 2.5 | 11.25 | 1 | 11.25 |
| 4 | 3.5 | 7.65 | 1 | 7.65 |
| 5 | 4.5 | 2.85 | 1 | 2.85 |
| | | $\frac{1}{2}A_{media}$ | = | 50.25 $m^2$ |

Por tanto, el área media es:

$$A_{media} = 100.5 \ m^2$$

Y el costo medio es:

$$C_{medio} = \$1\ 005\ 000.00$$

Para el caso de 10 secciones rectangulares, se tiene:

TABLA 5

| i | $\xi_i$ | $f(\xi_i)$ | $x_i-x_{i-1}$ | $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.25 | 14.96 | 0.5 | 7.48 |
| 2 | 0.75 | 14.66 | " | 7.33 |
| 3 | 1.25 | 14.06 | " | 7.03 |
| 4 | 1.75 | 13.16 | " | 6.58 |
| 5 | 2.25 | 11.96 | " | 5.98 |
| 6 | 2.75 | 10.46 | " | 5.23 |
| 7 | 3.25 | 8.66 | " | 4.33 |
| 8 | 3.75 | 6.56 | " | 3.28 |
| 9 | 4.25 | 4.16 | " | 2.08 |
| 10 | 4.75 | 1.46 | " | 0.73 |
| | | $\frac{1}{2}A_{media}$ | = | 50.05 $m^2$ |

$$A_{media} = 100.1 \ m^2$$

Y el costo medio es:

$$C_{medio} = \$1\ 001\ 000.00$$

Para el caso de 20 secciones rectangulares, se tiene:

TABLA 6

| i | $\xi_i$ | $f(\xi_i)$ | $x_i - x_{i-1}$ | $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.125 | 14.99 | 0.250 | 3.75 |
| 2 | 0.375 | 14.91 | " | 3.73 |
| 3 | 0.625 | 14.76 | " | 3.69 |
| 4 | 0.875 | 14.54 | " | 3.63 |
| 5 | 1.125 | 14.24 | " | 3.56 |
| 6 | 1.375 | 13.86 | " | 3.47 |
| 7 | 1.625 | 13.41 | " | 3.35 |
| 8 | 1.875 | 12.89 | " | 3.22 |
| 9 | 2.125 | 12.29 | " | 3.07 |
| 10 | 2.375 | 11.61 | " | 2.90 |
| 11 | 2.625 | 10.86 | " | 2.71 |
| 12 | 2.875 | 10.04 | " | 2.51 |
| 13 | 3.125 | 9.14 | " | 2.28 |
| 14 | 3.375 | 8.16 | " | 2.04 |
| 15 | 3.625 | 7.11 | " | 1.78 |
| 16 | 3.875 | 5.99 | " | 1.50 |
| 17 | 4.125 | 4.79 | " | 1.20 |
| 18 | 4.375 | 3.52 | " | 0.88 |
| 19 | 4.625 | 2.17 | " | 0.54 |
| 20 | 4.875 | 0.74 | " | 0.185 |
| | | | $\frac{1}{2} A_{media}$ | $= 49.995 \text{ m}^2$ |

$$A_{media} = 99.990 \text{ m}^2$$

y el costo medio es:

$$C_{medio} = \$999\ 900.00$$

5.3 SUMA DE RIEMANN.

Hasta el momento, se calculó el área del vitral con alguna de las siguientes expresiones:

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$x_i,\ x_{i-1} \in [a,b] \quad ; \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Lo cual lleva a la siguiente:

DEFINICION 5.2.

A la expresión $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$ , donde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y f es una función contínua en el intervalo $[a,b]$ , se le llama "Suma de Riemann".

En la siguiente tabla se resumen los cálculos realizados.

TABLA 7

TABLA COMPARATIVA

| n | $A_{ext.}$ | $A_{int}$ | Dif: $A_{ext} - A_{int}$ | $A_{media}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 114.0 | 84.0 | 30.0 | 100.5 |
| 10 | 107.3 | 92.3 | 15.0 | 99.6 |
| 20 | 103.6 | 96.1 | 7.5 | 99.93 |

Como se observa en la Tabla 7 del desarrollo hecho hasta aquí, se concluye que para conseguir una mayor aproximación del área real hay que aumentar el número de rectángulos pudiendo hacer cientos o aún millares de ellos, con lo que la diferencia tiende a cero, lo que se expresa de la siguiente manera:

$$A_{ext} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$A_{int} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$A_{media} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Para $n = 100, 1000, 10000, \ldots$

La aseveración anterior es válida siempre y cuando las bases de todos los rectángulos tienden a ser menores cada vez que se hagan las subdivisiones.

Además, con lo visto se hace evidente que el límite de la suma de las áreas de estos rectángulos, cuando se aumenta indefinidamente su número y cuando todas bases tienden a cero, será igual el área $A_t$ bajo la curva.

A continuación, a las bases de los rectángulos se les representará como:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Por lo tanto, el área total será igual a:

$$A_T = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} A_{ext} = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$A_T = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} A_{int} = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$A_T = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} A_{media} = \lim_{\substack{\Delta x_i \to \infty \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

A continuación se hará el cálculo del área del vitral considerando rectángulos interiores de bases iguales:

$$\frac{1}{2} A_T = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (1)$$

Como la mitad de la parábola considerada está definida entre $x=0$ y $x=5$, al determinar n rectángulos de bases iguales, éstas quedan como:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{5}{n} \qquad (2)$$

Por lo tanto:

$$x_i = \frac{5}{n} i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (3)$$

sustituyendo $x_i$ en la ecuación de la parábola, se tiene:

$$f(x_i) = 15 - \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n} i\right)^2$$

$$= 15\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \qquad (4)$$

Sustituyendo (2) y (4) en (1), queda:

$$\frac{1}{2} A_T = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} 15\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{5}{n}$$

Aplicando las propiedades de la sumatoria y del límite se pueden sacar las constantes quedando:

$$\frac{1}{2} A_T = 75 \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{1}{n}$$

multiplicando y separando en dos sumatorias:

$$\frac{1}{2} A_T = 75 \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} \right)$$

Como n es constante para la sumatoria, se puede sacar de la misma

$$\frac{1}{2} A_T = 75 \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1) - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \right]$$

Por inducción matemática, se demuestra que:

$$\sum_{i=1}^{n} (1) = n \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2} A_T = 75 \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \left[ \frac{1}{n}(n) - \frac{1}{n^3} \left( \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \right) \right]$$

$$= 75 \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \left(1 - \frac{2 + 3/n + 1/n^2}{6}\right)$$

$$= 75 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 50$$

Por lo tanto,

$$A_t = 100 \text{ m}^2$$

Y el costo exacto es:

$$C_T = 100 \text{ m}^2 (10\,000) = \$1\,000\,000.00$$

EJEMPLO

Encontrar un valor de la Suma de Riemann para la función continua $y = f(x) = 1 + x$ en el intervalo cerrado - $[1,10]$

SOLUCION:

En este caso $[a,b] = [c,d]$ ; dividamos el intervalo en 9 subintervalos iguales, de amplitud 1, y construyamos una función escalonada, como se muestra en la figura siguiente:

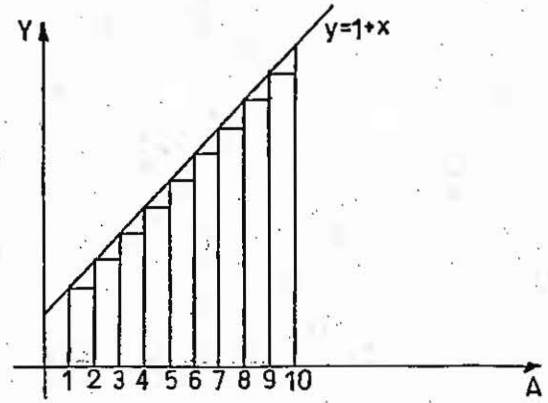



Figura 5.6

$$A_t = \sum_{i=1}^{9} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= 2(1) + 3(1) + 4(1) + \ldots + 10(1) = \underline{54}$$

Si el número de subintervalos fuera mayor, el resultado sería más aproximado al área bajo la curva.

EJEMPLO

Encontrar el área bajo la curva $y = x^2$ limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

SOLUCION:

Al intervalo $[0,2]$, con amplitud igual a $2-0 = 2$, dividámoslo en n subintervalos iguales $\Delta_i x = 2/n$ .......(1) entonces:

$$a = 0 < \frac{2}{n} < \frac{4}{n} < \frac{6}{n} < \cdots < \frac{2}{n} k, < \cdots < 2 = b$$

El area del k-ésimo rectángulo será:

$$A_k = f(\xi_k)\Delta_i x \quad ; \quad \text{Pero} \quad \xi_k = \frac{2}{n} k$$

por lo tanto $f(\xi_k) = f(\frac{2}{n} k)$ ; $A_k = f(\frac{2}{n} k)\Delta_i x$ ...(2)

como $f(x) = x^2$, entonces $f(\frac{2}{n} k) = \frac{4}{n^2} k^2$ ...(3)

Sustituyendo (1) y (3) en (2) queda:

$$A_k = \frac{4}{n^2} k^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} k^2$$

El área total será:

$$A_t = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n^3} k^2$$

pero $8/n^3$ es independiente de k por lo que puede salir de la sumatoria, quedando:

$$A_t = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{...(4)}$$

el problema ahora se reduce a encontrar el valor de:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

que por Inducción Matemática se puede demostrar que es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = A_k \quad \text{...(5)}$$

sustituyendo (5) en (4) queda:

$$A_t = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n^3} A_k \quad \text{...(6)}$$

desarrollando y simplificando se obtiene:

$$A_t = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

y cuando el número de subintervalos tiende a infinito, es decir $n = \infty$, obtenemos el valor exacto del área, así:

$$A_t = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = \frac{8}{3} + 0 + 0$$

$$A_t = 8/3$$

Ahora se formalizará el concepto del algoritmo de la suma, que se vió para el cálculo del costo del vitral.

## 5.4 NORMA.

Como ya se mencionó anteriormente, los subintervalos $\Delta x_i$ no necesariamente son iguales, por lo que existirá uno que es el mayor.

> Se define como "Norma" $(\Delta)$ de una partición (P) a la longitud del subintervalo mas grande $[x_i - x_{i-1}]$

Con la definición anterior se asegura que si $\Delta \to 0$ todos los demás subintervalos necesariamente tenderán a cero y el número de ellos tenderá a infinito.

A continuación se escoge un valor $\xi_1$ en cualquier parte del subintervalo $[x_0, x_1]$, un valor $\xi_2$ en cualquier parte del subintervalo $[x_1, x_2]$ y así sucesivamente.

## 5.5 FUNCION INTEGRABLE. INTEGRAL DEFINIDA.

En general el punto escogido en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se denotará por $\xi_i$ y con este valor se calcula el área bajo la curva a partir del área del i-ésimo rectángulo como sigue:

$$A_i = A_{i\ rect.} = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$$

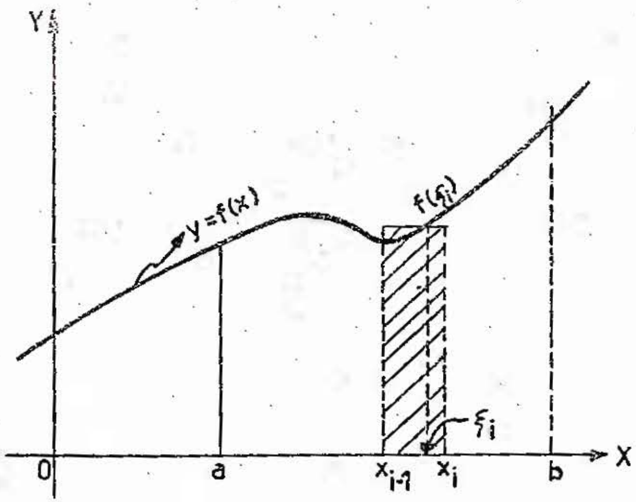



Figura 5.7

El área total viene dada por:

$$A_T = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\therefore \quad A_T = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (1)$$

Para que dicho límite exista, es necesario que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - A_T \right| < \varepsilon \qquad (2)$$

para todo $\varepsilon > 0$, por pequeño que éste sea existe un número $N > 0$ en que para todo $n > N$ se cumple (2).

Obsérvese que para obtener el área entre la curva $y = f(x)$, el eje X, y las rectas $x = a$, $x = b$, es necesario que toda $f(x) \geq 0$ ó que $f(x)$ esté considerada en valor absoluto. Lo que lleva a las siguientes definiciones:

DEFINICION 5.3

La función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ si:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x - L \right| < \varepsilon$$

Para todo número positivo $\varepsilon > 0$ por pequeño que sea.

$$\Delta_i x = \left| x_i - x_{i-1} \right| < \delta \qquad \text{para todo } \delta > 0$$

TEOREMA 5.1

Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces existirá

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x = L$$

DEFINICION 5.4

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, la Integral Definida está dada por:

$$L = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

y se le representa por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad , \qquad \text{es decir:}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

La integral definida se llama también integral de f(x) desde "a" hasta "b", donde:

a = límite inferior de la variable independiente
b = límite superior de la variable independiente
x = variable de integración
f(x) = función integrable.

EJEMPLO: Calcular el área entre la curva $y=4x^3$ y el eje X en el intervalo cerrado $[0,3]$.

SOLUCION: La representación gráfica del problema se muestra en la siguiente figura:

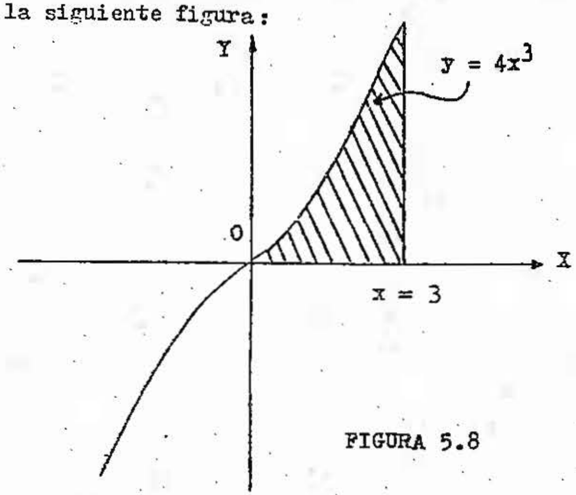



FIGURA 5.8

Para calcular el límite dado por (1), se requiere hacer lo siguiente:

Una partición del intervalo $[0,3]$ en n subintervalos

$$\Delta_i x = \frac{3}{n}$$

El rectángulo i-ésimo tiene una área

$$A_i = f(x_i)\,\Delta_i x \quad , \qquad \text{pero} \qquad \Delta_i x = \frac{3}{n}$$

Por lo tanto, $f(x_i) = f(\frac{3}{n} i)$ y así:

$$A_i = f(\tfrac{3}{n} i)\,\Delta_i x$$

Como $f(x) = 4x^3$, entonces:

$$f(\tfrac{3}{n} i) = 4(\tfrac{3}{n} i)^3$$

$$A_i = 4(\tfrac{3}{n} i)^3 (\tfrac{3}{n}) = \frac{324}{n^4} i^3$$

El área total será:

$$A_T = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{324}{n^4} i^3$$

pero $324/n^4$ son independientes de i

$$A_T = \lim_{n \to \infty} \frac{324}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \qquad \ldots . (1)$$

Como se comentó, cuando $\Delta \to 0$, $n \to \infty$

Por inducción matemática, se demuestra que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) \qquad \ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$A_T = \lim_{n\to\infty} \frac{324}{n^4}\,\frac{1}{4}\,(n^4 + 2n^3 + n^2) = \lim_{n\to\infty} 81(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})$$

Como la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} (81 + \frac{162}{n} + \frac{81}{n^2})$$

$$\int_0^3 4x^3\,dx = 81$$

Por lo tanto, el área buscada es:

$$A_T = 81\ u^2.$$

EJEMPLO

La rapidez de un móvil que parte del reposo es $4t^3$ - pies/seg. ¿Cuánto recorre en los tres primeros segundos?

SOLUCION:

$v = 4t^3$ y como la rapidez $v$ está dada por:

$$v = ds/dt, \text{ entonces}$$

$$ds = v\,dt \qquad (1)$$

Por otro lado

$$v_m = \Delta s/\Delta t$$

$$\therefore\ \Delta s = v_m \Delta t$$

En la figura $\Delta s$ está representado por el área de un rectángulo de dimensiones finitas: si se desea todo el espacio recorrido entre 0 y 3, será necesario plantear el - siguiente algoritmo:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} s = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} v_m \Delta_i t$$

obsérvese que cuando $\Delta \to 0$, $v_m \to v = 4t^3$

$$\therefore\quad S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4t^3 \Delta_i t = \int_0^3 4t^3\,dt$$

pero $\Delta_i t = t_i - t_{i-1} = \frac{3}{n}$ ; $t_i = \frac{3}{n} i$

$$t = t_i = \frac{3}{n} i$$

Por lo tanto:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4\,(\frac{3}{n} i)^3 \cdot \frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{324}{n^4}\, i^3$$

Este algoritmo es idéntico al del problema anterior, por lo tanto, el resultado del problema será:

$$d = 81 \text{ pies}$$

Como puede verse, la integral definida no necesariamente será una área, porque el resultado depende de la naturaleza de las magnitudes que representan la abscisa y - la ordenada.

## 5.6 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

La integral definida de la función continua $y=f(x)\geq 0$ en $x\in[a,b]$, geométricamente representa el área entre la curva cuya regla de correspondencia es $y = f(x)$, el eje X, y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se ilustra en la siguiente figura:

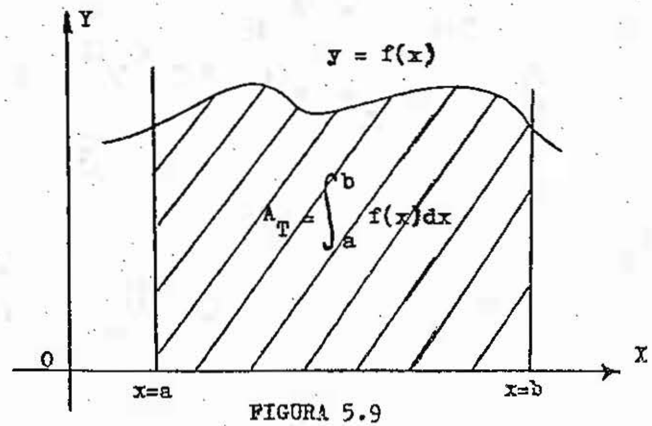



FIGURA 5.9

Si la función continua $y = f(x)$ en $x\in[a,b]$ tiene valores positivos y negativos en dicho intervalo, el valor numérico de la integral no será igual al valor del área dada por su interpretación geométrica, puesto que ahora hay áreas que se ven afectadas de un signo negativo, y su suma algebraica no será igual a su suma aritmética, como se ilustra en la siguiente figura:

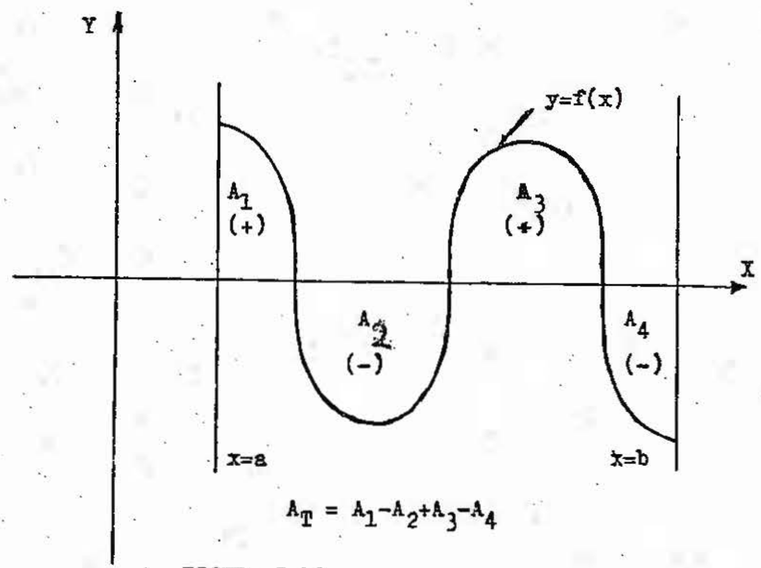



FIGURA 5.10

## 5.7 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

A continuación se enunciarán algunas propiedades de la Integral Definida.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $k\in\mathbb{R}$, entonces:

1.- $$\int_a^b dx = b - a$$

2.- $$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{donde } k=\text{cte.}$$

3.- $$\int_a^b k\, dx = k\,(b - a) \qquad \text{donde } k=\text{cte.}$$

4.- $$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

5.- $$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

6.- $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Para todo c, tal que: $a \leq c \leq b$

7.- $$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

8.- Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

9.- Si $k > 0$, se cumple que:

$$\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

10.- Si $c \in R$ $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$

11.- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right| dx$

Las propiedades de la Integral Definida se demuestran a partir del algoritmo de la suma, por ejemplo:

Demostrar que $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k\,(b - a)$

SOLUCION:

De la definición de Integral Definida se tiene:

$$\int_a^b k\,dx = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i(x) \qquad (1)$$

En este caso la función $f(x)$ es constante e igual a $k$.

Para obtener $\Delta_i x$, divídase el intervalo $b-a$ en $n$ - sub-intervalos iguales, es decir:

$$\Delta_i x = \frac{b-a}{n} \qquad (2)$$

Entonces:

$$a = x_0 < a + \frac{b-a}{n} < a + 2\frac{b-a}{n} < \cdots\cdots < a + i\,\frac{b-a}{n} \cdots < x_n = b$$

Además:

$$f(x_i) = f(a + i\,\frac{b-a}{n}) = k \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), queda:

$$\int_a^b k\,dx = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} k\,\frac{b-a}{n}$$

Pero b,a y n son independientes de i, por tanto:

$$\int_a^b k\,dx = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} k \qquad (4)$$

Por inducción matemática se demuestra que:

$$\sum_{i=1}^{n} k = nk \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4)

$$\int_a^b k\,dx = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \frac{b-a}{n}\,nk = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} (b-a)\,k$$

$$\int_a^b k\,dx = (b - a)\,k \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Se deja al lector la demostración de las demás propiedades.

EJEMPLO

Demostrar usando las propiedades de la Integral Definida que:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Usando la propiedad 9 con $k=-1$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{-1}\int_0^{-1} \frac{x}{-1}\,dx = -\int_0^{-1} -x\,dx$$

auxiliándose ahora de la propiedad 5

$$-\int_0^{-1} -x\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx$$

Aplicando ahora la propiedad 10 con c=1, se tiene que:

$$\int_{-1}^{0} -x\,dx = \int_{0}^{1} -(x-1)\,dx = \int_{0}^{1} (1-x)\,dx$$

Por lo tanto:

$$\int_{0}^{1} x\,dx = \int_{0}^{1} (1-x)\,dx$$

Aplicando la propiedad 7:

$$\int_{0}^{1} x\,dx = \int_{0}^{1} dx - \int_{0}^{1} x\,dx$$

Agrupando los términos semejantes

$$2\int_{0}^{1} x\,dx = \int_{0}^{1} dx$$

Por la propiedad 1, se conoce que:

$$\int_{0}^{1} dx = 1 - 0 = 1$$

Sustituyendo esta última en la anterior:

$$2\int_{0}^{1} x\,dx = 1$$

Por tanto: $$\int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

EJEMPLO

Aplicando las propiedades de la integral determinar:

$$(5x+2)\,dx$$

Aplicando la propiedad 7:

$$\int_{3}^{4} (5x+2)\,dx = \int_{3}^{4} 5x\,dx + \int_{3}^{4} 2\,dx \qquad \ldots.(1)$$

Utilizando la propiedad 2:

$$\int_{3}^{4} 5x\,dx = 5\int_{3}^{4} x\,dx$$

Usando la propiedad 3:

$$\int_{3}^{4} 2\,dx = 2(4-3) = 2 \qquad \ldots.(2)$$

Para calcular $5\int_{3}^{4} x\,dx$ se usan las siguientes propiedades :

Propiedad 6:

$$5\int_{3}^{4} x\,dx = 5\int_{3}^{0} x\,dx + 5\int_{0}^{4} x\,dx$$

Usando la propiedad 5

$$5\int_{3}^{4} x\,dx = -5\int_{0}^{3} x\,dx + 5\int_{0}^{4} x\,dx$$

aplicando la propiedad 9 con $k = 1/3$ y $k = 1/4$, queda:

$$5\int_{3}^{4} x\,dx = -\frac{5}{1/3}\int_{0}^{1} \frac{x}{1/3}\,dx + \frac{5}{1/4}\int_{0}^{1} \frac{x}{1/4}\,dx$$

Haciendo operaciones

$$5\int_{3}^{4} x\,dx = -3\cdot 5\int_{0}^{1} 3x\,dx + 5\cdot 4\int_{0}^{1} 4x\,dx$$

Aplicando la propiedad 2:

$$5\int_{3}^{4} x\,dx = -45\int_{0}^{1} x\,dx + 80\int_{0}^{1} x\,dx$$

Pero se conoce del ejemplo anterior que $\int_0^1 x dx = 1/2$ sustituyendo en la ecuación anterior, queda:

$$5\int_3^4 x dx = -45(1/2) + 80(1/2) = 17.5 \quad \ldots(3)$$

Sustituyendo (3) y (2) en (1):

$$\int_3^4 (5x+2)\,dx = 17.5 + 2 = 19.5$$

Obsérvese que con el auxilio exclusivo de una combinación de propiedades se llegan a resolver integrales, aunque el proceso resulta laborioso, por lo que para resolverlas se combinan tanto las propiedades como los métodos de integración que se verán más adelante con el fin de simplificar el desarrollo.

A continuación se establecerán una serie de teoremas que tienen por objeto:

Obtener el valor medio de la función $y = f(x)$, el cual en muchas aplicaciones de Ingenieria es necesario conocer.

Determinar la relación entre la derivada de la función $y = f(x)$ y la integral definida de la misma función.

5.8 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL.

Dada una función $y = f(x)$, continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ existe un número c, contenido en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \quad (1)$$

DEMOSTRACION.

Sea M el valor máximo absoluto de la función $y = f(x)$ en $[a,b]$ y m el valor mínimo absoluto de la función $y = f(x)$ en $[a,b]$, entonces:

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

Aplicando la propiedad 8, como $f(x) \geq m$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b m\,dx$$

aplicando la propiedad 3

$$\int_a^b m\,dx = m\,(b-a), \qquad \text{por lo tanto:}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq m(b-a) \quad \ldots (2)$$

Por otro lado, si: $M \geq f(x)$, entonces aplicando la propiedad 8 se tiene:

$$\int_a^b M\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

y por la propiedad 3, se tiene:

$$\int_a^b M\,dx = M\,(b-a) \qquad \text{Por lo tanto:}$$

$$M\,(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,dx \quad \ldots (3)$$

De (2) y (3) se concluye que:

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

$\int_3^4$ )

Dividiendo (4) entre b-a, queda:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Pero m es el valor mínimo absoluto de la función $y = f(x)$ en $[a,b]$ y M es el valor máximo absoluto de la función $y = f(x)$ en $[a,b]$.

Puesto que la función es continua para todo $x \in [a,b]$, debe contener todos los valores comprendidos entre m y M, y por lo tanto el valor de :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

que es el valor correspondiente al valor de la función $y = f(x)$ para una abscisa $c \in [a,b]$, es decir:

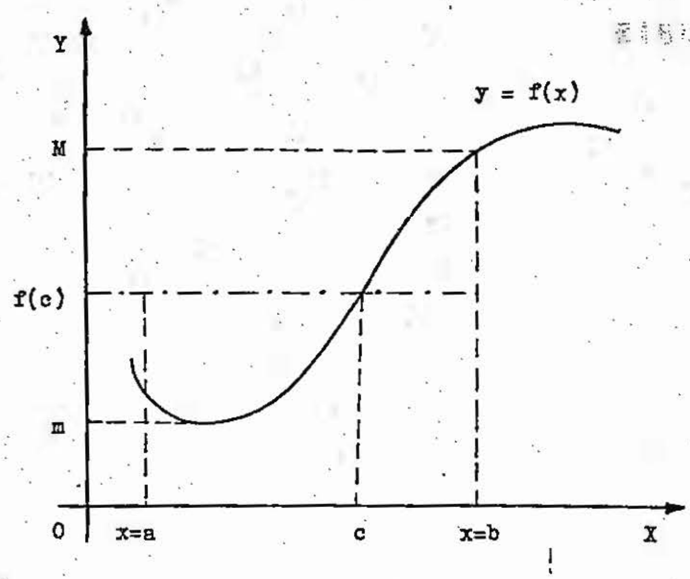
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \qquad \text{L.Q.Q.D..}$$

Geométricamente el Teorema se interpreta de la siguiente manera:

Asegura que existe un rectángulo de base igual a b-a y cuya altura es f(c) que tiene igual área que la comprendida entre la curva $y = f(x) \geq 0$, el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se ilustra en la figura 5.11.




El valor de c no necesariamente es único.

FIGURA 5.11

EJEMPLO

Si por alguna razón se desea cambiar el vitral parabólico que ya se estudió por uno rectangular de igual base y con la misma área, y de idéntico material. ¿Cuáles son sus dimensiones?

SOLUCION: Ya se había obtenido que el área del vitral estaba dada por:

$$A_T = 2\int_0^5 \left(15 - \frac{3}{5}x^2\right) dx$$

pero

$$2\int_0^5 \left(15 - \frac{3}{5}x^2\right) dx = \int_{-5}^5 \left(15 - \frac{3}{5}x^2\right) dx$$

$$= 100$$

Como se vé en la última integral $a=-5$, $b=5$, por tanto;

$$b - a = 5 - (-5) = 10$$

Además el Teorema del valor medio del Cálculo Integral expresa que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

Aplicándolo al problema, se tiene:

$$100 = f(c)\,(5 - (-5))$$
$$100 = f(c)\,(10)$$
$$f(c) = 100/10 = 10 \quad \text{ordenada media}$$

Por tanto las dimensiones del vitral rectangular son:

base = 10 m y altura = 10 m

Si se desea obtener el valor de la abscisa "c" correspondiente a la ordenada media f(c), se hará de la siguiente manera:

$$f(c) = 10 = 15 - \frac{3}{5}c^2$$
$$-5 = -\frac{3}{5}c^2$$
$$\frac{25}{3} = c^2$$
$$c = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$$

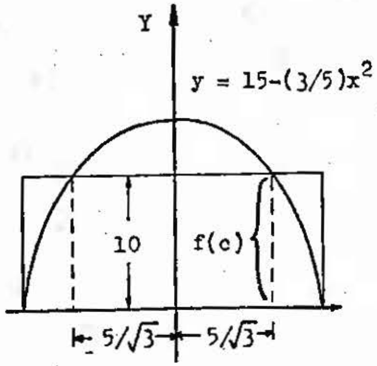



FIGURA 5.12

Obsérvese en la figura 5.12 que para este caso se tienen dos valores de "c".

Para encontrar la relación entre la derivada y la integración de la función continua $y = f(x)$ es necesario conocer el concepto de integral indefinida, que se tratará a continuación:

## 5.9 INTEGRAL DEFINIDA CON LIMITE SUPERIOR VARIABLE.

Como ya se vió, la interpretación geométrica de la Integral Definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

es el área entre la curva $y = f(x) \geq 0$, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X, y para el ejemplo del vitral se encontró que:

$$A_T = 2 \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \left[15 - \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n}\,i\right)^2\right]\frac{5}{n}$$

$$A_T = 2\int_0^5 \left(15 - \frac{3}{5}x^2\right) dx = 100$$

Si por alguna razón, se necesitan construir muchos vitrales del mismo tipo y por economía solo se pensara cubrir de vidrio una parte como la mostrada en la figura 5.13, entonces se requerirá determinar un modelo matemático que determine el área cubierta.

Con tal fin procédase de la siguiente manera:

En la figura 5.13 se observa que $|2x|$ es el ancho de la base de esos vitrales, si se considera la parte de la derecha para el calculo del área, los límites de integración son:

$$a = 0 \qquad b = x$$

Como el límite superior es la variable x, para calcular la

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

Hágase el cambio de variable $u = x$ y sustitúyase $b = x$, - es decir:

$$A_x = \int_0^x f(u)\,du = \int_0^x \left(15 - \frac{3}{5}u^2\right) du.$$

$$A_x = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta_i x \quad , \quad \text{pero: } \Delta_i x = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$$

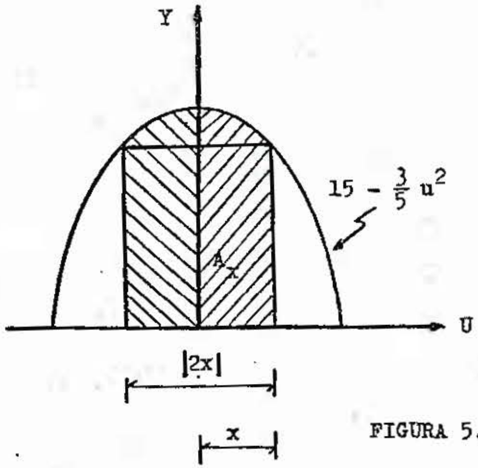



FIGURA 5.13

$$f(x_i) = \left[15 - \frac{3}{5}\left(\frac{x}{n}i\right)^2\right]$$

Sustituyendo valores queda:

$$A_x = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \left[15 - \frac{3}{5}\left(\frac{x}{n}i\right)^2\right]\frac{x}{n}$$

$$A_x = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left[15\,\frac{x}{n} - \frac{3}{5}\,\frac{x^3 i^2}{n^3}\right]$$

Separando en dos sumatorias queda:

$$A_x = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \left[\sum_{i=1}^{n} 15\,\frac{x}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{3x^3 i^2}{5n^3}\right]$$

como x, n y las constantes son independientes de i, se tiene:

$$A_x = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \left[15\,\frac{x}{n} \sum_{i=1}^{n} (1) - \frac{3x^3}{5n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2\right] \ldots (1)$$

Recuérdese que por inducción matemática se demuestra - que:

$$\sum_{i=1}^{n} (1) = n \qquad \ldots (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \ldots (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) queda:

$$A_x = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \left[15\,\frac{x}{n}(n) - \frac{3x^3}{5n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \left[15x - \frac{x^3}{10n^3}\,n(n+1)(2n+1)\right]$$

Por las propiedades de los límites se tiene:

$$A_x = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} 15x - \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta \to 0}} \frac{x^3}{10n^3}\,n(n+1)(2n+1)$$

como x y las constantes son independientes de n, el límite - anterior queda:

$$A_x = 15x - \frac{x^3}{10} \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)(2 + 1/n)$$

$$A_x = 15x - (x^3/10)(2) = 15x - x^3/5$$

O sea:
$$\int_0^x (15 - \frac{3}{5}u^2)\,du = 15x - x^3/5$$

Este resultado indica que el área en el intervalo 0,x es una función de x, esto es,

$$A_x = \int_0^x (15 - \frac{3}{5}u^2)\,du = 15x - x^3/5$$

$$\therefore \quad A_x = F(x)$$

Lo anterior se generaliza de la siguiente manera:

Sea la función $y = f(x) = f(u)\Big|_{x=u}$ contínua en $[a,x]$, (figura 5.14), entonces:

$$\int_a^x f(u)\,du = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \qquad . . . (1)$$

Como:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1} = \frac{x-a}{n} \quad ; \quad \xi_i = a + \frac{x-a}{n}\,i$$

sustituyendo $\xi_i$ y $\Delta_i x$ en (1), se tiene

$$\int_a^x f(u)\,du = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{x-a}{n}\,i)\,\frac{x-a}{n}$$

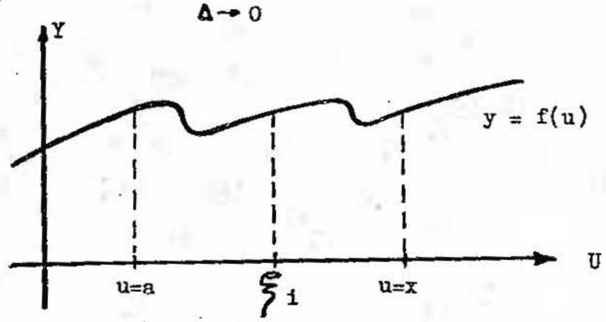



FIGURA 5.14

Como se observa en la figura 5.14 para cada valor de x, se obtiene una área entre la curva $y = f(u)$, las rectas $u=a$, $u=x$ y el eje x, que es función de x a la que se denominará $A_x = F(x)$.

Por lo que se puede escribir:

$$\int_a^x f(u)\,du = F(x)$$

Dicha función es contínua en el intervalo en el que existe el límite.

---

DEFINICION 5.5

A la $\int_a^x f(u)\,du$ se le denomina "Integral Definida con Límite Superior Variable".

---

EJEMPLO

Encontrar el valor de la siguiente integral, haciendo uso de la interpretación geométrica

$$\int_0^x (u + 2)\,du$$

SOLUCION:

En este caso $f(u) = u+2$ que representa la ecuación de una recta, de la forma: $f(u) = mu+b$; por lo tanto, $m=1$ y $b=2$. Como la interpretación geométrica de la integral definida es el área entre la curva $f(u) = u+2$, el eje u y las rectas $u=0$ y $u=x$, lo que se representa en la figura 5.15

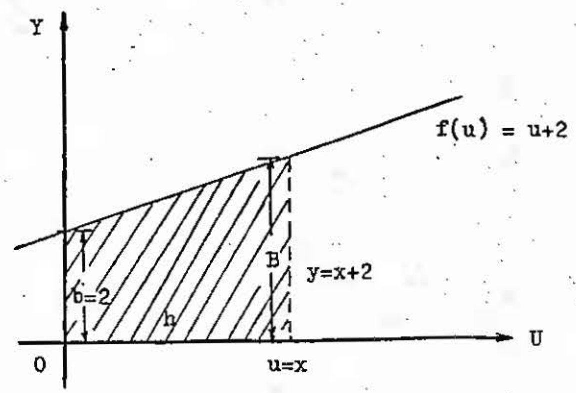



FIGURA 5.15

El área formada es un trapecio y su valor es:

$$A = \frac{B+b}{2} h$$

Pero:

$B = f(x) = x+2$ ; $b = 2$ y $h = x-0 = x$

Sustituyendo estos valores queda:

$$A = \frac{(x+2)+2}{2} x$$

Efectuando operaciones

$$A_x = \frac{x^2+4x}{2} = \frac{x^2}{2} + 2x$$

Por lo tanto:

$$A_x = \int_0^x (u+2)\,du = \frac{x^2}{2} + 2x$$

Lo que resultó, es una función contínua de x como era de esperarse.

EJEMPLO

Calcular el desplazamiento "d" de un proyectil que parte del reposo con una velocidad inicial de módulo $v_o = 2$ m/seg y una aceleración constante de 1 m/seg$^2$ hasta que transcurre un tiempo x.

SOLUCION:

Como se sabe, la rapidez en un punto está dada por

$$ds/dt = v \qquad \text{de donde}$$

$$ds = v\,dt \qquad (1)$$

en que ds representa una diferencial de desplazamiento debida a la velocidad v en un tiempo dt, sin embargo en el ejemplo la velocidad en un tiempo t está dada por la expresión:

$$v = v_o + at \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$ds = (v_o + at)\,dt \qquad (3)$$

Por la propiedad básica número (1):

$$\int_{s=0}^{s=d} ds = d - 0 = d \qquad (4)$$

donde d es el desplazamiento buscado desde s=0 hasta s=d, si se sustituye (3) en (4) queda:

$$d = \int_{s=0}^{s=d} (v_o + at)\,dt \qquad (5)$$

Como la variable de integración es t, se encuentran los límites de integración correspondientes haciendo la siguiente transformación:

Cuando $s=0$, $t=0$ y cuando la distancia es "d" el tiempo transcurrido es $t=x$, la expresión (5) queda:

$$d = \int_0^x (v_0 + at)\,dt \,,$$

si ahora sustituímos los valores $v_0 = 2$ m/seg, $a=1$ m/seg$^2$, (5) se transforma en:

$$d = \int_0^x (2 + t)\,dt$$

cuya solución está dada en el ejemplo anterior y es:

$$d = \int_0^x (2 + t)\,dt = x^2/2 + 2x$$

Obsérvese que los ejes coordenados son: velocidad y tiempo como muestra la figura 5.16, sin embargo, el valor del área encerrada corresponde numéricamente al desplazamiento en metros desde $t=0$ hasta $t=x$

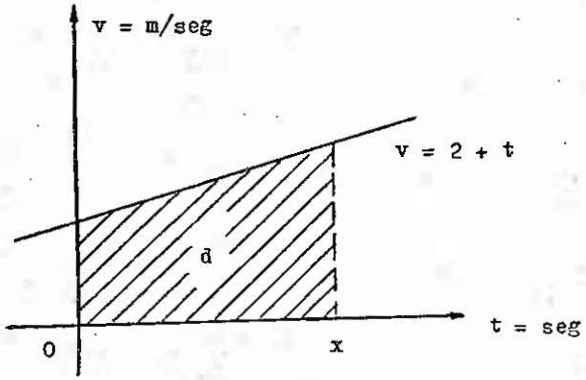



FIGURA 5.16

5.9 TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO INTEGRAL.

Considerando que una integral indefinida es una función contínua de x, en el intervalo cerrado $[a,x]$, a continuación se planteará un Teorema que muestra la relación entre la función integrable y el resultado de integrar ésta.

5.9.1 PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL

TEOREMA 5.1

Sea $y = f(u)$ una función contínua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea $x \in [a,b]$, la función $F(x)$ está definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du \qquad \text{en que} \quad f(u) = f(x) \qquad \forall u \in a,b$$

entonces $F(x)$ es una función contínua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y se cumple que:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{o sea}$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(u)du = f(x)$$

DEMOSTRACION:

Sabemos que $F(x) = \int_a^x f(u)\,du \qquad \ldots(1)$

por lo tanto, si se incrementa $x$ en $\Delta x$; para toda $(x+\Delta x) \in [a,b]$, se tiene:

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du \qquad \ldots(2)$$

Aplicando la propiedad básica número 6, se tiene

$$\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du = \int_a^x f(u)\,du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du \qquad \ldots(3)$$

Para todo $\Delta x > 0$

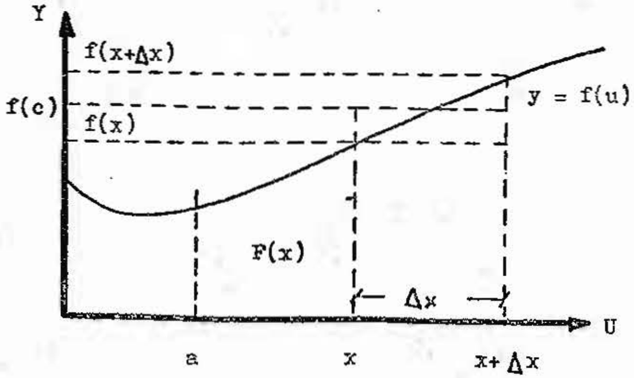



FIGURA 5.17

Sustituyendo (1) y (2) en (3)

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du$$

o sea:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du \qquad ....(4)$$

Como f(u) es una función contínua se le puede aplicar a-(4) el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, es de- -cir:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = f(c)\left[(x+\Delta x) - x\right] = f(c)\,(\Delta x), \forall c \in [x, x+\Delta x] \qquad .....(5)$$

Sustituyendo (5) en (4) queda:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(c)\,\Delta x \qquad ....(6)$$

dividiendo entre $\Delta x$, resulta:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

Obsérvese que cuando $\Delta x$ tiende a cero, f(c) tiende a -f(x) pues:

$$f(x) \leq f(c) \leq f(x+\Delta x)$$

como se puede observar en la figura 5.17, para todo $\Delta x > 0$, -entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

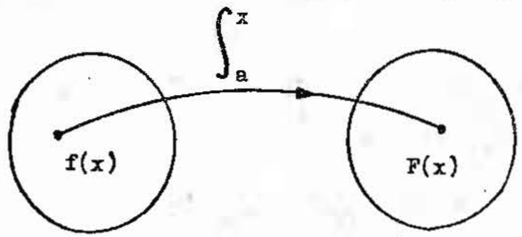
Pero la primera parte es por definición la derivada de F(x) por lo tanto se concluye que:

$$F'(x) = f(x)$$

L.Q.Q.D.

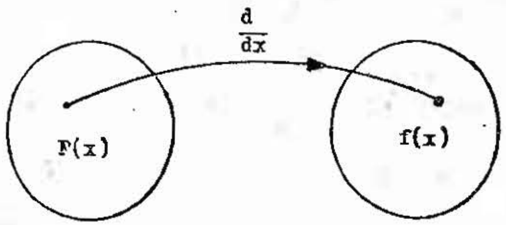
5.9.2 RELACION ENTRE LA INTEGRACION Y LA DERIVADA DE -UNA FUNCION CONTINUA.

Usando los diagramas de Venn la $\int_a^x f(x)\,dx$ se puede expresar como se indica en la siguiente figura:

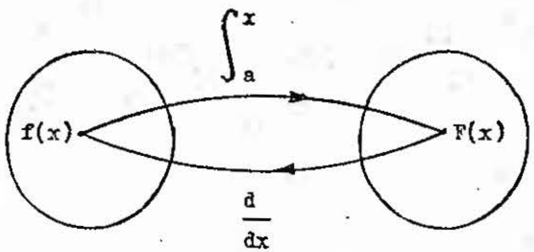



Donde el dominio de la relación son los valores que toma f(x) y el rango los valores de F(x). Es decir, mediante una-transformación llamada "Integral" se obtiene el valor de - — F(x).

Pero el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral, estáblece que si $f(x)$ es contínua en el intervalo cerrado - $[a,b]$ entonces $F'(x) = f(x)$. Lo que se expresa con diagramas de Venn como sigue:




Los dos diagramas anteriores se representan en uno solo-como se ve a continuación:




De donde se concluye que la integración y la derivación-son operaciones inversas

La $\int_a^x f(u)\,du = F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.

5.9.3. INTEGRAL INDEFINIDA. CONSTANTE DE INTEGRACION.

Como se vió en el inciso 5.8, a la $\int_a^x f(x)\,dx$ se le llama integral definida con límite superior variable.

¿ Qué sucederá para distintos valores de a ?, ¿Se obtendrán distintas funciones $A(x)$?. Las respuestas a las preguntas anteriores conducen al concepto de Integral Indefinida y al de la constante de integración, como se verá a continuación.

LEMA 5.1

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones contínuas para todo x - comprendido en el intervalo cerrado $[a,b]$, tales que - $f'(x) = g'(x)$ para todo valor de x en dicho intervalo, entonces existirá una constante "c" tal que

$$f(x) = g(x) + c \qquad \ldots .(1)$$

Se omite la demostración del lema.

TEOREMA 5.2

Si $F(x)$ es una antiderivada particular de $f(x)$ contínua para toda x contenida en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la antiderivada más general de $f(x)$ en dicho intervalo está dada por:

$$F(x) + c$$

Donde "c" se le denomina constante de integración.

DEMOSTRACION:

Sea $G(x)$ alguna antiderivada de la función contínua $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral se tiene:

$$G'(x) = f(x) \qquad \ldots (2)$$

Puesto que $F(x)$ es una antiderivada particular de la función contínua $f(x)$ en $[a,b]$, se tiene:

$$F'(x) = f(x) \qquad \ldots (3)$$

es decir $\quad G'(x) = F'(x) \quad \ldots (4)$

Por el Lema 5.1, si se cumple la ecuación (4), se tiene:

$$G(x) = F(x) + c$$

Donde $F(x)+c$ es la antiderivada más general de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, que es lo que se quería demostrar.

De esta manera cualquier antiderivada corresponde a $F(x) + c$ para un determinado valor de "c".

El Teorema anterior conduce a la siguiente:

> DEFINICION 5.6
>
> A la $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ se le denomina "Integral Indefinida de $f(x)dx$". Y se considera que se verifica en el intervalo cerrado $[a,b]$ sobre el que es contínua $f(x)$.

5.9.4 SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL (REGLA DE BARROW).

Este Teorema permite calcular a partir de la antiderivada el valor de la integral definida de una función contínua en el intervalo cerrado $[a,b]$.

> TEOREMA 5.3
>
> Si $f(x)$ es una función contínua en $[a,b]$ y $F(x)$ es la antiderivada, entonces:
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

DEMOSTRACION:

Por el Primer Teorema Fundamental Del Cálculo Integral, se establece que:

$$G(x) = \int_a^x f(u)\,du = F(x) + c \quad \ldots (1)$$

$$\forall u = x \quad \text{en} \quad [a,b] \quad y \quad G'(x) = f(x)$$

Usando la propiedad 4, si $x = a$

$$G(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0 = F(a) + c$$

Por lo tanto $\quad - F(a) = +c \quad \ldots (2)$

si ahora se hace $x = b$, la ecuación (1) toma la siguiente forma:

$$G(b) = \int_a^b f(u)\,du = F(b) + c \quad \ldots (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) queda:

$$\int_a^b f(u)\,du = F(b) - F(a)$$

L.Q.Q.D.

EJEMPLO

Verificar que la función $f(x) = 15 - (3/5)\,x^2$ dada en el problema del vitral cumple con el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

SOLUCION:

Cuando se calculó la integral de $f(x)$ con límite superior variable se encontró que:

$$\int_0^x (15 - \frac{3}{5}x^2)dx = 15x - \frac{x^3}{5} = F(x)$$

Calculando $F'(x)$ se tiene:

$$F'(x) = 15 - \frac{3x^2}{5}$$

Por lo tanto, sí se cumple con el Primer Teorema Fundamental, ya que:

$$F'(x) = f(x)$$

EJEMPLO

Calcular la integral: $\int x^2\,dx$

SOLUCION:

Lo que se busca es la antiderivada más general, esto es:

$$\int x^2\,dx = F(x) + c$$

Aplicando el Primer Teorema Fundamental se debe cumplir que:

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x) = x^2 \qquad . . (1)$$

Propongamos $F(x) = x^3$, se tiene que:

$$F(x) + c = x^3 + c$$

Y aplicando el Primer Teorema Fundamental

$$(F(x) + c)' = F'(x) = 3x^2$$

Pero $3x^2 \neq f(x) = x^2$

Por lo que para cumplir con la ecuación (1) se deberá tomar $F(x) + c = (1/3)\,x^3 + c$, por lo tanto:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

NOTA.- Obsérvese que es necesario tener un buen conocimiento del cálculo diferencial para seleccionar $F(x)$.

EJEMPLO

Calcular la integral $\int \operatorname{sen}x\,dx$

SOLUCION:

Se busca la antiderivada más general

$$\int \operatorname{sen}x\,dx = F(x) + c$$

que deberá cumplir con el Primer Teorema Fundamental, esto es:

$$F(x+c)' = F'(x) = \operatorname{sen}x$$

La función $\cos x$ tiene como derivada $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen}x$

Por lo tanto, tomaremos $F(x) = -\cos x$ con lo cual

Pués $\int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x + c$

$$(F(x) + c)' = -(-\operatorname{sen}x) = \operatorname{sen}x = f(x)$$

Con lo que se cumple el Primer Teorema Fundamental.

EJEMPLO

Verificar que en el ejemplo del vitral se cumple con el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

SOLUCION:

Se sabe que $F(x) = 15x - \frac{x^3}{5}$

Aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral, se tiene:

$$\int_0^5 (15 - \frac{3}{5}x^2)\,dx = F(5) - F(0)$$

$$= \left[15(5) - \frac{5^3}{5}\right] - \left[15(0) - \frac{0^3}{5}\right]$$

$$= 75 - 5^2 = \underline{50}$$

Que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

## C A P I T U L O 6

### METODOS DE INTEGRACION Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

### 6.1 INTRODUCCION.

Se vió en el capítulo 5 como la antiderivada más general dá el resultado de la integral indefinida y como la aplicación de la Regla de Barrow permite calcular integrales definidas, por lo que conocer las derivadas de algunas funciones de una variable independiente es de gran utilidad para resolver integrales.

Sin embargo, en la mayoría de los casos, las integrales que se presentan no tienen una derivada fácil de calcular, por lo que será necesario aplicar algún artificio o método de integración hasta llegar a algunas integrales de las cuales conocemos su antiderivada.

Pero, ¿cuáles son las funciones de las que conocemos la antiderivada?

La respuesta a esta pregunta es poco concreta por lo que conviene uniformizar criterios estableciendo un conjunto de funciones (antiderivadas) que sean las únicas que utilizaremos para calcular directamente una integral.

Es conveniente hacer resaltar el hecho de que con los métodos expuestos en este capítulo no se pueden resolver todas las integrales, pero si la mayoría de ellas.

Además, todas aquellas que se resuelven con estos métodos no siempre tienen desarrollos algebráicos fáciles para llegar a la solución, sin embargo, es interesante el reto que se le plantea al lector para la resolución de las integrales con las herramientas que aquí se dan, o incluso con algunas que el lector puede desarrollar.

Por lo expuesto anteriormente se sugiere al lector que no trate solamente de memorizar y mecanizar los métodos aquí presentados, sino que adquiera el criterio para seleccionar uno ó varios métodos con los cuales se obtenga más fácilmente la solución de una integral dada.

### 6.2 INTEGRACION INMEDIATA.

Para auxiliarnos en la solución de integrales indefinidas utilizaremos algunas de las propiedades vistas en el capítulo anterior, solo que ahora supondremos el límite superior variable.

Las propiedades empleadas con esta condición son:

a). $\int cf(u)\,du = c\int f(u)\,du$

b). $\int [f(u) + g(u)]\,du = \int f(u)\,du + \int g(u)\,du$

Donde u es la función real de una sola variable real independiente, de la forma: $u = u(x)$, no necesariamente $u=x$.

Tomando en cuenta lo anterior, deduciremos, a partir de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral y las propiedades a y b, un conjunto de integrales que llamaremos inmediatas, y que son las dadas en la siguiente Tabla 1.

1.- $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

2.- $\int \dfrac{du}{u} = \text{Ln } u + C$

3.- $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\text{Ln } a} + C$

En el caso particular de $a = e$

$$\int e^u \, du = e^u + C$$

4.- $$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

5.- $$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

6.- $$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

7.- $$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

8.- $$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

9.- $$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

TABLA 1.

A continuación se demostrarán dos integrales de la Tabla 1.

Demostrar que:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \text{ donde } \quad n \neq -1$$

Para este caso se tiene que:

$$f(u) = u^n$$
$$F(u) = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Aplicando la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral se debe cumplir que:

$$F'(u) = f(u)$$

Efectuando la operación correspondiente:

$$F'(u) = (n+1)\frac{u^n}{n+1} = u^n = f(u)$$

$$\therefore \quad F'(u) = f(u)$$

L.Q.Q.D.

Demostrar que

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

Procediendo en forma semejante que en el ejemplo anterior, se tiene que:

$$F(u) = \tan u + C$$
$$f(u) = \sec^2 u$$
$$F'(u) = \sec^2 u$$
$$= f(u)$$

L.Q.Q.D.

## 6.3 INTEGRACION POR CAMBIO DE VARIABLE.

Como se vió en el capítulo 5, el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X, las rectas $x=a$ y $x=b$, se calcula mediante la expresión:

$$A = \int_{x_1=a}^{x_2=b} f(x)\, dx$$

que gráficamente se representa por el área ashurada de la figura 6.1

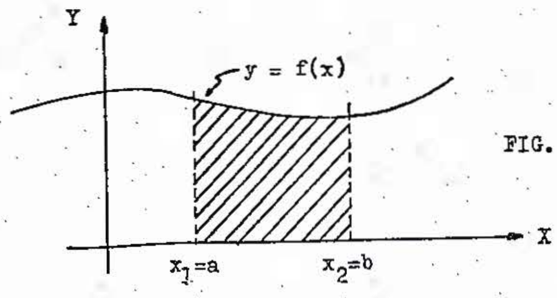



FIG. 6.1

Resolvamos algunos ejemplos en los que aparecen integrales que no son inmediatas y en los cuales tendremos que auxiliarnos de algunos artificios para resolverlas y que dan lugar al método de integración por cambio de variable, dicho método que se tratará en esta sección nos llevará a obtener variables diferentes de las iniciales y ésta es la razón por la cual recibe dicho nombre; atendiendo al tipo de cambio de variable que se haga se presentarán diferentes casos que son los que se analizarán a continuación.

a). POR SUSTITUCION:

Obtendrémos una idea de este método resolviendo los siguientes ejemplos.

EJEMPLO:

Calcular el área limitada por la curva $y=3sen3x$ y el eje X, desde $x_1=0$, hasta $x_2=\pi/3$.

SOLUCION:

El área buscada se muestra en la figura 6.2

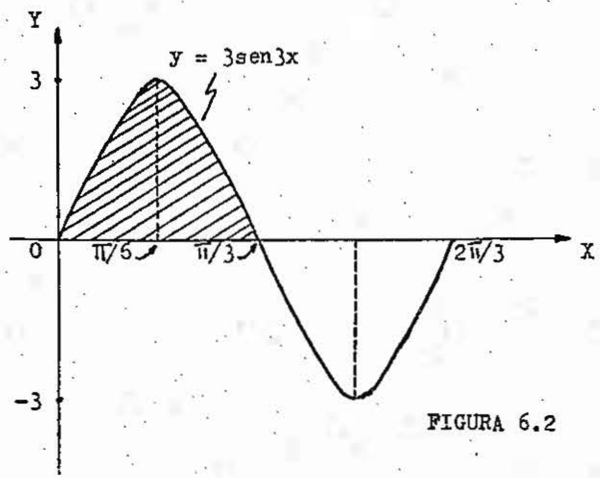



FIGURA 6.2

Para obtener dicha área se emplea la siguiente integral definida:

$$A = \int_{x_1=0}^{x_2=\pi/3} 3 \operatorname{sen}3x \, dx \qquad (1)$$

La integral propuesta se parece a la de la forma:

$$\int \operatorname{sen} u \, du$$

por lo que se puede pensar en hacer la siguiente sustitución:

$$u = 3x$$

Entonces, al diferenciar u se tiene que:

$$du = 3\,dx \qquad (2)$$

(obsérvese que $du \neq dx$, que es lo que más comunmente se presenta al usar este método de integración).

Por lo tanto, la integral (1) se transforma en la siguiente:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{sen}3x\,(3dx) = \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sen}u \, du \qquad (3)$$

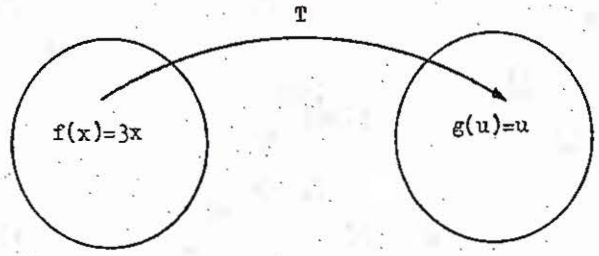
De la Tabla 1, se tiene que $\int \operatorname{sen}u\,du = -\cos u$ por lo tanto:

$$A = -\cos u \Big|_{u_1}^{u_2} \qquad (4)$$

La sustitución empleada, lleva al cambio de variable que se representa por medio del siguiente diagrama de Venn, donde se muestra que la función

$$f(x) = 3x$$

se transforma en la función u.




Resuelta la integral, ahora se vuelve a la variable original utilizando la misma transformación:

$$A = -(\cos 3x)\Big|_{x_1=0}^{x_2=\pi/3}$$

Y aplicando finalmente la Regla de Barrow, se tiene:

$$A = -\cos 3(\pi/3) - \cos 3(0) = -(-1-1) = 2\ u^2$$

EJEMPLO

Calcular el área limitada por la curva $y = \cos 2x$, y el eje X, desde $x_1 = -\pi/4$, hasta $x_2 = \pi/4$

SOLUCION:

El área buscada se muestra en la fig. 6.3.

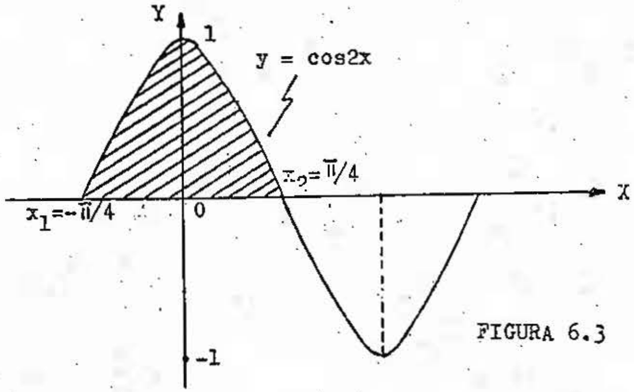



FIGURA 6.3

Y se resuelve con el uso de la siguiente integral definida:

$$A = \int_{x_1=-\pi/4}^{x_2=\pi/4} \cos 2x\ dx$$

La integral anterior es parecida a la (5) de la Tabla 1 por lo que se puede, en un primer intento, hacer la siguiente sustitución:

$$u = 2x$$

y al diferenciar, se tiene:

$$du = 2\ dx$$

Por lo tanto: $dx = du/2$ y $2x = u$

que al ser sustituidos en la integral inicial dá:

$$A = \int_{u_1}^{u_2} \cos u \frac{du}{2}$$

sacando la constante 1/2 de la integral queda:

$$A = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \cos u\ du$$

La expresión $\cos u\ du$ es idéntica a la 5 de la Tabla 1, cuya solución es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \cos u\ du = \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \Big|_{u_1}^{u_2}$$

Volviendo a la variable original con la misma transformación se tiene:

$$A = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left[1-(-1)\right] = 1$$

$$\therefore \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x\ dx = 1$$

EJEMPLO

Resolver la $\int x\sqrt{x^2+4}\ dx$

SOLUCION:

Para este caso, las alternativas de cambio de variable que se pueden hacer son:

Alternativa 1:

$$u = x^2 + 4 \qquad (1)$$

Alternativa 2:

$$u = (x^2 + 4)^{1/2} \qquad (2)$$

Alternativa 3:

$$u = x^2 \qquad (3)$$

Alternativa 4:

$$u = x \qquad (4)$$

De (1):

$$u = x^2 + 4$$

entonces, $du = 2x\ dx$ ..(5) $\therefore$ $x\ dx = du/2$ ..(6)

Sustituyendo (5) y (6) en la integral propuesta, queda:

$$I = \int x\sqrt{x^2+4}\ dx = \int \sqrt{x^2+4}\ x\ dx$$

$$I = \int u^{1/2}\ du/2 = 1/2\int u^{1/2}\ du$$

La última integral es de la forma $\int u^n\ du$, la que ya se conoce su solución.

$$\therefore\quad I = 1/2\int u^{1/2}\ du = 1/2\ \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$I = 1/3\ u^{3/2} + C$$

Regresando a la variable original, queda:

$$I = 1/3\ (x^2+4)^{3/2} + C$$

Aplicando la segunda alternativa se tiene:

$$I = \int x\sqrt{x^2+4}\ dx = \int (x^2+4)^{1/2}\ x\ dx \qquad (1)$$

como

$$u = (x^2+4)^{1/2}\ ; \qquad (2)$$

$$du = \frac{xdx}{(x^2+4)^{1/2}}\ ; \qquad \therefore\ x\ dx = (x^2+4)^{1/2}\ du$$

como $(x^2+4)^{1/2} = u$

entonces: $x\ dx = u\ du \qquad (3)$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), queda:

$$I = \int u\cdot u\ du = \int u^2\ du$$

Dicha integral es de la forma $\int u^n\ du$ cuya solución es:

$$I = \frac{u^3}{3} + C$$

Volviendo a la integral original se obtiene:

$$I = \frac{\left[(x^2+4)^{1/2}\right]^3}{3} + C$$

$$\therefore \quad \int x\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{(x^2+4)^{3/2}}{3} + C$$

Utilizando ahora la alternativa (3), se obtiene:

$$I = \int x\sqrt{x^2+4}\,dx \qquad (1)$$

como $\qquad u = x^2 \qquad (2)$

entonces $\quad du = 2x\,dx \quad ; \quad x\,dx = du/2 \qquad (3)$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), queda:

$$I = \int\sqrt{u+4}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int\sqrt{u+4}\,du$$

Al comparar la última integral con las de la Tabla 1, se observa que no se parece a alguna, y en este caso es necesario hacer otro nuevo cambio de variable, una alternativa es:

$$v = u + 4 \quad , \qquad dv = du$$

$$I = \frac{1}{2}\int\sqrt{u+4}\,du = \frac{1}{2}\int v^{1/2}\,dv$$

Cuya solución es:

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{v^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}\,v^{3/2} + C$$

regresando a la variable u con la transformación:

$$v = u + 4$$

queda

$$I = \frac{1}{3}\,(u+4)^{3/2} + C$$

por último, se regresa a la variable x con la transformación:

$$u = x^2$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\,(x^2+4)^{3/2} + C$$

Para la última alternativa, como se trata de la función identidad queda la misma integral con otra variable que, como se vió, no se puede resolver en forma directa.

Al analizar las alternativas de solución, se observa que existen algunas que son más simples que otras, por ejemplo, las alternativas (1) y (2) son más simples que la (3), y la (4) no conduce a alguna solución; por lo que se debe buscar de ser posible, el cambio de variable que cumpla los siguientes objetivos:

a).- Al hacer el cambio de variable se obtenga alguna de las 9 integrales de la Tabla 1.

b).- Que las operaciones algebráicas que se realicen sean los más simples posible.

Como se ve más adelante, algunas ocasiones no se puede lograr lo anterior, entonces se tienen que usar varios métodos de integración para resolver el problema planteado o algunas transformaciones algebráicas para llegar al resultado, esto último se ilustra en el siguiente:

EJEMPLO

Calcule la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{1+e^x}$$

SOLUCION:

Como se observa, la integral no es inmediata (no es semejante a ninguna de las que están en la Tabla 1).

Podemos pensar en las sustituciones

$1^{o}$ $u = e^{x}$, $du = e^{x}\,dx$ ó $dx = \frac{du}{e^{x}} = \frac{du}{u}$

$2^{o}$ $u = 1+e^{x}$, $du = e^{x}\,dx$

$3^{o}$ $u = \frac{1}{1+e^{x}}$

Para la primera sustitución, la integral resultante es:

$$\int \frac{dx}{1+e^{x}} = \int \frac{du/u}{1+u} = \int \frac{du}{u(1+u)}$$

esta integral tampoco aparece en la Tabla 1, y aparentemente no es fácil de resolver por este método.

El lector podrá verificar que algo análogo ocurre para las otras sustituciones propuestas, por lo que se empleará el siguiente artificio (paso algebraico):

Con el fin de poder hacer un cambio de variable $u=u(x)$, tal que la función de u se pueda expresar en forma semejante a alguna de las de la Tabla 1.
Multiplíquese numerador y denominador por $e^{-x}$, obteniendo:

$$I = \int \frac{dx}{1+e^{x}} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+e^{-x}e^{x}} = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}$$

Ahora, se puede usar el siguiente cambio de variable:

$$u = e^{-x} + 1$$

$$du = - e^{-x}\,dx$$

Sustituyendo valores en la integral (1) se obtiene:

$$I = \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = \int - \frac{du}{u} = - \int \frac{du}{u}$$

Esta última integral es inmediata y aparece en la Tabla 1, por lo que:

$$I = - \ln u = - \ln (e^{-x}+1) + C$$

Nota.- El artificio de multiplicar la función a integrar $f(x)$ por otra función $g(x)$, en este caso $e^{-x}$, no se puede generalizar; algunas ocasiones es necesario realizar otras operaciones o transformaciones, todo ello tiene por objeto obtener una nueva integral que mediante un cambio de variable se puede resolver por alguna de las de la Tabla 1.

Obsérvese que la forma de resolver las integrales anteriores ha sido la siguiente:

$$\int f(x)\,dx \longrightarrow \int g(u)\,du$$

en que $u = u(x)$ entonces $du = u'(x)\,dx$
que es la diferencial de la función compuesta $g(u)$, es decir:

$$\int g(u)\,du = \int g\left[u(x)\right] u'(x)\,dx$$

lo que lleva al siguiente:

TEOREMA 6.1 Sea la función $u=u(x)$ definida sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ en donde $u'(x)$ es continua sobre el mismo intervalo. Si además $g(u)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[u_1,u_2]$ donde: $u_1=u(a)$ y $u_2=u(b)$, entonces:

$$\int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du = \int_{a}^{b} g\left[u(x)\right]\left(\frac{d\,u(x)}{dx}\right)dx$$

Pero $g\left[u(x)\right]\ u'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du$$

Como se puede observar, cuando se tiene $\int_a^b f(x)\,dx$ y ésta no es inmediata, entre otras alternativas, está la de recurrir a "un cambio de variable" del tipo $u=u(x)$ con el fin de tener la integral

$$\int_{u_2}^{u_2} g(u)\,du$$

que se resuelva por alguna de las de la Tabla 1, es decir, que sea inmediata.

DEMOSTRACION:

Se sabe que: $\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du = G(u)\Big|_{u_1}^{u_2}$

Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral, se sabe que existe una relación entre $g(u)$ y $G(u)$ dada por:

$$g(u) = \frac{d}{du}\,G(u) \qquad (1)$$

como $G(u) = g\left[u(x)\right]$ entonces

$$\frac{d}{du}\,G\left[u(x)\right] = \frac{dG}{dx}\,\frac{dx}{du} = g(u)$$

$$\therefore\ g(u)\,du = \frac{dG}{dx}\,dx \qquad (2)$$

Por otro lado

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{dG\left[u(x)\right]}{du}\,\frac{d\,u(x)}{dx} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), queda:

$$g(u)\,du = \frac{d}{du}\,G\left[u(x)\right]\,\frac{d\left[u(x)\right]}{dx}\,dx$$

Integrando ambos miembros, se tiene:

$$\int g(u)\,du = \int \frac{d}{du}\,G\left[u(x)\right]\,\frac{d\left[u(x)\right]}{dx}\,dx$$

pero

$$\frac{d}{du}\,G\left[u(x)\right] = g\left[u(x)\right]$$

$$\therefore\ \int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du = \int_a^b g\left[u(x)\right]\,\frac{d\left[u(x)\right]}{dx}\,dx$$

L.Q.Q.D.

El teorema anterior también es válido en el caso de que el límite superior es variable, es decir, para el caso de una variable indefinida.

A continuación aplicaremos el teorema anterior para resolver los siguientes ejemplos:

EJEMPLO

Se desea calcular la ordenada media de la función

$$f(x) = e^x \cos e^x$$

entre los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$

SOLUCION:

Como se vió en el capítulo 5, la ordenada media $f(c)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$f(c) = \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} e^x \cos e^x\,dx \quad \ldots (1)$$

sustituyendo en (1) los valores $x_1=0$ y $x_2=3$, se tiene:

$$f(c) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 e^x \cos e^x\, dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \cos e^x (e^x dx) \quad . . (2)$$

Haciendo la sustitución

$$u = e^x \qquad \text{entonces:} \qquad du = e^x\, dx \qquad . . . (3)$$

Obsérvese que en este caso

$$\int_{x_1}^{x_2} \cos e^x (e^x dx) = \int_{u_1}^{u_2} \cos u\, du \qquad . . . (4)$$

es decir,

$$f\left[u(x)\right] = \cos e^x$$

$$u(x) = e^x$$

$$\frac{d\, u(x)}{dx} = e^x$$

O sea:

$$\int_{u_1}^{u_2} g(u)\, du = f\left[u(x)\right]\frac{d\, u(x)}{dx}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Como $\quad u = e^x$

si $\quad x_1 = 0 \implies u_1 = e^0 = 1$

si $\quad x_2 = 3 \implies u_2 = e^3$

Sustituyendo (4) en (2) queda:

$$f(c) = \frac{1}{3}\int_1^{e^3} \cos u\, du = \frac{1}{3} \operatorname{sen} u \Big|_1^{e3}$$

$$\therefore \quad f(c) = \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen} e^3 - \operatorname{sen} 1\right] = \frac{1}{3}\left[0.94 - 0.841\right] = \frac{0.1}{3}$$

$$f(c) = 0.033$$

Obsérvese que para obtener el valor de f(c) no fué necesario volver a la variable x, debido a que se calculó la

$$\int_{u_1}^{u_2} g(u)\, du$$

Considérese el siguiente ejemplo

EJEMPLO

Calcular el área de la curva $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ desde $x_1 = 1$ hasta $x_2 = 2$

SOLUCION:

Según lo visto en el capítulo 5, el área se calcula con el siguiente modelo matemático:

$$A = \int_{x_1=1}^{x_2=2} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \qquad (1)$$

Esta integral no parece inmediata, pero véase que pasa si hacemos la siguiente sustitución:

$$u = \sqrt{x} \qquad (2)$$

diferenciando se tiene

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, du \qquad (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1), y cambiando los límites de integración queda:

$$A = \int_{u_1}^{u_2} e^u\, 2du = \int_{u_1}^{u_2} 2\, e^u\, du = 2\int_{u_1}^{u_2} e^u\, du$$

que según la Tabla 1, es una integral inmediata que dá $2\, e^u$ por lo tanto:

$$A = 2\,e^{u} \Big|_{u_1}^{u_2}$$

Como $u = x$, entonces:

Si $x_1 = 1 \implies u_1 = 1$

Si $x_2 = 2 \implies u_2 = \sqrt{2}$

$$\therefore A = 2\,e^{u} \Big|_{1}^{\sqrt{2}} = 2(e^{\sqrt{2}} - e) = 2(4.11 - 2.72) = 2.78\ u^2$$

EJEMPLO

Resolver las siguientes integrales aplicando el Teorema.

6.1

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}}$ b) $\displaystyle\int 2x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$

c) $\displaystyle\int sen^2x\ cosx\ dx$ d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x}\ dx$

SOLUCION:

Caso a).- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}}$ . . . (1)

Haciendo la sustitución $u = 4x-3$ . . . (2)

entonces $du = 4\ dx$ se tiene $\therefore dx = du/4$ . . . (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1), queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}} = \int \frac{(1/4)\ du}{\sqrt{u}}$$

reagrupando e integrando se obtiene:

$$\int \frac{1}{4}\, u^{-1/2}\ du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C = \frac{1}{2}\,u^{1/2} + C$$

y regresando a la variable original $u=4x-3$, se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}} = \frac{1}{2}\,(4x-3)^{1/2} + C$$

Caso b). $\displaystyle\int 2x^2\sqrt{1-x^3}\ dx$

Si hacemos el siguiente cambio de variable: $u=1-x^3$ ..(1)

vemos que: $du = -3x^2\ dx$

$$\therefore\ x^2\ dx = -\frac{du}{3} \qquad ..(2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en b), queda:

$$\int 2\sqrt{u}\cdot\frac{du}{-3} = -\frac{2}{3}\int u^{1/2}\ du = -\frac{2}{3}\,\frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} + C$$

Regresando a la variable original, queda:

$$= -\frac{2}{3}\,\frac{(1-x^3)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\therefore \int 2x^2\sqrt{1-x^3}\ dx = -\frac{4}{9}\,(1-x^3)^{3/2} + C$$

Caso c). $\displaystyle\int sen^2x\ cosx\ dx$

Algunas de las relaciones entre senx y cosx están dadas por:

$$d(senx) = cosx\ dx \quad y$$

$$d(cosx) = -senx\ dx$$

La función integrando, da idea de que cosx dx es d(senx), y entonces:

$$\int sen^2x\ cosx\ dx = \int sen^2x\ d(senx)$$

Con el uso de la relación anterior, la integral propuesta se puede resolver de la siguiente manera:

Hágase $u = senx$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \, du$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = u^3/3 + C$$

Regresando a la variable independiente "x", se obtiene - finalmente:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C$$

Caso d). $\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx$ . . .(1)

Si se hace $u = 1 + x$ . . .(2)

$du = dx$ . . .(3)

como se observa, la diferencial no incluye a $x^2$, por lo que - se despejará el valor de "x" y se expresará $x^2$ como función- de u

$$x = u - 1 \quad y$$

$$x^2 = (u-1)^2 = u^2 - 2u + 1 \quad . . .(4)$$

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), la integral adopta- la siguiente forma:

$$\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx = \int (u^2-2u+1) \sqrt{u} \, du$$

Efectuando operaciones:

$$= \int (u^2 \sqrt{u} - 2u \sqrt{u} + \sqrt{u}) \, du$$

$$= \int (u^{5/2}-2u^{3/2}+ u^{1/2}) \, du$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2u^{7/2}}{7} - \frac{4u^{5/2}}{5} + \frac{2u^{3/2}}{3} + C$$

regresando a la variable original con la sustitución $u=1+x$, queda:

$$\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2}{7} (1+x)^{7/2} - \frac{4}{5} (1+x)^{5/2} + \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} + C$$

Aunque en estos ejemplos no se hanpropuesto otras alternativas de cambio de variable, se ha elegido la que se considera más simple.

## 6.4 CAMBIO DE VARIABLE TRIGONOMETRICA.

Se expondrá este método a partir del siguiente:

EJEMPLO

Calcular el área entre la curva $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, el eje Y, y las rectas $x = 0$, $x = a/2$

SOLUCION:

El área está dada por:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx = \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad . . (1)$$

Para resolver la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

considérese las siguientes alternativas de sustitución:

A.- $u = x^2 \implies du = 2x \, dx$

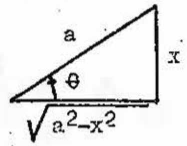
B.- $u = a^2 - x^2 \implies du = -2x \, dx$

C.- $u = \sqrt{a^2-x^2} \implies du = - \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Al hacer el cambio de variable, se verá que no se llega a alguna de las integrales dadas en la Tabla 1, por lo que - para estos casos se usará otro cambio de variable llamado -

trigonométrico.

Existen reglas de correspondencia que relacionan la variable independiente, y el radical con otra variable que es el ángulo de un triángulo rectángulo, como se muestra a continuación:




Estableciendo que:

$$\text{sen}\,\theta = x/a \qquad \therefore \qquad x = a\,\text{sen}\,\theta \qquad \ldots (2)$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad \therefore \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta \qquad \ldots (3)$$

La expresión (1), dá la regla de correspondencia entre las variables x y θ, resultando que $x = x(\theta)$, y por tanto el radical también es función de θ.

Se presentan dos casos: $x \geq 0$ y $x < 0$, en los cuales la variable θ está comprendida entre $[0\, ,\, \pi/2]$ y $[0\, ,\, -\pi/2]$ respectivamente.

Diferenciando la expresión (2), se tiene:

$$dx = a\cos\theta\, d\theta \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1), se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

La integral resultante es inmediata

$$\therefore \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \theta \Big]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Regresando a la variable x se tiene:

$$x/a = \text{sen}\,\theta \qquad \therefore \qquad \theta = \text{ang sen}\, x/a$$

es decir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{ang sen}\, x/a \Big]_{x_1}^{x_2} = \text{ang sen}\, x/a \Big]_{0}^{a/2}$$

finalmente, aplicando la regla de Barrow, queda:

$$\int_{0}^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = [\pi/6 - 0] = 0.524\ u^2$$

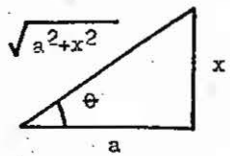
A continuación se tratará otro caso que se resolverá en forma semejante.

EJEMPLO

Calcular: $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (1)$$

SOLUCION:

Relacionemos la variable independiente "x" y el radical con el ángulo θ del siguiente triángulo rectángulo:




Se tiene que:

$$\text{Tan}\,\theta = x/a \implies x = a\,\text{Tan}\,\theta \qquad (2)$$

$$dx = a \sec^2\theta \, d\theta \qquad (3)$$

Además

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow \sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos\theta} = a \sec\theta \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1), se obtiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta \; d\theta}{a \sec\theta} = \int \sec\theta \, d\theta$$

que es una integral inmediata.

$$\therefore \int \sec\theta \, d\theta = L_n \left| \sec\theta + \tan\theta \right| + C$$

Volviendo a la variable independiente "x", se obtiene finalmente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = Ln \left| \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C$$

Los ejemplos anteriores, se resolvieron por el método de cambio de variable trigonométrica, también llamado "método de sustitución trigonométrica". Dicho método relaciona los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo con los radicales que aparecen en la función integrando y el ángulo $\theta$, por lo que los radicales también se pueden referir al Teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

Si en el triángulo rectángulo conocemos los dos catetos, entonces:

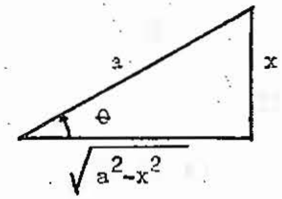
$$\text{hipotenusa} = \sqrt{(\text{cateto})_1^2 + (\text{cateto})_2^2}$$

Si conocemos un cateto y la hipotenusa:

$$(\text{cateto})_2 = \sqrt{(\text{hipotenusa})^2 - (\text{cateto})^2}$$

A continuación se describirán los diferentes casos que se presentan en estos radicales.

Caso 1.- Si tenemos $\sqrt{a^2-x^2}$ (a=cte. , x=variable) el triángulo es:

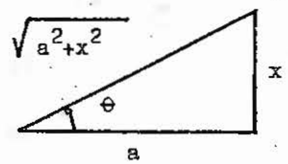



Las variables x y $\theta$ se relacionan de la siguiente manera:

$$x = a \operatorname{sen}\theta$$

Caso 2.- Si se tiene $\sqrt{a^2+x^2}$ donde a=constante, x=variable.

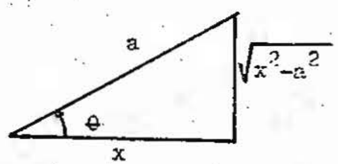
Este radical representa la suma del cuadrado de los catetos; dibujemos un triángulo y llamemos $\theta$ al ángulo opuesto a la variable x.




En este caso, también se pueden relacionar las variables x y $\theta$ de la siguiente manera:

$$x = a \tan\theta$$

Caso 3.- Si tenemos $\sqrt{x^2-a^2}$ (a=constante, x=variable), formamos el triángulo:



Entonces, la función que relaciona a las variables x y $\theta$ es:

$$x = a\sec\theta$$

En resúmen se concluye lo siguiente:

a) Para integrandos donde aparezcan $(a^2-x^2)^{n/2}$, $(x^2+a^2)^{n/2}$, $(x^2-a^2)^{n/2}$ donde n es entero, considérese alguno de los casos 1 a 3.

b) Establézcase un triángulo que relacione la variable x y el radical con la variable angular $\theta$.

c) Intégrese en la nueva variable.

d) Regrésese a la variable original.

En los casos de integrales definidas, una alternativa mas para el paso d), consiste en cambiar los límites de integración y aplicar la Regla de Barrow para la nueva variable.

A continuación se resolverán otros ejemplos utilizando el "Método de sustitución trigonométrica".

EJEMPLO

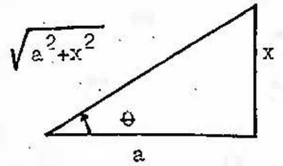
Calcular $$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

SOLUCION:

Aunque en este ejercicio no aparece una raíz, nos valdremos del artificio de sacar raíz cuadrada y elevar al cuadrado, como se hace a continuación:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} \qquad (1)$$

Asociando el radical y la variable "x" a un triángulo rectángulo, se tiene:




Donde: $\quad \operatorname{Tan}\theta = x/a \implies x = a\operatorname{Tan}\theta$

Por lo tanto $\quad dx = a\sec^2\theta\, d\theta \qquad (2)$

Además $\quad \sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta \qquad (3)$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), queda:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a\sec\theta)^2}$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta$$

volviendo a la variable "x":

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$$

EJEMPLO

Calcular el área encerrada por la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

SOLUCION:

El área está dada por la siguiente expresión:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

De la ecuación (1), se despeja y, para tener la regla de correspondencia $y = f(x)$.

$$y = f(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

como en este caso se tiene para un valor de x, dos valores distintos de y, se obtienen dos reglas de correspondencia que son:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2} \quad \forall \quad y \geqslant 0$$

$$y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2} \quad \forall \quad y < 0$$

Dada la simetría de la figura, se calculará el área de la parte sombreada, que se muestra en la figura 6.4 y se multiplicará el resultado por 4, para obtener el área total:

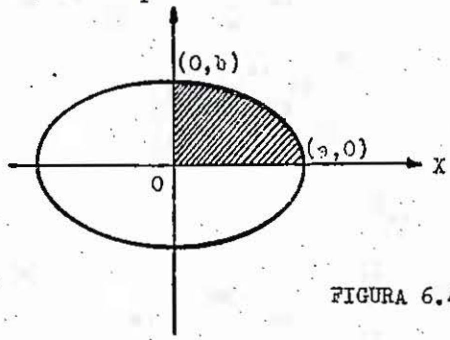


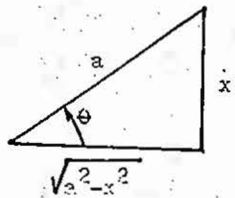

FIGURA 6.4

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

Aplicando las propiedades básicas, resulta:

$$A = 4\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx \qquad (2)$$

Asociémos nuevamente la variable x y el radical a un triángulo rectángulo




Entonces:

$$x = a \operatorname{sen}\theta \qquad (3)$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos\theta \qquad (4)$$

Diferenciando (3), se tiene:

$$dx = a \cos\theta\, d\theta \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (2), queda:

$$A = 4\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{4b}{a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a\cos\theta\, a\cos\theta\, d\theta$$

$$\therefore \quad A = 4ab \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta\, d\theta \qquad (6)$$

donde $\theta_1 = 0$ cuando $x = 0$

y $\theta_2 = \pi/2$ cuando $x = a$

La integral resultante no es inmediata y con los métodos tratados hasta ahora no se puede resolver, por lo que es necesario auxiliarse de otros métodos de integración para -

los casos en que tengamos que resolver integrales donde aparezcan potencias de las funciones trigonométricas, como los autores tratan a continuación.

6.5 INTEGRACION POR TRANSFORMACION TRIGONOMETRICA.

Como se indica en el párrafo anterior, existen integrales de funciones trigonométricas, no inmediatas y que para resolverlas nos auxiliaremos de sustituciones utilizando las identidades trigonométricas para llegar a integrales inmediatas.

El problema consiste en resolver la integral de la expresión (6)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta \, d\theta \qquad (7)$$

para llegar a una integral inmediata, una forma de obtenerlo, es transformar la integral (7) con el uso de identidades trigonométricas, a otro tipo de integrales trigonométricas, que sean semejantes a las de la Tabla 1, como se muestra a continuación:

De la trigonometría se cumple que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (8)$$

$$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha \qquad (9)$$

y, a partir de las identidades anteriores se obtiene que:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad (10)$$

Sustituyendo (10) en (7), queda:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1/2 + \frac{\cos 2\theta}{2})\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos 2\theta \, d\theta \qquad \ldots.(11)$$

En la expresión (11) resultan practicamente integrales inmediatas, cuyo resultado es:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos 2\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta \Big]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

regresando a la expresión (6), se obtiene:

$$A = 4ab\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} \qquad (12)$$

sustituyendo los valores de $\theta_1$ y $\theta_2$ en (12) y aplicando la regla de Barrow, se obtiene:

$$A = 4ab\left\{\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2(\pi/2)\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2(0)\right]\right\}$$

simplificando:

$$A = 4\pi ab \quad \text{unidades cuadradas.}$$

A continuación se harán otros ejemplos en los que se realizan transformaciones usando identidades trigonométricas.

EJEMPLO

Resolver la integral $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

SOLUCION:

De manera semejante al ejemplo anterior, hágase la sustitución:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \qquad \text{obteniendo:}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x \, dx$$

Las integrales anteriores resultan practicamente inmediatas, si se hace $\cos 2x = \cos u$, con la sustitución $u=2x$, con lo que el resultado es:

$$\int sen^2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x + C$$

EJEMPLO

Resolver la integral $\int cos^3x\, dx$

SOLUCION:

Para aplicar la sustitución anterior a esta integral hágase:

$$\int cos^3x\, dx = \int cos^2x\, cosx\, dx$$
$$= \int(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x)\, cosx\, dx$$
$$= \int \frac{1}{2}cosx\, dx + \frac{1}{2}\int cos2x\, cosx\, dx$$

pero la segunda integral no se ha visto aún como se resuelve, por lo que en este caso, se probará otra sustitución; hágase: $cos^2x = 1-sen^2x$.

$$\int cos^3x\, dx = \int(1-sen^2x)\, cosx\, dx$$
$$= \int cosx\, dx - \int sen^2x\, cosx\, dx$$

si en la segunda integral se hace la sustitución

$u = senx$ $\qquad du = cosx\, dx$

y se llega a integrales inmediatas, cuya solución es:

$$\int cos^3x\, dx = senx - \frac{1}{3}sen^3x + C$$

En algunas integrales aparecen productos de potencias de funciones trigonométricas, algunas de las cuales se pueden representar como:

$$\int sen^mu\, cos^nu\, du \qquad \text{donde} \qquad m,n \in I$$

Las sustituciones que se recomiendan se desprenden de los dos últimos ejemplos vistos anteriormente, en donde se usaron identidades trigonométricas que transformaron las integrales a integrales inmediatas, las recomendaciones para lograr lo anterior son:

Caso 1.- Si m y n son pares y positivos, o alguno de los dos es cero, hágase las siguientes sustituciones:

$$sen^2u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2u$$
$$cos^2u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2u$$



Caso 2.- Si m y/ó n es impar positivo, auxíliese de la siguiente identidad:

$$sen^2u + cos^2u = 1$$

sustituyendo la función $sen^2u = 1 - cos^2u$ ó $cos^2u = 1 - sen^2u$ en la función trigonométrica cuya potencia sea impar.

De esta manera se llegará a funciones del tipo $\int u^n\, du$ donde u es la función trigonométrica $sen\alpha$ ó $cos\alpha$

A continuación se ilustra el proceso descrito anteriormente con los siguientes ejemplos:

EJEMPLO

Resolver: $I = \int sen^2x\, cos^2x\, dx \qquad (1)$

SOLUCION:

Como la integral (1) es del tipo del caso 1, por lo que se hacen las sustituciones:

$$sen^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x\,, \qquad cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$$

$$I = \int (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x)(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x)\ dx$$

Efectuando operaciones:

$$I = \int \tfrac{1}{4}\,dx - \int \tfrac{1}{4}\cos^2 2x\ dx \qquad (2)$$

Como se obtuvo una potencia par de la función coseno, otra vez hágase la sustitución:

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4x \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), queda:

$$I = \tfrac{1}{4}\int dx - \tfrac{1}{4}\int(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4x)\ dx$$

$$= \int(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8})\ dx - \tfrac{1}{8}\int \cos 4x\ dx$$

$$= \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{4}\ \mathrm{sen}\,4x + C$$

EJEMPLO

Resolver $I = \int \mathrm{sen}^2 x \cos^5 x\ dx \qquad (1)$

SOLUCION:

La integral es del caso 2, por lo que se resolverá de la siguiente manera: Arreglando la función de potencia impar como se indica a continuación:

$$I = \int \mathrm{sen}^2 x\cos^5 x\ dx = \int \mathrm{sen}^2 x \cos^4 x \cos x\ dx \qquad (2)$$

y usando la identidad $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$, sustituyéndola en (2), queda

$$I = \int \mathrm{sen}^2 x\,(1-\mathrm{sen}^2 x)^2 \cos x\ dx$$

Desarrollando:

$$I = \int \mathrm{sen}^2 x\,(1 - 2\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}^4 x)\cos x\ dx$$

Las integrales resultantes son inmediatas, por lo que el resultado es:

$$\therefore \int \mathrm{sen}^2 x\cos^5 x\ dx = \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x - \tfrac{2}{5}\mathrm{sen}^5 x + \tfrac{1}{7}\mathrm{sen}^7 x + C$$

EJEMPLO

$$I = \int \mathrm{sen}^3 x\cos^4 x\ dx \qquad (1)$$

SOLUCION:

Como la integral (1) es del tipo del caso 2, para resolverla, factorícese $\mathrm{sen}^3 x$ y utilícese la identidad:

$\mathrm{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, esto es:

$$\int \mathrm{sen}^3 x\cos^4 x\ dx = \int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{sen}\,x\cos^4 x\ dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{sen}\,x\cos^4 x\ dx$$

Efectuando operaciones:

$$= \int(\cos^4 x - \cos^6 x)\,\mathrm{sen}\,x\ dx$$

$$= \int \cos^4 x\,\mathrm{sen}\,x\ dx - \int \cos^6 x\,\mathrm{sen}\,x\ dx$$

$$\therefore I = \int \mathrm{sen}^3 x\cos^4 x\ dx = -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Se pueden presentar también integrales de la forma:

$$I = \int \tan^n u\ du \qquad (1)$$

ó $I = \int \cot^n u\ du$ (n entero positivo mayor que 1.) (2)

En este caso se utilizan las siguientes identidades trigonométricas:

$$\tan^n u = \tan^{n-2}u \tan^2 u = \tan^{n-2}u (\sec^2 - 1) \quad \ldots (3)$$

$$\cot^n u = \cot^{n-2}u \cot^2 u = \cot^{n-2}u (\csc^2 u - 1) \quad \ldots (4)$$

Con la identidad (3), en la integral (1) queda:

$$I = \int \tan^{n-2}u \tan^2 u \, du = \int \tan^{n-2}u (\sec^2 u - 1) \, du$$

$$= \int \tan^{n-2}u \sec^2 u \, du - \int \tan^{n-2}u \, du$$

$$\therefore \quad I = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - \int \tan^{n-2}u \, du$$

La $\int \tan^{n-2} du$ se resuelve utilizando nuevamente el proceso anterior.

Para $I = \int \cot^n u \, du$ el proceso es análogo.

Resolvamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO

$$\int \tan^3 x \, dx = \int \tan x (\tan^2 x) \, dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln |\sec x| + C$$

EJEMPLO

$$\int \cot^5 ax dx = \frac{1}{a} \int \cot^5 ax \cdot adx$$

$$= \frac{1}{a} \int \cot^3 ax \cot^2 ax \, adx$$

$$= \frac{1}{a} \int \cot^3 ax (\csc^2 ax - 1) \, adx$$

$$= \frac{1}{a} \int \cot^3 ax (\csc^2 ax) \, adx - \frac{1}{a} \int \cot^3 ax \, adx$$

$$= \frac{1}{a} \left(-\frac{\cot^4 ax}{4}\right) - \frac{1}{a} \int \cot ax (\cot^2 ax) \, adx$$

$$= -\frac{\cot^4 ax}{4a} - \frac{1}{a} \int \cot ax (\csc^2 ax - 1) \, adx$$

$$= -\frac{\cot^4 ax}{4a} - \frac{\cot^2 ax}{2a} + \frac{1}{a} \ln |\operatorname{sen} ax| + C$$

También se pueden presentar integrales de la forma:

$$I = \int \sec^n u \, du \qquad (1)$$

ó

$$I = \int \csc^n u \, du \qquad (2)$$

cuando n es par, se emplea alguna de las siguientes identidades:

$$\sec^n u = \sec^{n-2}u \sec^2 u = \sec^2 u (\tan^2 u + 1)^{(n-2)/2} \qquad (3)$$

$$\csc^n u = \csc^{n-2}u \csc^2 u = \csc^2 u (\cot^2 + 1)^{(n-2)/2} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (1), queda:

$$I = \int (\tan^2 u + 1)^{(n-2)/2} \sec^2 u \, du$$

Las integrales resultantes son del tipo:

$$\int u^n \, du \qquad \text{y} \qquad \int \sec^2 u \, du$$

que ya son inmediatas.

En forma análoga se procede para la $\int \csc^n u \, du$. Resolvamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO

$$\int \sec^4 u\,du = \int \sec^2 u \sec^2 u\,du$$
$$= \int \sec^2 u\,(\tan^2 u + 1)\,du$$
$$= \int \sec^2 u \tan^2 u\,du + \int \sec^2 u\,du$$
$$= \frac{\tan^3 u}{3} + \tan u + C$$

EJEMPLO

$$\int \csc^6 2x\,dx$$

SOLUCION:

Por comodidad, hágase la sustitución

$$2x = u \qquad 2\,dx = du$$

$$I = \int \csc^6 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \csc^6 u\,du = \frac{1}{2}\int \csc^2 u\,(\cot^2 u + 1)^2\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int \csc^2 u\,(\cot^4 u + 2\cot^2 u + 1)\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int \csc^2 u \cot^4 u\,du + \int \csc^2 u \cot^2 u\,du + \frac{1}{2}\int \csc^2 u\,du$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cot^5 u}{5} - \frac{\cot^3 u}{3} - \frac{1}{2}\cot u + C$$
$$= -\frac{\cot^5 2x}{10} - \frac{\cot^3 2x}{3} - \frac{\cot 2x}{2} + C$$

Cuando "n" es impar, no se llega a la solución, y este caso se tratará posteriormente.

Además, se pueden presentar integrales de la forma:

$$I = \int \sec^m u \tan^n u\,du \qquad (1)$$
$$I = \int \csc^m u \cot^n u\,du \qquad (2)$$

En estos casos se emplean las siguientes identidades, para llegar a integrales inmediatas:

$$\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$$
$$\csc^2 u = 1 + \cot^2 u$$

Caso a) $m$: par positivo.

$$\int \sec^m u \tan^n u\,du = \int \sec^{m-2} u \tan^n u \sec^2 u\,du$$
$$= \int (1+\tan^2 u)^{(m-2)/2} \tan^n u \sec^2 u\,du \ldots (3)$$

con $d(\tan u) = \sec^2 u\,du$

Las integrales (3) son de la forma $\int u^n\,du$

Procediendo analogamente para la integral (2), queda:

$$\int \csc^m u \cot^n u\,du = -\int (1+\cot^2 u)^{(m-2)/2} \cot^n u \csc^2 u\,du$$

Caso b) $n$ impar positivo

$$\int \sec^m u \tan^n u\,du = \int \sec^{m-1} u \tan^{n-1} u \sec u \tan u\,du$$

Haciendo $\tan^{n-1} u = (\sec^2 - 1)^{(n-1)/2}$ ,

$d(\sec u) = \sec u \tan u\,du$ , queda:

$$\int \sec^m u \tan^n u \, du = \int \sec^{m-1} u \, (\sec^2 u - 1)^{\frac{n-1}{2}} \sec u \tan u \, du$$

$$= \int \sec^{m-1} u \, (\sec^2 u - 1)^{\frac{n-1}{2}} \, d(\sec u) \quad \ldots .(4)$$

Las integrales (4), son de la forma $\int u^n du$

Procediendo analogamente para la integral (2), queda:

$$\int \csc^m u \cot^n u \, du = -\int \csc^{m-1} u \, (\csc^2 u - 1)^{\frac{n-1}{2}} \csc u \cot u \, du$$

$$= -\int \csc^{m-1} u \, (\csc^2 u - 1)^{\frac{n-1}{2}} \, d(\csc u)$$

que también son de la forma $\int u^n \, du$

Resolvamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO

Calcular $\quad I = \int \sec^4 ax \, (\tan^{-4} ax) \, dx$

SOLUCION:

$$I = \int \sec^4 ax \, (\tan^{-4} ax) \, dx$$

$$= \int \sec^2 ax \, \tan^{-4} ax \, (\sec^2 ax) \, dx$$

$$= \int (1+\tan^2 ax) \, \tan^{-4} ax \, (\sec^2 ax) \, dx$$

$$= \frac{1}{a} \int (\tan^{-4} ax + \tan^{-2} ax) \, d(\tan ax)$$

$$= \frac{1}{a} \left[ \frac{\tan^{-3} ax}{-3} + \frac{\tan^{-1} ax}{-1} \right] + C$$

$$= -\frac{\cot^3 ax}{3a} - \cot ax + C$$

EJEMPLO

Calcular $\quad I = \int \dfrac{\operatorname{sen}^{3/2} x}{\cos^{11/2} x} \, dx$

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^{3/2} x}{\cos^{3/2} x \, \cos^4 x} \, dx = \int \tan^{3/2} x \, \sec^4 x \, dx$$

$$= \int \sec^2 x \, \tan^{3/2} x \, \sec^2 x \, dx$$

$$= \int (1+\tan^2 x) \tan^{3/2} x \, \sec^2 x \, dx$$

$$= \int (\tan^{3/2} x + \tan^{7/2} x) \, \sec^2 x \, dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{2}{5} \tan^{5/2} x + \frac{2}{9} \tan^{9/2} x + C$$

EJEMPLO

Calcular: $\quad I = \int \sec^2 x \, \tan^3 x \, dx$

SOLUCION:

$$I = \int \sec x \, \tan^2 x \, (\sec x \tan x) \, dx$$

$$= \int \sec x \, (\sec^2 x - 1) \, d(\sec x)$$

$$= \int (\sec^3 x - \sec x) \, d(\sec x)$$

$$= \frac{1}{4} \sec^4 x - \frac{1}{2} \sec^2 x + C$$

Caso c):

m impar y n par.

$$I = \int \sec^m u \tan^n u \, du = \int \sec^m u \, (\sec^2 u - 1)^{n/2} \, du$$

Las integrales que se obtienen son de la forma:

$$\int \sec^n u \, du$$

Donde n es impar y como ya se mencionó, se resolverán - más adelante.

Por último se pueden tener integrales de la forma:

Caso a) $\int \operatorname{sen}(mu) \cos(nu) \, du$

Caso b) $\int \operatorname{sen}(mu) \operatorname{sen}(nu) \, du$

Caso c) $\int \cos(mu) \cos(nu) \, du$

En las que se utilizarán las siguientes identidades para transformarlas a integrales inmediatas.

$$\operatorname{sen}(mu) \cos(nu) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen}(m+n)u + \operatorname{sen}(m-n)u \right]$$

$$\operatorname{sen}(mu) \operatorname{sen}(nu) = \frac{1}{2} \left[ \cos(m-n)u - \cos(m+n)u \right]$$

$$\cos(mu) \cos(nu) = \frac{1}{2} \left[ \cos(m+n)u + \cos(m-n)u \right]$$

Para el caso a), se tiene:

$$\int \operatorname{sen}(mu) \cos(nu) \, du = \frac{1}{2} \left[ \int \operatorname{sen}(m+n)u \, du + \int \operatorname{sen}(m-n)u \, du \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(m+n)u}{m+n} + \frac{\cos(m-n)u}{m-n} \right] + C$$

Para el caso b), se tiene:

$$\int \operatorname{sen}(mu) \operatorname{sen}(nu) \, du = \frac{1}{2} \int \left[ \cos(m-n)u - \cos(m+n)u \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{m+n} \right] + C$$

Y para el caso c) se tiene:

$$\int \cos(mu) \cos(nu) \, du = \frac{1}{2} \int \left[ \cos(m+n)u + \cos(m-n)u \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{m-n} \right] + C$$

A continuación resolvamos el siguiente:

EJEMPLO

Calcular:

1.- $\int \operatorname{sen}3x \operatorname{sen}2x \, dx$

2.- $\int \cos 4x \cos 3x \, dx$

3.- $\int \operatorname{sen}5(x^3-2) \cos 6(x^3-2) \, x^2 dx$

SOLUCION:

1.- $\int \operatorname{sen}3x \operatorname{sen}2x \, dx$ en que m=3, n=2 se tiene el - caso b).

$$\int \operatorname{sen}3x \operatorname{sen}2x \, dx = \frac{1}{2} \left[ \int \cos(3-2)x \, dx - \int \cos(3+2)x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}x - \frac{1}{10} \operatorname{sen}5x + C$$

2.- $\int \cos 4x \cos 3x \, dx$ , la integral a resolver es del caso c), en que m=4 y n=3.

$$\int \cos 4x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \left[ \int \cos(4+3)x \, dx - \int \cos(4-3)x \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{14} \operatorname{sen}7x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}x + C$$

3.- $\int \operatorname{sen}5(x^3-2) \cos 6(x^3-2) \, x^2 \, dx$

Haciendo $u = (x^3-2)$ $du = 3x^2\,dx$, queda:

$$\int \operatorname{sen}5(x^3-2)\cos 6(x^3-2)\,x^2dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}5u\cos 6u\,du$$

que es el caso a), en que m=5u y n=6u

$$= \frac{1}{6}\int\left[\operatorname{sen}11u + \operatorname{sen}(-u)\right]du$$

$$= -\frac{1}{6}\,\frac{\cos 11u}{11} - \frac{1}{6}\,\frac{\cos(-u)}{-1} + C$$

$$= -\frac{\cos 11(x^3-2)}{66} + \frac{\cos(-x^3+2)}{6} + C$$

Otro ejemplo de transformación trigonométrica se presenta cuando calculamos la longitud del recorrido de un proyectil en caída libre.

EJEMPLO

Calcular la longitud recorrida por un proyectil entre las rectas $x_1=-2$, $x_2=2$ y cuya trayectoria está dada por la ecuación $f(x) = 4 - x^2$.

SOLUCION:

En el curso de Matemáticas I se ve que la diferencial de la longitud de arco está dada como

$$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\;dx$$

Por lo tanto, la longitud de un arco es la integral de la diferencial de arco comprendida entre los puntos que se desea obtener.

Así pues, si s es la longitud buscada, está entre las rectas $x_1=-2$ y $x_2=2$, se tiene que:

$$s = \int_{x_1=-2}^{x_2=2} ds = \int_{-2}^{2}\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\;dx \qquad (1)$$

Como $y = 4 - x^2$, entonces:

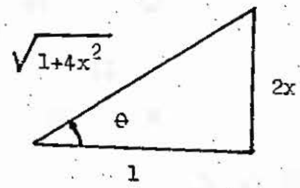
$$\frac{dy}{dx} = -2x \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), queda:

$$s = \int_{-2}^{2}\sqrt{1 + (-2x)^2}\;dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\sqrt{1 + 4x^2}\;dx \qquad (3)$$

Para resolver esta integral, se asocia el radical con la hipotenusa de un triángulo rectángulo, donde los catetos son 1 y 2x, respectivamente.




Donde: $\tan\theta = 2x \qquad (4)$

y $\sec\theta = \sqrt{1+4x^2} \qquad (5)$

Diferenciando (4), se tiene:

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta \qquad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (3), queda:

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec\theta\,\tfrac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec^3\theta\,d\theta$$

Pero dicha integral no se puede resolver con algunos de los métodos vistos hasta ahora, porque es necesario auxiliarse de otros métodos como el que se ve a continuación.

El término $px^2+qx+r$ aparece a menudo en la Transformada inversa de Laplace, por lo que a continuación se ven algunos ejemplos donde aparece dicho término y cual es el proceso para resolverlos:

EJEMPLO

Resolver $$I = \int \frac{4x+2}{x^2+x+4}\,dx \qquad (1)$$

SOLUCION:

Considérese la sustitución $u=x^2+x+4 \Longrightarrow du=(2x+1)dx$ y arréglese la integral (1) como:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x+4}\,dx = \int \frac{2(x+1)\,dx}{x^2+x+4}$$

con lo cual:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x+4}\,dx = \int \frac{2\,du}{u}$$

$$= 2\,\text{Ln}\,u + C$$

$$= 2\,\text{Ln}|x^2+x+4| + C$$

EJEMPLO

Resolver la integral $$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+4}\,dx$$

SOLUCION:

En este caso $x^2+2x+4$ es un trinomio cuadrado perfecto que se puede escribir como:

$$x^2 + 2x + 4 = (x+2)^2$$

sustituyendo en la integral, queda:

$$\int \frac{3x+2}{(x+2)^2}\,dx$$

si hacemos la sustitución $u = x+2$, donde $x = u-2$ se tiene: $dx = du$ y por lo tanto:

$$\int \frac{3(u-2)+2}{u^2}\,du = \int \frac{3u-6+2}{u^2}\,du = \int \frac{3u-4}{u^2}\,du$$

se separa como:

$$= \int \frac{3u}{u^2}\,du - 4\int \frac{du}{u^2}$$ simplificando:

$$= 3\int \frac{du}{u} - 4\int \frac{du}{u^2}$$

$$= 3\text{Ln}u - 4(-1/u) + C$$

volviendo a la variable x:

$$= 3\,\text{Ln}(x+2) + 4/x+2 + C$$

EJEMPLO

Resolver la integral $$\int \frac{3x+2}{x^2+x+4}\,dx$$

SOLUCION:

Completamos el denominador para obtener un trinomio cuadrado perfecto, esto es:

$$x^2+x+4 = x^2+x+ 1/4 + 15/4$$
$$= (x + \tfrac{1}{2})^2 + 15/4$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+4}\,dx = \int \frac{3x+2}{(x+\frac{1}{2})^2 + 15/4}\,dx$$

En el que se hace el siguiente cambio de variable:

$$u = x + \tfrac{1}{2} \Rightarrow x = u - \tfrac{1}{2} \quad \therefore \quad dx = du$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+4}\,du = \int \frac{3(u-\frac{1}{2}) + 2}{u^2 + 15/4}\,du$$
$$= 3\int \frac{u\,du}{u^2+15/4} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+15/4} \quad \ldots (3)$$

si se hace la sustitución en la primera integral de (3)

$v = u^2 + 15/4 \Rightarrow dv = 2u\,du \Rightarrow u\,du = dv/2$, queda:

$$3\int \frac{u\,du}{u^2+15/4} = \frac{3}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{3}{2}\,\text{Ln}\,v + C_2$$

volviendo a la variable u y después a x, queda:

$$= \frac{3}{2}\,\text{Ln}\left|u^2 + 15/4\right| + C_1$$

$$3\int \frac{u\,du}{u^2+15/4} = \frac{3}{2}\,\text{Ln}\left|(x+\tfrac{1}{2}) + 15/4\right| + C \quad \ldots (4)$$

Por otra parte, la $\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+15/4}$ se resuelve por sustitución trigonométrica y su solución es:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+15/4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{15/4}}\,\text{ang tan}\,\frac{4}{\sqrt{15/4}}\right]$$

Simplificando y volviendo a la variable "x":

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\,\text{ang tan}\,\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{15}} + C_3 \quad \ldots (5)$$

finalmente sustituyendo (4) y (5) en (3), resulta:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+4}\,dx = 3\left[\frac{1}{2}\,\text{Ln}\left|(x+\tfrac{1}{2})^2 + 15/4\right|\right] + $$
$$+ \frac{1}{\sqrt{15}}\,\text{ang tan}\,\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{15}} + C$$

$$= \frac{3}{2}\,\text{Ln}\left|(x+\tfrac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}\right| +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{15}}\,\text{ang tan}\,\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{15}} + C$$

## 6.6 INTEGRACION POR PARTES.

Uno de los métodos que con más frecuencia se usa para transformar una integral dada en una inmediata, es el de Integración por partes, dicho método consiste en expresar $\int f(x)\,dx$ como la integral del producto de una función u(x) por la diferencial de otra función llamada d v(x) .

Lo anterior se obtiene de la diferencial del producto de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ como se ve en el siguiente:

TEOREMA 6.2

Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones definidas en el intervalo cerrado $[a,b]$ cuyas derivadas también son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

Para toda $x \in [a,b]$

DEMOSTRACION:

Sea el producto de funciones $u(x)\, v(x)$.

Entonces la diferencial del producto $u(x)\, v(x)$ es:

$$d\left[u(x)\, v(x)\right] = u(x)\, d\left[v(x)\right] + d\left[u(x)\right] v(x) \qquad (1)$$

Despejando $u(x)\, d\left[v(x)\right]$, se obtiene:

$$u(x)\, d\left[v(x)\right] = d\left[u(x)\, v(x)\right] - v(x)\, d\left[u(x)\right] \qquad (2)$$

Integrando la expresión anterior, se obtiene:

$$\int u(x)\, d\left[v(x)\right] = \int d\left[u(x) - v(x)\right] - \int v(x)\, d\left[u(x)\right] \ldots (3)$$

Entonces:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x) \qquad (4)$$

L.Q.Q.D.

Como se observa en la expresión (4), el método de Integración por Partes transforma el problema inicial de resolver una integral de la forma

$$\int u(x)\, d\left[v(x)\right] dx = \int f(x)\, dx$$

a otra integral inmediata ó que se resuelve por alguno de los métodos dados o por partes nuevamente.

No se intenta dar ningún tipo de regla general para la elección de los factores $u$ y $dv$, pués esto se logra solamente con la experiencia, es por esto que se recomienda al lector resolver problemas en los que se aplique este método de integración.

Por simplicidad usaremos $u$ en vez de $u(x)$, y $v$ en vez de $v(x)$.

A continuación se investigará si con el método presente se puede resolver

$$\int \sec^3\theta\, d\theta$$

que se dejo inconcluso en el último ejemplo del sub tema anterior.

$$\int \sec^3\theta\, d\theta =$$

Las alternativas de seleccionar u y dv son:

| Alternativa | u | dv | du | v |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\sec^3\theta$ | $d\theta$ | $3\sec^3\theta\tan\theta d\theta$ | $\theta$ |
| 2 | $\sec^2\theta$ | $\sec\theta d\theta$ | $2\sec^2\theta\tan\theta d\theta$ | $L(\sec\theta+\tan\theta)$ |
| 3 | $\sec\theta$ | $\sec^2\theta d\theta$ | $\sec\theta\tan\theta d\theta$ | $\tan\theta$ |

Aplicando el Teorema 6.2, se tiene:

De (1):

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \theta \sec^3\theta - \int 3\theta \sec^3\theta \tan\theta \, d\theta \qquad (4)$$

De (2):

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \sec^2\theta \, L(\sec\theta + \tan\theta) - \int 2\sec^2\theta \tan\theta \, L(\sec\theta+\tan\theta) d\theta \qquad (5)$$

De (3):

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \sec\theta \tan\theta - \int \sec\theta \tan^2\theta \, d\theta \qquad (6)$$

De las tres alternativas, ninguna se puede resolver por los métodos tratados, pero la expresión (6), se puede simplificar de la siguiente manera:

Haciendo $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, se obtiene:

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \sec\theta \tan\theta - \int \sec\theta (\sec^2\theta - 1) \, d\theta$$

Efectuando operaciones:

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \sec\theta \tan\theta - \int \sec^3\theta \, d\theta + \int \sec\theta \, d\theta$$

En esta última expresión vuelve a aparecer $\int \sec^3\theta \, d\theta$ - pero con signo negativo, por lo que se puede agrupar con 1 - del lado izquierdo de la igualdad, con lo que (7) se transforma en:

$$2\int \sec^3\theta \, d\theta = \sec\theta \tan\theta + \int \sec\theta \, d\theta$$

finalmente:

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\left[\sec\theta \tan\theta + Ln(\sec\theta+\tan\theta)\right] + C$$

Como

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec^3\theta \, d\theta = 2\int_{-2}^{2} \sqrt{1+4x^2} \, dx$$

$$\therefore \int_{-2}^{2} \sqrt{1+4x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sec\theta \tan\theta + Ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Como $\sec\theta = \sqrt{1+4x^2}$

y $\tan\theta = 2x$, entonces:

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+4x^2} \, dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4x^2}\,(2x) + Ln(\sqrt{1+4x^2} + 2x)\right]_{-2}^{2}$$

Por lo tanto, la longitud recorrida es:

$$L = \frac{1}{2}\left[\sqrt{17}\,(4) + Ln(\sqrt{17} + 4) - (-4)\sqrt{17} - Ln(\sqrt{17} - 4)\right]$$

$$L = 18.53 \text{ unidades de longitud}$$

## 6.7 INTEGRACION POR DESCOMPOSICION EN FRACCIONES PARCIALES.

Como se ha visto, existen diferentes métodos para resolver una integral, hasta el momento se han tratado, el método de cambio de variable (algebraica, trigonométrica, identidades) y el de integración por partes, a continuación se expondrá otro método, llamado "método de integración por descomposición en fracciones parciales".

Para usar dicho método, es conveniente recordar lo que es una fracción racional:

Se llama fracción racional, a la expresión dada por la razón de dos polinomios, es decir:

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} \qquad (1)$$

Supóngase que los polinomios $N(x)$ y $D(x)$ no tienen raíces comunes entre sí.

Entonces las fracciones racionales pueden ser propias o impropias

| |
|---|
| DEFINICION 6.1<br>Fracción racional impropia es aquella en que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador. |
| DEFINICION 6.2<br>Fracción racional propia es aquella en que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. |

Las fracciones impropias se separan de la siguiente manera:

$$F(x) = P(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \qquad (2)$$

Donde $P(x)$ es un polinomio en x, y $\frac{R(x)}{D(x)}$ es una fracción propia: en la que $R(x)$ es el residuo de la división.

De tal forma que, $\int f(x)\,dx$, si $f(x)$ es una fracción racional impropia, se expresa de la siguiente manera:

$$\int \left[P(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right] dx$$

$$\therefore \int \left[P(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right] dx = \int P(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

La primera integral del lado derecho conduce a integrales del tipo $\int u^n du$ y la segunda expresión es la integral de una fracción racional propia, a la que para resolverla se aplica la teoria de fracciones racionales, como se ilustra en el siguiente:

EJEMPLO

Resolver la integral $\quad I = \int \frac{x^4-2x^2+2}{x^2-1}\,dx = \int f(x)dx \quad \ldots\ldots(1)$

SOLUCION:

$f(x)$ es una fracción impropia, entonces al dividir obtenemos:

$$f(x) = (x^2-1) + \frac{1}{x^2-1} \qquad \ldots\ldots(2)$$

Ahora se tiene el cociente $x^2-1$ más una fracción propia,

$$\therefore \quad I = \int \left[(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1}\right] dx$$

La integral $\int (x^2-1)\,dx$ se integra directamente, y para la parte $\int \frac{dx}{x^2-1}$ se resuelve de la siguiente manera:

Se sabe que: $$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

dicha división se expresa como la suma de dos fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \qquad (3)$$

Expresando (3) como una sola fracción, se deberá verificar que:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{Ax + Bx + A - B}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{x(A+B) + (A-B)}{x^2-1} \qquad (4)$$

Es decir: $1 = x(A+B) + (A-B)$

por igualdad de polinomios se establece que:

$$A + B = 0$$

y $$A - B = 1$$

De donde $A = -B = 1/2$ (5)

Por lo tanto la expresión (1) es:

$$\int \frac{x^4-2x^2+2}{x^2-1}\,dx = \int (x^2-1)dx + \int \frac{1}{x^2-1}dx$$

$$= \int (x^2-1)\,dx + \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right) dx \qquad (6)$$

Sustituyendo A y B en (6), queda:

$$= \int x^2dx - \int dx + \int \frac{(1/2)dx}{x-1} + \int \frac{(-1/2)dx}{x+1}$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^4-2x^2+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\,Ln(x-1) - \frac{1}{2}\,Ln\,(x+1) + C_1$$

$$= \frac{x}{3}\,(x^2-3) + Ln\,\frac{(x-1)^{1/2}}{(x+1)^{1/2}} + C$$

A continuación se expone una metodología para resolver integrales en las que haya fracciones racionales propias.

Toda fracción racional propia se representa como la suma de fracciones parciales y se presentan cuatro casos que son:

CASO I

Cuando el denominador de la fracción racional a integrar se puede descomponer en raices reales y distintas entre si, o sea:

$$D(x) = (x-a)\,(x-b)\,\ldots\ldots\,(x-l) \qquad (4)$$

Entonces una fracción propia se expresa como la suma de "l" fracciones parciales, es decir:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l} \qquad (5)$$

Es decir, la $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$ se expresa como:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \left[\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}\right] dx$$

$$\therefore \quad \int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \text{Ln}\ (x-a)^A\ (x-b)^B\ \ldots\ldots\ (x-i)^L\ c$$

Resolveremos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Hallar el área limitada por la curva

$y = (4x-2)/x^3-x^2-2x$, el eje X y las rectas $x=3$ y $x=4$.

SOLUCION:

El área está dada por la integral:

$$A = \int_3^4 \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx \qquad (1)$$

que es la integral de una fracción racional propia, la cual se descompone en fracciones parciales.

Para esto, factoricemos el denominador en:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$$

$$= (x-0)(x-2)(x+1) \qquad (2)$$

Por lo tanto (2) se expresa como:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \qquad (3)$$

Para obtener los valores de los coeficientes, hágase la suma de las fracciones parciales, quedando:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x)}{x\ (x-2)\ (x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A}{x\ (x-2)\ (x+1)}$$

Por igualdad de los polinomios del numerador, se verifica que:

$$4x - 2 = (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A$$

Por lo tanto:

$$A + B + C = 0 \qquad (4)$$

$$-A + B - 2C = 4 \qquad (5)$$

$$-2A = -2 \qquad (6)$$

De (6), se tiene que: $A = 1$ (7)

sustituyendo (7) en (4) y (5), y resolviendo el sistema, queda:

$$B = 1$$
$$C = -2$$

Por lo tanto (I) toma la siguiente forma:

$$A = \int_3^4 \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{x+1}\right) dx$$

cuyo resultado es:

$$A = \text{Ln}\ \frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\Bigg|_3^4 = \text{Ln}\ \frac{4(2)}{25} - \text{Ln}\ \frac{3(1)}{16} = \text{Ln}\ \frac{8}{25}\cdot\frac{16}{3}$$

$$= \text{Ln}\ \frac{128}{75} = 0.535\ u^2.$$

EJEMPLO

Hallar el área entre la curva $x = \dfrac{3y+7}{y^3+6y^2+11y+6}$, el eje Y, y las rectas $y=0$ y $y=1$.

SOLUCION:

El área viene dada como:

$$A = \int_0^1 \frac{3y+7}{y^3+6y^2+11y+6}\, dy$$

(Obsérvese que solo se han intercambiado "x" con "y", con respecto a los ejemplos anteriores).

En este caso, es necesario determinar las raices del denominador para factorizarlo, lo que podemos hacer por división sintética como se indica a continuación:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$y^3+6y^2+11y+6 = (y+1)\,(y^2+5y+6)$$

Pero: $y^2+5y+6 = (y+2)(y+3)$

$$\therefore \quad y^3+6y^2+11y+6 = (y+1)(y+2)(y+3)$$

Es decir:

$$\frac{3y+7}{y^3+6y^2+11y+6} = \frac{3y+7}{(y+1)(y+2)(y+3)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+2} + \frac{C}{y+3}$$

Para obtener A, B y C, súmense las fracciones parciales:

$$\frac{3y+7}{y^3+6y^2+11y+6} \quad \frac{A(y+2)(y+3) + B(y+1)(y+3) + C(y+1)(y+2)}{(y+1)\,(y+2)\,(y+3)}$$

Hasta aquí, se han seguido los mismos pasos que para el ejemplo anterior, a continuación se verá otra alternativa de obtener los coeficientes A, B y C, dicha alternativa no siempre es posible de realizar. Igualando numeradores, queda:

$$3y+7 = A(y+2)(y+3) + B(y+1)(y+3) + C(y+1)(y+2)$$

Se vé que si "y" toma los valores de las raices, se podrán anular los coeficientes, asi:

Si $y = -1$

$$3(-1) + 7 = A(-1+2)(-1+3) + B(0)(-1+3) + C(0)(-1+2)$$

$$\therefore \quad A = 2$$

Si $y = -2$

$$3(-2) + 7 = B(-1)(1)$$

$$\therefore \quad B = -1$$

Si $y = -3$

$$-2 = C(-2)(-1)$$

$$\therefore \quad C = -1$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \frac{3y+7}{y^3+6y^2+11y+6}\, dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{y+1} - \frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+3}\right] dy$$

que al resolverse, dá:

$$= 2\,\mathrm{Ln}(y+1) - \mathrm{Ln}(y+2) - \mathrm{Ln}(y+3)\Big|_0^1$$

$$= \mathrm{Ln}\,\frac{(y+1)^2}{(y+2)(y+3)}\Big|_0^1$$

$$= \text{Ln}\,\frac{4}{3(4)} - \text{Ln}\,\frac{1}{2(3)}$$

$$= \text{Ln}(1/3) - \text{Ln}(1/6)$$

$$= \text{Ln}\ 2$$

$$\therefore \quad \int \frac{3y+7}{y^3+6y^2+11y+6}\,dy = 0.693\ u^2.$$

CASO II

Cuando el denominador de la fracción racional a integrar se descompone en raices reales, pero alguna ó algunas de ellas se repiten, es decir:

$$D(x) = (x-a)^{\alpha}\ (x-b)^{\beta}\ (x-c)^{\gamma}\ \ldots\ (x-l)^{\lambda}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ son enteros positivos.

Entonces, se expresa la fracción propia como la suma de $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda$ fracciones parciales, como se indica a continuación:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{B_{\beta}}{(x-b)} + \ldots + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda}}{(x-l)}$$

donde los coeficientes se determinan según se vió en el caso I; también debe aclararse que algunos exponentes pueden ser igual a la unidad.

EJEMPLO

Calcular la ordenada media de la función $f(x) = x^2/x^3+3x-3x^2-1$ entre las rectas $x=2$ y $x=3$.

SOLUCION:

La ordenada media viene dada por la expresión

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3-2}\int_2^3 \frac{x^2}{x^3+3x-3x^2-1}\,dx$$

Simplificando:

$$f(c) = \int_2^3 \frac{x^2}{x^3+3x-3x^2-1}\,dx \qquad (1)$$

que es la integral de una fracción propia, en donde:

$$x^3+3x-3x^2-1 = (x-1)^3$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^3} = \int\left[\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)}\right]dx \qquad (*)$$

$$\therefore \quad \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A + B(x-1) + C(x-1)^2}{(x-1)^3}$$

Igualando los numeradores, se cumple que:

$$x^2 = A + B(x-1) + C(x-1)^2$$

$$= Cx^2 + (B-2C)x + (A-B+C)$$

Por igualdad de polinomios se tiene:

$C = 1$ ; $\quad B - 2C = 0 \Rightarrow B = 2$ ;

$A - B + C = 0 \Rightarrow A = B - C = 2 - 1 = 1$

Sustituyendo los valores de A, B y C en (1), queda:

$$f(c) = \int_2^3 \frac{x^2}{x^3+3x-3x^2-1}\,dx = \int_2^3\left(\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)} + \text{Ln}\ (x-1) \right]_2^3$$

$$= \left[ -\frac{1}{2(4)} - \frac{2}{2} + \text{Ln}\ 2 \right] - \left[ -\frac{1}{2} - \frac{2}{1} + \text{Ln}(1) \right]$$

$$= -\frac{1}{8} - 1 + \text{Ln}(2) - \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{11}{8} + \text{Ln}(2)$$

$$\therefore \quad f(c) = 2.07$$

CASO III

Cuando el denominador se puede descomponer en factores del tipo $px^2+qx+r$ con raices imaginarias, es decir:

$$D(x) = (p_1x^2+q_1x+r_1)(p_2x^2+q_2x+r_2) \ldots (p_kx^2+q_kx+r_k)$$

Una fracción propia con un denominador de este tipo se puede expresar como la suma de k fracciones parciales, esto es:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1+B_1x}{p_1x^2+q_1x+r_1} + \ldots\ldots + \frac{A_k+B_kx}{p_Kx^2+q_Kx+r_2}$$

Obsérvese que en cada sumando del segundo miembro se requieren determinar dos constantes.

EJEMPLO

Cuál es el área entre la curva $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)(x-1)}$ el eje X, y las rectas $x=2$ y $x=3$.

SOLUCION:

$$A = \int_2^3 \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$$

En este ejemplo, se tienen por un lado, dos raices imaginarias en el polinomio $x^2+1$ y por el otro, una raiz real en $(x-1)$, por lo que se está en los casos I y III, entonces la fracción propia se representa como:

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$

De donde:

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1) + C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$= \frac{Ax^2+Bx-Ax-B+Cx^2+C}{(x^2+1)(x-1)}$$

Igualando los polinomios del numerador, se tiene:

$$2x+1 = Ax^2+Bx-Ax-B+Cx^2+C$$

$$= x^2(A+C) + x(-A+B) + (C-B)$$

y

$$A + C = 0$$
$$-A + B = 2$$
$$C - B = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

$A = -3/2$ , $B = 1/2$ , $C = 3/2$

$$\therefore\ A = \int_2^3 \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int_2^3 \frac{(-3/2)x+1/2}{x^2+1} + \frac{3/2}{x-1}\quad dx$$

Separando términos:

$$= -\frac{3}{2}\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dx}{x^2+1} + \frac{3}{2}\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$$

Y finalmente , resolviendo las integrales se obtiene :

$$= \left[ -\frac{3}{4}\,\mathrm{Ln}(x^2+1) + \frac{1}{2}\,\text{ang tan } x + \frac{3}{2}\,\mathrm{Ln}(x-1) \right]_2^3$$

Obsérvese que para llegar a la solución anterior, es necesario aplicar varios métodos, como son los de sustitución y sustitución trigonométrica.

$$A = -\frac{3}{4}\,\mathrm{Ln}10 + \frac{1}{2}\,\text{ang tan}3 + \frac{3}{2}\,\mathrm{Ln}2 - \left(-\frac{3}{4}\mathrm{Ln}5 + \frac{1}{2}\text{ang tan}2 + \frac{3}{2}\mathrm{Ln}1\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\,\mathrm{Ln}10 + \frac{3}{4}\mathrm{Ln}5 + \frac{3}{2}\,\mathrm{Ln}2 + \frac{1}{2}\,(\text{ang tan}3 - \text{ang tan}2)$$

$$= \mathrm{Ln}\,\frac{5^{3/4}\;2^{3/2}}{10^{3/4}} + \frac{1}{2}\left(\text{ang tan}3 - \text{ang tan}2\right) = 0.59\ u^2.$$

CASO IV

Por último, se puede dar el caso de que al descomponer el polinomio del denominador, aparecen factores del tipo $px^2+qx+r$ repetidos y cuyas raices son números complejos, o sea:

$$D(x) = (p_1x^2+q_1x+r_1)^{\alpha} + (p_2x^2+q_2x+r_2)^{\beta} + \ldots + (p_Lx^2+q_Lx+r_L)^{\lambda}$$

Cuando esto sucede, la fracción propia correspondiente se puede expresar como:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(p_1x^2+q_1x+r_1)^{\alpha}} + \frac{A_2x+B_2}{(p_1x^2+q_1x+r_1)^{\alpha-1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{A_{\alpha}x+B_{\alpha}}{(p_1x^2+q_1x+r_1)} + \frac{C_1x+D_1}{(p_2x^2+q_2x+r_2)^{\beta}} + \frac{C_2x+D_2}{(p_2x^2+q_2x+r_2)^{\beta-1}} + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{L_1x+M_1}{(p_Lx^2+q_Lx+r_L)^{\lambda}} + \ldots + \frac{L_{\lambda}x+M_{\lambda}}{(p_Lx^2+q_Lx+r_L)}$$

Los sumandos que aparecen en la expresión anterior son integrales más simples de resolver, como se ilustra en el siguiente:

EJEMPLO

Calcular $\displaystyle\int \frac{(x-3)\,dx}{(x^2+x+1)^2\,(x+1)}$

SOLUCION:

La fracción racional propia es de los casos IV y I, por lo que se puede expresar como:

$$\frac{(x-3)}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{E}{x+1} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1)(x+1) + E(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^2\;(x+1)}$$

$$= \frac{Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^4+2Cx^3+2Cx^2+Cx+Dx^3+2Dx^2+2Dx+D+Ex^4+2Ex^3+3Ex^2+2Ex+E}{(x^2+x+1)^2\;(x+1)}$$

Agrupando términos:

$$x-3 = x^4(C+E)+x^3(2C+D+2E)+x^2(A+2C+2D+3E)+x(A+B+C+2D+2E) + (B+D+E)$$

Igualando los coeficientes de los polinomios, se obtiene:

$$\begin{aligned}
C + E &= 0\\
2C + D + 2E &= 0\\
A + 2C + 2D + 3E &= 0\\
A + B + C + 2D + 2E &= 1\\
B + D + E &= -3
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por algún método, resulta:

$$A = 4$$
$$B = 1$$
$$C = 4$$
$$D = 0$$
$$E = -4$$

Por lo tanto:

$$I = \int \frac{x-3}{(x^2+x+1)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{4x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \int \frac{4x\,dx}{x^2+x+1} + \int \frac{-4}{x+1}\,dx$$

A continuación los autores resolverán cada una de las integrales anteriores que aparecieron en el segundo miembro.

$$I_1 = \int \frac{4x+1}{\left[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]^2}\,dx$$

$$u = x + \frac{1}{2}$$
$$x = u - \frac{1}{2}$$
$$dx = du$$

$$I = \int \frac{4u-2+1}{(u^2+a^2)^2}\,du = \int \frac{4u\,du}{(u^2+a^2)^2} - \int \frac{du}{(u^2+a^2)^2}$$

$$v = u^2 + a^2$$
$$dv = 2u\,du$$

$$I_1 = \int \frac{2\,dv}{v^2} - \int \frac{du}{(u^2+a^2)^2}$$

La $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^2}$ se resuelve por sustitución trigonométrica, y se deja al alumno su planteamiento.

$$I_1 = -\frac{2}{v} - \frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\text{ ang tan }\frac{u}{a}$$

$$\therefore\ I_1 = -\frac{2}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{x+\frac{1}{2}}{2(\frac{3}{4})\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]} + \frac{1}{2(\frac{3}{4})^{3/2}}\text{ ang tan }\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}$$

$$I_2 = \int \frac{4x\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{4x\,dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{4u-2}{u^2+a^2}\,du$$

$$u = x + \frac{1}{2}$$
$$x = u - \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{4u\,du}{u^2+a^2} - \int \frac{2\,du}{u^2+a^2}$$

$$= 2\,\text{Ln}(u^2+a^2) - 2\int \frac{du}{u^2+a^2}$$

La $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ también se resuelve por sustitución trigonométrica

$$\therefore\ I_2 = 2\,\text{Ln}\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right] - \frac{2}{\sqrt{3/4}}\text{ ang tan}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)$$

Finalmente:

$$I_3 = \int \frac{-4dx}{x+1} = -4\,\text{Ln}(x+1)$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{(x-3)\,dx}{(x^2+x+1)^2(x+1)} = -\frac{2}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]} - \frac{2(x+1/2)}{3\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]} +$$

$$+ \left(\text{ang tan} \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\left(\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{3/4}} - \frac{2}{\sqrt{3/4}}\right) + 2\ \text{Ln} \frac{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{(x^2+x+1)^2(x+1)} = \frac{-2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]} + \left(-\frac{8}{3\sqrt{3}}\right) \text{ang tan} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$$

$$+ 2\ \text{Ln} \frac{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{7+2x}{3\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]} - \frac{8}{3\sqrt{3}} \text{ang tan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + 2\text{Ln} \frac{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \int \frac{(x-3)\,dx}{(x^2+x+1)^2(x+1)} = -\frac{7+2x}{3(x^2+x+1)} - \frac{8}{3\sqrt{3}} \text{ang tan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$+ \text{Ln} \frac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^4} + C$$

Resumiendo, para el caso de tener integrales con fracciones racionales, los pasos a seguir son:

a).- Si es fracción impropia, efectúese la división para obtener un polinomio cociente mas una fracción propia.

b).- De la fracción propia, factorizar el polinomio del denominador de acuerdo con sus raices reales y/o complejas.

c).- Descomponer la fracción en sus fracciones parciales del tipo de los casos I, II, III ó IV.

d).- Encontrar los valores de las constantes al igualar los coeficientes de los polinomios del numerador de la fracción, y resolver el sistema de ecuaciones lineales.

e).- Integrar cada fracción parcial, aplicando algún método de integración por partes o por cambio de variable si es necesario.

A continuación se hará el siguiente ejemplo, que ilustra los pasos a seguir cuando se tiene una integral con fracción racional.

EJEMPLO

Hallar la ordenada media de la función $f(x) = \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}$ en el intervalo $[2,4]$.

SOLUCION:

La ordenada media viene dada como:

$$f(c) = \frac{1}{4-2}\int_2^4 \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}\,dx \qquad (1)$$

Como $\frac{x^4-8}{x^3+2x^2}$ es una fracción impropia, se hace la división, resultando:

$$\frac{x^4-8}{x^3+2x^2} = x-2 + \frac{4x^2-8}{x^3+2x^2}$$

donde, la fracción obtenida es propia, entonces:

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(x - 2 + \frac{4x^2-8}{x^3+2x^2}\right) dx \qquad (2)$$

Agrupando términos:

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx - \int_2^4 dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{4x^2-8}{x^2(x+2)}\,dx$$

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx - \int_2^4 dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{4x^2-8}{(x-0)^2(x+2)} \quad \ldots(3)$$

Para la última integral, se ve que las raíces son [illegible] y 0, ésta última repetida.

Por lo tanto, según lo visto para los casos I y II, la integral se puede descomponer en :

$$\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{4x^2-8}{(x-0)^2(x+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \left( \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2} \right) dx$$

Trabajando sólo con las fracciones :

$$\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx^2+2Bx+cx^2}{x^2\,(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-8}{(x-0)^2(x+2)} = \frac{x^2(C+B) + x(A+2B) + 2A}{x^2\,(x+2)}$$

Igualando los polinomios del numerador, se tiene :

$$4x^2 - 8 = x^2(C+B) + x(A+2B) + 2A$$

Por lo tanto :

$$4 = C + B$$
$$0 = A + 2B$$
$$-8 = 2A$$

Resolviendo el sistema, queda :

$$A = -4$$
$$B = 2$$
$$C = 2$$

$$\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{4x^2-8}{(x-0)^2(x+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(-\frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x+2}\right) dx \quad \ldots(4)$$

Regresando a la expresión (3), y sustituyendo (4) en la misma expresión, tendremos :

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx - \int_2^4 dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{-4}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x+2}\right) dx$$

Agrupando :

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx - \int_2^4 dx - \int_2^4 \frac{2}{x^2}\,dx + \int_2^4 \frac{dx}{x} + \int_2^4 \frac{dx}{x+2}$$

que al integrarse, se obtiene :

$$= \frac{x^2}{4} - x + \frac{2}{x} + \text{Ln } x + \text{Ln}(x+2) \Bigg|_2^4$$

$$= \left( \frac{4^2}{4} - 4 + \frac{2}{4} + \text{Ln}4 + \text{Ln}6 \right) - \left(\frac{2^2}{4} - 2 + \frac{2}{2} + \text{Ln}2 + \text{Ln}4\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \text{Ln}3$$

6.8 USO DE TABLAS DE INTEGRACION.

Como han expuesto los autores en los problemas que se han propuesto, existen algunos tipos de integral que aunque no son inmediatas, se usan frecuentemente, como es el caso de:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{ ang tan }\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \text{Ln}\left( u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\,\right) + C$$

por lo que a continuación, se dará una tabla de las soluciones de las integrales que se usan más frecuentemente y que el lector podrá auxiliarse de ella para que por comparación y haciendo el cambio de variable adecuado llegue a la solución.

TABLA DE INTEGRALES.

$$\int \mathrm{Ln}\, u\, du = u\,(\mathrm{Ln}u - 1) + C$$

$$\int u\, e^u\, du = e^u\,(u - 1) + C$$

$$\int \sec u\, du = \mathrm{Ln}(\sec u + \tan u) = \mathrm{Ln} \tan(u/2 + \pi/4) + C$$

$$\int \csc u\, du = \mathrm{Ln}(\csc u - \cot u) + C = \mathrm{Ln} \tan(u/2) + C$$

$$\int \tan u\, du = \mathrm{Ln} \sec u + C$$

$$\int \cot u\, du = \mathrm{Ln}\, \mathrm{sen}\, u + C$$

$$\int \mathrm{sen}^2 u\, du = u/2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{sen}2u + C = \tfrac{1}{2}\,(u - \mathrm{sen}u \cos u) + C$$

$$\int \cos^2 u\, du = u/2 + \tfrac{1}{4}\mathrm{sen}2u + C = \tfrac{1}{2}\,(u + \mathrm{sen}u \cos u) + C$$

$$\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$$

$$\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{ang}\tan\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C \qquad u^2 > a^2$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \mathrm{ang}\,\mathrm{sen}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mathrm{Ln}(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{ang}\sec\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{Ln}\,\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{Ln}\,\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\,\mathrm{ang}\,\mathrm{sen}\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{1}{2}\, u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2\,\mathrm{Ln}(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

## 6.9 INTEGRALES IMPROPIAS.

Hasta el momento se han considerado implícitamente algunas restricciones al tratar con integrales definidas del tipo $\int_b^a f(x)dx$ , como es, que los límites de integración sean finitos; en este momento nos planteamos la pregunta ¿Se podrá calcular el área entre una función y el eje X, con límites infinitos?

La respuesta a esta pregunta se deduce del siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Calcular el área entre la curva $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje X, desde 0 a $\infty$

SOLUCION:

El área está dada por:

$$A = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

y como la $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$ fué definida para límites finitos, es conveniente efectuar la integral hasta un límite finito b, y después tender b a infinito, por lo que es conveniente hacer uso del concepto de límites, esto es:

$$A = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

La $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$ se resuelve por sustitución trigonométrica, con lo que se obtiene:

$$A = \lim_{b \to \infty} \text{ang tan } x \Big]_0^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\text{ang tan } b), \quad \text{aplicando límites, queda:}$$

$$= \text{ang tan } \infty$$

$$A = \pi/2$$

Obsérvese que en este caso, el resultado es un valor finito, mientras que si se sustituye directamente $\infty$ en la función ang tan, el resultado sería indeterminado.

Se desprende de este ejemplo, que una integral con límites infinitos puede tener un resultado finito, en cuyo caso se dice que converge, esto es:

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx = L$$

Para el caso en que ese límite no existe, se dice que la integral diverge.

DEFINICION 6.3

La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama impropia, si la función $f(x)$ en alguno ó algunos puntos del intervalo $[a,b]$ no es acotada, o si alguno de los límites tiende a $\pm\infty$.

El ejemplo anterior es el de límite superior infinito, también se puede presentar el caso de límite inferior infinito, el cual se resuelve de una manera análoga, según se muestra en el siguiente:

EJEMPLO

Calcular el área entre la curva $\frac{1}{1+x^2}$ y el eje X, desde $-\infty$ hasta 0.

SOLUCION:

En forma análoga al ejemplo anterior, se obtiene:

$$A = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (\text{ang tan}0 - \text{ang tan}a)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (0 - \text{ang tan } a)$$

$$= -\text{ang tan } (-\infty)$$

$$= \pi/2.$$

Otro caso que se puede presentar con límites infinitos, es cuando los límites superior e inferior están en $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

El proceso de solución es análogo al que se ha visto anteriormente, y como se tienen dos límites infinitos, es necesario separar la integral en dos integrales, cada una con un límite infinito y teniendo una de ellas el límite inferior finito e igual al límite superior de la otra, como se muestra en el siguiente:

EJEMPLO

Calcular el área limitada por la curva $\frac{1}{1+x^2}$ y el eje X, desde $-\infty$ hasta $\infty$.

SOLUCION:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad (1)$$

En este caso, por tenerse dos límites infinitos, se separa la integral (1) en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{c}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad (2)$$

Donde:

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \text{ang tan } x \Big|_{a}^{c}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (\text{ang tanc} - \text{ang tana})$$

$$= \text{ang tan c} - \text{ang tan}(-\infty)$$

$$= \text{ang tan c} + \text{ang tan}(+\infty)$$

$$= \text{ang tan c} + \pi/2$$

Además:

$$\int_{c}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left( \text{ang tan } x \Big]_{c}^{b} \right)$$

$$= \text{ang tan } \infty - \text{ang tan c}$$

$$= \pi/2 - \text{ang tan c} \qquad (4)$$

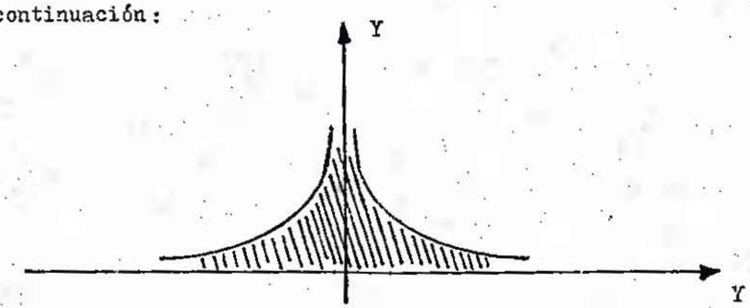
Sustituyendo (3) y (4) en (2), queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{ang tan c} + \pi/2 + \pi/2 - \text{ang tan c}$$

$$= \pi/2 + \pi/2$$

$$= \pi$$

Como se puede verificar, este resultado es la suma de los resultados obtenidos en los dos ejemplos anteriores, en los cuales se calculó respectivamente el área del lado derecho y del lado izquierdo del eje X, véase la figura mostrada a continuación:




Mientras que en este último ejemplo se estaba buscando toda el área, de ahí que el resultado fuera la suma de los dos primeros.

EJEMPLO

Obtener la integral siguiente:

$$\mathcal{L}(e^{2t}) = \int_0^{\infty} e^{-st}(e^{2t})\,dt \quad \text{(transformada de Laplace)}$$

SOLUCION:

Simplifiquemos primero:

$$\mathcal{L}(e^{2t}) = \int_0^{\infty} e^{2t-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{(2-s)t}\,dt$$

a). Sustituímos el límite infinito por a:

$$\mathcal{L}(e^{2t}) = \int_0^{a} e^{(2-s)t}\,dt = \frac{1}{2-s}\,e^{(2-s)t}\Big|_0^a$$

b). Aplicamos la regla de Barrow.

$$\mathcal{L}(e^{2t}) = \frac{1}{2-s}\left(e^{(2-s)a} - e^{(2-s)0}\right)$$

$$= \frac{1}{2-s}\left(e^{(2-s)a} - 1\right)$$

c). Tomando límite para a

$$\lim_{a\to\infty}\mathcal{L}(e^{2t}) = \frac{1}{2-s}\lim_{a\to\infty} e^{(2-s)a} - \lim_{a\to\infty} 1$$

en este caso tenemos dos posibilidades:

I). Si $(2-s) > 0$ entonces

$\lim\limits_{a\to\infty} e^{(2-s)a} \to \infty$ y la integral es indeterminada.

II). Si $(2-s) < 0$

$$\lim_{a\to\infty} e^{(2-s)a} = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{e^{(s-2)a}} \to 0$$

Para ello, el único caso válido es el segundo. Por fin nos queda que la integral propuesta, transformada de Laplace $e^{2t}$, es:

$$\mathcal{L}(e^{2t}) = \frac{1}{2-s}(0-1) = \frac{1}{s-2} \quad \text{para} \quad s > 2$$

Otro caso de integrales impropias, que a menudo les pasan desapercibidas a los estudiantes, es cuando la función a integrar no está acotada dentro de los límites de integración.

EJEMPLO

Integrar $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{4-x}$

SOLUCION:

Si integramos directamente:

$$\int_0^4 \frac{dx}{4-x} = -L(4-x)\Big]_0^4 = -L(0) + L(4)$$

estamos en un caso ya comentado inicialmente, en que L(0) no existe. No estando acotada la función en x=4, lo que hay que hacer es investigar el límite cuando x tiende a 4 por la izquierda, esto se efectúa integrando hasta un valor (en este caso 4-e), en donde la función si esté definida y tomando después límites para considerar el intervalo deseado, como se muestra a continuación:

$$\lim_{e\to 0^+}\int_0^{4-e}\frac{dx}{4-x} = \lim_{e\to 0^+}\Big[-L(4-x)\Big]_0^{4-e}$$

$$= \lim_{e\to 0^+}\Big(-L(e) + L(4)\Big)$$

observamos que $\lim_{e\to 0} -L(e)$ no existe; por lo tanto, la integral no puede realizarse y se dice que diverge. En todos los casos es indispensable investigar por medio de límites la existencia de la integral impropia.

EJEMPLO
Calcular $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$

SOLUCION:

En este caso f(0) no está definida (f(x) no está acotada en $[-1,1]$), por ser este un valor intermedio del intervalo es necesario separar en dos integrales, esto es:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

estas dos integrales se resuelven en forma análoga al último ejemplo, es decir:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{e\to 0} \int_{-1}^{-e} \frac{dx}{x^2} + \lim_{e\to 0} \int_{e}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{e\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-e} + \lim_{e\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_{e}^{1}$$

$$= \lim_{e\to 0} \left[\frac{-1}{-e} - \left(\frac{-1}{-1}\right) + \left(-\frac{1}{1}\right) - \left(-\frac{1}{e}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{0} - 1 - 1 + \frac{1}{0}$$

$$= \infty - 2 = \infty$$

6.10 APLICACIONES DE LA INTEGRAL.

El cálculo del área ha inquietado al hombre desde la antigüedad.

Los egipcios estudiaron las áreas y volúmenes de algunas figuras sencillas, contando con algunas reglas para el cálculo de las mismas.

Estas reglas fueron heredadas a los griegos, entre los cuales destacó Arquímedes (250 a.c.) el cual empleaba el método de acotar un área con un conjunto de rectángulos interiores y con un conjunto de rectángulos exteriores.

Con el Cálculo Integral desarrollado simultáneamente por Newton y Leibnitz, se simplificó grandemente el cálculo de áreas, conocidas las funciones que las limitan; esta técnica se ha generalizado de tal modo, a otras ramas, empleando el Cálculo Integral, que es conveniente clasificarlas de la siguiente manera.

a). Aplicación Geométrica.-

Empleada principalmente para calcular áreas de figuras planas y superficies de revolución, momentos de inercia, volúmenes, centroides, longitud de curvas, así como propiedades de las figuras geométricas.

b). Aplicación Matemática.-

En este caso, las integrales se usan para demostrar algunos teoremas, lemas e hipótesis.

c). Aplicación Física.-

En este caso, las integrales se usan para definir conceptos físicos, o también como herramientas para determinar expresiones matemáticas que representen conceptos físicos como es el caso del impulso y la cantidad de movimiento, la velocidad, la energía, el gasto, el trabajo desarrollado, etc.

A continuación, se presentan algunas aplicaciones geomé tricas.

5.10.1 Calculo de areas de figuras planas en coordenadas carte sianas.

Como ya se ha visto en el capítulo 5, el área entre la curva cuya ecuación es $y = f(x)$ y limitada por las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X, se puede calcular como:

$$A = \int_{x_1=a}^{x_2=b} f(x)\, dx \qquad (1)$$

que en forma simplificada es:

$$A = \int_a^b dA \qquad \text{en que} \qquad dA = f(x)\, dx$$

En este caso, dA es la diferencial de área del rectángulo cuya altura es $f(x)$ y su base $dx$, como se observa en la figura 6.5

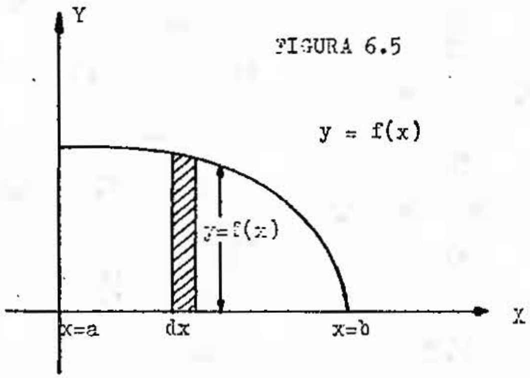



FIGURA 6.5

¿Existirá otra manera de calcular el área?

Otra manera de seleccionar el elemento dA, es la siguien

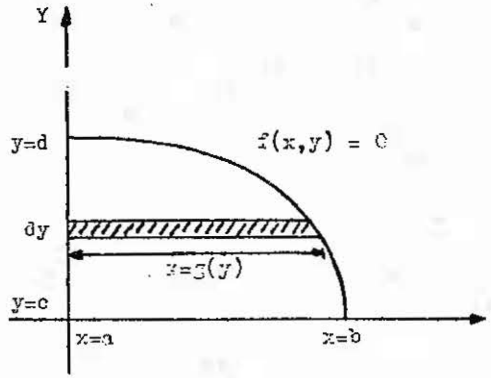



FIGURA 6.6

y $A = \int dA$ que representa el área entre la curva $x = g(y)$, el eje Y, y las rectas $y=c$, $y=d$, donde

$$dA = x\, dy = g(y)\, dy$$

Resolveremos a continuación un ejercicio con los métodos antes mencionados, haciendo la aclaración de que el método a usar es el que lleve a integrales más simples de resolver.

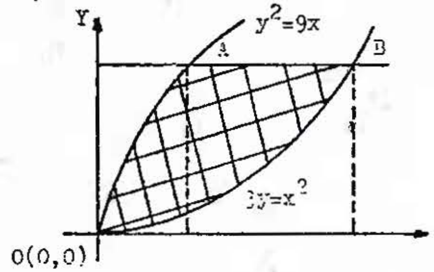
EJEMPLO

Calcular el área entre las curvas $y = 3$; $3y = x^2$; $y^2 = 9x$.

SOLUCION:

El diagrama correspondiente al área buscada se muestra en la figura 6.7

FIGURA 6.7

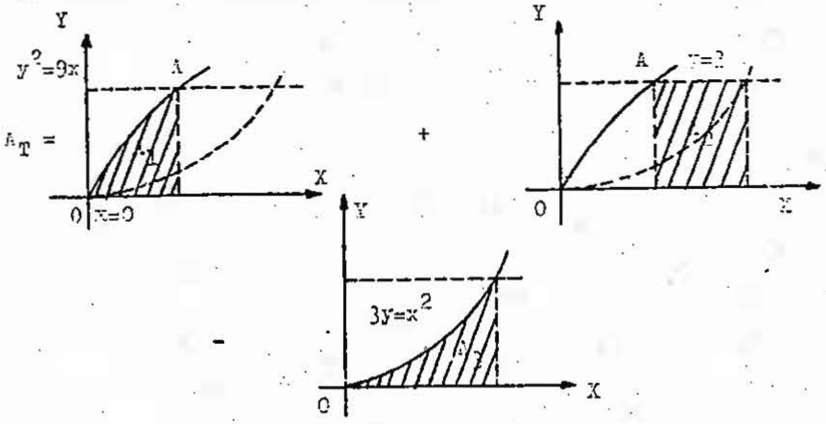


Hasta el momento se ha analizado como obtener el área entre la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ ó entre la curva $x = g(y)$, el eje Y, y las rectas $y=c$ y $y=d$.

Ahora se tiene el caso de encontrar el área limitada por varias curvas. Para calcularla existen varios caminos, los que se expondrán a continuación:

Primer Método.

Una forma de proceder, es obtener el área comprendida entre los segmentos de curva OA y AB con el eje X, y restarle el área entre el segmento de curva OB con el eje X, como se indica en el siguiente diagrama:




En notación simplificada:

$$A_T = A_1 + A_2 - A_3 \qquad (1)$$

Lo primero que se debe realizar, es hallar las coordenadas de los puntos A y B, lo cual se obtiene al calcular la intersección de las curvas $y^2=9x$ con $y=3$, y $3y=x^2$ con $y=3$, llegandose al siguiente resultado:

A (1,3)

B (3,3)

Basándonos en la interpretación geométrica de la integral definida, como el área entre una curva $y=f(x)$ y el eje X, se tiene que:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Obsérvese que para este caso, la función con la que se calcula el área $A_1$ se puede escribir como: $y = \sqrt{9x}$; para el cálculo del área $A_2$, la función es $y=3$; y para el del área $A_3$, es $y = (1/3)x^2$, o sea que se deben hacer explícitas para "y", todas las funciones, así se tiene que:

$$A_1 = \int_0^1 \sqrt{9x}\,dx \ ; \quad A_2 = \int_1^3 3\,dx \ ; \quad A_3 = \int_0^3 \frac{1}{3}x^2\,dx$$

efectuando las integrales, resulta:

$$A_1 = \frac{3x^{3/2}}{3/2}\Big]_0^1 = 2; \quad A_2 = 3x\Big]_1^3 = 6; \quad A_3 = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 3$$

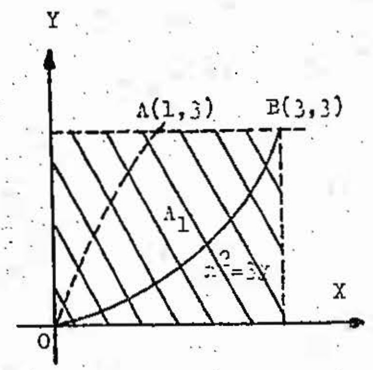
sustituyendo $A_1$, $A_2$ y $A_3$ en (1), queda:

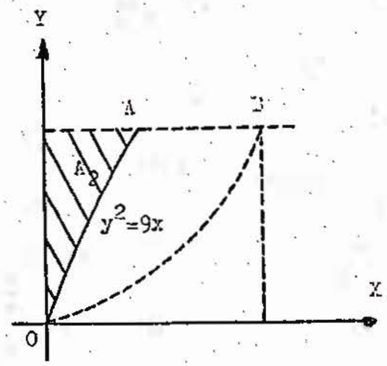
$$A = 2 + 6 - 3 = 5\ u^2$$ que es el área buscada.

Segundo Método.

Ahora consideramos las áreas comprendidas entre las curvas dadas por los segmentos AO, AB y OB y el eje Y, de la figura 6.

Podemos obtener el área buscada, calculando la que está entre la curva dada por $3y=x^2$, el eje Y, y las rectas $y=1$, $y=0$ (eje X), a continuación se le resta a este valor el área comprendida entre la curva $y^2=9x$, el eje Y, y las rectas $y=1$, $y=0$, como se muestra con los siguientes diagramas:




Es decir:

$$A_T = A_1 - A_2 \tag{2}$$

Basándonos en la interpretación geométrica de la integral definida como el área entre una curva $y=f(x)$ y el eje Y, se tiene:

$$A = \int_c^d g(y)\,dy \tag{3}$$

Obsérvese que la función con la que se calcula el área $A_1$ se puede representar como:

$$x = \sqrt{3y} = (3y)^{1/2} = g_1(y)$$

Para el caso del área $A_2$, la función es:

$$x = \frac{1}{9}\,y^2 = g_2(y)$$

en este caso, las funciones se hacen explícitas para "x", - sustituyendo esto último en (2), queda:

$$A_1 = \int_0^3 (3y)^{1/2}\,dy \;;\quad A_2 = \int_0^3 \frac{1}{9}\,y^2\,dy$$

Resolviendo las integrales, resulta:

$$A_1 = \left.\frac{3^{1/2}\,y^{3/2}}{3/2}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{27} = \frac{2}{3}\,9 = 6\ u^2$$

$$A_2 = \left.\frac{1}{9}\,\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{27}\,27 = 1\ u^2$$

Por lo tanto, el área buscada es:

$$A_T = A_1 - A_2 = 6 - 1 = 5\ u^2$$

Tercer Método.

Como las integrales de las áreas $A_1$ y $A_2$ tienen los mismos límites de integración, usando las propiedades básicas,- se expresa el área $A_T$ como:

$$A_T = \int_0^3 \left[(3y)^{1/2} - \frac{1}{9}\,y^2\right] dy \tag{4}$$

en donde la diferencial de área es: $(g_2(y) - g_1(y))\,dy$.

La diferencial de área indicada por (4), queda como se muestra en la figura 6.8

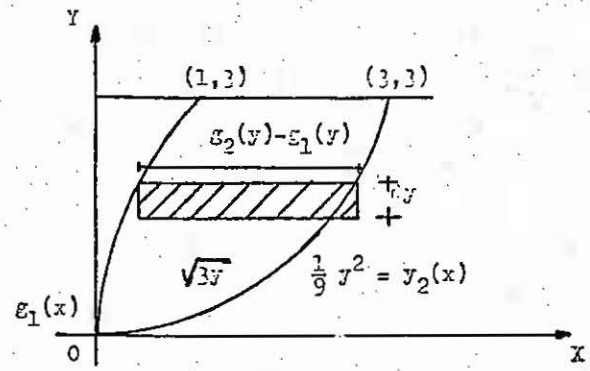



FIGURA 6.8

Esto es:

$$dA = g_2(y) - g_1(y) \; dy \qquad \text{y por lo tanto:}$$

$$A = \int_c^d g_2(y) - g_1(y) \; dy$$

dá el valor del área limitada por las curvas de ecuación $g_1(y)$ y $g_2(y)$ entre las rectas $y=c$, $y=d$.

De manera semejante

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) \; dx$$

dá el valor del área limitada por las curvas $f_2(x)$ y $f_1(x)$ entre las rectas $x=a$ y $x=b$.

EJEMPLO

Calcular el área asciurada en la figura 6. limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$.

SOLUCION:

En la figura 6.9 también se indican los puntos de intersección entre las curvas, los cuales son (0,0) y (1,1) y se obtuvieron resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$y = x = f_1(x)$$

$$y = x^2 = f_2(x)$$

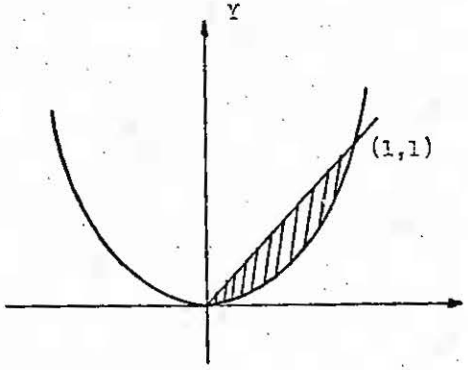



FIGURA 6.9

Para resolver este problema se usará alguno de los métodos expuestos en el ejemplo anterior.

El área está dada por la expresión:

$$A = \int_a^b f(x) \; dx \qquad (1)$$

$$\text{Donde} \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x) = x - x^2 \qquad (2)$$

donde $a = 0$ ; $b = 1$

Sustituyendo (2) en (1):

$$A_T = \int_0^1 (x-x^2) \; dx \qquad \text{cuya solución es:}$$

$$A_T = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

EJEMPLO

Determinar el área interior de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

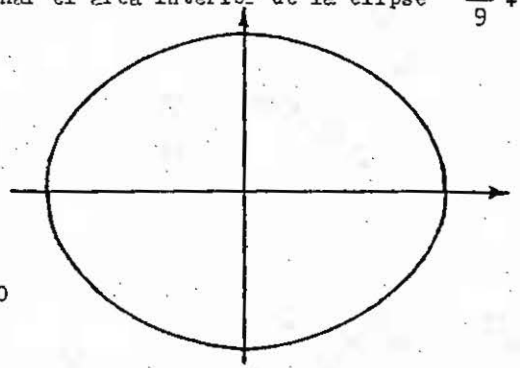


FIGURA 6.10

Como el área es simétrica respecto a los ejes X e Y, según se muestra en la figura 6.10 se calculará solo la cuarta parte.

Como ya se ha dicho, el área está dada por la expresión:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

para este caso f(x) se obtiene al despejar "y" de la ecuación de la elipse, es decir:

$$y^2 = \frac{4}{9}(9-x^2)$$

$$\therefore \quad y = f(x) = \frac{2}{3}(9-x^2)^{1/2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), queda:

$$A = \frac{2}{3} \quad (9-x^2)^{1/2} \quad dx$$

Con el uso de las tablas dadas en el inciso 6.7, se puede resolver la integral anterior, pues la

$$(9-x^2)^{1/2}\,dx$$

es semejante a la

$$A = \frac{2}{3}\Big[x(9-x^2)^{1/2} + 9\text{ang sen}(x/3)\Big]_0^3$$

$$A = \frac{2}{3}\left[\frac{9}{2}\pi\right] = 3\pi\ u^2$$

EJEMPLO

Calcular el área rayada de la figura 6.11 limitada por las curvas de ecs. $y = \operatorname{sen}x$, $y = \cos x$ y las rectas $x=0$ e $x=(5/4)\pi$.

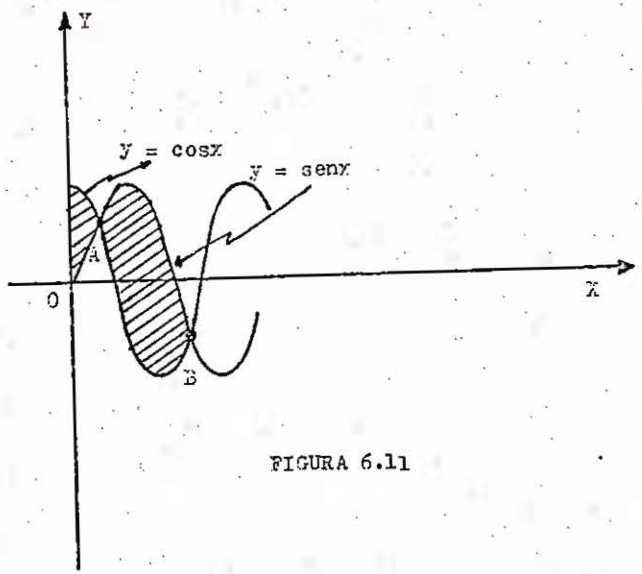



FIGURA 6.11

SOLUCION:

Para la obtención de los puntos de intersección, resuélvase primero el sistema

$$y = \operatorname{sen}x$$
$$y = \cos x$$

de donde se obtienen los puntos $A(\pi/4, \sqrt{2}/2)$, $B(\pi/4 + \pi, -\sqrt{2}/2)$

Una manera de encontrar el área, es empleando la expresión:

$$A_T = \int g(y)\,dy \qquad y \qquad dA = g(y)\,dy$$

sin embargo, en este caso dA tendría que ser definida en forma distinta en varios puntos del área pués no se puede plantear en forma única en toda ella.

Obsérvese que $g_1(y)$ = ang seny y $g_2(y)$ = ang cosy no son relaciones biunívocas en el intervalo cerrado $y\in[-1,1]$.

Por lo tanto resulta más conveniente seleccionar la siguiente expresión:

$$A_T = \int f(x)\,dx \quad \text{en que} \quad dA = f(x)\,dx$$

en este caso se deben considerar dos diferenciales de área,- una de ellas es:

$$dA = (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx \quad \text{para } x\in[0, \pi/4]$$

y la otra tiene la forma:

$$dA = (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx \quad \text{en el intervalo } x\in[\pi/4, 5\pi/4]$$

Por lo tanto:

$$A_T = \int_0^{\pi/4} (\cos x-\operatorname{sen} x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x-\cos x)dx$$

Resolviendo las integrales, se obtiene:

$$A_T = \operatorname{sen} x + \cos x \Big]_0^{\pi/4} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= \operatorname{sen}\pi/4 + \cos\pi/4 - \operatorname{sen}0 - \cos 0 - \cos 5\pi/4 - \operatorname{sen}5\pi/4 + \cos\pi/4 + \operatorname{sen}\pi/4$$

$$A_T = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+1+1+1+1+1) - 1$$

$$\therefore \quad A_T = 3\sqrt{2} - 1 = 3.23 \text{ unidades cuadradas}$$

## 6.10.2 AREA DE SUPERFICIES PLANAS EN COORDENADAS POLARES.

Considérese el problema de calcular el área de una región limitada por una curva, cuya ecuación en coordenadas polares es $r = f(\theta)$ (donde $f(\theta)$ es integrable en $\theta\in[\alpha,\beta]$ y las rectas que pasan por el polo cuyas ecuaciones son $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ como se indica en la figura 6.12

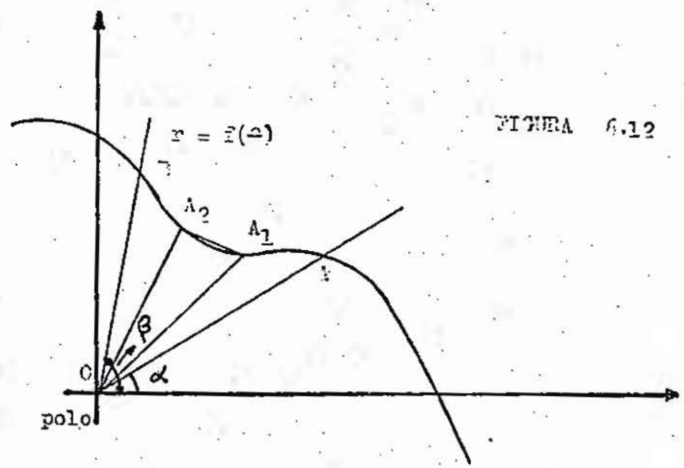



FIGURA 6.12

Haciendo en el arco $\widehat{AB}$ n divisiones de tal manera que se definan los puntos $A=A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n=B$ los radios - vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_1}$ y $\overline{OA_2}$, . . . , $\overline{OA_{n-1}}$ y $\overline{OA_n}$ forman los ángulos $AOA_1$, $A_1OA_2$, . . . , $A_{n-1}OA_n$ llamados $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, . . . $\Delta\theta_n$.

Si los $\Delta_i\theta$ son muy pequeños, entonces los triángulos - $A_{i-1}OA_i$ (donde $i=1,2,\ldots,n$) pueden ser considerados como de - base $r\,\Delta_i\theta$ y de altura r cuya área es $(1/2)r^2\Delta_i\theta$.

De esta manera, un valor aproximado del área se obtiene - con la suma

$$A = \frac{1}{2}r_1^2\Delta\theta_1 + \frac{1}{2}r_2^2\Delta\theta_2 + \ldots + \frac{1}{2}r_n^2\Delta\theta_n$$

$$\therefore \quad A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta_i \theta_i$$

El error que se obtiene en esta suma, tiende a cero entre menores sean los ángulos $\Delta\theta$ considerados, con lo cual el número de triángulos tiende a infinito, y el área se vuelve el área buscada, por lo tanto:

$$A_T = \lim_{\substack{\theta_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

Obsérvese que $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

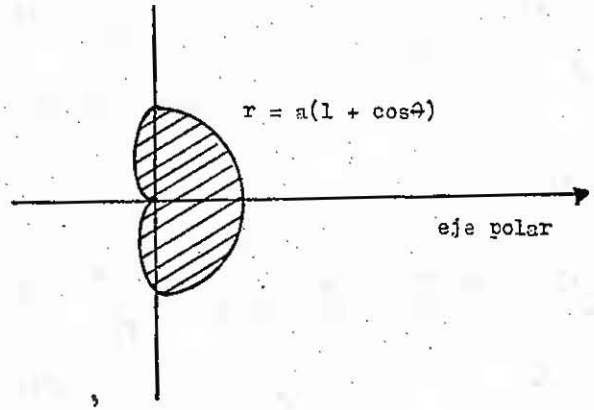
$$= \frac{1}{2} r \, (r d\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \text{(base) (altura)}$$

A continuación se harán algunos ejemplos de aplicación:

EJEMPLO

Encontrar el área encerrada por la cardioide $r = a(1+\cos\theta)$ cuya gráfica es:




SOLUCION:

El área está dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \, d\theta$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$, $r = a(1+\cos\theta)$, por lo tanto:

$$A_T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1+\cos\theta)]^2 \, d\theta$$

Resolviendo esta integral, se obtiene:

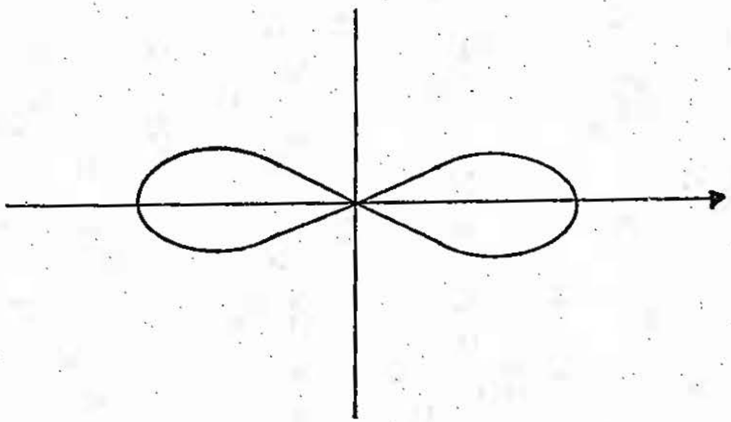
$$A_T = \frac{a^2}{2} \left[ \theta + 2\text{sen}\theta + \frac{\theta}{2} + (\text{sen}2\theta)/4 \right]_0^{2\pi}$$

Aplicando la Regla de Barrow y simplificando, queda:

$$\therefore \quad A_T = \frac{3}{2} \pi a^2 \, u^2$$

EJEMPLO

Encontrar el área encerrada por un lazo de la lemniscata de ecuación $r^2 = a^2\cos 2\theta$ cuya gráfica está dada en la figura 6.



SOLUCION:

Por simetría se calculará el área de la cuarta parte de la curva mediante la expresión:

$$A_c = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

en que: $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 45°$ ; $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

$$A_c = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} a^2$$

Como $A_T = 4A_c$

$\therefore \quad A_T = a^2$

### 6.10.3 LONGITUD DE ARCO.

a). En coordenadas cartesianas.

En el curso de Cálculo Diferencial se determinó que la diferencial de arco (ds) está dada por:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad (1)$$

y de la expresión (1), se obtienen las expresiones:

$$ds = \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{1/2} dy \qquad (2)$$

$$\text{y} \qquad ds = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \qquad (3)$$

Geométricamente ds representa la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son dx y dy, como se muestra en la fig. 6.13

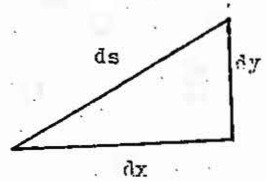


FIGURA 6.13

Por lo tanto, la longitud "s" de un arco de curva entre los puntos de la misma, es la suma llevada al límite de las longitudes diferenciales de arco, esto es:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx$$

O también:

$$s = \int_{y_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 \right] dy$$

EJEMPLO

Calcular la longitud de un cable sujeto por dos postes y cuya ecuación es $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ desde el punto en que $x=0$ hasta que $x=1$.

SOLUCION:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_0^1 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx \qquad (1)$$

Calculando $\frac{dy}{dx}$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})$$

Simplificando y sumando la unidad se tiene:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), queda:

$$s = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2}\; dx$$

Simplificando se llega a:

$$s = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big[(e-e^{-1}) - (1-1)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)$$

$s = 1.17$ unidades de longitud

b). En coordenadas polares.

En el inciso a) se vió que:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad (1)$$

Considerando ahora las ecuaciones de transformación de coordenadas polares a cartesianas, se tiene que:

$$x = r\cos\theta \qquad (2)$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (3)$$

Diferenciando (2) y (3), se obtiene:

$$dx = -\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr$$

$$dy = r\cos\theta\, d\theta + \mathrm{sen}\,\theta\, dr$$

Elevando cada uno al cuadrado:

$$(dx)^2 = r^2\mathrm{sen}^2\theta\,(d\theta)^2 - 2r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta\, dr + \cos^2\theta\,(dr)^2 \qquad (4)$$

$$(dy)^2 = r^2\cos^2\theta\,(d\theta) + 2r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta\, dr + \mathrm{sen}^2\theta\,(dr) \qquad (5)$$

Sumando (4) y (5) y factorizando:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = r^2(d\theta)\left(\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right) + (dr)^2\left(\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)$$

Como $\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ resulta:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = r^2(d\theta)^2 + (dr)^2 \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (1):

$$ds = \sqrt{r^2(d\theta)^2 + (dr)^2}$$

que se puede expresar en las formas:

$$ds = \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\; d\theta \qquad (7)$$

$$ds = \sqrt{r^2\,(d\theta/dr)^2 + 1}\; dr \qquad (8)$$

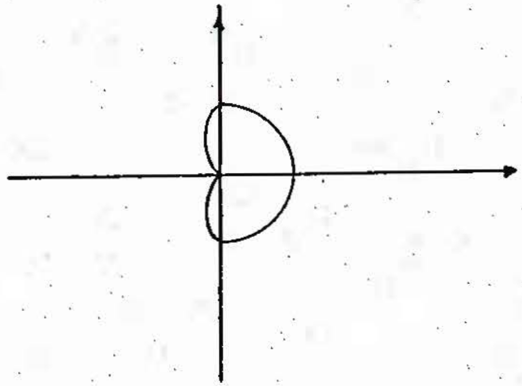
A continuación se harán algunos ejemplos de aplicación:

EJEMPLO:

Determinar el perímetro de la cardioide de ecuación:

$$r = 1 + \cos\theta$$

cuya representación gráfica es:



SOLUCION:

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad (2)$$

en este caso $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$ y como $r = 1+\cos\theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) y (1) en (2) y aprovechando la simetría de la figura, solo se calculará la mitad de la longitud, es decir:

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta$$

Pero $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, de donde:

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8(1-0)$$

$= 8$ unidades de longitud.

c). Por último se calculará la longitud de arco cuando las ecuaciones de la curva están expresadas en forma paramétrica, como se describe a continuación:

Si ahora "x" y "y" están expresados en forma paramétrica como:

$$x = x(t) \qquad (1)$$

$$y = y(t) \qquad (2)$$

diferenciando (1) y (2), se tiene:

$$dx = x'(t)\, dt \qquad (3)$$

$$dy = y'(t)\, dt \qquad (4)$$

elevando al cuadrado (3) y (4), y sumando queda:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = x'(t)^2(dt)^2 + y'(t)^2(dt)^2 \qquad (5)$$

factorizando, resulta:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = \left[x'(t)^2 + y'(t)^2\right](dt)^2 \qquad (6)$$

sustituyendo (6) en $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, queda:

$$ds = \sqrt{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right](dt)^2}$$

simplificando:

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\quad dt$$

$$\therefore\ s = \int ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

A continuación se hará el siguiente:

EJEMPLO

Determinar la longitud de un arco de la cicloide cuya ecuación es:

$$x = (\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad (1)$$

$$y = (1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

en el intervalo $\theta \in [0, 2\pi]$

SOLUCION:

Derivando con respecto al parámetro $\theta$ (1) y (2) y elevan do al cuadrado, queda:

$$\left[x'(t)\right]^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = (1 - \cos\theta)^2 = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta \qquad (3)$$

$$\left[y'(t)\right]^2 = \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\; d\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\; d\theta$$

simplificando:

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(1 - \cos\theta)}\; d\theta$$

usando la identidad $\quad 1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2})}\; d\theta$$

simplificando:

$$= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta = -4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -4\left[(-1) - 1\right]$$

$$= 8 \text{ unidades de longitud.}$$



## 6.10.4 VOLUMENES DE SOLIDOS LIMITADOS POR SUPERFICIES DE REVOLUCION

Otra aplicación importante del Cálculo Integral, el cálculo de volúmenes de sólidos limitados por superficies de revolución, llamados sólidos de revolución: el modelo matemático que se emplea para calcularlo se obtiene del siguiente análisis.



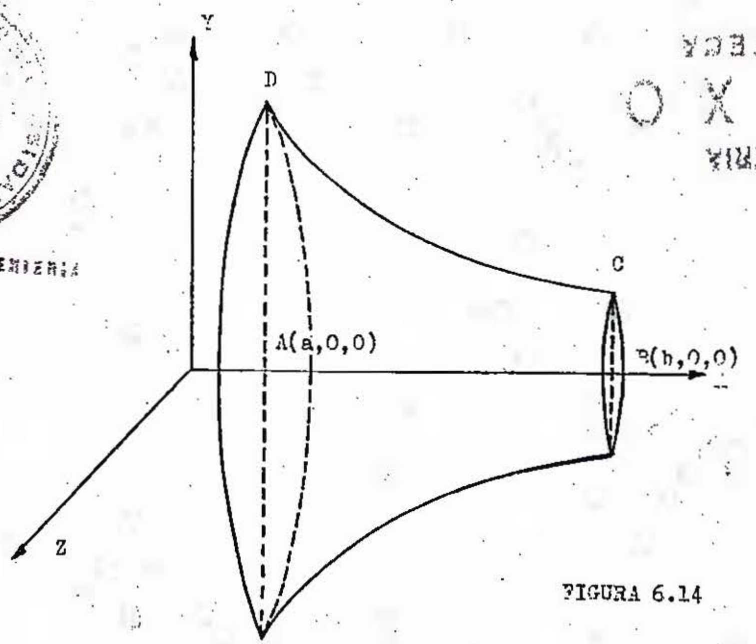



FIGURA 6.14

Sea V, el volúmen del sólido engendrado haciendo girar el área plana ABCD, que se muestra en la figura 6.14 alrededor de uno de los ejes coordenados, por ejemplo el eje X.

La ecuación de la curva plana CD es del tipo $y = f(x)$ ó $f(x,y) = 0$.

Para calcular el volúmen en forma aproximada, divídase éste en n discos cuyos centros están en el eje de revolución y de forma tal que toquen a la superficie envolvente, según se muestra en la figura 6.15

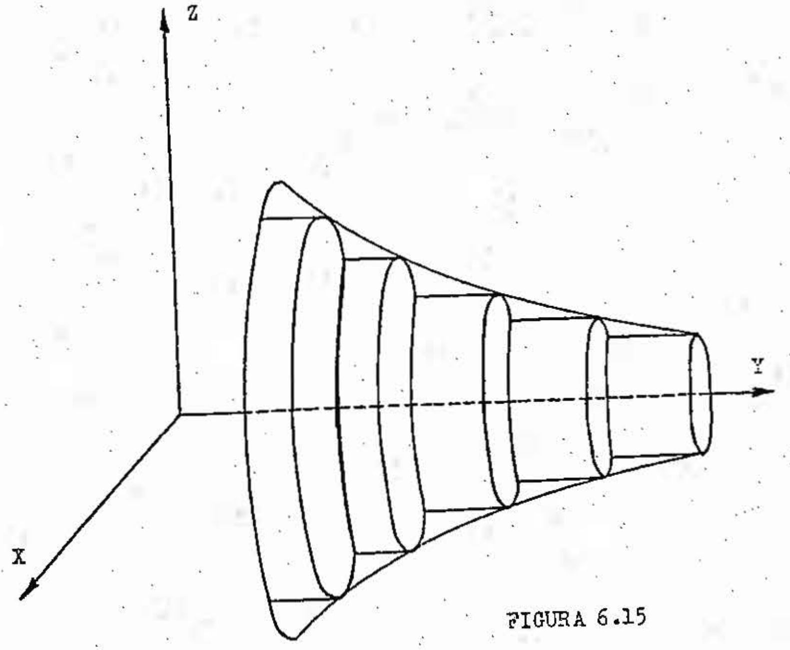



FIGURA 6.15

Lo anterior también se puede lograr si dentro del área plana ABCD se forman rectángulos de base $\Delta_i x$ y se hacen girar dichos rectángulos respecto al eje de revolución.

En otras palabras, se ha considerado una partición del intervalo $[a,b]$, tal que:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

como se muestra en la figura 6.16

El área del rectángulo i es:

$$\Delta_i A = y\,\Delta_i x$$

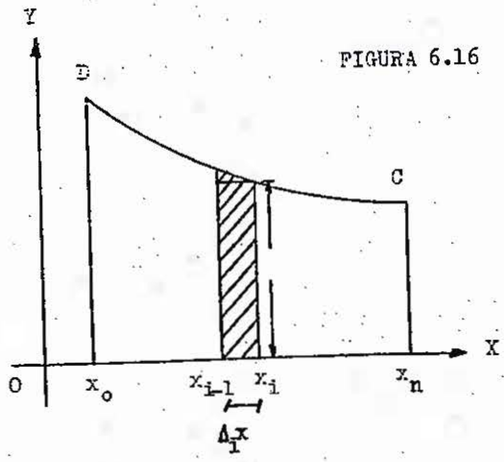



FIGURA 6.16

Si ahora se gira dicho rectángulo alrededor del eje X, se genera un volúmen $\Delta_i V$ cuyo valor es:

$$\Delta_i V = \pi y^2 \Delta_i x$$

El volúmen total, en forma aproximada es:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi y^2 \Delta_i x$$

llámese norma $\lambda$ al mayor $\Delta_i x$. Si se desea calcular en forma exacta el volúmen se tendrá que realizar el paso al límite, es decir:

$$V_T = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi y^2 \Delta_i x$$

Si el eje de revolución es ahora una recta paralela a alguno de los ejes coordenados, por ejemplo al eje X, como se muestra en la figura 6.18

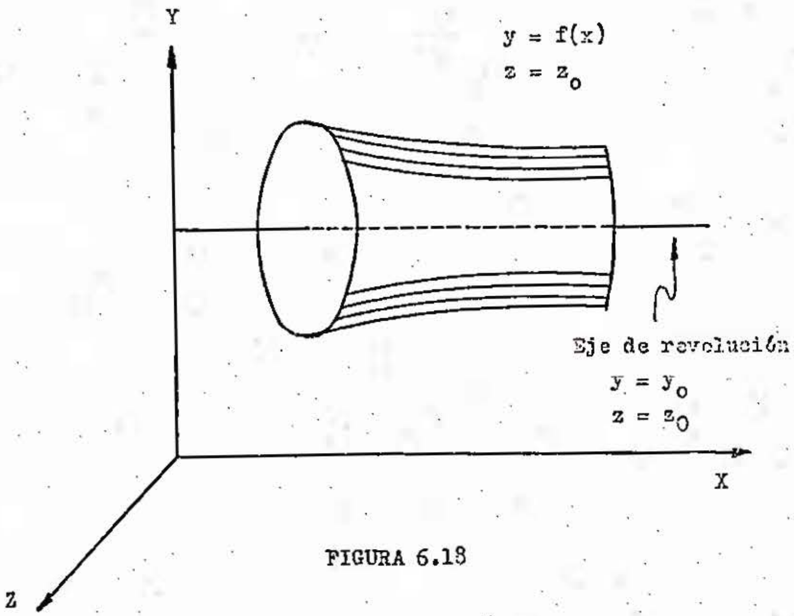



FIGURA 6.18

Entonces el volúmen limitado por la superficie de revolución y los planos x=a e x=b, está dada por la expresión:

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) - y_o\right]^2 \; dx$$

Se deja al lector la deducción de la expresión anterior.

De forma análoga son las expresiones para obtener volúmenes de sólidos de revolución con otros ejes de revolución paralelos a los coordenados.

que, de acuerdo con la definición de función integrable es:

$$V_T = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

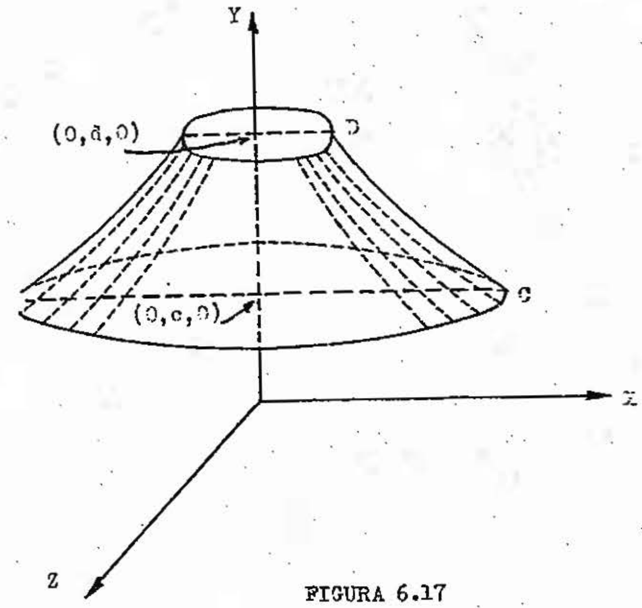



FIGURA 6.17

Si el eje de revolución es el eje Y, como se muestra en la figura 6.17.

Entonces el volúmen limitado por la superficie de revolución se calcula con la siguiente expresión:

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$$

Asimismo existen sólidos con ejes de revolución que no son paralelos a ningún eje coordenado, sin embargo su análisis, no es considerado en este texto, pero lo tratado hasta ahora es una buena base para analizar tales casos.

A continuación se verán algunos ejemplos.

EJEMPLO

Obtener el volúmen limitado por la superficie:

$$y = x^2 + z^2$$

y los planos $y = 0$ e $y = h$.

SOLUCION:

Haciendo $z = 0$ se obtiene la ecuación:

$$y = x^2$$

cuya curva representa la traza en el plano XY, que es considerada como la curva generadora de la superficie con eje de revolución el eje Y.

Por lo tanto, la expresión para calcular el volúmen es:

$$V = \pi \int x^2 \, dy$$

Como:

$$y = x^2$$

Entonces:

$$V = \int_0^h \pi \, y \, dy$$

$$V = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^h$$

$$= \pi \frac{h^2}{2} \quad \text{unidades cúbicas}$$

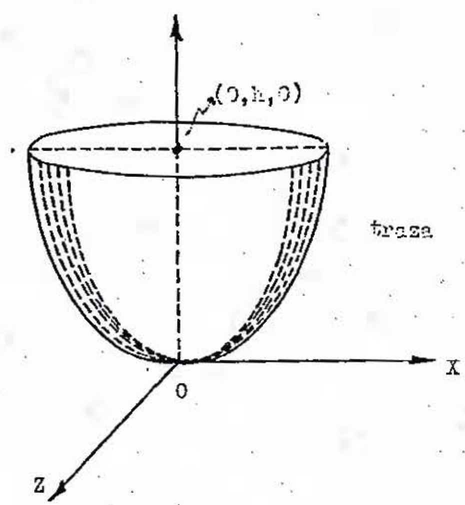



FIGURA 6.19

EJEMPLO

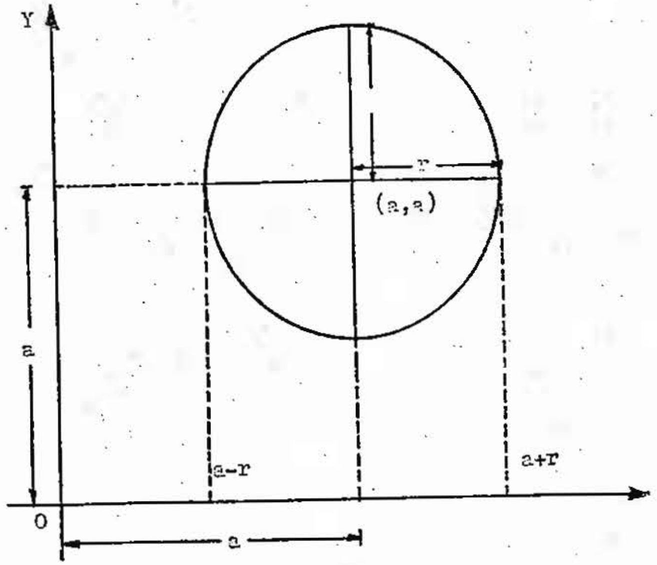
Calcular el volúmen engendrado al girar la circunferencia:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2, \quad z = 0$$

alrededor de un eje paralelo al X a una distancia "a", contenido en el plano XY y que pasa por su centro.

SOLUCION:

En este caso: $y_o = a$ , $z_o = 0$




$$( f(x) - a )^2 = r^2 - (x-a)^2$$

$$V = \int_{a-r}^{a+r} \pi \left[r^2 - (x-a)^2\right] dx$$

$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} + ax^2 - a^2 x\right) \Big|_{a-r}^{a+r}$$

$$= \pi \left[ar^2 + r^3 - \frac{(a+r)^3}{3} + a(a+r)^2 - a^2(a+r)\right] -$$

$$\pi \left[r^2(a-r) - \frac{(a-r)^3}{3} + a(a-r)^2 - a^2(a-r)\right]$$

Simplificando, se llega a:

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ unidades cúbicas.

## 6.10.5 AREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCION.

En muchos problemas de la ingeniería, se requiere determinar el área de una superficie de revolución; el modelo matemático empleado para calcularlo se desarrolla a continuación.

Considérese la superficie engendrada al hacer girar el arco CD de la curva plana, cuya ecuación es del tipo $y = f(x)$ ó $f(x,y) = 0$ , alrededor del eje X.

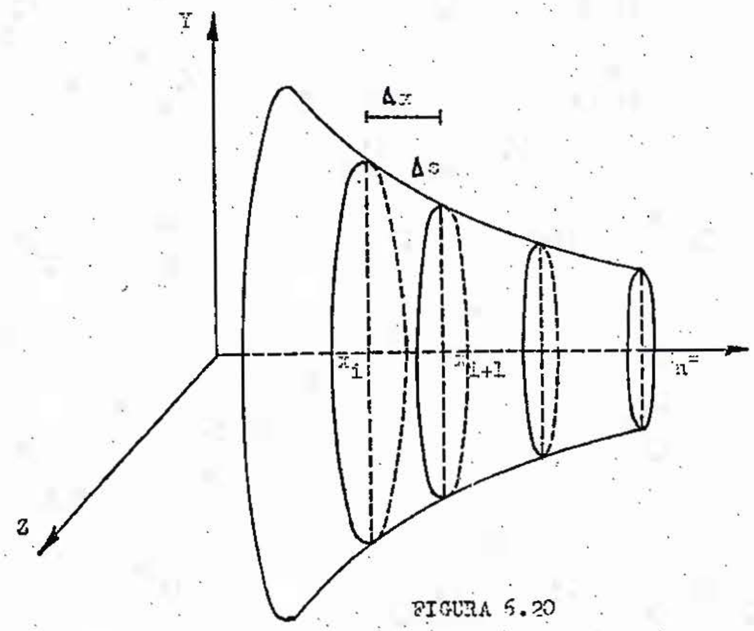



FIGURA 6.20

Para calcularla en forma aproximada, se divide el volumen en n conos truncados de altura $\Delta x$, de tal forma que cada uno de ellos toca la superficie en dos puntos como indica la figura 6.20

Considérese a la partición del intervalo [a,b], tal que:

$$x_o = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

De geometría elemental se sabe que el área lateral de un cono es:

$$A_L = \pi (a+b)\, L$$

donde $a$ y $b$ son los radios mayor y menor respectivamente y $L$ es la longitud de la recta generatriz.

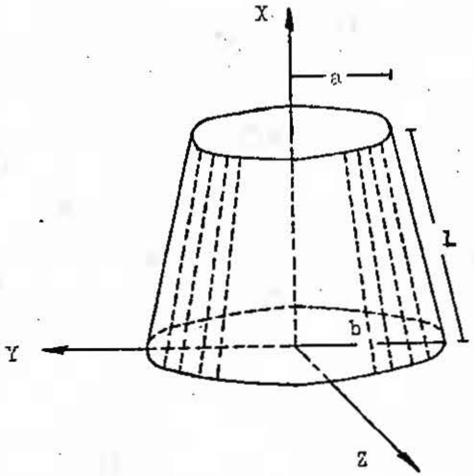



FIGURA 6.21

En nuestro caso, para el i-ésimo cono:

$$b = f(x_i) \qquad a = f(x_{i+1})$$

y $$L = \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$ donde:

$$\Delta_i x = x_{i+1} - x_i$$
$$\Delta y = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\therefore \Delta A_i = \pi \left[ f(x_{i+1}) - f(x_i) \right] \Delta s$$

Entonces el área lateral aproximada de la superficie de revolución es:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[ f(x_{i+1}) - f(x_i) \right] \Delta s$$

que se puede escribir como:

$$A = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \left[ \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right] \Delta s$$

Obsérvese que $\left[ f(x_{i+1}) + f(x_i) \right]/2$ es la media aritmética de los radios mayor y menor del cono y que pueden escribirse como:

$$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \doteq f(\xi_i)$$

donde $f(\xi_i)$ es el promedio y $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Por lo tanto, el área total en forma aproximada es:

$$A = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\, \Delta s$$

Llámese norma $\lambda$ el mayor $\Delta s$.

Si se desea calcular en forma exacta el área lateral de la superficie se tendrá que realizar el paso al límite, es decir:

$$A = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, f(\xi_i)\, \Delta s$$

$$= \int_{x_0}^{x_f} 2\pi\, f(x)\, ds$$

Donde $ds$ es conveniente expresarlo como:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\; dx$$

con lo cual $x$ es la única variable de integración, es decir:

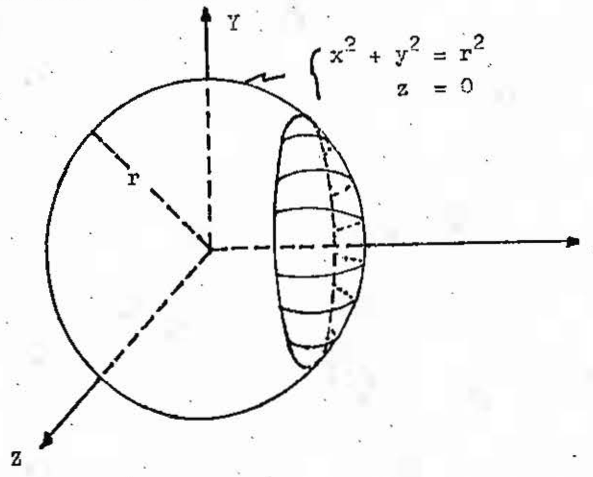
$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x_f} f(x) \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}\; dx$$

EJEMPLO

Calcular el área de un casquete esférico de radio r y altura h.

SOLUCION:

Sea el casquete de la figura 6.




El área lateral está dada por la expresión:

$$A_L = \int_a^b 2\pi f(x)\, ds \qquad (1)$$

donde $a = r-h$, $b = r$, esto es:

$$A\ (r-h,0,0) \quad y \quad B\ (r,0,0)$$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}\ ; \quad en \quad z = 0 \qquad (2)$$

$$y' = -x/\sqrt{r^2-x^2}$$

$$(y')^2 = x^2/\ r^2-x^2$$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\, dx$$

$$= \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\therefore \quad A_L = \int_{r-h}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\ \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx$$

Simplificando e integrando, resulta:

$$= 2\pi r\left[r - (r-h)\right]$$

$$= 2\pi rh \quad \text{unidades cuadradas.}$$

EJEMPLO

Calcular el área de un toro de radio interior a y radio exterior b.

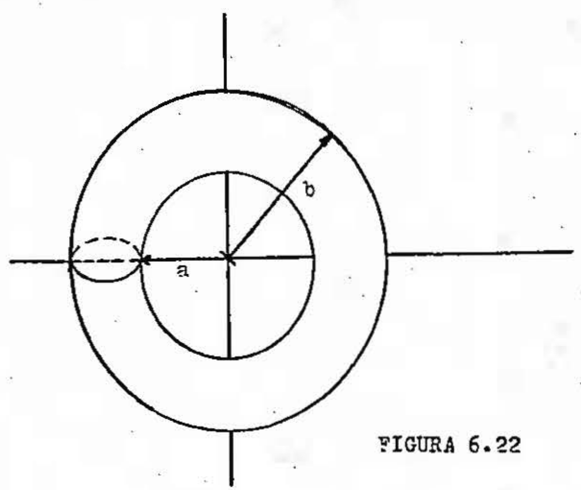



FIGURA 6.22

SOLUCION:

Considerando como curva generadora la circunferencia:

$$x^2 + (y-c)^2 = r^2$$

y como eje de revolución el eje X, como se indica en la figura 6.23:

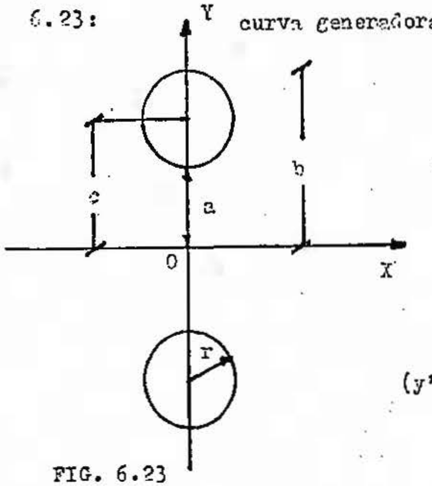



FIG. 6.23

Donde:

$$r = \frac{1}{2}(b-a)$$

$$c = \frac{1}{2}(b+a)$$

$$y = c \pm \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (1)$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2} \qquad (2)$$

Como ya se vió anteriormente:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \, ds \qquad (3)$$

Considerando la simetría de la figura, esto es, trabajando con la mitad derecha de la circunferencia generadora, y sustituyendo en (1), queda:

$$A = 2\int_0^r 2\pi \left(c \pm \sqrt{r^2 - x^2}\right) ds \qquad (4)$$

Considerando los dos signos de y, separemos la integral (4) en dos partes, es decir:

$$A = 4\pi \int_0^r \left(c + \sqrt{r^2-x^2}\right) ds + 4\pi \int_0^r \left(c - \sqrt{r^2-x^2}\right) ds$$

(5)

Simplificando (5), resulta:

$$A = 4\pi \int_0^r 2c \, ds$$

$$= 4\pi \int_0^r 2c \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

$$= 8\pi c \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}} \, dx$$

$$= 8\pi c \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} \, dx$$

$$= 8\pi rc \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$= 8\pi rc \text{ ang sen } \frac{x}{r} \Big]_0^r$$

$$= 8\pi rc \, (\pi/2)$$

$$= 4\pi^2 \, \frac{1}{2}(b-a) \, \frac{1}{2}(b+a)$$

$$= \pi^2 (b^2-a^2) \quad \text{unidades cuadradas.}$$