



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Simulación del Comportamiento Transitorio de  
Presión y Gasto de Pozos Horizontales Fracturados  
en un Yacimiento de Aceite en Lutitas (*Shale-oil*)  
utilizando el módulo *Matlab Reservoir Simulation  
Toolbox (MRST)***

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A N**

Méndez Gutiérrez Uriel Iván

Morales Sánchez Juan Rodolfo

**DIRECTOR DE TESIS**

M.C. Víctor Juan López Hernández



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

## RESUMEN

El propósito principal de este trabajo académico es presentar la aplicación del módulo especializado *Matlab Reservoir Simulation Toolbox* (MRST) para la simulación del comportamiento transitorio de presión y gasto de un pozo horizontal fracturado en un yacimiento no convencional (*shale*).

Para aplicar las funcionalidades de MRST y extenderlas para nuestro proyecto, utilizamos el método de Refinamiento Local de la Malla (LGR por sus siglas en inglés) para asignar propiedades petrofísicas a la fractura hidráulica y comparamos nuestros resultados con los reportados en la literatura, considerando cuatro casos: (1) fractura de conductividad finita considerando una fractura longitudinal, (2) fractura de conductividad finita considerando una fractura transversal, (3) fractura de conductividad infinita considerando una fractura longitudinal, y (4) fractura de conductividad infinita considerando una fractura transversal,

Con la finalidad de proveer un ejemplo de aplicación potencial para yacimientos no convencionales en México, utilizamos información petrofísica y de fluidos de la formación Eagle Ford (cuya formación análoga en México es la formación Pimienta) provista en la literatura para simular el comportamiento transitorio de la caída de presión, el gasto y sus respectivas derivadas. Realizamos estudios de sensibilidad de parámetros para analizar los cambios y las diferencias entre los comportamientos de una fractura longitudinal y una fractura transversal.

Derivado de esta tesis concluimos que la paquetería MRST es una buena alternativa para realizar modelos de simulación para pozos horizontales fracturados en yacimientos no convencionales. Consideramos que algunas de las ventajas del software son: (1) Es de código abierto para los usuarios de Matlab, (2) Muchos de los módulos tienen buena documentación, (3) Se tiene varios ejemplos de aplicación, (4) Es de fácil instalación, *etc* . Adicionalmente, hemos identificado algunas limitantes en el uso de mallas híbridas, compresibilidad de formación variable y manejo de datos PVT.

La contribución de este trabajo es la implementación de fracturas hidráulicas en la simulación de yacimientos no convencionales (*shale*), lo que abre la posibilidad para desarrollar un módulo especial implementado en MRST para este tipo de yacimientos.

## ABSTRACT

The primary objective of this work is to simulate the Pressure and Rate Transient performance behavior of a horizontal well intercepting a hydraulic fracture within a shale reservoir utilizing the open source reservoir simulator *Matlab Reservoir Simulation Toolbox* (MRST).

To use and to extend MRST's functionalities in our project, we used the Local Grid Refinement (LGR) method to assign petrophysical properties to the hydraulic fracture. To validate our results, we compared them to results available in the literature. We considered four scenarios: (1) longitudinal finite-conductivity fracture, (2) transverse finite-conductivity fracture, (3) longitudinal infinite-conductivity fracture, and (4) transverse infinite-conductivity fracture.

In order to provide a potential use of our simulation model for shale reservoirs in Mexico, we utilized petrophysical and PVT data from the Eagle Ford formation (which is analogous to the Pimienta formation in Mexico) to simulate the Pressure/Rate transient performance behavior and their derivative functions. We performed sensitivity analyses to study the differences in the behavior between longitudinal and transverse fractures.

Derived from this thesis we concluded that it is possible to use MRST for simulation studies of fractured horizontal wells within shale reservoirs. We consider that some of the advantages of the software are that: (1) it is open source for Matlab users, (2) most of the modules have well documentation, (3) it has many application examples, (4) easy installation, *etc.*. Additionally, we identified limitations on: the use of hybrid grids, variable formation compressibility, and treatment of PVT data.

Our main contribution is the implementation of the simulation of the transient performance behavior of horizontal fractured wells within a shale reservoir in MRST, which can lead to the development of a specialized module in this open-source simulator for this type of reservoirs.

## **DEDICATORIA**

A todas aquellas personas que han sido parte de nuestra vida, y por ende, en la realización de este trabajo.

## **AGRADECIMIENTOS (URIEL IVÁN)**

Agradecido con Dios por brindarme esta oportunidad de crecimiento, así como con mis padres; Héctor José Méndez Loyda, Martha Gutiérrez González y Martha Imelda Romero Zuñiga, los adoro con mi corazón.

A mi abuelito Tata (Leonel), por demostrarme que el carácter, el amor y la sabiduría son los pilares de una persona hecha y derecha. A mi abuelita Mimi (Esperanza), quien con su amor me ha demostrado como los roles de género son simples constructos sociales y que se puede salir adelante seas quien seas y a mi abuelita Yolanda, por demostrar como la independencia y el amor propio son primordiales para el desarrollo personal.

A mis hermanos Daniel, Belén y Zayra, y mis sobrinos por estar conmigo en los momentos difíciles, darme sus consejos, su amor y cariño y entenderme desde su punto de vista.

A mis amigos de la universidad y del bachillerato, a quienes les agradezco su compañía por la travesía de la vida y la universidad.

A mis otros amigos que son como mis hermanos; Roberto Antonio Rivera Rosales, Cesar Duran Olvera, Noe Sánchez Guzmán, Osvaldo Ledezma Flores, Daniel Cervantes Cabañas, Miguel Ángel Roberto Ramírez Rendón y José Ramon Miramontes Valle, gracias a ellos he superado los momentos complicados que la vida llega a presentar, he disfrutado los momentos excelsos y, sobre todo, me han motivado a ser quien soy y continuar haciendo lo que me gusta, les agradezco de todo corazón.

A mi amigo, hermano y compañero de tesis Juan Rodolfo Morales Sánchez, sin él, las ideas no se habrían concretado ni aterrizado, cada trabajo, cada café, cada desvelo junto a él y junto a Héctor García Cruz ha valido la pena para concretar mi carrera universitaria y este trabajo, gracias por tanto apoyo emocional e intelectual.

Agradecimiento especial al Dr. Alex, quien, sin su apoyo y conocimientos, la realización de este trabajo se hubiera complicado. Gracias por escucharnos y corregirnos y más aún, motivarnos en nuestro proyecto. A la Dr. Gabi quien nos introdujo en el mundo de MRST y al Mtro. Victor a quien le agradezco su tiempo y representación en este trabajo. Al Mtro. Erick Gallardo quien resultó ser una de las personas más influyentes para que lograra terminar mi carrera, tanto conocimiento y sabiduría expresadas en clases.

A mi maestra de la primaria, por creer en mí, a mi profesor de física de la secundaria y a mi profesor de cálculo en el bachillerato.

Gracias a todas las personas que han estado en mi vida, a mis tíos Cesar, Ana, Nacho, Patricia, Norma, Pilar, Arturo, Agustín, Manuel, Sotero, Diana; mi abuelo Rafa; mi padrino Hugo y a todos los integrantes de mi familia que no tuve espacio para mencionar, porque sin ellos, no habría aprendido las hermosas lecciones que va dando la vida, los momentos buenos y los momentos no tan buenos, en mi corazón se van quedando marcas de cada uno a quienes se les guarda respeto, honor y, sobre todo, cariño por haber estado en su momento conmigo. Agradezco también a esas personas que en un futuro van a estar presentes en mi vida dándome una lección más.

## **AGRADECIMIENTOS (JUAN RODOLFO)**

A mi mamá y mi papá, que han dedicado todo su tiempo a acompañarme, no solo en la escuela sino en cada momento de mi vida. A ellos les agradezco todo lo que soy, por guiarme siempre por el mejor camino.

A Moni y Jonathan, que a pesar de la distancia en algún momento, cada vez que regresaba podía reír y platicar con ellos como si el tiempo no hubiera pasado.

A Ana, que ha estado conmigo en todo este proceso y gracias a esos momentos de felicidad que hemos compartido. Los recuerdos de todos los días que pasamos juntos, los llevaré siempre en mi memoria.

A mi tía Cristi, mi tío Beto, mis primos Fabi, Lili y Sergin que desde el inicio sentí como encajé en la familia. Les agradezco todo lo que han hecho por mí. Sé que desde ahora tengo otro hogar al que podré regresar en cualquier momento.

A mi tío Elías y mi tía Estela, mis primas Brenda, Montse y Lore. Que de igual forma me ayudaron durante mucho tiempo. Gracias a ellos pude iniciar este camino.

A mi amigo Iván que sabe lo que pasamos para hacer funcionar la simulación, todos los cafés que nos costó, las reuniones en la facultad debatiendo ideas. A mis amigos Héctor, Berenice, Sofía, Maï, Ulises. Con quienes compartí muchos momentos que jamás olvidaré.

Al Dr. Alex, que hizo posible este trabajo, sin sus consejos y ayuda jamás hubiéramos llegado tan lejos. Le agradezco el tiempo, paciencia que nos brindó y las pláticas motivacionales que nos impulsaban a seguir.

A la Dra. Gabi que nos introdujo en MRST, gracias a ella pudimos adentrarnos en el simulador. Al Mtro. Víctor que nos apoyó en los trámites.

Al Mtro. Erick Gallardo, que desde siempre creyó en mi potencial, le agradezco todo lo que aprendí en sus clases.

A mis maestros de preparatoria que me ayudaron a ver más adelante en mi carrera.

A todos mis maestros que de alguna forma influyeron en que hoy esté aquí.

## TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN .....	I
ABSTRACT .....	II
DEDICATORIA .....	III
AGRADECIMIENTOS .....	IV
TABLA DE CONTENIDOS .....	VI
LISTA DE FIGURAS .....	VIII
LISTA DE TABLAS .....	XIV
CAPITULO I INTRODUCCIÓN .....	15
1.1. Definición del problema .....	15
1.2. Simulación Numérica de Pozos Horizontales Fracturados .....	17
1.3. Definición de conceptos básicos .....	23
CAPÍTULO II REVISIÓN DE LA LITERATURA .....	39
2.1. Estudios de simulación para pozos fracturados y/o multifracturados .....	39
2.2. Aplicaciones de la paquetería MRST para la simulación numérica en yacimientos de <i>shale gas/oil</i> .....	41
CAPÍTULO III CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE UN MODELO DE SIMULACIÓN PARA UN POZO HORIZONTAL FRACTURADO EN UN YACIMIENTO HOMOGÉNEO UTILIZANDO MRST .....	42
3.1. Construcción del modelo de simulación .....	42
3.2. Validación del modelo de simulación .....	52
CAPÍTULO IV ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE PARAMETROS PARA UN POZO HORIZONTAL FRACTURADO EN LA FORMACIÓN EAGLE FORD .....	57
4.1. Influencia de las características de la fractura hidráulica en el desempeño del pozo .....	57
4.1.1. Análisis de sensibilidad de la media longitud de la fractura ( $x_f$ ) .....	60
4.1.2. Análisis de sensibilidad de la permeabilidad de la fractura ( $k_f$ ) .....	72
4.2. Influencia de las propiedades del yacimiento en el desempeño .....	82
4.2.1. Análisis de sensibilidad de la permeabilidad del yacimiento ( $k$ ) .....	82
4.2.2. Análisis de sensibilidad de la compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) .....	94
4.3. Análisis de sensibilidad de las condiciones de producción: gasto ( $q$ ) y presión de fondo fluyendo ( $p_{wf}$ ) .....	104
4.3.1. Análisis de sensibilidad del gasto ( $q$ ) .....	104
4.3.2. Análisis de sensibilidad de la presión de fondo fluyendo ( $p_{wf}$ ) .....	108
CAPÍTULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	114
REFERENCIAS .....	116
APÉNDICE A SOLUCIÓN NUMÉRICA POR DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD .....	119

A.1. Planteamiento del sistema de ecuaciones para la solución numérica de la ecuación de difusividad considerando un fluido ligeramente compresible. ....	119
A.2. Simulador para el flujo de un gas real en un yacimiento homogéneo en coordenadas cartesianas .....	125
A.3 Solución de las Ecuaciones .....	131
A.4. Simulador para el flujo de un gas real en un yacimiento homogéneo en coordenadas cilíndricas.....	133
 APÉNDICE B SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN POZO ATRAVESANDO UNA FRACTURA HIDRÁULICA EN UN YACIMIENTO HOMOGÉNEO (HEGRE, 1996) .....	137
 B.1. Modelado de un pozo horizontal fracturado.....	137
 APÉNDICE C DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFORMACIÓN DE VECTORES A INDICES PARA UNA MALLA CARTESIANA EN MRST .....	149
 NOMENCLATURA.....	152

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de celda en todas las direcciones (Hegre 1996). .....	18
<b>Figura 1.2</b> — Malla amplia con LGR en el centro (Hegre 1996). .....	21
<b>Figura 1.3</b> — Datos de presión en una malla sin refinamiento y otra con refinamiento (Hegre 1996). .....	22
<b>Figura 1.4</b> — Malla amplia con LGR. Pozo horizontal interceptado por 3 fracturas transversales (Hegre 1996). ....	22
<b>Figura 1.5</b> — Datos de presión en una malla sin refinamiento y otra con refinamiento (Hegre 1996). .....	22
<b>Figura 1.6</b> — Malla cartesiana para desarrollar radio equivalente de pozo. ....	27
<b>Figura 1.7</b> — Esquema de la discretización de un segmento de un yacimiento lineal (1D). ....	32
<b>Figura 1.8</b> — Esquemización de la triangulación Delaunay. ....	35
<b>Figura 1.9</b> — Malla PEBI con un pozo horizontal atravesando una fractura hidráulica circular (Hegre 1996). .....	36
<b>Figura 1.10</b> — Malla PEBI con un pozo horizontal atravesando dos fracturas hidráulicas (Hegre 1996). .....	36
<b>Figura 1.11</b> — Malla PEBI con un pozo horizontal interceptado por dos fracturas transversales (Hegre 1996). .....	36
<b>Figura 1.12</b> — Diagrama de flujo de operación de la función mldivide(A,B) de matlab o Backslash (Matlab 2019) .....	38
<b>Figura 3.1</b> — Subsistema que contiene al pozo y la fractura. ....	45
<b>Figura 3.2</b> — Sistema de malla en 2D que contiene al pozo, la fractura y el yacimiento. ....	45
<b>Figura 3.3</b> — Sistema de malla en 3D que contiene al pozo, la fractura y el yacimiento. ....	46
<b>Figura 3.4</b> — Representación de la fractura en el subsistema. ....	47
<b>Figura 3.5</b> — Representación del pozo horizontal con una fractura longitudinal. ....	48
<b>Figura 3.6</b> — Malla híbrida usando un cilindro y una malla cartesiana combinando nodos en MRST. ....	50
<b>Figura 3.7</b> — Representación del pozo horizontal con una fractura transversal. ....	50
<b>Figura 3.8</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad finita. ....	54
<b>Figura 3.9</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad infinita. ....	54
<b>Figura 3.10</b> — Distribución de presión en el subsistema a diferentes tiempos para una fractura longitudinal de conductividad finita. ....	55

<b>Figura 3.11</b> — Distribución de presión en el subsistema a diferentes tiempos para una fractura longitudinal de conductividad infinita.....	55
<b>Figura 3.12</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal de conductividad finita.....	56
<b>Figura 3.13</b> — Distribución de presión en el subsistema a diferentes tiempos para una fractura transversal de conductividad finita.....	56
<b>Figura 4.1</b> — Fractura transversal. ....	59
<b>Figura 4.2</b> — Fractura longitudinal. ....	59
<b>Figura 4.3</b> — Fractura con $3x_f/4$ de la longitud original.....	60
<b>Figura 4.4</b> — Fractura con $x_f/2$ de la longitud original.....	61
<b>Figura 4.5</b> — Fractura con $x_f/4$ de la longitud original.....	61
<b>Figura 4.6</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	63
<b>Figura 4.7</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	64
<b>Figura 4.8</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal en una fractura longitudinal y transversal a diferentes $x_f$ . ....	65
<b>Figura 4.9</b> — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	67
<b>Figura 4.10</b> — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	68
<b>Figura 4.11</b> — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	68
<b>Figura 4.12</b> — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	69
<b>Figura 4.13</b> — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	70
<b>Figura 4.14</b> — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $x_f$ .....	71
<b>Figura 4.15</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	73
<b>Figura 4.16</b> — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	74

<b>Figura 4.17</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	75
<b>Figura 4.18</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	77
<b>Figura 4.19</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	78
<b>Figura 4.20</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	78
<b>Figura 4.21</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	79
<b>Figura 4.22</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	80
<b>Figura 4.23</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $k_f$ .....	81
<b>Figura 4.24</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	84
<b>Figura 4.25</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	85
<b>Figura 4.26</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	86
<b>Figura 4.27</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	88
<b>Figura 4.28</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	89
<b>Figura 4.29</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	90
<b>Figura 4.30</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	91
<b>Figura 4.31</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	92
<b>Figura 4.32</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $k$ .....	93
<b>Figura 4.33</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	95
<b>Figura 4.34</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	96

<b>Figura 4.35</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	97
<b>Figura 4.36</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	99
<b>Figura 4.37</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	100
<b>Figura 4.38</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	100
<b>Figura 4.39</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	101
<b>Figura 4.40</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	102
<b>Figura 4.41</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $c_f$ .....	103
<b>Figura 4.42</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $q$ .....	105
<b>Figura 4.43</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $q$ .....	106
<b>Figura 4.44</b>	— Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $q$ .....	107
<b>Figura 4.45</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $p_{wf}$ .....	109
<b>Figura 4.46</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes $p_{wf}$ .....	110
<b>Figura 4.47</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $p_{wf}$ .....	110
<b>Figura 4.48</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes $p_{wf}$ .....	111
<b>Figura 4.49</b>	— Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $p_{wf}$ .....	112
<b>Figura 4.50</b>	— Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes $p_{wf}$ .....	113
<b>Figura A.1</b>	— Ilustración de la diferencia entre una aproximación continua y la de una aproximación por celdas (Lee y Wattenbarger 1996). .....	122
<b>Figura A.2</b>	— El sistema de celdas, mostrando las dimensiones de una celda (Lee y Wattenbarger 1996).....	125

<b>Figura A.3</b> — Diagrama usado para representar la dirección de los subíndices (Lee y Wattenbarger 1996). .....	127
<b>Figura A.4</b> — Numeración de un sistema para una malla en 2D y su correspondiente ecuación matricial (Lee y Wattenbarger 1996).....	132
<b>Figura A.5</b> — Sistema de celdas radial (Lee y Wattenbarger 1996). .....	133
<b>Figura A.6</b> — Perfil de pseudopresión para el caso de presión constante en la frontera externa (Lee y Wattenbarger 1996).....	134
<b>Figura A.7</b> — Perfil de pseudopresión para el caso de una frontera externa cerrada. (Lee y Wattenbarger 1996)...	135
<b>Figura B.1</b> — Sistema de malla Base en el área cercana a la fractura. 1/4 de la malla (Hegre 1996).....	138
<b>Figura B.2</b> — Comparativo del comportamiento de la caída de presión utilizando una solución analítica y la solución numérica de un pozo horizontal interceptado por una fractura longitudinal de conductividad finita (Hegre 1996).....	138
<b>Figura B.3</b> — Comparativo del comportamiento de la caída de presión utilizando una solución analítica y la solución numérica de un pozo horizontal interceptado por una fractura longitudinal de conductividad infinita (Hegre 1996).....	139
<b>Figura B.4</b> — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de la celda en dirección- $x$ (Hegre 1996). .....	140
<b>Figura B.5</b> — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de la celda en dirección- $y$ (Hegre 1996). .....	140
<b>Figura B.6</b> — Pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad intermedia. Efecto del tamaño de la celda en dirección- $z$ (Hegre 1996).....	141
<b>Figura B.7</b> — Pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad infinita. Efecto del tamaño de la celda en dirección- $z$ (Hegre 1996). .....	142
<b>Figura B.8</b> — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de la celda en todas las direcciones (Hegre 1996). .....	142
<b>Figura B.9</b> — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del ancho de la celda de fractura (Hegre 1996). .....	143
<b>Figura B.10</b> — Malla híbrida usada para modelar un pozo horizontal interceptado por una fractura transversal (Hegre 1996). .....	144
<b>Figura B.11</b> — Comportamiento de la caída de presión analítica y simulada de un pozo horizontal interceptado por una fractura transversal (Hegre 1996).....	145
<b>Figura B.12</b> — Pozo horizontal con una fractura transversal. Efecto del tamaño de bloque ( $\Delta R$ ) en la región de la fractura (Hegre 1996) .....	145
<b>Figura B.13</b> — Pozo horizontal con una fractura transversal. Efecto del tamaño de celda ( $\Delta x$ , $\Delta y$ ) en la región de la fractura (Hegre 1996). .....	146
<b>Figura B.14</b> — Datos de presión en una malla con refinamiento y una malla sin refinamiento (Hegre 1996). ..	148

<b>Figura B.15</b> — Datos de gasto de aceite en una malla con refinamiento y una malla sin refinamiento (Hegre 1996). .....	148
<b>Figura C.1</b> — Vista en planta de las celdas de una malla de longitud $n_x, n_y$ elementos. ....	149
<b>Figura C.2</b> — Distribución de las celdas como un vector y los índices que le aplican. ....	149
<b>Figura C.3</b> — Malla cartesiana de 3 dimensiones con un corte de celdas.....	150
<b>Figura C.4</b> — Malla cartesiana con algunas celdas eliminadas para notar los índices que le corresponden.....	151

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 3.1</b> — Propiedades de yacimiento y fluido (Hegre 1996).....	43
<b>Tabla 3.2</b> — Tamaño de celdas del subsistema para una fractura longitudinal y una fractura transversal (Hegre 1996) .....	43
<b>Tabla 4.1</b> — Tabla de las propiedades de la fractura y yacimiento (Chaudhary <i>et. al.</i> 2011) .....	58

# CAPITULO I

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo se pretende dar una idea general acerca de la simulación numérica del flujo en yacimientos, los conceptos y la matemática básica que se requiere para obtener las soluciones numéricas de los modelos de flujo, y su aplicación en yacimientos no convencionales.

El capítulo se divide en tres partes. En la primera parte se define la problemática aplicada a la simulación de yacimientos no convencionales, las posibles aproximaciones que se pueden dar mediante ajustes de producción, ejemplos de simuladores comerciales y una breve historia sobre el simulador MATLAB *Reservoir Simulation Toolbox* (MRST). La segunda parte contiene una introducción a la simulación numérica de yacimientos de baja permeabilidad con fracturas hidráulicas en pozos horizontales, aquí mismo se analiza la influencia del tipo de malla, tamaño de celda y del Refinamiento Local de la Malla (LGR por sus siglas en inglés). Por último en la tercera parte se definen los conceptos básicos necesarios para el entendimiento de este trabajo, así como una introducción a los sistemas discretos (mallados), tipos de mallado y un diagrama para explicar el funcionamiento del operador *backslash* ( $\backslash$ ) de MATLAB, el cual es pieza clave en el "solver" que utiliza MRST para manejar las ecuaciones que se generan de la malla en cada paso de tiempo.

Como objetivo general de este trabajo se pretende realizar modelos de simulación que nos permita determinar la presión y gasto en yacimientos de aceite en lutitas.

Así mismo, los objetivos particulares son:

- 1.- La construcción y reproducción del modelo de Hegre 1996 en MRST, realizando la comparación de los resultados con los datos obtenidos por el autor.
- 2.- Construir un modelo con los datos considerados por el autor Chaudhary *et al.* 2011 para realizar un análisis de sensibilidad en parámetros del yacimiento, fluido y fractura, con el fin de probar la funcionalidad del software en yacimientos no convencionales.

### 1.1. Definición del problema

La alta heterogeneidad de las propiedades petrofísicas en la extensión del yacimiento (*e.g.*, porosidad ( $\phi$ ), permeabilidad ( $k$ ), *etc.*) y la dependencia de las propiedades de los fluidos del yacimiento a los cambios de la presión del yacimiento (*e.g.*, viscosidad ( $\mu$ ), densidad ( $\rho$ ), *etc.*), dificultan el desarrollo de soluciones analíticas para los modelos de flujo en yacimientos de lutitas (*shale gas/oil*). Esta dificultad se debe a que la heterogeneidad de las propiedades y la dependencia a la presión plantean un problema de no-linealidad de la ecuación de difusividad. Una de las soluciones más comunes para este problema de no-linealidad es el uso de métodos numéricos que reduzcan una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) en expresiones algebraicas que definan un sistema de ecuaciones. Esta metodología no es exclusiva de la industria petrolera y se le nombra genéricamente como *simulación*. En ingeniería de yacimientos recibe el nombre específico de *simulación de yacimientos* (Lee y Wattenbarger 1996)

La simulación de yacimientos es utilizada principalmente para hacer pronósticos de producción y evaluar esquemas de explotación de yacimientos que sirvan como base para la toma de decisiones como:

- Determinar el número óptimo de pozos y espaciamiento.
- Diseñar terminaciones de pozos (*e.g.*, diseños de fracturas hidráulicas).
- Selección del proceso óptimo de Recuperación Mejorada de Aceite (EOR, por sus siglas en inglés).

Los simuladores de flujo de fluidos requieren de información de entrada así como la distribución de propiedades estáticas y dinámicas del yacimiento, que son determinadas a partir del análisis de registros de pozo, análisis de núcleos, descripción geológica (litología, estructura, *etc.*), y datos de presión-producción. Adicionalmente, la información sobre los fluidos en el yacimiento se obtiene de pruebas PVT realizadas a muestras de fondo de pozo (Lee y Wattenbarger 1996).

Cuando se cuenta con un histórico de presión-producción del yacimiento y/o pozos perforados en éste y se requiere de una predicción de la producción, algunos de los datos de entrada del simulador usualmente deben ser "actualizados" para que el modelo de flujo reproduzca dicho histórico de presión-producción y se reduzca la incertidumbre de las predicciones. A este proceso se le conoce como ajuste de la historia de producción (*History Matching*).

El ajuste de la historia de producción estima datos del yacimiento encontrando datos del simulador que reproducen el comportamiento del yacimiento similar a los datos reales de presión y producción. Esto usualmente se llama como *problema inverso*. En otras palabras, empezamos con la respuesta (datos reales) y se trata de definir el problema (modelo) (Lee y Wattenbarger 1996).

Los datos del comportamiento del campo pueden tener errores. A veces esto se convierte en un problema mayor al obtener un buen histórico de producción. Para esta discusión, no obstante, se asume que los datos del comportamiento del campo son correctos. Uno de los principios del ajuste de la historia de producción es que el ajuste no es único. Esto es, más de un conjunto de datos del yacimiento puede ajustarse al comportamiento del yacimiento con la misma exactitud. Esto se convierte en responsabilidad del ingeniero de hacer un juicio entre los diferentes conjuntos de datos. Al hacer este juicio, el ingeniero debe analizar otras fuentes de datos tales como registros de pozo, análisis de núcleos e interpretación geológica (Lee y Wattenbarger 1996).

En el mercado existe diferentes simuladores tales como ECLIPSE, INTERSECT, IMEX, GEM, COFLOW, *etc.* Éstos permiten al usuario modelar y predecir el comportamiento de los yacimientos, así como determinar la producción en diferentes intervalos de tiempo. Dentro de estos simuladores es posible adaptar la forma del yacimiento a figuras geométricas (mallas), manipular las propiedades de los fluidos, número de pozos, métodos de recuperación, entre otros. Sin embargo el uso de simuladores comerciales puede representar un costo relativamente elevado que los hace poco accesibles para algunas personas, universidades o incluso compañías. Por tal motivo en este trabajo presentamos como alternativa el uso de una herramienta de acceso libre (*open source*) conocida como MRST.

MRST es un software de código abierto para el modelado y simulación de yacimientos desarrollado principalmente por el grupo computacional de geociencias en el departamento de matemáticas y cibernética en SINTEF, la cual es una organización de investigación amplia y multidisciplinaria fundada en 1950, con experiencia internacional de alto nivel en los campos de la tecnología, las ciencias naturales, la medicina y las ciencias sociales. Realizan contratos de investigación y desarrollo como socios para los sectores público y privado, además es una de las instituciones de investigación más grandes de Europa, se localiza en Trondheim y en Oslo, Noruega. El software tiene una amplia cantidad de usuarios a nivel internacional y además la tercera parte de sus módulos fueron desarrollados por la Universidad de Heriot-Watt (Escocia), Norwegian University of Science and Technology (NTNU) en Trondheim, Noruega, la Universidad de Bergen (Noruega), Netherlands Organisation for Applied Scientific Research (TNO) en Países Bajos y la Universidad Tecnológica de Delft (TU Delft, Países Bajos). MRST contiene un conjunto de módulos desarrollados en MATLAB, en los que cada uno cuenta con diversas funciones para crear o manipular mallas, propiedades de los fluidos, predecir la producción de un yacimiento, *etc.*

Este trabajo presenta la aplicación de MRST para simular el comportamiento de pozos horizontales fracturados en yacimientos no convencionales. Comparamos nuestros resultados con los resultados publicados en trabajos clásicos y con resultados provistos en publicaciones en los que se utilizaron softwares comerciales. Para efectos de esta tesis, se han empleado principalmente los módulos siguientes: (1) Ad-blackOil, (2) linearSolver, (3) GridProcessing

## **1.2. Simulación Numérica de Pozos Horizontales Fracturados**

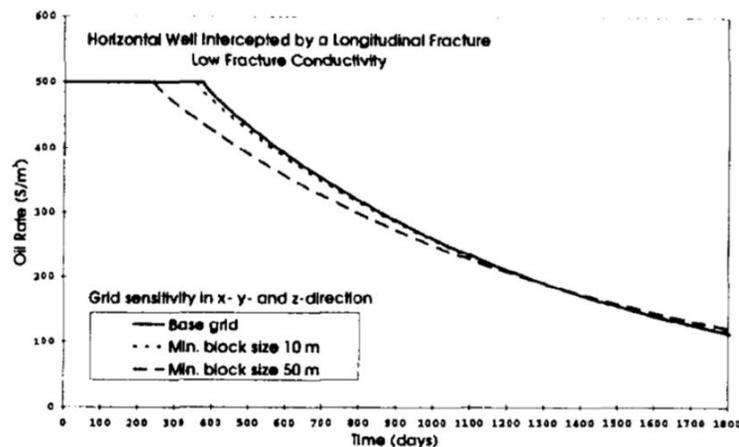
En la literatura se discuten frecuentemente dos configuraciones de un pozo horizontal interceptando fracturas hidráulicas. Las fracturas hidráulicas tienden a crearse en dirección del esfuerzo máximo de la formación ( $\sigma_{Hmax}$ ). Por ello, si el pozo horizontal es perforado perpendicularmente a la dirección del esfuerzo mínimo ( $\sigma_{Hmin}$ ) se espera las fracturas hidráulicas se propaguen a lo largo del eje del pozo (fracturas longitudinales). Por el contrario, si un pozo horizontal es perforado en la dirección del esfuerzo mínimo ( $\sigma_{Hmin}$ ) se espera que las fracturas hidráulicas se propaguen perpendicularmente al eje del pozo (fracturas transversales). En cualquiera de los casos, es posible lograr fracturas múltiples a lo largo del pozo al aislar adecuadamente las zonas de la formación atravesada por el pozo. Los pozos horizontales multi-fracturados han sido esenciales para el desarrollo de yacimientos de aceite y gas de baja/ultra-baja permeabilidad (*tight* y *shale oil/gas*) y yacimientos de metano asociado a carbón mineral (*coalbeds*) (Hegre 1996).

La predicción del comportamiento transitorio en pozos horizontales fracturados (o multifracturados) ha recibido más atención desde que evolucionaron las tecnologías para perforar y terminar dichos pozos, particularmente para yacimientos de *shale gas/oil*. La definición de modelos de simulación en este tipo de configuraciones de pozo-yacimiento depende de los objetivos del estudio (Hegre 1996).

Para estudios del comportamiento transitorio de la presión y/o del gasto a escala de pozo es necesario considerar los efectos de flujo en la fractura. En muchos de los estudios de simulación numérica de pozos horizontales interceptando fracturas hidráulicas se utiliza el método de diferencias finitas con una malla cartesiana. La simulación del comportamiento de flujo de fluidos en pozos fracturados requiere refinar la malla (celdas "pequeñas") en las regiones cercanas a las fracturas hidráulicas. Por ejemplo, para este tipo de configuraciones el área cercana al pozo/fractura puede modelarse por un sistema fino ("pequeño") de celdas aplicando un *Local Grid Refinement* (LGR). A estas celdas correspondientes a la fractura se les asignan valores de permeabilidad mayores que los correspondientes a las celdas del yacimiento, para lograr los valores de conductividad requeridos (Hegre 1996).

#### Refinamiento del mallado local (LGR)

Los pozos horizontales fracturados pueden modelarse con LGR o si esta opción no está disponible, se puede modelar por un conjunto de bloques separado de la malla pero adjunto por una conexión de no-fronteras a los bloques que rodean la fractura (Economides *et al.* 1991). La **Fig. 1.1** muestra un ejemplo de los efectos de la malla en la simulación de la producción de aceite. Para este caso el área de drenaje es de 2000 por 2000 metros, la presión mínima de fondo es de 200 bar y la conductividad de la fractura es de 500 mD\*m (Hegre 1996).



**Figura 1.1** — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de celda en todas las direcciones (Hegre 1996).

#### Modelado completo del campo

En los casos en que el objetivo es estudiar y predecir el comportamiento de la producción en periodos muy largos de tiempo, el régimen transitorio de la presión no es muy relevante, por lo que usualmente no se requiere modelar fracturas hidráulicas con celdas de menor tamaño, por lo que para la predicción del desempeño de la producción del yacimiento, podría aplicarse un mallado más amplio o poco refinado en toda la extensión del yacimiento. El uso de un mallado no-refinado debe combinarse con el uso del concepto de radio efectivo del pozo o el método de transmisibilidades corregidas (Hegre, 1996).

### Modelos de radio efectivo de pozo

Un método relativamente simple para modelar pozos horizontales fracturados en modelos del yacimiento entero, es aplicando el concepto de radio efectivo del pozo. El pozo horizontal fracturado se modela como un pozo vertical estándar utilizando el modelo de Peaceman y un radio efectivo equivalente de pozo  $r_{we}$ . Es indispensable que  $r_{we}$  sea mucho menor que el radio equivalente de presión  $r_o$  de la celda que contiene el pozo horizontal fracturado. El radio efectivo de pozo para un pozo horizontal fracturado interceptado tanto por una fractura longitudinal como múltiples fracturas transversales está determinado de manera analítica por Hegre (1994). El radio efectivo del pozo puede leerse directamente de gráficos con parámetros adimensionales.

El uso del concepto del radio efectivo de pozo provee resultados aceptables exceptuando el periodo transitorio de la presión. Con estas aproximaciones los problemas numéricos (*e.g.* los altos tiempos de cómputo) se eliminan (o reducen significativamente). No obstante, este método sólo puede aplicarse si el pozo horizontal fracturado es relativamente más pequeño que el área de celda del mallado. Lefevre (1993) aplicó este procedimiento para pozos verticales con fracturas de conductividad infinita, mientras que Hegre (1996) demostró que este método puede ser extendido a pozos horizontales fracturados con conductividad infinita.

### Modelos de transmisibilidad corregida

En aquellas situaciones donde el concepto de radio efectivo del pozo no es aplicable (*e.g.*, en fracturas altamente conductivas que resulta en que el radio efectivo de pozo sea mayor que el radio equivalente de presión y especialmente si las fracturas se extienden por varias celdas dentro del mallado), es necesario ajustar la productividad del pozo, y las transmisibilidades entre las celdas de la región pozo/fractura.

De acuerdo con Hegre (1996), el método de transmisibilidades corregidas es más flexible y consiste en ajustar las transmisibilidades de un modelo de malla regular con los factores de conexión de un pozo en un modelo de malla fina. Esto implica contar con un modelo de simulación donde sea relativamente fácil incluir un refinamiento de malla tal que calcule automáticamente el ajuste de transmisibilidades y los factores de conexión del pozo.

Los ajustes de transmisibilidad están basados en los resultados de un modelo con refinamiento en el área cercana al sistema pozo/fractura con un modelado detallado en las fracturas. Se requiere que el tamaño de las celdas finas sea consistente con el de las celdas amplias (*i.e.* que el modelo de mallado de celdas amplias y finas tengan las mismas condiciones de transmisibilidad en sus fronteras por cada celda vecina).

La corrección de transmisibilidad en el modelo de celdas amplias entre dos celdas vecinas  $I$  y  $J$  es (Hegre 1996):

$$T_{IJ} = \frac{q_{IJ} B \mu}{(p_J - p_I - \rho_g (Z_J - Z_I))} \dots\dots\dots (1.1)$$

en donde  $q_{IJ}$  es el gasto total entre la celda  $I$  y  $J$ , y la presión promedio en la celda  $I$  es:

$$p_I = \frac{\sum (p_i - \rho g(Z_i - Z_I)) V_{pi}}{\sum V_{pi}} \dots\dots\dots (1.2)$$

La profundidad de la celda  $I$  está dada por:

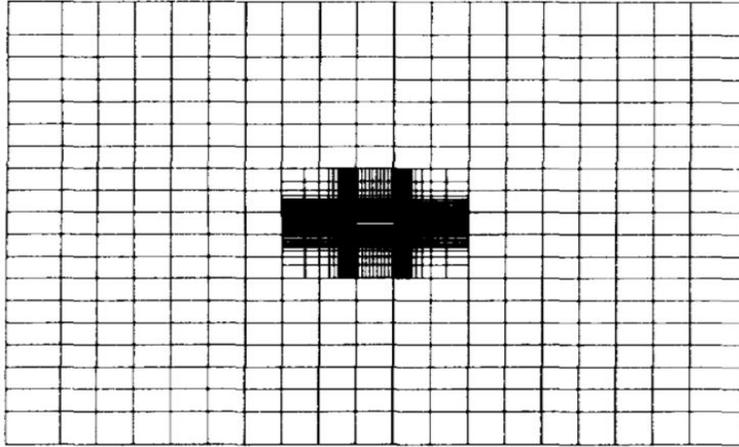
$$Z_I = \frac{\sum Z_i V_{pi}}{V_{pi}} \dots\dots\dots (1.3)$$

Los sub-índices  $I$  y  $J$  se refieren a las celdas amplias, mientras que el sub índice  $i$  refiere a la celda fina localizada dentro de la celda amplia  $I$ . El factor de conexión entre el pozo y la primera celda amplia en la que el pozo está terminado está dado por:

$$T_{Iw} = \frac{qB\mu}{(p_I - p_{wf})} \dots\dots\dots (1.4)$$

Este procedimiento de ajustar las transmisibilidades en el modelo de mallado de celdas gruesas y un factor de conexión del pozo basado en los resultados de una simulación de una malla con refinamiento es simple. En general se requiere tener un modelo de simulación donde sea relativamente fácil incluir un refinamiento local de la malla y la cual automáticamente calcule las transmisibilidades ajustadas y el factor de conexión de pozos que puede ser aplicado para la simulación en un mallado sin refinamiento.

Hegre (1996) demostró este método mediante un ejemplo de un pozo horizontal con una fractura transversal de conductividad infinita. El área del mallado de celdas amplias es de 100 m por 100 m y se utiliza un refinamiento de 5 por 5 celdas amplias que delimitan al pozo con la fractura para los cálculos de transmisibilidad. La extensión total de la fractura es de 100 m, lo que implica que se extiende por todo el mallado. El mallado, incluido el LGR y la ubicación de la fractura se muestran en la **Fig. 1.2**. Las transmisibilidades ajustadas se calculan con base en la presión promedio dentro de cada celda amplia y el flujo a través de las fronteras de las celdas del mallado después de producir 500 m<sup>3</sup>/d por 35 días. Las transmisibilidades entre la celda central del mallado amplio que contiene la fractura y las celdas vecinas tienen que aumentar en un factor aproximado de 2.2 en la dirección- $x$  y 1.45 en la dirección- $y$ . Para las otras celdas amplias solo se deben hacer pequeños ajustes en las transmisibilidades, en un rango de 0.89 a 1.18.



**Figura 1.2** — Malla amplia con LGR en el centro (Hegre 1996).

Con base en la Ec. 1.4 el factor de conexión del pozo se incrementa por un factor de aproximadamente 9.8. En la **Fig. 1.3** se compara el comportamiento de la presión en el modelo de mallado amplio con los ajustes del factor de conexión del pozo y de transmisibilidades, con los datos de presión obtenidos del modelo LGR. La predicción de la caída de presión obtenida a partir del modelo de mallado amplio es muy grande a tiempos cortos ( $t < 10$  horas) pero se aproxima al modelo de LGR en tiempos largos ( $t > 10$  horas).

Adicionalmente, Hegre (1996) presentó un ejemplo en el que este método se aplicó en un pozo horizontal con tres fracturas transversales con 100 metros de espaciamento. Una parte del mallado, incluyendo la ubicación de las fracturas, se muestra en la **Fig. 1.4**. Los parámetros de la formación y de la fractura son idénticos a los del ejemplo descrito en el párrafo anterior y el sistema de mallado es similar. La simulación en un mallado fino está dirigido tanto para restricciones de flujo hacia las fracturas, y para asumir un flujo a lo largo de los 200 metros de la sección horizontal. Como se muestra en la **Fig. 1.5**, no se obtiene ganancia en la productividad permitiendo el flujo hacia las fracturas que en este ejemplo son de conductividad infinita. La corrección de transmisibilidades en la malla de celdas amplias está generada con base en los resultados obtenidos de la simulación del mallado fino. Los factores de corrección en las celdas amplias y las aledañas a las fracturas son de 1.74 y 1.98 en la dirección- $k$  y 1.23 en la dirección- $y$ . Dentro de la fractura la transmisibilidad de las celdas amplias se reduce en un factor de 0.18. Los factores de conexión del pozo se incrementan por un factor de aproximadamente 10.3 para el mallado central en la fractura y de 12.3 para las celdas del mallado de las dos fracturas externas. En la **Fig. 1.5** se muestra una comparación del comportamiento de presión simulado del mallados amplio y fino con los ajustes en las transmisibilidades. En este ejemplo también existe una excelente concordancia en la presión se alcanza después de un par de meses de producción.

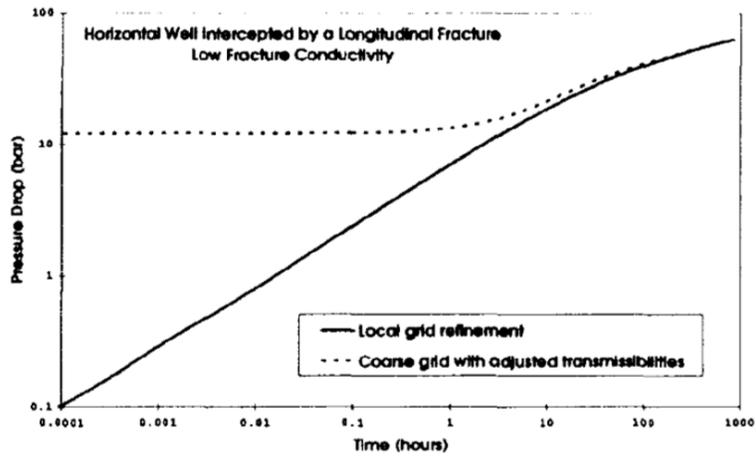


Figura 1.3 — Datos de presión en una malla sin refinamiento y otra con refinamiento (Hegre 1996).

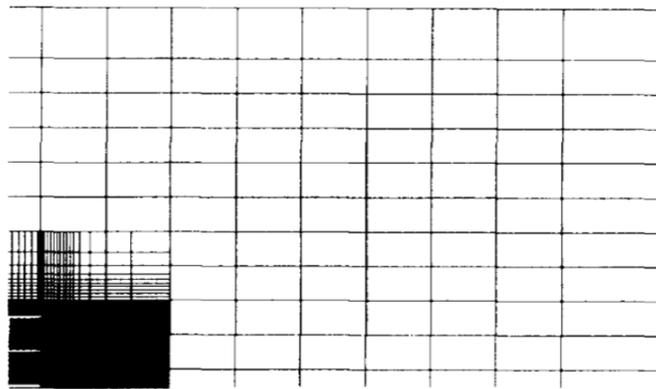


Figura 1.4 — Malla amplia con LGR. Pozo horizontal interceptado por 3 fracturas transversales (Hegre 1996).

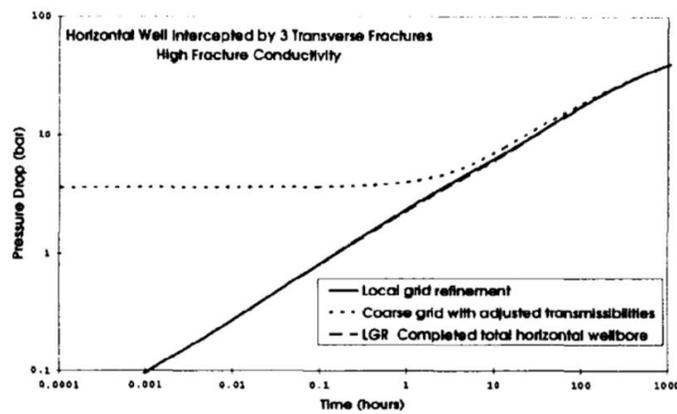


Figura 1.5 — Datos de presión en una malla sin refinamiento y otra con refinamiento (Hegre 1996).

### 1.3. Definición de conceptos básicos

#### Yacimientos de lutitas (*shale gas/oil*)

Yacimientos compuestos predominantemente por esquistos o pizarras, que son rocas con permeabilidad muy baja y donde no existe un sistema petrolero definido, por lo que su producción en cantidades comerciales requiere emplear técnicas de fracturamiento hidráulico múltiple a lo largo de pozos horizontales de gran longitud. Los yacimientos de *shale-gas* se diferencian de los yacimientos de *coalbed* por el contenido de materia orgánica. Los yacimientos de *coalbed* contienen arriba del 50% de materia orgánica mientras que los yacimientos de *shale gas* se mantiene por debajo del 50%, además de contener gas libre y gas adsorbido por este material orgánico (Jenkins *et al.*,2008). De acuerdo con Ehlig-Economides (2018) la definición más apropiada para este tipo de yacimientos es provista por la Academia de Medicina, Ingeniería y Ciencias de Texas (TAMEST por su acrónimo en inglés), quienes proponen que los yacimientos de shale-gas son formaciones ricas en contenido orgánico con contenido de gas y/o aceite que requiere múltiples fracturas hidráulicas, usualmente creadas a partir de pozos horizontales para la producción rentable de hidrocarburos.

#### Yacimientos compactos de areniscas (*tight gas/oil*)

Yacimientos compuestos por rocas con permeabilidad baja (menores a 1 md; Jenkins *et al.*,2008). La producción de hidrocarburos de yacimientos compactos de areniscas puede ser complicada sin operaciones de estimulación, no obstante, estos no son considerados como yacimientos no-convencionales debido a que existe un sistema petrolero presente.

#### Radio efectivo de pozo

Este concepto "re-escala" el radio del pozo al incluir los efectos del daño alrededor del pozo en un radio equivalente (o efectivo). Con base en la ecuación de difusividad en coordenadas radiales

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots (1.5)$$

y considerando un yacimiento en régimen estacionario, la Ec. 1.5 se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \dots\dots\dots (1.6)$$

Aplicando la integral con respecto a *r* a la Ec. 1.6 se obtiene:

$$r \frac{dp}{dr} = C_1 \dots\dots\dots (1.7)$$

Separando variables e integrando la Ec. 1.7 nuevamente, resulta en:

$$p(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \dots\dots\dots (1.8)$$

Para este caso, la condición de frontera externa es:

$$p(r = r_e) = p_i \dots\dots\dots (1.9)$$

Por lo que aplicando esta condición en la Ec. 1.8 se obtiene la solución acotada:

$$p(r = r_e) = C_1 \ln(r_e) + C_2 = p_i \dots\dots\dots (1.10)$$

De ahí que, la constante  $C_2$  puede definirse como

$$C_2 = p_i - C_1 \ln(r_e) \dots\dots\dots (1.11)$$

Sustituyendo la Ec. 1.11 en la Ec. 1.10,

$$p(r) = C_1 \ln(r) + p_i - C_1 \ln(r_e) \dots\dots\dots (1.12)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos en la Ec 1.12, ésta puede reescribirse como:

$$\Delta p(r) = C_1 \ln\left(\frac{r_e}{r}\right) \dots\dots\dots (1.13)$$

donde se define la constante  $C_1$  tal que:

$$C_1 = \frac{qB\mu}{2\pi kh} \dots\dots\dots (1.14)$$

Por otro lado, la caída de presión en el pozo es igual a la caída de presión propia del yacimiento más la caída de presión debida al daño

$$\Delta p_w = \Delta p_{yacs} + \Delta p_{daño} \dots\dots\dots (1.15)$$

Para un pozo horizontal con una fractura transversal completamente penetrante (i.e. la altura de la fractura es igual al espesor del yacimiento), el radio del flujo radial es  $h/2$ , donde  $h$  es el espesor del yacimiento. La caída de presión en esta zona radial es (Mukherjee *et al.* 1991):

$$\Delta p_{wr} = \frac{qB\mu}{2\pi k_f w_f} \ln\left(\frac{h}{2r_w}\right) \dots\dots\dots (1.16)$$

La Ec. 1.16 asume que no hay efectos gravitacionales y es una expresión derivada de la ley de Darcy en estado estacionario, tomando en cuenta a la fractura como un yacimiento de extensión  $h/2$  y altura  $w_f$ . Esta caída de presión debe ser ajustada al restarle la caída de presión resultante de un flujo lineal en la fractura de un pozo completamente penetrante:

$$\Delta p_{wL} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{qB\mu h}{2k_f w_f h}, \dots\dots\dots (1.17)$$

donde el factor  $1/2$  se usa para definir el flujo en una de las “alas” de la fractura.

Para encontrar la caída de presión debida al daño en un pozo horizontal con una fractura hidráulica resulta en la diferencia entre la caída de presión por flujo radial y flujo lineal en la fractura

$$\Delta p_s = \Delta p_{wr} - \Delta p_L \dots\dots\dots (1.18)$$

Sustituyendo las Ecs. 1.16 y 1.17 en 1.18,

$$\Delta p_s = \frac{qB\mu}{2\pi k_f w_f} \ln\left(\frac{h}{2r_w}\right) - \frac{qB\mu}{4k_f w_f} \dots\dots\dots (1.19)$$

Factorizando términos comunes en la Ec. 19, multiplicando y dividiendo entre el término  $kh$ , llegamos a la ecuación propuesta por Mukherjee *et al.* 1991:

$$\Delta p_s = \frac{qB\mu}{2\pi kh} \left[ \frac{kh}{k_f w_f} \left( \ln\left(\frac{h}{2r_w}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \right] \dots\dots\dots (1.20)$$

Para la caída de presión en el pozo existe un radio  $r'_{wa}$ , que considera el radio efectivo del pozo  $r_{wa}$  en adición con la caída de presión producida por el daño en un pozo horizontal con una fractura transversal.

$$\ln\left(\frac{r_e}{r'_{wa}}\right) = \ln\left(\frac{r_e}{r_{wa}}\right) + \frac{kh}{k_f w_f} \left( \ln\left(\frac{h}{2r_w}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \dots\dots\dots (1.21)$$

Despejando  $r'_{wa}$  de la Ec. 1.21 se obtiene:

$$r'_{wa} = r_e e^{\ln\left(\frac{r_{wa}}{r_e}\right) - \frac{kh}{k_f w_f} \left( \ln\left(\frac{h}{2r_w}\right) - \frac{\pi}{2} \right)} = r_{wa} e^{-\frac{kh}{k_f w_f} \left( \ln\left(\frac{h}{2r_w}\right) - \frac{\pi}{2} \right)} \dots\dots\dots (1.22)$$

Si el argumento del exponencial en la Ec. 1.22 lo dividimos y multiplicamos por  $x_f$  obtenemos el factor de conductividad adimensional ( $F_{cD}$ ) y el espesor adimensional ( $h_D$ ). De esta forma llegamos al radio efectivo presentado por Hegre *et al.* 1994 para pozos horizontales con fracturas hidráulicas transversales.

$$r_{wa} = r_{wa} e^{-\frac{h_D}{F_{cD}} \left( \ln \left( \frac{h}{2r_w} \right) - \frac{\pi}{2} \right)} \dots\dots\dots (1.23)$$

Modelo de Peaceman

El modelo de Peaceman tiene como objetivo el establecer una relación para "acoplar" la presión de un pozo fluyente con la presión en las celdas vecinas dentro de un mallado uniforme. Dicho modelo se deriva a partir en la ecuación de difusividad para flujo radial monofásico (aceite) en régimen estacionario:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) = 0, \dots\dots\dots (1.24)$$

La cual se integral con respecto al radio  $r$ , resultando:

$$r \frac{dp}{dr} = C_1, \dots\dots\dots (1.25)$$

en donde  $C_1$  es una constante de integración. Para obtener el valor de esta constante se considera un pozo de radio  $r_w$  produciendo a gasto constante ( $q_w$ ). Esto se define utilizando la ley de Darcy:

$$q_w = \frac{2\pi kh}{B_o \mu} \left( r \frac{dp}{dr} \right)_{r_w} \dots\dots\dots (1.26)$$

en donde  $k$  es la permeabilidad,  $h$  es el espesor de la formación,  $B_o$  es el factor de formación del aceite y  $\mu$  es la viscosidad del aceite. Al evaluar la Ec. 1.26 en el radio del pozo ( $r_w$ ) se concluye que la constante  $C_1$  es:

$$\frac{q_w B_o \mu}{2\pi kh} = C_1, \dots\dots\dots (1.27)$$

por lo que la Ec. 1.25 se reescribe como:

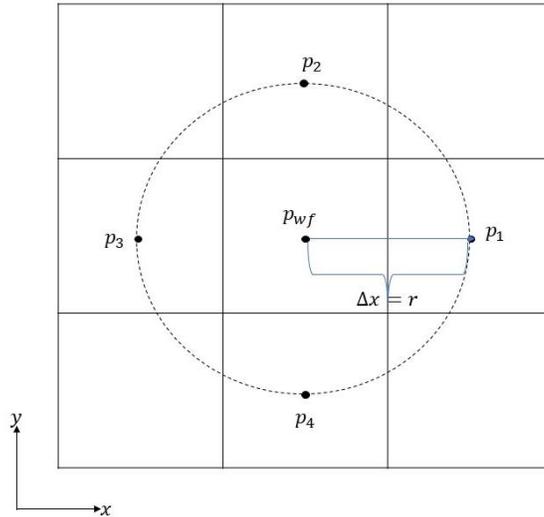
$$r \frac{dp}{dr} = \frac{q_w B_o \mu}{2\pi kh} \dots\dots\dots (1.28)$$

Separando variables se obtiene:

$$dp = \frac{q_w B_o \mu}{2\pi kh} \frac{1}{r} dr \dots\dots\dots (1.29)$$

Al integrar ambos lados de la ecuación, considerando la presión de fondo ( $p_{wf}$ ) la cual "se obtiene" en el radio del pozo ( $r_w$ ) resulta la expresión siguiente:

$$p - p_{wf} = \frac{q_w B_o \mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_w} \dots\dots\dots (1.30)$$



**Figura 1.6** — Malla cartesiana para desarrollar radio equivalente de pozo.

Con base en la **Fig. 1.6**, que muestra una malla cartesiana de 3 por 3, se puede deducir  $r = \Delta x$ . Entonces la Ec. 1.30 se convierte en

$$p_1 - p_{wf} = \frac{q_w B_o \mu}{2\pi kh} \ln \frac{\Delta x}{r_w} \dots\dots\dots (1.31)$$

Además tenemos que la ecuación en diferencias finitas para régimen estacionario y flujo en dos direcciones ( $x$ - $y$ ) está dada por (ver desarrollo en el Apéndice A):

$$\frac{A_x k}{\mu B_o \Delta x} (p_{i+1j} - 2p_{ij} + p_{i-1j}) + \frac{A_y k}{\mu B_o \Delta y} (p_{ij+1} - 2p_{ij} + p_{ij-1}) = q_w \dots\dots\dots (1.32)$$

El área en dirección- $x$  y dirección- $y$ , se definen tal que

$$A_x = \Delta y h \dots\dots\dots (1.33)$$

y

$$A_y = \Delta x h \dots\dots\dots (1.34)$$

Sustituyendo las Ecs. 1.33 y 1.34 en la Ec. 1.32 y considerando celdas cuadradas en la malla de la **Figura 1.6**, resulta la expresión:

$$\frac{hk}{\mu B_o} (p_{i+1j} + p_{ij+1} + p_{i-1j} + p_{ij-1} - 4p_{ij}) = q_w \cdot \dots\dots\dots (1.35)$$

Por notación

$$p_{i+1j} = p_1, \dots\dots\dots (1.36)$$

$$p_{ij+1} = p_2, \dots\dots\dots (1.37)$$

$$p_{i-1j} = p_3, \dots\dots\dots (1.38)$$

$$p_{ij-1} = p_4, \dots\dots\dots (1.39)$$

$$p_{ij} = p_{wf} \cdot \dots\dots\dots (1.40)$$

Por la simetría, las presiones son iguales en estos puntos, por tanto:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 \cdot \dots\dots\dots (1.41)$$

Por lo tanto la Ec. 1.35 puede reescribirse como:

$$p_1 - p_{wf} = \frac{q_w B_o \mu}{4hk} \cdot \dots\dots\dots (1.42)$$

Igualando las Ecs. 1.31 y 1.42 se obtiene:

$$\frac{q_w B_o \mu}{2\pi kh} \ln \frac{\Delta x}{r_w} = \frac{q_w B_o \mu}{4hk} \cdot \dots\dots\dots (1.43)$$

y despejando el radio equivalente de pozo  $r_w=r_o$ ,

$$r_o = \Delta x e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.2078\Delta x \approx 0.2\Delta x \cdot \dots\dots\dots (1.44)$$

Para celdas rectangulares, y

$$r_o = 0.14\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \dots\dots\dots (1.45)$$

El modelo de Peaceman ha sido ampliamente utilizado en simuladores de yacimientos, para calcular la presión del pozo o su gasto en el cuál se incluyó un índice de productividad numérico  $PI$  en un bloque que contiene al pozo, para relacionar su presión y gasto con la presión simulada mediante (Ding D. Y. *et al.* 2015):

$$PI = \frac{D_{IP}}{\ln\left(\frac{r_o}{r_w}\right) + s} \dots\dots\dots (1.46)$$

No obstante el modelo de Peaceman no es aplicable al modelado de pozos fracturados. Una solución para el modelado de pozos fracturados es el uso del concepto de radio equivalente de pozo en cuyo caso es igual a  $\frac{1}{2}$  de la longitud media de la fractura ( $x_f$ ) (en una fractura rectangular de conductividad infinita) o factor de daño negativo ( $s$ ). Sin embargo surgen problemas por el uso de este concepto como se mencionan a continuación (Ding D. Y. *et al.* 2015):

1. La longitud del bloque que contiene al pozo ( $\Delta x_w$ ) no puede ser 2.5 veces más pequeña que la longitud media de la fractura ( $x_f$ ) tal que el denominador de la Ec. 1.46 resulte negativo.
2. La distribución de presión con geometría elíptica en la vecindad de la fractura se modela mediante una geometría radial.
3. Los resultados de la simulación no son precisos antes del régimen pseudo-estacionario alrededor de toda la fractura. El periodo transitorio es tan largo como la longitud de la fractura.
4. El radio equivalente de pozo se basa en asumir una conductividad infinita. El flujo dentro de la fractura no se considera.
5. Este modelo no es valido para medios heterogéneos.

Conductividad de una fractura hidráulica

La conductividad de una fractura hidráulica se define como el producto de la permeabilidad de la fractura hidráulica ( $k_f$ ) por el ancho de la fractura ( $w_f$ ). Cinco-Ley *et al.* (1978) definieron la conductividad adimensional como:

$$F_{cD} = \frac{k_f w_f}{k x_f} , \dots\dots\dots (1.47)$$

donde  $k_f$  y  $w_f$  se son la permeabilidad y la apertura de la de la fractura hidráulica, respectivamente.

Tipos de fracturas hidráulicas

*Fractura hidráulica de flujo uniforme*

Se tiene cuando la fractura hidráulica presenta un gasto constante (flujo uniforme) de fluido a lo largo de toda la fractura y una caída de presión pequeña que en conjunto le dan una apariencia de alta conductividad, pero no infinita (Gringarten *et al.* 1974).

Gringarten *et al.* (1974) modeló un plano de fractura vertical completamente penetrada en un yacimiento homogéneo e isótropo. La presión permanece constante e igual a la presión inicial mientras la distancia desde el pozo se vuelve infinitamente grande, dando la característica de un yacimiento infinito. Considerando este yacimiento, los autores presentaron el modelo siguiente en variables adimensionales de la caída de presión para una fractura vertical de flujo uniforme:

$$p_{wD}(t_D) = \sqrt{\pi t_D} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{t_D}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{4t_D}\right) \dots\dots\dots (1.48)$$

Adicionalmente, estos autores también analizaron un modelo que considera un yacimiento rectangular cerrado y un pozo vertical fracturado, con una fractura de conductividad infinita y una de flujo uniforme. Para ambos tipos de fractura se observaron tres geometrías de flujo: (1) un flujo lineal a tiempos cortos, (2) un periodo de transición donde se ve el flujo pseudoradial y (3) un flujo pseudoestacionario a tiempos largos.

*Fractura hidráulica de conductividad infinita*

Este caso sucede cuando el flujo de fluido entra a lo largo de la fractura causando una presión constante en toda su extensión (Gringarten *et al.* 1974). Puede diagnosticarse que una fractura hidráulica es de conductividad infinita, cuando la conductividad adimensional de la fractura es mayor o igual a 300 (Cinco-Ley *et al.*, 1978).

El modelo presentado por Gringarten *et al.* (1974) implica una solución semi-analítica, la cual considera la discretización de una fractura hidráulica en *N*-segmentos, tal que cada segmento sea lo suficientemente pequeño para considerar un flujo uniforme en cada uno de ellos.

*Fractura hidráulica de conductividad finita*

El objetivo principal de las operaciones de fracturamiento hidráulico es crear conductos de mayor permeabilidad que la permeabilidad del yacimiento. Con base en la definición de la conductividad hidráulica adimensional (Ec. 1.40), puede intuirse que esto debe resultar en valores muy altos del parámetro *F<sub>CD</sub>*

Dado que un valor mayor o igual a 300 implica una fractura de conductividad infinita, un valor menor a éste resultará en una fractura de conductividad finita. Esto implica fracturas de (relativamente) baja permeabilidad, de gran extensión, muy estrechas o una combinación de estos factores.

Cinco-Ley *et al.* (1978) presentaron el modelo clásico que describe el flujo de una fractura hidráulica de conductividad finita en un yacimiento homogéneo. Los autores consideraron un yacimiento homogéneo, isótropo e infinito con estratos impermeables arriba y abajo. El yacimiento contiene un fluido ligeramente compresible que se produce a través de un pozo vertical fracturado longitudinalmente. La fractura de conductividad finita penetra de manera completa el espesor del yacimiento.

Considerando un yacimiento infinito, la respuesta de la presión transitoria puede exhibir hasta cuatro periodos de flujo: (1) Un flujo lineal en la fractura hidráulica, (2) Un flujo bilineal que resulta de la superposición del flujo lineal en la fractura y de un flujo lineal de la formación (3) Un flujo lineal en el que domina la aportación de flujo proveniente de la formación (flujo lineal de formación o pseudolineal), (4) Un flujo pseudoradial en el que comportamiento de flujo es dominado por las características del yacimiento.

Serie de Taylor

La Serie de Taylor se utiliza para representar una función  $f(x)$  en polinomios. El método está definido por:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \dots + \frac{(x-x_0)^N}{N!} \frac{d^N f}{dx^N} + R_{N+1}, \dots \dots \dots (1.49)$$

donde  $f(x)$  tiene  $N+1$  derivadas continuas evaluadas en  $x=x_0$ . La Ec. 1.49 puede escribirse en una forma más compacta como:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^N \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} + R_{N+1}, \dots \dots \dots (1.50)$$

en donde el residuo se define de la siguiente manera:

$$R_{N+1} = \frac{1}{(N+1)!} \left[ \int_{x_0}^x (x-x_0)^{N+1} \frac{d^{N+1} f}{dx^{N+1}} dx \right], \dots \dots \dots (1.51)$$

Incluyendo el término del residuo en la expansión, la serie de Taylor es una representación exacta de  $f(x)$ . Mientras que al ignorar el residuo y formar la expansión de un número finito de elementos, entonces la serie de Taylor es solo una aproximación de  $f(x)$ . Esto es:

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{n=1}^N \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \dots \dots \dots (1.52)$$

Método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales

Para ejemplificar la aplicación del método de diferencias finitas para aproximar EDP, consideramos la ecuación de difusividad en una dimensión para un fluido ligeramente compresible (Lee *et al.* 1996):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c}{0.00633k} \frac{\partial p}{\partial t}, \dots \dots \dots (1.53)$$

en donde  $\phi$  es la porosidad,  $\mu$  es la viscosidad en cp,  $c$  es la compresibilidad del fluido en  $\text{psi}^{-1}$ ,  $k$  es la permeabilidad en md,  $p$  es la presión en psia,  $t$  es el tiempo en días y  $x$  es la posición en ft.

Considerando una función continua y conocida  $p(x,t)$  en  $x$ , se puede conocer también la función  $p(x\pm\Delta x)$ , utilizando la Serie de Taylor tal que la función  $p(x+\Delta x)$  se represente por un polinomio:

$$p(x \pm \Delta x) \approx p(x,t) + \Delta x \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 p(x,t)}{\partial x^3} + \dots + \frac{\Delta x^N}{N!} \frac{\partial^N p(x,t)}{\partial x^N} \dots (1.54)$$

Siempre que las derivadas de  $p(x,t)$  también sean continuas. En teoría, esta serie infinita es exacta para un número infinito de términos. Sin embargo, para fines computacionales, la serie debe ser truncada después de  $m$ -términos lo cual introduce un error de truncamiento,  $e_t$ , el cual está dado por:

$$e_t = \frac{p^{m+1}(x)\Delta x^{m+1}}{(m+1)!} + \dots \dots (1.55)$$

La Ec. 1.54 implica una evaluación de la función  $p(x,t)$  en un intervalo espacial posterior,  $p(x+\Delta x, \Delta t)$ , o anterior  $p(x-\Delta x, \Delta t)$ . Aplicando este concepto a un yacimiento, se puede discretizar una sección del yacimiento en tres segmentos (celdas) (ver **Fig. 1.7**), tal que se definan las equivalencias siguientes:

$$p_{i+1} = p(x + \Delta x), \dots (1.56)$$

$$p_i = p(x), \dots (1.57)$$

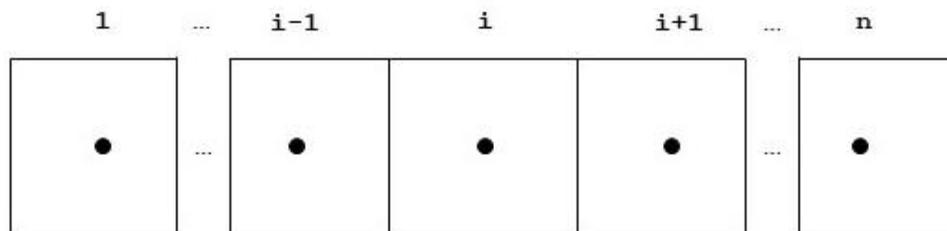
$$p_{i-1} = p(x - \Delta x) \dots (1.58)$$

Truncando la Serie de Taylor definida por la Ec. 1.54 con dos términos y sustituyendo las Ecs. 1.56 a 1.58 en ésta, se obtienen las expresiones siguientes:

$$p_{i+1} \approx p_i + \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}, \dots (1.59)$$

y,

$$p_{i-1} \approx p_i - \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} \dots (1.60)$$



**Figura 1.7** — Esquema de la discretización de un segmento de un yacimiento lineal (1D).

Con base en la Ec. 1.59, se puede realizar una “diferencia posterior” de la derivada de la presión con respecto a  $x$ , lo que resulta en:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \dots\dots\dots (1.61)$$

De manera similar, utilizando la Ec. 1.60 se utiliza una “diferencia anterior” dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} \dots\dots\dots (1.62)$$

Tomando un promedio de las Ecs. 1.61 y 1.62 se obtiene la diferencia central:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{avg} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} + \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{\Delta x} \right] \dots\dots\dots (1.63)$$

Para obtener la segunda derivada de la presión con respecto a  $x$ , es conveniente truncar la Serie de Taylor definida en la Ec. 1.54 con tres términos y expresar la aproximación resultante con las Ecs. 1.56 a 1.58. Esto resulta en:

$$p_{i+1} \approx p_i + \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1.64)$$

y,

$$p_{i-1} \approx p_i - \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1.65)$$

Con base en la Ec. 1.64, la segunda derivada de la presión con respecto a  $x$  está dada por:

$$\frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx p_{i+1} - p_i - \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (1.66)$$

Sustituyendo la Ec. 1.63 en la Ec. 1.66 se obtiene:

$$\frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx p_{i+1} - p_i - \frac{1}{2} [p_{i+1} - p_{i-1}] \dots\dots\dots (1.67)$$

Concluyendo que:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta x^2} \dots\dots\dots (1.68)$$

Análogamente, utilizamos la Serie de Taylor para aproximar la derivada de la presión con respecto al tiempo en la celda  $i$ . En este caso, usamos una "diferencia posterior," que resulta en:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \dots\dots\dots (1.69)$$

Sustituyendo las Ecs. 1.68 y 1.69 en la Ec. 1.53 se obtiene la aproximación por diferencia finita a la ecuación de difusividad en 1D:

$$\frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \frac{\phi\mu c}{0.00633k} \left[ \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \right] \dots\dots\dots (1.70)$$

Diferencias entre soluciones numéricas implícitas y explícitas

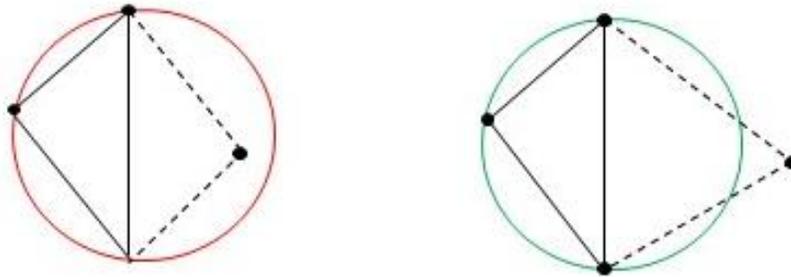
Nótese que el lado izquierdo de la Ec. 1.70 fue asignado a un tiempo  $(n+1)$ , lo cual resulta en un esquema de solución numérica *implícita*. La asignación del tiempo del lado izquierdo de la Ec. 1.70 pudo haberse realizado en un tiempo  $n$ , lo que habría resultado en una sola incógnita:  $(p_i)^{n+1}$ . Este es un esquema de solución numérica *explícita*, el cual resulta relativamente más sencillo de resolver pero no es de uso práctico, pues puede presentar problemas de estabilidad si el intervalo de tiempo  $(\Delta t)$  no es lo suficientemente pequeño (Lee *et al.* 1996).

Como consecuencia del uso de un esquema implícito, la Ec. 1.70 involucra tres incógnitas:  $(p_{i-1})^{n+1}$ ,  $(p_i)^{n+1}$ , y  $(p_{i+1})^{n+1}$  y se “conoce” el valor de  $(p_i)^n$ . Esto implica que cada celda tendrá hasta tres incógnitas, lo que define un sistema de ecuaciones.

Triangulación Delaunay

La triangulación de Delaunay  $D(N)$  consiste en ir tomando los puntos conocidos (nodos) e ir trazando circunferencias con tres puntos no colineales, a lo que se le llama condición de Delaunay. En el caso en que se encuentre un nodo dentro de esta circunferencia, se sustituye por aquel más cercano anteriormente tomado.

Calvo (2004) define triangulación de Delaunay  $D(N)$  como aquella en la que las circunferencias de los tetraedros no contienen ningún nodo en su interior. Para una distribución general, la triangulación de Delaunay es dual del diagrama de Voronoi. Los tetraedros Delaunay están definidos por los cuatro nodos de las esferas vacías. En el caso degenerado, si hay alguna esfera de Voronoi supernumeraria (con más de cuatro nodos en la superficie) habrá más de una forma de elegir los tetraedros. En tal caso (dado que se definió como triangulación)  $D$  no es única. La **Fig. 1.8** muestra dos ejemplos de la condición de Delaunay. El círculo rojo que se muestra en el lado izquierdo no cumple la condición de Delaunay, mientras que el círculo verde del lado derecho sí cumple la condición de Delaunay.



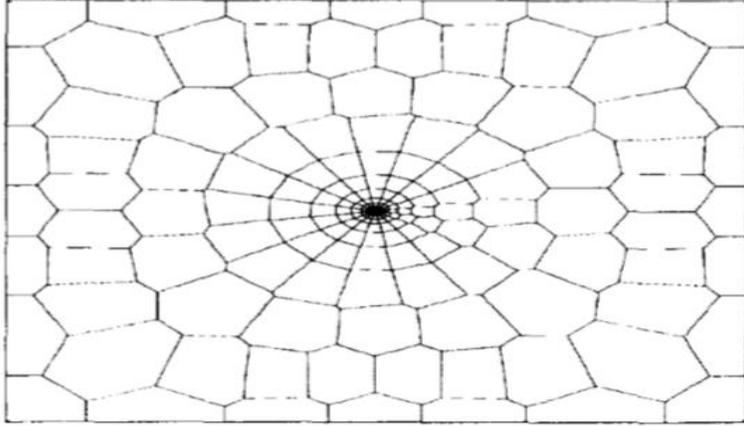
**Figura 1.8** — Esquematación de la triangulación Delaunay.

### Mallas Voronoi

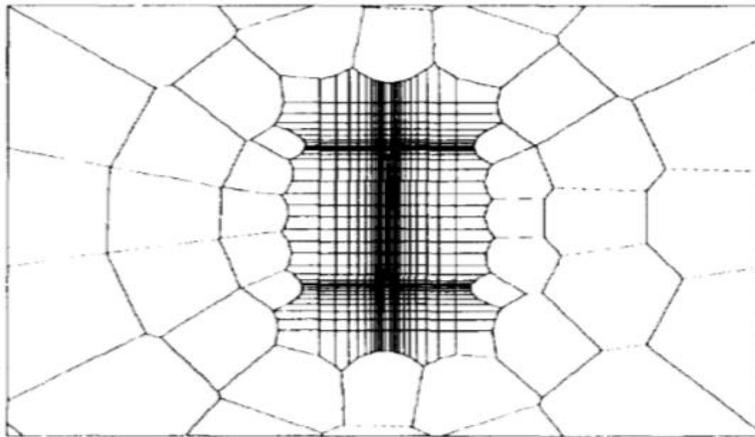
Las mallas Voronoi (también conocido como mallado *Perpendicular Bisection Grid* o PEBI, por sus siglas en inglés) se basan en el método del elemento finito al discretizar al yacimiento en un número determinado de sub-elementos representativos de todo el sistema. Gracias a su propiedad de definir los puntos más cercanos a los nodos, es posible optimizar la transferencia de masa con una óptima distribución espacial (Kocberber, 1993).

Las **Figs. 1.9 a 1.11** muestran los ejemplos presentados originalmente por Hegre (1996) que pueden ser aplicados para la simulación de un pozo horizontal interceptando una o dos fracturas perpendiculares, respectivamente. La **Fig. 1.9** presenta una vista superior del mallado global con un pozo localizado en el centro, la **Fig.1.10** muestra un mallado PEBI de un pozo que atraviesa dos fracturas hidráulicas, mientras que el caso mostrado en la **Fig. 1.11** es de un pozo horizontal interceptado por dos fracturas con mallado exterior hexagonal. Parte de la discusión de Hegre (1996) sobre este tema establece que este tipo de mallado ortogonal ofrece un alto nivel de flexibilidad.

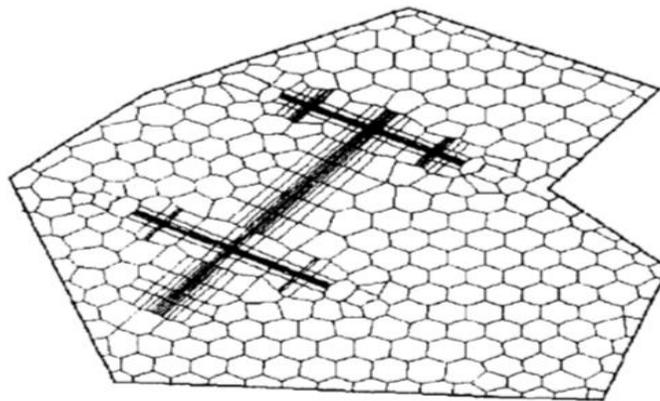
Una celda del mallado Voronoi se define como la región del espacio que está más cerca de su propio nodo que a los demás nodos del conjunto. En consecuencia, una línea que une los nodos de dos celdas continuas cualesquiera son perpendicular a la frontera de la celda la cual está localizada de forma equidistante a los nodos. La malla de Voronoi representa una colección aparente de diferentes mallados, la cual satisface las condiciones definidas. Hexagonal, curvilíneo ortogonal y de distribución de puntos, son algunos ejemplos de los mallados Voronoi. Pueden establecerse dos ventajas mayores del uso de este tipo de mallas: (1) ajuste óptimo a las características del yacimiento, (2) proveen una forma natural de construir mallas híbridas al combinar diferentes tipos de mallas, y (3) hace posible el modelado del sistema pozo/fractura con celdas más pequeñas, mientras que las más grandes se aplican a lo que queda del yacimiento y donde no hay restricción en la coordinación de la dirección con el sub-mallado interior.



**Figura 1.9** — Malla PEBI con un pozo horizontal atravesando una fractura hidráulica circular (Hegre 1996).



**Figura 1.10** — Malla PEBI con un pozo horizontal atravesando dos fracturas hidráulicas (Hegre 1996).



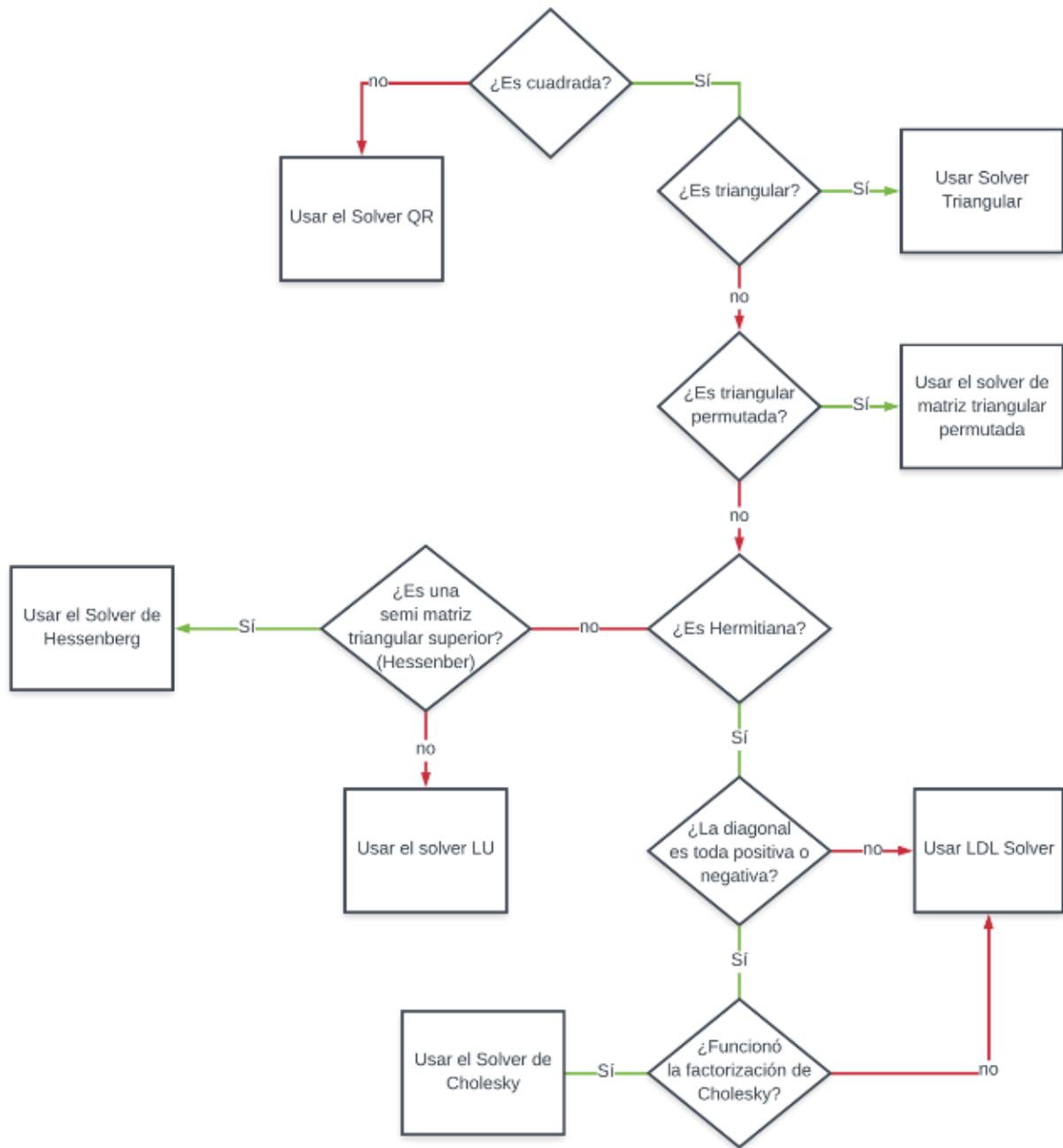
**Figura 1.11** — Malla PEBI con un pozo horizontal interceptado por dos fracturas transversales (Hegre 1996).

### Flujo de trabajo y métodos utilizados por el operador "backslash" (\) de Matlab

La **Fig. 1.12** presenta el flujo de trabajo utilizado por MATLAB para resolver sistemas de ecuaciones. Este flujo de trabajo selecciona el algoritmo más adecuado para resolver el sistema de ecuaciones, dependiendo del problema. A estos algoritmos se les conoce como *solvers*.

El procedimiento utilizado por MATLAB primero verifica que sea una matriz cuadrada comprobando el número de columnas y de renglones, si es una matriz rectangular, calcula una función de mínimos cuadrados, si es cuadrada, compara sus elementos para determinar si es triangular superior o inferior y utiliza un algoritmo de solución para matrices triangulares. En caso de que no sea triangular, busca si es una matriz de permutaciones, que tenga al menos una columna y un renglón y ceros en los demás componentes multiplicada por una matriz que corresponde a la matriz permutada.

Si es así, se resuelve con un algoritmo de permutaciones de matriz, de lo contrario se compara si es una matriz Hermitiana, donde la matriz es igual a su transpuesta conjugada, de ser así, se compara si todos los elementos de la diagonal son positivos o negativos, si cumple esta condición se usa el algoritmo LDL (L es la matriz triangular inferior; D matriz diagonal; L matriz triangular superior ) que es una variante de la descomposición Cholesky, de lo contrario se usa la factorización de Cholesky, la cual consiste en una matriz Hermitiana que es producto de una matriz diagonal multiplicada por su transpuesta. Si no es Hermitiana, se busca que sea una matriz semi triangular de Hessenber o de lo contrario se utiliza el algoritmo de descomposición LU.



**Figura 1.12** — Diagrama de flujo de operación de la función `mldivide(A,B)` de matlab o Backslash (Matlab 2019)

## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LA LITERATURA

En este capítulo se discutirá cómo a partir del desarrollo de los sistemas computacionales y de la aplicación de métodos numéricos para la solución de modelos de difusividad, la simulación numérica de yacimientos cobró gran importancia como herramienta de predicción en todo lo involucrado en la industria petrolera. Se presentará una revisión de la literatura respecto a la simulación de flujo de pozos interceptados por una fractura hidráulica.

En el segundo apartado se presentará la aplicación que ha tenido MRST en diferentes trabajos reportados en la literatura, y cómo los autores usaron el software para obtener soluciones a la inyección de fluidos en un medio poroso, modelos de doble porosidad y permeabilidad con un flujo de gas, y además la predicción de producción, presiones y esfuerzos efectivos.

#### **2.1. Estudios de simulación para pozos fracturados y/o multifracturados**

Nghiem (1983) presentó un método para representar un pozo fracturado en un modelo completo de yacimiento. Sin embargo, este método es aplicable únicamente para una sola fractura hidráulica de conductividad infinita.

Utilizando un simulador numérico, Karcher *et al.* (1986) estudiaron el mejoramiento de la productividad de un pozo horizontal en un escenario en el que éste atravesaba múltiples fracturas hidráulicas. Los autores realizaron un modelo numérico de diferencias finitas considerando un pozo en el centro de un área rectangular cerrada (lo que implica un régimen pseudo-estacionario en el yacimiento), que representa al yacimiento, y las fracturas en planos verticales que atraviesan por completo el espesor del yacimiento. Los autores estudiaron varios casos hipotéticos. En su estudio modelaron casos donde el pozo atraviesa de manera perpendicular 1, 2, 4 y hasta 8 planos de fractura, en el cual observaron un crecimiento en el índice de productividad, mientras aumentaba el número de fracturas que atraviesa el pozo. Con este estudio, demostraron que los pozos horizontales fracturados podrían incrementar su productividad hasta diez veces, comparada con los pozos verticales, recomendaron estudiar la geología del yacimiento a fondo con la finalidad de encontrar el campo de esfuerzos (utilizando las fracturas principales) para orientar los pozos de manera perpendicular a los esfuerzos mínimos ( $\sigma_{Hmin}$ ) y así lograr un incremento en el índice de productividad.

Schulte (1986) evaluó el comportamiento de la presión transitoria de un pozo fracturado verticalmente con intervalo de comunicación limitado y con la posibilidad de incluir efectos de flujo no-Darcianos, utilizando soluciones numéricas. El autor desarrolló modelos analíticos para tiempos cortos para analizar la variación de la caída de presión cuando el pozo no está comunicado completamente con la fractura, con base en datos de campo. Mediante esta variación de la conectividad pozo-fractura, él notó que existe un régimen de flujo no descrito hasta entonces, el cual depende de la zona de conectividad entre el pozo y la fractura. El autor utiliza un subsistema refinado pero homogéneo para representar la fractura y un sistema refinado "medianamente" para representar el yacimiento. Además, evaluó los casos de un espaciamiento pequeño en la malla, cerca de la cara de la fractura alrededor del pozo y del extremo de la fractura.

Roberts *et al.* (1991) utilizaron un simulador comercial para determinar el desempeño de un pozo vertical fracturado, un pozo horizontal fracturado y no fracturado en un yacimiento compacto de gas (*tight gas*). En sus resultados, los autores encontraron que un pozo horizontal con fracturas transversales (siete en este caso) tiene una ventaja considerable en la producción de gas comparada con la de pozos horizontales con dos fracturas longitudinales, pozos verticales fracturados y pozos horizontales no fracturados. Sin embargo, a pesar del beneficio que tiene el pozo horizontal con multifracturas transversales, los autores observaron que una vez que inicia la interferencia entre las fracturas la producción se reduce debido a un decremento rápido de la presión del yacimiento.

Adicionalmente, Roberts *et al.* (1991) reportaron que los problemas numéricos en la simulación como estabilidad, convergencia y tiempo de cómputo, se resuelven incrementando el ancho de la fractura hidráulica en la malla y disminuyendo la permeabilidad de la fractura, de tal forma que se mantuviera constante la conductividad de la fractura hidráulica. Los estudios de simulación de pozos atravesando fracturas hidráulicas frecuentemente consideran que el área de drenaje para cada fractura es la misma, lo cual no representa con precisión lo que ocurre en la realidad.

Utilizando mallas Voronoi, Kocberber (1993) señaló que el método de elemento finito presenta ventajas para la simulación del flujo de un pozo horizontal interceptando una fractura hidráulica, tales como una mejor aproximación de los gradientes de presión en los medios heterogéneos, el considerar bloques de cualquier forma lo que implica poder corregir de manera natural, la malla alrededor del pozo y de las fracturas, y la representación del flujo elíptico (el cual debe representarse en el mallado con un refinamiento muy preciso en la fractura). En su estudio, Kocberber (1993) presentó algunos de los problemas del uso de mallas cartesianas en un sistema heterogéneo (pozo fracturado) y como es que el uso de mallas tetraédricas mejora los resultados de la simulación. Este autor puntualizó que un pozo horizontal es la mejor herramienta para la inyección de agua al tener un desplazamiento con baja canalización

Lefevre *et al.* (1993) representaron una fractura de conductividad infinita con un pozo completamente penetrado en todas las celdas por la fractura hidráulica. Si la fractura está dentro del área de una celda única, el flujo de la fractura se calcula considerando el modelo de Peaceman (1983) y unos factores de escalamiento que modifican la transmisibilidad tanto en dirección  $x$  como en dirección  $y$ . Si la fractura se extiende a lo largo de varias celdas, los factores se deben calcular para cada uno de los factores de transmisibilidad, además de que se usan factores diferentes para las celdas que contienen las puntas de dicha fractura. Los factores de escalamiento están en función del tamaño de las celdas y la longitud de fractura. Lefevre *et al.* (1993) puntualizaron que es necesario modificar la transmisibilidad entre las celdas interceptadas por la fractura y las celdas vecinas. Para calcular los factores de transmisibilidad, los autores presentaron en su trabajo una serie de correlaciones, tablas y gráficos.

Hegre (1996) evaluó a detalle el efecto del tamaño de bloque con respecto al comportamiento transitorio de la presión y estimando periodos de producción largos para pozos horizontales interceptados por fracturas de conductividad finita. En dicho estudio, el autor aplicó un modelo estándar de simulación con diferencias finitas considerando una malla cartesiana. Adicionalmente, presentó una investigación de una malla híbrida y mallas Voroni con un sistema coordenado cilíndrico alrededor del pozo horizontal. El autor utilizó el concepto del radio efectivo del pozo para presentar un modelo completo de un campo, y presentó el método de transmisibilidad corregida para la representación de un pozo horizontal estimulado. En sus resultados, también investigó el desempeño de la producción con los resultados simulados de un refinamiento local de malla (LGR) para el escenario de un pozo horizontal fracturado en un yacimiento con acuífero activo y para un yacimiento de gas y condensado con considerable disminución de líquido.

## **2.2. Aplicaciones de la paquetería MRST para la simulación numérica en yacimientos de *shale gas/oil***

Con base en información publicada por Jansen (2011), King *et al.* (2016) utilizaron MRST para simular la inyección de un fluido incompresible en un yacimiento de areniscas en la cuenca de Perth al Oeste de Australia, para aumentar la presión de poro y generar microsismos por la actividad de fracturamiento. Dichos microsismos generaban datos de gradientes de presión los cuales fueron sometidos a tratamientos matemáticos y de inversión (métodos cuasi-Newton) que resultaban en valores de permeabilidad de la formación. King *et al.* (2016) utilizaron el modelo geológico, valores de porosidad y permeabilidad de un yacimiento en la cuenca de Perth localizada en el oeste de Australia. Dichos datos se tomaron del artículo publicado por Zhang *et al.* (2015).

Negara *et al.* (2016) estudiaron la influencia de algunos de los mecanismos de empuje (producción) en un yacimiento de *shale-gas* definido por un modelo de doble porosidad y permeabilidad (matriz y fracturas naturales). Los tres mecanismos de empuje estudiados fueron: (1) la adsorción del gas, (2) el efecto Knudsen y (3) el efecto Klinkenberg. Los autores simularon el flujo de gas alternando los mecanismos de producción y cuantificaron por separado la influencia de cada uno de estos mecanismos. Derivado de este estudio, Negara *et al.* (2016) concluyeron que la adsorción del gas es el mecanismo que más influye dado que afecta a la matriz y a las fracturas naturales mientras que los otros dos mecanismos actúan únicamente en la matriz.

Klie *et al.* (2019) presentaron ejemplos prácticos para el uso de MRST para el ajuste de la historia de producción y pronósticos de producción. Los autores utilizaron MRST de manera acoplada con un Análisis Integral Paralelo del Elemento Finito (IPFA, por sus siglas en inglés) para predecir la presión, los esfuerzos efectivos y la producción utilizando un modelo acoplado de difusión-geomecánica. Adicionalmente, Klie *et al.* (2019) utilizaron el módulo de Matlab *Deep Learning* para el manejo de datos y como base para aplicar la inteligencia artificial (*machine learning*) para realizar ajustes en la historia de producción de cinco años de producción acumulada de gas y aceite (reportados mensualmente) del campo Vaca Muerta (Argentina).

# CAPÍTULO III

## CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE UN MODELO DE SIMULACIÓN PARA UN POZO HORIZONTAL FRACTURADO EN UN YACIMIENTO HOMOGÉNEO UTILIZANDO MRST

En este capítulo se presenta una comparación del modelo de Hegre (1996) con este trabajo. En la primera parte se podrá observar la utilización de las funciones de MRST para la construcción de una malla, propiedades petrofísicas, propiedades del fluido y el pozo con los datos reportados por el autor, también describimos las propiedades ajustadas de la fractura derivadas de problemas con MRST. Posteriormente se usarán las funciones de MRST para comenzar la simulación con un fluido ligeramente compresible, monofásico en un yacimiento cerrado. De la misma manera se estudió la posibilidad de manejar una malla híbrida, considerando una malla cilíndrica para simular el flujo dentro de la fractura hidráulica y una malla cartesiana para el flujo dentro del yacimiento. Sin embargo, se observó que se presentan errores en el cálculo de volúmenes por lo que decidimos descartarlas de este trabajo y generar todos los datos con mallas cartesianas.

Los casos por simular serán una fractura longitudinal de conductividad finita e infinita, y una fractura transversal de conductividad finita, con lo cual apreciaremos que los tiempos de simulación varían dependiendo la conductividad y el LGR. Al final de este capítulo se muestran los resultados entre MRST y el simulador que usa el autor, obteniendo un ajuste similar para todos los casos, además se obtiene la distribución de presiones cerca del LGR.

### 3.1. Construcción del modelo de simulación

Para la construcción de este modelo utilizamos como base el trabajo presentado por Hegre (1996), quien definió un pozo horizontal interceptando una fractura hidráulica dentro de un yacimiento homogéneo con un área de  $3.42 \text{ km}^2$  ( $x=1.9 \text{ km}$  y  $y=1.8 \text{ km}$ ) y un espesor de 100 m. Hegre (1996) consideró dos configuraciones: (1) una fractura longitudinal, y (2) una fractura transversal.. Las propiedades de la fractura, del yacimiento y del fluido se muestran en la **Tabla 3.1**.

La **Tabla 3.2** proporciona los datos utilizados por Hegre (1996), los cuales describen la cuarta parte inferior izquierda del subsistema que contiene a la fractura hidráulica (longitudinal y transversal) y el pozo. Es nuestra opinión que el uso de estos datos es ambiguo, ya que no da una interpretación, por lo que inferimos las notas incluidas al pie de la **Tabla 3.2**. De igual modo, se infiere que la fractura está en el plano  $x$ - $z$  en todo el espesor  $z$ . El subsistema definido en la **Tabla 3.2** es un refinamiento en las vecindades de la fractura hidráulica, que tiene una extensión de 500 m en dirección  $x$  por 400 m en dirección  $y$ . Mientras que el sistema completo es una malla con celdas homogéneas de 100 m cada una en dirección  $x$  y  $y$  que representa en la totalidad la extensión del yacimiento.

**Tabla 3.1** — Propiedades de yacimiento y fluido (Hegre 1996)

<b>Datos</b>	
Factor de volumen de aceite ( $B_o$ ), $m^3/sm^3$	1.2
Viscosidad ( $\mu_o$ ), cP	0.2
Permeabilidad ( $k$ ), mD	1
Porosidad ( $\phi$ ), fracción	0.2
Compresibilidad total ( $c_t$ ), $bar^{-1}$	$1 \cdot 10^{-4}$
Ancho de la fractura ( $w_f$ ), m	0.01
Conductividad de la fractura (Alta) ( $F_c$ ), mD*m	$5 \times 10^5$
Conductividad de la fractura (Baja) ( $F_c$ ), mD*m	500
Longitud de la mitad de la fractura ( $x_f, y_f$ ), m	50
Radio de la fractura (fractura transversal) ( $r_f$ ), m	50
Radio de pozo ( $r_w$ ), m	0.1
Gasto ( $q$ ), $Sm^3/d$	500

**Tabla 3.2** — Tamaño de celdas del subsistema para una fractura longitudinal y una fractura transversal (Hegre 1996)

<b>Datos</b>	
$x$ longitudinal, m	<b>5[9], 2, 1.5, 1, 0.5</b> , 0.5, 1, 1.5, 2, 5[9], 10, 15, 25, 40, 60
$x$ transversal, m	<b>1, 1, 1.5, 2, 5[8], 2, 1.5, 1, 0.5</b>
$y, m$	<b>0.01</b> , 0.01, 0.02, 0.04, 0.08, 0.16, 0.32, 0.64, 1.28, 2.445, 5[9], 10, 15, 25, 40, 60
$z$ longitudinal, m	<b>0.5, 1, 1.5, 2, 5[9]</b>
$z$ transversal, m	1, 1, 1.5, 2, 5[9]
<b>Malla Híbrida</b>	
$R, m$	<b>0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 3.6, 5[7], 2, 1.5, 1, 0.5</b>
$\theta$	$\pi/2$

**Nota 1:** la notación a[b] indica que existen “b” celdas de tamaño “a”

**Nota 2:** El formato de número en negritas y cursivas, representa las celdas que contienen a la fractura

### Construcción de la malla de simulación en MRST

Debido a los parámetros requeridos en la función de MRST *tensorGrid*, se creó un vector acumulado de los tamaños de celda para representar los nodos en coordenadas utilizando la fórmula

$$(x_a, y_a, z_a)_i = (x, y, z)_i + (x_a, y_a, z_a)_{i-1}, \dots \dots \dots (3.1)$$

donde  $x_a$  es el elemento del vector acumulado en dirección  $x$ ,  $y_a$  es el elemento del vector acumulado en dirección  $y$ ,  $z_a$  es el elemento del vector acumulado en dirección  $z$ ,  $x$  es la longitud de la celda en dirección  $x$ ,  $y$  es la longitud de la celda en dirección  $y$ ,  $z$  es la longitud de la celda en dirección  $z$ ,  $i$  es el  $i$ -ésimo término.

Como esto solo define a la cuarta parte del subsistema, es necesario construir las demás secciones. No obstante, al ser simétrico en  $x$  y  $y$ , el acumulado representa la mitad de la longitud en su dirección, por lo tanto se puede construir un vector imagen y concatenar los vectores para formar el subsistema completo.

Se utilizó la función *flip* para crear el vector imagen, pero como al graficar no se permiten valores negativos, fue necesario sumar al vector original y restar al vector imagen, la mitad de la longitud total (250 m en dirección *x* y 200 en dirección *y*):

$$x_a = [x_{a1}, x_{a2}, \dots, x_{an}], \dots \dots \dots (3.2)$$

donde la función *flip* aplica el siguiente algoritmo para crear el vector imagen

$$flip(x_a) = x_{a-1} = [x_{an}, x_{an-1}, \dots, x_{a1}] \dots \dots \dots (3.3)$$

con lo que al concatenar el vector  $x_a$  y  $x_{a-1}$  obtenemos un nuevo vector que representa las coordenadas en *x* en el subsistema

$$x_a = [C - x_{a-1}, C + x_a], \dots \dots \dots (3.4)$$

donde  $x_a$  es el vector acumulado en dirección *x* o *y*,  $x_{a-1}$  es el vector imagen de  $x_a$ , *C* es una constante para desplazar el vector ( $x=250$  m,  $y=200$  m).

Cabe destacar que este proceso se aplica de igual manera al vector acumulado en dirección *y*. Una vez que tenemos los vectores acumulados en las dos direcciones procedemos a usar la función *tensorGrid* para crear el subsistema con refinamiento en las cercanías de la fractura, tal como se muestra en la **Fig. 3.1**.

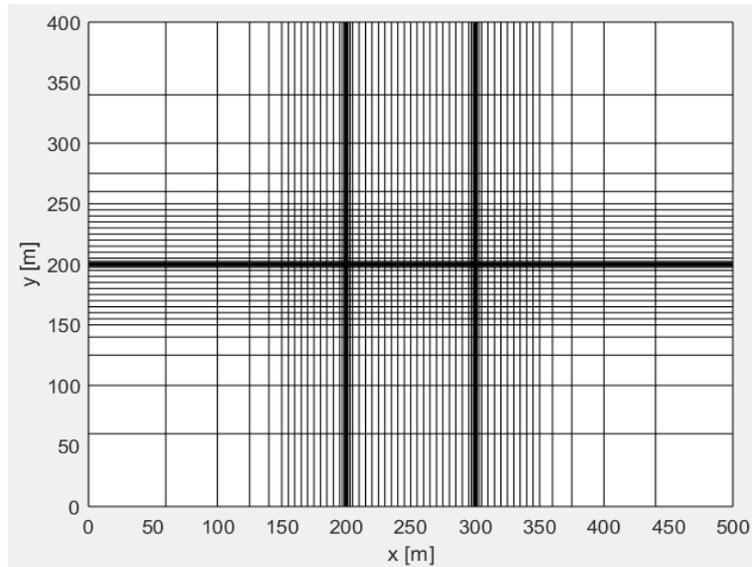
Una vez que tenemos el subsistema completo, procedemos a desplazarlo a la coordenada (700, 700) m ubicándolo en el centro del sistema. Posteriormente, para el sistema empleamos dos mallas cartesianas con celdas homogéneas de 100 m cada una con la función *cartGrid*. Una de las mallas *G1* tiene la extensión de 1900 por 700 m, mientras que la otra *G2* es de 700 por 400 m, y al desplazarlas con la función *translateGrid* se crean nuevas mallas con las mismas dimensiones de las mallas que fueron desplazadas. *G1* se desplazó con un vector de (0, 1100) m dando como resultado *G3*, y *G2* en un vector de (1200,0) m creando *G4*.

Con la función *glue2Dgrid* concatenamos las mallas en el siguiente orden siendo *G* el subsistema:

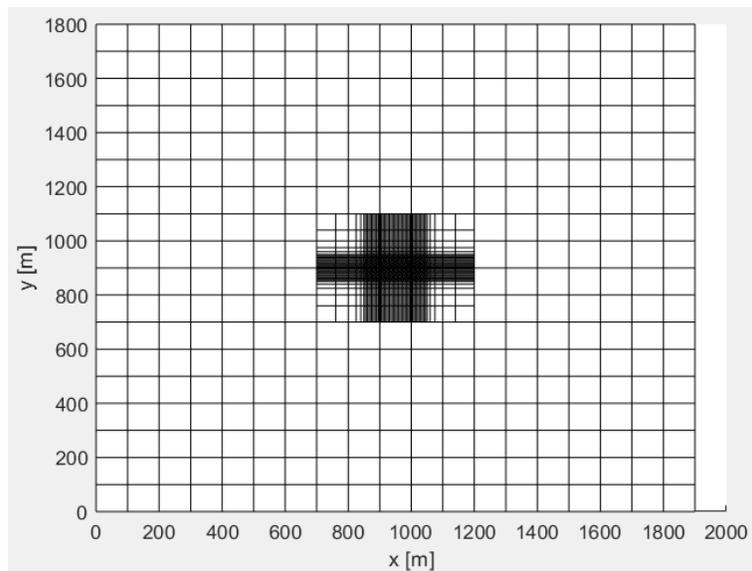
- 1.- $G \rightarrow G2$
- 2.- $(G \rightarrow G2) \rightarrow G4$
- 3.- $((G \rightarrow G2) \rightarrow G4) \rightarrow G1 \rightarrow G3$

Este procedimiento debe cumplirse en un orden en que las mallas concatenadas tengan dimensiones iguales y por tanto las coordenadas coincidan. En la **Fig. 3.2** se presenta la malla completa con el refinamiento en el centro donde se ubica el pozo y la fractura.

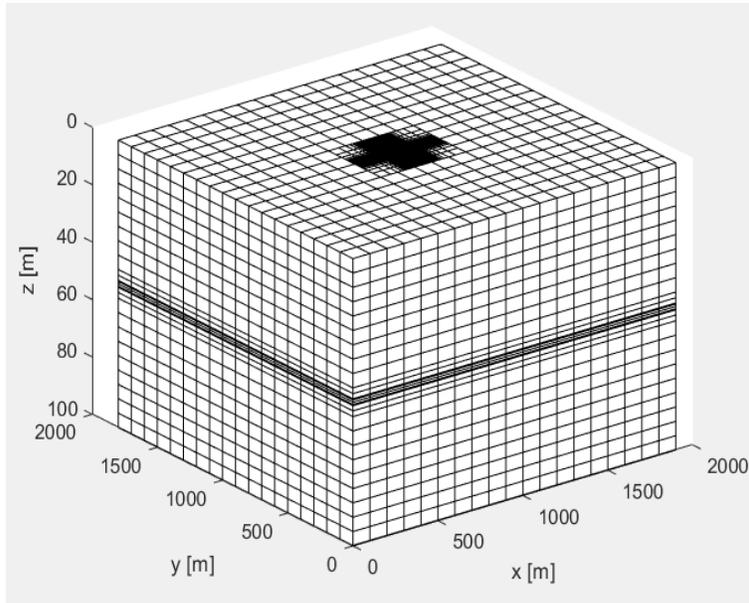
A partir de la malla bidimensional  $G$  construimos una tridimensional de 26 capas con la función *makeLayeredGrid*. Debido a que la función genera capas de 1 m de longitud, es necesario mover los nodos de cada capa según el vector acumulado  $z_{a_i}$ . Esto se realiza con un ciclo *for* definiendo la cantidad de celdas por capa con la estructura  $G.cells.num/27$ . En las direcciones  $y$  y  $z$  hicimos un ajuste en las dimensiones de las celdas que contienen el pozo porque éste se sobreponía en los nodos de ambas direcciones, por lo que los nuevos tamaños permitieron que el pozo pudiera colocarse en el área de  $yz$ , a lo largo de las 25 celdas de  $x$ . La **Fig. 3.3** presenta el resultado del refinamiento en dirección  $z$ .



**Figura 3.1** — Subsistema que contiene al pozo y la fractura.



**Figura 3.2** — Sistema de malla en 2D que contiene al pozo, la fractura y el yacimiento.



**Figura 3.3** — Sistema de malla en 3D que contiene al pozo, la fractura y el yacimiento.

Utilizando el comando *computeGeometry* se genera la estructura de geometría de la malla y con la función *handleFunction* (*cells*) se inicializa una ecuación que ayuda a identificar los índices sujetos a la localización del plano de fractura y del pozo. Esta ecuación crea un vector (*ls*) .columna de 26 elementos con el fin de cubrir las 26 capas en dirección *z*.

Dado que la fractura se refiere a un plano, fue necesario crear un vector (*vi*) con 26 elementos distribuidos de 0 a 25, pues 25 es el número de celdas de la fractura en dirección *x*. De igual forma realizamos otra ecuación con *handleFunction* (*Mcells*) que tiene la característica de sumar cada elemento del vector (*vi*) al vector (*ls*) hasta cubrir todo el plano de fractura (ver **Apéndice C**).

$$vi = (1, 2, 3, \dots, 25), \dots \dots \dots (3.5)$$

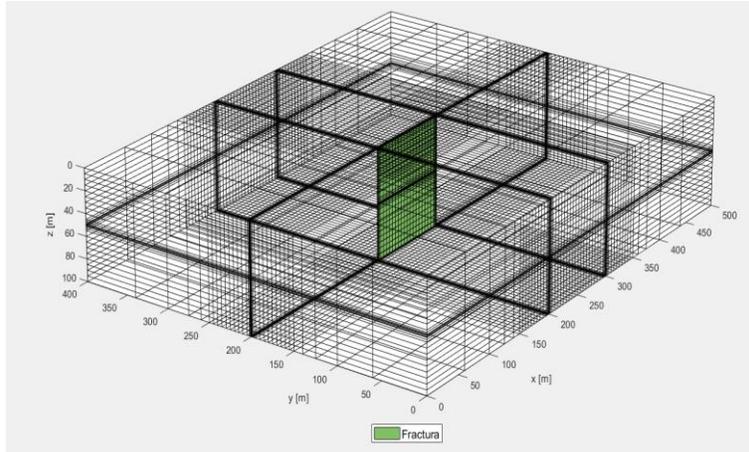
$$ls = 3236(k - 1) + 1606, \dots \dots \dots (3.6)$$

$$Mcells = vi + ls. \dots \dots \dots (3.7)$$

El vector *ls* es una particularización de la Ec. 3.8, donde el término  $n_x n_y$  es 3236 y el término *i* es 1606.

Al ser una malla no homogénea, el término  $n_x n_y$  es el número total de celdas que debe recorrer el índice para colocarse en la misma posición en *x* y *y* pero en otra coordenada de *z*. El factor 1606 es índice de la celda donde empieza la fractura, dado que MATLAB posiciona al índice a lo largo del eje *x*, no es necesario establecer el término  $n_y$

$$C_i = (k - 1)n_y n_x + (j - 1)n_x + i. \dots \dots \dots (3.8)$$



**Figura 3.4** — Representación de la fractura en el subsistema.

Propiedades del yacimiento

La función *makeRock* introduce las propiedades del yacimiento con una distribución homogénea representada en la **Tabla 3.1**. El ajuste de la permeabilidad en las celdas asociadas a la fractura se hizo mediante la estructura *Rock.perm(lr)* = 5 Darcy para conductividad finita, y 5000 Darcy conductividad infinita (nótese el uso de la matriz *lr* para asociar la permeabilidad a las celdas de fractura). Sin embargo, debido a los problemas respecto a las celdas que contienen al pozo mencionados en la sección anterior, fue necesario ajustar la permeabilidad en la fractura para mantener la conductividad. Con base en la definición de la conductividad adimensional ( $F_{cD}$ ):

$$F_{cD} = \frac{k_f w_f}{k x_f}, \dots\dots\dots (3.9)$$

se deduce que si  $w_f=0.1$  m y  $F_{cD}=10$  o  $1 \times 10^4$  para conductividad adimensional finita y conductividad adimensional infinita, respectivamente puede determinarse el valor de permeabilidad de la fractura para fines de simulación ( $k_{fL}$ ). Por lo que la permeabilidad de la fractura de conductividad finita es:

$$k_{fL} = \frac{F_{cD} k x_f}{w_f} = \frac{10(1mD)(50m)}{0.1m} = 5 \cdot 10^3 mD, \dots\dots\dots (3.10)$$

y para una fractura de conductividad infinita:

$$k_{fH} = \frac{F_{cD} k x_f}{w_f} = \frac{1 \cdot 10^4 (1mD)(50m)}{0.1m} = 5 \cdot 10^6 mD, \dots\dots\dots (3.11)$$

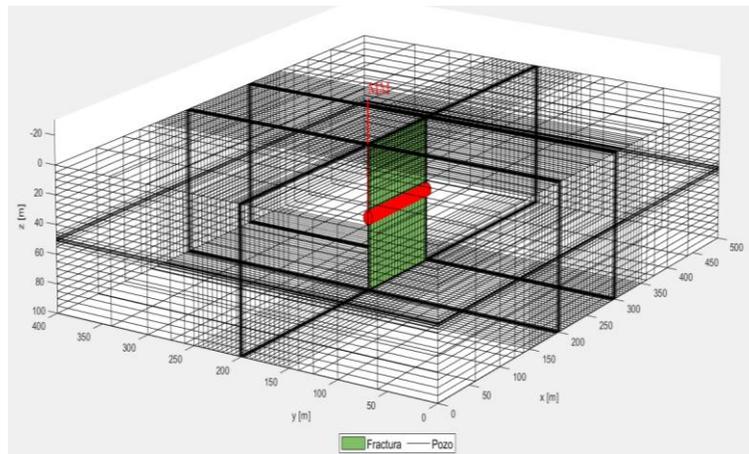
### Propiedades del fluido

Mediante el comando *initSimpleADIFluid* definimos un fluido de aceite con las características de la **Tabla 3.1**. Debido a cuestiones de MRST fue necesario definir un sistema de dos fases (Aceite-Gas). La densidad del fluido no se presenta en Hegre (1996), no obstante, dado que es un periodo muy corto de tiempo donde solo se ven los efectos de la fractura antes de un periodo de transición, no es necesario este dato más que para inicializar el modelo.

### Pozo Horizontal

#### *Fractura longitudinal*

Durante el desarrollo de esta sección surgieron diversos problemas debido a que Hegre (1996) utiliza un tamaño de celda más pequeño que el radio del pozo en el plano  $yz$  (**Fig. 3.5**). Para proveer de una solución, propusimos incrementar el tamaño de la apertura de la fractura ( $w_f$ ) e incrementar en dirección  $z$  las celdas que contienen al pozo mediante la reducción del tamaño de las celdas contiguas que pertenecen a la fractura longitudinal, con la finalidad de mantener el espesor original de 100 m en dirección  $z$ .



**Figura 3.5** — Representación del pozo horizontal con una fractura longitudinal.

Con la función *addWell* se introdujo un pozo horizontal en dirección  $x$  con las propiedades de la **Tabla 3.1** y en los índices  $Mcells(14,:)$ , los cuales ubican al pozo en las coordenadas propuestas por Hegre (1996). El parámetro  $Comp_i$  de la función define qué fluido ingresa al pozo mediante el vector  $[1, 0]$ , donde 1 representa la entrada de aceite y 0 representa que no se está produciendo gas, esto como solución al problema de la función *initSimpleADIFluid*.

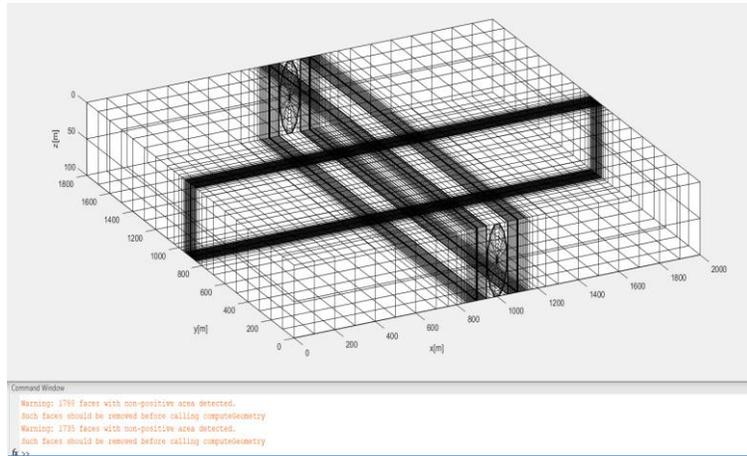
El pozo horizontal con una fractura longitudinal se mantuvo produciendo por 1000 horas a gasto constante tanto para conductividad finita como para conductividad infinita.

### *Fractura transversal*

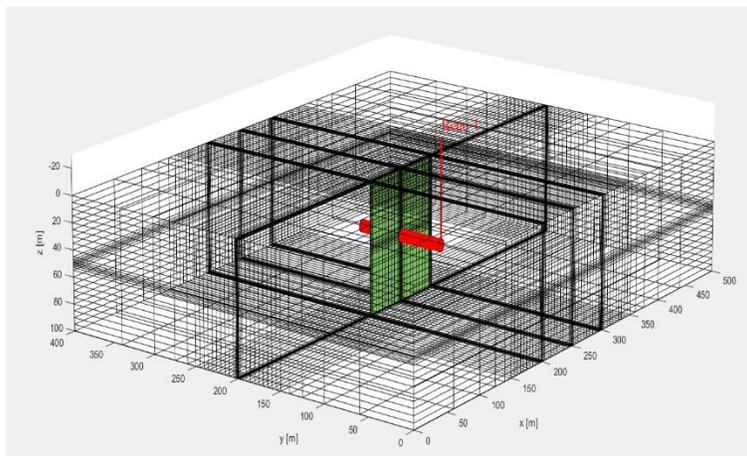
La ubicación de la fractura es similar al caso anterior (*i.e.*, para colocar una fractura transversal, manteniendo las dimensiones y el plano de fractura  $xz$ , solo se cambió la dirección del pozo de dirección- $x$  a dirección- $y$ ). Originalmente, se tenía planeado implementar una malla híbrida como la que se muestra en la **Fig. 3.6**, para reproducir con la mayor exactitud posible el trabajo de Hegre (1996), particularmente los efectos de la fractura a tiempos cortos ( $t < 0.1$  h). Sin embargo, durante la construcción de la malla se encontró con algunas deficiencias de MRST para combinar mallas cartesianas y cilíndricas. En específico, la función *computeGeometry* calculaba volúmenes negativos pese a que antes de generar la malla 3D se hizo un mallado Voronoi donde no se mostraban errores al usar tal función en 2D (áreas negativas). Se atribuye este fallo a la distribución de los nodos que le da MRST durante la combinación de mallas de diferente geometría. Se decidió contactar al equipo de SINTEF para consultar alguna solución al respecto, pero hasta el día de la culminación de esta tesis no se ha recibido una respuesta.

La decisión de usar un cilindro y una malla cartesiana para combinarlas en 3D y aplicar el refinamiento fue una idea que surgió en este trabajo con base en los manuales de MRST, en donde los autores generaban mallas híbridas en 2D, ya que no existe hasta ahora una función específica para nuestro caso.

Como una solución a este problema optamos por utilizar mallas cartesianas tal que en la mitad del subsistema. En donde se ubica el pozo, fue necesario realizar un refinamiento, pues el flujo empieza a moverse en dirección al pozo y cualquier tamaño mayor de celdas altera los datos de presión en tiempos cortos ( $t < 1$  h). En la **Fig. 3.7** se muestra la fractura transversal y el pozo en el subsistema. Para ubicar el pozo no se presentaron los problemas descritos en la fractura longitudinal (*i.e.*, el pozo ocupaba más de dos celdas a lo largo de su área transversal, lo que provocaba problemas en el cálculo de la transmisibilidad porque se identificaba el sumidero en celdas donde éste no existía) ya que las celdas en el plano  $xz$  tienen un tamaño superior al radio del pozo, sin embargo se optó por mantener el tamaño de  $w_f = 0.1$  m con el fin de evitar el aumento en el tiempo de cómputo o los problemas de convergencia en el simulador.



**Figura 3.6** — Malla híbrida usando un cilindro y una malla cartesiana combinando nodos en MRST.



**Figura 3.7** — Representación del pozo horizontal con una fractura transversal.

### Modelo de yacimiento

El modelo de un yacimiento homogéneo e isótropo de baja permeabilidad es simulado con un modelo de *BlackOil*. Tal como lo describe Lie (2016), una alternativa para simular la recuperación de aceite y gas es con el uso de las llamadas ecuaciones de *BlackOil*, las cuales son un caso especial de los modelos de flujo multifásico, en donde no existe difusión de componentes. El nombre se refiere a la consideración de que existen varias especies químicas que a condiciones de superficie pueden formar dos componentes, un hidrocarburo pesado llamado aceite y un hidrocarburo ligero llamado gas.

En nuestro modelo no consideramos flujo de gas por lo que es posible emplear *BlackOil* para calcular en este caso la producción de aceite como si se tratara de una sola fase. Para optimización computacional y estabilidad del modelo decidimos no considerar los efectos gravitacionales además de que la simulación es a tiempos cortos para observar el estado transitorio de la presión.

En la función *GenericBlackOilModel* el parámetro "gas" mantuvo como un valor verdadero para no generar errores en las siguientes funciones, pues se había definido previamente como un modelo bifásico (aceite-gas).

Condiciones iniciales

Para definir las condiciones iniciales del yacimiento se utilizaron las funciones *getInitializationRegionsBlackOil* e *InitStateBlackOilAD*, en donde se consideró que el yacimiento está completamente saturado por un aceite bajosaturado. La presión inicial se distribuye uniformemente en todo el yacimiento con un valor de 300 bar y las fronteras externas aunque no se visualizan en este caso, son de tipo Neumann (fronteras cerradas).

Itinerario de simulación

Para definir el intervalo de tiempo de simulación, creamos un vector con espaciado logarítmico entre  $10^{-1}$  y  $10^3$  horas distribuidas en 50 puntos. Sin embargo, los datos de entrada al simulador requieren ser expresado como una diferencia de tiempos  $\Delta t$  entre cada punto del vector de tiempo  $t$ , por lo tanto se realizó el siguiente proceso. Una vez determinado el vector de tiempos  $t$ :

$$t = [t_1, t_2, t_3, \dots, t_n], \dots\dots\dots (3.12)$$

se definió que  $\Delta t$  cuando  $i=1$  está dado por:

$$\Delta t_1 = t_1 \dots\dots\dots (3.13)$$

y en el caso de  $i=2$  hasta  $i=n$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \dots\dots\dots (3.14)$$

Simulación

El simulador MRTS usa el método de *Diferenciación Automática* (AD, por sus siglas en inglés) para resolver la ecuación de difusividad. AD es un método alternativo a la diferenciación algebraica y a la diferenciación numérica para obtener el valor de la derivada en un punto. AD optimiza el uso de software mediante la regla de la cadena y evita los errores de truncamiento asociados a la diferenciación numérica. Los algoritmos se basan en la idea básica de las operaciones computacionales (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) y los operadores (Logaritmos, funciones trigonométricas, etc.). Con estos operadores una función puede descomponerse en subfunciones y operarse para obtener la derivada.

### 3.2. Validación del modelo de simulación

Para validar nuestros modelos de simulación, comparamos nuestros resultados con los resultados publicados por Hegre (1996), los cuales fueron obtenidos mediante su digitalización. En su trabajo, el autor presentó el comportamiento de la presión transitoria y su derivada de un pozo horizontal interceptando una fractura hidráulica longitudinal y una fractura hidráulica transversal.

#### Fractura longitudinal

Las **Figs. 3.8 y 3.9** muestran los datos de caída de presión y su derivada, de un pozo horizontal con una fractura de conductividad finita y una de conductividad infinita respectivamente, para las primeras 1000 horas de simulación. En ambos casos los datos que generamos se ajustan a los datos publicados por Hegre (1996). En las **Fig. 3.8** a tiempos muy cortos (del orden de milisegundos), existe una ligera desviación debida posiblemente al cambio de tamaño que realizamos en la fractura con el fin de colocar el pozo. También en la **Fig. 3.9** existe esta desviación por la misma razón del aumento de tamaño en esa celda y además el cambio de  $F_{cD}$ .

A medida que  $F_{cD}$  incrementa, el flujo lineal de la formación aparecerá desde tiempos más tempranos. En la **Fig. 3.8** se puede apreciar en la curva de la derivada una ligera desviación para  $t < 3 \times 10^{-2}$ ; si por ejemplo se utilizara un  $F_{cD}$  de  $10^5$  tendríamos un ajuste perfecto a tiempos tempranos, siempre que se utilice el mismo rango de tiempos. Esto se puede observar si se grafican los casos de fractura de conductividad finita e infinita, donde veremos la influencia que tiene la conductividad en la respuesta de presión y su derivada.

#### Discusión

En la **Fig. 3.8**, para valores de tiempo desde  $10^{-1}$  hasta  $10^1$  horas la curva de la derivada logarítmica presenta una la pendiente muy cercana a un medio ( $1/2$ ), la cual es característica de un flujo lineal, correspondiente al flujo lineal de formación (flujo lineal de la formación hacia la fractura). Posteriormente, se observa un periodo de transición seguido de una pendiente  $m=0$  para  $t > 10^2$ , característica del flujo radial.

En las **Figs. 3.10 y 3.11** se presenta la distribución de presión (colores más cálidos representan mayor presión) en el subsistema que contiene al pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad finita e infinita, respectivamente. La inclusión de estas figuras tiene como objetivo ilustrar el avance de la onda de presión a través el tiempo. Ambos casos presentan un comportamiento muy similar, sin embargo un análisis muy riguroso de ellas, presenta que existe una mayor caída de presión a tiempos cortos ( $t < 10^0$  horas) en el subsistema de una fractura de conductividad infinita.

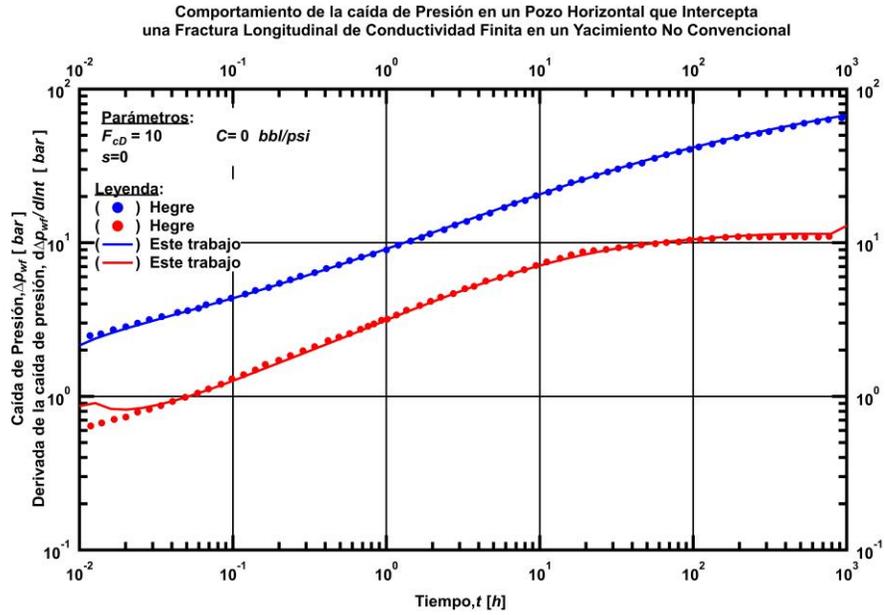
### Fractura transversal

En la **Fig. 3.12** se presenta la comparación de nuestro modelo construido en MRST con los resultados obtenidos por Hegre (1996) para el caso de un pozo horizontal con una fractura transversal de conductividad finita. Para este escenario utilizamos un vector de 80 intervalos de tiempo para revisar el comportamiento de la presión y su derivada a tiempos muy cortos ( $t < 10^{-1}$  horas).

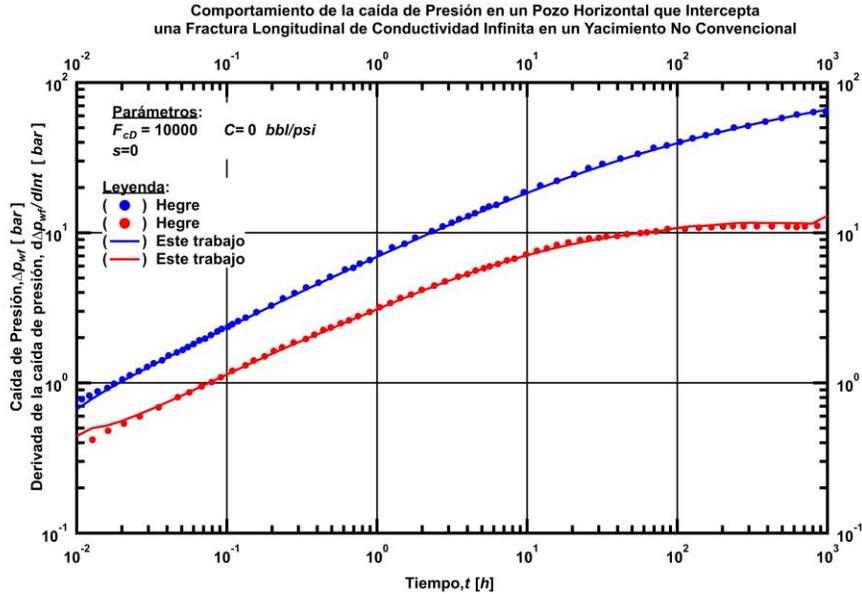
Nuestro modelo presenta una desviación en la respuesta de la derivada de la presión con respecto al modelo de Hegre (1996) a tiempos menores de  $10^{-2}$ . Sin embargo, esta desviación a tiempos muy tempranos no sería significativa en un caso real, debido a los efectos de almacenamiento y daño.

En la **Fig. 3.13** tenemos nuevamente la distribución de presión en el plano  $xy$ , y no se ven diferencias significativas en cuanto a la fractura longitudinal de conductividad finita.

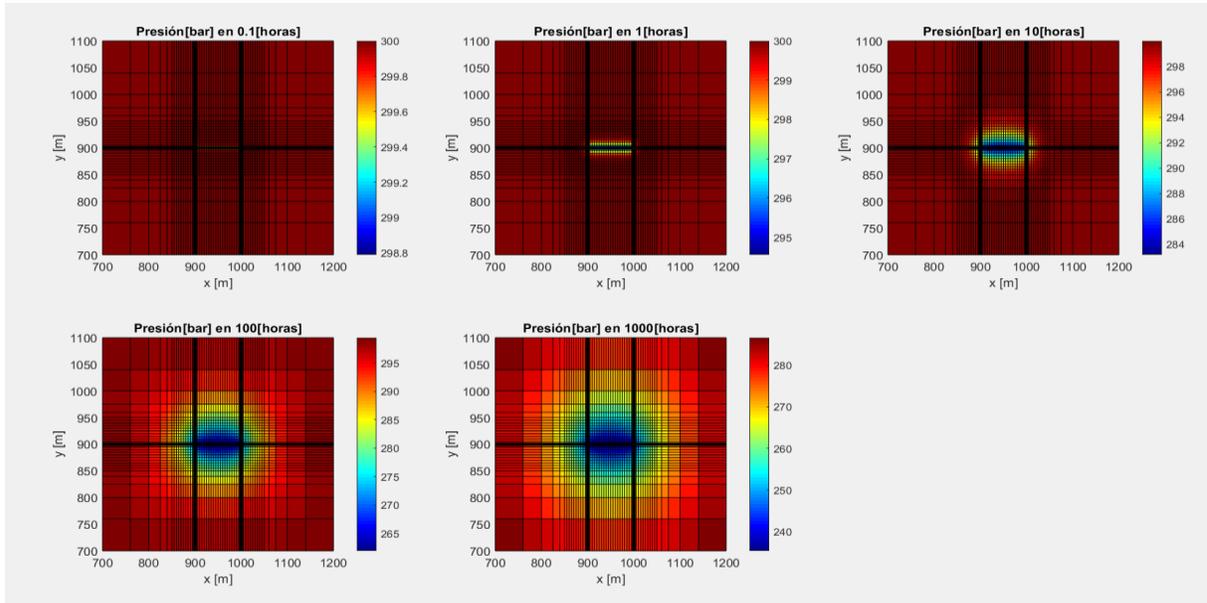
En MRST el empleo del término de almacenamiento en el pozo es posible mediante dos formas: (1) como un volumen adicional al usar modelos de pozos en multisegmentos, definiendo una estructura en un tiempo 0, y (2) al realizar el modelo en tiempo 0, en *getInitializationRegionsBlackOil* establecer una estructura de posicionamiento del pozo con datos de presión que correspondan al almacenamiento. Hemos decidido investigar el uso de estas funciones para un trabajo futuro.



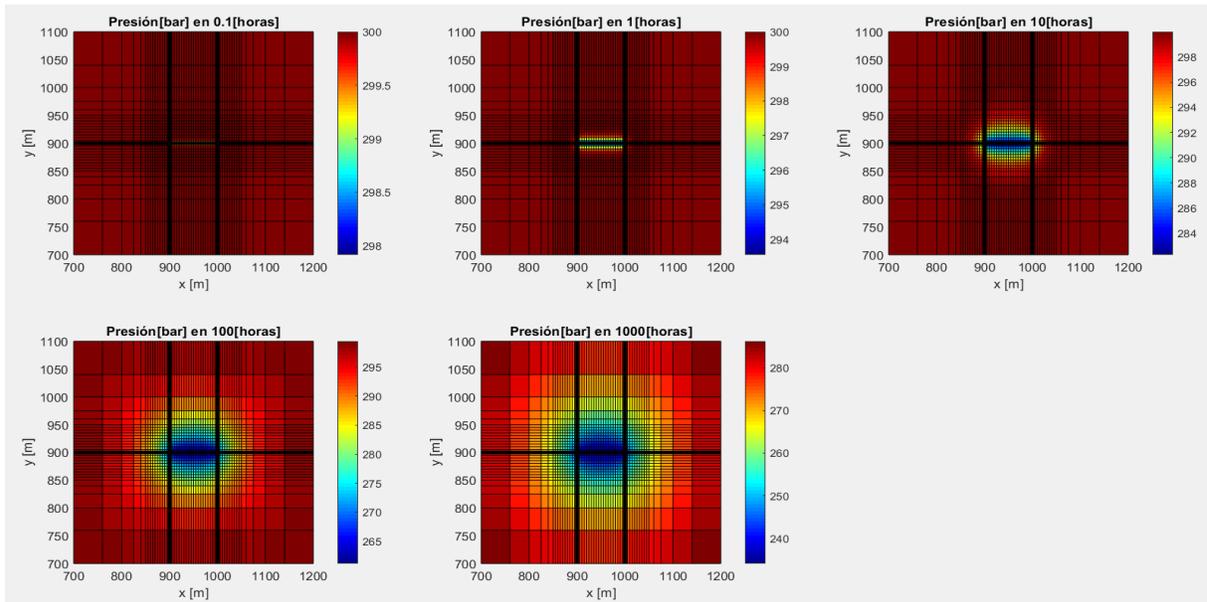
**Figura 3.8** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad finita.



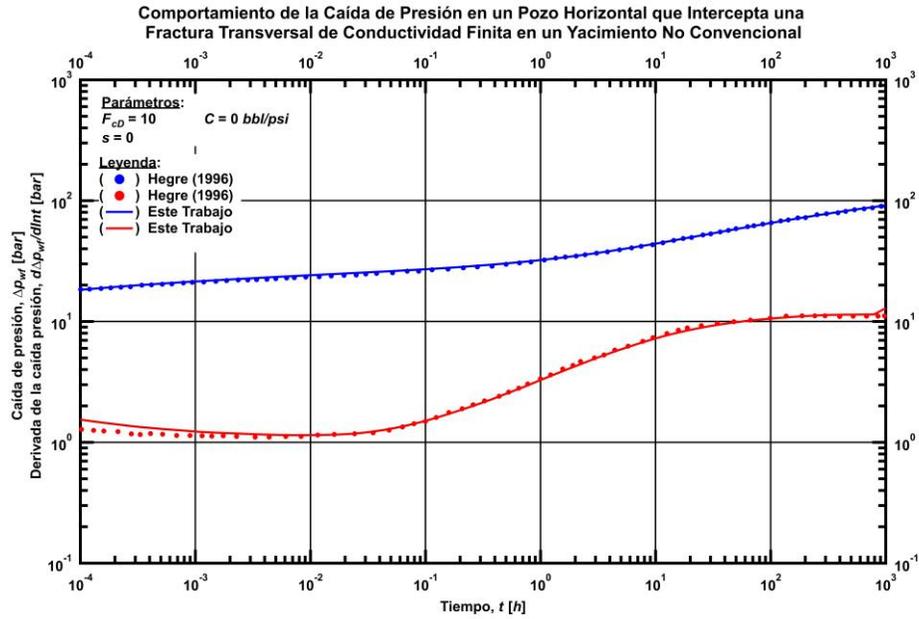
**Figura 3.9** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad infinita.



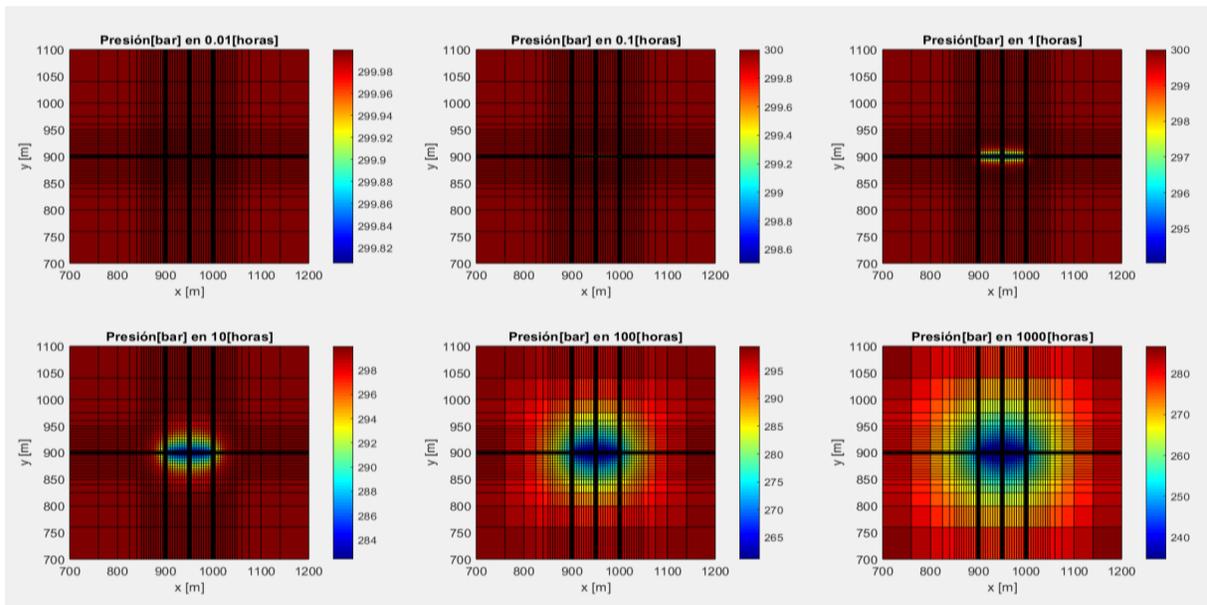
**Figura 3.10** — Distribución de presión en el subsistema a diferentes tiempos para una fractura longitudinal de conductividad finita.



**Figura 3.11** — Distribución de presión en el subsistema a diferentes tiempos para una fractura longitudinal de conductividad infinita.



**Figura 3.12** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal de conductividad finita.



**Figura 3.13** — Distribución de presión en el subsistema a diferentes tiempos para una fractura transversal de conductividad finita.

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE PARAMETROS PARA UN POZO HORIZONTAL FRACTURADO EN LA FORMACIÓN EAGLE FORD

En este capítulo se pretende analizar la sensibilidad de MRST respecto a ciertos parámetros que influyen en la producción, en la presión de fondo fluyendo y en la reserva. Primero, describimos cómo se construyó el sistema basado en un yacimiento de la formación Eagle Ford con datos del trabajo de Chaudhary *et. al.* (2011), quienes basaron su estudio en una fracción de un pozo multifracturado, convirtiendo el estudio en un yacimiento de menor tamaño con una sola fractura. Posteriormente se hacen análisis al variar parámetros de la fractura hidráulica para los casos de fractura longitudinal y transversal, además de variar parámetros de yacimiento y de producción.

En cada caso se muestra un gráfico con la propiedad a variar, el tipo de fractura y una combinación de ambas, con una breve descripción del análisis de datos.

Cabe señalar que para cada análisis se presentan los casos del comportamiento en la presión (*i.e.* pozo a producción constante) y en el comportamiento del gasto (*i.e.* pozo a presión de fondo fluyente constante) y con este último, analizar la producción acumulada.

#### **4.1. Influencia de las características de la fractura hidráulica en el desempeño del pozo.**

En este capítulo se desarrolló una malla y fluido con base en el trabajo de Chaudhary *et. al.* (2011), quien hace referencia a la formación Eagle Ford en la cual se han desarrollado múltiples yacimientos no convencionales que han sido explotados mediante la técnica de fracturamiento hidráulico.

Para este trabajo, se considera un pozo multifracturado. Chaudhary *et. al.* (2011) solo toma un bloque que contiene a una sola fractura debido la permeabilidad tan baja tal que la interferencia entre fracturas se considera despreciable por lo que el problema se reduce al análisis de un solo pozo con una sola fractura.

Para la construcción de la malla se utilizó un refinamiento logarítmico a partir del ancho de la fractura hasta la longitud total del bloque, donde el plano de fractura tiene los vectores  $yz$ . En este análisis, se tienen dos casos generales: (1) una fractura longitudinal, donde el pozo está perforado en dirección- $y$  y (2) fractura transversal, donde el pozo está perforado en dirección  $x$ .

El vector en dirección- $x$  tiene el espaciado siguiente, usando la función de MATLAB para crear vectores logarítmicos:

$$xr = 100 + \log \text{space}(-1, 2, 49) . \dots\dots\dots (4.1)$$

Para el vector en dirección- $y$ , usamos la función anterior con un espaciado diferente, tal que:

$$yu = 500 + \log \text{space}(-1, \log_{10}(500), 35) . \dots\dots\dots (4.2)$$

Después realizamos un vector imagen del espaciamiento en y y x: *modificar()*(*i*)

$$xr = flip(200. - xr) . \dots\dots\dots (4.3)$$

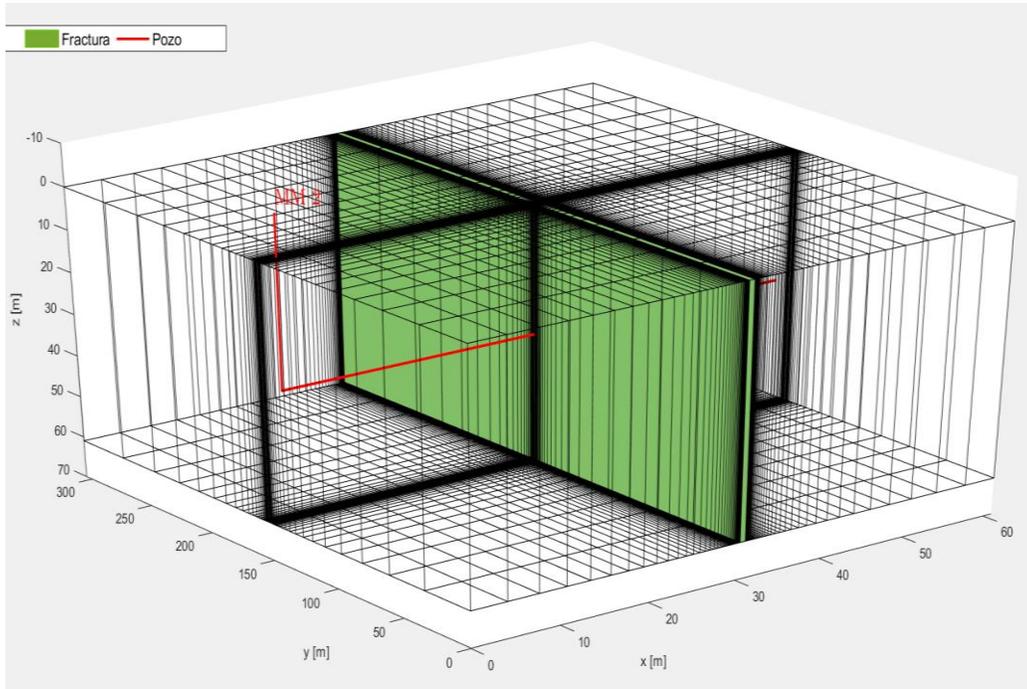
$$yd = flip(1000. - yu) . \dots\dots\dots (4.4)$$

En la **Fig. 4.1** se representa un pozo horizontal con una fractura transversal y la malla que describe Chaudhary *et. al.* (2011). Nótese que debido a que MRST usa el sistema internacional por defecto, los ejes coordenados están en metros, no obstante se respetan las longitudes en unidades de campo (*i.e.*, los 200 ft de espesor del yacimiento se representan en el eje-z como 60.97 m ). Similarmente, la **Fig. 4.2** es una representación de un pozo horizontal con una fractura longitudinal y tal como en el caso previo, los ejes coordenados están en metros.

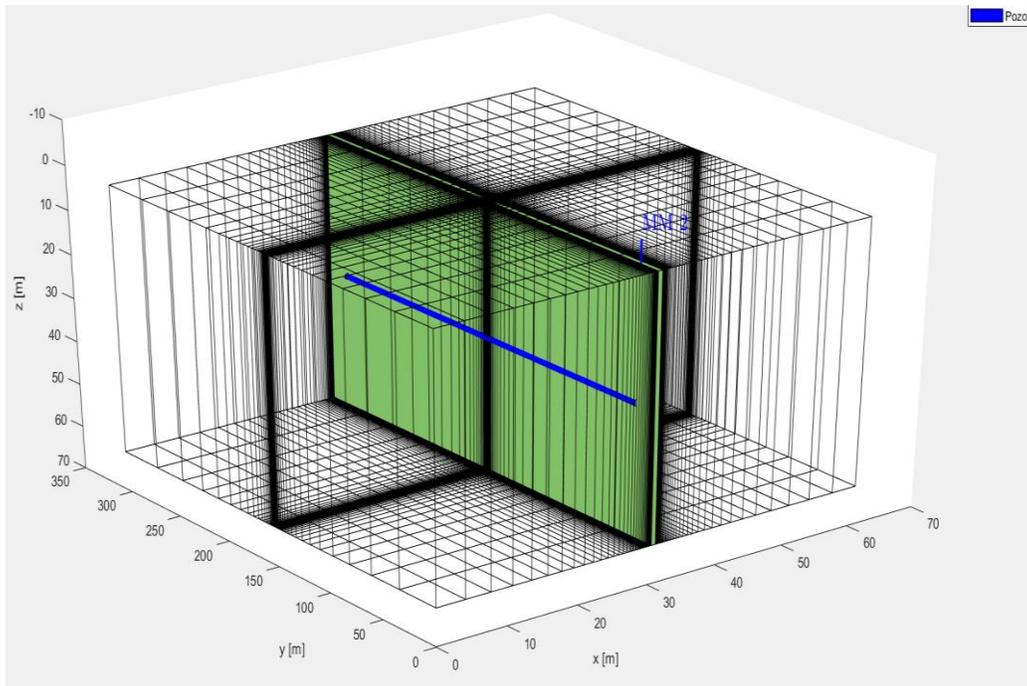
Para la definición de las propiedades del fluido, se empleó la estrategia de hacer un *deck*, el cual es un documento que contiene de manera específica etiquetas que se emplean en Eclipse 100, ya que la construcción a partir de las funciones de MRST causaba errores en cuanto a la caída de presión a tiempos mayores de 80 días cuando la permeabilidad del yacimiento (*k*) es 0.0001 md. El *deck* se realizó en un archivo *txt* donde se colocaron parámetros que se describen de manera más precisa en el manual de usuario de Eclipse 100. Dicho archivo *txt* tiene que ser convertido en un archivo *.DATA* para leerlo con la función *readEclipseDeck*, donde de esta estructura solamente se utiliza la subestructura *fluid* la cual contiene todas las propiedades del fluido.

**Tabla 4.1** — Tabla de las propiedades de la fractura y yacimiento (Chaudhary *et. al.* 2011)

<b>Datos</b>	
Permeabilidad ( <i>k</i> ), mD	0.0001
Porosidad ( $\phi$ ), fracción	0.06
Compresibilidad total ( $c_t$ ), psia <sup>-1</sup>	5x10 <sup>-6</sup>
Ancho de la celda de fractura equivalente ( $w_f$ ), ft	2
Conductividad de la fractura del caso base ( $F_c$ ), mD*ft	83.3
Permeabilidad de la fractura ( $k_f$ ), mD	41.6
Longitud media de la fractura ( $x_f$ ), ft	500
Presión inicial ( <i>p</i> ), psi	6425
Espesor de yacimiento ( <i>h</i> ), ft	200
Gasto ( <i>q</i> ), bpd	5
Presión de burbuja ( $p_b$ ), psi	2398
Relación gas-aceite (RGA),scf/stb	650
Densidad del aceite (°API), °API	42



**Figura 4.1** — Fractura transversal.



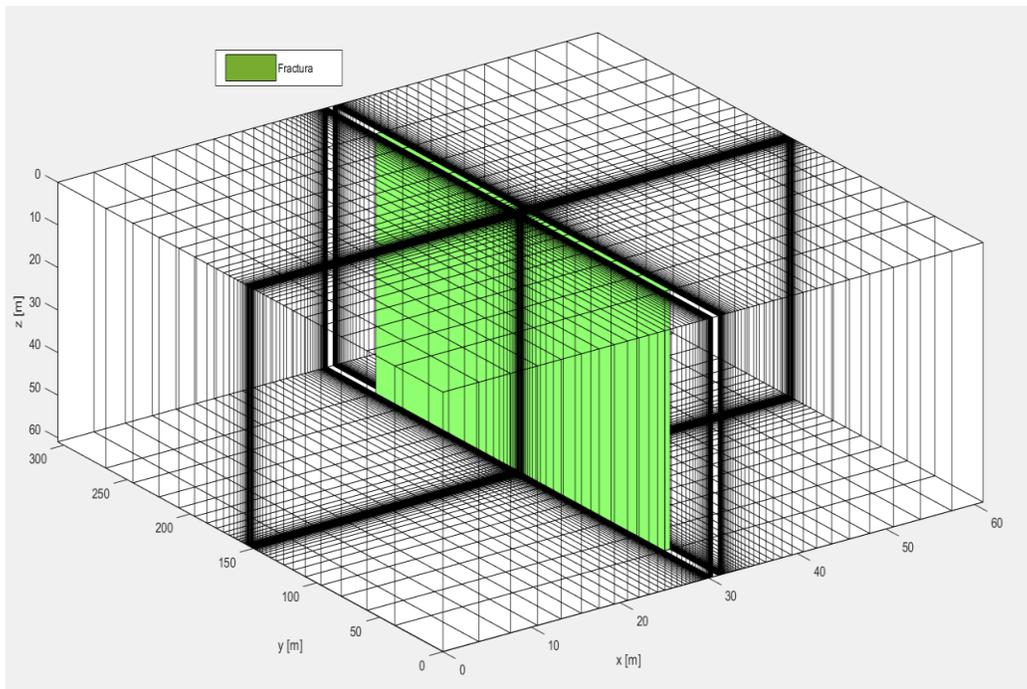
**Figura 4.2** — Fractura longitudinal.

#### 4.1.1. Análisis de sensibilidad de la media longitud de la fractura ( $x_f$ )

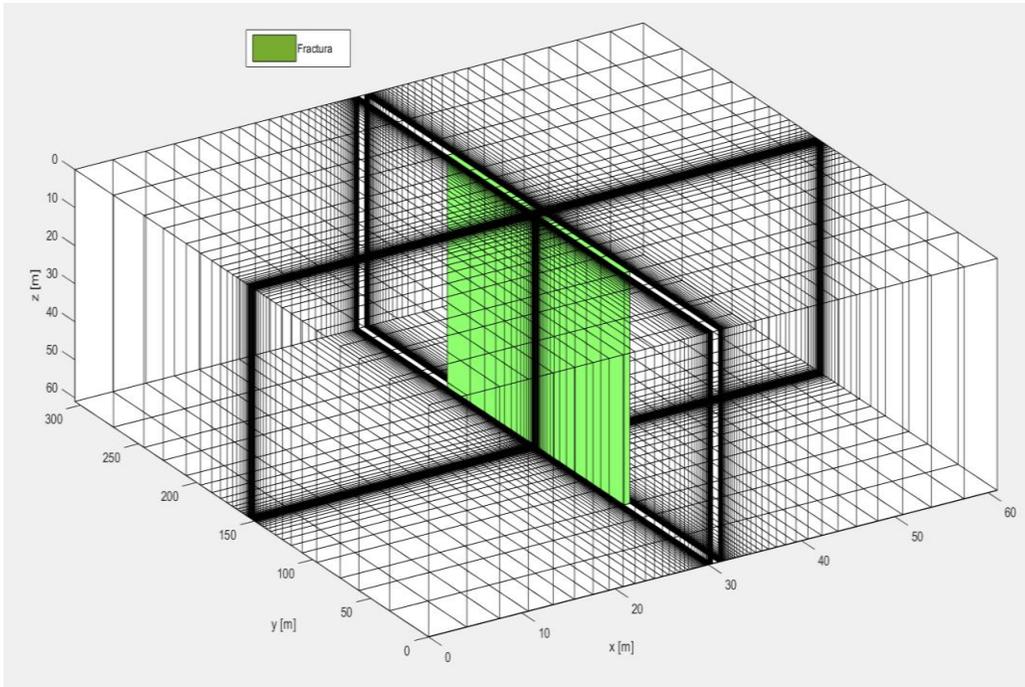
En esta sección presentamos los resultados del análisis de sensibilidad de la longitud media de la fractura ( $x_f$ ) en los comportamientos transitorios de presión y gasto. El caso base de este análisis está dado por el valor de  $x_f$  presentado en la **Tabla 4.1** y del cual examinamos su influencia en tres casos: (1) tres cuartos del valor del caso base ( $3x_f/4$ ), (2) la mitad del valor del caso base ( $x_f/2$ ), y (3) una cuarta parte del valor del caso base ( $x_f/4$ ).

Las **Figs. 4.3 a 4.5** presentan detalles sobre la configuración de la malla que utilizamos para este análisis. Para modificar la longitud de la fractura, se identificaron los índices de las celdas adecuados en los que se coincidiría con las medidas deseadas de  $x_f$ . Como se muestra en la **Fig. 4.3**, no se presenta el pozo ya que la malla se ocupó para ambos casos (*i.e.*, fractura longitudinal y fractura transversal.). La zona coloreada de verde contiene a la fractura mientras que lo demás representa al yacimiento.

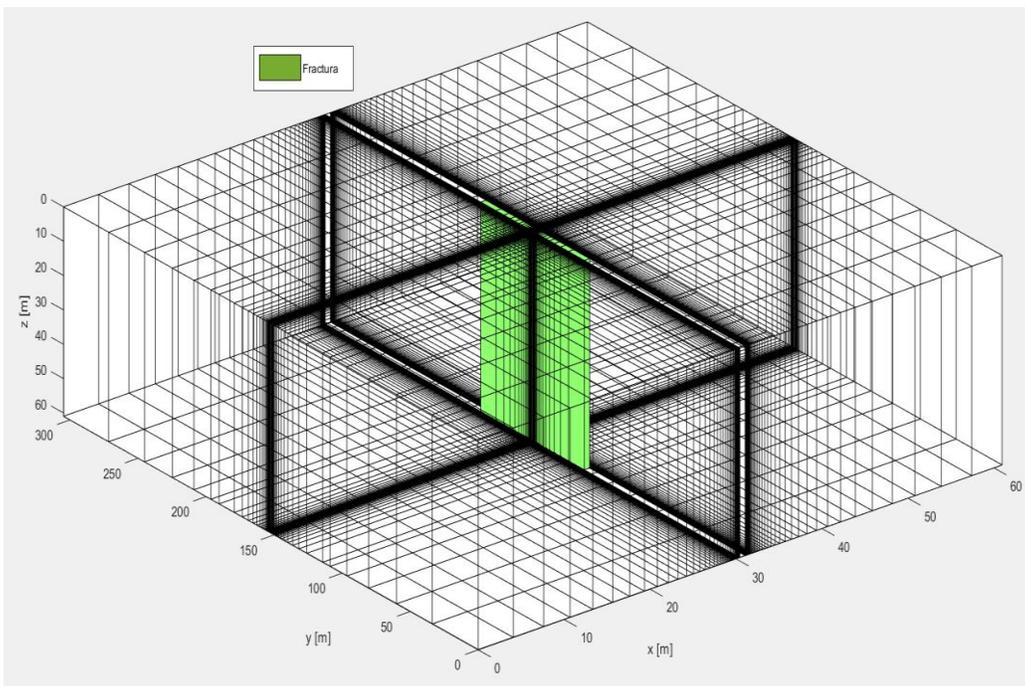
Por otro lado, para construir la malla que se presenta en la **Fig. 4.4** modificamos los nodos a los cuales pertenecían las puntas de la fractura para que el espaciamiento logarítmico coincidiera con el valor de  $x_f/2$ . Utilizamos el mismo proceso para construir la malla mostrada en la **Fig. 4.5**.



**Figura 4.3** — Fractura con  $3x_f/4$  de la longitud original.



**Figura 4.4** — Fractura con  $x_f/2$  de la longitud original.



**Figura 4.5** — Fractura con  $x_f/4$  de la longitud original.

## Influencia en el comportamiento de la caída de la presión en el pozo

### *Fractura Longitudinal*

De la **Fig. 4.6** puede observarse que para tiempos menores a 10 horas la derivada de la caída de presión presenta un comportamiento con pendiente unitaria. Debido a que no consideramos los efectos del almacenamiento en el pozo en la simulación, atribuimos este comportamiento a los efectos creados por las puntas de la fractura. Posteriormente a tiempos mayores a 100 horas se ve en la derivada de presión un comportamiento con pendiente de 1/2 correspondiente a un periodo de flujo lineal de yacimiento.

Dado que nuestro análisis es para un yacimiento bajo saturado se acotan los datos de presión de fondo fluyente que caen por debajo de la presión de burbuja, por lo que algunos casos de la **Fig. 4.6** se ven incompletos. Analizando las curvas se puede notar que a menor longitud media de fractura se reduce el radio efectivo de pozo teniendo así una caída de presión mayor.

### *Fractura Transversal*

En la **Fig. 4.7** pueden observarse dos periodos de flujo. El primero a tiempos tempranos ( $t < 10$  h para  $x_f$ ,  $t < 3$  h para  $3x_f/4$ ,  $t < 2$  h para  $x_f/2$  y  $t < 0.4$  h para  $x_f/4$ ) muestra una pendiente de 1/2, pero la pendiente del comportamiento de la presión es diferente a un medio, por lo que concluimos que el primer periodo de flujo corresponde al periodo de flujo radial-lineal mencionado por algunos autores (*e.g.* Larsen *et al.*, 1991). Después de un periodo de transición ( $t > 100$  h), los cuatro casos presentan un flujo lineal de formación caracterizado por pendientes igual a 1/2 en la presión y su derivada. A medida que disminuye la longitud media de fractura, el periodo de flujo lineal aparece antes ( $t > 1000$  h para  $x_f$ ,  $t > 500$  h para  $3x_f/4$ ,  $t > 300$  h para  $x_f/2$  y  $t > 100$  h para  $x_f/4$ ),

### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

En la **Fig. 4.8** es notable a tiempos menores a 1 hora la diferencia entre la fractura longitudinal y transversal. Para una fractura transversal, la caída de presión es mayor debido a que el pozo drena directamente la fractura pues la penetra en un punto, mientras que en la fractura longitudinal el drene ocurre por toda la extensión de la fractura. No obstante, a tiempos mayores a 100 horas, la caída de presión tiende a ser la misma para ambos casos. Esto debido a que la frontera del yacimiento es cerrada presentado un periodo de flujo pseudo-estacionario.

Análisis de Sensibilidad de la Longitud Media de la Fractura en el Comportamiento de la Caída Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

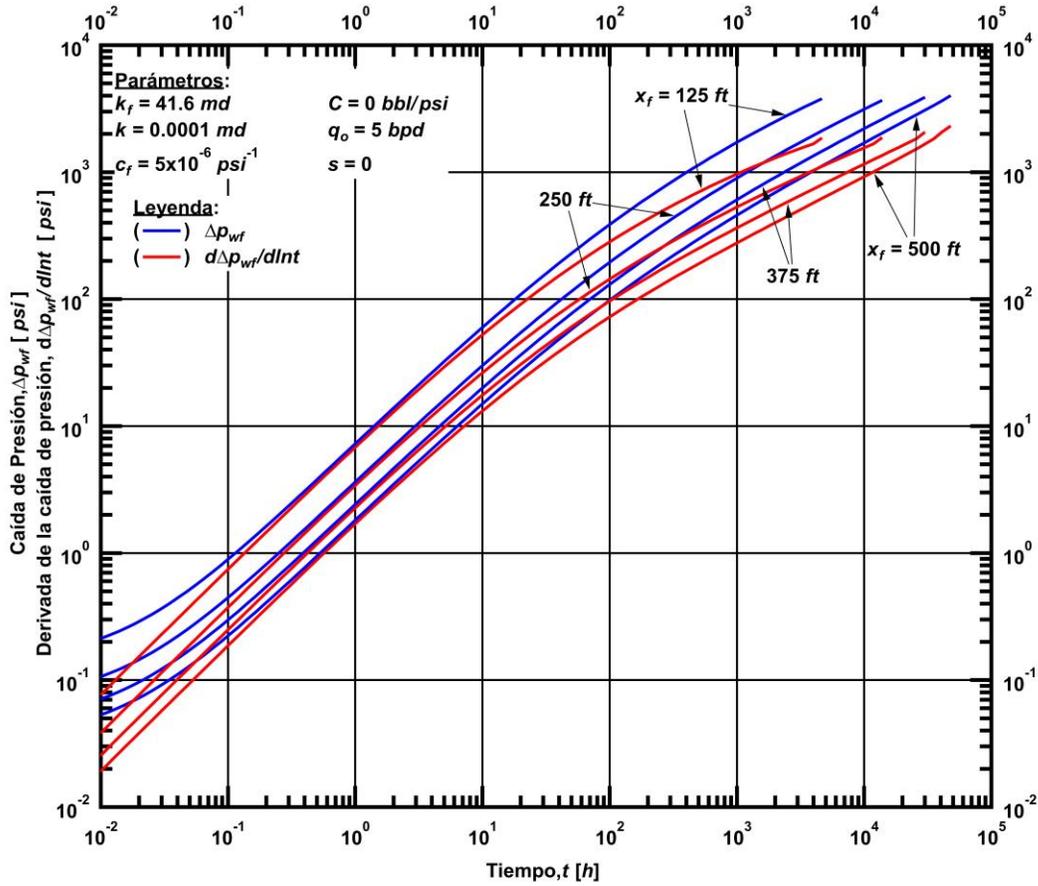
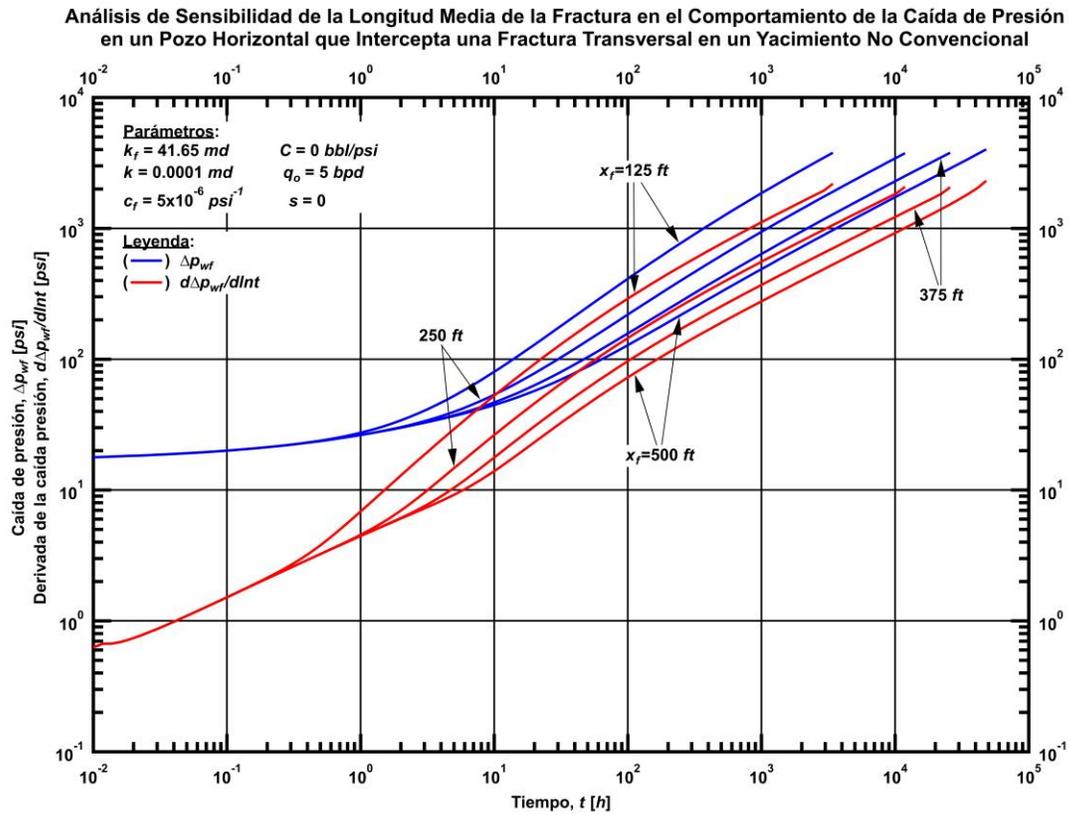


Figura 4.6 — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$



**Figura 4.7** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$

**Análisis de Sensibilidad de la Longitud Media de la Fractura en el Comportamiento de la Caída de Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**

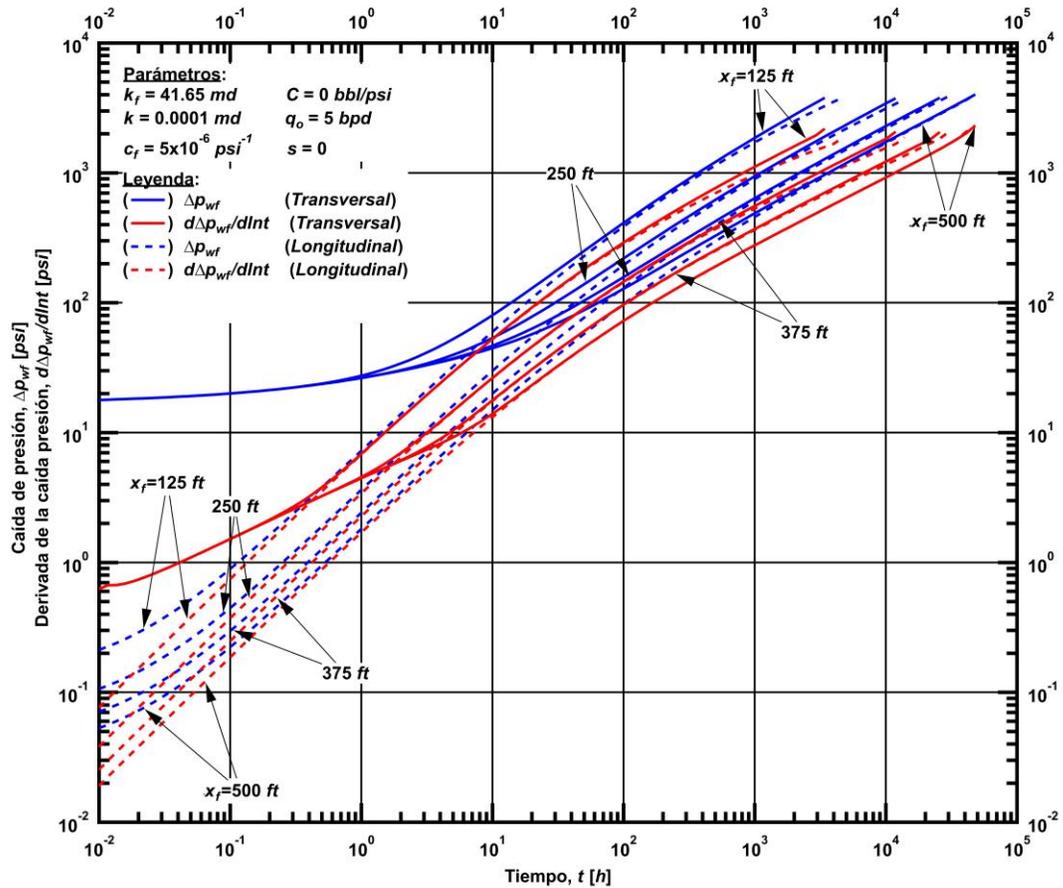


Figura 4.8 — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal en una fractura longitudinal y transversal a diferentes  $x_f$ .

## Influencia en el comportamiento del gasto

### *Fractura Longitudinal*

Las curvas del gasto de la **Fig. 4.9** muestran que pozos que interceptan fracturas más cortas, tendrán producciones más bajas. Es decir, a valores más bajos de  $x_f$ , menor gasto. Consecuentemente, la producción acumulada (**Fig. 4.10**) también será mayor en pozos que interceptan fracturas más largas.

Dado que la **Fig. 4.9** corresponde a una "gráfica espejo" de la **Fig. 4.6**, la pendiente de 1/2 mostrada por la curva del gasto y su derivada para  $t > 10^0 h$  corresponde a un flujo lineal de formación.

### *Fractura Transversal*

Análogamente para el caso de la fractura transversal, las curvas del gasto y su derivada presentadas en la **Fig. 4.11** muestran que a tiempos tempranos el gasto está gobernado por el flujo en la fractura. No obstante, mientras más pequeño sea el valor de  $x_f$ , el gasto declina más rápido.

En la **Fig. 4.12** se observa que a tiempos cortos ( $t < 2 h$ ) la producción acumulada es la misma para todos los casos. No obstante, a menor  $x_f$  menor es el tiempo donde la producción acumulada comienza a crecer en menor medida, dado que se reconoce el efecto del yacimiento.

### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

Con base en un análisis general de la **Fig. 4.13**, se puede concluir que las fracturas longitudinales presentan una mayor producción a tiempos tempranos ( $t < 0.2 h$ ), lo cual es consistente con el hecho de que el pozo tiene mayor contacto con la fractura (**Fig. 4.2**). De la **Fig. 4.13** notamos que para a tiempos mayores a 100 horas, el comportamiento transitorio del gasto es el mismo para fracturas longitudinales y transversales que tengan el mismo valor de  $x_f$ . Es notable que en una fractura longitudinal, hay una declinación mayor, pero con una producción inicial mayor. Adicionalmente, son los tiempos en los que se reconoce el periodo de flujo dominado por el yacimiento, siendo en la fractura longitudinal menores que en la transversal.

Con base en la **Fig. 4.14** concluimos que la producción acumulada para fracturas transversales es menor a tiempos tempranos ( $t < 1 h$ ). Sin embargo, para tiempos que van de 100 horas a 1000 horas el comportamiento tiende a ser el mismo para los dos tipos de fracturas (longitudinales o transversales) que tienen el mismo valor de  $x_f$ . Sin embargo, a tiempos largos notamos una divergencia entre los comportamientos de producción acumulada para fracturas longitudinales y transversales, la cual se presenta antes a medida que el valor de  $x_f$  disminuye.

Análisis de Sensibilidad de la Longitud Media de la Fractura en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

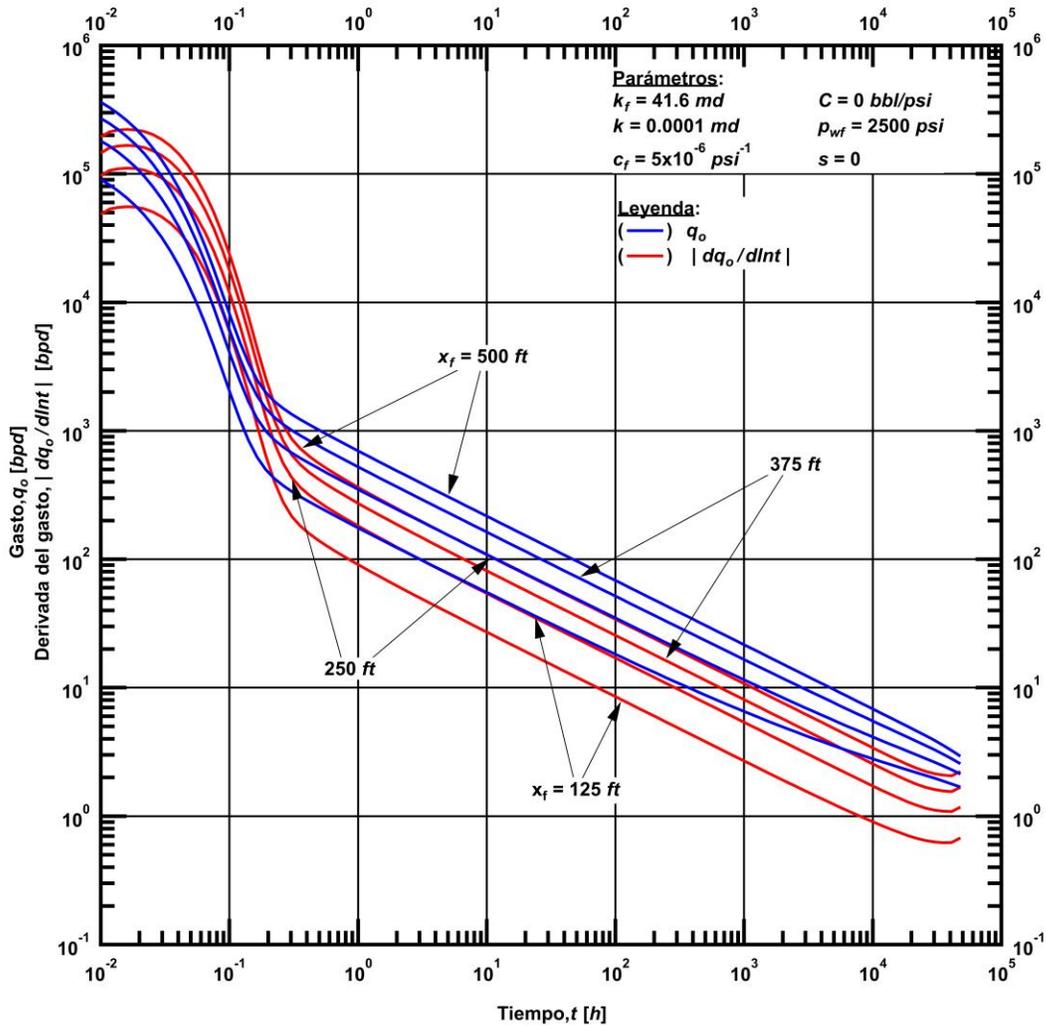


Figura 4.9 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$

Análisis de Sensibilidad de la Longitud Media de la Fractura en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

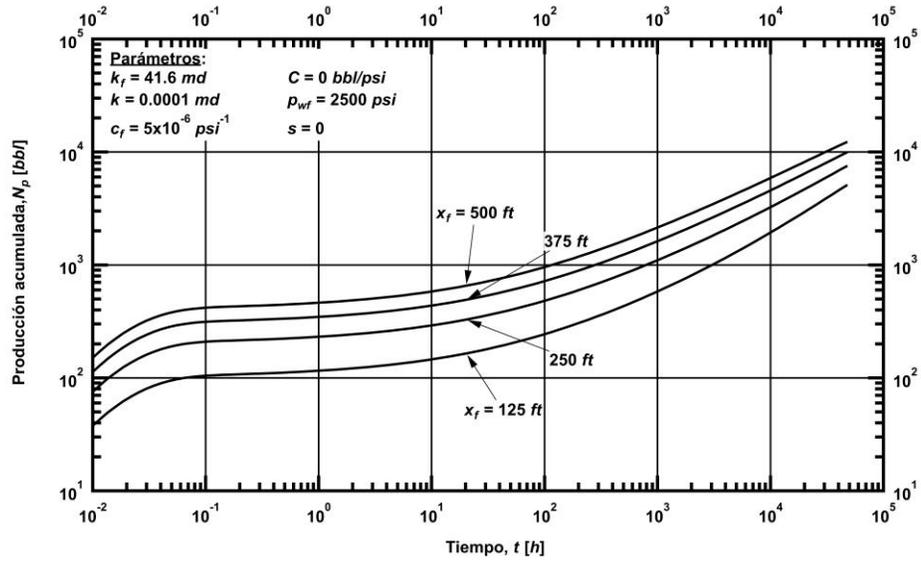


Figura 4.10 — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$

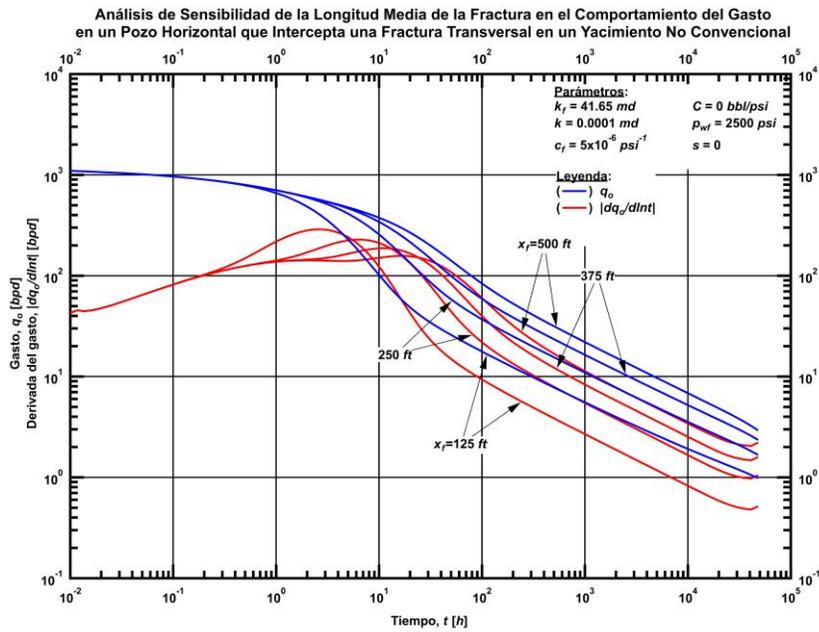


Figura 4.11 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$

Análisis de Sensibilidad de la Longitud Media de la Fractura en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional

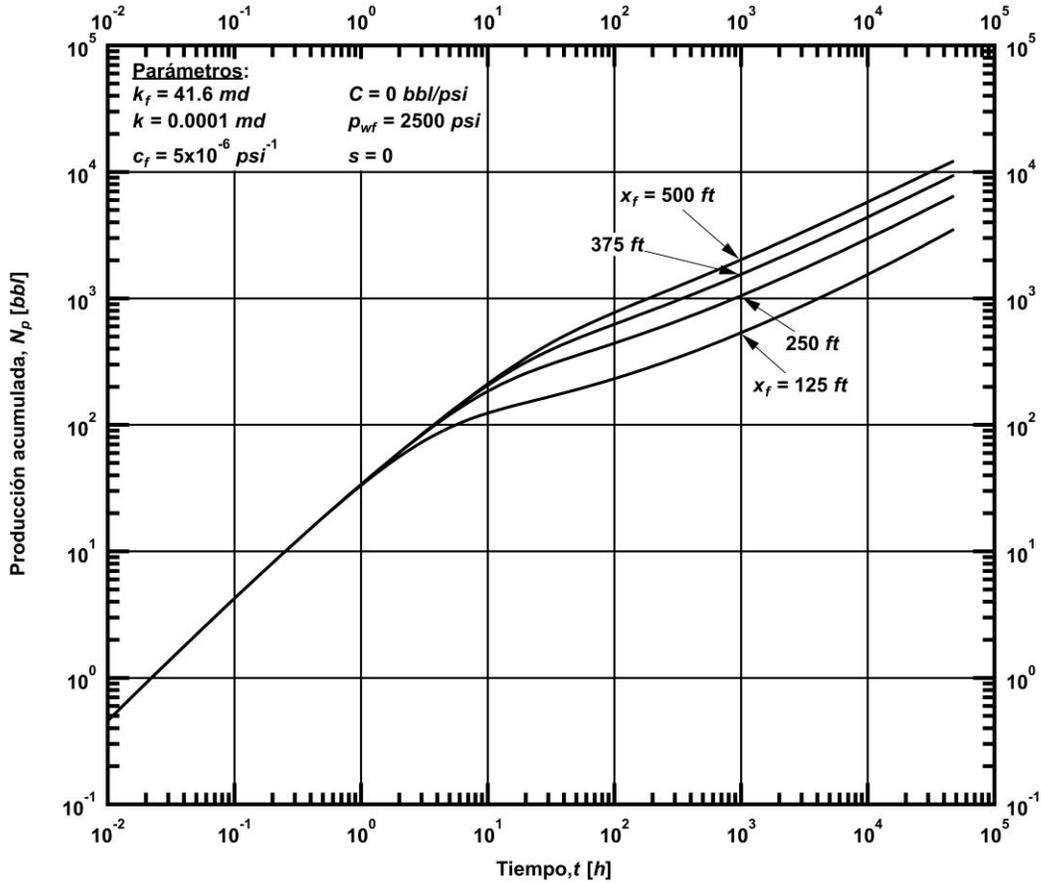


Figura 4.12 — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$

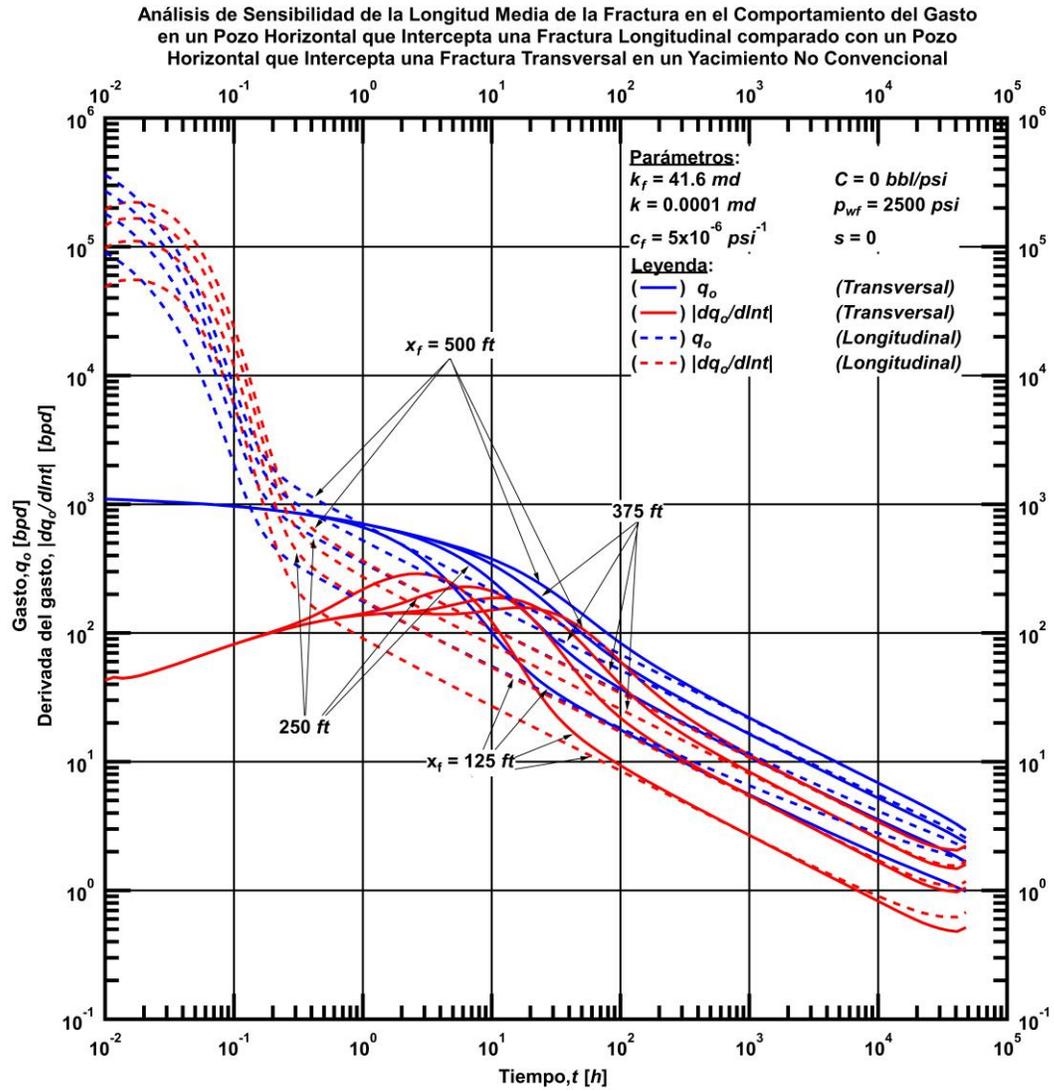
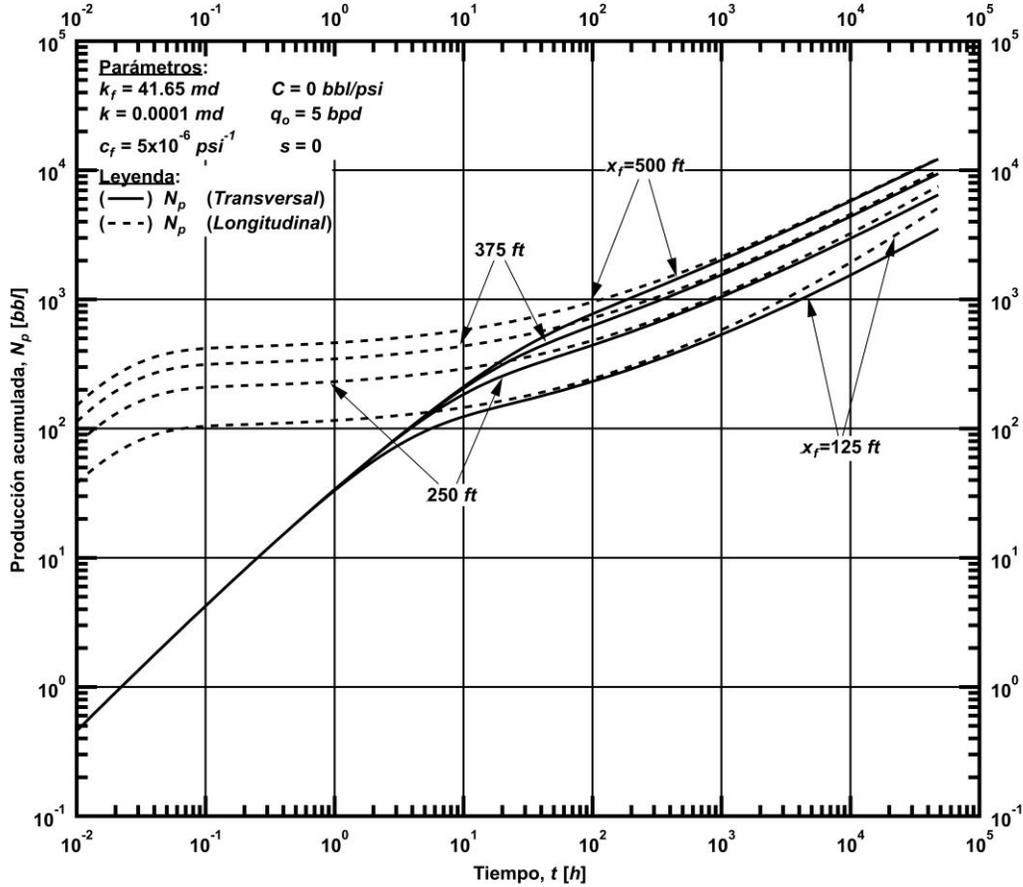


Figura 4.13 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$ .

**Análisis de Sensibilidad de la Longitud Media de la Fractura en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.14** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $x_f$

#### 4.1.2. Análisis de sensibilidad de la permeabilidad de la fractura ( $k_f$ )

En esta sección, presentamos los resultados de la sensibilidad al variar dentro del simulador la permeabilidad de la fractura ( $k_f$ ) que se muestra como caso base en la **Tabla 4.1**. La variación fue realizada de la manera siguiente: (1) cuatro tercios del valor del caso base ( $4 k_f / 3$ ), (2) dos veces el valor del caso base ( $2 k_f$ ), y (3) cuatro veces el valor del caso base ( $4 k_f$ ).

##### Influencia en el comportamiento de la caída de la presión en el pozo

###### *Fractura Longitudinal*

En la **Fig. 4.15** podemos notar que la derivada es la misma para todos los casos, esto implica que se manifiestan los mismos periodos de flujo al mismo tiempo, variando en este caso únicamente la caída de presión en la fractura. Por lo cuál esta diferencia en la caída de presión sólo se ve a tiempos menores a 0.1 horas.

Nótese que la pendiente de la derivada es unitaria (**Fig. 4.15**), se debe al refinamiento en dirección- $z$  y que la fractura abarca toda la extensión del yacimiento en dirección- $y$ , teniendo un reconocimiento parcial de fronteras.

###### *Fractura Transversal*

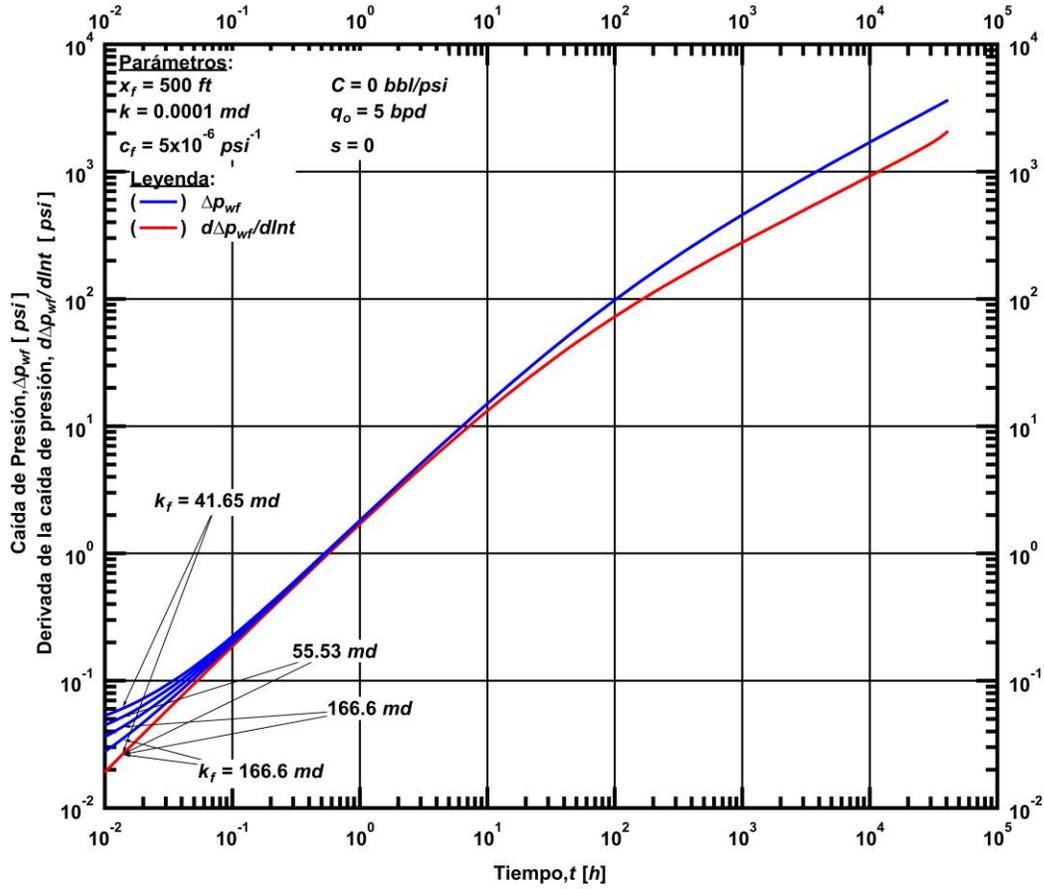
El caso de la fractura transversal mostrado en la **Fig. 4.16** las curvas de la derivada de la caída de presión tienen las mismas geometrías de flujo (*i. e.* pendiente de  $\frac{1}{2}$  implica un flujo lineal de fractura para tiempos menores a 10 horas) a diferentes tiempos, y la variación de la caída de presión se da dentro de la fractura en un tiempo menor a 100 horas.

##### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

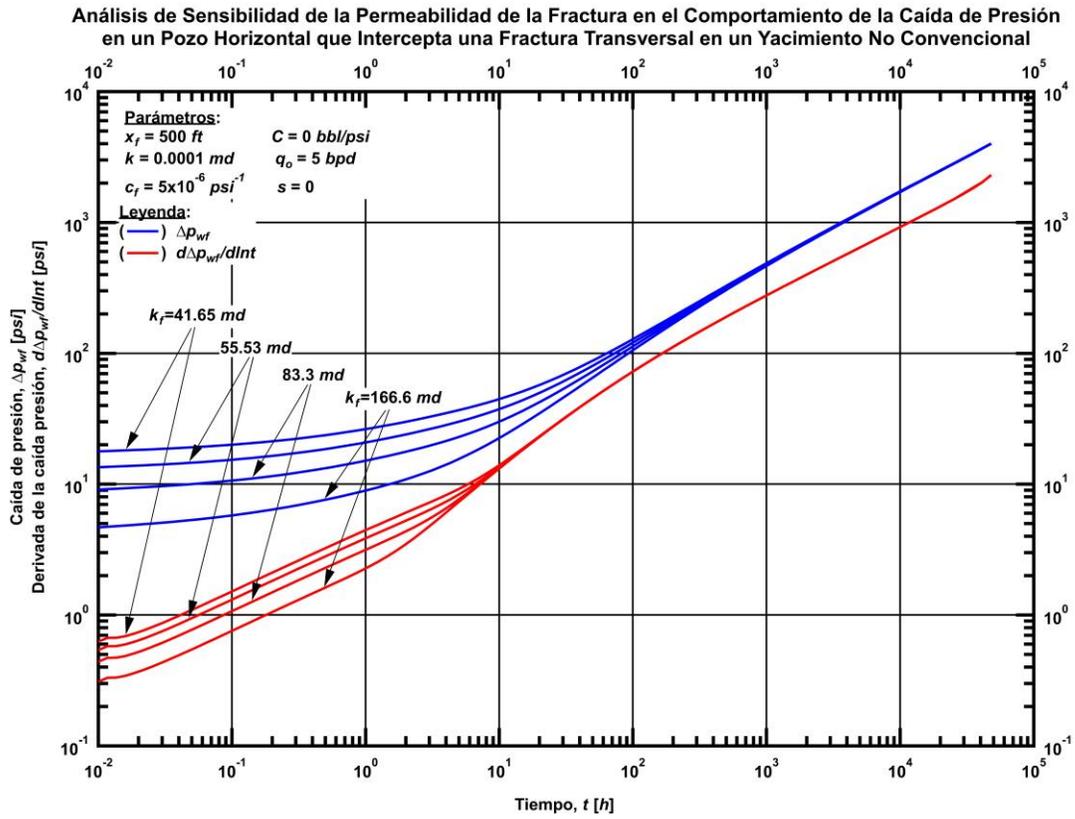
En la **Fig. 4.17** se puede observar que la variación de  $k_f$  solo se nota en tiempos donde la geometría de flujo es gobernada por la fractura, dado que es un parámetro propio de ésta. A tiempos largos, donde la geometría de flujo es gobernada por el yacimiento, la caída de presión es la misma debido a que los parámetros del yacimiento se mantienen constantes, solo se nota los tiempos en los que el transitorio de presión alcanza el yacimiento. Al igual que en la discusión de  $x_f$ , la caída de presión es mayor en una fractura transversal que en una longitudinal. De igual forma las geometrías de flujo son distintas en ambos casos.

Véase que la caída de presión en una fractura longitudinal es mucho menor comparado con una fractura transversal (**Fig. 4.17**), esto debido a las condiciones del pozo, el cuál en la fractura longitudinal el flujo ocurre a lo largo de toda la extensión de la fractura mientras que en la transversal el flujo ocurre sólo en una celda. Esto implica una mayor caída de presión en la fractura transversal, ya que el flujo tendrá que llegar hasta donde se encuentra el pozo.

**Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad de la Fractura en el Comportamiento de la Caída Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional**

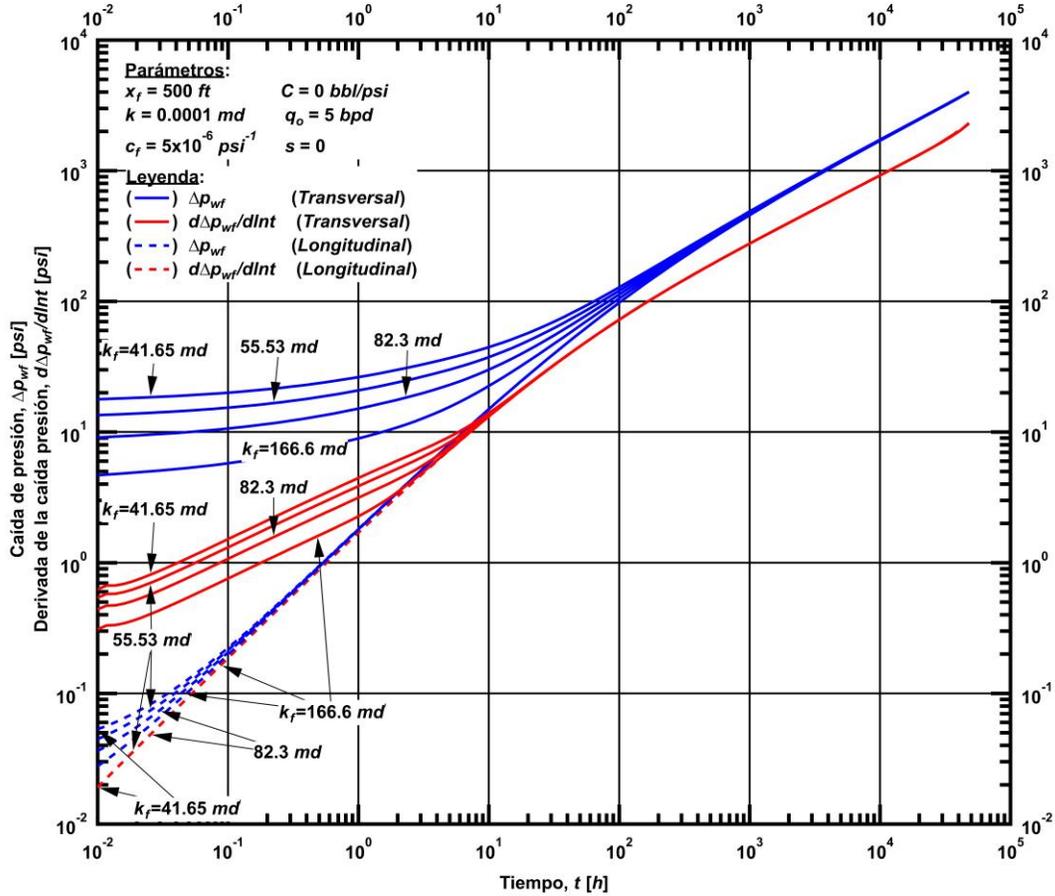


**Figura 4.15** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$



**Figura 4.16** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

**Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad de la Fractura en el Comportamiento de la Caída de Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.17** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

## Influencia en el comportamiento del gasto

### *Fractura Longitudinal*

En la **Fig. 4.18** se observa que cuando aumenta la permeabilidad de la fractura ( $k_f$ ) respecto al caso base tenemos una declinación y un gasto inicial mayor debido a que hay una difusividad más alta. Posteriormente cuando se "observan" los efectos del yacimiento los gastos convergen debido a que los parámetros del yacimiento se mantienen constantes.

Al tratarse de efectos de fractura la producción acumulada (**Fig. 4.19**) sólo se verá afectada a tiempos menores a 0.1 horas, posterior a esto la producción acumulada ( $N_p$ ) será la misma ya que gobiernan parámetros del yacimiento. Como apreciamos en la **Fig. 4.18** y **Fig. 4.19** la variación de la permeabilidad de la fractura ( $k_f$ ) no es un factor que afecte la producción a largo plazo y por tanto el factor de recuperación del yacimiento, para este caso.

### *Fractura Transversal*

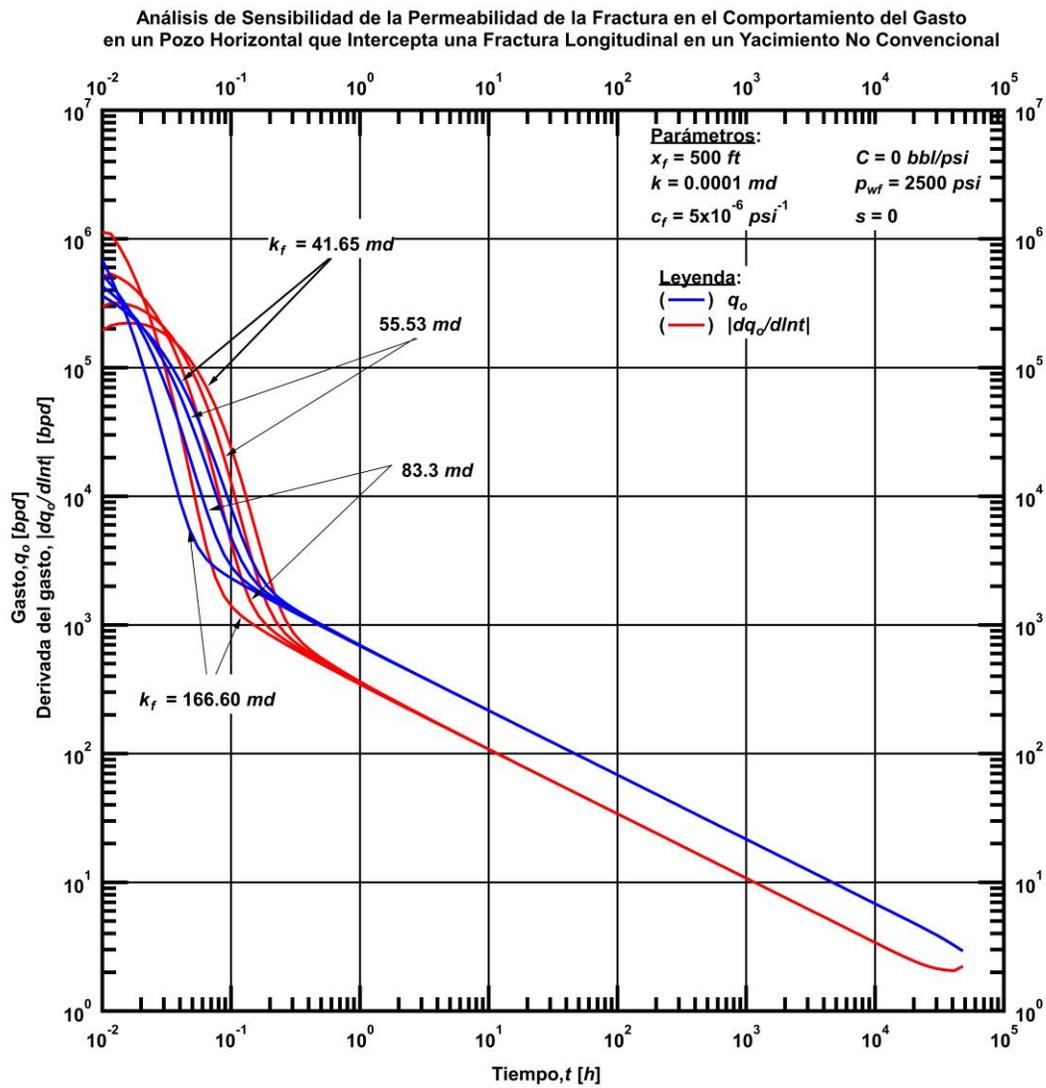
Para la **Fig. 4.20** sucede el mismo efecto que en la fractura longitudinal, *i.e* al salir del periodo gobernado por la fractura el gasto converge para todos los casos. Cuando aumenta ( $k_f$ ) sólo que en este caso el efecto es más visible en el tiempo debido a que el pozo atraviesa la fractura en un punto lo que provoca que el aporte de la misma tenga mayor duración antes de entrar al periodo gobernado por el yacimiento.

Al igual que en el comportamiento de la producción acumulada ( $N_p$ ) en la fractura longitudinal, en la **Fig. 4.21** el efecto de variar  $k_f$  en una fractura transversal, sólo produce cambios a tiempos donde la geometría de flujo es gobernada por la fractura.

### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

En la **Fig.4.22** analizando las curvas de gasto, es importante notar que a tiempos largos, el gasto comienza a converger porque dejan de tener efecto los parámetros de la fractura (la permeabilidad ( $k_f$ ), en específico) y el yacimiento domina la producción. Sin embargo, en la fractura transversal los efectos de la fractura se mantienen por más tiempo.

La **Fig.4.23** muestra el comportamiento de la producción acumulada de ambas fracturas, donde la fractura longitudinal, tiene mayor producción acumulada ya que al estar el pozo disparado en toda la extensión de la fractura, se drena en menor tiempo.



**Figura 4.18** — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad de la Fractura en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

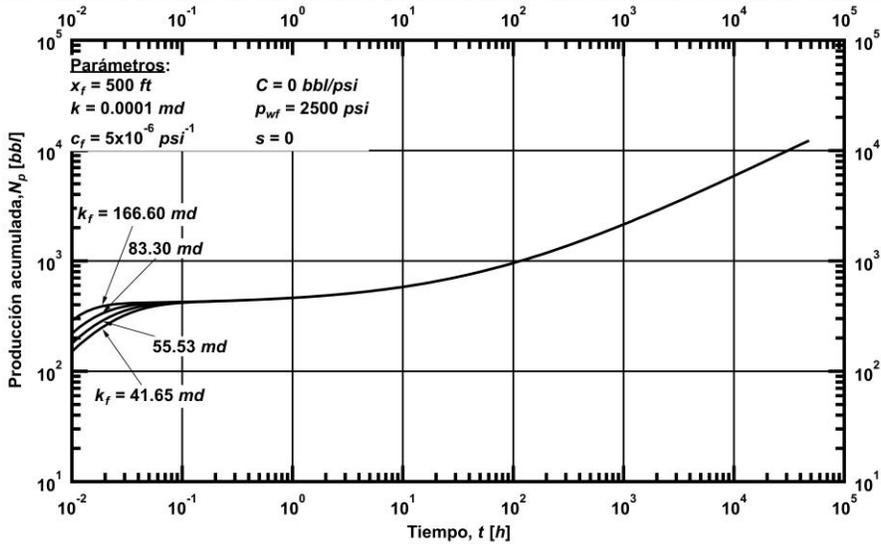


Figura 4.19 — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad de la Fractura en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional

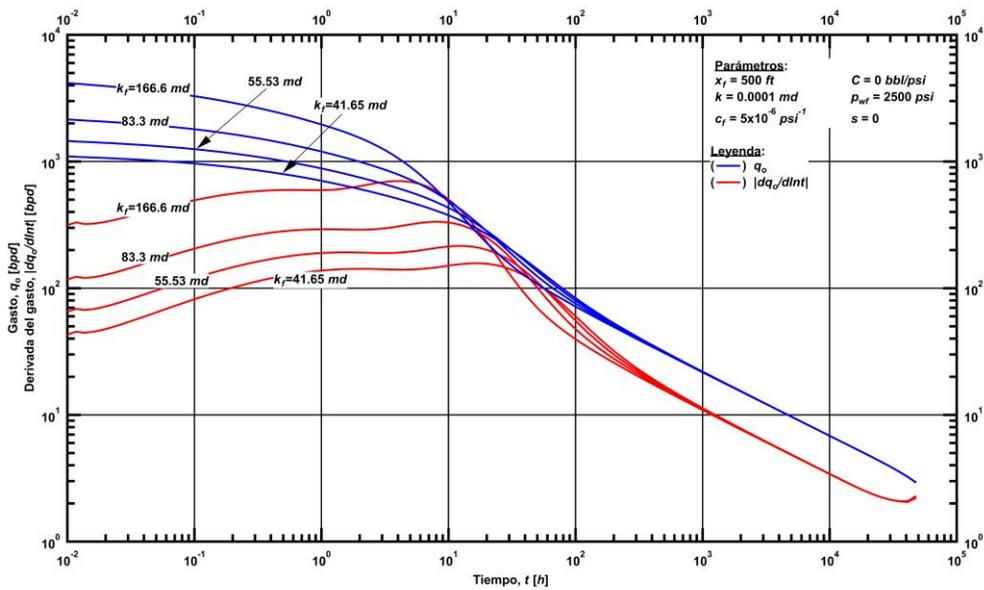


Figura 4.20 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad de la Fractura en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional

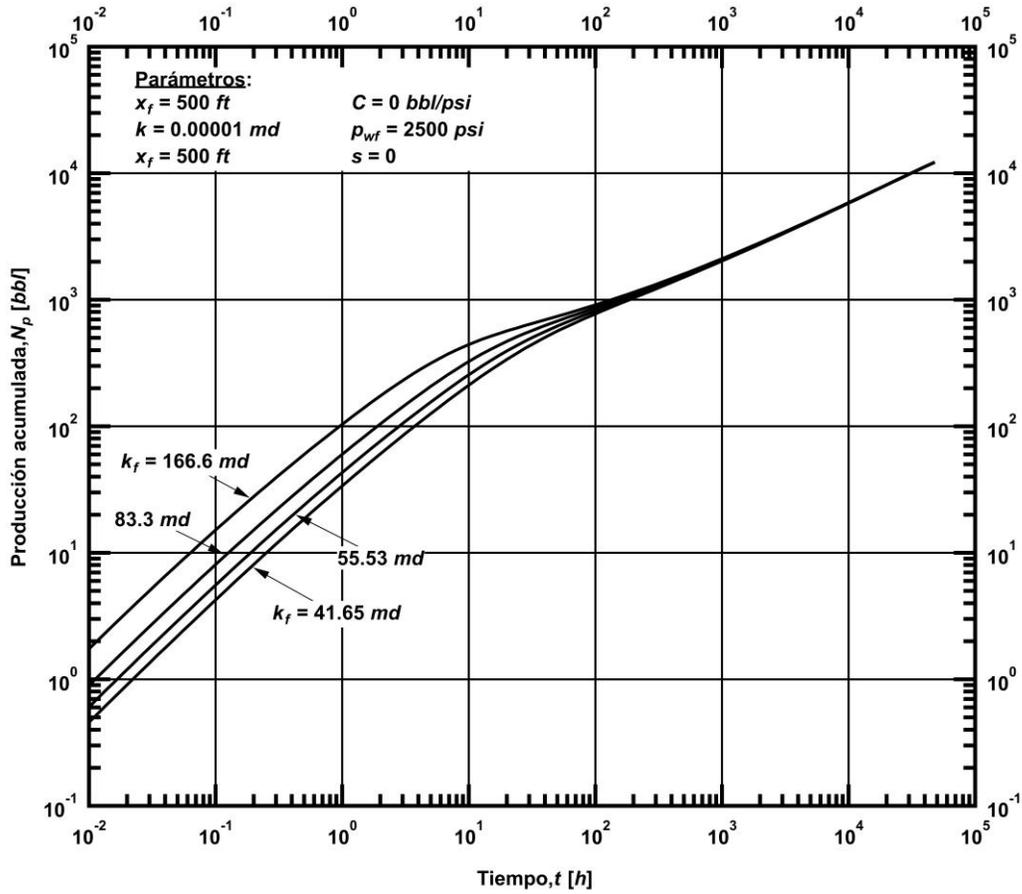


Figura 4.21 — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad de la Fractura en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional

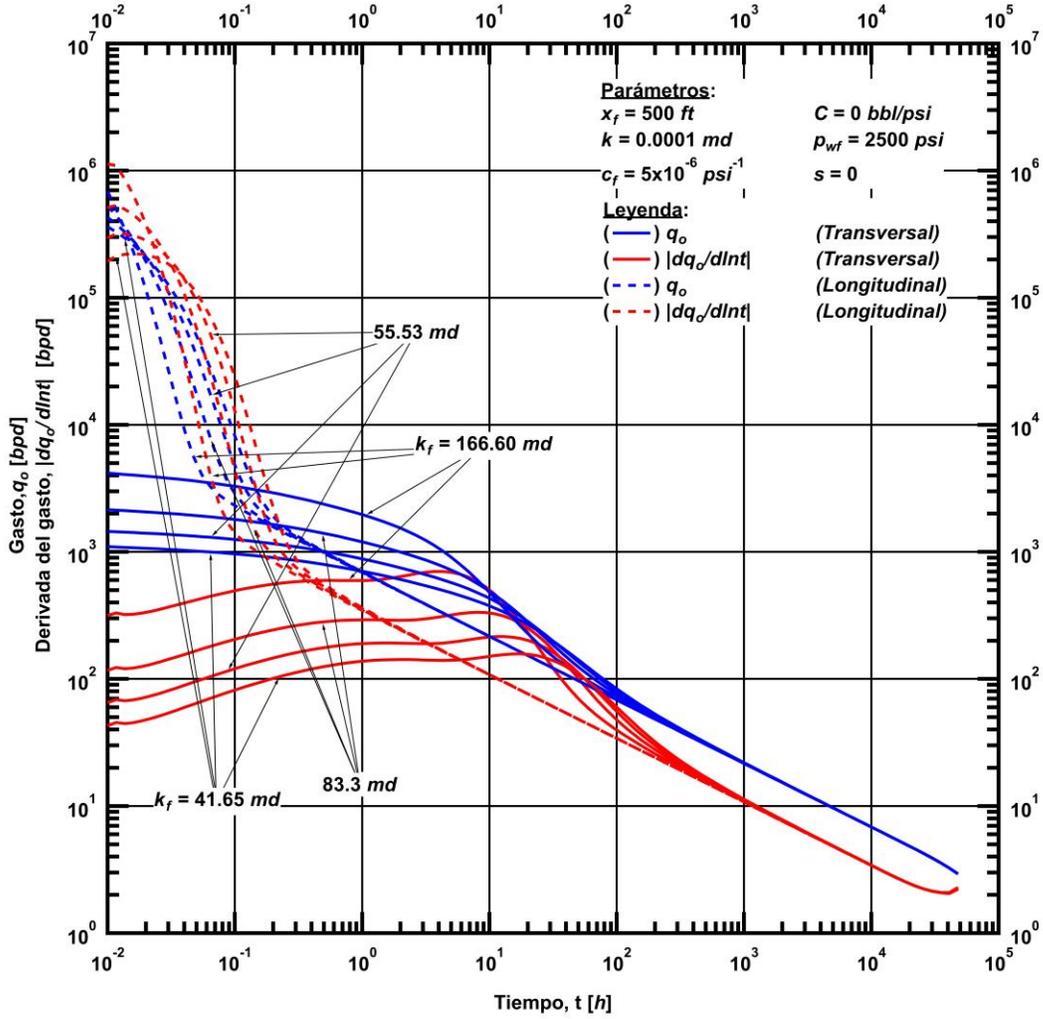
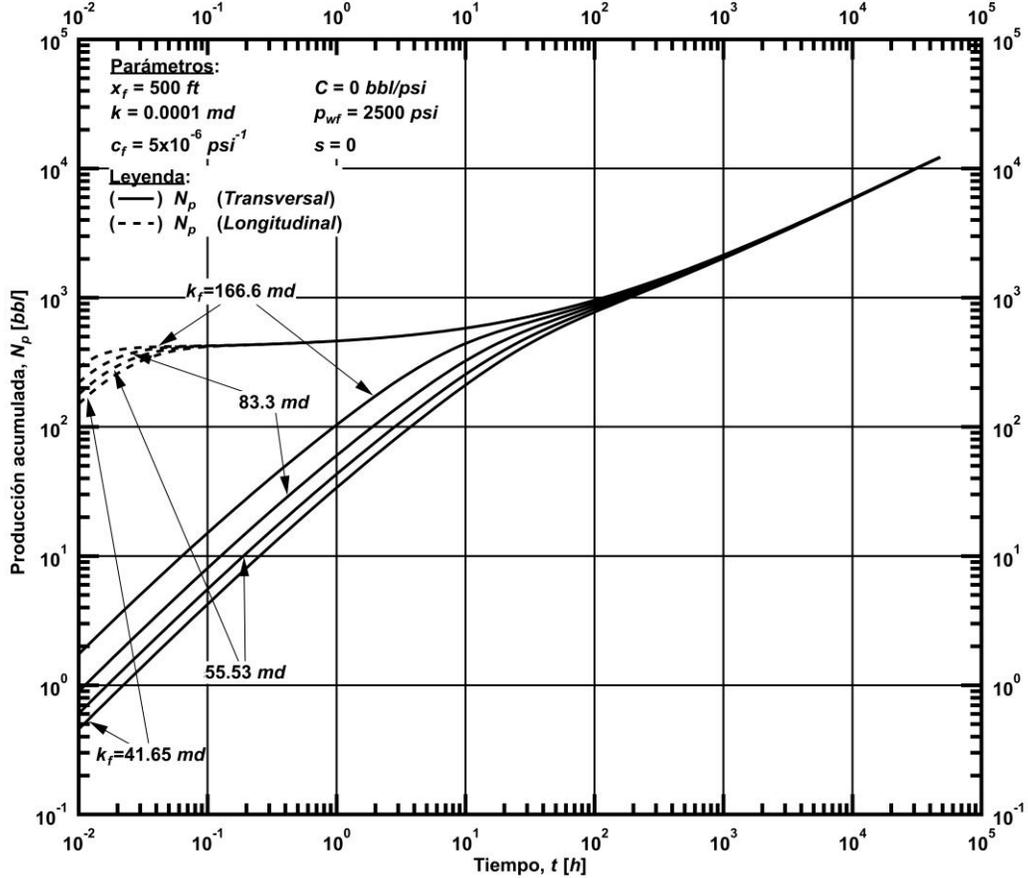


Figura 4.22 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

**Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad de la Fractura en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.23** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $k_f$

## 4.2. Influencia de las propiedades del yacimiento en el desempeño

En esta sección presentamos el análisis de sensibilidad y los resultados a partir de la variación de parámetros del yacimiento tales como permeabilidad del yacimiento ( $k$ ), y compresibilidad de la formación ( $c_f$ ). Analizamos su influencia en los dos escenarios clásicos: (1) un pozo produciendo a gasto constante, y (2) un pozo produciendo a presión constante.

### 4.2.1. Análisis de sensibilidad de la permeabilidad del yacimiento ( $k$ )

En el presente caso, los resultados de sensibilidad al variar dentro del simulador la permeabilidad del yacimiento ( $k$ ) que se muestra como caso base en la **Tabla 4.1**; se varía de la siguiente manera: (1) una centésima parte del valor del caso base ( $k/100$ ), (2) cien veces el valor del caso base ( $100k$ ), y (3) diez mil veces el valor del caso base ( $10000k$ ). Nótese que en el caso (3), la conductividad de la fractura deja de ser infinita y se obtiene un comportamiento que se discute posteriormente.

#### Influencia en el comportamiento de la caída de la presión en el pozo

##### *Fractura Longitudinal*

La **Fig. 4.24** para el caso donde la permeabilidad ( $k$ ) se reduce en dos órdenes de magnitud lo que ocasiona que la producción sólo sea de la fractura y esto se refleja en el comportamiento pseudoestacionario dado que se tiene una pendiente unitaria en la derivada.

Cuando la permeabilidad del yacimiento aumenta en dos órdenes de magnitud nuevamente vemos la pendiente unitaria que dura hasta aproximadamente 0.1 horas, posteriormente hay un periodo de transición y empieza el aporte del yacimiento de 10 a 200 horas con una geometría lineal, a las 600 horas de flujo vemos el reconocimiento de fronteras en el yacimiento iniciando un periodo pseudoestacionario. En este caso tal que estamos aumentando la permeabilidad del yacimiento los periodos de flujo inician antes del tiempo en que sucedería en un yacimiento de permeabilidad menor.

En el caso donde aumenta cuatro órdenes de magnitud, el yacimiento es tan permeable respecto a la fractura que inmediatamente comienza a dar aporte a la misma, viéndose un periodo de flujo lineal, donde aporta la fractura y el yacimiento hasta 10 horas, posteriormente comienza el periodo de flujo pseudoestacionario.

La caída de presión en la **Fig. 4.24** tiende a disminuir mientras la permeabilidad del yacimiento aumenta, sin embargo, mientras el tiempo aumenta, las caídas de presión son más parecidas debido a que vemos cómo actúan las fronteras para cada caso.

### *Fractura Transversal*

La **Fig. 4.25** en el caso donde la permeabilidad ( $k$ ) se reduce en dos órdenes de magnitud, primero se ve un periodo de flujo lineal, correspondiente a la fractura antes de 1 hora, posteriormente, se ve un flujo pseudoestacionario que se atribuye a la permeabilidad tan baja del yacimiento.

Dado que los parámetros de la fractura se mantienen constantes a tiempos menores a 0.1 horas no se ven cambios significativos en la caída de presión para los diferentes casos de permeabilidad del yacimiento.

Sólo cuando la permeabilidad del yacimiento ( $k$ ) se aumenta en cuatro ordenes de magnitud se ven 3 diferentes periodos de flujo: (1) bilineal para  $t < 10$  horas, (2) lineal de formación  $t < 100$  horas y (3) pseudoestacionario para  $t > 1000$  horas

### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

En la **Fig. 4.26** las curvas de cada permeabilidad del yacimiento para fracturas transversales y longitudinales tienden a ser las mismas cuando acaban los efectos de estos tipos de fracturas. Y tal como se ve la caída de presión es mayor en la fractura transversal hasta que en cada caso empieza a dominar la permeabilidad del yacimiento, mientras que en los primeros pasos de tiempo es una combinación de ambas (tipo de fractura y permeabilidad del yacimiento ( $k$ )). Algo a denotar en este análisis es que todos los casos convergen en el estado pseudoestacionario (pendiente unitaria).

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad del Yacimiento en el Comportamiento de la Caída Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

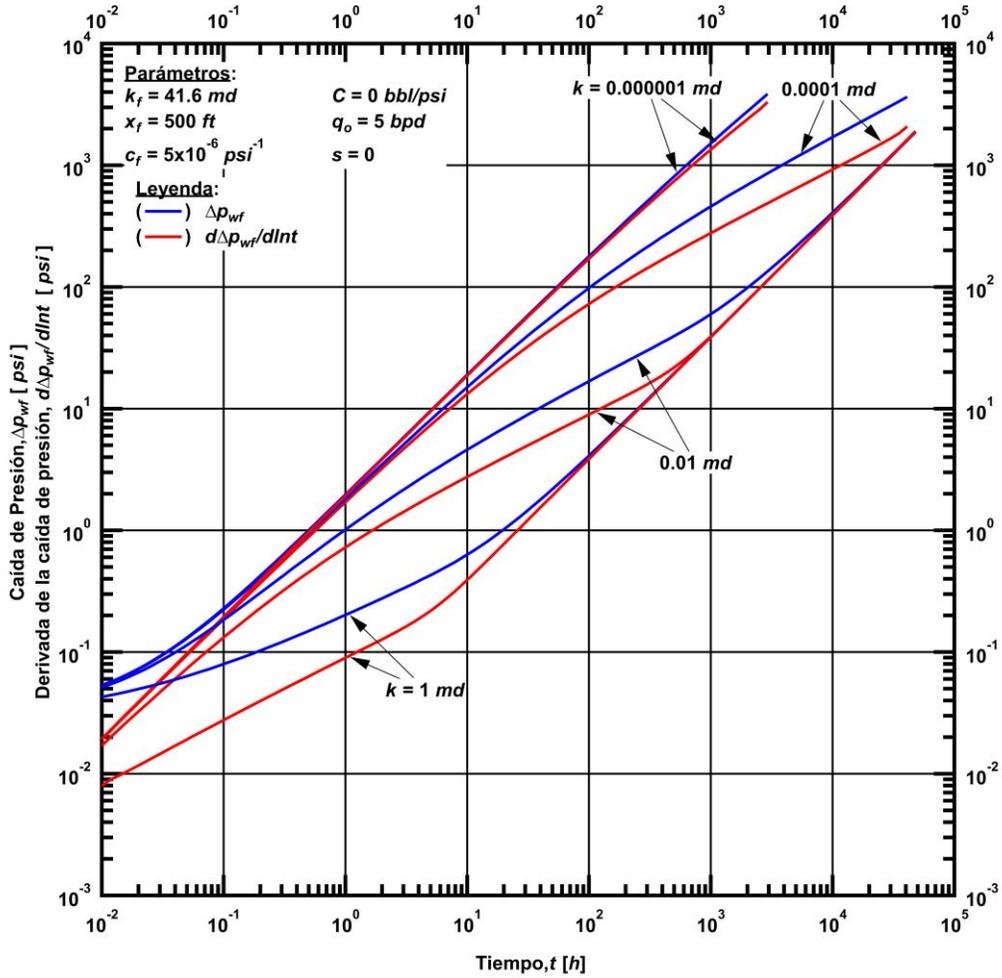
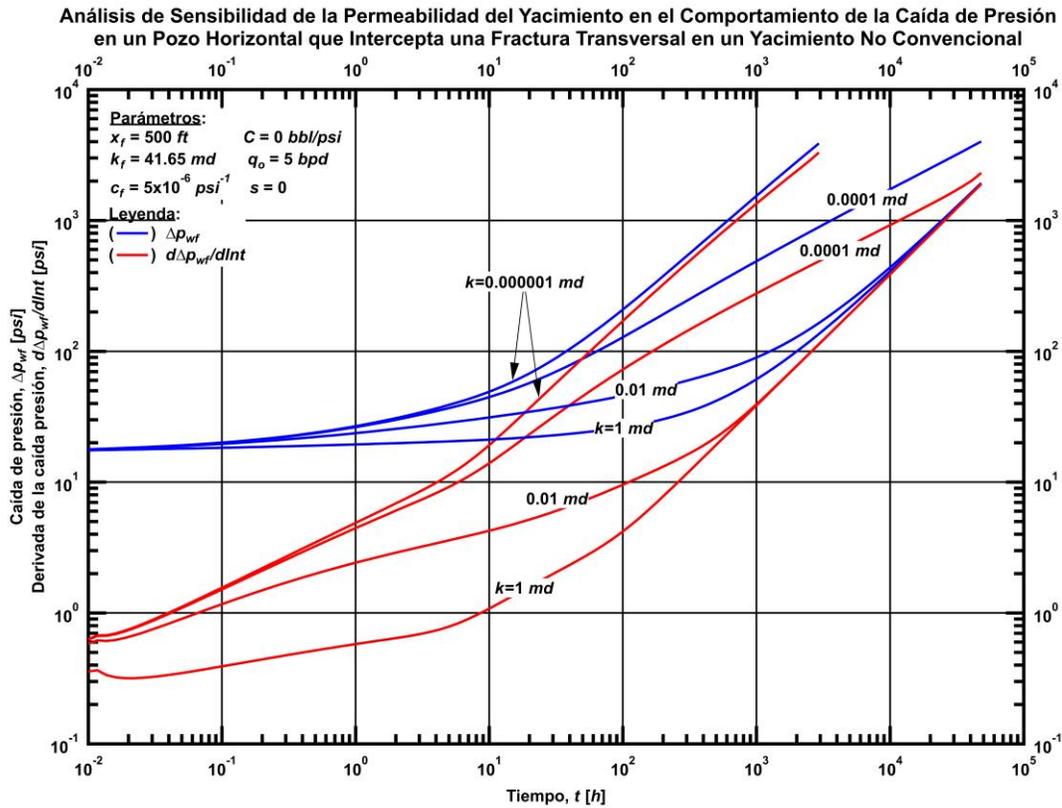
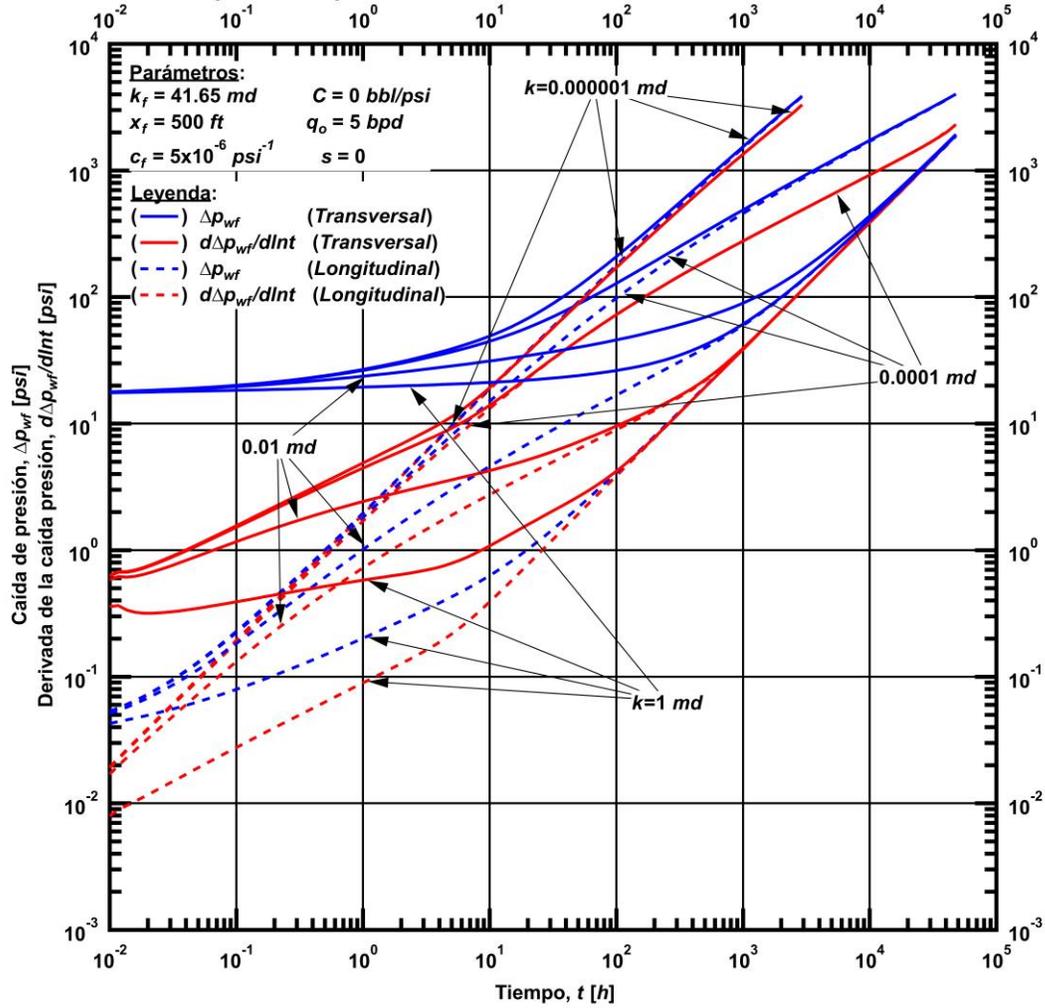


Figura 4.24 — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $k$



**Figura 4.25** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $k$

**Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad del Yacimiento en el Comportamiento de la Caída de Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.26** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $k$

## Influencia en el comportamiento del gasto

### *Fractura Longitudinal*

En la **Fig. 4.27** se observa que a mayor permeabilidad del yacimiento ( $k$ ) existe un mayor gasto, pero una declinación más rápida, tal que en la producción acumulada (**Fig. 4.28**) se llega en menor tiempo a volumen total recuperado.

Es importante notar que cuando la derivada comienza a aproximarse a la función de gasto y lo cruza de abajo hacia arriba, este comienza a declinar de manera más abrupta, rompiendo la estabilización del gasto. De la misma manera cuando la derivada cruza de arriba hacia abajo empieza un periodo de estabilización del gasto.

Es notable que en la **Fig.4.28** una permeabilidad muy baja del yacimiento ( $k=0.000001$  mD) es una variable que afecta a la producción acumulada ( $N_p$ ), ya que el aporte del yacimiento es mínimo matemáticamente (*i.e.* tal como lo dice la ley de Darcy seguirá existiendo un gasto mientras haya una caída de presión y una permeabilidad mayor a cero, esto sin tomar en cuenta efectos inerciales y efectos de presiones capilares).

### *Fractura Transversal*

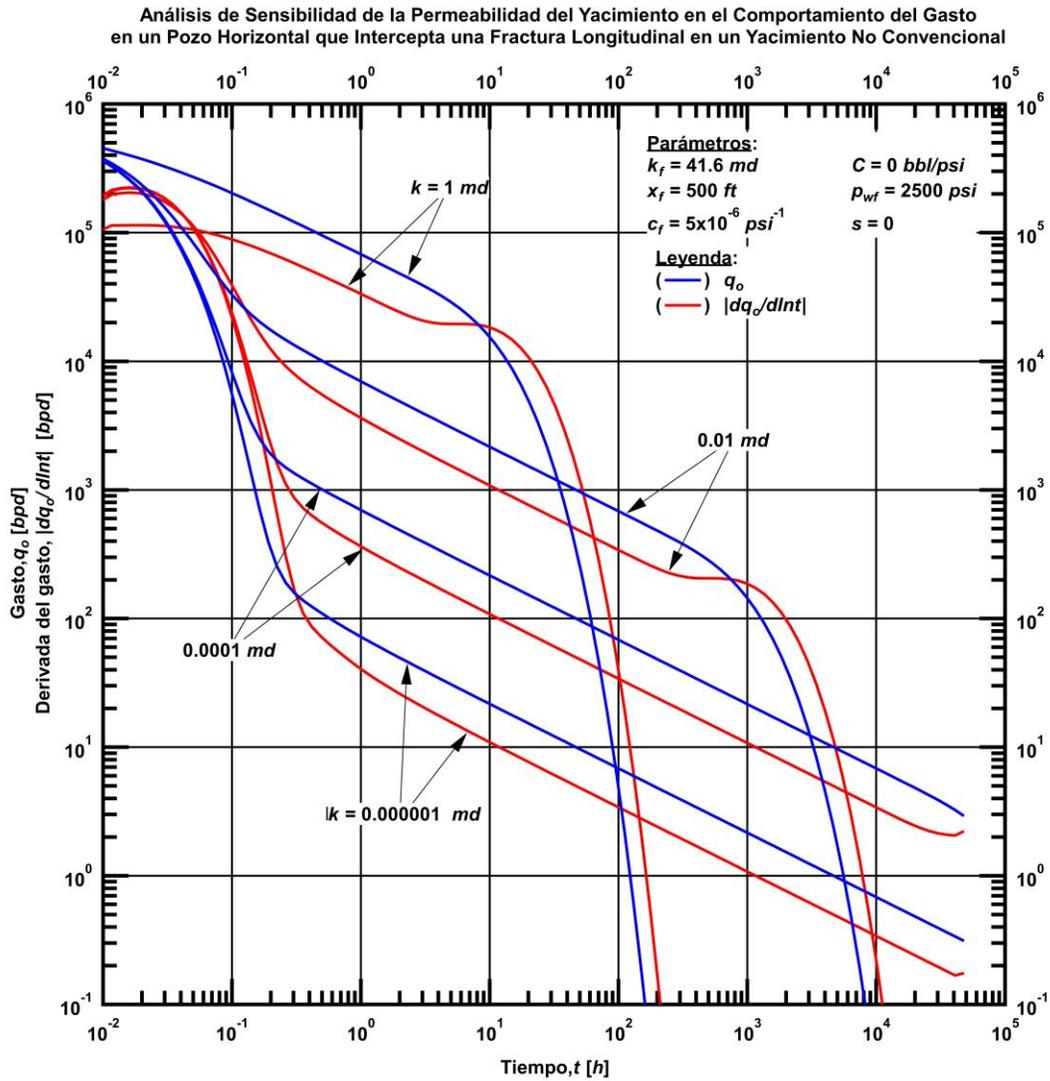
La **Fig. 4.29** muestra el resultado de variar la permeabilidad del yacimiento ( $k$ ), donde al tratarse de una fractura transversal vemos los efectos de ésta durante tiempos menores a 100 horas, posteriormente sucede algo similar a lo observado en la **Fig.4.27**. En un tiempo mayor a 1000 horas inicia una declinación muy rápida cuando  $k>0.01$  mD comparada con los casos donde  $k<0.0001$  mD.

La **Fig.30** muestra que para los casos donde  $k>0.01$  mD, se obtiene el volumen recuperable del yacimiento en el tiempo de análisis, ya que las curvas tienen una tendencia plana.

### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

En la **Fig. 4.31** la variación de la permeabilidad del yacimiento ( $k$ ) hace que en la fractura longitudinal se tenga una declinación muy notable a tiempos muy cortos, tal que a 100 horas una fractura longitudinal en un yacimiento con 1 mD de permeabilidad es poco conveniente, cabe destacar que todos los casos en la fractura longitudinal declinan mucho antes que las transversales debido al reconocimiento de fronteras. En los casos restantes los tipos de fractura con la misma permeabilidad de yacimiento ( $k$ ) convergen al mismo gasto ( $q$ ).

En la **Fig.4.32** el comportamiento de una fractura longitudinal, en cualquier tipo de yacimiento representa una mejor inversión que una fractura transversal, debido a que se tiene mayor producción acumulada en menores tiempos, por lo que dependiendo del precio del crudo, es la decisión de hacer una o la otra, si se espera una subida de precios, es mejor una fractura transversal, si se espera una caída es mejor una longitudinal, además de tomar en cuenta el valor actual del dinero.



**Figura 4.27** — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $k$

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad del Yacimiento en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

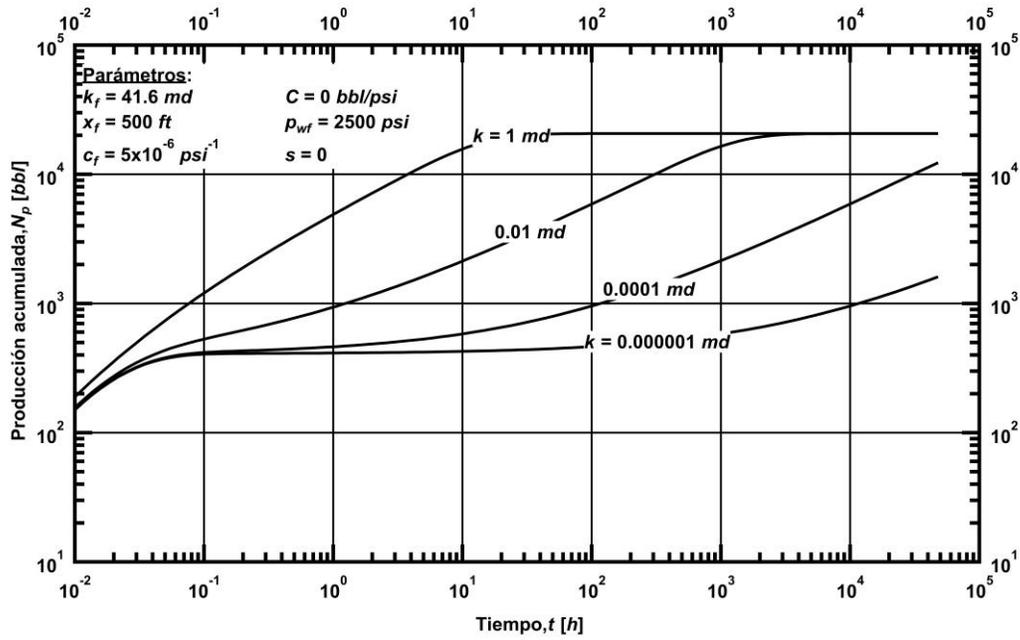
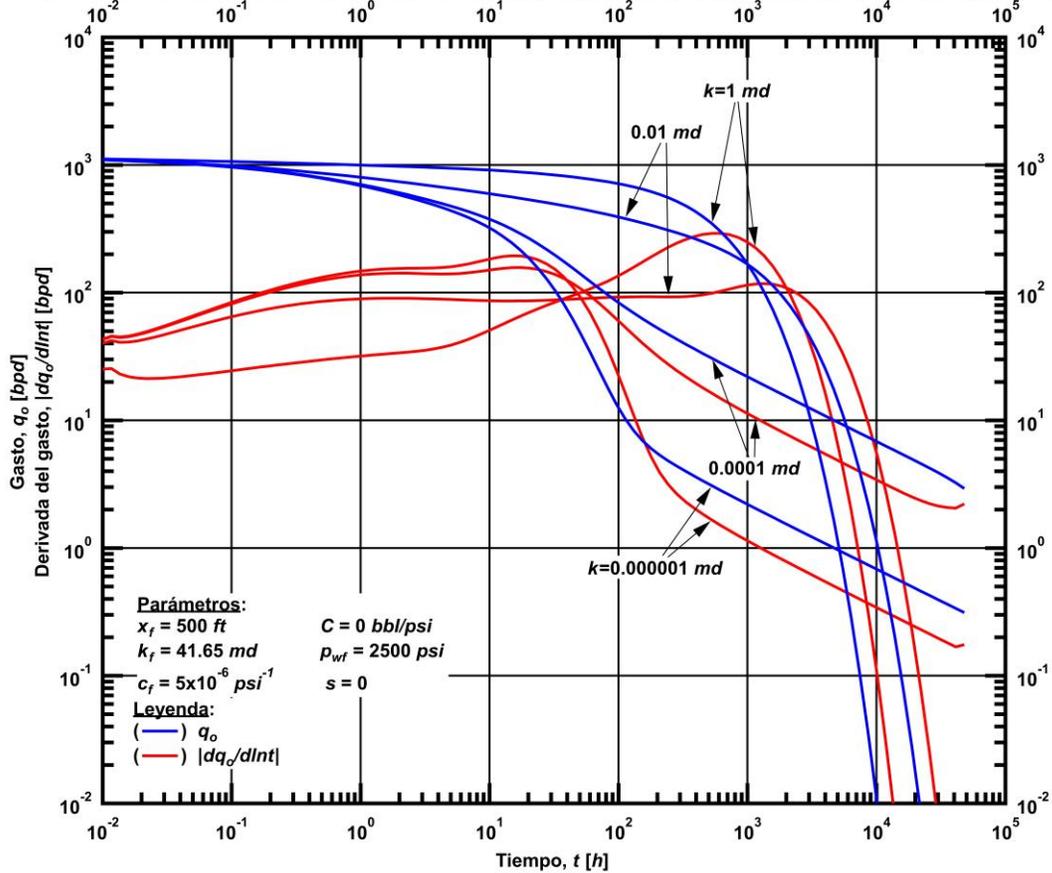


Figura 4.28 — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $k$

**Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad del Yacimiento en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.29** — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $k$

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad del Yacimiento en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional

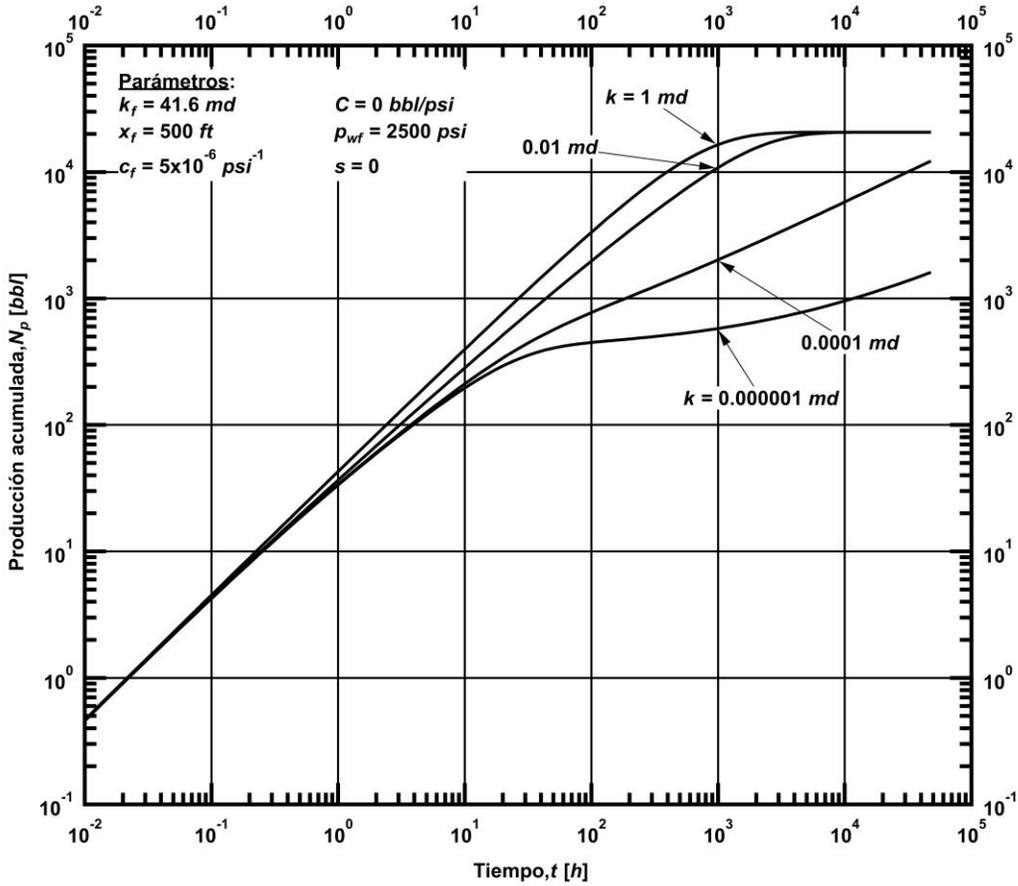


Figura 4.30 — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $k$

Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad del Yacimiento en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional

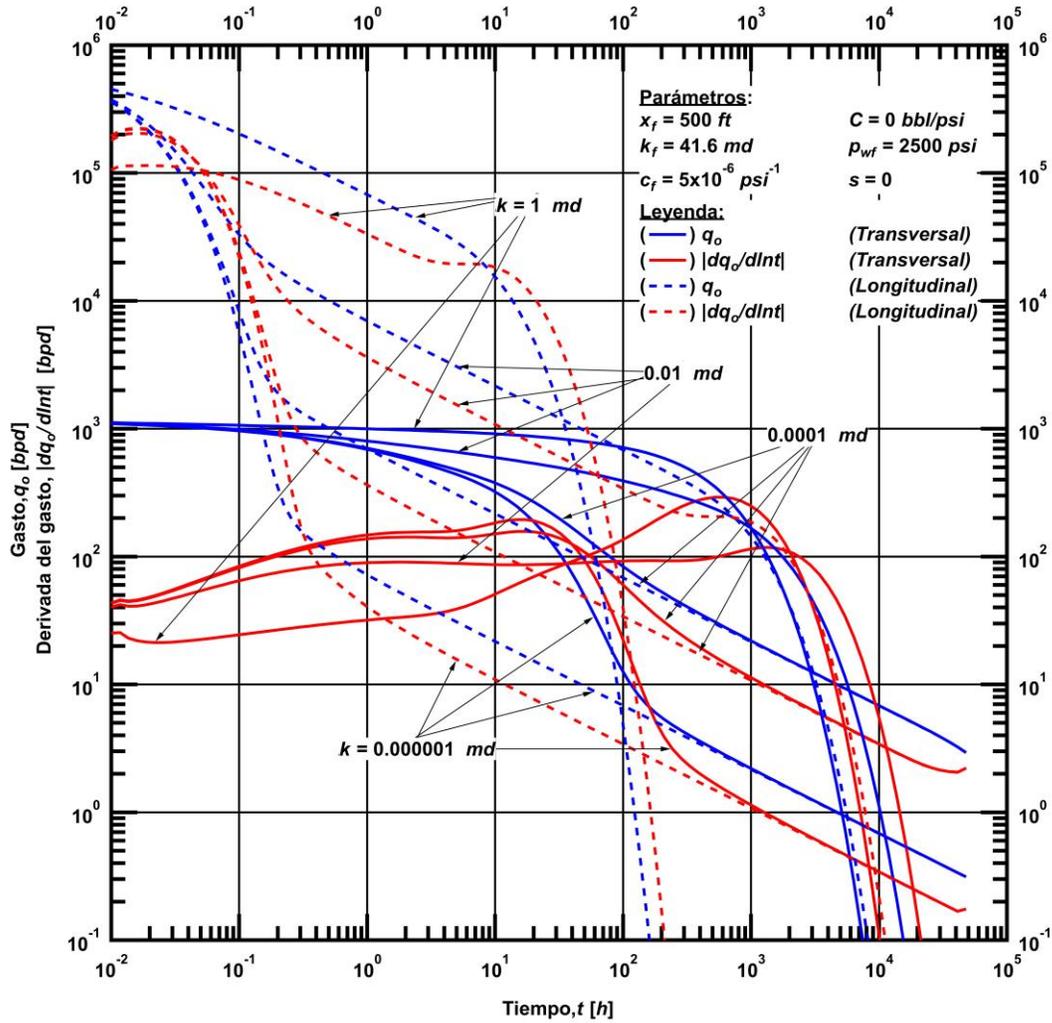
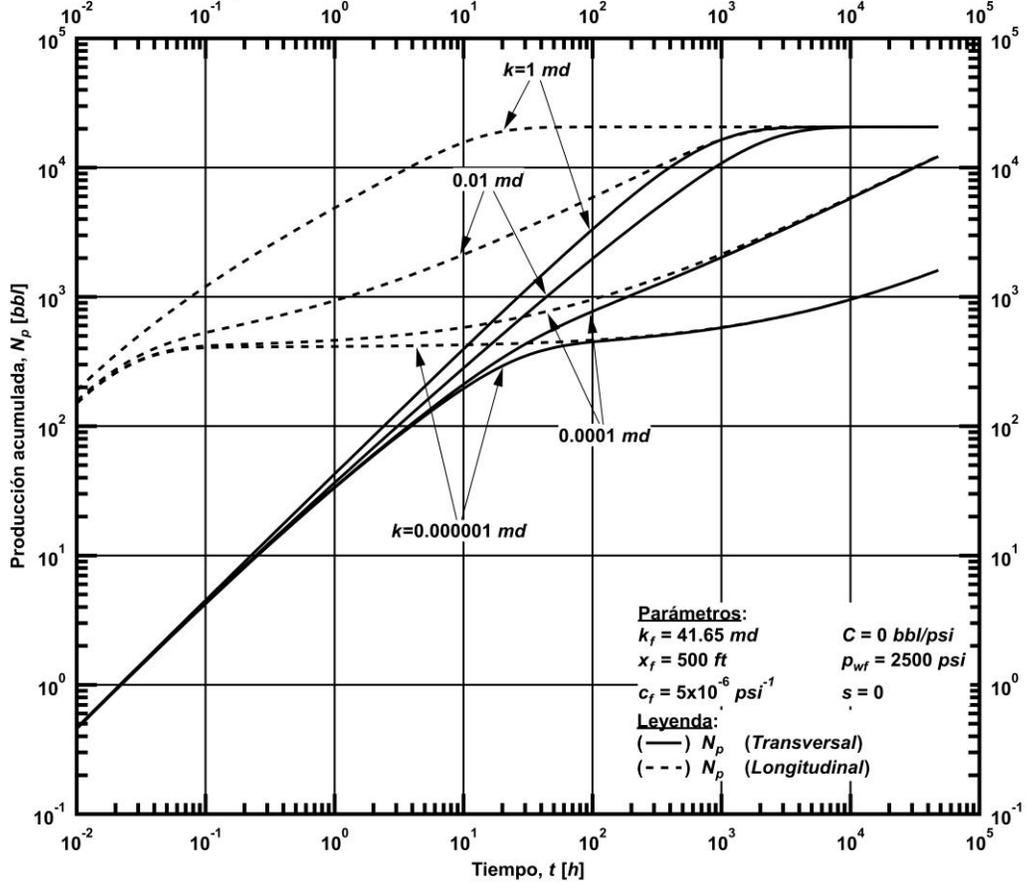


Figura 4.31 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $k$

**Análisis de Sensibilidad de la Permeabilidad del Yacimiento en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.32** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $k$

#### 4.2.2. Análisis de sensibilidad de la compresibilidad de la formación ( $c_f$ )

Similar a los casos anteriores, para el análisis de sensibilidad de la compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) utilizamos como caso base el dato proporcionado en la **Tabla 4.1**. Este parámetro lo variamos de la siguiente manera: (1) diez veces el valor del caso base ( $10 c_f$ ) y (2) cien veces el valor del caso base ( $100 c_f$ ).

En esta sección intentamos incluir un escenario en el cual definimos a la compresibilidad como una función de la presión  $c_f(p)$ . Sin embargo, no encontramos alguna forma/función para implementarlo, por lo que esta discusión fue excluida. Se dio la propuesta de comunicarse con el equipo de SINTEF, pero hasta el día de finalización de este trabajo, no se obtuvo respuesta.

##### Influencia en el comportamiento de la caída de la presión en el pozo

###### *Fractura Longitudinal*

En la **Fig. 4.33** se observa que a menor compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) mayor caída de presión. Las curvas de caída de presión en un tiempo menor a 0.1 horas tienen a converger debido al periodo de flujo en la fractura.

###### *Fractura Transversal*

Al igual que en la **Fig. 4.33**, la **Fig. 4.34** muestra el mismo comportamiento donde a menor compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) mayor caída de presión. En este caso vemos que los efectos de la fractura son más duraderos por lo que a tiempos menores a 1 hora, convergen a un mismo punto, ya que la compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) es un parámetro propio del yacimiento.

###### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

La caída de presión que se presenta en la **Fig. 4.35** para la fractura longitudinal comparado con la fractura transversal es menor a tiempos menores a 100 horas. Posteriormente para todos los casos calculados, empieza la convergencia de las curvas de compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) en espacios de tiempo diferentes, con lo cual identificamos que, a una compresibilidad de la formación más grande, el tipo de diseño con fractura longitudinal tendrá menor caída de presión.

Análisis de Sensibilidad de la Compresibilidad de la Formación en el Comportamiento de la Caída Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

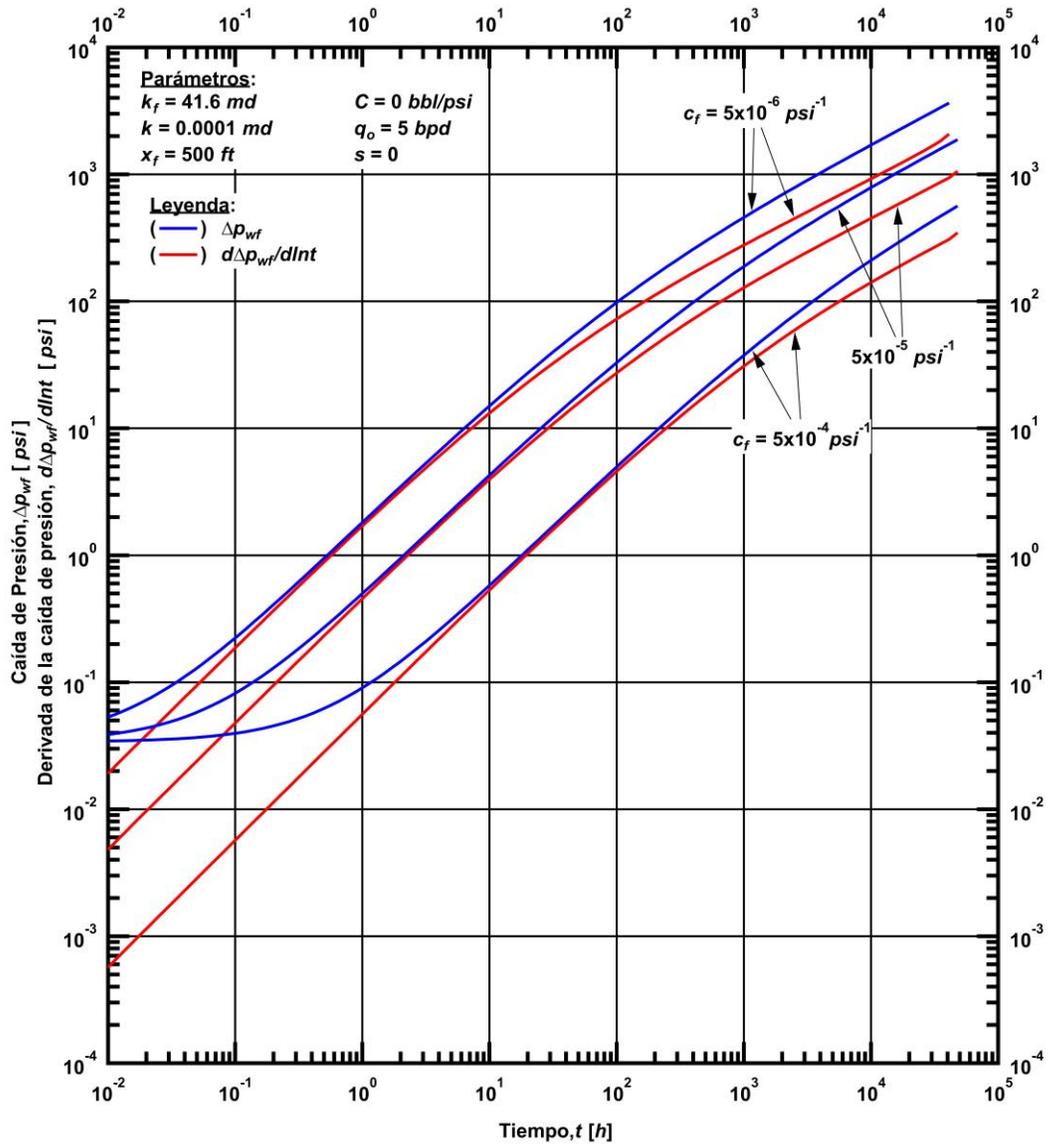
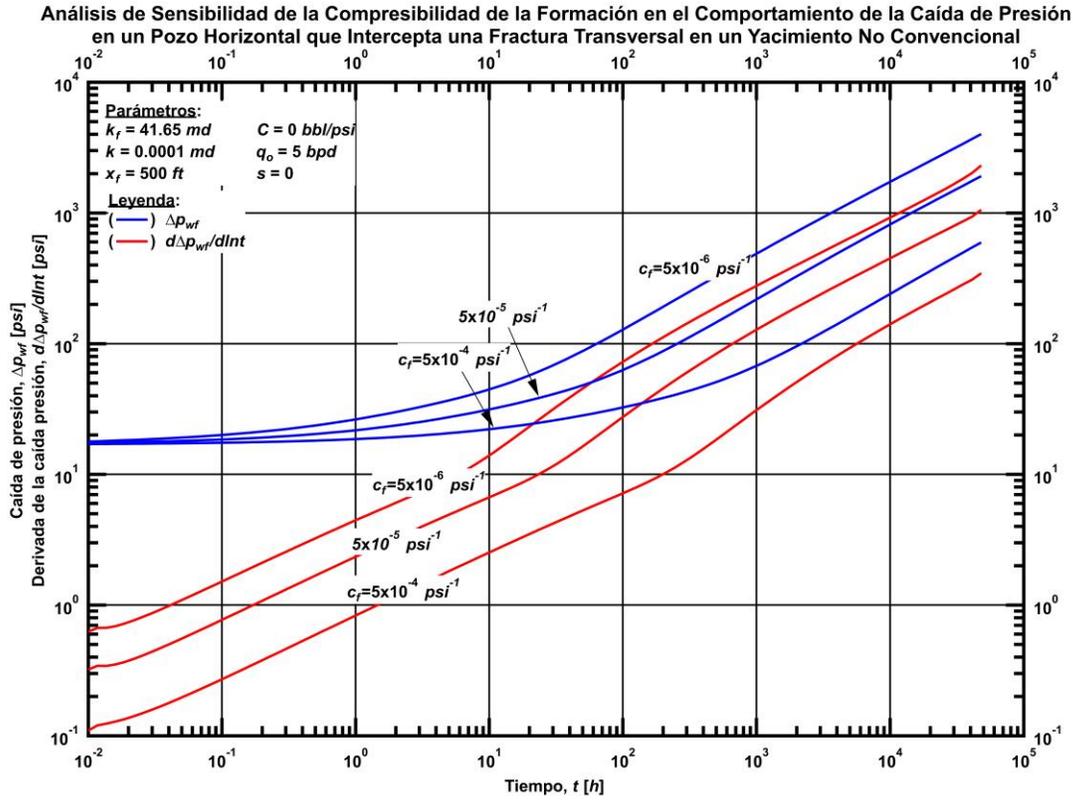
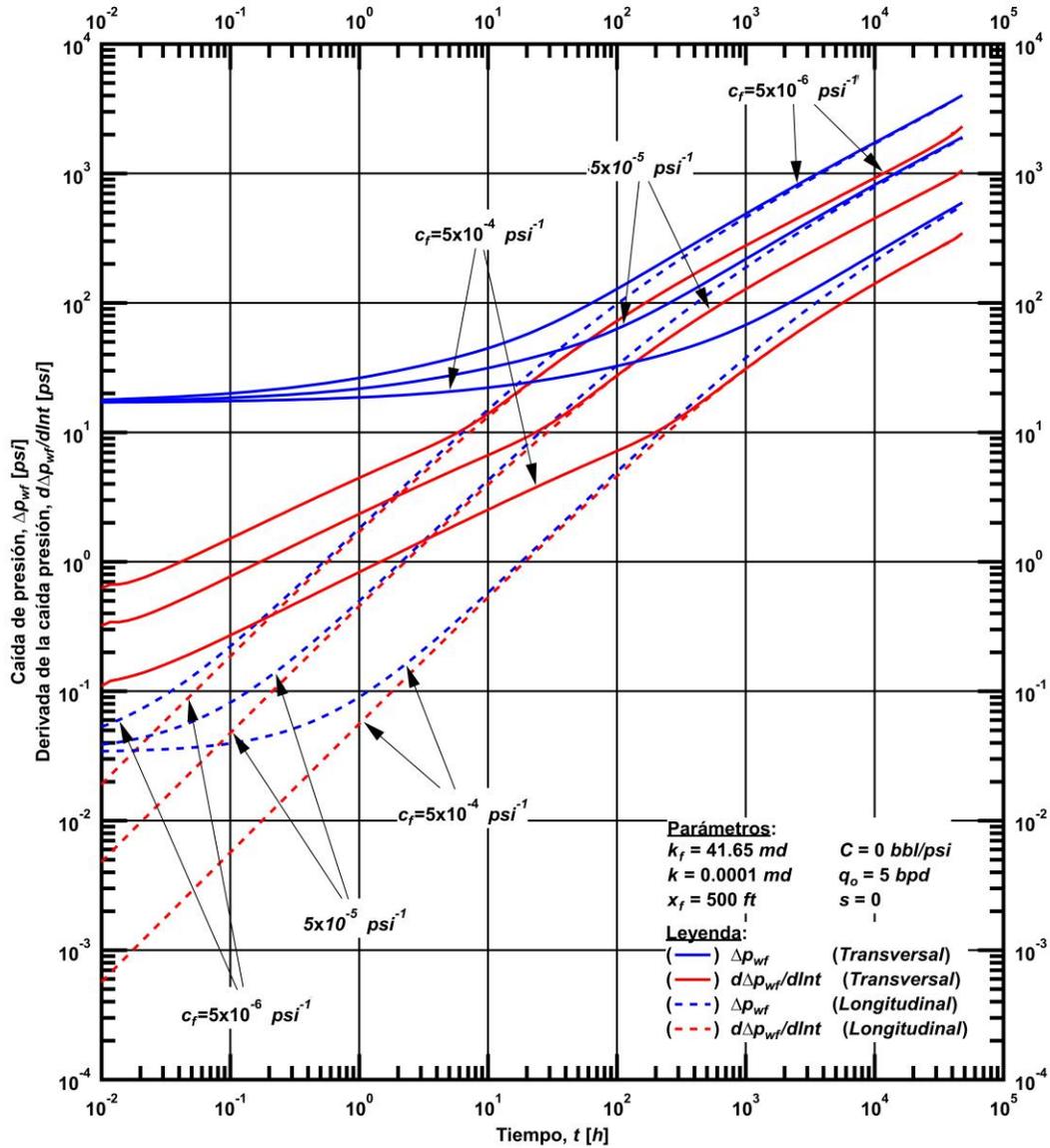


Figura 4.33 — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$



**Figura 4.34** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$

**Análisis de Sensibilidad de la Compresibilidad de la Formación en el Comportamiento de la Caída de Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.35** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$

## Influencia en el comportamiento del gasto

### *Fractura Longitudinal*

Al analizar la **Fig. 4.36** a lo largo del tiempo para diferentes compresibilidades de la formación ( $c_f$ ) notamos que mientras aumenta este parámetro, la producción tiende a ser mayor y los efectos de la fractura se aprecian por más tiempo. En general, formaciones más compresibles presentarán un mayor gasto (manteniendo el resto de los parámetros iguales).

Consecuentemente, la **Fig.4.37** muestra que la producción acumulada será mayor cuando la compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) sea mayor, debido a que el aumento de volumen de la formación permite que los fluidos puedan moverse no sólo por su expansión, sino también por la expansión de la formación como método de empuje

### *Fractura Transversal*

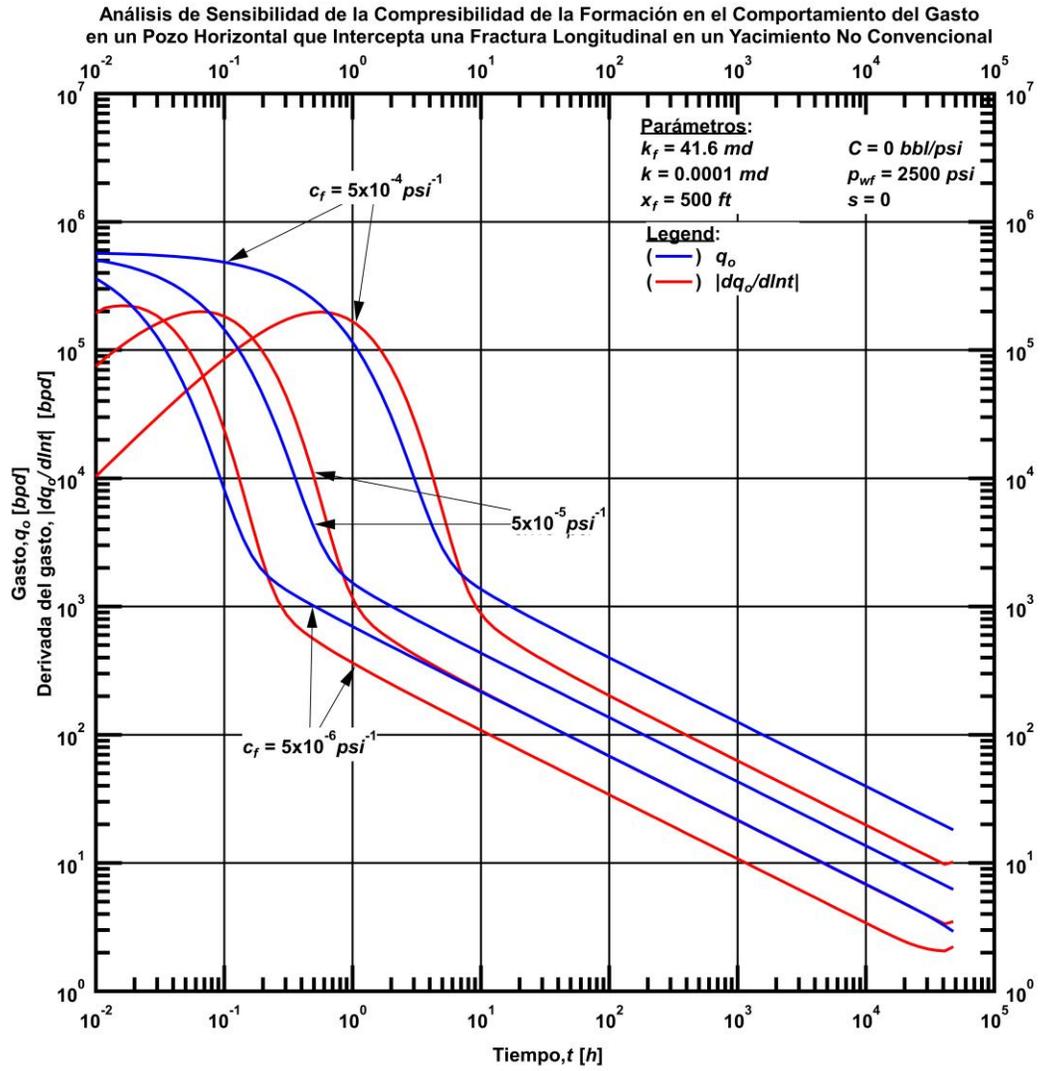
En la **Fig. 4.38** los efectos de fractura variando la compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) tienen una duración más prolongada. Comparando la **Fig. 4.38** con **Fig. 4.36** ocurre el mismo comportamiento tal que la compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) tiende a almacenar mayor volumen de fluido cuando ésta aumenta.

Para la **Fig . 4.39** podemos ver que tendremos mayor producción acumulada a mayor compresibilidad de la formación ( $c_f$ ).

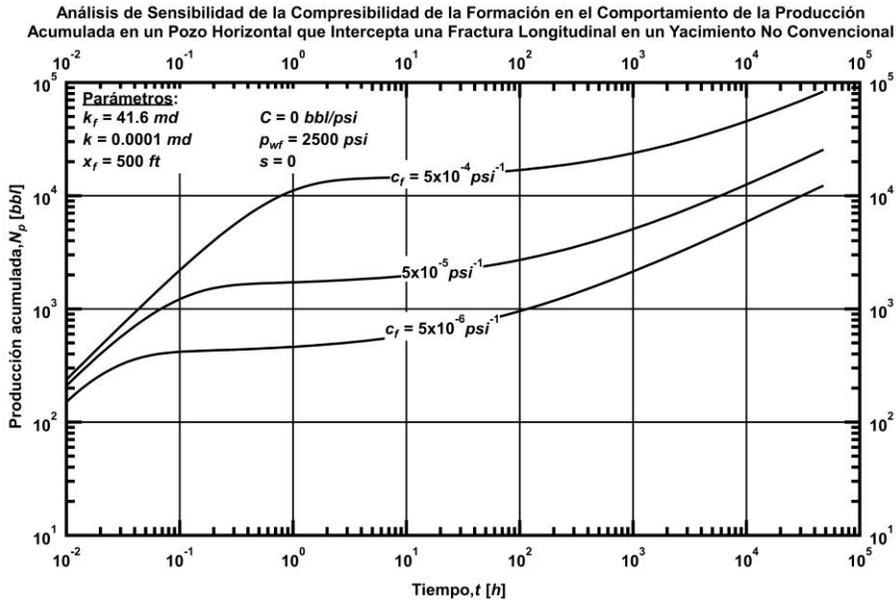
### *Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales*

Comparando el gasto entre la fractura longitudinal y la fractura transversal (**Fig. 4.40**) se aprecia que la fractura transversal tiene un gasto estabilizado comparado con la fractura longitudinal. Cabe destacar que a mayor compresibilidad de la formación ( $c_f$ ), el gasto tarda mayor tiempo en converger entre los tipos de fracturas.

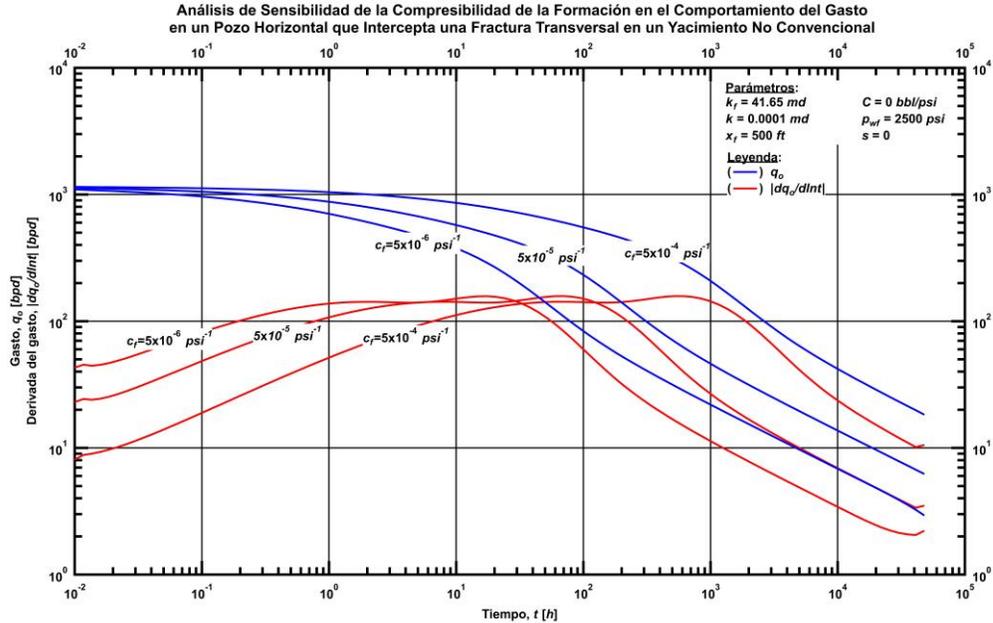
Derivado de los análisis independientes de cada tipo de fractura, es evidente en la **Fig.4.41** que la fractura longitudinal tiene una mayor producción acumulada a tiempos cortos debido a que es un efecto gobernado por la fractura, no obstante, al llegar a tiempos gobernados por el yacimiento, ambos tipos de fractura tienen la misma producción acumulada ya que el parámetro que se varía sólo afecta al yacimiento.



**Figura 4.36** — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$

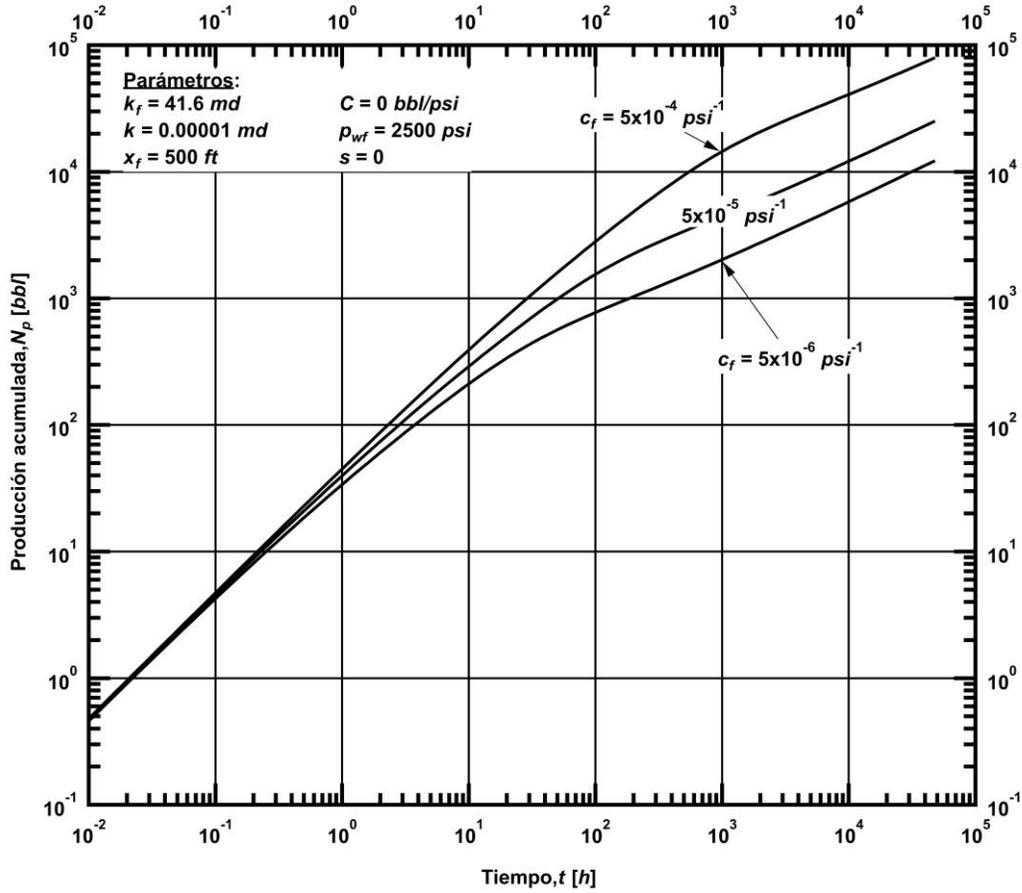


**Figura 4.37** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$



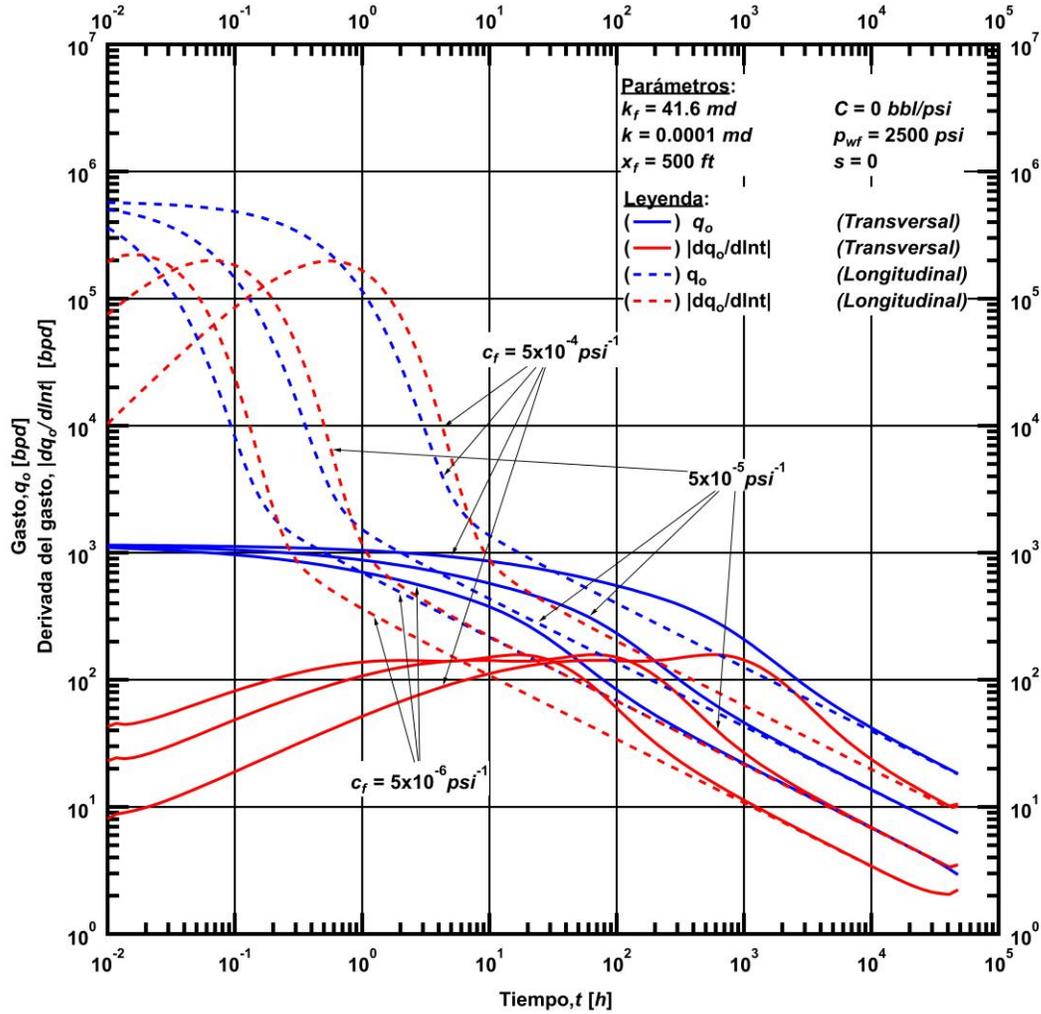
**Figura 4.38** — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$

**Análisis de Sensibilidad de la Compresibilidad de la Formación en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



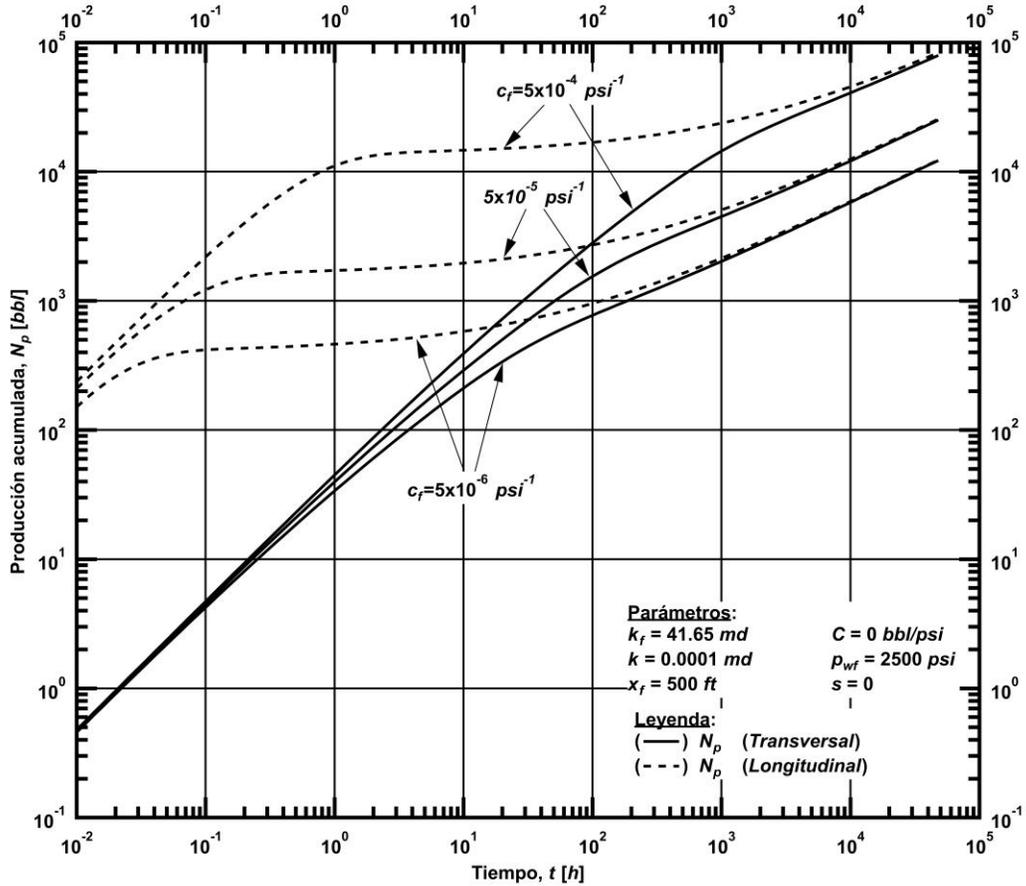
**Figura 4.39** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$

**Análisis de Sensibilidad de la Compresibilidad de la Formación en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.40** — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$

**Análisis de Sensibilidad de la Compresibilidad de la Formación en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.41** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $c_f$

#### 4.3. Análisis de sensibilidad de las condiciones de producción: gasto ( $q$ ) y presión de fondo fluyendo ( $p_{wf}$ )

En esta sección presentamos análisis de sensibilidad para los parámetros relacionados con las condiciones de producción del pozo.

##### 4.3.1. Análisis de sensibilidad del gasto ( $q$ )

En este caso, los resultados de sensibilidad al variar dentro de la estructura del pozo el gasto como parámetro constante ( $q$ ) que se muestra como caso base en la **Tabla 4.1**; se varía de la siguiente manera: (1) tres cuartos el valor del caso base ( $3q/4$ ), (2) la mitad del valor del caso base ( $q/2$ ) y (3) un cuarto del valor del caso base ( $q/4$ ).

##### Fractura Longitudinal

Con base en la **Fig. 4.42** observamos que al variar el gasto obtenemos que la tendencia del caso base se mantiene, es decir, todos los casos presentan la misma forma y tendencias que las del caso base. De hecho, sería posible presentar todas las curvas al graficar la caída de presión entre el gasto correspondiente ( $\Delta p/q$ ). Sin embargo, para fines de mostrar explícitamente la influencia del gasto en la caída de presión hemos decidido presentar cada caso por separado.

##### Fractura Transversal

Para la **Fig. 4.43** que corresponde al análisis de sensibilidad del gasto para una fractura transversal ocurre el mismo comportamiento que se describió anteriormente en un caso con fractura longitudinal, donde a menor gasto obtendremos una menor caída de presión. Hemos decidido mostrar estos casos de forma independiente a la fractura longitudinal, para mostrar la influencia del gasto en la caída de presión, ya que como se menciona arriba podríamos hacer un análisis de la caída de presión entre el gasto correspondiente ( $\Delta p/q$ ).

##### Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales

Tal como se presenta en la **Fig. 4.44**, para ambos tipos de fracturas la caída de presión disminuye conforme el gasto es menor, y cuando el tiempo es menor a 100 horas vemos que el efecto de la fractura transversal es mayor sin embargo es más estable y pasado este tiempo todos los casos empiezan a converger (*i.e.* tienden a dar los mismos resultados).

Análisis de Sensibilidad del Gasto en el Pozo en el Comportamiento de la Caída Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

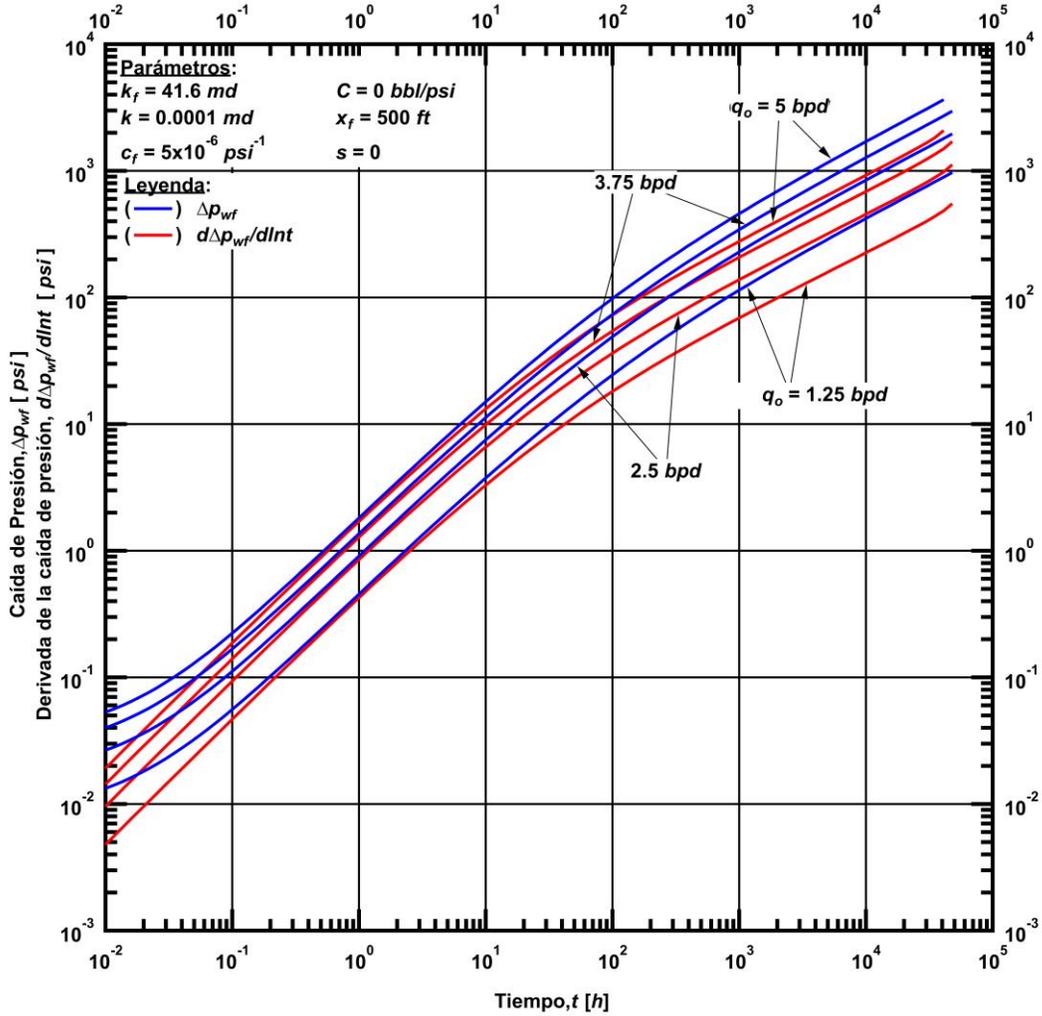
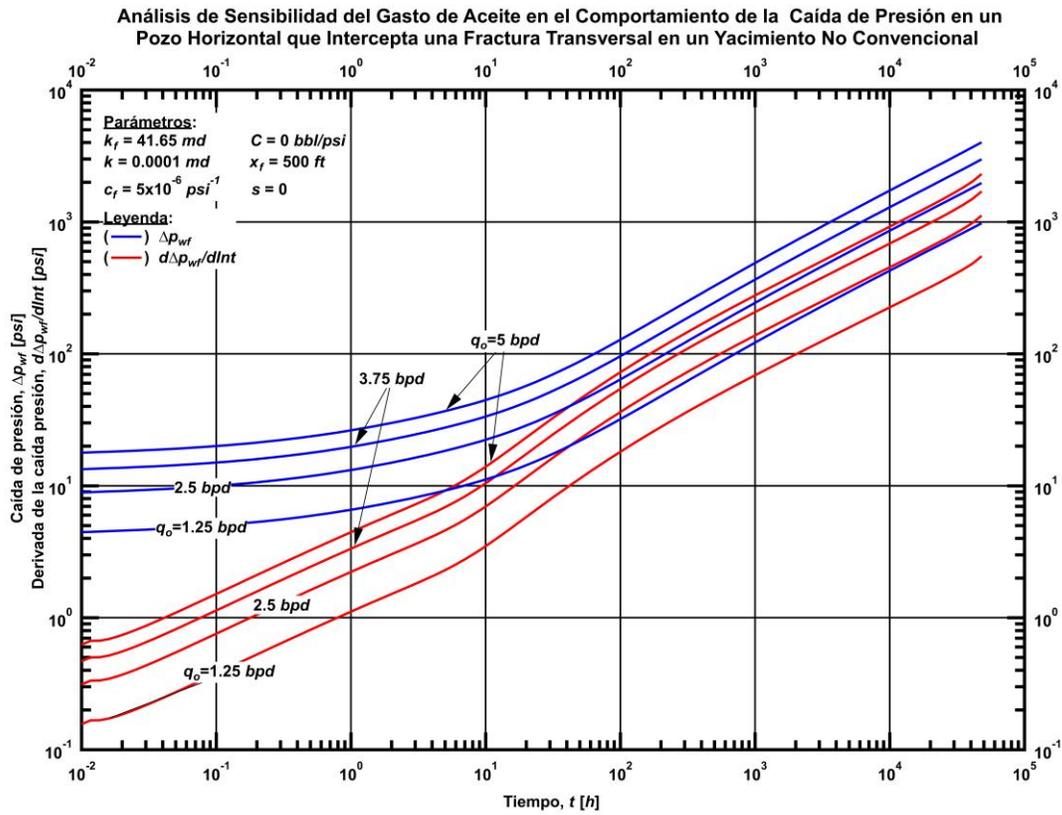
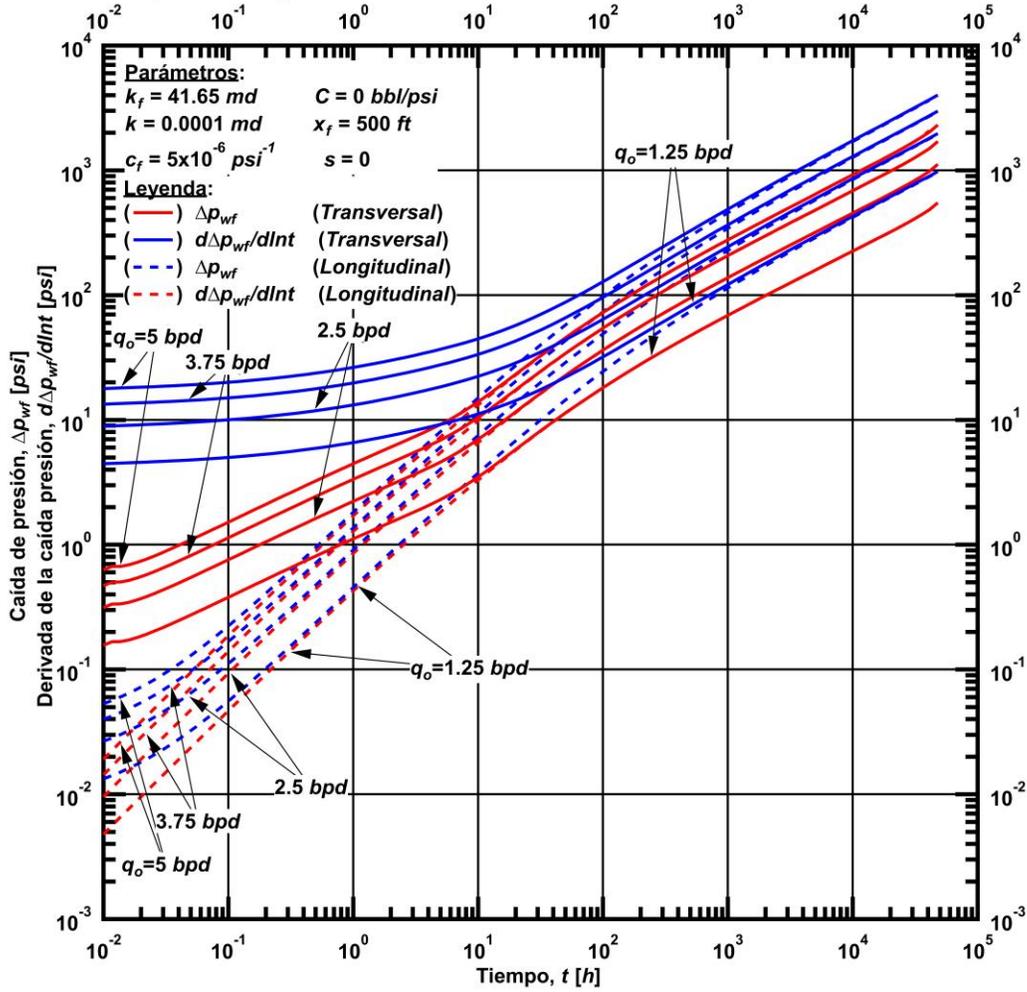


Figura 4.42 — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $q$ .



**Figura 4.43** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $q$

**Análisis de Sensibilidad del Gasto de Aceite en el Comportamiento de la Caída de Presión en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.44** — Caída de presión y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $q$

#### 4.3.2. Análisis de sensibilidad de la presión de fondo fluyendo ( $p_{wf}$ )

Para este escenario analizamos la influencia de la presión de fondo fluyendo en el comportamiento transitorio de un pozo horizontal fracturado. Igual que con los casos anteriores se tomó como base la presión de fondo fluyendo ( $p_{wf}$ ) provista en la **Tabla 4.1** y variamos dicho parámetro de la manera siguiente: (1) el valor del caso base más 500 psi ( $p_{wf} + 500$  psi), (2) el valor del caso base más 1000 psi ( $p_{wf} + 1000$  psi) y (3) el valor del caso base más 1500 psi ( $p_{wf} + 1500$  psi).

##### Fractura Longitudinal

En la **Fig. 4.45** observamos que la producción del yacimiento mantiene un patrón de gasto similar al caso base, solo que las magnitudes varían directamente proporcional ya que a un mayor  $p_{wf}$  la caída de presión es menor y por tanto el gasto disminuye.

En la **Fig. 4.46** la variación de  $p_{wf}$  sólo implica un desplazamiento de la curva de producción acumulada, a mayor  $p_{wf}$ , menor caída de presión, y por tanto menor producción a lo largo del tiempo, sin embargo, la vida productiva es mayor.

##### Fractura Transversal

Similar a los resultados presentados para el caso de la fractura longitudinal (**Fig. 4.45**), para una fractura transversal (**Fig. 4.47**) se muestra que mientras la presión de fondo fluyendo aumenta el gasto también se hace mayor, esto también es debido a que estos efectos se ven en el fondo de pozo que es donde controlamos  $p_{wf}$ .

En la **Fig. 4.48** se ve que mientras la presión de fondo ( $p_{wf}$ ) aumenta, la producción acumulada será menor comparada con el caso base.

##### Comparativo del desempeño entre fracturas longitudinales y transversales

El gasto en la **Fig. 4.49** a tiempos menores a 1000 horas presenta variaciones debido al tipo de fractura, donde la fractura longitudinal tiene mayor gasto, pero una declinación mayor en el periodo gobernado por la fractura, posterior a este tiempo no hay distinción entre el tipo de fractura

En la **Fig. 4.50** la producción acumulada es mayor en la fractura longitudinal, sin embargo, a partir de 1000 horas, los valores se igualan debido a que el radio de estudio hace que la geometría de la fractura sea el parámetro más representativo.

Análisis de Sensibilidad de la Presión de Fondo Fluyente en el Pozo en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

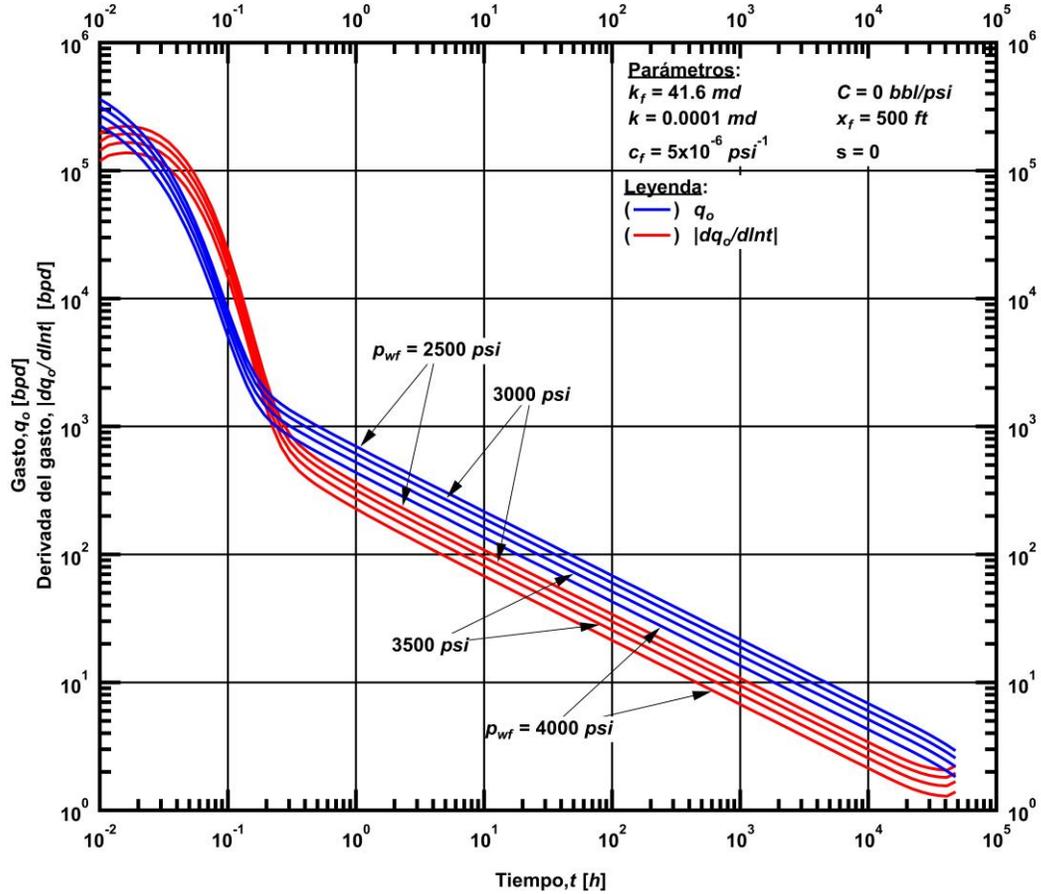


Figura 4.45 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $p_{wf}$

Análisis de Sensibilidad de la Presión de Fondo Fluyente en el Pozo en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal en un Yacimiento No Convencional

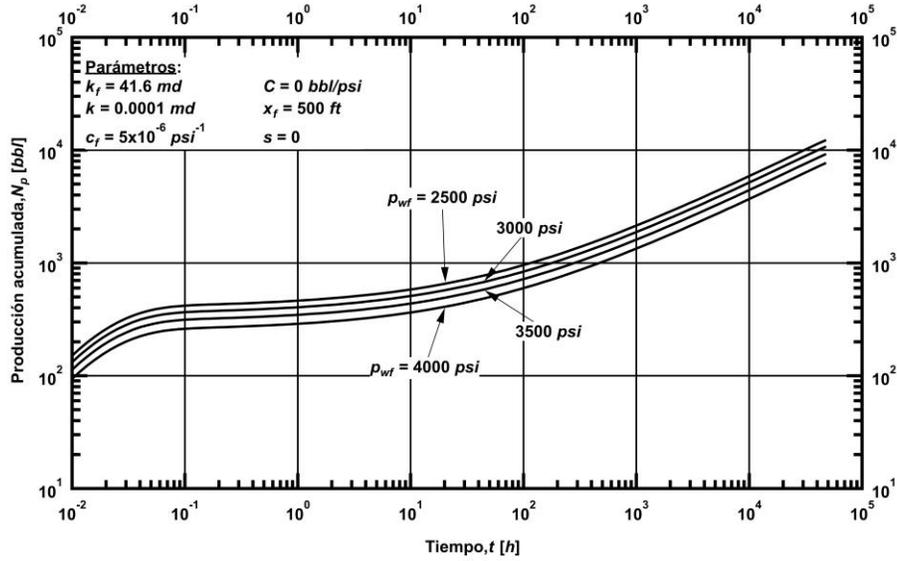


Figura 4.46 — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal respecto al tiempo a diferentes  $p_{wf}$

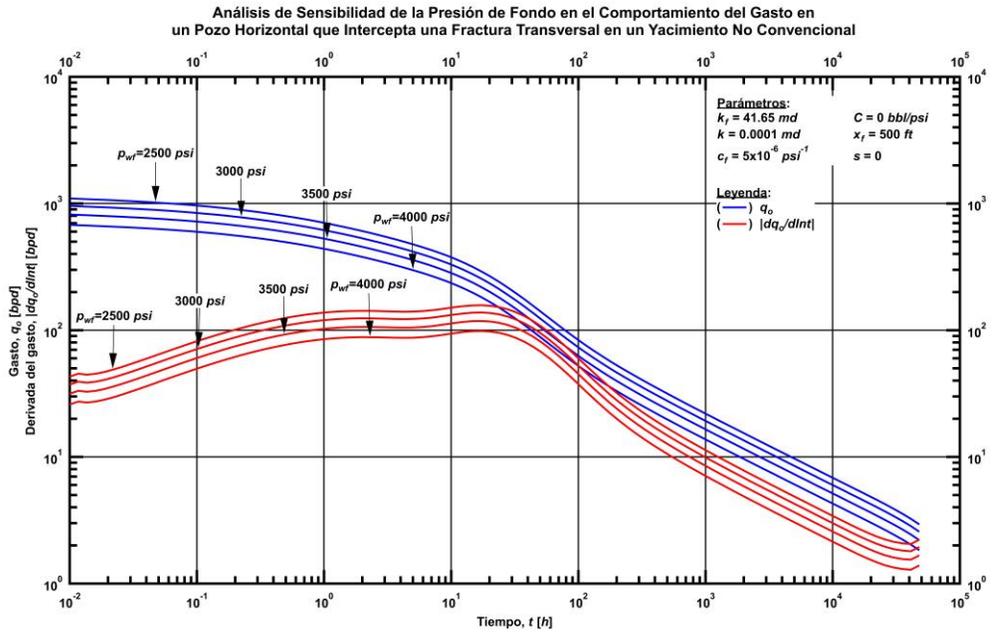
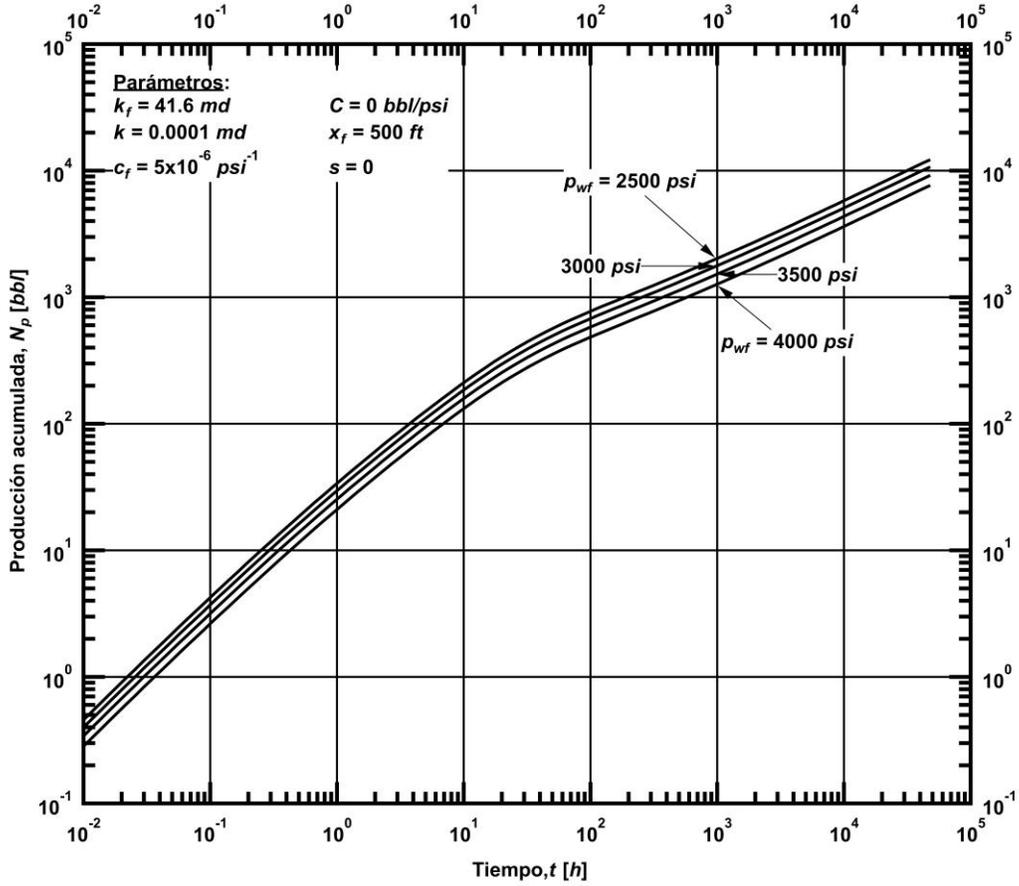


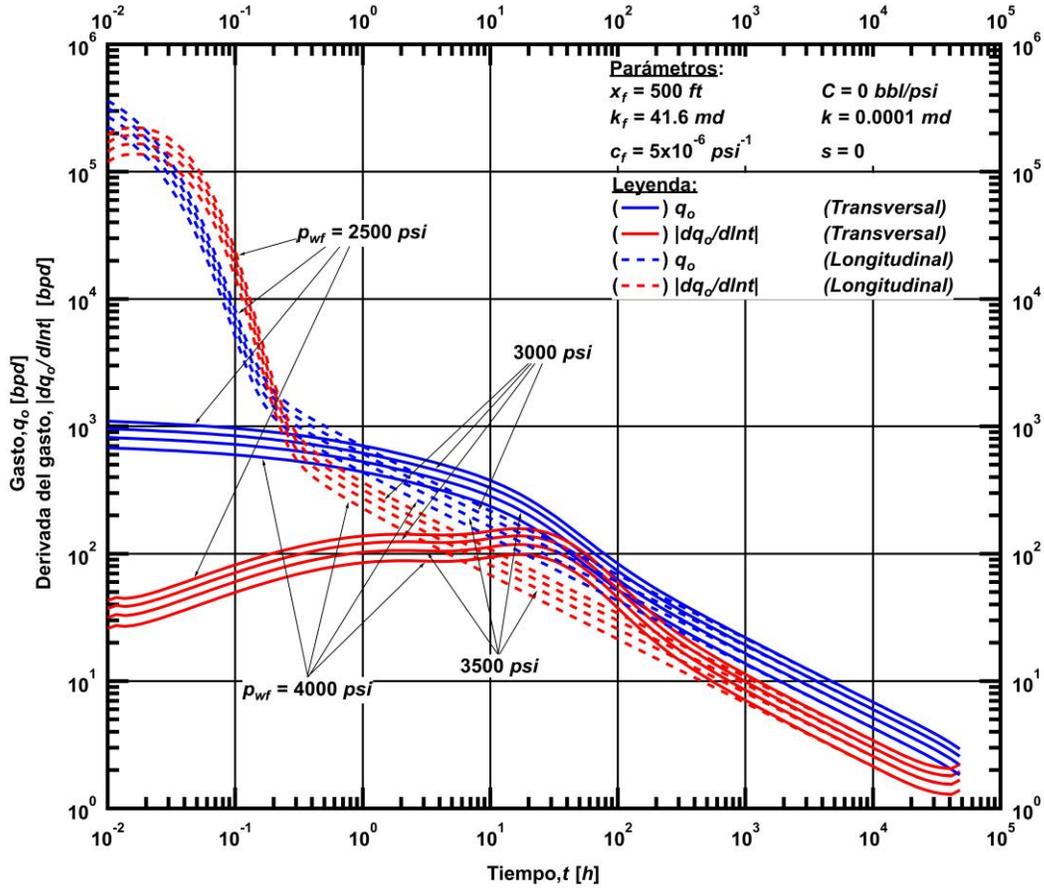
Figura 4.47 — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $p_{wf}$

**Análisis de Sensibilidad de la Presión de Fondo Fluente en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



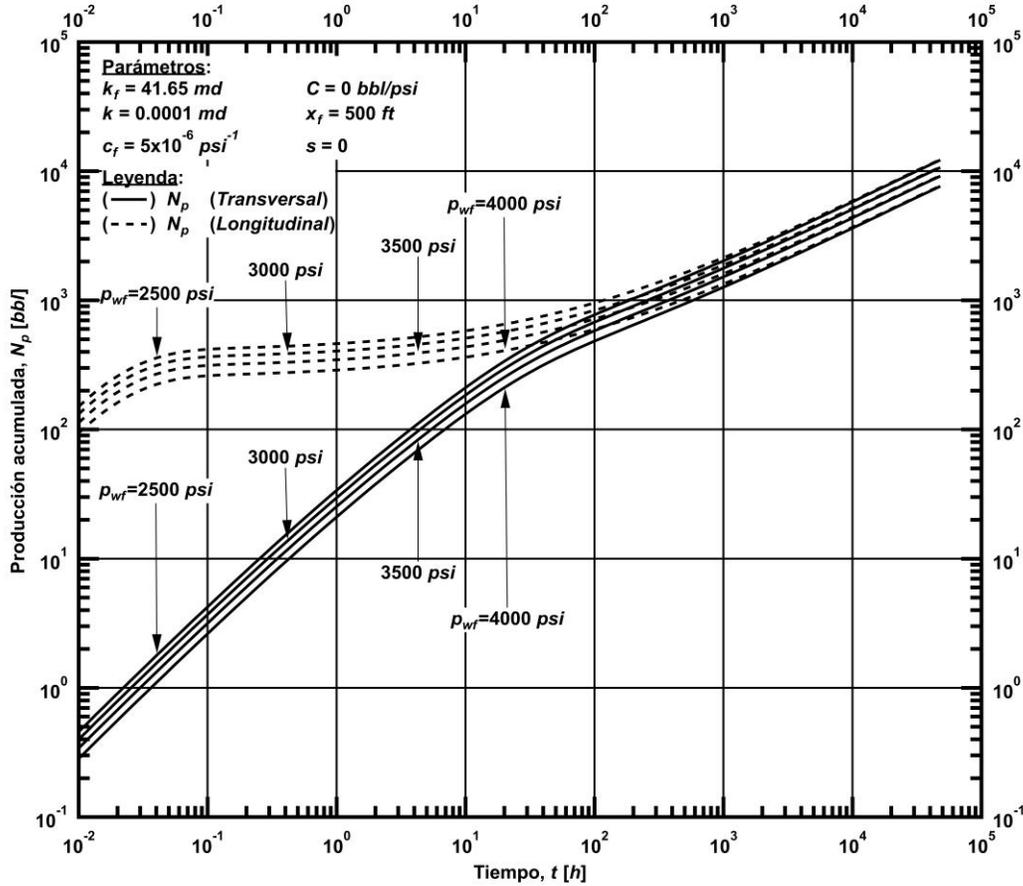
**Figura 4.48** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura transversal respecto al tiempo a diferentes  $p_{wf}$

**Análisis de Sensibilidad de la Presión de Fondo Fluyente en el Pozo en el Comportamiento del Gasto en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.49** — Gasto y su derivada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $p_{wf}$

**Análisis de Sensibilidad de la Presión de Fondo en el Comportamiento de la Producción Acumulada en un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Longitudinal Comparado con un Pozo Horizontal que Intercepta una Fractura Transversal en un Yacimiento No Convencional**



**Figura 4.50** — Producción acumulada en un pozo horizontal con una fractura longitudinal y transversal respecto al tiempo a diferentes  $p_{wf}$

## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta sección se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de este trabajo como errores identificados e ideas potenciales para el mejoramiento de la herramienta MRST, así como su uso académico derivado de ser una herramienta de código abierto al alcance de los usuarios de MATLAB. De igual forma se presentan las conclusiones de la aplicación del software, tomando como base los resultados de Hegre (1996) y Chaudhary *et al.* (2011).

#### Conclusiones:

El software de MRST es de gran utilidad para obtener una idea general acerca del modelo de simulación. Para fines académicos puede emplearse con relativa facilidad. Además, es posible simular casos reales o presentes en la literatura y utilizar datos provenientes de simuladores comerciales (Eclipse).

Al ser de código abierto, facilita la comprensión del modelo de simulación y permite al usuario interactuar, modificar, y optimizar las funciones que están implementadas. Sin embargo, encontramos algunas dificultades para realizar las simulaciones cuando no se cuentan con los datos suficientes del fluido (pruebas PVT).

Las funciones que se tienen en MRST para la construcción de un fluido no son del todo funcionales cuando éste es más complejo, se podría hacer una función donde se pueda cargar una prueba PVT para determinar los parámetros del fluido y sus propiedades.

MRST puede manejar un amplio espectro de mallas que contengan cierto nivel de complejidad geológica lo que permitió en este trabajo realizar al pie de la letra los trabajos presentados en la literatura, sin embargo, para una complejidad en la geometría de la malla (*i.e.* mallas híbridas, en específico el conjunto de una malla radial con una malla cartesiana) presenta errores.

El uso de mallas híbridas es complicado debido a que no existe una función que conjunte, por ejemplo, mallas cilíndricas con cartesianas, por lo que se recomienda facilitar al usuario una función que logre conjuntar aquellas que modifican la estructura de las mallas.

Por otro lado, el ajuste que se obtuvo representando el modelo de Hegre (1996) es muy similar a los resultados que se generaron a través de MRST, lo cual valida la aplicabilidad y confiabilidad del software para simular yacimientos de baja permeabilidad considerando un pozo horizontal con una fractura hidráulica, transversal y longitudinal con conductividad finita e infinita.

Para el caso de simulación con el modelo de Chaudhary *et al.* (2011) se encontró que con MRST es posible sensibilizar diferentes parámetros del yacimiento (permeabilidad de yacimiento ( $k$ ) y compresibilidad de la formación ( $c_f$ ) dejando de lado el caso en el que se comporta como una función de la presión), pozo (presión de fondo fluyendo ( $p_{wf}$ ), gasto de aceite ( $q_o$ )) y fractura (longitud media de la fractura ( $x_f$ ), permeabilidad de la fractura ( $k_f$ )).

#### Recomendaciones:

En cuanto al manual se recomienda expandir ejemplos que incluyan el desarrollo completo de modelos y no derivados de un *deck* de Eclipse, además de expandir la documentación de todas las funciones, ya que hay algunas que no la incluyen.

Dado que la compresibilidad de los yacimientos de shale gas/oil es muy sensible a los cambios de presión, recomendamos el desarrollo/implementación de una solución numérica que permita el manejo de una compresibilidad de formación variable  $c_f=f(p)$ .

Este software es recomendable para usos académicos en materia de simulación para iniciar al estudiante en el uso de simuladores y para ver efectos del comportamiento de yacimientos, de pozos y para la caracterización dinámica de yacimientos.

Por defecto, MRST usa unidades del sistema internacional, lo cual a veces provoca en el usuario confusión, por lo que una función que permita alternar entre diferentes tipos de unidades le daría un valor agregado.

El manejo de índices para heterogeneidades y geometrías de pozo es complicado si se tiene una malla PEBI, en el **Apéndice C** de este trabajo se intentó desarrollar un modelo para manejarlos, no obstante una función más generalizada que use coordenadas podría ayudar al usuario a definir la posición exacta de estos parámetros.

## REFERENCIAS

- Aziz, K. 1993. Reservoir Simulation Grids: Opportunities and Problems. *J Pet Technol* **45** (07): 658-663 SPE-25233-PA. <https://doi.org/10.2118/25233-PA>.
- Calvo, N. 2004. Utilidades e inutilidades del diagrama Voronoï, Interpolación con coordenadas Laplacianas. *Mecanica Computacional* **XXIII** (30): 3231-3249. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/437>
- Chen, C-C. and Raghavan, R. 1997. A Multiply-Fractured Horizontal Well in a Rectangular Drainage Region. *SPE J.* **2** (4): 455-465. SPE-37072-PA. <https://doi.org/10.2118/37072-PA>
- Cinco L., H., Samaniego V., F., and Dominguez A., N. 1978. Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture. *SPE J* **18** (4). SPE-6014-PA. <https://doi:10.2118/6014-PA>
- Cinco L., H. and Samaniego V.. 1981. Transient Pressure Analysis for Fractured Wells. *J Pet Technol* **33** (9). SPE-7490-PA. <https://doi.org/10.2118/7490-PA>
- Chaudhary, A. S., Ehlig-Economides, C., and Wattenbarger, R. 2011. Shale Oil Performance from Stimulated Reservoir Volume. Presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, 30 October-2 November. SPE-147596-MS. <https://doi.org/10.2118/147596-MS>
- De La Vega Navarro A. y Ramirez Villegas J.2015. El Gas de Lutitas (Shale Gas) en México. Recursos, explotación, usos, impactos. *EconomíaUNAM* **12** (34) : 79-105 <http://www.scielo.org.mx/pdf/eunam/v12n34/v12n34a6.pdf>
- Ding, Y. D., Wu, Y. S., and Jeannin, L. 2014. Efficient Simulation of Hydraulic Fractured Wells in Unconventional Reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering* **122**: pp. 631-642. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2014.09.005>
- Economides, M. J., Deimbachor, F. X., Brand, C. W. *et al* . 1991. Comprehensive Simulation of Horizontal Well Performance. *SPE Form Eval* **6** (4). SPE-20717-PA. <https://doi:10.2118/20717-PA>
- Ehlig-Economides, C. 2018. Highlights of the TAMEST Task Force Report on Environmental and Community Impacts of Shale Development in Texas. SPE Europe featured at 80<sup>th</sup> EAGE Conference and Exhibition, Copenhagen, Dinamarca, 11-14 de Junio. SPE-190808-MS. <https://doi.org/10.2118/190808-MS>
- Ertekin, T., Abou-Kassem, J. H. and King, G. R. 2001. Basic Mathematical Concepts. In *Basic Applied Reservoir Simulation*, first edition, Spivak, A. and Killough, J. H., Chap. 3, 38-56. Texas: SPE Textbook Series.
- Gringarten, A. C., Ramey, H. J., and Raghavan, R. 1974. Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Infinite conductivity Vertical Fracture. *SPE J* **14** (04). SPE- 4051-PA. <https://doi.org/10.2118/4051-PA>
- Hegre, T.M. and Larsen, L. 1994. Productivity of Multifractured Horizontal Wells. Presented at the European Petroleum Conference, London, United Kingdom, 25-27 October. SPE-28845-MS. <https://doi.org/10.2118/28845-MS>

- Hegre, T.M. 1996. Hydraulically Fractured Horizontal Well Simulation. Presented at the European 3-D Reservoir Modelling Conference, Stavanger, Norway, 16-17 April. SPE-35506-MS. <https://doi.org/10.2118/35506-MS>
- Jansen, J.D., 2011. Adjoint-based optimization of multi-phase flow through porous media -A review. *Computers & Fluids*, 46, Elsevier, 40–51, October 2010, compufuid.09.039. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.039>
- Jenkins, C. D., and Boyer, C. M. 2008. Coalbed- and Shale-Gas Reservoirs. Presented at the SPE Western Regional Meeting, Anaheim, California, USA, 27-29 May, SPE-133611-MS <https://doi.org/10.2118/133611-MS>
- Karcher, B. J., Ginger, F. M. and Combe, J. 1986. Some Practical Formulas To Predict Horizontal Well Behavior. Presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, 5-8 October. SPE-15430-MS. <https://doi.org/10.2118/15430-MS>
- King, A. and Müller, T. 2016. Using Fluid-Induced Microseismics to Image Permeability. Presented at the Unconventional Resources Technology Conference, San Antonio, Texas, USA, 1-3 August 2016. URTEC-2459970. <https://doi.org/10.15530/URTEC-2016-2459970>.
- Klie, H. and Florez, H. 2019. Data-Driven Discovery of Unconventional Shale Reservoir Dynamics. Presented at the SPE Reservoir Simulation Conference, Galveston, Texas; USA, 10-11 April 2019. SPE-193904-MS. <https://doi.org/10.2118/193904-MS>.
- Knut-Andreas.L. 2019. *An introduction to Reservoir Simulation using MATLAB/GNU Octave*, first edition, Cambridge, United Kingdom: University Printing House.
- Kocberber, S.1993. A Finite-Element Black Oil Simulation System for Heterogeneous Reservoirs With Horizontal Wells Having Vertical Hydraulic Fractures. Presented at the SPE Symposium on Reservoir Simulation, New Orleans, Louisiana, 28 February-3 March. SPE-25269-MS. <https://doi.org/10.2118/25269-MS>
- Lee, J. and Wattenbarger, R. A. 1996. Reservoir simulation. In *Gas Reservoir Engineering*, first edition, Poettmann, F., Jargon ,J. and Horne, R., Chap. 11, 256-273. Texas: SPE Textbook Series.
- Lefevre, D., Pellissier, G. and Sabathier, J-C. 1993. A New Reservoir Simulation for a Better Reservoir Management. Presented at the SPE Middle East Oil Technical Conference and Exhibition, Bahrain, 3-6 April. SPE-25604-MS. <https://doi.org/10.2118/25604-MS>
- MathWorks. 2019. Mldivide, \, <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/mldivide.html> (accessed 6 July 2019)
- Mattar, L(Fekete Associates Inc.) 1999. Derivative Analysis without type curves. *J Can Pet Technol* **38** (13): PETSOC-99-13-63. <https://doi.org/10.2118/99-13-63>
- Matthews, C. S. and Russell, D. G. 1967. Pressure Buildup Analysis. In *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*, Henry L. Doherty Memorial Fund, Chap. 3, 18-33. New York: SPE .

- Mitsu E&P Australia. 2019. What is conventional and unconventional gas?, <https://mitsuiepmidwest.com.au/what-we-do/shale-tight-coal-seam-gas/> (accessed 6 July 2019)
- MRST-MATLAB Reservoir Simulation Tool Box, 2019, About MRST, <https://www.sintef.no/projectweb/mrst/> (accessed 18 March 2020)
- Mukherjee, H. and Economides, M. J. 1991. A Parametric Comparison of Horizontal and Vertical Well Performance. *SPE Form Eval* **6** (02). SPE- 18303-PA. <https://doi.org/10.2118/18303-PA>
- Negara, A. and Sun, S. 2016. Effects of Multiple Transport Mechanisms on Shale Gas Production Behavior. Presented at the SPE Annual Technical Symposium and Exhibition, Dammam, Saudi Arabia, 25-28 April 2016. SPE-182774-MS. <https://doi.org/10.2118/182774-MS>.
- Nghiem, L. X. 1983. Modeling Infinite-Conductivity Vertical Fractures With Source and Sink Terms. *SPE J.* **23** (4): 633-644. SPE-10507-PA. <https://doi.org/10.2118/10507-PA>
- Peaceman, D.W. 1978. Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation. *SPE J.* **18** (3): 183-194. SPE-6893-PA. <https://doi.org/10.2118/6893-PA>
- Peaceman, D. W. 1983. Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation With Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability. *SPE J.* **23** (3): 531-543. SPE-10528-PA. <https://doi.org/10.2118/10528-PA>
- Pedrosa Jr., O. A. and Aziz, K. 1986. Use of a Hybrid Grid in Reservoir Simulation. *SPE Res Eng* **1** (6): 611-621. SPE-13507-PA. <https://doi.org/10.2118/13507-PA>
- Raghavan, R., Chen, C. C., & Agarwal, B. 1997. An Analysis of Horizontal Wells Intercepted by Multiple Fractures. *SPE J.* **2** (3): 235-245 SPE-27652-PA <https://doi.org/10.2118/27652-PA>
- Roberts, B. E., van Engen, H. and van Kruysdijk, C. P. J. W. 1991. Productivity of Multiply Fractured Horizontal Wells in Tight Gas Reservoirs. Presented at the Offshore Europe Conference, Aberdeen, United Kingdom, 3-6 September. SPE-23113-MS. <https://doi.org/10.2118/23113-MS>
- Schlumberger. 1999. ECLIPSE 100 User Course. *Schlumberger GeoQuest*
- Schlumberger Oilfield Glossary, 2019, gas shale, [https://www.glossary.oilfield.slb.com/Terms/g/gas\\_shale.aspx](https://www.glossary.oilfield.slb.com/Terms/g/gas_shale.aspx) (accessed 29 June 2019)
- Schlumberger Oilfield Glossary, 2019, tight gas, [https://www.glossary.oilfield.slb.com/Terms/t/tight\\_gas.aspx](https://www.glossary.oilfield.slb.com/Terms/t/tight_gas.aspx) (accessed 29 June 2019)
- Schulte, W. M. 1986. Production From a Fractured Well With Well Inflow Limited to Part of the Fracture Height. *SPE Production Engineering* **1**(5): 333–343. SPE-12882-PA. <https://doi.org/10.2118/12882-PA>
- Walker, R.F., Ehrl, E. and Arasteh, M. 1993. Simulation verifies advantages of multiple fracs in horizontal well. *Oil and Gas Journal* **91**(48): 66-70.
- Zhang, Y., Langhi, L., Schaub, P.M. et al. 2015. Geomechanical stability of CO<sub>2</sub> containment at the south West Hub Western Australia: A coupled geomechanical-fluid flow modelling approach. *International Journal of Greenhouse Gas Control* **37**(2015): 12-23.

**APÉNDICE A**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA POR DIFERENCIAS FINITAS**  
**DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD**

El objetivo de este apéndice es mostrar el desarrollo de la solución numérica para la ecuación de difusividad en una dimensión considerando flujo de gas. Para este desarrollo nos basamos en el Capítulo 11 de libro de texto de la *SPE Gas Reservoir Engineering* (Lee y Wattenbarger 1996), por lo que, con fines estrictamente académicos, en algunos casos presentamos traducciones íntegras al español de esta referencia. Dado que nuestro objetivo se delimita al desarrollo de la solución numérica de la ecuación de difusividad, referimos al lector al Capítulo 5 de Lee y Wattenbarger (1996) para consultar la derivación de dicha ecuación.

Como antecedente al desarrollo de solución numérica para la ecuación de difusividad en una dimensión considerando flujo de gas (fluido altamente compresible), es conveniente realizar primero este desarrollo considerando un fluido ligeramente compresible.

**A.1. Planteamiento del sistema de ecuaciones para la solución numérica de la ecuación de difusividad considerando un fluido ligeramente compresible.**

Dado que varias propiedades del yacimiento que están involucradas en la ecuación de difusividad son función de la presión, ésta resulta en una ecuación no lineal que requiere de métodos numéricos para ser resuelta. Esto resulta en una aproximación de una ecuación diferencial parcial utilizando el método de diferencias finitas con el fin de obtener una solución numérica que permita predecir el comportamiento de la presión en el yacimiento a lo largo de un periodo de tiempo. Como resultado de utilizar el método de diferencias finitas con un esquema implícito, se obtiene un sistema de ecuaciones de  $n$  por  $n$  ( $n$  es el número de celdas en nuestra malla), que si acomodamos en una matriz obtenemos una matriz tridiagonal (malla en 1 dimensión) y una matriz pentadiagonal (malla en 2 dimensiones).

Para resolver una ecuación diferencial parcial de segundo grado es necesario plantear condiciones de frontera e inicial, para obtener una solución particular al problema numérico que estamos planteando.

Condición inicial

La condición inicial es requerida para iniciar la secuencia de pasos de tiempo. Para la condición inicial ( $n=0$ ), se especifica un valor para cada presión. La condición inicial más común es especificar cada presión igual a una constante, tal como:

$$p_i^0 = p^{init}, i = 1 \dots IMAX, \dots \dots \dots A.1$$

donde  $IMAX$  es el número total de puntos en la dirección  $x$ . Esto representa un pozo o yacimiento a las condiciones iniciales sin flujo.

Condiciones de frontera

Para un problema de 1D, necesitamos especificar otras ecuaciones para la Ec. A.18 en la frontera izquierda y derecha. Los dos tipos de frontera más comunes son (1) a presión constante (matemáticamente llamada la condición de Dirichlet) y (2) frontera cerrada (condición de Neumann). Para el primer caso (Dirichlet), la frontera se define como:

$$p_1^{n+1} = C_1 \dots\dots\dots A.2$$

y:

$$p_{IMAX}^{n+1} = C_2 \dots\dots\dots A.3$$

Mientras que para el segundo caso (Neumann), las fronteras se definen como:

$$\frac{p_2 - p_1}{\Delta x} = C_3, \dots\dots\dots A.4$$

$$\frac{p_{IMAX} - p_{IMAX-1}}{\Delta x} = C_4 \dots\dots\dots A.5$$

Las constantes  $C_1$  a  $C_4$  son valores definidos por el problema. Aunque estos valores podrían cambiar con el tiempo, se mantienen constantes durante el paso de tiempo en que nos encontremos.

Solución considerando presión constante en las fronteras

Para las siguientes ecuaciones, las presiones desconocidas están en el lado izquierdo y los valores conocidos están en el lado derecho. La frontera izquierda es:

$$p_1 = C_1 \dots\dots\dots A.6$$

Los puntos interiores  $i=2 \dots IMAX-1$ , están dados por

$$-p_{i-1}^{n+1} + \left[ 2 + \frac{\phi\mu c}{0.00633k} \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) \right] p_i^{n+1} - p_{i+1}^{n+1} = \frac{\phi\mu c}{0.00633k} \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) p_i^n \dots\dots\dots A.7$$

La frontera derecha es

$$p_{IMAX} = C_2 \dots\dots\dots A.8$$

Las Ecs. A.6 hasta la A.8 constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas con  $IMAX$  incógnitas e  $IMAX$  ecuaciones. Todas las ecuaciones son lineales con respecto a las presiones desconocidas; *i.e.*, no hay presiones cuadradas, etc. Todos los términos de presión tienen coeficientes que no dependen de la presión.

Por ejemplo, considerando un problema en donde  $IMAX=5$ , se tendrían cinco presiones desconocidas y cinco ecuaciones. Tres de estas ecuaciones son para puntos interiores, representadas por la ecuación de diferencias finitas (Ec. A.7). La primera y la última ecuación son para las condiciones de frontera. Este conjunto de ecuaciones puede representarse por una ecuación matricial, que se puede escribir como

$$A\bar{p} = \bar{d}, \dots\dots\dots A.9$$

donde  $A$ =matriz y  $\bar{p}$  y  $\bar{d}$ = vectores columna. La ecuación matricial, Ec.A.9, puede ser mostrada como

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 \\ & & & a_5 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} \dots\dots\dots A.10$$

Las filas de la matriz representan ecuaciones y las columnas representan incógnitas. Los elementos diferentes a cero siguen una tendencia diagonal, en tres diagonales adyacentes. Esto es llamado una matriz tridiagonal y es una característica de la forma matricial de la Ec. 1.63. Las fronteras izquierdas son  $b_1=1$ ,  $c_1=0$ , y  $d_1= C_1$ . Los puntos internos  $i=2,IMAX-1$  son  $a_i=-1$ ,  $b_i=2+(\phi\mu c)/(0.00633k)(\Delta x^2/\Delta t)$ ,  $c_i=-1$ , y  $d_i=(\phi\mu c)/(0.00633k)(\Delta x^2/\Delta t)(p_i)^n$ . Las fronteras derechas son  $a_{IMAX}=0$ ,  $b_{IMAX}=1$ , y  $d_{IMAX}=C_2$ . Nota que  $a_1$  y  $c_{IMAX}$  no son usadas porque caen fuera de la matriz.

Exactitud de la Solución

Una forma de evaluar la exactitud de nuestra solución numérica es compararla con la solución analítica de nuestro problema, sin embargo, esto no siempre es posible ya que en muchos casos no contamos con esta solución. Lee y Wattenbarger (1996) proponen variar los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  y de esta forma comparar el comportamiento de las soluciones.

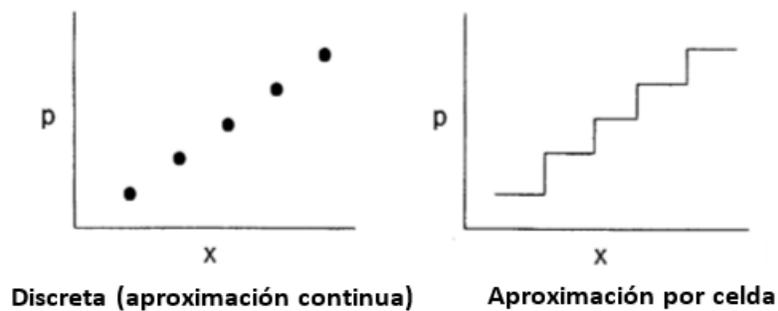
Cuando hablamos de aproximaciones numéricas, viene implícito el término de error el cual puede ser estimado comparando los resultados con la solución analítica y ajustando algunos parámetros para que el error se reduzca. No obstante, no siempre se tiene la solución analítica para realizar comparaciones del método utilizado, por lo que la variación de los parámetros de  $\Delta t$  y  $\Delta x$  en aproximación por diferencias finitas puede resultar óptimo para un análisis de sensibilidad, y más si se cuentan con datos reales con los cuales comparar. Hay que tener en cuenta que aunque por definición cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  se llega a la solución real, no siempre es la solución con el menor error posible, ya que por ejemplo, las soluciones para el desplazamiento de aceite por medio de agua en un método de recuperación secundaria (Buckley-Leverett )  $\Delta t$  es función del valor que tome  $\Delta x$  y de las propiedades físicas del problema.

El problema de tomar valores tan pequeños para las aproximaciones es el costo asociado al tiempo computacional requerido en la simulación lo cual conlleva a un costo monetario. Por ello, la decisión de usar valores lo suficientemente grandes para acarrear un error que no afecte mucho los planes económicos y de producción es sumamente importante para poder compensar los costos de elegir valores grandes (menor tiempo computacional) y la precisión (valor económico del proyecto).

#### Aproximación de la Celda a la Ecuación en Diferencias Finitas

El desarrollo arriba de la ecuación en diferencias finitas podría ser llamado la aproximación continua. Esto inicia con la ecuación diferencial parcial (notación continua) y usa la serie de Taylor para discretizar la ecuación. Esta aproximación nos da una forma para analizar errores de truncamiento y estabilidad. Pero hay que recordar que la ecuación diferencial parcial por si misma fue derivada de una aproximación discreta (celda). Las derivadas continuas son desarrolladas tomando los límites de las ecuaciones discretas como  $\Delta x$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Una aproximación alternativa es la aproximación de celda. La aproximación de celda desarrolla una ecuación en diferencias finitas de conservación de masa sin la notación continua. Esta aproximación es simple y conservativa (conservación de masa exactamente), mientras que la aproximación continua puede o no conservar masa. La **Fig. A.1** muestra la diferencia entre la aproximación continua y de celda. Ambos métodos se hacen lo suficientemente exactos si las celdas son lo suficientemente pequeñas. La aproximación de celda ahora será usada para desarrollar la ecuación de diferencias finitas para un gas real.



**Figura A.1** — Ilustración de la diferencia entre una aproximación continua y la de una aproximación por celdas (Lee y Wattenbarger 1996).

Las celdas mostradas en la **Fig. A.2** tienen un tamaño específico. Una forma simple para desarrollar la ecuación de diferencias finitas es desarrollar una simple “ecuación de inventario” que conserva la masa para la celda. Esto es equivalente a una “ecuación continua” discreta o una ecuación de balance de masa. Si consideramos una celda y escribimos una ecuación de conservación de masa para un paso de tiempo, tenemos lo siguiente:

$$m^{n+1} = m^n + (\text{flujo neto de masa que entra durante un paso de tiempo}) - (\text{flujo neto de masa que sale durante un paso de tiempo}), \dots\dots\dots A.11$$

donde  $m$  es la masa en el lugar en lbm y está dada por:

$$m = (\Delta x \Delta y h \phi) \dots\dots\dots A.12$$

por lo que para un tiempo  $(n+1)$ ,

$$m^{n+1} = (\Delta x \Delta y h \phi^{n+1}) \rho^{n+1} \dots\dots\dots A.13$$

y para un tiempo  $n$

$$m^n = (\Delta x \Delta y h \phi^n) \rho^n \dots\dots\dots A.14$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido en lbm/ft<sup>3</sup>,  $\Delta x$  es la distancia en ft, y  $h$  es el espesor de la formación en ft.

Luego usamos la ley de Darcy para el flujo de masa dentro de la celda:

$$\begin{aligned} & (\text{flujo neto de masa que entra durante un paso de tiempo}) \\ & = \left( \frac{\rho}{\mu} \frac{0.00633kA}{\Delta x} \right) (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) \Delta t + \left( \frac{\rho}{\mu} \frac{0.00633kA}{\Delta x} \right) (p_{i-1}^{n+1} - p_i^{n+1}) \Delta t, \dots\dots\dots A.15 \end{aligned}$$

donde  $A = \text{área transversal de flujo}$  ( $A = \Delta y h$ ) en ft<sup>2</sup>,. (Note que ignoramos los efectos de gravedad por simplicidad). A este tiempo, las propiedades del fluido en los coeficientes de flujo, en este caso  $\rho$  y  $\mu$ , son promediados entre dos celdas indicadas en el término de flujo. Esto será implícito a través del resto de este apéndice.

El gasto es  $q$  (signo positivo para producción, negativo para inyección) en scf/D, para el caso que estamos ahora considerando, por lo tanto

$$(\text{flujo neto de masa que sale durante un paso de tiempo}) = \rho_{sc} q \Delta t \dots\dots\dots A.16$$

Sustituyendo la Ec. A.13-A.16 en A.11 y dividiendo entre  $\Delta t$ , obtenemos la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$\left(\frac{\rho}{\mu} \frac{0.00633kA}{\Delta x}\right)(p_{i-1}^{n+1} - p_i^{n+1}) + \left(\frac{\rho}{\mu} \frac{0.00633kA}{\Delta x}\right)(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) \dots \text{A.17}$$

$$= \left(\frac{\Delta x \Delta y h}{\Delta t}\right) [(\rho\phi)_i^{n+1} - (\rho\phi)_i^n] + \rho_{sc} q$$

Para el caso simple de los valores constantes de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $k$ , y  $h$ , esto puede ser simplificado y reescrito como

$$\left(\frac{\rho}{\mu} T_W\right)(p_{i-1}^{n+1} - p_i^{n+1}) + \left(\frac{\rho}{\mu} T_E\right)(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) = \left(\frac{\Delta x \Delta y h}{\Delta t}\right) [(\rho\phi)_i^{n+1} - (\rho\phi)_i^n] + \rho_{sc} q, \dots \text{A.18}$$

donde

$$T_W = T_E = \frac{0.00633kA}{\Delta x} \dots \text{A.19}$$

Los valores de  $\rho$  y  $\mu$  en el lado izquierdo son usualmente tomados al nivel de tiempo  $n$  y promediados (en espacio) entre los valores de dos celdas involucradas en el flujo. La Ec. A.18 puede entonces ser puesta dentro de una forma diluida, en términos de  $p^{n+1}$ :

$$\left(\frac{\rho}{\mu} T_W\right)(p_{i-1}^{n+1} - p_i^{n+1}) + \left(\frac{\rho}{\mu} T_E\right)(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) = \left(\frac{V_p^n \rho^n c_t}{\Delta t}\right) [p_i^{n+1} - p_i^n] + \rho_{sc} q, \dots \text{A.20}$$

donde  $V_p$  es el volumen poroso (en  $ft^3$ ) y está definido como:

$$V_p^n = \Delta x \Delta y h \phi^n \dots \text{A.21}$$

y la compresibilidad total de la formación (en  $psi^{-1}$ ) es:

$$c_t = \frac{1}{\rho^n \phi^n} \frac{(\rho\phi)^{n+1} - (\rho\phi)^n}{p^{n+1} - p^n} \dots \text{A.22}$$

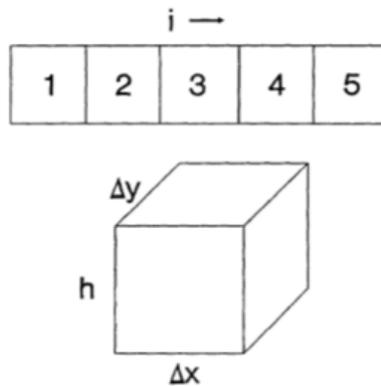
La Ec. A.20 es una forma similar a la ecuación de difusividad, excepto por el término de producción. Este término permite incluir los efectos de producción/inyección dentro de la celda en lugar de solo el flujo entre sus fronteras. La forma matricial de esta ecuación en diferencias finitas es la misma forma tridiagonal que teníamos con la aproximación de la serie de Taylor (Ec. A.10).

Los coeficientes de la matriz dependen de la presión (esta es la no linealidad). En consecuencia, debemos resolver para las presiones, reevaluar los coeficientes de la matriz, y luego volver a resolver para las presiones.

Este proceso de iteración es llamado iteración no lineal (o más común, iteración de Newton), y pudiéramos tener que hacer varias veces la iteración de Newton antes de que la solución converja.

La forma de la celda de la derivación de diferencias finitas es simple y es usada en prácticas para desarrollar ecuaciones para simuladores. Este método no requiere funciones y derivadas continuas como se plantea en la aproximación por la serie de Taylor.

La Ec. A.20 puede ser usada para simulación de líquido o gas con resultados aceptables. Sin embargo, la simulación de gas puede ser mejorada si manejamos los coeficientes no lineales en los términos del flujo integrando las propiedades variables del gas dentro de un potencial de flujo. La siguiente sección muestra cómo se puede desarrollar una alternativa a la Ec. A.20.



**Figura A.2** — El sistema de celdas, mostrando las dimensiones de una celda (Lee y Wattenbarger 1996).

**A.2. Simulador para el flujo de un gas real en un yacimiento homogéneo en coordenadas cartesianas**

La aproximación de la celda será usada para desarrollar una ecuación de simulador para flujo de un gas real en términos de la pseudopresión del gas real,  $p_p(p)$ . Iniciamos con la ecuación de cantidad de masa (Ec. A.18).

Luego colocamos dentro una forma más útil, un gasto estándar (scf/D), dividiendo la ecuación entre  $p_{sc}$ :

$$\left(\frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \frac{p}{z\mu} T_W\right) (p_{i-1}^{n+1} - p_i^{n+1}) + \left(\frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \frac{p}{z\mu} T_E\right) (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1})$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{T_{sc}}{p_{sc}T}\right) \left[ \left(\frac{V_p P}{z}\right)_i^{n+1} - \left(\frac{V_p P}{z}\right)_i^n \right] + q \dots\dots\dots A.23$$

donde

$$\frac{\rho}{\rho_{sc}} = \frac{1}{B_g} = \frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \frac{p}{z} \dots\dots\dots A.24$$

donde  $B_g$  es el factor de volumen de gas en  $ft^3/scf$

Utilizando el concepto de pseudopresión de un gas real:

$$p_p(p) = 2 \int_0^p \frac{p}{z\mu} dp \dots\dots\dots A.25$$

donde  $z$  es el factor de desviación de un gas real, se dice que:

$$\Delta p_p(p) = \left( \frac{2p}{z\mu} \right) \Delta p, \dots\dots\dots A.26$$

donde la cantidad en paréntesis es un promedio integrado entre las presiones involucradas.

Ahora podemos colocar los términos de flujo dentro de una forma más simple que usa la notación.  $P_p(p)$ . El término de flujo Este se modifica. Iniciamos con

$$\left( \frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \frac{p}{z\mu} T_E \right) (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) \dots\dots\dots A.27$$

Podemos cambiar esto a

$$\left( \frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \frac{1}{2} T_E \right) \left( \frac{2p}{z\mu} \right) (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}), \dots\dots\dots A.28$$

y finalmente a

$$\left( \frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \frac{1}{2} T_E \right) (p_{p_{i+1}}^{n+1} - p_{p_i}^{n+1}) \dots\dots\dots A.29$$

Ahora simplificamos esto definiendo un coeficiente de flujo,  $a_E$ :

$$a_E = \frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \frac{1}{2} T_E, \dots\dots\dots A.30$$

por tanto, para nuestro gasto, en términos de pies cúbicos estándar por día, se hace

$$a_E (p_{p_{i+1}}^{n+1} - p_{p_i}^{n+1}), \dots\dots\dots A.31$$

donde  $a_E$ =coeficiente de flujo Este. Para flujo de la dirección  $i-1$ , usamos el coeficiente de flujo Oeste,  $a_W$ .

Nuestra ecuación se hace

$$a_E (p_{p_{i+1}}^{n+1} - p_{p_i}^{n+1}) + a_W (p_{p_{i-1}}^{n+1} - p_{p_i}^{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{T_{sc}}{p_{sc}T} \right) \left[ \left( \frac{V_p p}{z} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{V_p p}{z} \right)_i^n \right] + q \dots\dots\dots A.32$$

Simplificamos el lado derecho de la ecuación substituyendo

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{T_{sc}}{p_{sc} T} \right) \left[ \left( \frac{V_p P}{z} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{V_p P}{z} \right)_i^n \right] = \alpha \left( p_{pi}^{n+1} - p_{pi}^n \right), \dots \text{A.33}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{T_{sc}}{p_{sc} T} \right) \left[ \frac{\left( \frac{V_p P}{z} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{V_p P}{z} \right)_i^n}{p_{pi}^{n+1} - p_{pi}^n} \right] \dots \text{A.34}$$

La ecuación en diferencias finitas para un gas real se simplifica a

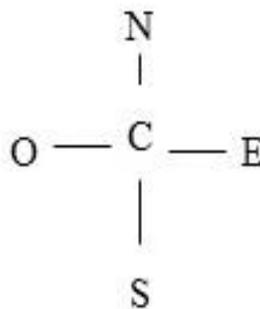
$$a_E \left( p_{pi+1}^{n+1} - p_{pi}^{n+1} \right) + a_W \left( p_{pi-1}^{n+1} - p_{pi}^{n+1} \right) = \alpha \left( p_{pi}^{n+1} - p_{pi}^n \right) + q \dots \text{A.35}$$

Esta forma se puede extender a dos dimensiones (2D), añadiendo los términos de flujo Sur y Norte. Estos coeficientes de flujo,  $a_S$  y  $a_N$ , deben ser calculados de una manera consistente con la geometría de las celdas.

La ecuación en 2D es

$$\begin{aligned} & a_E \left( p_{pi+1j}^{n+1} - p_{pij}^{n+1} \right) + a_S \left( p_{pij+1}^{n+1} - p_{pij}^{n+1} \right) + a_W \left( p_{pi-1j}^{n+1} - p_{pij}^{n+1} \right) + a_N \left( p_{pij-1}^{n+1} - p_{pij}^{n+1} \right) \\ & = \alpha \left( p_{pij}^{n+1} - p_{pij}^n \right) + q \dots \text{A.36} \end{aligned}$$

Note que  $j$  incrementa en la dirección Sur. La notación de subíndices para la dirección se muestra en la **Fig. A.3**:



**Figura A.3** — Diagrama usado para representar la dirección de los subíndices (Lee y Wattenbarger 1996).

Un rasgo de los coeficientes en la discretización de la ecuación de masa (más bien en la ecuación volumétrica de difusividad) es que los coeficientes son simétricos; esto es,  $(a_E)_{ij} = (a_W)_{i+1j}$  y  $(a_S)_{ij} = (a_N)_{ij+1}$ .

Podemos reconfigurar la Ec. A.36 poniendo las incógnitas en el lado izquierdo

$$-a_N p_{p_{ij-1}}^{n+1} - a_W p_{p_{i-1j}}^{n+1} + a_C p_{p_{ij}}^{n+1} - a_E p_{p_{i+1j}}^{n+1} - a_S p_{p_{ij+1}}^{n+1} = d, \dots\dots\dots A.37$$

donde

$$a_c = a_N + a_W + a_E + a_S + \alpha, \dots\dots\dots A.38$$

y

$$d = \alpha p_{p_{ij}}^n - q. \dots\dots\dots A.39$$

De manera similar que en la sección A.1, las condiciones iniciales se implementan asignando un valor específico de presión y la correspondiente  $p_p(p)$  para cada celda. Este valor usualmente es el mismo para todas las celdas.

Para este caso se utilizó una condición de frontera cerrada (tipo Neumann). Esto implica que ningún fluido cruza las fronteras exteriores y esto se implementa colocando los coeficientes adecuados igual a cero. Por ejemplo, donde la frontera Este  $a_E = 0$ . El término de producción  $q$  puede ser considerado como una condición de frontera para los bloques que contienen un pozo. Sin embargo, estos términos son usualmente pensados como fuentes y sumideros en vez de fronteras.

Para el caso donde los valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $h$ , y  $\phi$  varían con la posición, los coeficientes de flujo se redefinen. Además, la permeabilidad puede ser anisótropa (direccional). El método más común para definir estos coeficientes de flujo es con flujo consecutivo entre las celdas (inducir a un promedio armónico de las propiedades):

$$T_{Eij} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \dots\dots\dots A.40$$

donde

$$T_1 = \frac{0.00633 \Delta y_j (k_x h)_{ij}}{\frac{\Delta x_i}{2}}, \dots\dots\dots A.41$$

y

$$T_2 = \frac{0.00633 \Delta y_j (k_x h)_{i+1j}}{\frac{\Delta x_{i+1}}{2}}. \dots\dots\dots A.42$$

Además,

$$T_{Sij} = \frac{T_3 T_4}{T_3 + T_4}, \dots\dots\dots A.43$$

donde

$$T_3 = \frac{0.00633 \Delta x_i (k_y h)_{ij}}{\frac{\Delta y_j}{2}}, \dots\dots\dots A.44$$

y

$$T_4 = \frac{0.00633 \Delta x_i (k_y h)_{ij+1}}{\frac{\Delta y_{j+1}}{2}}. \dots\dots\dots A.45$$

Por la simetría de estos coeficientes,  $(T_W)_{ij}=(T_E)_{i-1j}$  y  $(T_N)_{ij}=(T_S)_{ij-1}$

Este método de promediar propiedades y el espaciado de celdas asume que cada celda es uniforme dentro de sus fronteras y que las propiedades cambian abruptamente en las interfases de los bloques adyacentes.

Para incluir los efectos de la gravedad en el flujo de gas se debe modificar la ley de Darcy. Utilizando el flujo másico en el lado Este de la celda para mostrar esta modificación en la Ec. A.18, el flujo másico está dado por

$$\left( \frac{\rho}{\mu} T_E \right) (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}). \dots\dots\dots A.46$$

La Ec. A.46 incluye solo el flujo horizontal, por lo que, considerando los efectos gravitacionales, éste término cambia de la manera siguiente:

$$\left( \frac{\rho}{\mu} T_E \right) (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) + \left( \frac{\rho^2}{144\mu} T_E \right) (Z_{i+1} - Z_i), \dots\dots\dots A.47$$

donde  $Z$ =elevación en ft, y es positivo hacia arriba. Si este segundo término se incluye, debe ser dividido entre  $\rho_{sc}$ , con los otros términos desarrollando nuestra ecuación. Por el momento si incluimos el flujo de todas las cuatro direcciones, podemos definir un término de gravedad,  $G$ , de la manera siguiente:

$$G = \left( \frac{\rho^2}{144\mu} T_E \right) (Z_{i+1j} - Z_{ij}) + \left( \frac{\rho^2}{144\mu} T_W \right) (Z_{i-1j} - Z_{ij}) + \left( \frac{\rho^2}{144\mu} T_S \right) (Z_{ij+1} - Z_{ij}) + \left( \frac{\rho^2}{144\mu} T_N \right) (Z_{ij-1} - Z_{ij}), \dots\dots\dots A.48$$

donde  $\rho$  y  $\mu$  se promedian entre las celdas en la dirección del flujo indicada. En la forma final de la Ec. A.37, esto es simplemente una sustracción del término del lado derecho,  $d$ , que ahora se hace

$$d = \alpha p_{ij}^n - q - G / \rho_{sc} \dots\dots\dots A.49$$

Esta modificación es relativamente simple para implementar en un simulador de gas pero ha sido omitido en nuestra discusión por dos razones: (1) por la simplicidad del programa y (2) porque el término de gravedad usualmente se desprecia en ingeniería de yacimientos de gas por las bajas densidades del fluido. La presión del yacimiento usualmente se toma como una presión de referencia representando la presión en el centroide del yacimiento. Así, la condición inicial de una presión de referencia a través del yacimiento significa que el yacimiento está en equilibrio.

Presión de fondo fluyendo  $p_{wf}$ .

Estas ecuaciones de simulación usan presiones, o  $p_p(p)$ , en el centro de las celdas. Estas presiones representan un balance de materia en la celda. Sin embargo, si un pozo está localizado en el centro de una celda, la presión de la celda,  $p_{ij}$ , no es la presión de fondo fluyendo,  $p_{wf}$ . Las ecuaciones de arriba calculan el flujo de gas de celda a celda pero no modelan gradientes de presión muy grandes cerca del pozo. Se requiere una expresión adicional para calcular  $p_{wf}$ . Se usa la siguiente ecuación PI.

$$q = J' \left( p_{ij}^{n+1} - p_{wf} \right) \dots\dots\dots A.50$$

donde

$$J' = \frac{0.01988khT_{sc}}{p_{sc}T \left( \ln \frac{r_o}{r_w} + s + 0.001Dq \right)} \dots\dots\dots A.51$$

$D$  se define por las ecuaciones siguientes:

$$D = \frac{2.715 \times 10^{-15} \beta k_g M p_{sc}}{h \mu_g (p_{wf}) \eta_w T_{sc}} \dots\dots\dots A.52$$

donde  $M$  es el peso molecular de una mezcla de gases en lbm/lbm-mol,  $k_g$  es la permeabilidad efectiva de un gas en md,  $p_{sc}$  presión a condiciones estándar en psia,  $h$  es el espesor neto de la formación en ft,  $\mu_g$  es la viscosidad del gas en cp,  $p_{wf}$  presión de fondo fluyendo en psia,  $r_w$  radio del pozo en ft y  $T_{sc}$  temperatura a condiciones estándar en °R

Note que la viscosidad en el denominador de  $D$  está tomada a la presión de fondo fluyendo (BHFP por sus siglas en inglés) y dada como  $\mu_g(p_{wf})$ . El valor de  $\beta$  puede ser estimado de manera empírica con

$$\beta = 1.88 \times 10^{10} k^{-1.47} \phi^{-0.53} \dots\dots\dots A.53$$

y  $r_o$  por

$$r_o = \frac{0.28 \left( \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \Delta x^2 + \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \Delta y^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{\frac{1}{4}}} \dots\dots\dots A.54$$

O, donde  $\Delta x = \Delta y$  y  $k_x = k_y$ ,

$$r_o = 0.2 \Delta x \dots\dots\dots A.55$$

Este valor de  $r_o$  ha sido determinado por análisis y experimentos numéricos. Esta ecuación es usada para calcular  $p_{wf}$  después que las presiones han sido determinadas, asumiendo que el usuario ha especificado  $q$  para el paso de tiempo.

Cuando el usuario especifica  $p_{wf}$  en vez de  $q$ , la ecuación de diferencias finitas debe ser modificada. La Ec. A.50 se incorpora dentro de la ecuación de diferencias finitas en lugar de  $q$ . Esto significa que  $J'$  se añade a la "diagonal principal",  $a_c$ , y  $J'(p_p)_{wf}$  sustituyen a  $q$  en el término del lado derecho,  $d$ . En este caso  $q$  se encuentra con la Ec. A.50 después que los nuevos valores  $p_p(p)$  han sido resueltos.

### A.3 Solución de las Ecuaciones

Para un problema en 2D, la matriz tiene dos diagonales más como se muestra en la **Fig. A.4**. Podemos usar la eliminación Gaussiana o algún método iterativo apropiado para tal problema en 2D.



Debido a la no linealidad del parámetro  $\alpha$ , se requiere de una iteración para reevaluar  $\alpha$  en un nuevo nivel del tiempo. El procedimiento para la solución no lineal es como la que sigue:

Paso 1. Resolver la matriz de ecuaciones para  $p_p(p)^{n+1}$ .

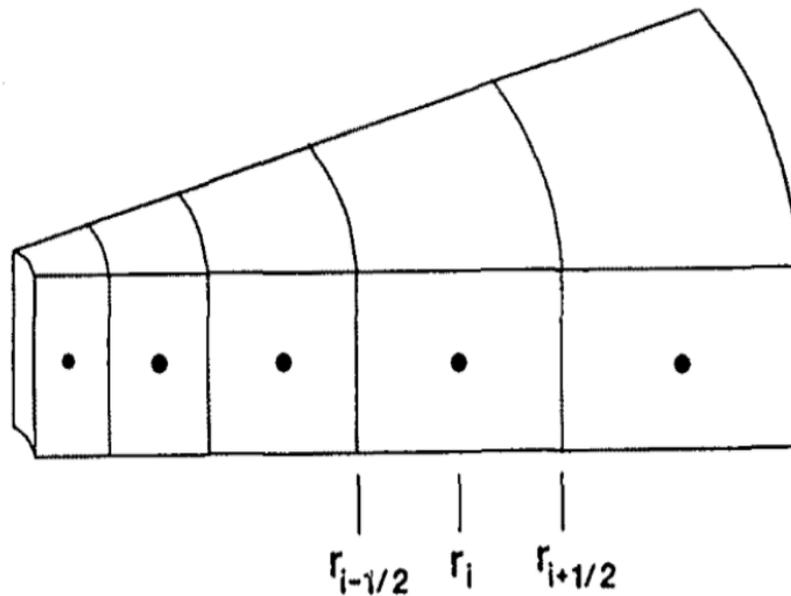
Paso 2. Reevaluar  $\alpha$  y recalculer  $a_C$  para cada bloque.

Paso 3. Repetir los pasos 1 y 2 hasta alcanzar la convergencia.

Este procedimiento puede ser también aplicado a la Ec. A.20, exceptuando que los coeficientes de flujo deben ser recalculados en cada iteración. Los coeficientes de flujo constantes en la Ec. A.37 son la principal ventaja del método  $p_p(p)$  sobre el método de  $p$  en la Ec. A.20.

#### A.4. Simulador para el flujo de un gas real en un yacimiento homogéneo en coordenadas cilíndricas

La **Fig. A.5** muestra el uso de las coordenadas radiales para la simulación del comportamiento de un solo pozo dentro de un yacimiento, justo como en las soluciones analíticas. Para este caso, el subíndice  $i$  describe el flujo en la dirección radial y el subíndice  $j$  describe el flujo en la dirección vertical. Esto es usualmente llamado como malla  $r$ - $z$ .



**Figura A.5** — Sistema de celdas radial (Lee y Wattenbarger 1996).

Se sabe que la solución de un pozo tiende a ser una línea recta cuando se grafica contra el logaritmo del radio. La **Fig. A.6** muestra una gráfica de la solución a un pozo produciendo a presión constante, o  $p_p(p)$  constante en la frontera externa. El uso de un espaciamiento logarítmico de la malla ayuda a incrementar la exactitud de la solución utilizando diferencias finitas; De hecho, la aproximación espacial de diferencias finitas es perfecta para una línea recta. Un sistema de mallado radial consistente con este modelo es usar un espaciamiento geométrico (la misma cosa espaciada logarítmicamente). Las ecuaciones que podrían aplicarse para la **Fig. A.5** son:

$$\beta = \left( \frac{r_e}{r_w} \right)^{\frac{1}{IMAX}}, \dots\dots\dots A.58$$

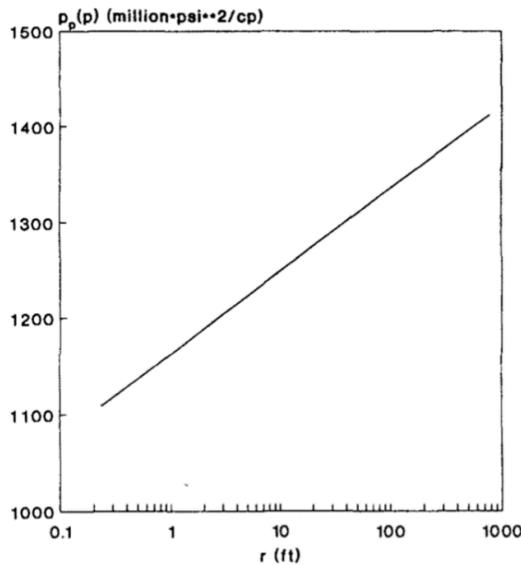
$$r_{i+1} = \beta r_i, \dots\dots\dots A.59$$

$$r_{i+1/2} = \beta r_{i-1/2}, \dots\dots\dots A.60$$

y

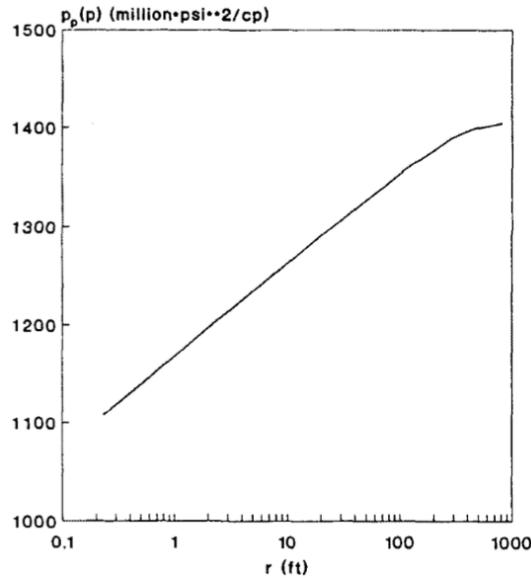
$$r_i = \sqrt{r_{i+1/2} r_{i-1/2}} \dots\dots\dots A.61$$

Este sistema de mallado da una buena presión para el perfil de presiones de la **Fig. A.6** con presión constante, o  $p_p(p)$  constante en la frontera externa. Para el caso más común de una frontera externa cerrada, la **Fig. A.7** muestra el perfil de  $p_p(p)$  para este caso. La relación logarítmica existe solo sobre la mitad de  $r_e$  (para la solución de un líquido ideal, la línea recta en semilog interseca a la presión promedio a  $0.472r_e$ ).



**Figura A.6** — Perfil de pseudopresión para el caso de presión constante en la frontera externa (Lee y Wattenbarger 1996).

Para este sistema, es más exacto el uso del espaciamiento de arriba hasta  $0.5r_e$  y después usarlo igual a  $\Delta r$  para la malla externa. Podrían colocarse más bloques cerca del pozo dado que  $p_p(p)$  cambia más rápido en esta área. Posiblemente una buena regla pueda ser usada para dos tercios de los bloques más centrales.



**Figura A.7** — Perfil de pseudopresión para el caso de una frontera externa cerrada. (Lee y Wattenbarger 1996)

El tamaño del intervalo de tiempo para la simulación de un pozo radial es similar al espaciamiento de la malla. Esto es, un espaciamiento logarítmico es usado para mejorar la exactitud debido a que los cambios en la presión tienden a ser lineales con el logaritmo del tiempo. Este espaciamiento logarítmico constante se aproxima al multiplicar cada paso de tiempo por  $\alpha$  para obtener el siguiente. Un buen valor de  $\alpha$  es el de 1.5 el cual da de cinco a seis pasos por ciclo logarítmico. Esto usualmente da buenos resultados.

Las ecuaciones para determinar  $V_p$ ,  $T_E$ ,  $T_S$  y  $J'$  se redefinen para este sistema de mallado de la manera siguiente:

$$V_p = \phi_{ij} A \Delta z, \dots\dots\dots A.62$$

donde:

$$A = \pi (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2), \dots\dots\dots A.63$$

$$T_E = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \dots\dots\dots A.64$$

A su vez,

$$T_1 = \frac{2\pi 0.00633 k_{H_{ij}} \Delta z_j}{\ln(r_{i+1/2} / r_i)}, \dots\dots\dots A.65$$

y

$$T_2 = \frac{2\pi 0.00633 k_{H_{i+1j}} \Delta z_j}{\ln(r_{i+3/2} / r_{i+1})}, \dots\dots\dots A.66$$

$$T_S = \frac{T_3 T_4}{T_3 + T_4}, \dots\dots\dots A.67$$

Donde

$$T_3 = \frac{2\pi 0.00633 k_{V_{ij}} A}{\Delta z_j / 2} \dots\dots\dots A.68$$

y

$$T_4 = \frac{2\pi 0.00633 k_{V_{ij+1}} A}{\Delta z_{j+1} / 2}, \dots\dots\dots A.69$$

Además,

$$J' = \frac{0.01988 k_{H_{ij}} \Delta z_j T_{sc}}{T_{p_{sc}} \left[ \ln \left( \frac{r_o}{r_w} \right) + s + 0.001 Dq \right]}, \dots\dots\dots A.70$$

donde

$$r_o = \sqrt{r_{i+1/2} r_w} \dots\dots\dots A.71$$

## APÉNDICE B

### SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN POZO ATRAVESANDO UNA FRACTURA HIDRÁULICA EN UN YACIMIENTO HOMOGÉNEO (HEGRE, 1996)

Para el desarrollo de esta tesis, utilizamos como base el trabajo publicado por Hegre (1996), del cual hemos provisto un resumen en el Capítulo II y se han realizado análisis comparativos de este modelo y sus resultados. Debido a que consideramos que el trabajo de Hegre (1996) es fundamental para entender la presente tesis y con fines estrictamente académicos, presentamos una traducción de esta referencia.

#### **B.1. Modelado de un pozo horizontal fracturado**

El modelo de simulación que presenta el autor se realizó en dos tipos de mallas (cartesiana e híbrida). Con la malla cartesiana modeló fracturas rectangulares de conductividad finita e infinita. Con la malla híbrida presentó los casos de fracturas radial y cuadrada, ambas de conductividad finita. Todos los tipos de fracturas están orientadas en dirección  $x$  en el plano  $xz$ , incluyendo el caso de un pozo multifracturado. Las fracturas son completamente penetrantes en todo el espesor de la formación. La simulación de estos casos se llevó a cabo mediante un simulador comercial (Eclipse 100).

Para todos los casos presentado por Hegre (1996) se aplicaron los mismos datos del fluido y del yacimiento (**Tabla 3.1**). Se supuso un yacimiento homogéneo con baja permeabilidad. La conductividad de la fractura es 500 mD-m o 500,000 mD-m que corresponde a una conductividad intermedia e infinita respectivamente.

#### Simulación de la presión en estado transitorio — Sensibilidad de la malla

Las fracturas se modelaron con celdas pequeñas de tamaño representativo, cuyo efecto en la simulación del comportamiento transitorio de la presión se evaluó para pozos horizontales interceptados por fracturas transversales (la orientación de la fractura es perpendicular a la dirección del pozo) y fracturas longitudinales (la dirección de las fracturas coincide con la dirección del pozo). Para el estudio de sensibilidad de la malla se trabajó con una sola fractura, lo cual puede extenderse para el caso de pozos horizontales multifracturados. La simulación del comportamiento de la presión en estado transitorio para las primeras  $10^3$  horas, durante este tiempo no se observan efectos de frontera en la respuesta de la presión.

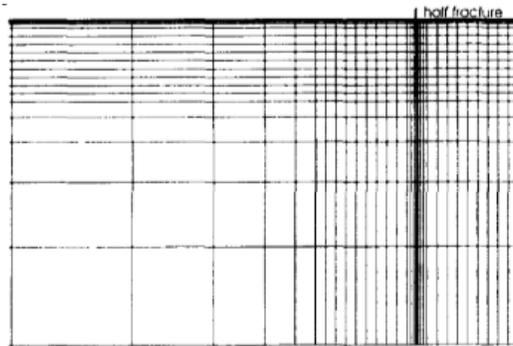
#### Pozo horizontal con una fractura longitudinal

El yacimiento se discretizó con una malla regular con tamaños de celda de 100 m en las direcciones  $x$  y  $y$ , mientras que se definió un subsistema de celdas en la cercanía del área de la fractura (ver **Fig. B.1**). En la **Tabla 3.2** se proporcionan los tamaños de las celdas de una malla Base en el subsistema y se muestran en la **Fig. B.1**.

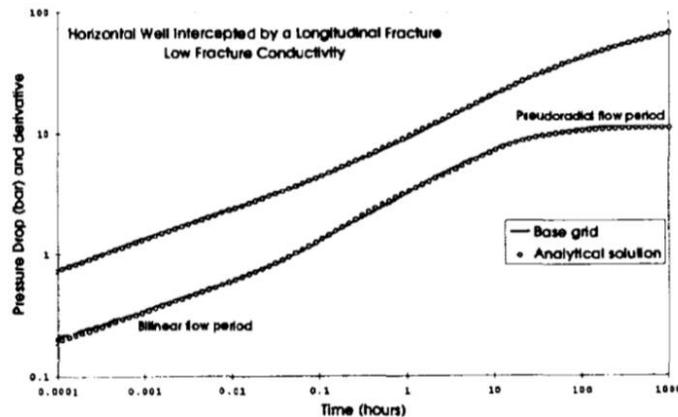
El pozo horizontal y la fractura están a lo largo del eje-x. El ancho de la fractura es 0.01 m y los tamaños de celda en dirección-y fuera de la fractura incrementan progresivamente con un factor de 2. A lo largo de la fractura, los tamaños de celda son de 5 m excepto para la punta de fractura donde las celdas decrecen gradualmente hasta 0.5 m. La conexión geométrica del factor de transmisibilidad entre el pozo y las celdas contiguas a la fractura están referidos al factor de conexión del pozo. Considerando un perfil lineal de presión en la fractura y que el pozo está orientado a lo largo de los límites de la celda del factor de conexión del pozo, la transmisibilidad para las celdas contiguas a la fractura encima y debajo del pozo a lo largo de la longitud total de la fractura se define como:

$$T_w = \frac{2k_f \Delta x \Delta y}{\Delta z}, \dots\dots\dots (B.1)$$

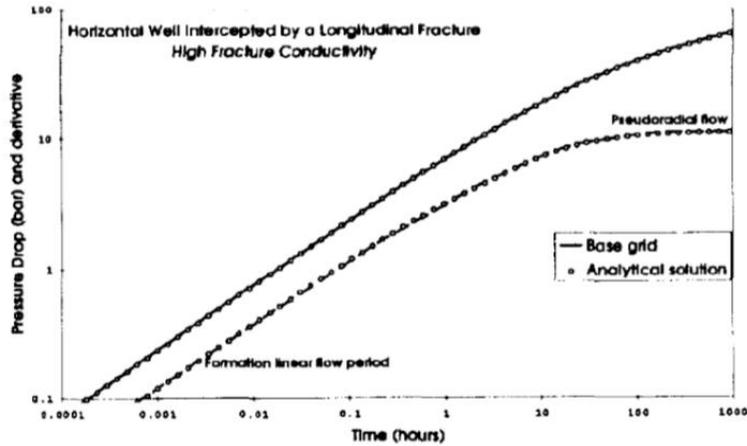
en donde.  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , y  $\Delta z$  representan el tamaño de la celda las direcciones x-, y- y z- respectivamente.



**Figura B.1** — Sistema de malla Base en el área cercana a la fractura. 1/4 de la malla (Hegre 1996).



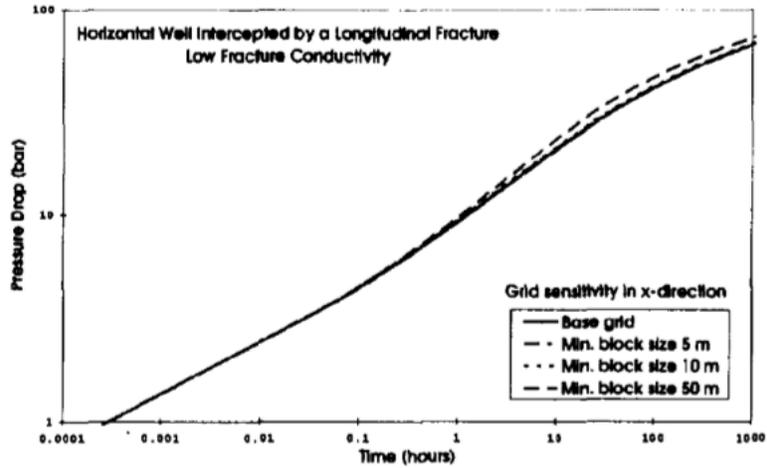
**Figura B.2** — Comparativo del comportamiento de la caída de presión utilizando una solución analítica y la solución numérica de un pozo horizontal interceptado por una fractura longitudinal de conductividad finita (Hegre 1996).



**Figura B.3** — Comparativo del comportamiento de la caída de presión utilizando una solución analítica y la solución numérica de un pozo horizontal interceptado por una fractura longitudinal de conductividad infinita (Hegre 1996).

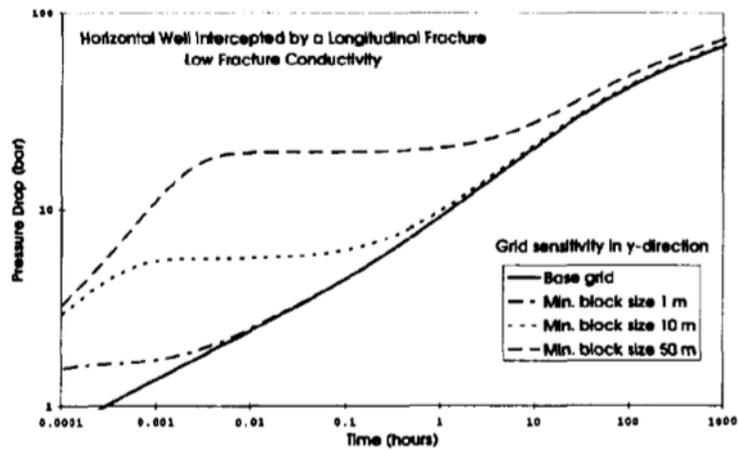
En la **Figs. B.2 y B.3** se presentan comparativos del comportamiento de la respuesta de la simulación de la presión transitoria su derivada de la presión (línea continua) contra soluciones semi-analíticas para fracturas con conductividad finita e infinita, respectivamente. Para una fractura de conductividad finita (**Fig. B.2**), se observa el flujo bilineal (*i.e.*, pendiente de 1/4 en las respuestas de presión y su derivada) a tiempos "tempranos" ( $t < 10^{-1}$  horas), seguido del flujo lineal de formación (*i.e.*, pendiente de 1/2 en las respuestas de presión y su derivada) a tiempos "intermedios" ( $10^{-1} < t < 10^1$  horas). El periodo de flujo lineal de flujo visto en la **Fig. B.3** a tiempos cortos y tiempos intermedios ( $t < 10^0$  horas) es característico de fracturas de conductividad infinita. El flujo pseudoradial se observa aproximadamente después de 100 horas en ambos casos. La simulación de la caída de presión con el sistema de malla base es virtualmente idéntico a las soluciones analíticas para modelos de fracturas de conductividades finitas e infinitas.

La **Fig. B.4** muestra el efecto en el comportamiento de la presión del pozo debido al incremento de los tamaños de celda a 5 m, 10 m y 50 m en la dirección-*x*, considerando una fractura de conductividad finita. Para este caso, los tamaños de celda en la dirección-*y* y -*z* son idénticos para el sistema de malla base. A tiempos tempranos ( $t < 10^{-1}$  horas) la caída de presión es independiente del tamaño de celda en dirección-*x*. Cuando el tamaño de celda incrementa existe un incremento gradual en la caída de presión después del periodo de flujo bilineal ( $t > 10^{-1}$  horas). Con un tamaño mínimo de celda de 50 m, la caída de presión adicional durante el periodo de flujo pseudoradial es 5.7 bar, lo que corresponde a casi el 8% del total de caída de presión. Los resultados son similares para un modelo considerando una fractura de conductividad infinita.



**Figura B.4** — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de la celda en dirección- $x$  (Hegre 1996).

En el sistema de malla base las celdas vecinas a la fractura son solo de 0.01 m y progresivamente incrementan en un factor de 2 en la dirección- $y$ . El análisis de sensibilidad en la malla se realiza con tamaños mínimos de celda de 1 m, 10 m y 50 m. La respuesta de la presión a tiempos tempranos ( $t < 10^0$  horas) está fuertemente afectada por el tamaño de las celdas como se ilustra en la **Fig. B.5** para un modelo de fractura de conductividad finita. Si las celdas cerca de la fractura son grandes en la dirección- $y$  el comportamiento de la presión varía considerablemente. La caída de presión durante el periodo de flujo pseudoradial con celdas de 50 m se desvía por 6 bar de caso base. Se observan resultados similares para un modelo de fractura de conductividad infinita.



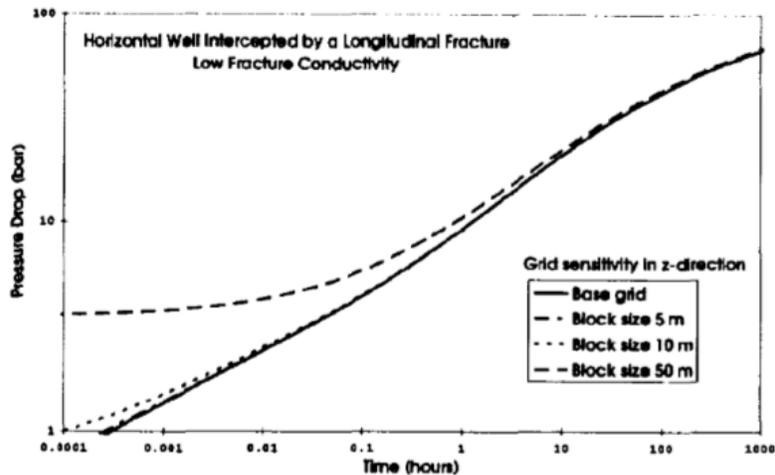
**Figura B.5** — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de la celda en dirección- $y$  (Hegre 1996).

En las **Figs. B.6 y B.7** se presenta el efecto del tamaño de celda en dirección-z para modelos considerando fracturas de conductividad finita e infinita, respectivamente. El comportamiento de la presión a tiempos cortos es sensible al tamaño de bloque en la dirección-z si la conductividad de la fractura es baja, por ello, es necesario utilizar celdas pequeñas para simular el periodo de flujo bilineal. Durante el periodo de flujo pseudoradial la diferencia de presión observada es solo ligeramente afectada por el tamaño de celda. Por otro lado, el comportamiento de presión transitoria para una fractura con conductividad finita es independiente de los tamaños de celda en dirección-z.

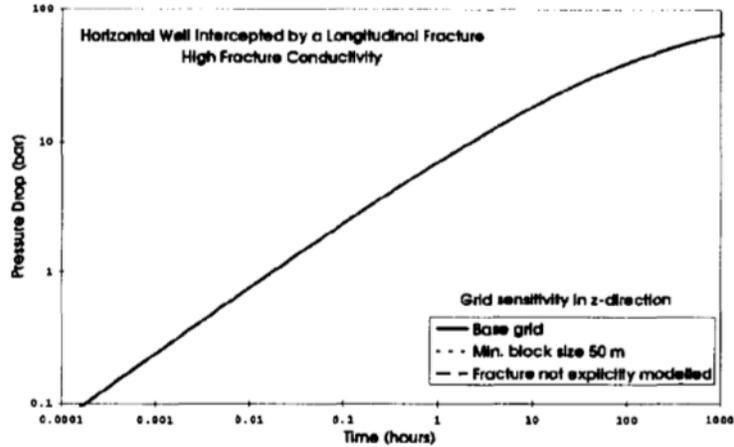
Una fractura de conductividad infinita puede alternativamente modelarse sin implementar realmente la fractura en el modelo pero conectando el pozo a cada celda en contacto directo con la fractura y especificando factores apropiados de conexión del pozo

$$T_w = \frac{2k\Delta x\Delta z}{\Delta y} \dots\dots\dots (B.2)$$

En la **Fig. B.7** observe que se obtienen resultados idénticos aplicando este método para incluir una fractura de conductividad infinita. La ventaja de este método es que las celdas de fractura que son muy pequeñas con grandes contrastes en permeabilidad comparadas con el yacimiento no se incluyen en el modelo. Con este método se incrementa la estabilidad numérica y el tiempo de cómputo se reduce considerablemente.

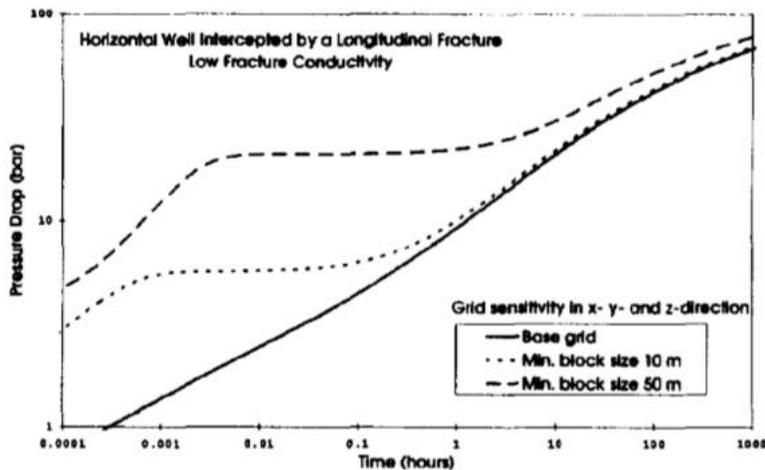


**Figura B.6** — Pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad intermedia. Efecto del tamaño de la celda en dirección-z (Hegre 1996).



**Figura B.7** — Pozo horizontal con una fractura longitudinal de conductividad infinita. Efecto del tamaño de la celda en dirección- $z$  (Hegre 1996).

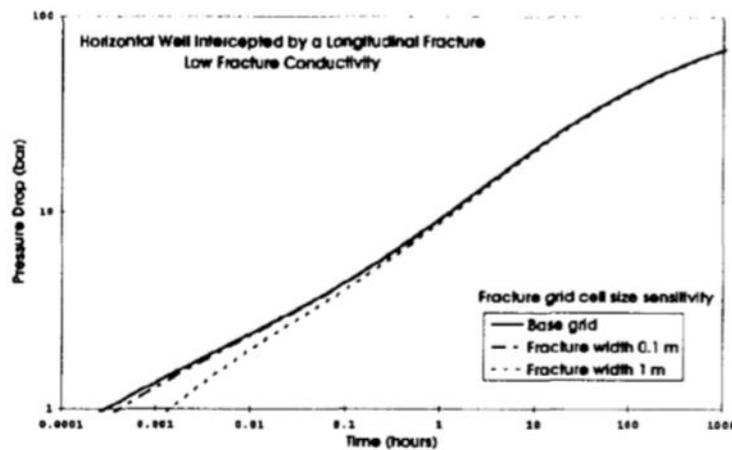
En la **Fig. B.8** se presenta el efecto combinado de aplicar celdas de 10 m y 50 m en todas direcciones. La fractura se modeló con una celda de 0.01 m en la dirección- $y$  como lo vimos anteriormente. El comportamiento de presión a tiempos cortos es altamente afectado por las celdas grandes en la dirección- $y$ . Sin embargo, en el periodo de flujo pseudoradial la diferencia en presión comparada con la malla base limitada a un mínimo tamaño de celdas de 10 m, es solo 1.4 bar. Con celdas de 50 m la caída de presión durante el periodo de flujo pseudoradial se incrementa a 10 bar, que corresponde a 15% del total de caída de presión. La caída de presión se incrementa principalmente debido al efecto de celdas grandes en dirección- $x$  y - $y$ .



**Figura B.8** — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del tamaño de la celda en todas las direcciones (Hegre 1996).

La dificultad computacional de simular el desempeño de la producción de pozos horizontales con fracturas de conductividad infinita se ilustra con el desfase en el tiempo de cómputo para ejemplos de fracturas de conductividad finita e infinita. Un modelo de una fractura de conductividad infinita requiere aproximadamente 10 veces el tiempo de cómputo usado en el modelo correspondiente de fractura de conductividad finita. Para pozos horizontales interceptados por fracturas altamente conductivas es por lo tanto particularmente favorable no modelar explícitamente la fractura.

Para evaluar el efecto de la permeabilidad y ancho de la fractura sobre el comportamiento de la presión y el tiempo de cómputo, se modeló el ejemplo de fractura de conductividad finita incrementado el ancho de 0.1 m a 1 m y manteniendo la conductividad de la fractura de 500 mD-m. El efecto en el comportamiento de la presión se muestra en la **Fig. B.9**. Un incremento en el tamaño de la fractura reduce ligeramente la caída de presión en el periodo de flujo bilineal, mientras que durante el periodo de flujo pseudoradial el efecto sobre la presión es insignificante. Incrementado el ancho de fractura de 0.01 m a 0.1 m el tiempo de cómputo fue reducido 20%, mientras una reducción del tiempo de cómputo cercana a 35% fue observada con una fractura de 1 m de ancho. Adicionalmente al tamaño de celdas y al contraste de permeabilidades de la fractura y del yacimiento, el número de celdas afecta el tiempo de cómputo considerablemente. El número de celdas en ejemplos presentados aquí con tamaños mínimos de 10 m y 50 m en todas las direcciones es aproximadamente 15% y 1% respectivamente del sistema de malla Base y el tiempo de cómputo se reduce a aproximadamente 5% y 0.5% respectivamente.



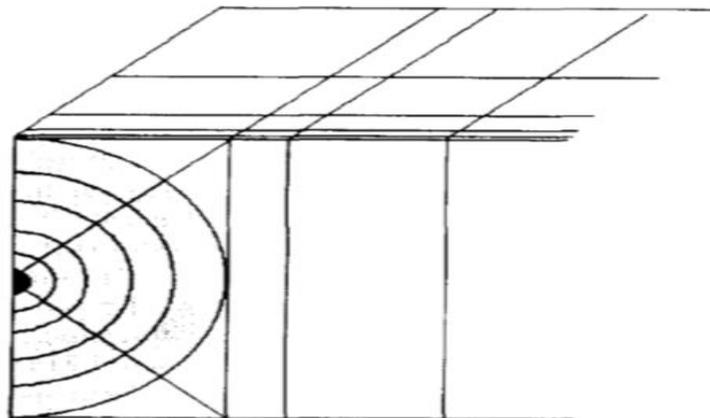
**Figura B.9** — Pozo horizontal con una fractura longitudinal. Efecto del ancho de la celda de fractura (Hegre 1996).

### Pozo horizontal con una fractura transversal

Para este caso se empleó una malla híbrida, la cual se ilustra en la **Fig. B.10**. En la región de la fractura se usó una malla cilíndrica transversal al eje del pozo horizontal, mientras en otra parte del yacimiento se utilizó una malla rectangular similar a la malla base utilizada para el caso de la fractura longitudinal rectangular. Los tamaños de celda de la malla base en la dirección-*R* (dirección perpendicular al pozo) se muestran en la **Tabla 3.2**. Las transmisibilidades aplicadas entre las celdas dentro de la malla cilíndrica y el factor de conexión entre los dos tipos de regiones son los mismos a los sugeridos por Pedrosa *et al.* (1986) para mejorar el tratamiento de pozos verticales, la única diferencia es la orientación de la malla cilíndrica. Para este caso, el factor de conexión del pozo está dado por:

$$T_w = \frac{\Delta\theta k_f w_f}{\ln \frac{r_f}{r_w}}, \dots\dots\dots (B.3)$$

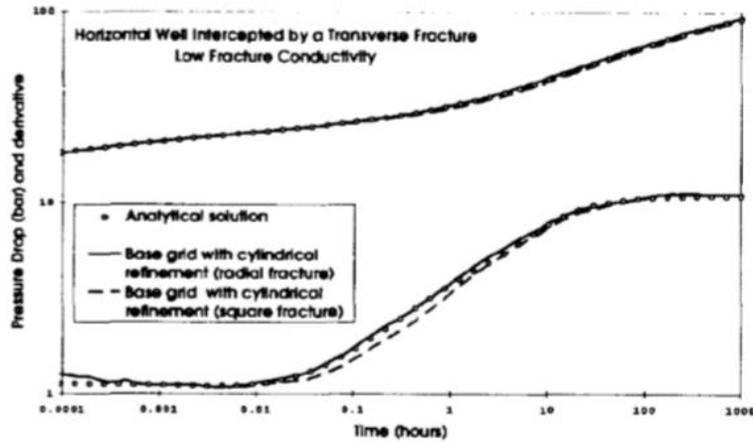
en donde el pozo está situado en los límites internos de las celdas internas.



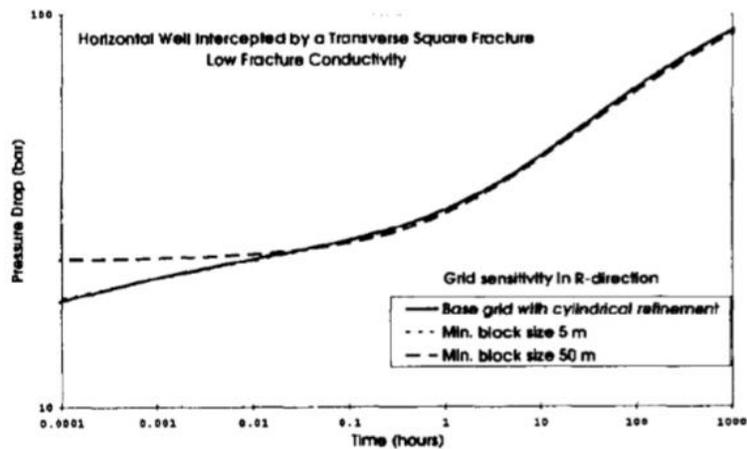
**Figura B.10** — Malla híbrida usada para modelar un pozo horizontal interceptado por una fractura transversal (Hegre 1996).

La respuesta de la simulación de la presión transitoria y su derivada se comparó con soluciones analíticas en la **Fig. B.11** para el modelo de fractura de conductividad finita. Se presentan dos resultados de simulación: (1) para una fractura radial y (2) para una fractura cuadrada respectivamente. La caída de presión es ligeramente más baja si la fractura es cuadrada debido a que el área de fractura es más grande. La caída de presión obtenida con la solución numérica es muy similar a la obtenida con la solución analítica para un pozo horizontal interceptado por una fractura radial que penetra totalmente la formación.

El efecto de incrementar el tamaño de celda en dirección- $R$  y  $-x$  se ilustra en la **Fig. B.12**. Difícilmente se observa alguna influencia en la presión si las celdas de la fractura hidráulica de tamaño mínimo de 5 m. Si modelamos la fractura hidráulica por un solo bloque en dirección- $R$  y el tamaño mínimo de celda en el resto del subsistema a lo largo del eje- $x$  es de 50 m, el comportamiento de presión es afectado principalmente durante el periodo temprano de flujo.



**Figura B.11** — Comportamiento de la caída de presión analítica y simulada de un pozo horizontal interceptado por una fractura transversal (Hegre 1996).



**Figura B.12** — Pozo horizontal con una fractura transversal. Efecto del tamaño de bloque ( $\Delta R$ ) en la región de la fractura (Hegre 1996)

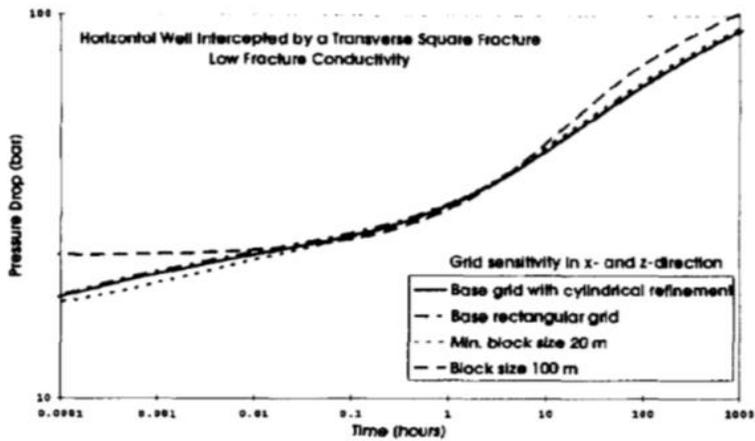
Cuando se modela una fractura transversal con un sistema estándar de malla cartesiana, el pozo debe penetrar la fractura en el medio de una celda. Para el factor de conexión del pozo se utiliza una forma ajustada del modelo de Peaceman en dirección-y:

$$T_w = \frac{2\pi k_f w_f}{\ln \frac{r_o}{r_w}} \dots\dots\dots (B.4)$$

en donde el radio equivalente de presión de la celda está definido como

$$r_o = 0.14\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} \dots\dots\dots (B.5)$$

En la **Fig. B.13** se muestra un comparativo de los resultados obtenidos utilizando el sistema de malla cartesiana con los resultados de la malla híbrida. La malla rectangular base se modeló con una celda de 1 m en el centro de la fractura, que incrementa gradualmente hasta 5 m en dirección-x y -z (ver **Tabla 3.2**). No existe una diferencia perceptible (inclusive con tamaños mínimos de celda de 20 m) entre el comportamiento de la presión obtenido por la malla rectangular base y la malla híbrida base. Sin embargo, el modelar la fractura con una sola celda (100 m) tiene una influencia significativa en el comportamiento de la presión. La caída de presión es muy alta inicialmente y durante el periodo de flujo pseudoradial.



**Figura B.13** — Pozo horizontal con una fractura transversal. Efecto del tamaño de celda ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) en la región de la fractura (Hegre 1996).

El comportamiento de la presión transitoria de un pozo horizontal interceptado por fracturas transversales puede calcularse exactamente con una malla cartesiana. Sin embargo, comparado con el refinamiento de malla cilíndrica, se incrementa el tiempo de cómputo para obtener la misma exactitud.

En general, se requieren celdas pequeñas cerca del área de fractura para simular el comportamiento de la presión transitoria. El tamaño de celda necesario para lograr una exactitud aceptable depende del tamaño de fractura.

#### Aplicación del concepto de radio efectivo del pozo

El concepto de radio efectivo de pozo está ilustrado en los mismos modelos discutidos anteriormente. Para un pozo horizontal interceptado por una fractura longitudinal de conductividad infinita  $r_{we}$  es aproximadamente la mitad de la fractura, en este caso de 25m. Para el modelo de una fractura longitudinal de conductividad finita, donde la conductividad adimensional de la fractura,  $F_{CD}$  es 10,  $r_{we}$  es 21.5m, mientras que en el modelo de un pozo horizontal interceptado por una fractura transversal de conductividad finita,  $r_{we}$  es de tan solo 7.7m. Se aplicó un mallado regular en coordenadas cartesiana con celdas de 150m por 150m, por ejemplo  $r_o$  es 29.7m.

La **Fig. B.14** compara el comportamiento de la presión simulada en el pozo obtenida en modelos de malla con celdas grandes aplicando el radio efectivo equivalente de pozo con el comportamiento de la presión obtenida del modelo de un mallado fino concentrado durante las primeras 1000 horas del periodo de producción. Inicialmente el comportamiento simulado de la presión en el modelo de malla con celdas grandes no corresponde al del mallado fino. Para el modelo con la fractura longitudinal, la discrepancia es alta. No obstante, durante el periodo de flujo pseudoradial, después de 400 horas, los modelos se emparejan. En la **Fig. B.15** los gastos de aceite simulados para cada modelo se comparan mostrando que es más acertado el modelo de radio efectivo de pozo.

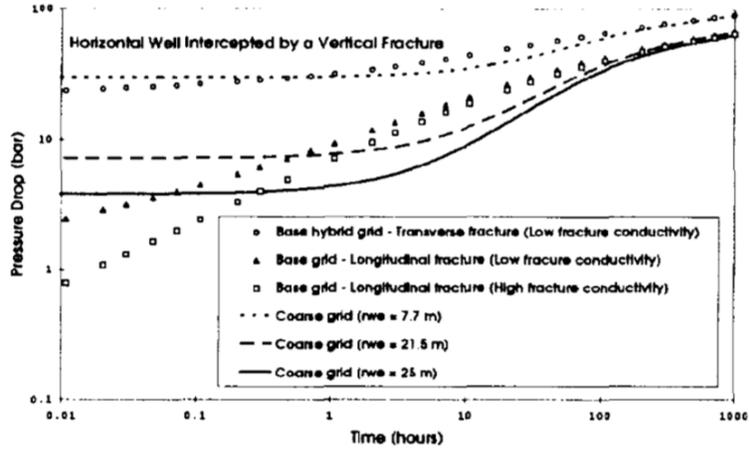


Figura B.14 — Datos de presión en una malla con refinamiento y una malla sin refinamiento (Hegre 1996).

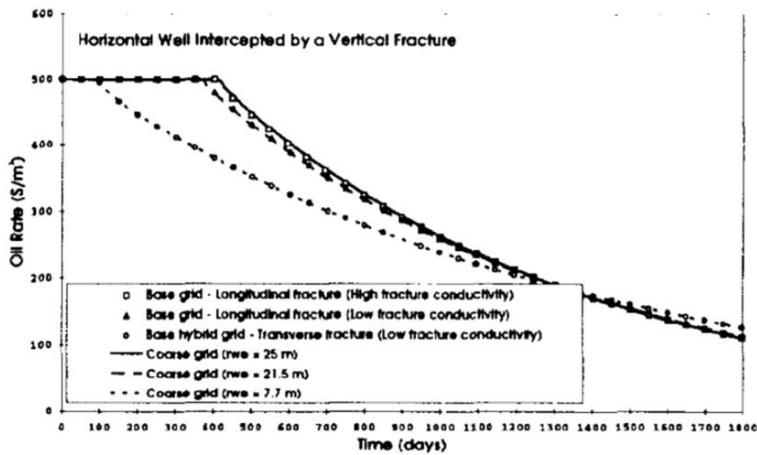


Figura B.15 — Datos de gasto de aceite en una malla con refinamiento y una malla sin refinamiento (Hegre 1996).

## APÉNDICE C

### DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSFORMACIÓN DE VECTORES A INDICES PARA UNA MALLA CARTESIANA EN MRST

El procesamiento de mallas en MATLAB, "acomoda" las propiedades de los bloques en una estructura, donde cada propiedad le corresponde una matriz. Al momento de buscar información en la matriz, MATLAB lo maneja como un arreglo vectorial donde se enumera cada coordenada en una matriz de  $N \times 3$ , por lo que no es posible utilizar las coordenadas reales del bloque de matriz, ya que las funciones internas requieren de índices. Es por esto que se necesitó de este modelo para representar un sistema homogéneo y con su entendimiento, adecuarlo a mallas mixtas.

Sea un bloque de  $n_x n_y$  bloques homogéneos de mismas longitudes y sea  $i$  el índice del  $i$ -ésimo bloque. Primero se desarrolla en el plano  $xy$  para darle simpleza al entendimiento de este método (**Fig. C.1**).

1, $n_y$	2, $n_y$	...	$k, n_y$	...	$(n_x-1), n_y$	$n_x, n_y$
...	...	...	...	...	...	...
1, $M$	2, $M$	...	$k, M$	...	$(n_x-1), M$	$n_x, M$
1, $M-1$	2, $M-1$	...	$k, M-1$	...	$(n_x-1), M-1$	$n_x, M-1$
...	...	...	...	...	...	...
1,2	2,2	...	$k, 2$	...	$(n_x-1), 2$	$n_x, 2$
1,1	2,1	...	$k, 1$	...	$(n_x-1), 1$	$n_x, 1$

**Figura C.1** — Vista en planta de las celdas de una malla de longitud  $n_x n_y$  elementos.

Como se puede apreciar en la **Fig. C.1**, se recorre  $n_x$  número de celdas, siendo la primer componente la que determina el recorrido de izquierda a derecha y la segunda componente el recorrido de abajo hacia arriba, sin embargo, si de alguna manera "desapareciéramos" las filas para formar una sola con un tamaño de  $[1, n_x n_y]$ , se vería como en la **Fig. C.2**:

Coordenadas	1,1	1,2	...	1, $k$	...	1, $n_x$	2,1	2,2	$M-1, k$	$n_y - 1, n_x$
índices	1	2	...	$k$	...	$N_x$	$N_x+1$	$N_x+2$	$(M-1)N_x+k$	$n_x n_y$

**Figura C.2** — Distribución de las celdas como un vector y los índices que le aplican.

Suponiendo la siguiente representación  $(u, v)$  como el vector de coordenadas de las celdas, se puede notar que el índice al llegar al límite inferior derecho encuentra que es el número de celdas en total en  $v$ , esto es  $n_x$  celdas.

La siguiente celda es la de la fila 2 de la extrema izquierda, puede notarse el patrón de acomodo como:

$$n_x(v-1) + u \dots\dots\dots (C.1)$$

Cada que  $u=n_x, v=v+1$ , y así sucesivamente hasta que  $v-1=n_y-1$

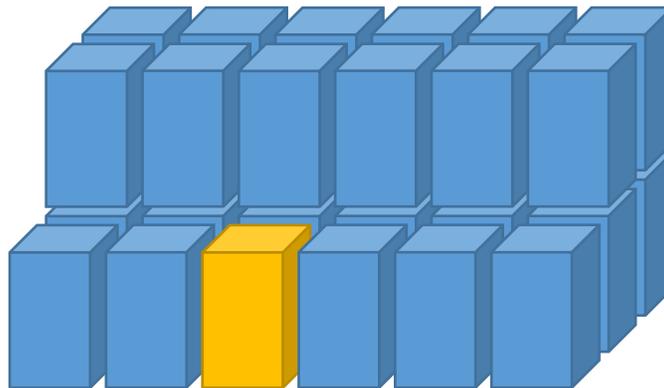
De igual forma, al extenderlo en el eje  $z$ , se puede hallar la celda haciendo uso de la localización en el plano  $xy$ , por lo que, haciendo una analogía, la ecuación quedaría:

$$i = n_x n_y (w-1) + n_x (v-1) + u \dots\dots\dots (C.2)$$

Al realizar un subsistema, se puede notar que  $n_x n_y$  son el número de celdas en un layer de  $z$  y donde  $w$  nos da la ubicación barriendo un área hasta completar un volumen.

Así mismo  $n_x$  es la longitud en  $x$ , por lo que  $v$  nos da la posición de esa línea dentro de un área y  $u$  es un punto, donde su posición nos da la ubicación dentro de un volumen.

Al ser  $u$  el elemento actual de barrido, se requiere que  $v$  y  $w$  cuenten desde el segmento anterior.



**Figura C.3** — Malla cartesiana de 3 dimensiones con un corte de celdas.

Ejemplo; Como se puede notar en la **Fig. C.3**:

$$n_x=6$$

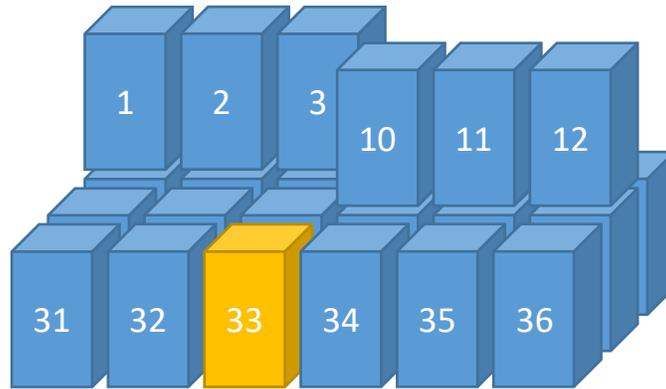
$$n_y=3$$

$$n_z=2$$

Por lo que, la ubicación del cubo amarillo de cordenadas  $(u,v,w)=(3,3,2)$  se convierte en el  $i$ -ésimo cubo de índice:

$$(6)(3)(2-1) + (6)(3-1) + 3 = 33 \dots\dots\dots (C.3)$$

En la **Fig. C.4** es posible observar que la Ec. C.2 es válida en MRST para encontrar índices en mallas 3D.



**Figura C.4** — Malla cartesiana con algunas celdas eliminadas para notar los índices que le corresponden.

## NOMENCLATURA

$A_x$	=	Área transversal en dirección-x, $L^2$ , $m^2$ , [ft <sup>2</sup> ]
$A_y$	=	Área transversal en dirección-y, $L^2$ , $m^2$ , [ft <sup>2</sup> ]
$B$	=	Factor de volumen, adimensional.
$B_o$	=	Factor de volumen del aceite, adimensional.
$c$	=	Compresibilidad del fluido, $Lt^2/m$ , $bar^{-1}$ , [psi <sup>-1</sup> ]
$C$	=	Constante de desplazamiento en las celdas de la malla, L, m, ft
$C_1, C_2, C_3, C_4$	=	Constantes de integración
$c_f$	=	Compresibilidad de la formación, $Lt^2/m$ , $bar^{-1}$ , [psi <sup>-1</sup> ]
$c_t$	=	Compresibilidad total, $Lt^2/m$ , $bar^{-1}$ , [psi <sup>-1</sup> ]
$D_{IP}$	=	Constante del índice de productividad, $L^3/t$ , $m^3/día$ , [BPD]
$Der$	=	Función derivada logarítmica
$EDP$	=	Ecuación Diferencial Parcial.
$Ei$	=	Integral exponencial
$Erf$	=	Función error.
$e_t$	=	Error de truncamiento
$F_c$	=	Conductividad de la fractura, $L^3$ , $md \cdot m$ , [md-ft]
$F_{cD}$	=	Conductividad adimensional de la fractura
$G$	=	Malla
$h$	=	Espesor, L, m, [ft]
$k$	=	Permeabilidad, $L^2$ , md
$k_f$	=	Permeabilidad de la fractura, $L^2$ , md
$k_{fH}$	=	Permeabilidad de la fractura de conductividad infinita, $L^2$ , md
$k_{fL}$	=	Permeabilidad de la fractura de conductividad finita, $L^2$ , md
$LGR$	=	Local Grid Refinement.
$lr$	=	Matriz de índices de permeabilidad
$ls$	=	vector columna en dirección-z, L, m, [ft]
$m$	=	Pendiente
$Mcells$	=	Matriz derivada de $lr$ que contiene los índices del pozo
$n$	=	Número de elementos, adimensional
$Np$	=	Producción acumulada de aceite, $L^3$ , [Mbl]
$n_x$	=	Número de elementos en dirección-x, adimensional
$n_y$	=	Número de elementos en dirección-y, adimensional
$n_z$	=	Número de elementos en dirección-z, adimensional
$p_b$	=	Presión de burbuja, $m/Lt^2$ , psi
PEBI	=	Perpendicular Bisection Grid
$p_i$	=	Presión inicial, $m/Lt^2$ , bar, [psi]
$PI$	=	Índice de productividad $L^3/t / m/Lt$ , $m^3/día/bar$ [BPD/psi]
$PVT$	=	Prueba de Presión, Volumen y Temperatura
$p_{wD}$	=	Presión adimensional de pozo.
$p_{wf}$	=	Presión de fondo fluyendo, $m/Lt^2$ , bar, [psi]

$q$	=	Gasto, $L^3/t$ , $m^3/día$ , [BPD]
$q_w$	=	Gasto en el pozo, $L^3/t$ , $m^3/día$ , [BPD]
$r$	=	Distancia radial, L, m, [ft]
$r_e$	=	Radio externo, L, m, [ft]
$r_f$	=	Longitud media de la fractura en dirección-r, L, m, [ft]
$RG_A$	=	Relación Gas Aceite, adimensional, $sft^3/stb$
$r_o$	=	Radio equivalente de pozo de Peacemann, L, m, [ft]
$r_w$	=	Radio de pozo, L, m, [ft]
$r_{wa}$	=	Radio efectivo debido al daño, L, m, [ft]
$r'_{wa}$	=	Radio efectivo debido al daño en un pozo horizontal con fractura hidráulica, L, m, [ft]
$r_{we}$	=	Radio efectivo equivalente del pozo L, m, [ft].
$s$	=	Daño, adimensional
$t$	=	Tiempo, t, h
$T$	=	Transmisibilidad, $L^4 t/m$ , md-m/cp
$TAMEST$	=	Academia de medicina, ingeniería y ciencias de Texas.
$t_D$	=	Tiempo adimensional.
$v_i$	=	Vector de desplazamiento en las celdas de la fractura, L, m, [ft]
$V_{p_i}$	=	Volumen poroso inicial, $L^3$ , $ft^3$
$w_f$	=	Ancho de la fractura, L, m, [ft]
$x$	=	Dirección-x en coordenadas cartesianas, L, m, [ft]
$x_a$	=	Vector acumulado en dirección-x, L, m, [ft]
$x_f$	=	Longitud media de la fractura, L, m, [ft]
$y$	=	Dirección- y en coordenadas cartesianas, L, m, [ft]
$y_a$	=	Vector acumulado en dirección-y, L, m, [ft]
$y_f$	=	Longitud media de la fractura en dirección-y, L, m, [ft]
$z$	=	Dirección-z en coordenadas cartesianas, L, m, [ft]
$z_a$	=	Vector acumulado en dirección-z, L, m, [ft]
$\Delta p$	=	Caída de presión, $m/Lt^2$ , psi, [bar]
$\Delta p_{daño}$	=	Caída de presión debido al daño, $m/Lt^2$ , psi, [bar]
$\Delta p_w$	=	Caída de presión en el pozo, $m/Lt^2$ , psi, [bar]
$\Delta p_{yac}$	=	Caída de presión en el yacimiento, $m/Lt^2$ , psi, [bar]
$\Delta t$	=	Incremento de tiempo, t, h
$\Delta x$	=	Diferencia de longitud entre celdas en dirección-x, L, m, [ft]
$\Delta y$	=	Diferencia de longitud entre celdas en dirección-y, L, m, [ft]
$\eta$	=	Difusividad hidráulica, $L^2/t$ , md-psi/cp
$\mu$	=	Viscosidad, m/Lt, cp
$\rho$	=	Densidad, $m/L^3$ , $Kg/m^3$ , [lb/ft <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	=	Densidad del gas, $m/L^3$ , lb/ft <sup>3</sup>
$\rho_o$	=	Densidad del aceite, $m/L^3$ , °API
$\sigma_{Hmin}$	=	Esfuerzo mínimo, $m/Lt^2$ , psi
$\sigma_{Hmax}$	=	Esfuerzo máximo, $m/Lt^2$ , psi
$\phi$	=	Porosidad, adimensional