



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Modelado numérico de la propagación  
de ondas elásticas en un medio con  
inclusiones y topografía irregular  
mediante el método indirecto de  
elementos de contorno**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Geofísico**

**P R E S E N T A**

Oscar Isao López Sugahara

**DIRECTOR(A) DE TESIS**

Dr. Francisco José Sánchez Sesma



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022

# Índice

---

## Resumen, Abstract

1.	Introducción.....	4
1.1.	Objetivos.....	5
1.2.	Antecedentes Matemáticos.....	5
1.2.1.	Integración Gaussiana.....	6
2.	Ondas Elásticas.....	8
2.1.	Fundamentos.....	8
2.1.1.	Teoría de Elasticidad.....	9
2.1.2.	Atenuación de las Ondas.....	11
2.1.3.	Ecuación de Navier-Cauchy.....	11
2.1.4.	Ondas P y S.....	14
2.1.5.	Velocidad de las Ondas de Rayleigh.....	16
2.1.6.	Función de Green.....	19
2.1.7.	Funciones de Bessel y de Hankel.....	20
2.1.8.	Ecuaciones Integrales.....	21
2.1.9.	DBEM e IBEM.....	22
2.2.	Método Indirecto de Elementos de Contorno (IBEM).....	23
2.2.1.	Teorema de Somigliana.....	23
2.2.2.	Representación Integral de Desplazamientos y Tracciones.....	23
2.2.3.	Formulación del IBEM en el Dominio de la Frecuencia.....	24
2.2.4.	Función de Green para Fuente Puntual Móvil en un Medio Elástico...	25
2.2.5.	Difracciones por topografías e interfaces irregulares.....	27
2.2.6.	Discretización del IBEM.....	29
3.	Consideraciones para el IBEM y descripción del código.....	32
3.1.	Análisis de Fourier.....	32
3.1.1.	El Teorema de la Convolución.....	32
3.1.2.	Transformada de Fourier.....	33
3.1.3.	Espectros de Amplitud y de Fase.....	34
3.1.4.	Generación de Sismogramas.....	35
3.1.5.	Pulsos de Ricker y de Gabor.....	35
3.2.	Código del IBEM.....	36
3.2.1.	Parámetros de Entrada y Salida en IBEM.....	37
3.2.2.	Estructura General y Funcionamiento.....	37
3.2.3.	Generación de la Geometría del Modelo.....	38
3.2.4.	Cálculo de la Función y Tracciones de Green.....	38

3.2.5.	Código para Sismogramas.....	38
4.	Formulación de Algunos Problemas con IBEM.....	40
4.1.	Difracción de Ondas SH en Topografía Semicircular.....	40
4.1.1.	IBEM vs DBEM.....	42
4.2.	Modelos 2.5D de Valles Aluviales.....	43
4.2.1.	Valle Aluvial Simple.....	43
4.2.2.	Valles Aluviales Adyacentes.....	46
5.	Resultados.....	49
5.1.	Respuesta de Ondas SH en Topografía Semicircular.....	49
5.1.1.	Comparación con DBEM.....	52
5.2.	Respuesta Sísmica de un Valle Aluvial Simple.....	53
5.2.1.	Comparaciones con FLAC.....	65
5.3.	Respuesta Sísmica de Valles Aluviales Adyacentes.....	68
6.	Conclusiones.....	84

Reconocimientos

Bibliografía

Apéndices

A.1 Tabla de Coeficientes para la Cuadratura de Gauss

A.2 Ecuaciones Complementarias de la Función de Green para una Fuente Móvil

A.3 Desplazamientos a Profundidad en Valles Aluviales (Figuras)

# Resumen

Debido a su complejidad, son de interés las respuestas sísmicas tridimensionales de valles y de topografías bidimensionales. Se obtuvieron respuestas utilizando el método de elementos de contorno indirecto (IBEM) que produce resultados muy precisos para los modelos propuestos en este trabajo. El método se basa en la construcción de ondas difractadas por fuentes en la frontera, que se obtienen con las funciones de Green apropiadas para una fuerza puntual armónica que se mueve a lo largo de los límites. Se presentan las respuestas debidas a la propagación de ondas en los valles aluviales, además de algunas geometrías topográficas adicionales para su posterior análisis. Todos los resultados se presentan en el dominio del tiempo y se tienen algunas representaciones en el dominio de la frecuencia para facilitar la identificación de los patrones de difracción. Tanto los modelos topográficos como los de valle se ejecutaron con varios tipos de ondas incidentes que van desde las ondas P, SV, SH y Rayleigh, además de tener diferentes ángulos de incidencia. Los resultados muestran que la presencia de topografías y de valles aluviales afectan la propagación de las ondas sísmicas y aumentan las amplitudes de las ondas difractadas por los extremos.

# Abstract

Due to its complexity, three dimensional seismic responses of two-dimensional valleys and topographies are of interest. Responses were obtained by using the indirect boundary element method (IBEM) which yields very accurate results for the models proposed in this work. The method is based upon the construction of diffracted waves by single layer boundary sources, which are then obtained with the appropriate Green's functions for an harmonic point force moving along the boundaries. Responses due to wave propagation in alluvial valleys are presented in addition to some additional topographic geometries for further analysis. All results are presented in the time domain with some having some representations in the frequency domain for easier identification of diffraction patterns. Both topographic and valley models were run with various incident wave types ranging from P, SV, SH and Rayleigh waves, on top of having different incidence angles. The results show that the presence of topographies and alluvial valleys greatly affect the propagation of seismic waves and increase the amplitudes of the waves diffracted by the edges.



# Capítulo 1.

## Introducción

---

La sismología a sido utilizada para la exploración de recursos naturales, además de ser auxiliar para el diseño de edificaciones en sitios expuestos a movimientos sísmicos en los que pueden presentarse efectos de sitio. Se ha tenido un gran avance investigativo en los últimos años debido al auge de la exploración petrolera, donde los métodos geofísicos sísmicos juegan un papel fundamental al ser utilizados para la búsqueda de hidrocarburos. Siendo el petróleo la principal fuente de energía utilizada para vehículos de todo tipo se realizó mucha investigación para mejorar su exploración y su explotación, la cual propició el pleno desarrollo de la sismología. Este auge fue también motivado por los estudios para comprender la composición de la tierra y los terremotos. En el siglo pasado, la tecnología no tenía la capacidad para procesar cálculos muy grandes ni era capaz de almacenarlos, por lo cual en muchas áreas científicas era muy común utilizar métodos gráficos en vez de métodos computacionales para interpretar las observaciones. Gracias al avance tecnológico de las últimas décadas, actualmente se pueden analizar modelos medianamente complejos desde la comodidad de una computadora portátil.

México está expuesto a sismos originados tanto en las fronteras de las placas tectónicas por lo que hay regiones con altos niveles de peligro o amenaza debido al movimiento del terreno. Además, en sitios con depósitos de suelos blandos y topografía irregular pueden presentarse amplificaciones importantes, denominadas genéricamente como efectos de sitio. La importancia del estudio de la incidencia de ondas sísmicas y la subsecuente generación de ondas superficiales y ondas refractadas dentro de un valle aluvial es crucial teniendo la Ciudad de México construida sobre un lago, condiciones que propician la aparición de esas ondas y la respuesta sísmica peculiar del valle.

En este trabajo se aproxima, si bien solo localmente, la respuesta generada por un valle aluvial similar al Valle de México mediante el método indirecto de elementos de contorno (IBEM), con el objeto de discutir el comportamiento sísmico dado dentro de un valle con una capa sedimentaria suave en el cual inciden ondas de cuerpo y de Rayleigh. Anteriormente se ha realizado por [Hisada, Aki y Teng \(1993\)](#) un estudio empleando la versión en tres dimensiones del método directo de elementos de contorno (BEM) para analizar y modelar una cuenca sedimentaria de la región de Kanto, Japón con lo cual reprodujeron las largas duraciones y amplitudes registradas en estaciones de Tokyo y Yokohama por el sismo de Izu-hanto-toho-oki en 1980.

En el capítulo 2, se explican los fundamentos básicos dentro de la teoría de la elasticidad dinámica. También se desarrolla la formulación matemática del método IBEM [Pedersen,](#)

Sánchez-Sesma & Campillo (1994), para resolver las ecuaciones de elasticidad dinámica en un medio continuo, homogéneo e isótropo dentro de un dominio de dos y media dimensiones con una inclusión. Además, se explica la metodología para el cálculo del campo de desplazamientos para ondas incidentes P, SV, SH y Rayleigh, en conjunto con la integración analítica y numérica de la función de Green y el tensor de tracciones.

En el capítulo 3, se tocan los fundamentos teóricos del análisis de Fourier, necesarios para el análisis y el procesamiento de los resultados. La generación de los sismogramas requiere de una selección cuidadosa del modelo y de la frecuencia máxima de interés. El modelado adecuado de altas frecuencias demanda modelación más precisa con discretización más fina y mayores costos.

En los capítulos 4 y 5, se hace un estudio empleando el método IBEM para resolver problemas de naturaleza topográfica y de valles aluviales. Entre los modelos realizados, se le da un mayor enfoque al valle aluvial por su importancia al tener la capacidad de amplificar las ondas e incrementar el riesgo sísmico. Además, son de interés los efectos producidos por diferentes topografías las cuales ya han sido estudiadas anteriormente para diferentes geometrías. Ver, por ejemplo, Trifunac (1973), Kawase (1988), Pedersen, Sánchez-Sesma & Luzón (1995), Ba & Yin (2016), Mejía-López (2021), López-Sugahara (2022). Observaciones realizadas por Mobin en 2018 demuestra la efectividad de los métodos de elemento de contorno para analizar amplificaciones por topografías adyacentes en dos dimensiones y con incidencia normal.

## 1.1 Objetivos

- Simular la incidencia de ondas P, SV, SH y Rayleigh en un valle aluvial para un mayor entendimiento del Valle de México.
- Simular la incidencia para ondas a diferentes ángulos de incidencia con respuestas en el tiempo y frecuencia.
- Encontrar factores geométricos y mecánicos característicos del atrapamiento de ondas sísmicas en valles aluviales.

## 1.2 Antecedentes Matemáticos

Se presenta una breve introducción al método de integración numérica conocido como integrales de Gauss, el cual se utiliza para resolver las ecuaciones integrales dentro del sistema de ecuaciones que conforman los modelos en IBEM.

### 1.2.1 Integración Gaussiana

El método de integración Gaussiana o cuadratura de Gauss, es una mejora del típico método de integración con la regla del trapecio. En la cuadratura de Gauss se elimina la restricción de los puntos fijos en la regla del trapecio y da cierta libertad para evaluar con dos puntos cualesquiera.

El desarrollo del método de integración por cuadratura de Gauss parte a partir de los polinomios de Legendre, dichos polinomios tienen la siguiente forma:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad \text{donde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Los polinomios de Legendre cumplen con las siguientes propiedades básicas:

- 1)  $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$
- 2)  $\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot Q_k(x) dx = 0$  ( $k < n$ ), donde  $Q_k(x)$  es un polinomio de grado  $k$
- 3) el polinomio  $P_n(x)$  tiene  $n$  raíces reales en el intervalo  $(-1, 1)$

La derivación de la fórmula para la cuadratura Gaussiana surge de la consideración de una función  $y = f(t)$  que tiene un intervalo de  $[-1, 1]$ . De forma que en la fórmula:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (1.2)$$

Es exacta para todos los polinomios  $f(t)$ , donde  $A_i$  y  $t_i$  son los coeficientes y los puntos seleccionados del método. Dado que hay  $2n$  constantes  $t_i$ , la ecuación 1.2 es válida para:

$$f(t) = 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1} \quad (1.3)$$

Por lo tanto, la ecuación 1.2 se describe como:

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k, \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$$

$$\text{y } f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k$$

Entonces, se obtiene:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (1.4)$$

Ahora, tomando en cuenta las siguientes relaciones:

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k + 1} = \begin{cases} \frac{2}{k + 1} & \text{cuando } k \text{ es par} \\ 0 & \text{cuando } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Y puede concluirse que es suficiente con determinar  $A_i$  a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n A_i = 2 \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \\ \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Mediante el sistema mostrado es posible encontrar los coeficientes de la cuadratura de Gauss para un polinomio de Legendre de grado  $n$  (ec. 1.1). Los coeficientes  $A_i$  salen entonces de la solución al sistema de ecuaciones partiendo de la obtención de las raíces del polinomio, las raíces son los puntos  $t_i$

En los apéndices se muestra una tabla con las constantes para polinomios de Legendre hasta de grado 6. (ver [apéndice A.1](#)).

# Capítulo 2.

## Ondas Elásticas

---

Galileo fue el primer matemático en considerar y cuestionar el efecto de la ruptura de un sólido debido a un esfuerzo, a principios del siglo XVII realizó trabajos para explicar el comportamiento de objetos sometidos a cargas.

Es en el siglo XIX donde investigadores como Coulomb, Poisson, Navier y Cauchy realizaron sus importantes aportaciones para la elasticidad dinámica.

En los años más recientes se han desarrollado trabajos y estudios de la propagación de ondas elásticas en medios continuos con diversos grados de complejidad, estos estudios permitieron calcular esfuerzos y desplazamientos (ver por ejemplo, [Lamb 1904](#), [Love 1926](#), [Aki & Richards 1980](#)). Es de suma importancia entender las bases que se consideran para la realización de los modelos matemáticos, estos son idealizados haciendo algunas consideraciones físicas importantes las cuales permiten simplificar los problemas.

### 2.1 Fundamentos

La teoría de la elasticidad considera medios continuos para un análisis lo más simple posible.

Un medio continuo homogéneo e isótropo es aquel que se aplica para la simplificación conceptual de un material que cumpla con las siguientes propiedades físicas:

- El material o medio no tiene espacios vacíos, poros, fracturas, etc. El medio es macizo sin ningún tipo de irregularidad. Las propiedades pueden describirse con funciones continuas.
- Cumple con la propiedad de homogeneidad, por lo que todos los puntos o elementos dentro del medio tienen las mismas características físicas.
- Cumple con la propiedad de la isotropía, por lo que ninguna característica física del medio varía con respecto a alguna dirección.

El concepto de medio continuo permite definir el esfuerzo en un punto, lo cual nos permite derivar el tensor de esfuerzos para un lugar geométrico o punto dentro de un medio.

Los medios continuos se clasifican como:



Figura 1. Clasificación de los medios continuos.

Los cuerpos rígidos son aquellos cuyas conexiones intermoleculares permanecen invariantes dando así una velocidad de propagación de ondas infinita, lo cual es imposible en la realidad y nunca se ha llegado a observar. Los cuerpos deformables que se asemejan más a los materiales encontrados en la realidad tienen propiedades físicas bien definidas y se caracterizan por el hecho de que pueden cambiar su forma y por lo tanto deformarse debido a alguna acción física impuesta sobre el material.

Para la teoría de la elasticidad es de suma importancia tomar las dos consideraciones siguientes: que el cuerpo o material sea un medio continuo, que presente las mismas propiedades físicas en cada uno de sus segmentos que conforman al material; y que sea un cuerpo deformable, presentando así diferentes comportamientos a la propagación de la energía dependiendo del material.

### 2.1.1 Teoría de Elasticidad

Cuando un cuerpo deformable sufre una deformación, cada punto que compone al material se desplazará y cambiara de posición relativa; la diferencia en el cambio de la posición de un punto en un material se denomina el campo de desplazamientos, donde este incluye el cambio de posición para cada uno de los puntos que conforman al cuerpo.

El tensor de deformaciones ayuda a describir el campo de desplazamientos:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

Este sale del teorema de Pitágoras considerando el cambio en la distancia entre dos puntos de un material después de haber presenciado un proceso de deformación. El tensor es simétrico y en su

representación matricial es auto transpuesto, en otras palabras, al transponer el tensor su transpuesta tendrá la misma estructura.

$$e_{ij} = e_{ji} \quad (2.2)$$

El tensor de esfuerzos es un ente matemático con el cual se logra describir las componentes de fuerza por unidad de área que actúan sobre una parte de un cuerpo. El caso más sencillo es aislar o dividir un cuerpo en varias partes y tomar solamente un segmento cúbico, a las caras perpendiculares del cubo se les asocian los esfuerzos normales los cuales tienen un comportamiento compresional o de tensión, mientras que los esfuerzos cortantes o de cizalla se asocian a líneas paralelas a las caras del cubo elemental.

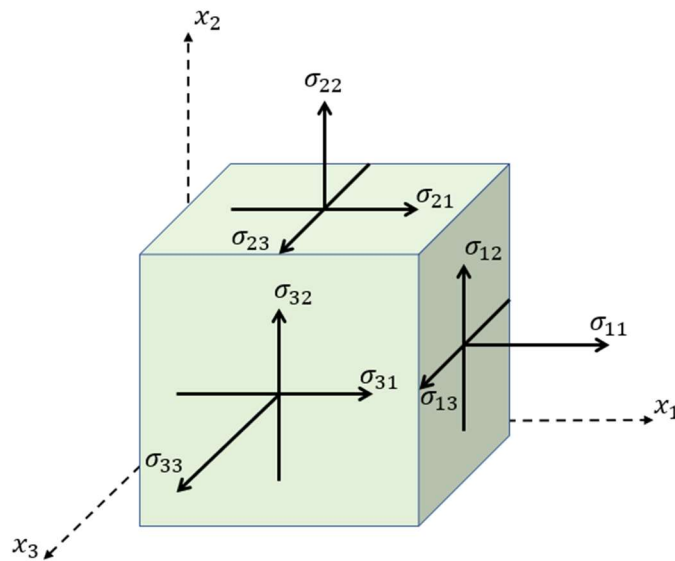


Figura 2. Componentes del tensor de esfuerzos en las tres caras de un cubo elemental.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$\sigma$  es el tensor de esfuerzos cuya diagonal principal son los esfuerzos normales y los términos fuera de la diagonal son los esfuerzos cortantes.

Con la ayuda del tensor de esfuerzos y deformaciones se puede escribir la ley de Hooke en forma indicial quedando:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.4)$$

Siendo  $\lambda$  y  $\mu$  las constantes de poisson y de lame,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

### 2.1.2 Atenuación de las Ondas

En un medio homogéneo isótropo idealizado es posible propagar a través de estas ondas sin ningún tipo de atenuación o amortiguamiento de la onda, pero en la naturaleza no sucede así; usualmente en un medio material real se tendrá un decremento continuo de la energía de las ondas debida a varios factores de disipación de energía, la simulación de esta pérdida de energía es posible agregando un parámetro de amortiguamiento el cual se denotará como  $Q$ , este también llega a conocerse como factor de calidad. Este factor se introduce a los cálculos mediante la conversión de sus parámetros a cantidades complejas.

El factor de calidad  $Q$  es adimensional y puede variar de  $0 \leq Q < \infty$ , donde valores de  $Q > 1$  son sobre amortiguados. El amortiguamiento más típicamente utilizado es el de una exponencial, dando así un decremento en la energía de una señal exponencialmente.

$$y(x) = f(x) \cdot e^{-\lambda x} \quad (2.5)$$

Aquí  $f(x)$  es la función original sin amortiguamiento y  $e^{-\lambda x}$  es la exponencial que dictará el decremento que tendrá la señal, donde  $\lambda$  es el decaimiento con respecto a  $x$ .

### 2.1.3 Ecuación de Navier-Cauchy

Sabiendo el comportamiento de las deformaciones y los esfuerzos, además de su relación dentro de un medio continuo, se puede establecer la ecuación que une a estos conceptos. La ecuación de Navier es aquella que logra conjuntar ambos conceptos.

Sea la ley de Newton representada por tensores:

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

y la ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.7)$$

Donde  $e_{ij}$  es el tensor de deformaciones y tiene siguiente la forma:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

Al sustituir el tensor de deformaciones en la ley de Hooke, se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$



Ahora se hace un intercambio de los índices ij por ki a la ecuación anterior:

$$\sigma_{ki} = \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ki} + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (2.10)$$

Y se introduce la ecuación en la segunda ley de Newton para el medio continuo, dando así la ecuación de Navier:

$$\lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ki} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Por último, al agrupar los términos para mejorar la visualización de la ecuación se obtiene:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \delta_{ki} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

La cual representa la ec. de Navier tensorial, utilizando ahora los operadores del laplaciano, la divergencia, del gradiente y el rotacional; se puede expresar la ecuación de forma vectorial, la cual se presenta a continuación:

$$\mu \Delta \underline{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + \underline{f} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Se puede relacionar al laplaciano, con la divergencia, el gradiente y el rotacional, utilizando:

$$\Delta \underline{u} = \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) \quad (2.14)$$

La cual es la identidad de Helmholtz; sustituyendo la identidad para el laplaciano en la ecuación de Navier, se obtiene:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) + \underline{f} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

Ahora, aplicando la descomposición de Helmholtz a la ecuación para darle una solución; el campo vectorial descrito por la ecuación de Navier puede descomponerse a un potencial escalar ( $\phi$ ) y un potencial vectorial ( $\psi$ ) de manera que:

$$\underline{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi \quad (2.16)$$

Siendo así posible la separación del campo de desplazamientos. La parte asociada con el potencial escalar representan las ondas compresionales, mientras que el potencial vectorial se relaciona con las ondas de corte. Al obtener el rotacional de la parte con el potencial escalar se obtendría “0” lo cual significa que no hay una componente cortante, si se saca la divergencia del segmento representado como ondas de corte igualmente se obtiene un “0” significando que no hay cambios en el volumen y no hay compresión.

Se sabe que:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}; \text{ velocidad de la onda compresional (P)} \quad (2.17)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \text{ velocidad de onda cortante (S)} \quad (2.18)$$

Relacionando las ecuaciones de velocidad de onda y el segmento del campo de desplazamientos  $\underline{u} = \nabla \times \psi$ , se puede expresar a la ecuación de Navier-Cauchy como:

$$\alpha^2 \nabla (\nabla \cdot (\nabla \times \psi)) - \beta^2 \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \psi) + \underline{f} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \psi \quad (2.19)$$

Considerando la inexistencia de fuerzas de cuerpo, además de la divergencia de un rotacional que es  $(\nabla \cdot (\nabla \times \psi)) = 0$ , la ecuación se simplifica a:

$$-\beta^2 \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \psi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \psi \quad (2.20)$$

Aplicando a la ecuación anterior la identidad vectorial del teorema de Helmholtz:

$$-\beta^2 \nabla \times (\nabla (\nabla \cdot \psi) - \nabla^2 \psi) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \psi \quad (2.21)$$

Dado que para la onda transversal no hay cambio en el volumen,  $\nabla \cdot \psi = 0$  por lo que la ecuación se simplifica aún más a:

$$\nabla \times (\beta^2 \nabla^2 \psi) = \nabla \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

Y, por último:

$$\beta^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

La anterior es la ecuación de onda para las ondas transversales, siendo  $\beta$  la velocidad de la onda S y teniendo la ecuación una estructura del tipo hiperbólica, esta trata a ondas sin cambios en el volumen. Ya que no puede haber cambios en el volumen, no viaja a través de líquidos la onda S. Si al contrario del procedimiento anterior se supone que  $\nabla \times \underline{u} = 0$ , o sea no hay desplazamiento transversal; la ecuación tendría la siguiente forma:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Siendo esta la ecuación de onda compresional, con  $\alpha$  como la velocidad de onda P. Estas ondas si son capaces de transmitirse a través de líquidos y fluidos; un ejemplo sería el sonido el cual es una onda compresional que viaja por el aire.

Usualmente la onda P tiene menor energía que la onda S, se desplaza con mayor velocidad y tienen frecuencias más altas por lo que igualmente pierden energía con mayor facilidad en trayectos largos.

### 2.1.4 Ondas P y S

En el capítulo anterior se obtuvo a partir de la ecuación de Navier-Cauchy las ecuaciones que definen la propagación de las ondas P y S:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}; \quad \text{Ec. onda P} \quad (2.26)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \quad \text{Ec. onda S} \quad (2.27)$$

Las ondas P compresionales o longitudinales tienen la capacidad de viajar a través de sólidos y fluidos, por ejemplo, es común encontrar el comportamiento de una onda de aire al realizar registros geofísicos sísmicos con una fuente explosiva la cual es una onda P que se propaga en el aire como una onda sonora. Este tipo de ondas llega a tener velocidades mayores a los demás tipos de ondas y siempre son las que arriban primero en un sismograma; existe la técnica de exploración sísmica de refracción que se basa en ese principio de las ondas P, pero estas llegan a ser difíciles de identificar en casos donde la onda se generó a distancias largas porque también son el tipo de onda con las frecuencias más altas, lo cual implica que tienen un gran decremento en la energía con respecto a la distancia que se propagan.

La relación entre las velocidades de la onda P y la onda S es:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left( \frac{1/2 - \nu}{1 - \nu} \right)^{1/2}; \quad \text{donde } \nu \text{ es el coeficiente de Poisson.} \quad (2.28)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones 2.17 y 2.18 se llega a la [expresión 2.28](#) relacionando el coeficiente de Poisson con las constantes de Lamé. También se llega a utilizar  $\beta = \alpha/\sqrt{3}$  para casos estándar ya que en general la media del coeficiente de Poisson tiene un valor de 0.25.

Las ondas P también tienen como característica especial que solamente se asocian a cambios en el volumen del material dando así un rotacional nulo de la ecuación, lo cual significa que la

dirección a la que se mueven las partículas del material es igual a la dirección de propagación de la onda.

En el caso de las ondas S o transversales, éstas se dividen en dos tipos dependiendo de la dirección a la que se desplazan las partículas del medio, son conocidas como la onda SH y SV. Sea una dirección de propagación de la onda igual tanto para la onda SH como la SV, para la SH se tendrá una polarización horizontal, mientras que la onda SV tiene una polarización vertical. Para ambos tipos de onda la divergencia será nula ya que no hay cambios en el volumen y el desplazamiento de las partículas elementales del medio son perpendiculares a la dirección de propagación. Una característica adicional que diferencia a ambas ondas S, es el hecho que para una onda SH que incide sobre una superficie solo refleja una misma onda SH, mientras que para el caso de la onda SV que incide sobre una superficie o interfase la energía de esta se dividirá en una onda SV y una onda P; lo mismo aplica para el caso de una onda P incidente, al incidir una onda P en una interfaz está se dividirá en una onda P y una SV al reflejarse, ver fig. 3.

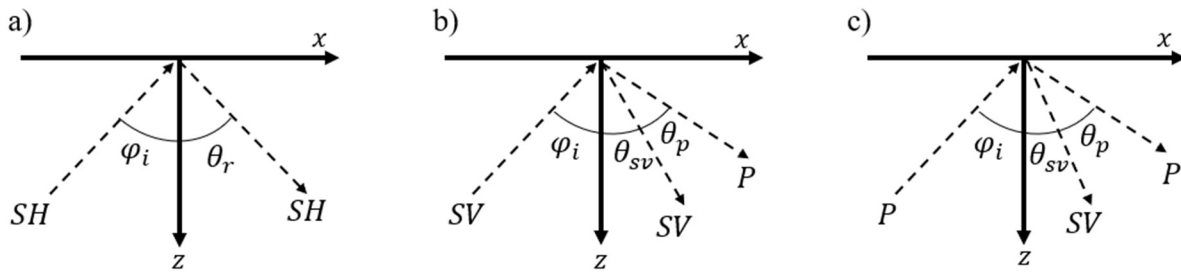


Figura 3. Incidencia de ondas SH, SV y P en una superficie libre con un ángulo de incidencia  $\varphi_i$  y ángulos de reflexión  $\theta_r, \theta_{sv}, \theta_p$  respectivamente.

Los tipos de onda descritos anteriormente se les conocen como ondas de cuerpo, pero en la práctica la mayor parte de la energía y las ondas que generan el mayor riesgo sísmico son las ondas superficiales, conocidas de esta manera porque se generan en la superficie por la interacción entre ondas P, SV, SH y la superficie libre; se caracterizan por solo poder desplazarse en la superficie y tener muy baja amplitud con respecto a la profundidad debido a un decremento exponencial, también son las ondas más lentas e igualmente hay varios tipos que son la onda de Stoneley, la onda de Love y la onda de Rayleigh.

Por último, se describen brevemente las ondas superficiales de Love; estas presentan un movimiento horizontal de las partículas, mientras que la dirección de propagación es perpendicular.

Para que se generen ondas de Love en una superficie se requiere un tipo de modelo que ayude, como en el caso de un estrato plano sobre una base rígida ó un estrato que se encuentra sobre un semiespacio y que tiene una velocidad de onda S menor a la del semiespacio; además éstas son producto de la interacción dada en esos modelos entre las ondas SH que se propagan. Ya que las

ondas de Love requieren de una estructura estratificada con diferentes velocidades, esta difiere con las ondas de Rayleigh en que no pueden existir para el caso de un modelo de un semiespacio sin estratos.

### 2.1.5 Velocidad de las Ondas de Rayleigh

Las ondas superficiales de Rayleigh son las más prominentes energéticamente, estas se encuentran contenidas en el plano de incidencia y tienen trayectorias elípticas retrógradas, aunque cuando se generan en una superficie libre cuyo medio es un líquido como el agua llega a tener trayectorias elípticas prógradas, también cuando se tiene el caso de un semiespacio con gran profundidad se puede dar un movimiento progresivo por parte de la onda. Para la generación de este tipo de ondas bastará con la interacción entre las ondas P y las ondas SV en la superficie.

Dada la naturaleza de las ondas de Rayleigh, estas pueden ser consideradas como ondas dispersivas para algunos casos; las ondas dispersivas se dan cuando la velocidad de propagación depende de la frecuencia o la longitud de onda, esto se puede dar en ondas de Rayleigh cuando hay estratos, pero para el caso de un semiespacio las ondas de Rayleigh son independientes de la frecuencia y por lo tanto no son dispersivas. En el caso de una fuente puntual en 2.5D, las ondas de Rayleigh llegan a atenuarse de una forma similar a las ondas cilíndricas  $1/\sqrt{\text{radio}}$  y generalmente son de mucho interés debido a su bajo decaimiento de la energía con respecto a la distancia, por lo cual pueden tener amplitudes significativas a distancias grandes superando a las ondas de cuerpo y son el tipo de onda más importante desde el ámbito sísmológico. Una consideración que puede hacerse para ondas de Rayleigh que se han propagado a distancias muy grandes es que la deformación provocada por ellas puede ser considerada como bidimensional (Timoshenko & Goodier, 1970).

Cuando la onda de Rayleigh se propaga en un medio homogéneo, la velocidad de la onda no tiene efectos de dispersión y puede definirse simplemente:

$$c_R = \omega/k = \beta\sqrt{0.8453} \quad \text{cuando } \lambda = \mu \quad (2.29)$$

El comportamiento no dispersivo de las ondas de Rayleigh en un semiespacio permite obtener la velocidad de la onda de Rayleigh con cierta facilidad. Hay varias maneras teóricas de obtener una velocidad aproximada, en el caso de un medio elástico isotrópico la velocidad de onda de Rayleigh sale al resolver la siguiente ecuación dependiente de la frecuencia y las propiedades físicas del medio:

$$\gamma^3 - 8\gamma^2 + 8\gamma\left(3 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) - 16\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = 0 \quad (2.30)$$

donde  $\gamma = \omega^2/k^2\beta^2$ ,  $\rho\alpha^2 = \lambda + 2\mu$  y  $\rho\beta^2 = \mu$

La velocidad de la onda de Rayleigh es obtenible resolviendo la ecuación cúbica. Resolver la ecuación de la onda de Rayleigh puede lograrse con una aproximación de Lanczos ([Rahman & Michelitsch, 2005](#)) que da como resultado la siguiente ecuación:

$$\gamma = \frac{30.876 - 14.876\nu - \sqrt{224.545376\nu^2 - 93.122752\nu + 124.577376}}{26(1-\nu)} \quad (2.31)$$

De la cual puede obtenerse la velocidad de la onda de Rayleigh sustituyendo en  $C_R = \beta\sqrt{\gamma}$  quedando así la aproximación por Lanczos como:

$$C_R = \beta\sqrt{\gamma} = \beta\sqrt{\frac{30.876 - 14.876\nu - \sqrt{224.545376\nu^2 - 93.122752\nu + 124.577376}}{26(1-\nu)}} \quad (2.32)$$

Para un material lineal elástico con un coeficiente de Poisson  $\nu > 0.3$ , la velocidad de la onda de Rayleigh puede ser aproximada mediante la expresión:

$$C_R = \beta \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \quad (2.33)$$

donde  $C_R$  es la velocidad de onda de Rayleigh aproximada usando el coeficiente de Poisson y la velocidad de la onda cortante  $\beta$  ([ver L. B. Freund, 1998](#)). También para el caso de un material lineal elástico, pero con un coeficiente de Poisson  $0 < \nu < 0.5$ , se puede utilizar la ecuación propuesta por [Bergmann, 1948](#):

$$C_R = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} \quad (2.34)$$

Esas son algunas de las maneras de obtener la velocidad de la onda de Rayleigh; como en este caso se trabajará con modelos que incluyen una inclusión dentro de un semiespacio, la onda tiene un comportamiento no dispersivo y por lo tanto la velocidad no depende de la longitud de onda o de la frecuencia.

Se utilizó para obtener la velocidad de onda, la solución de la ecuación cúbica para la onda de Rayleigh con la fórmula cúbica general de Niccolo Fontana, publicada por Gerolamo Cardano en su libro *Ars Magna*:

$$a\gamma^3 - b\gamma^2 + c\gamma - d = 0 \quad (2.35)$$

ecuación la cual se reparte de manera compacta a:

$$\Delta_I = b^2 - 3ac \quad (2.36)$$

$$\Delta_2 = 2b^3 - 9abc + 27a^2d \quad (2.37)$$

y

$$W = \sqrt[3]{\frac{\Delta_2 \pm \sqrt{\Delta_2^2 - 4\Delta_1^3}}{2}} \quad (2.38)$$

Aquí el signo  $\pm$  es seleccionado arbitrariamente, pero si una de las selecciones da como resultado  $W = 0$ , se debe seleccionar el otro signo. En base a las fórmulas anteriores se obtienen las raíces de la ecuación cúbica de manera que:

$$x_{k+1} = -\frac{1}{3a} \left( b + \omega^k W + \frac{\Delta_1}{\omega^k W} \right), \quad k \in \{0,1,2\} \quad (2.39)$$

$$y \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Sin embargo, cuando  $\Delta_2^2 - 4\Delta_1^3 < 0$ , se tienen raíces reales por lo que se toma la siguiente ecuación:

$$x_{k+1} = -\frac{b}{3a} + \frac{2}{3a} \sqrt{\Delta_1} \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0,1,2\} \quad (2.40)$$

$$\text{donde} \quad \theta = \arccos\left(\frac{\Delta_2}{2\sqrt{\Delta_1^3}}\right)$$

Esta última [ecuación 2.40](#) es utilizada para calcular la velocidad de la onda de Rayleigh para un semiespacio, donde las variables  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  utilizadas se definen como:

$$\Delta_1 = 8/3 - 16\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad y \quad \Delta_2 = 272/27 - \frac{80\beta^2}{3\alpha^2}$$

Y la ecuación para el cálculo de la velocidad de onda de Rayleigh se simplifica de manera que:

$$C_R = \sqrt{-2F_1 \sqrt{\frac{-\Delta_1}{3}} + \frac{8}{3}}, \quad \text{cuando} \quad \frac{\Delta_2^2}{4} + \frac{\Delta_1^3}{27} < 0 \quad (2.41)$$

$$C_R = \sqrt{F_2 + F_3 + \frac{8}{3}}, \quad \text{cuando} \quad \frac{\Delta_2^2}{4} + \frac{\Delta_1^3}{27} > 0 \quad (2.42)$$

donde

$$F_1 = \cos\left(\frac{\arccos\sqrt{-27\Delta_2^2/(4\Delta_1^3)}}{3}\right), \quad \text{cuando} \quad \Delta_2 > 0 \quad (2.43)$$

$$F_1 = \cos\left(\frac{\pi - \arccos\sqrt{-27\Delta_2^2/(4\Delta_1^3)}}{3}\right), \text{ cuando } \Delta_2 < 0 \quad (2.44)$$

$$F_2 = -\sqrt[3]{-A}, \text{ si } A < 0 \quad (2.45)$$

$$F_2 = \sqrt[3]{A}, \text{ si } A > 0 \quad (2.46)$$

$$F_3 = -\sqrt[3]{-B}, \text{ si } B < 0 \quad (2.47)$$

$$F_3 = \sqrt[3]{B}, \text{ si } B > 0 \quad (2.48)$$

siendo  $A$  y  $B$  definidas como:

$$A = \sqrt{\frac{\Delta_2^2}{4} + \frac{\Delta_1^3}{27}} - \frac{\Delta_2}{2} \quad (2.49)$$

$$B = -\sqrt{\frac{\Delta_2^2}{4} + \frac{\Delta_1^3}{27}} - \frac{\Delta_2}{2} \quad (2.50)$$

Ya con las ecuaciones anteriores, se puede calcular con facilidad la velocidad de la onda de Rayleigh  $C_R$  en un semiespacio y en un semiespacio con una inclusión superficial.

### 2.1.6 Función de Green

La función de Green es un operador integral el cual representa la respuesta debida a una fuerza puntual o un impulso. Esta es utilizada como el kernel en una función integral de Fredholm o Volterra.

El método de la función de Green es una herramienta matemática utilizada para resolver problemas potenciales y no potenciales de frontera, transformando una ecuación diferencial lineal en una ecuación integral de núcleo simétrico, mediante una modificación de las condiciones de frontera. Las funciones de Green se asocian con un punto de observación y un punto de campo, asumiendo que el punto del campo sea de donde se genera el espacio. Por ejemplo, sea:

$$\phi(x, y) = \int \int G(x, y, x_0, y_0) f(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \quad (2.51)$$

$\phi(x, y)$  es una función con coordenadas de campo " $x$ " y " $y$ ",  $G(x, y, x_0, y_0)$  es la función de Green o kernel de la ecuación y  $f(x_0, y_0)$  es la fuerza unitaria aplicada en el punto  $(x_0, y_0)$ , también es la función por resolver. Esta es una ecuación integral en 2D, pero la función de Green puede ser utilizada para problemas escalares, así como problemas en tres dimensiones.



La programación de una función de Green en elastodinámica puede ser compleja, pero ya que se obtiene permite facilitar los cálculos de simulaciones para casos con una fuente puntual.

### 2.1.7 Funciones de Bessel y de Hankel

La función de Bessel es el resultado del estudio de un problema de Kepler para la determinación de tres cuerpos que se mueven bajo gravitación mutua. Estas fueron incorporadas al estudio de perturbaciones planetarias donde las funciones son tratadas como coeficientes de una expansión en series de una perturbación. Watson fue el primer individuo en realizar un trabajo exhaustivo sobre las funciones, este se llama “A treatise on the Theory of Bessel Functions” y fue publicado en 1922.

Sea la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2.52)$$

Las funciones de Bessel son soluciones canónicas de la ecuación diferencial de Bessel. Debido a que la ecuación de Bessel aparece al buscar soluciones para las ecuaciones de Laplace o Helmholtz; las funciones de Bessel son muy importantes para los problemas potenciales y de propagación de ondas, también llegan a aplicarse para las expansiones en serie de polinomios de Laguerre y las funciones de Hankel. Ya que la ec. de Bessel es de segundo orden, debe tener dos soluciones independientes. Cuando es finita en  $x = 0$  y para todos los valores de  $\nu$ , estas soluciones de la ecuación se conocen como funciones de Bessel de primera especie. Cuando en  $x = 0$  se tiene una singularidad, las soluciones se conocen como funciones de Wever, Neumann o funciones de Bessel de segunda especie. La solución general de la ecuación de Bessel está dada por:

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad (2.53)$$

Donde,  $J_\nu(x)$  son las funciones de primera especie y  $Y_\nu(x)$  son las funciones de segunda especie.

Las funciones de primera especie son las soluciones que convergen en  $z = 0$  (el origen) para enteros positivos y divergen en el límite.

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad x \gg \nu, \quad \nu \text{ es el orden de la función.} \quad (2.54)$$

Estas funciones pueden ser fácilmente calculadas numéricamente mediante la función generadora siguiente:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{donde } n \text{ es el orden.} \quad (2.55)$$

En el caso de las funciones de segunda especie, sus soluciones divergen en el origen  $z = 0$ :

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad z \gg \nu \quad \text{siendo } \nu \text{ el orden de la función.} \quad (2.56)$$

Y pueden ser definidas a partir de las funciones de primera especie como:

$$Y_n(z) = \frac{J_n(z)\cos(n\pi) - J_{-n}(z)}{\sin(n\pi)} \quad \text{donde } n \text{ es el orden.} \quad (2.57)$$

Una aplicación de las funciones de Bessel es su uso para la formulación de las funciones de Hankel que describen procesos más complejos. Estas funciones de Hankel se definen a partir de las funciones de Bessel como:

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad \text{ecuación de Hankel de primera especie.} \quad (2.58)$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z) \quad \text{ecuación de Hankel de segunda especie.} \quad (2.59)$$

Estas ecuaciones se llegan a utilizar para representar un frente de onda cilíndrico y son de suma importancia para la computación de las funciones de Green para la propagación de una fuente sísmica.

### 2.1.8 Ecuaciones Integrales

La teoría de ecuaciones integrales trata con ecuaciones donde una función desconocida se encuentra dentro de una integral. Siendo  $G(x, \xi)$  la función de Green o kernel, una función  $\phi(x)$  a la cual se le aplica un campo de fuerza externo podrá ser descrito como:

$$\phi(x) = \int_b^a G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.60)$$

Donde  $f(\xi)$  describe la fuerza del campo,  $x$  son las coordenadas del punto de visualización y  $\xi$  es el punto donde se encuentra la fuente. Esta es también una ecuación integral de Fredholm de primera especie.

También se puede dar el caso de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie:

$$\phi(x) = \int_b^a G(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) \quad (2.61)$$

Se puede dar el caso de una ecuación integral de Fredholm de tercera especie:

$$\lambda\phi(x) = \int_b^a G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.62)$$

Se puede dar el caso de una ecuación integral de Volterra de primera especie:

$$\phi(x) = \int_b^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.63)$$

Se puede dar el caso de una ecuación integral de Volterra de segunda especie:

$$\phi(x) = \int_b^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) \quad (2.64)$$

Y se puede dar el caso de una ecuación integral de Volterra de tercera especie:

$$\lambda\phi(x) = \int_b^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.65)$$

$\phi(x)$  es una función conocida,  $G(x, \xi)$  es la función de Green (también conocida), “a” y “b” son constantes, mientras que “x” es una variable independiente. Por último,  $f(\xi)$  es la función desconocida a resolver. En este texto se trabajará con ecuaciones de Fredholm de primera y segunda especie.

### 2.1.9 DBEM e IBEM

Los métodos de elemento de contorno o BEM pueden catalogarse como directo (DBEM) e indirecto (IBEM), la diferencia entre ellos radica en la forma o estructura en que se encuentra la ecuación integral. El método de elemento de contorno directo utiliza las densidades de fuerza para obtener directamente los desplazamientos, mientras que el método de elementos de contorno indirecto obtiene primero las densidades de fuerza, las cuales son utilizadas posteriormente para la obtención del campo de desplazamientos. La discretización del DBEM requiere asumir variaciones constantes o polinomiales. Por otro lado, IBEM hace uso de densidades de fuerza constantes.

El estudio de los métodos de elemento de contorno ha sido existente desde 1975 por [Wong & Jennings \(1975\)](#) para geometrías arbitrarias. También se ha llegado a utilizar la combinación entre las representaciones integrales y el método del número de onda discreto (DWN) (e.g. [Campillo and Bouchon, 1985](#); [Kawase, 1988](#); [Gaffet and Bouchon, 1989](#); [Campillo et al., 1990](#)). Y recientemente se han realizado estudios de la dispersión de ondas para diferentes geometrías mediante el DBEM [Wei et al. \(2020\)](#); además de un estudio en conjunto, donde se compara el DBEM con el IBEM para varias topografías [Mejía-López et al. \(2021\)](#) haciendo uso de métodos iterativos para incrementar la velocidad de los BEM.

En este escrito se presenta el IBEM en el que se obtiene la densidad de fuerza auxiliar al resolver una ecuación integral de Fredholm de segunda especie. El método se basa en el principio de superposición de soluciones elementales que constituyen a la función de Green y tiene como ventaja su versatilidad para simular la respuesta dinámica de configuraciones topográficas irregulares.

## 2.2 Método Indirecto de Elementos de Contorno (IBEM)

Dependiendo de la cantidad de inclusiones y la dimensionalidad del problema, el sistema de ecuaciones del método IBEM podrá variar; en este caso se trabaja con una dimensión de 2.5D, donde se tratará de un modelo bidimensional que se extiende infinitamente lateralmente y los cálculos se realizan de manera tridimensional. Debido a que se trabaja en 2.5-3D los cálculos tienen que ser previamente planeados para agilizar el proceso de compilación del programa para no generar modelos excesivamente grandes y pesados para la memoria RAM.

### 2.2.1 Teorema de Somigliana

La identidad de Somigliana o teorema de Somigliana, es una ecuación integral la cual da pauta al método del IBEM. Obtenido a partir del teorema de reciprocidad de Betti ([ver, Aki & Richards](#)), la identidad nos permite resolver problemas de propagación de ondas, esta puede escribirse como:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_S G_{ij}(x, \xi)t_i(x) - T_{ij}(x, \xi)u_i(x) dS + \int_\Omega f_i(x)G_{ij}(x, \xi)d\Omega \quad (2.66)$$

para una región  $\Omega$  con su frontera  $S$  y donde  $G_{ij}(x, \xi)$  es la función de Green y  $T_{ij}(x, \xi)$  son tracciones de Green,  $u_i, f_i, t_i$  son el campo de desplazamientos, fuerzas de cuerpo y tracciones.  $C_{ij}$  es un coeficiente que depende del punto  $\xi$ . Fuera de  $C_{ij}(\xi)$  todas tienen incluida la frecuencia. Este teorema es la base de los métodos de elemento de contorno o frontera. Negando las fuerzas de cuerpo en el teorema de Somigliana se tiene:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_S G_{ij}(x, \xi)t_i(x) - T_{ij}(x, \xi)u_i(x) dS \quad (2.67)$$

### 2.2.2 Representación Integral de Desplazamientos y Tracciones

El IBEM se basa en una representación integral del campo de ondas, el campo de desplazamientos dentro de un material elástico(V), con una frontera  $S$  y sin fuerzas de cuerpo puede expresarse como:

$$u_i(x) = \int_S \psi_j(\xi)G_{ij}(x, \xi)dS_\xi \quad (2.68)$$

donde  $u_i(x)$  es el desplazamiento en la componente  $i$  en el punto  $x$ .  $G_{ij}(x, \xi)$  es la función de Green en la dirección  $i$  en el punto  $x$  debida a una fuerza puntual dada en el punto  $\xi$  cuya dirección es  $j$ . Por último, el término  $\psi_j(\xi)$  simboliza las densidades de fuerza en el punto  $\xi$  ([Sánchez-Sesma y Campillo, 1991](#)). Aquí la función de Green  $G_{ij}(x, \xi)$  es sabida y se tiene que

encontrar la densidad de fuerza  $\psi_j(\xi)$  en la superficie S para calcular los desplazamientos en V. Cuando se saben los desplazamientos  $u_i$  se puede hacer uso de la ley de Hooke para el cálculo de esfuerzos y tracciones. Ahora asumiendo una superficie continua y suave, la tracción debida a la singularidad equivale a la mitad de la fuerza aplicada (ver, Kupradze 1963),

$$t_i(x) = c\psi_i(x) + \int_S \psi_j(\xi) T_{ij}(x, \xi) dS_\xi \quad (2.69)$$

donde  $t_i(x)$  es la componente número “i” en “x”,  $T_{ij}(x, \xi)$  es la función de tracciones de Green,  $\psi$  son las densidades de fuerza y “c” será una constante que es igual a 0 si x está afuera de S,  $\frac{1}{2}$  si x se aproxima a S desde dentro de V y  $-\frac{1}{2}$  si x se aproxima a S desde fuera de V. Uno podrá notar que esta es una ecuación integral de Fredholm de segunda especie.

### 2.2.3 Formulación del IBEM en el Dominio de la Frecuencia

La implementación del método empieza con la asunción de la superposición entre el campo difractado y el campo libre:

$$u_{total}(x) = u_{referencia}(x) + u_{difractado}(x) \quad (2.70)$$

Aplicando el teorema de Somigliana a la ecuación anterior y considerando una tracción nula en S:

$$C_{ij}(\xi)(u_i^S(\xi) + u_i^0(\xi)) = \int_S -T_{ij}(x, \xi)(u_i^S(\xi) + u_i^0(\xi)) dS \quad (2.71)$$

Donde  $u_i^S$  es el campo difractado y  $u_i^0$  Es el campo libre o de referencia conformado por la onda incidente y la onda reflejada por la superficie. Acomodando lo desconocido del lado izquierdo se escribe:

$$C_{ij}(\xi)u_i^S(\xi) + \int_S T_{ij}(x, \xi)u_i^S(\xi) dS = -C_{ij}(\xi)u_i^0(\xi) - \int_S T_{ij}(x, \xi)u_i^0(\xi) dS \quad (2.72)$$

La cual es una ecuación integral de Fredholm, donde el lado derecho es conocido ya que es la solución de referencia. Esta es la ecuación que describe el BEM directo ya que obtiene directamente los desplazamientos; para la representación del IBEM se parte directamente de la [ecuación 2.68](#):

$$u_i(x) = u_i^0(x) + \int_S \psi_j(\xi) G_{ij}(x, \xi) dS_\xi \quad (2.73)$$

Aquí  $\psi_j(\xi)$  = densidades de fuerza en el punto  $\xi$  hacia la dirección  $j$  y  $\psi_j(\xi) dS_\xi$  equivale a la distribución de fuerza en la superficie; el término dentro de la integral corresponde al campo difractado, mientras que  $u_i^0(x)$  es el campo de referencia que incluye la reflexión de la onda que incide en la superficie libre.

Las tracciones en un punto “x” con una normal “m” están dadas por  $t_i = \mu \partial u / \partial m$ . Para el caso de las tracciones en la superficie libre con un vector normal hacia afuera del dominio:

$$t_i(x) = t_i^0(x) + \frac{1}{2} \psi_i(x) + \int_S \psi_j(\xi) T_{ij}(x, \xi) dS_\xi \quad (2.74)$$

Si “x” está dentro del dominio el segundo término puede ser ignorado, ya que es el resultado neto de derivar la integral de frontera con un kernel singular; este resultado fue obtenido por Fredholm en 1900 (ver, Webster 1955). Por lo cual la condición de frontera libre implica tracciones nulas  $t_i(x) = 0$  para  $x \in S$ :

$$\frac{1}{2} \psi_i(x) + \int_S \psi_j(\xi) T_{ij}(x, \xi) dS_\xi = -t_i^0(x) \quad (2.75)$$

Se podrá notar que esta también es una ecuación de Fredholm de segunda especie, ahora para las tracciones  $t_i^0(x)$ ,  $\psi_i(x)$  siguen siendo las densidades de fuerza,  $\psi_j(\xi)$  son las fuerzas superficiales y  $T_{ij}$  son las tracciones de Green.

## 2.2.4 Función de Green para Fuente Puntual Móvil en un Medio Elástico

A continuación, se describe la función de Green tridimensional utilizada para los cálculos de densidad de fuerza en el IBEM, este y otros desarrollos del IBEM pueden encontrarse en Pedersen, Sánchez-Sesma & Campillo (1994), Ortiz-Alemán (1998), Ba & Yin (2016). También pueden encontrarse los métodos de la solución analítica de Trifunac, 1973 para ondas SH en un cañón semicircular y el método multipolar aplicable a topografías arbitrarias de Sánchez-Sesma y Rosenblueth, 1979; estos dos últimos trabajos son los principios o una de las bases con las que nacería el IBEM.

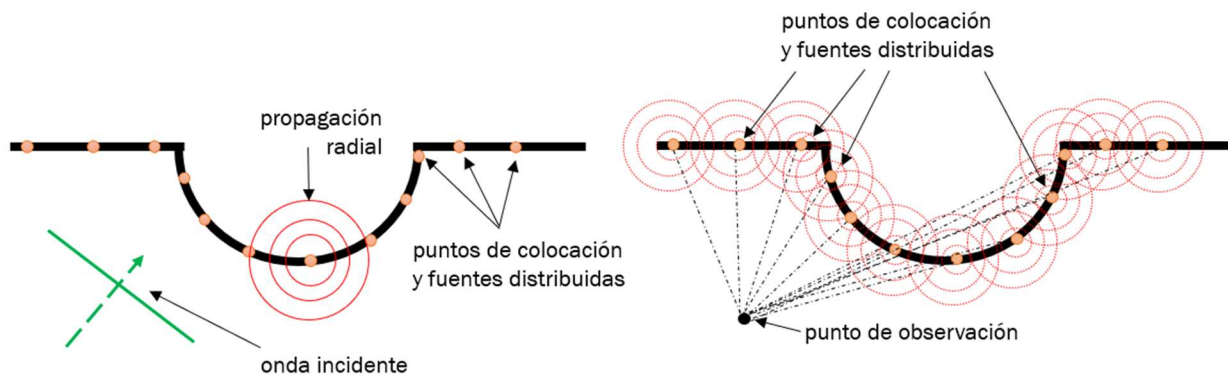


Figura 4. Esquema de los puntos de colocación, las fuentes puntuales distribuidas, el punto de observación con las contribuciones por parte de las fuentes y la onda incidente.

Considere una fuente puntual moviéndose en un medio homogéneo isotrópico y elástico con densidad  $\rho$ ;  $\mu$  y  $\lambda$  son las constantes de Lamé,  $\alpha$  y  $\beta$  son las velocidades de onda compresional y

cortante respectivamente. La fuente puntual se mueve a una velocidad  $c$  paralelamente. El punto de observación recibe las contribuciones por cada una de las fuentes distribuidas a lo largo de la superficie las cuales se propagan radialmente, dando así el campo difractado al sumar cada una de las contribuciones en el punto observado (figura 4). Cabe destacar que debido a la manera radial en que se calcula la propagación de las difracciones, se tienen mejores resultados a profundidades someras, pero si se coloca un punto de observación a grandes profundidades la confiabilidad del cálculo dependerá de la extensión horizontal en la parte plana del modelo.

$i$  es el número complejo  $(0, -1)$ ,  $t$  es el tiempo y  $H_m^{(2)}$  es la función de Hankel de segunda especie y de orden  $m$ . Las funciones de Green pueden ser expresadas de forma compacta como:

$$G_{ij} = \frac{1}{8i\rho} [\delta_{ij}A - (2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})B] \exp(-ivx_2), \quad \text{donde: } i, j = 1, 3 \quad (2.76)$$

$$G_{2j} = G_{j2} = \frac{1}{4\rho c} \left[ \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}} H_1^{(2)}(KR) \right. \quad (2.77)$$

$$\left. - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}} H_1^{(2)}(QR) \right] \gamma_j \exp(-ivx_2), \quad \text{donde } j = 1, 3$$

$$G_{22} = \frac{1}{4i\rho} \left[ \left( \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2} \right) H_0^{(2)}(KR) + \frac{1}{c^2} H_0^{(2)}(QR) \right] \exp(-ivx_2) \quad (2.78)$$

Y las tracciones de Green se expresan de la siguiente manera:

$$T_{11} = \lambda e_1 n_1 + \mu(l_{111}n_1 + l_{131}n_3)$$

$$T_{21} = \mu(l_{121}n_1 + l_{231}n_3)$$

$$T_{31} = \lambda e_1 n_3 + \mu(l_{131}n_1 + l_{331}n_3)$$

$$T_{32} = \lambda e_2 n_3 + \mu(l_{132}n_1 + l_{332}n_3)$$

$$T_{13} = \lambda e_3 n_1 + \mu(l_{113}n_1 + l_{133}n_3)$$

$$T_{23} = \mu(l_{123}n_1 + l_{233}n_3)$$

$$T_{33} = \lambda e_3 n_3 + \mu(l_{133}n_1 + l_{333}n_3)$$

$$T_{22} = \mu(l_{122}n_1 + l_{232}n_3)$$

$$T_{12} = \lambda e_2 n_1 + \mu(l_{112}n_1 + l_{132}n_3)$$

$R, K, Q, A, B, \gamma_n, e_n, l_{ijk}$  son expresiones utilizadas para simplificar y reducir el tamaño de las ecuaciones, el desarrollo completo de cada una de ellas puede encontrarse en el apéndice 2.  $n_1$  y  $n_3$  son las normales para las direcciones  $x_1$  y  $x_3$ .

Se podrá notar que la notación indicial es indispensable para la simplificación de las ecuaciones utilizadas; también como ya se había mencionado anteriormente, la función de Hankel  $H_m^{(2)}$  es necesaria para el cálculo de la función de Green y se llega a calcular directa y numéricamente porque está llega a ralentizar los tiempos de corrida del programa ya que trabaja con números

complejos. Por otra parte, las tracciones de Green dependen mucho de las propiedades físicas del medio, siendo estas dependientes de las constantes de Lamé.

Ya teniendo en mente las ecuaciones anteriores se puede realizar el cálculo de las funciones y tracciones de Green (ecs. 2.76 - 2.79) para las tres direcciones del espacio ortogonal (x,y,z), en este caso las direcciones se definen por los subíndices (1,2,3) de las funciones y está descrito como  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Es de suma importancia el cálculo correcto de las funciones de Green, ya que estas son el núcleo o kernel de la ecuación integral y es uno de los primeros cálculos realizados para generar el sistema de ecuaciones a resolver.

## **2.2.5 Difracciones por topografías e interfaces irregulares**

Se mostró anteriormente en la ecuación 2.70 que el campo de desplazamientos total está compuesto por un campo de referencia conformado por la onda incidente y el campo de las ondas difractadas; esto es cierto para el caso de una topografía irregular con una sola región o medio (el semiespacio), pero cuando se agrega una inclusión sobre la topografía irregular el campo total dentro de la inclusión solamente experimenta las difracciones, aunque el campo total en el semiespacio seguirá siendo descrito por la suma entre el campo de referencia y el difractado, en la inclusión solo se toman en cuenta las difracciones.

Para el análisis de las difracciones generadas por la topografía irregular y una inclusión o valle, es necesario tomar en cuenta que se trata a los medios como homogéneos, isotrópicos y continuos, esto para poder realizar un análisis sencillo y que los modelos sean lo más simples posibles. Ahora, considerando las ecuaciones discretizadas del método IBEM que en conjunto construyen el sistema de ecuaciones de los coeficientes, estas ecuaciones dependen del modelo y la geometría utilizada, ya que el modelo dicta las condiciones de frontera para las tracciones y los desplazamientos que se tendrán para uno o varios medios elásticos; dichas condiciones son necesarias para la resolución de las ecuaciones y por lo tanto de los problemas de difracción.

El modelo más sencillo trabajable es el de un semiespacio elástico sin inclusión, este modelo describe las difracciones que se generan solamente por una topografía y el modelo está conformado por la zona con la topografía irregular " $\partial_2 E$ " y el segmento donde hay una superficie plana " $\partial_1 E$ ". Para este caso las condiciones de frontera solo son tracciones libres debidas a la superficie libre, se muestra un esquema de una topografía irregular en un semiespacio en la figura 5.



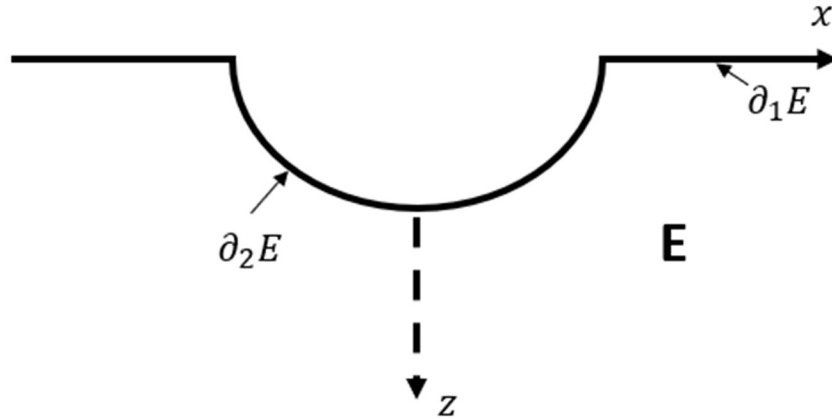


Figura 5. Esquema de las fronteras en un semiespacio con topografía irregular.  $\partial_2E$  es la zona con la topografía y  $\partial_1E$  es la parte plana.

Dado el caso de la irregularidad topográfica en un semiespacio (figura 4) sus condiciones de frontera se describen como:

$$t_i^{(0)} + t_i^{(d)} = 0 \text{ para } \partial_1E \qquad t_i^{(0)} + t_i^{(d)} = 0 \text{ para } \partial_2E$$

Para el caso de un valle aluvial, el cual nos despierta mayor interés, tiene las mismas bases que el modelo de un semiespacio con una irregularidad en la topografía. La principal diferencia es el anexo de una nueva región “R” la cual entra sobre la frontera “ $\partial_2E$ ” y abarca cierto espacio delimitado por la interface con el semiespacio y la nueva superficie libre, esta nueva superficie se le llamará “ $\partial_1R$ ”. Cabe destacar que si bien la frontera “ $\partial_2E$ ” es la interfaz con el semiespacio y lo sobreyacente, esto no significa que solamente se agregue la frontera de la superficie  $\partial_1R$ ; “R” abarca desde la superficie  $\partial_1R$  hasta la misma región que el segmento “ $\partial_2E$ ”, por lo tanto  $\partial_2E = \partial_2R$ . Esto se muestra en la figura 6:

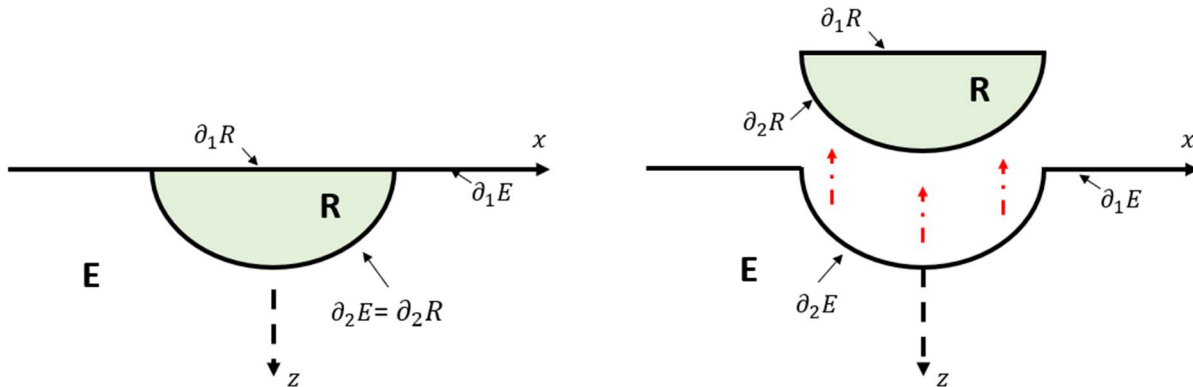


Figura 6. Esquema de un modelo con inclusión superficial que simula un valle aluvial simple. R es la frontera o interfaz entre el semiespacio y la inclusión, E es la zona plana y K es la parte de la inclusión.

Tomando en cuenta la figura 6, se nota que el número de puntos que conforman las fronteras del modelo incrementan considerablemente a comparación con un semiespacio de topografía irregular (figura 5), esto sobretodo porque los puntos de la frontera  $\partial_2 E$  en realidad son reutilizados para el cálculo de la inclusión. El incremento en las fronteras del modelo y la adición de la inclusión también significan la necesidad de más condiciones de frontera para resolver las ecuaciones de difracción; para el caso del valle aluvial o la topografía irregular con inclusión se rige por las condiciones de tracción libre para las fronteras planas “ $\partial_1 E$ ” y la parte superficial de la inclusión “ $\partial_1 R$ ” y la continuidad de desplazamientos y tracciones en la interfaz  $\partial_2 E = \partial_2 R$ . Por lo tanto, las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} t_i^{(0)} + t_i^{(d)} &= 0 \text{ para } \partial_1 E & t_i^{(0)} + t_i^{(d)} &= t_i^{(r)} \text{ para } \partial_2 E \\ t_i^{(r)} &= 0 \text{ para } \partial_1 R & u_i^{(0)} + u_i^{(d)} &= u_i^{(r)} \text{ para } \partial_2 E \end{aligned}$$

## 2.2.6 Discretización del IBEM

Para la discretización del método IBEM, se tendrá que integrar numéricamente las [ecuaciones 2.73](#) y [2.75](#). La metodología utilizada consiste en discretizar la superficie en  $N$  segmentos con una separación equiespaciada  $\Delta s$ . Para cada frecuencia,  $\Delta s$  deberá ser mucho menor que la longitud de onda de la onda cortante, además las densidades de fuerza  $\psi_j(x)$  deberán ser constantes para cada segmento. Evaluando la tracción en el centro de cada segmento, permite encontrar la densidad de fuerza superficial  $\psi_j(\xi)$  mediante un sistema de ecuaciones:

$$\sum_{l=1}^N \psi_j(\xi_l) t_{ij}(x_n, \xi_l) = 0 \quad n = 1, N \quad (2.80)$$

$$\sum_{l=1}^N \psi_j(\xi_l) t_{ij}(x_n, \xi_l) = -t_i^0(x_n) \quad n = 1, N \quad (2.81)$$

donde

$$t_{ij}(x_n, \xi_l) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} T_{ij}(x_n, \xi_l) dS_\xi \quad (2.82)$$

Esta ecuación integral es evaluada utilizando integración Gaussiana, excepto en el caso de  $n = l$  donde se calcula analíticamente utilizando una serie de funciones de Bessel. Encontrada ya la densidad de fuerza superficial  $\psi_j(\xi_l)$  con el sistema de ecuaciones, los desplazamientos se obtendrán evaluando la ecuación del campo de desplazamientos de manera discreta:

$$u_i(x) = u_i^0(x) + \sum_{l=1}^N \psi_j(\xi_l) g_{ij}(x, \xi_l) \quad (2.83)$$

donde

$$g_{ij}(x, \xi_l) = \int_{\xi_l - \Delta s/2}^{\xi_l + \Delta s/2} G_{ij}(x, \xi_l) dS_\xi \quad (2.84)$$

En este caso si  $x$  se encuentra en la superficie, se evaluará nuevamente utilizando el método analítico en vez de integración Gaussiana.

El conjunto de ecuaciones anteriores descritas por medio de sumatorias, forman el sistema de ecuaciones completo que se resuelve como parte del método del IBEM para el caso de una topografía irregular en un semiespacio, esto se vuelve obvio al ver que se cumplen las condiciones de frontera para dicho caso. El tamaño del sistema crece exponencialmente con las frecuencias, por lo que a frecuencias altas el sistema de ecuaciones puede ralentizar mucho el tiempo de cómputo total del programa.

Para el caso que incluye una inclusión, se deberá armar un sistema de ecuaciones que cumpla con las condiciones de frontera necesarias:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M+L} \psi_j^E(\xi_l) t_{ij}^E(x_n, \xi_l) = 0 \quad (2.85)$$

$$\sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^{L+S} \psi_j^K(\xi_l) t_{ij}^K(x_n, \xi_l) = 0 \quad (2.86)$$

$$\sum_{i=1}^L [\sum_{j=1}^{M+L} \psi_j^R(\xi_l) t_{ij}^R(x_n, \xi_l) - \sum_{j=1}^{L+S} \psi_j^R(\xi_l) t_{ij}^R(x_n, \xi_l)] = -t_i^0(x_n) \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L (\sum_{j=1}^{M+L} \psi_j^R(\xi_l) \int G_{ij}^R(x_n, \xi_l) dS_\xi \\ - \sum_{j=1}^{L+S} \psi_j^R(\xi_l) \int G_{ij}^R(x_n, \xi_l) dS_\xi) = -u_i^0(x_n) \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde:

$$t_{ij}^E(x_n, \xi_l) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int T_{ij}^E(x_n, \xi_l) dS_\xi \quad (2.89)$$

$$t_{ij}^K(x_n, \xi_l) = -\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int T_{ij}^K(x_n, \xi_l) dS_\xi \quad (2.90)$$

$$t_{ij}^R(x_n, \xi_l) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nl} + \int T_{ij}^R(x_n, \xi_l) dS_\xi \quad (2.91)$$

“M”, “L” y “S” son el número de puntos que forman las fronteras “ $\partial_1 E$ ”, “ $\partial_2 E$ ” y “ $\partial_1 R$ ” respectivamente.

Similarmente al modelo de la topografía en semiespacio sin inclusión, el modelo que incluye la inclusión requiere evaluar la ecuación del campo de desplazamientos difractado mediante un producto entre las densidades de fuerza y la función de Green. Pero a diferencia del modelo sin inclusión, el cálculo del campo de desplazamientos total requiere de dos procesos diferentes por zona.

Cuando los receptores se encuentran en la parte plana (frontera “ $\partial_1 E$ ”), se realiza el producto con una función de Green del semiespacio; pero si los receptores se encuentran en la parte de la irregularidad y la inclusión (frontera “ $\partial_2 E$ ”), se hace uso de la función de Green para la inclusión

elástica. Además, solo para los receptores en la región “E” que se encuentran en el semiespacio se les sumará la solución de referencia (onda incidente). Dando así:

$$u_i(x) = \sum_{l=1}^N \psi_j(\xi_l) g_{ij}^K(x, \xi_l) \quad \text{para } |x| > l \quad (2.92)$$

$$u_i(x) = u_i^0(x) + \sum_{l=1}^N \psi_j(\xi_l) g_{ij}^E(x, \xi_l) \quad \text{para } |x| < l \quad (2.93)$$

Al final el campo total de desplazamientos puede verse sencillamente como la suma del paquete de las ondas incidentes y reflejadas por la superficie libre, con las ondas difractadas generadas por la irregularidad de la topografía; todo el cálculo realizado por las funciones de Green son en realidad el conjunto de las ondas difractadas generadas al incidir la onda en la irregularidad, mientras que para el cálculo de la solución del campo de referencia (campo incidente y reflejado) se hace uso de los coeficientes de amplitud de las ondas que inciden dentro de las ecuaciones potenciales para los distintos tipos de onda (P, SH, SV y Rayleigh).

# Capítulo 3.

## Consideraciones para el IBEM

---

En el capítulo anterior se estableció la formulación integral de los desplazamientos y tracciones, también se describió la discretización de las ecuaciones en el IBEM y se mostraron las condiciones de frontera necesarias para las ecuaciones. En este capítulo se adentrará en los detalles técnicos para la utilización del método, se hablará de las decisiones tomadas para la inicialización del programa, se dará una breve introducción al análisis de Fourier y la importancia de este para analizar los resultados en los dominios del espacio y del tiempo. Por último, también se describe brevemente la estructura y funcionamiento del código de IBEM.

### 3.1 Análisis de Fourier

El análisis de Fourier abarca una gran rama de áreas en las matemáticas, su uso llega desde la exploración subterránea de la tierra, hasta la exploración espacial; además de que también es usado en varios instrumentos musicales, médicos, etc.

Esta área matemática ayuda para el análisis de señales y facilita su entendimiento al poder cambiar el dominio en que se observan; haciendo uso de la transformada de Fourier es posible cambiar del dominio del tiempo a la frecuencia para un análisis más profundo y también permite el cambio del dominio espacial al del número de onda. Esta herramienta es de suma importancia y será la base principal para el cálculo de sismogramas sintéticos, ya que el IBEM obtiene los resultados de la respuesta de un medio en el dominio de la frecuencia, por lo que se hace uso de la transformada de Fourier para cambiar al tiempo y desplegar resultados en un formato de sismogramas.

#### 3.1.1 El Teorema de la Convolución

Una de las herramientas más utilizadas en toda el área del análisis de Fourier es la convolución, está se describe de la siguiente manera:

$$F\{f(t) * g(t)\} = F(\omega)G(\omega) \quad (3.1)$$

La cual significa que la transformada de Fourier de una convolución entre las funciones en el dominio del tiempo es igual a la multiplicación de la transformada de cada función. Este teorema

facilita algunos cálculos para la obtención de sismogramas y llega a ser muy usual en el filtrado de señales.

### 3.1.2 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una herramienta que permite cambiar de dominio, este cambio de dominio ayuda para el análisis de algunas señales ya que, en la frecuencia pueden llegarse a observar efectos que en el tiempo no se llegan a notar, un ejemplo es el contenido energético que podría mostrar una señal arbitraria. La transformada de Fourier cumple con la linealidad, la diferenciabilidad, la integrabilidad, el escalado, el desplazamiento y la convolución. Su convención para la transformada directa es:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.2)$$

y la convención para la transformada inversa es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.3)$$

donde  $t$  es el tiempo (podría ser  $x$  posiciones en el espacio) y  $\omega$  es la frecuencia (podría ser  $k$  el número de onda).

Para el caso de un cálculo numérico de la transformada se utiliza la transformada discreta de Fourier o transformada Lenta de Fourier:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k\Delta t)e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} \quad (3.4)$$

donde  $n$  es el contador de las frecuencias,  $k$  es el contador del número de muestras,  $\Delta t$  es el espaciado entre las muestras en el tiempo,  $N$  es el número total de muestras y  $g$  es la función a la cual se le obtendrá su transformada  $F$ . Para el análisis inverso se tiene:

$$F^{-1}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n\Delta f)e^{\frac{i2\pi nk}{N}} \quad (3.5)$$

Estas transformadas de Fourier también son conocidas como la transformada lenta de Fourier por la gran cantidad de cálculos que realiza. La transformada rápida de Fourier agiliza increíblemente los cálculos mediante algunas técnicas de simetría que serán discutidas en el siguiente capítulo.

La transformada rápida de Fourier o FFT (Fast Fourier Transform) es una versión de la transformada discreta que aprovecha la simetría encontrada en los resultados para los casos en los que se tiene una cantidad de muestras potencia de 2, es decir  $N = 2^n$  donde  $n$  puede ser un número entero cualquiera y  $N$  es la cantidad de muestras. Esta versión de la transformada agiliza

los cálculos dando así  $N \log_2 N$  cálculos totales, mientras que la versión lenta realiza  $N^2$ . Existen diversas variantes del método FFT, el más conocido es el de Cooley y Tukey desarrollado en el año de 1960, pero el algoritmo utilizado para el programa de IBEM es el de Claerbout, 1976 (ver, Blakely 1996).

Debido al gran incremento obtenido en la velocidad de obtención de la transformada gracias a la transformada rápida, está empezando a ser más utilizada y le abrió las puertas a diversas áreas de la matemática para cálculos más veloces de una manera bastante sencilla. Actualmente la transformada rápida llega a utilizarse para cualquier tipo de procesado y análisis de una señal como en el procesado de imágenes digitales o hasta para analizar miles o millones de datos dentro de una imagen satelital; dado que en sismología se trabaja con señales sísmicas, estas también pueden ser trabajadas con mayor rapidez usando el método de vanguardia y llega a aplicarse para filtrado de la señal sísmica, o hasta para realizar una convolución veloz entre un tren de impulsos que represente la respuesta del medio con un pulso para una simulación sísmica eficiente en tiempos.

### 3.1.3 Espectros de Amplitud y de Fase

Debido al cambio del dominio, la manera de visualizar los resultados cambia porque en el dominio de la frecuencia se trata con números complejos. La manera de representar las funciones en la frecuencia es mediante los espectros.

El espectro de amplitud permite visualizar la energía de la señal en otras palabras, muestra la importancia de una o unas frecuencias dentro del espectro completo hablando de su contenido energético, si se deseará ver la contribución energética se necesitaría de un espectro de potencias, el cual sale directamente del espectro de amplitud el cual es el módulo de la señal:

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}\{F(\omega)\}^2 + \text{Im}\{F(\omega)\}^2} \quad (3.6)$$

El espectro de fase analiza la fase de entrada de una señal, este indica adelantos o retrasos en el tiempo estos cambios se relacionan directamente con la pendiente dentro del espectro de fase, así como el signo (positivo un adelanto en el tiempo y negativo un retraso en el tiempo). Este espectro define como:

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{F(\omega)\}}{\text{Re}\{F(\omega)\}} \quad (3.7)$$

En la sismología usualmente se utiliza más comúnmente el espectro de amplitud para analizar las amplificaciones que se producen por diversos factores. La ecuación 3.6 muestra el espectro de amplitud a una dimensión para la frecuencia, pero también se llega a utilizar espectros bidimensionales para realizar análisis de las ondas sísmicas en espectros de amplitud frecuencia -

número de onda. El análisis de frecuencia-espacio se le conoce como f-k y llega a dar información relevante sobre las amplificaciones por parte de ondas superficiales.

### 3.1.4 Generación de Sismogramas

Teniendo en cuenta los conceptos básicos del análisis de Fourier, nos podemos adentrar a su uso para generar sismogramas sintéticos a partir de los resultados obtenidos por el IBEM. Se tiene que saber primero que los cálculos realizados en IBEM son en el dominio de la frecuencia y dependiendo de la cantidad de frecuencias utilizadas además del intervalo entre ellas, se podrá llegar a tiempos más largos o cortos y la resolución igualmente variara; la selección de los parámetros de cálculo para los sismogramas también podrá afectar su visualización final.

Con las consideraciones descritas, el proceso de cambio de dominio se describe con el siguiente diagrama:

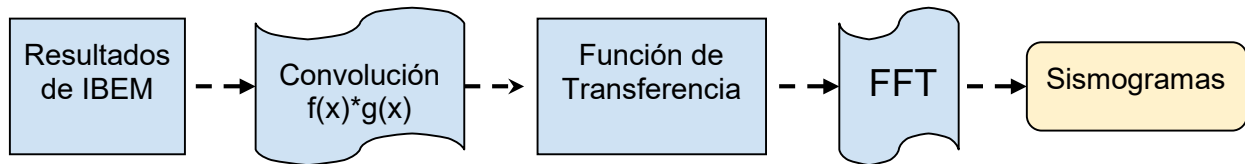


Figura 7. Diagrama del proceso de operaciones en la generación de sismogramas sintéticos.

En este se muestra que lo primero que se obtiene son los resultados en frecuencia al resolver el sistema de ecuaciones integrales, posteriormente los resultados en frecuencia se multiplican con un pulso (usualmente de Ricker) y se obtiene una función de transferencia la cual contiene la información del medio y el pulso, al final a la función de transferencia se le aplica una transformada inversa de Fourier para obtener la respuesta en tiempo de la convolución y se observará la respuesta debida al pulso que pasa por el medio.

La metodología de la figura 7 será aplicada tanto para respuestas en tiempo definido como para varios tiempos dando así animaciones que representen el campo de ondas difractadas generado por la incidencia de ondas P, SV y SH.

### 3.1.5 Pulsos de Ricker y de Gabor

El programa utilizado tiene la posibilidad de generar dos tipos de pulsos o wavelets, el de Ricker y el de Gabor. El pulso de Ricker sale de la segunda derivada de una función gaussiana, es muy frecuentemente utilizada para el análisis de datos sísmicos y puede ser aproximado usando una diferencia de gaussianas para cálculos más ágiles; en cambio el pulso de Gabor llega a ser más



popularmente utilizada para el análisis de señales en general y el procesamiento de imágenes, esto debido a que disminuye la desviación estándar de sus productos tanto en el tiempo como en la frecuencia y da resultados más confiables.

Las ecuaciones que definen al pulso de Ricker y Gabor implementadas son:

$$Ricker = \{A - 0.5\}e^A \quad (3.8)$$

$$Gabor = \frac{\cos(2\pi B)}{4e^{-0.8B^2}} \quad (3.9)$$

donde:

$$A = \left[\pi \frac{dT(\omega) - ts}{tp}\right]^2 \quad \text{y} \quad B = \left[\frac{dT(\omega) - ts}{tp}\right]^2 \quad (3.10)$$

Los parámetros  $tp$ ,  $ts$  y  $dt$  definen a las funciones y formarán pulsos más largos o más cortos, también definen el tiempo inicial a la que llega la onda. La principal diferencia visual que hay entre ambos pulsos es la polaridad de la onda que se propaga por el medio.

## 3.2 Código del IBEM

Desarrollado en México, el software trabaja en el lenguaje FORTRAN77 y está estructurado con dos códigos diferentes; el primero y más importante realiza todos los cálculos del sistema de ecuaciones integrales del IBEM, mientras que el segundo es principalmente usado para graficar y organizar la información en frecuencia a archivos en tiempo y frecuencia. FORTRAN es un lenguaje rápido y fácil de implementar por lo que el código se basa en este para agilizar los cálculos, pero el apartado del graficado de los resultados se realiza en MATLAB por sus ventajas al darle diseño a los plots.

En el código principal del IBEM se calcula el sistema de ecuaciones integrales, este se programó de una manera que tiene dos regiones: primero está la región del valle o la inclusión y luego está la región del semiespacio que rodea a la inclusión.

Para correr el código se requieren algunos parámetros de entrada que describen las propiedades mecánicas del medio, características de la onda incidente, el dominio de cálculo o las dimensiones del modelo y la geometría utilizada para la interfaz y la superficie. En el caso de la geometría se genera directamente dentro del programa dependiendo de los parámetros utilizados, esta puede tener una topografía predeterminada o podrá ser irregular seleccionando puntos que serán interpolados.

### **3.2.1 Parámetros de Entrada y Salida en IBEM**

El programa puede tratar con ondas P, SV, SH y Rayleigh; los parámetros de entrada necesarios para cualquier cálculo son los coeficientes de Poisson de los materiales, sus factores de calidad, el cociente de las densidades y el cociente entre las velocidades de la onda; estos son los parámetros físicos necesarios. También se requiere indicar el tipo de onda que va a incidir en la superficie, además del ángulo de incidencia y el azimut.

Dado que la geometría/topografía a calcular se genera directamente en el programa, se debe especificar el tipo de geometría a utilizar, así como sus características según corresponda para la superficie y la interfaz. Si es alguna de las opciones predeterminadas, se puede modificar la altura o profundidad del valle simétrico; en cambio desbloqueando la opción de utilizar un valle irregular, se pueden elegir puntos manualmente que son interpolados para generar una topografía irregular.

Por último, se especifica el dominio de cálculo en el espacio y en la frecuencia, así como el grado de integración gaussiana a utilizar para la integración de la función de Green, en estos casos se decidió utilizar para todos los modelos realizar una integración por cuadratura Gaussiana de tercer grado.

Del código principal para el IBEM se obtienen los resultados en archivos con formato ASCII, se incluye el resultado en frecuencia completo de la respuesta al impulso del modelo deseado y otro archivo que despliega los puntos que conforman la geometría generada para su despliegue. Se hace uso de diferentes versiones del programa, ya sea 2D o 2.5D, pero para ambos el formato de los resultados exportados es el mismo.

### **3.2.2 Estructura General y Funcionamiento**

Todo el código está diseñado dentro de un ciclo For(Do en Fortran) con las frecuencias como contador, por lo que está estructurado en base a las frecuencias y va realizando cálculos para cada frecuencia desde la primera frecuencia deseada hasta la última. Los cálculos son realizados de esta manera con el objetivo de ahorrar la memoria requerida por el programa, el contador de la frecuencia va incluido en toda función o subrutina que requiera de la frecuencia y es un contador “global” dentro del programa.

Las partes más importantes del programa son el main y la subrutina “SOL”. En la subrutina “SOL” se construye cuidadosamente el sistema de ecuaciones integrales discretizado para la frecuencia de cálculo donde se encuentre el contador, además este sistema de ecuaciones mostrado en las [ecs. 2.85 - 2.88](#) es resuelto utilizando el método de la descomposición en LU. Los resultados de dicho sistema dan un arreglo vectorial con las densidades de fuerza del sistema.

Debido a la naturaleza inversa del IBEM, después de resolver el sistema de ecuaciones mediante la descomposición en LU dentro de la subrutina “SOL”, se regresa al main del programa en donde el vector solución con las densidades de fuerza se utilizan para obtener el campo de desplazamientos. El campo de desplazamientos se obtiene sustituyendo las densidades de fuerza en una de las ecuaciones constitutivas del IBEM (ecs. 2.92 y 2.93) y resolviendo la integral usando cuadratura de Gauss da el tren de impulsos que representa la respuesta del medio a la onda que incide en el valle aluvial.

### **3.2.3 Generación de la Geometría del Modelo**

Algo de lo que no se ha hablado en los capítulos anteriores y que es de suma importancia es la generación de la geometría o de los modelos. Para empezar a realizar los cálculos del campo de desplazamientos y de las densidades de fuerza, es necesario tener preparada la topografía que se va a trabajar. Aquí entran unas subrutinas las cuales llamamos F, FP, FL y XGEOM que se encargan de calcular la altura o profundidad de la función de geometría, las normales para cada punto de control, la longitud entre los puntos de control y los puntos de frontera de la topografía respectivamente.

La cantidad y concentración de los puntos de control variarán con la frecuencia con lo que a mayores frecuencias los cálculos se van realizando más lentamente que a frecuencias bajas, esto se debe a que la cantidad de puntos cambiará dependiendo de la longitud de onda a una frecuencia determinada.

### **3.2.4 Cálculo de la Función y Tracciones de Green**

Las tracciones de Green se obtienen en la subrutina TRACT2, las funciones de Green se obtienen en GREENEX, GREENEX2, GREENGA y GREENGA2. Todas estas subrutinas están construidas cuidadosamente utilizando las ecuaciones encontradas en el capítulo 2.2.4 y en el apéndice 2. La única diferencia entre GREENEX y GREENEX2 o GREENGA y GREENGA2 es la dimensionalidad del cálculo para ahorrar tiempo de computación en casos donde no se requiere realizar el cálculo de la función de Green para las direcciones  $G_{22}, G_{23}, G_{32}, G_{21}$ , etc. Y donde solamente sean necesarios los resultados para las direcciones  $G_{11}, G_{33}, G_{31}, G_{13}$ .

### **3.2.5 Código para Sismogramas**

El segmento que realiza los cálculos de los sismogramas es mucho menos tardado porque no necesita resolver “n” número de ecuaciones y solamente hace operaciones entre vectores en el

dominio de la frecuencia para posteriormente pasar al tiempo los datos. Además, para el cambio del dominio se hace uso del algoritmo FFT que agiliza mucho el código.

Si bien los resultados del programa de IBEM son más que suficientes para representar la respuesta en frecuencia, los datos los despliega en un formato ilegible para MATLAB donde se realizan las gráficas en tiempo y frecuencia. Para facilitar el proceso de graficación, el programa del cálculo de sintéticos también realiza un reacomodo de la información en frecuencia para una representación más sencilla dentro de MATLAB, por lo que calcula directamente el espectro de amplitud. Además del cálculo del espectro de amplitud, realiza la convolución entre un pulso de Ricker o Gabor y posteriormente utilizando la subrutina de la transformada rápida de Fourier (FFT) se cambia del dominio de la frecuencia al tiempo; estos últimos resultados en tiempo son los sismogramas que son exportados por el código en FORTRAN para graficar dentro de MATLAB.

El uso del código requiere como parámetro de entrada tanto el nombre del archivo de entrada como el de salida, también es necesario especificar la cantidad de receptores o sismogramas utilizados en el cálculo del IBEM, el número de frecuencias, el intervalo en el tiempo que está inversamente relacionado con el intervalo de las frecuencias y la frecuencia máxima calculada. El resto de los parámetros variarán dependiendo del tipo de sismograma que se desee obtener; primero se puede seleccionar el tipo de pulso a utilizar (Ricker o Gabor), además de las características del pulso elegido, dichas características ya se discutieron en el capítulo 3.2.1, en las [ecuaciones 3.8 - 3.10](#). En general el  $t_s$  seleccionado principalmente para los modelos fue de 3 segundos, pero el  $t_p$  utilizado varió dependiendo de los modelos y las incidencias, se usaron valores de  $t_p$  que variaron desde el 0.2 hasta la unidad.

# Capítulo 4.

## Formulación de Algunos Problemas con IBEM

---

Siendo el propósito principal del trabajo ver los efectos producidos por la geometría y la mecánica dentro de un valle, se generaron diferentes modelos con geometrías y características mecánicas diferentes que asemejan a valles aluviales. Dado que el objetivo es ver el atrapamiento de ondas por un valle aluvial similar al Valle de México, se definen en este capítulo algunos modelos que ayudan a comprender el comportamiento de ondas incidentes P, SV, SH y Rayleigh en valles aluviales.

Se utiliza principalmente el método IBEM para los cálculos en medios homogéneos e isotrópicos, además con el fin de presentar la confiabilidad que da el método para cálculos de la respuesta sintética en valles se utilizan metodologías adicionales para comparar los resultados.

### 4.1 Difracción de Ondas SH en Topografía Semicircular

Es de interés entender el comportamiento vibratorio de suelos por la incidencia de ondas sísmicas, los depósitos aluviales afectan significativamente a las amplitudes de la onda incidente dado el atrapamiento de la onda en los valles. Para ilustrar la aplicación del método IBEM se estudia primero un modelo sencillo geoméricamente.

El modelo más sencillo que se presentará es el de un semiespacio con una topografía semicircular que asemeja a un valle elemental. Se investiga la amplificación dada por el enfocamiento de la energía por topografías semi circulares cóncavas y dada una onda incidente SH oblicua. La simplicidad de este modelo sirve como punto de inicio para entender el efecto en valles de la amplificación de la energía y también ayuda a revisar efectos más complejos derivados por la difracción. El modelo semicircular es presentado en la figura 8, se podrá observar primero que la dirección en el eje  $z$  tiene números positivos hacia abajo para poder hablar de profundidades sin hacer uso del signo negativo; se calculan varias incidencias con diferentes ángulos y a frecuencias adimensionales que son representadas por  $\eta = \omega a / \pi \beta = 2a / \lambda$ , donde  $a$  es el radio del semicírculo,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\lambda$  es la longitud de onda.

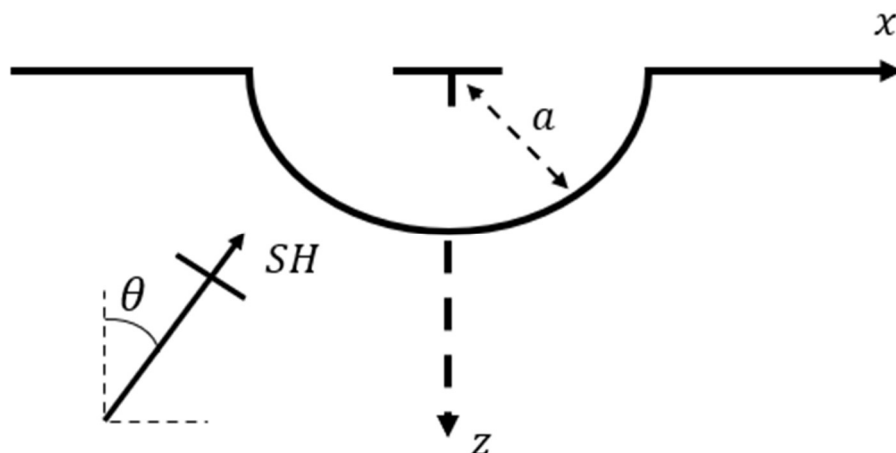


Figura 8. Modelo de semiespacio con topografía semicircular convexa. Se aplica una onda incidente oblicua  $SH$  desde profundidad con una incidencia de  $\theta$  grados.

Las dimensiones utilizadas para el modelo fueron de 101 receptores repartidos a lo largo de la superficie con una separación horizontal de 0.08 para los receptores repartidos a lo largo de  $-4 < x < +4$ , para el valle con una profundidad de  $a = 1$ . Debe destacarse que este dominio del modelo solamente son para los resultados gráficos ya que el tamaño real utilizado, o sea el número de puntos que construyen la superficie para la construcción del sistema de ecuaciones y por lo tanto para resolver el modelo, varía por frecuencia calculada y tiene una discretización más fina en la zona de la irregularidad topográfica, la cual se dicta por la longitud de onda para una buena precisión en los resultados finales. Este mismo efecto de la discretización afecta los tiempos del programa, el incremento en el número de puntos necesarios por frecuencia causan un decremento en el tiempo del programa debido al tamaño del sistema de ecuaciones a resolver, por lo que para frecuencias muy altas o modelos tridimensionales muy grandes es recomendable hacer uso de métodos iterativos al resolver el sistema de ecuaciones; ya que este modelo no es de gran tamaño y solamente se calcularon 128 frecuencias, se optó por hacer uso de descomposición en LU lo cual ayudó al cálculo simultáneo de varias incidencias a la vez por corrida.

Dadas las condiciones del modelo, siendo este un modelo de topografía irregular con un solo medio por donde se transmite la onda; se utilizan propiedades adimensionales espacialmente además de la frecuencia adimensional y no se usa amortiguamiento, tanto el radio del semicírculo como la velocidad de la propagación de la onda pueden ser consideradas como la unidad, las propiedades mecánicas del medio también fueron consideradas como la unidad dando así un programa muy simple y fácil de manejar que proporciona información enfocada solamente a la difracción de las ondas incidentes en la superficie irregular.

#### 4.1.1 IBEM vs DBEM

Ambos métodos (IBEM y DBEM) son útiles para el estudio del scattering de ondas sísmicas por topografías y valles. A pesar de su similitud, el IBEM requiere evaluar las densidades de fuerza calculadas en las ecuaciones del campo de desplazamientos, mientras que el DBEM calcula directamente el campo de desplazamientos. Esta diferencia entre ambos métodos genera ligeras diferencias en los resultados por lo que se en este capítulo se analizan brevemente.

Se toma como referencia un modelo de valle topográfico con una profundidad unitaria al cual le incide una onda SH con incidencia normal ( $\theta = 0^\circ$ ), para una comparación plena se utilizan las mismas propiedades, modelo y dimensiones en ambos métodos y se comparará la respuesta en frecuencia. A continuación, se muestra la discretización en superficie y sus vectores normales:

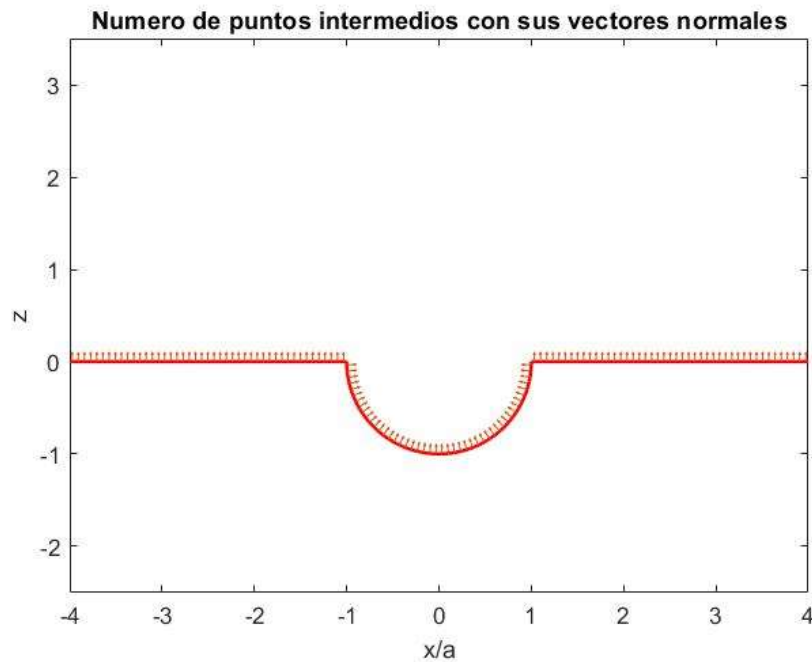


Figura 9. Discretización superficial del modelo semicircular en un semiespacio y sus vectores normales.

El modelo de un valle semicircular dentro de un semiespacio es un ejemplo clásico para analizar un método, su facilidad al programar y analizar permite inferir sobre efectos sísmicos complejos a pesar de la simplicidad del modelo. De hecho, la solución analítica de [Trifunac \(1973\)](#) para la respuesta de una topografía semicircular se volvió un clásico y surgieron más trabajos analizando el mismo modelo (e.g., [Lee, 2006](#); [Wei, 2020](#); [Mejía-López, 2021](#)). Un punto para considerar es que el IBEM funciona considerando las profundidades positivas, pero la figura 9 tiene el eje z de las profundidades con valores negativos hacia abajo por cuestiones de graficación.

## 4.2 Modelos 2.5D de Valles Aluviales

El modelado de los valles aluviales es de suma importancia para reducir el riesgo sísmico inducido por valles rellenos con sedimentos, ya que es bien sabido que los valles como el Valle de México pueden generar daños destructivos a edificaciones por las amplificaciones que se dan por el atrapamiento de la onda. Se sabe además que la frecuencia de resonancia es igual a lo largo de un mismo valle y que las amplificaciones llegan a ser mayores en el centro de los valles aluviales (et. al. Tucker & King, 1984). El objetivo principal de los modelos presentados es confirmar el segundo punto y analizar un modelo más complejo compuesto por dos valles del mismo material que están conectados.

Anterior a este trabajo se han realizado estudios de resonancia en dos dimensiones por la respuesta de valles aluviales a una incidencia de ondas sísmicas, utilizando el método T-matrix y la solución singular de Lamb (ver, Juin-Fu 2002); también se han analizado las ondas superficiales con la teoría de Campos Difusos para valles aluviales de dos dimensiones (ver, Baena-Rivera 2016). El estudio para la resonancia de valles aluviales en tres dimensiones ya ha sido trabajado con el DBEM por Tong y Kuribayashi en 1988, para el caso de un valle asimétrico relleno de sedimentos; además se han realizado otros estudios de resonancia en 3D para valles aluviales con geometrías simples (ver, Rial 1989).

### 4.2.1 Valle Aluvial Simple

Se estudia primero un valle aluvial simétrico con una inclusión suave sobre un semiespacio rígido, esta inclusión tiene un contraste de impedancia alto por lo cual da un coeficiente de reflexión cercano a la unidad y no permite la fácil transmisión de la energía por lo que se queda acumulada dentro de la inclusión o valle.

El objetivo es analizar un modelo simple de un valle aluvial y comparar los resultados con un método adicional FLAC que será descrito en el siguiente capítulo, se pretende revisar las amplificaciones que en teoría deberían acumularse en el centro del valle.

Las propiedades mecánicas del Valle Aluvial Simple son: un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.45$  para la inclusión y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$  para el semiespacio, se utilizó un cociente de densidades de  $\frac{\rho_R}{\rho_E} = 0.8$  y un cociente de velocidades de  $\frac{C_R}{C_E} = 0.2$ , R es la región de la inclusión y E es la región comprendida por el semiespacio. En el semiespacio no se utilizó amortiguamiento, mientras que para la inclusión si se agregó un amortiguamiento con un factor de calidad  $Q = 100$ , donde el amortiguamiento se define como  $\zeta = 1/2Q$ , por lo tanto  $\zeta = 0.005$  y este se agrega directamente a los cálculos en la parte compleja de los números de onda. Ya que el objetivo principal es analizar los efectos dentro de un valle aluvial, se seleccionó un amortiguamiento nulo para el semiespacio para que la onda incida sobre el valle sin perder



energía, el amortiguamiento en el valle sirve para no tener problemas de causalidad al momento de cambiar del dominio de la frecuencia al tiempo con el IBEM. En la figura 10 se muestra un esquema de las dimensiones, las direcciones para cada eje, además de la dirección de las ondas que inciden.

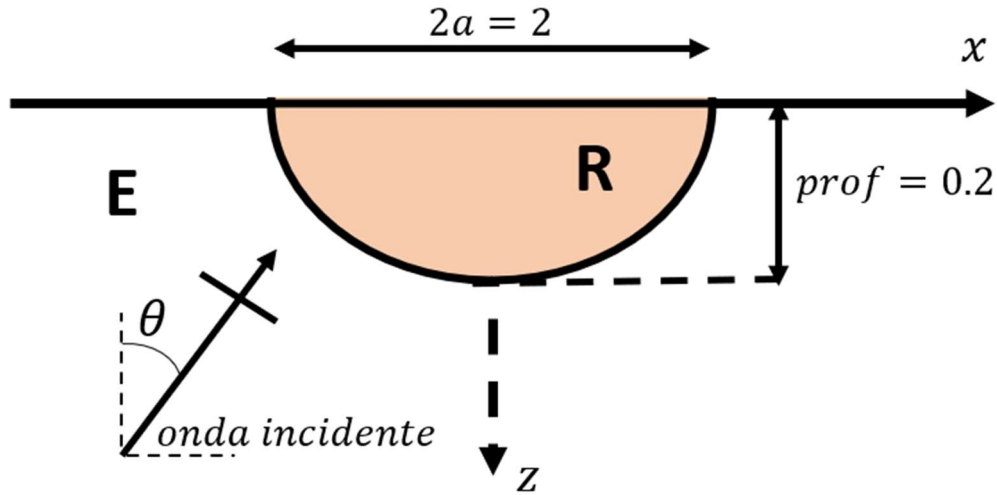


Figura 10. Esquema del modelo de un valle ahuecado elíptico suave (región R), adentrado en un semiespacio rígido (región E). La profundidad del valle es de 0.2 y  $a$  es la distancia del vértice al centro.

En el esquema presentado en la figura 10, se muestra que la profundidad máxima del valle es de 0.2 y su extensión horizontal en el eje  $x$  es de  $2a$ , donde  $a = 1$ . Las profundidades serán positivas ya que el eje vertical  $z$  va hacia abajo y recordar que el modelo se extiende infinitamente en el eje horizontal y el cual sale del plano mostrado en el esquema.

En este caso la interfaz entre el semiespacio y la inclusión es construida mediante la siguiente ecuación:

$$z = prof\sqrt{1 - x^2} \quad (4.1)$$

Función la cual define a una elipse con un semieje en  $x$  con extensión igual a  $a$  y donde el semieje vertical en  $z$  es la profundidad del valle. A continuación, se muestra la geometría real del modelo utilizado con sus vectores normales.

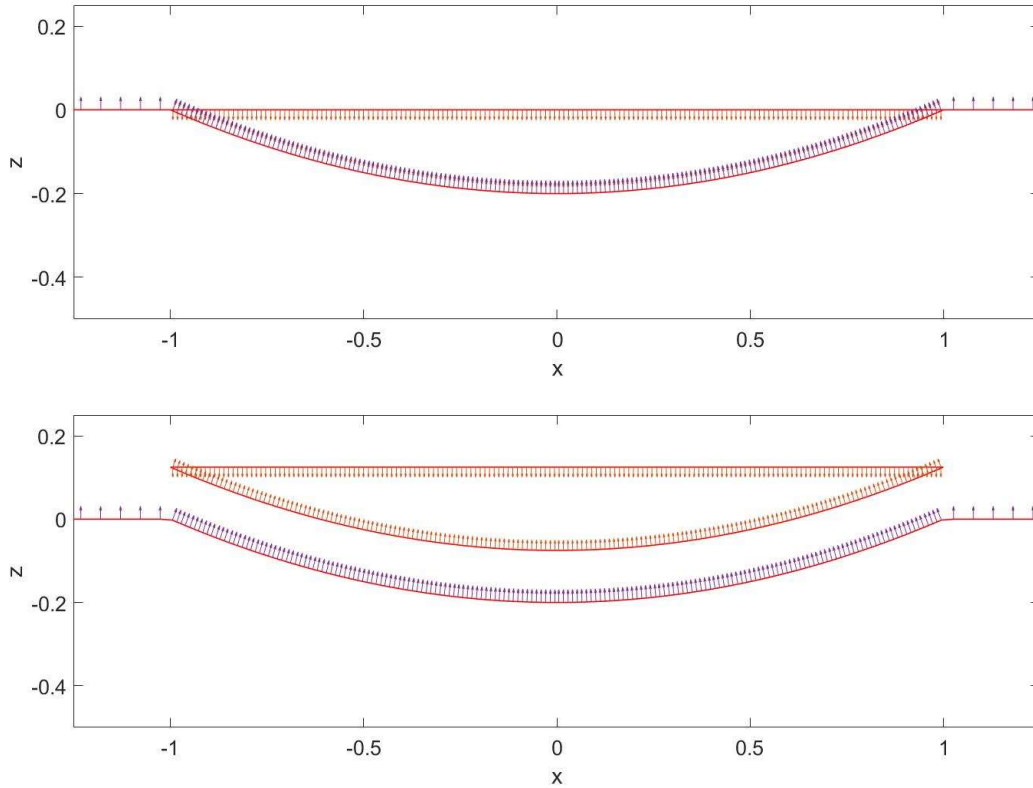


Figura 11. Discretización del modelo de un valle aluvial elíptico y sus vectores normales.

En la figura 11 se podrá notar que en la zona plana de la región E se tiene una discretización menos fina a comparación con la zona de la inclusión o valle; esta diferencia en la discretización se debe a la geometría y también es el culpable de ralentizar el programa, ya que la mayor parte de los cálculos realizados de todo el modelo son del valle que tiene una mayor cantidad de puntos. Para este modelo se calcularon la incidencia de ondas P, SV, SH y de Rayleigh; cada uno con diferentes ángulos de incidencia que se definirán en el capítulo 5.

Se calcularon 1024 frecuencias totales siendo la frecuencia 512 la de Nyquist y con un intervalo entre frecuencias de  $\Delta\eta = 0.025$ , hay que recordar que se trabaja con frecuencias adimensionales representadas como:

$$\eta = \omega a / \pi \beta = 2a / \lambda \quad (4.2)$$

Estos parámetros de cálculo en la frecuencia permiten generar resultados en tiempo de hasta los 80 segundos para 201 sismogramas calculados, donde se tiene un receptor en el centro del valle y 100 hacia los costados. Hay casos donde se mostrarán cálculos a profundidad para los cuales se utilizó 201 sismogramas por línea con 201 líneas a profundidad, teniendo así un sismograma en la superficie plana y 200 a profundidad. El intervalo entre cada receptor horizontal es de  $\Delta x = 0.0125$  y se colocaron entre  $-1.25 \leq x \leq 1.25$ ; para los receptores a profundidad se usó un intervalo más fino  $\Delta z = 0.002$  para que  $-0.4 \leq z \leq 0$  por lo tanto, se tiene una mayor resolución verticalmente.

Por último, para resolver las ecuaciones integrales del método se hizo uso de cuadratura Gaussiana de tercer grado. Ya obtenidos los resultados en frecuencia se exportan hasta la parte útil (la frecuencia de Nyquist) para trabajarlos con la teoría clásica de Fourier.

#### **4.2.2 Valles Aluviales Adyacentes**

El ejemplo de un valle aluvial simple sirve para ver sin tantas complicaciones los efectos de las ondas atrapadas en un valle, en este capítulo se describe un modelo más complejo conformado por la unión de dos valles aluviales conformados por el mismo medio o material.

El objetivo para este modelo de valles duales adyacentes es simular una respuesta local que se asemeje al Valle de México de la manera más simple posible. Dado a que el modelo se basa en los materiales presentes en el valle de la Ciudad de México, se exhibe un caso con dos regiones R y E, siendo R los valles aluviales conformados por material arcilloso y E la zona del semi espacio que rodea al valle cuyas propiedades mecánicas serán modeladas simulando un material basáltico. Las propiedades mecánicas del modelo son: un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.4$  para la inclusión conformada por arcilla y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.333$  para el semiespacio conformado de basalto, se utilizó un cociente de densidades de  $\frac{\rho_R}{\rho_E} = 0.9$  y un cociente de velocidades de  $\frac{c_R}{c_E} = 0.1666$ . El coeficiente de Poisson tomado para la inclusión equivale al de una arcilla consolidada y el coeficiente de Poisson utilizado en el semiespacio equivale a un basalto promedio, donde para el basalto se puede tener valores de  $[0.19, 0.38]$ . Para las velocidades se consideró las velocidades de onda promedio de un basalto compacto y de material aluvial o de una arcilla fracturada.

Hay que recordar también que en este caso el modelo es homogéneo e isótropo por la simplicidad de los cálculos y el posterior análisis de los resultados, además de que cada valle tiene un diámetro de  $a$  igual a la unidad. A continuación, se muestra un esquema del valle aluvial planteado:

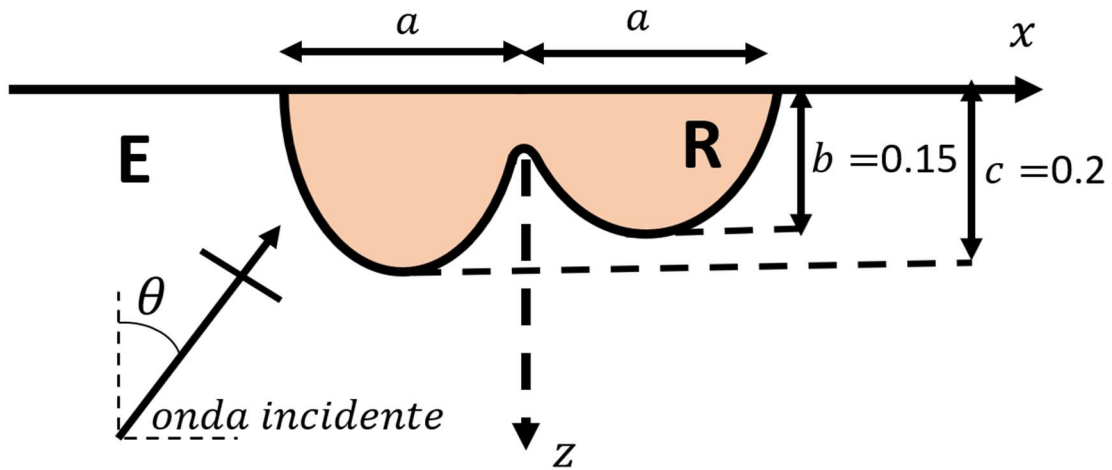
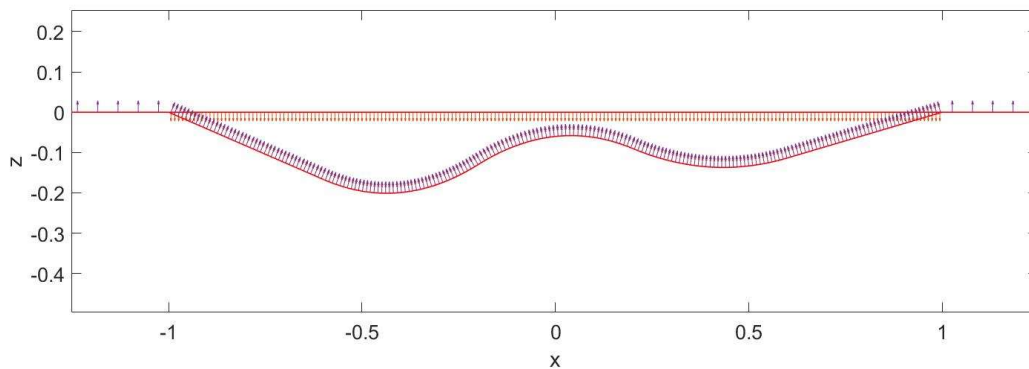


Figura 12. Esquema del modelo de dos valles aluviales conectados que asemejan al Valle de México. El valle más profundo llega a  $z=0.2$ , mientras que el valle de menor profundidad llega a  $z=0.15$ .

La figura 12 muestra un esquema del modelo aluvial conformado por dos valles conectados donde uno tiene una profundidad máxima de  $c = 0.2$  y otro llega a  $b = 0.15$ , las ondas incidentes llegan de la dirección  $-x$  hacia  $+x$  (de izquierda a derecha) por lo cual se busca revisar cuánta energía queda atrapada en cada valle. Nuevamente para la inclusión del valle se utilizó un factor de calidad  $Q = 100$ , donde el amortiguamiento se define como  $\zeta = 0.005$ ; mientras que para la región del semiespacio se hizo uso de un amortiguamiento nulo. Se calcularon 1024 frecuencias totales, siendo la frecuencia 512 la de Nyquist, esto con un intervalo entre frecuencias de  $\Delta\eta = 0.025$  para frecuencias adimensionales (ver ecuación 4.2).

La geometría del modelo se creó utilizando una interpolación entre los puntos de las profundidades de los valles y del enlace entre ellos, para cada valor de  $x$  el cual tiene va de  $-1.25$  a  $1.25$  con un  $\Delta x = 0.0125$ , dando así 201 receptores horizontales. Para los receptores verticales, igualmente se utilizaron 201 hacia abajo con un intervalo  $\Delta z = 0.002$ , donde  $-0.4 \leq z \leq 0$ . Por lo tanto, para las imágenes a profundidad se utilizaron en total, 40401 puntos o sismogramas.

A continuación, se muestra en la figura 13 el tipo de discretización usada por región, así como el modelo en escala real.



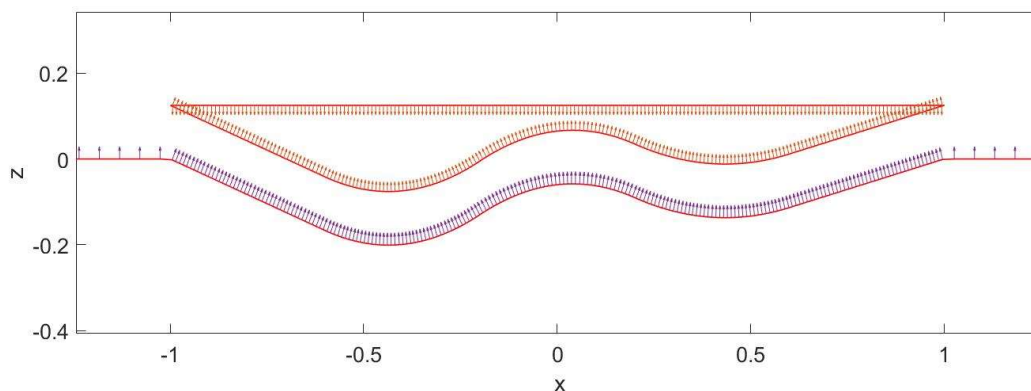


Figura 13. Discretización superficial del modelo semicircular en un semiespacio y sus vectores normales.

Como ya se había mencionado anteriormente en el capítulo 2.2.5 las fronteras  $\partial_2 E = \partial_2 R$  se utilizan dos veces, una para el cálculo de la topografía que limita al semi espacio y otra para calcular las difracciones dentro de la inclusión aluvial. En las figuras 11 y 13 se demuestra que la construcción de ambas regiones (semiespacio e inclusión) implica el uso de la misma frontera. En ambas figuras (11 y 13) la gráfica superior es el modelo real y en la gráfica inferior se separa la interfaz del semiespacio con la inclusión para demostrar que se tratan de fronteras y regiones diferentes.

La idea con el modelo aluvial presentado es revisar la incidencia de ondas del lado izquierdo para encontrar posibles decrementos energéticos en el valle presente en  $0 < x < 1$ , dado a que el valle de menor profundidad es eclipsado parcialmente por el valle de mayor profundidad en el caso de la incidencia de ondas oblicuas con alto grado de incidencia. El modelo también pretende simular la respuesta dada por el Valle de México localmente, siendo este modelo basado en una línea que atraviesa verticalmente (orientación N-S) la Ciudad de México pasando al costado del Cerro de la Estrella en Iztapalapa.

El Cerro de la Estrella es un Horst con material volcánico compuesto por andesitas basálticas, su naturaleza estructural implica que se trata de un cuerpo volcánico que se elevó con respecto al material adyacente debido a fallas o en este caso por la extrusión de material caliente desde el subsuelo (ver, [Montero García 2002](#)). La presencia del cerro en el modelo se muestra como la elevación presente en  $x = 0$  con respecto a los dos valles adyacentes que simulan la presencia del antiguo y extinto Lago de Texcoco y el Lago de Xochimilco. Actualmente las zonas donde antes se presentaban los lagos se encuentran cubiertas por la urbanización de la CDMX, es zona relativamente plana y el subsuelo donde antes se encontraba el lago se conforma por arcillas que llegan a estar fracturadas. Por lo tanto, el modelo presentado en las figuras 12 y 13 se basó considerando la antigua presencia de los lagos de Xochimilco y Texcoco, además de la intrusión del material basáltico debido a la presencia cercana al Cerro de la Estrella.

# Capítulo 5.

## Resultados

---

El presente capítulo contiene los diversos resultados obtenidos para los modelos presentados en el capítulo anterior (cap. 4), se muestran los avances realizados mediante el método IBEM a dos y media dimensiones, además del análisis realizado para diferenciar los efectos topográficos y geométricos ante la incidencia de ondas P, S y Rayleigh.

Todos los modelos presentes se limitaron a medios homogéneos isotrópicos para simplificar el análisis y concentrarse en el efecto producido por las difracciones generadas por la topografía y por la inclusión.

Los resultados presentados también serán comparados con otros métodos para corroborar algunos de los resultados obtenidos, entre estos se encuentran la versión directa del IBEM (DBEM) y el FLAC, el cual es un método híbrido de los métodos de Diferencias Finitas y de Elementos Finitos.

### 5.1 Respuesta de Ondas SH en Topografía Semicircular

El modelo de una topografía semicircular introducida en el capítulo 4.1, representa uno de los casos más estudiados por el interés en el análisis de difracciones en topografías irregulares, además de ser este uno de los casos más sencillos que se pueden estudiar. Por ejemplo, en [Sánchez-Sesma & Campillo \(1991\)](#) presentan modelos simples como el de un cañón triangular, circular y elíptico. Resuelven los modelos utilizando el IBEM para dar una perspectiva del rango de los efectos causados por anomalías topográficas y sus respuestas representadas en la amplificación mostrada en la frecuencia.

Para el presente trabajo se pretende realizar un análisis breve del modelo de un cañón semicircular, por lo cual se decidió hacer uso de solamente incidencia con ondas SH. Dado a que la incidencia de las ondas P o SV en una superficie provoca la reflexión de ambas ondas a la vez, los sistemas de ecuaciones en esos casos llegan a ser más grandes que el de un caso con ondas SH; igualmente los resultados en P o SV implican un análisis de la onda del eje tanto vertical como horizontal, mientras que para el caso de la onda SH con un azimut de  $0^\circ$  implica que se podrá visualizar los resultados fácilmente en una sola componente horizontal.

Dado a que el modelo trabaja con una sola región, no se utilizan coeficientes de reflexión/transmisión, así como la impedancia; por lo que las propiedades mecánicas del medio se consideraron con un valor de la unidad para la densidad y una velocidad de la onda S igual a  $\beta = 2\text{km/s}$  si se considera que las posiciones horizontales en x están en kilómetros. Se utilizaron 101 sismogramas en total con un intervalo de  $\Delta x = 0.08$ , para cada receptor se calcularon 128 frecuencias con un intervalo de  $\Delta \eta = 0.1$  entre ellas y por último se hizo uso de un amortiguamiento nulo para que la amplitud de las ondas no decremente. A continuación, se muestra en la figura 14 unos sismogramas obtenidos a partir de la teoría de Fourier y la FFT para varias incidencias:

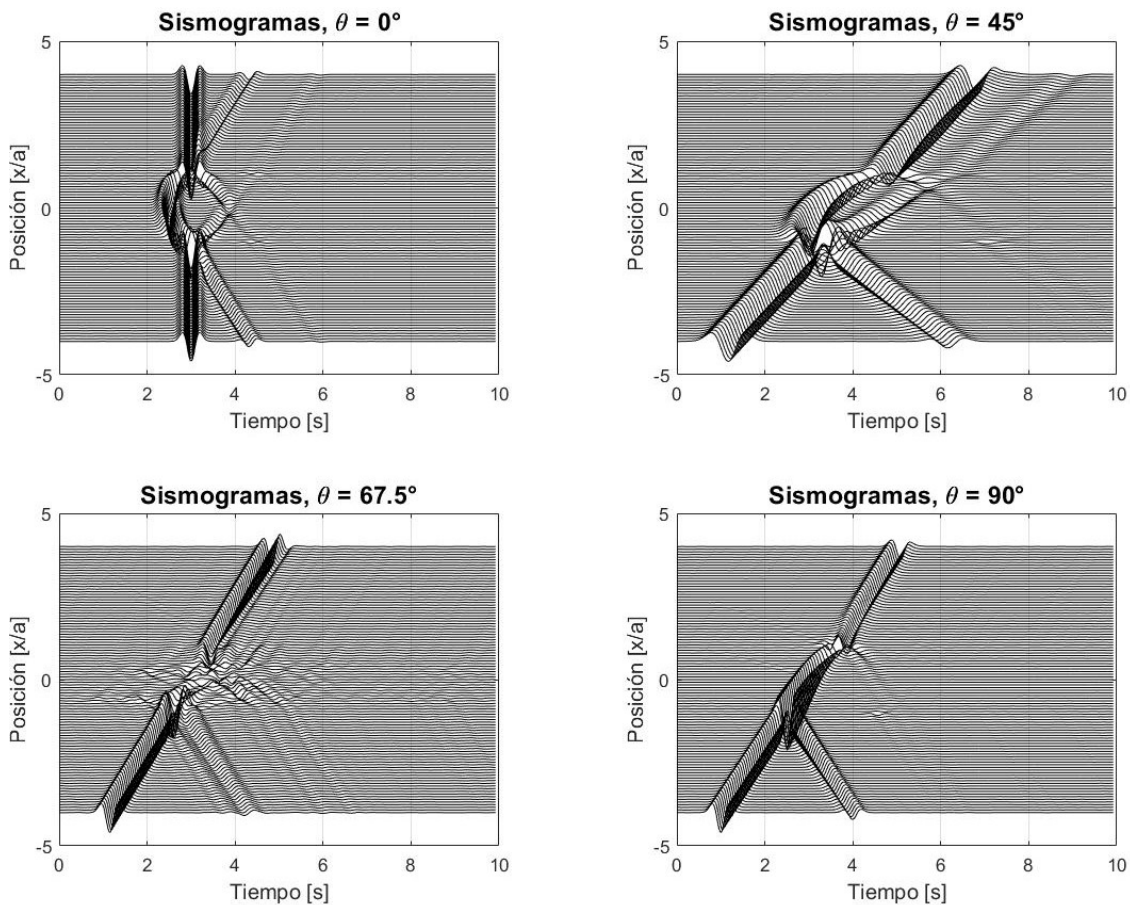


Figura 14. Sismogramas sintéticos superficiales para modelo de cañón semicircular con una onda SH incidente. Se muestran incidencia normal e incidencias oblicuas a  $45^\circ$ ,  $67.5^\circ$  y  $90^\circ$  con un  $t_p=0.5$  s

La figura 14 muestra los sismogramas sintéticos obtenidos para una onda SH que incide sobre la superficie a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $67.5^\circ$  y  $90^\circ$ , se muestra la componente horizontal  $U_y$ , ya que el campo de desplazamientos en  $U_x$  y  $U_z$  es nulo para el caso de las ondas SH. Se utilizó un periodo característico de la wavelet de Ricker de  $t_p = 0.5$  s y se usa una frecuencia normalizada descrita con la ecuación 4.2 la cual también puede presentarse como  $\eta = 2a/\beta t_p$ , donde el cociente  $2a/\beta$



se asume como la unidad (1s), lo cual implica que la frecuencia normalizada es la frecuencia natural en Hz para este caso.

Las incidencias oblicuas en la figura 14 revelan que cuando se genera una reflexión por la incidencia de las ondas SH en la superficie, se reflejan con el mismo ángulo de incidencia hacia el semiespacio; también se podrá notar que las difracciones se reflejan con un retraso y una reducción en la amplitud. El modelo muestra una respuesta simple a ondas SH sin la intrusión de ondas P, SV ni ondas superficiales de Rayleigh. Las difracciones se aprecian con mayor energía dentro de la zona de la irregularidad superficial.

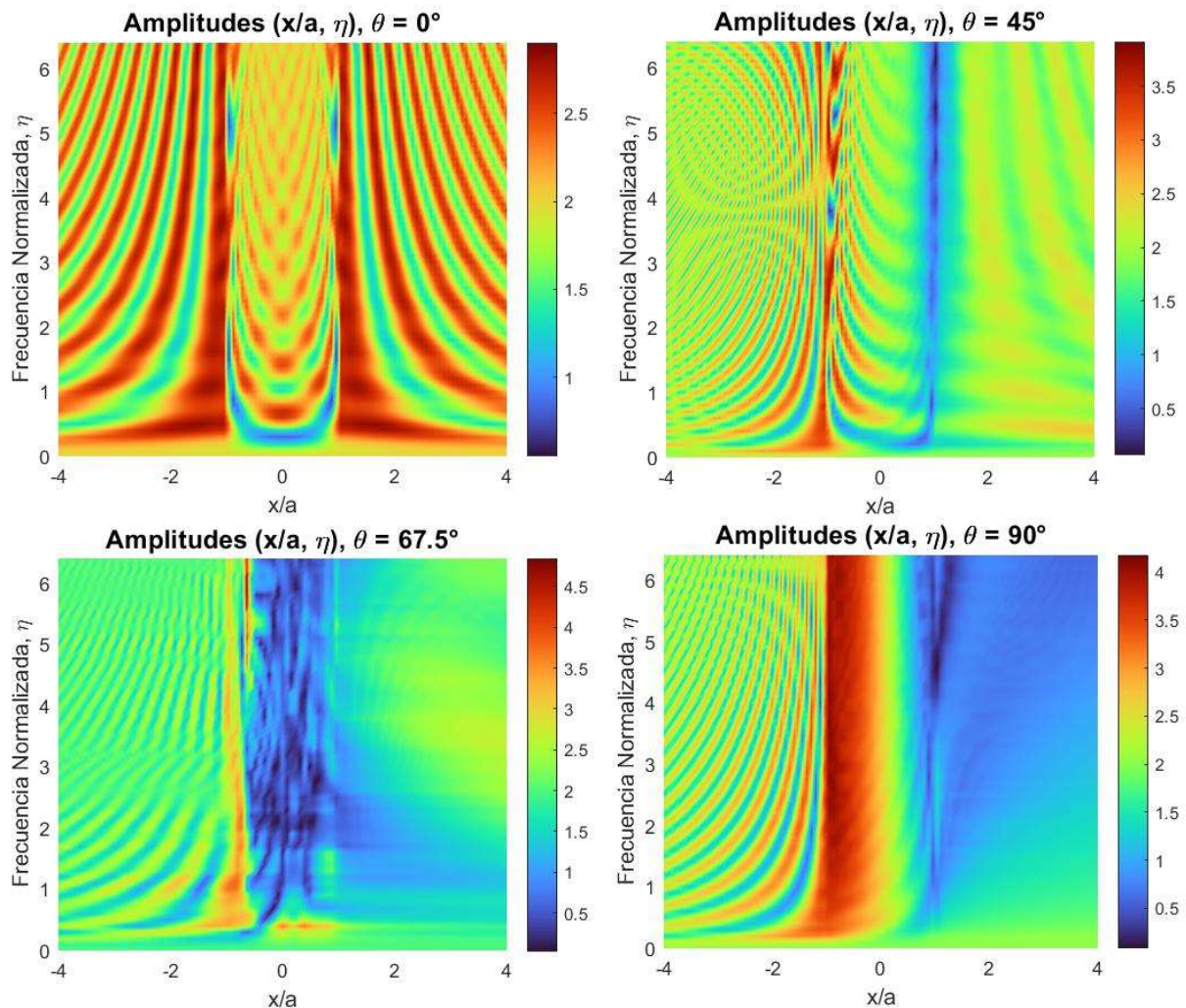


Figura 15. Espectros de amplitud para la incidencia de ondas SH a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $67.5^\circ$  y  $90^\circ$  para el modelo de un cañón semicircular con profundidad de la unidad.

La figura 15 muestra los espectros de amplitudes para las incidencias normal y oblicuas a  $45^\circ$ ,  $67.5^\circ$  y  $90^\circ$ ; para una mejor visualización por caso se tiene una escala de colores variable, donde la escala es presentada al costado derecho de cada gráfica. Nótese que la frecuencia máxima



calculada fue de  $\eta = 6.4$ , la cual puede considerarse también como una  $f_{Nyquist} = 6.4 \text{ Hz}$ . El espectro se recorta en la frecuencia de Nyquist para generar espectros más presentables.

Recordando que la onda SH solo muestra desplazamientos en la componente horizontal  $U_y$  (transversal al eje  $x$ ), los espectros mostrados en la figura 15, representan las ampliaciones dadas en esta componente ( $U_y$ ) donde se observa con claridad que la amplitud logra llegar hasta valores de 4 para las incidencias oblicuas, siendo los puntos con mayor ampliación los límites de la irregularidad. También se podrá notar que en el caso de la incidencia oblicua a  $67.5^\circ$  y  $90^\circ$ , la irregularidad llega a defender hasta cierto punto al borde derecho de las ondas incidentes y de las difracciones por lo que se observan menores valores de ampliación.

### 5.1.1 Comparación con DBEM

Para un análisis más enriquecedor de la incidencia de ondas SH en la irregularidad semicircular y de la versatilidad del IBEM, se muestran en este capítulo comparaciones en el dominio de la frecuencia del IBEM con el DBEM. Ambas variantes del BEM se basan en la construcción del sistema de ecuaciones mediante ecuaciones integrales, pero se llegan a notar algunas diferencias por la naturaleza de cada método. Las diferencias pueden darse debido a que en el IBEM la superficie es aproximada con el teorema de representación, las condiciones de frontera libre utilizadas en cada método cambian por sus ecuaciones, además de que el IBEM es un método de colocación debido a las densidades de fuerza utilizadas en la discretización del método.

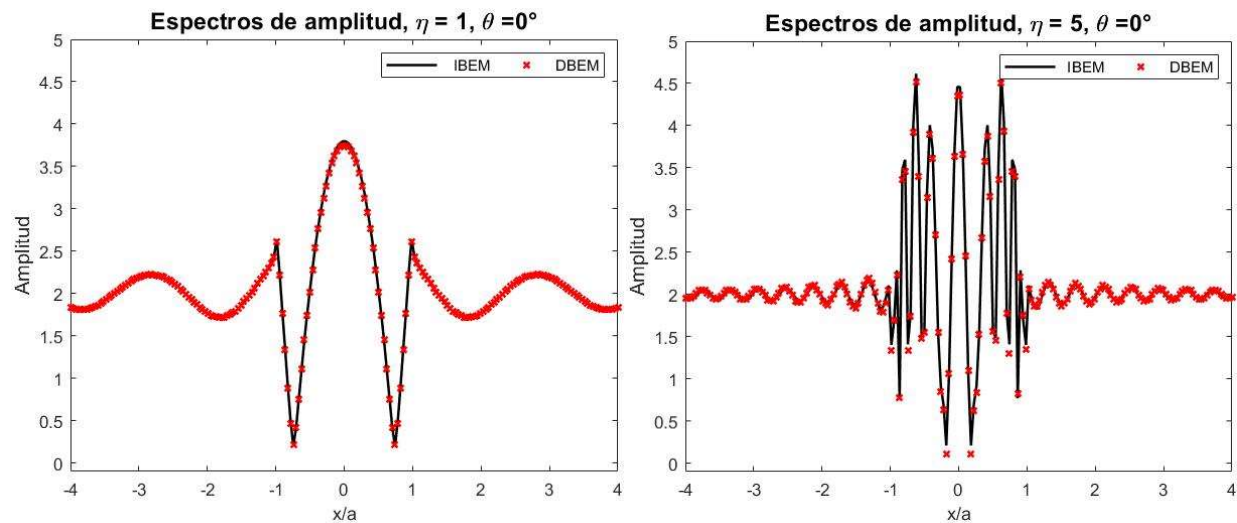


Figura 16. Espectros de amplitud para una topografía semicircular con incidencia normal. Se muestra en color negro los resultados dados por el IBEM y en cruces rojas los resultados del DBEM.

Ambos métodos muestran buenos resultados en la figura 16, donde los errores son mínimos y se deben a los factores ya mencionados además de errores numéricos por parte de los programas. Como se podrá observar a frecuencias bajas ( $\eta = 1$ ) se tienen errores mínimos entre ambos

métodos porque el sistema de ecuaciones no llega a tener tamaños tan grandes, pero para frecuencias altas ( $\eta = 5$ ) si se llegan a observar puntos salidos por parte del DBEM por lo que llega a mostrarse que en el BEM directo se calculan algunos puntos con amplitudes mayores que el IBEM dentro de la irregularidad topográfica. Este fenómeno se debe a errores numéricos debidos al gran sistema de ecuaciones que llega a necesitarse para cálculos en altas frecuencias.

Los métodos de elemento de contorno han demostrado ser bastante versátiles para el estudio de topografías irregulares, dando resultados que pueden compararse con métodos que son computacionalmente más intensos y tardados. Pero además pueden realizar modelos más complejos con la integración de inclusiones, lo cual se mostrará en el siguiente capítulo.

## **5.2 Respuesta Sísmica de un Valle Aluvial Simple**

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en tiempo y frecuencia para el caso de un valle aluvial parabólico con inclusión suave. Este modelo fue introducido en el capítulo 4.2.1

Se mostrarán resultados de ondas incidentes SH, SV, P y de Rayleigh respectivamente; para este modelo se optó calcular incidencia normal para las ondas SH y SV, mientras que la onda P es un caso de onda oblicua.

Recordando la [ecuación 3.10](#), para los sismogramas en superficie se hizo uso de un periodo fundamental del pulso de Ricker de  $t_p = 0.5$  con un  $t_s = 3$  que indica los tiempos de arribo. Para los desplazamientos a profundidad, la wavelet de Ricker se construyó con  $t_p = 0.2$  y  $t_s = 3$ , de esta forma los desplazamientos dentro del valle a profundidad se lograron apreciar con mayor claridad.

En el caso de los espectros de amplitud mostrados, estos son graficados solamente hasta la parte útil del espectro, o sea hasta la frecuencia de Nyquist.

Por último, los snapshots o desplazamientos a profundidad pueden ser vistos en diferentes componentes para el caso de las ondas P, SV y de Rayleigh, por lo que en este capítulo se seleccionó la componente más significativa para presentar y la otra componente restante puede ser consultada en el apéndice A.3

### ***Incidencia de onda SH***

Con las propiedades mecánicas y las dimensiones propuestas en el capítulo 4.2.1, se realizó el caso de una incidencia normal  $\theta = 0^\circ$  con una onda SH; ya que la onda SH no interfiere con los demás tipos de onda, es fácil de analizar para observar el buen funcionamiento del método.

Recordando que los desplazamientos de la onda SH son transversales a la dirección de propagación, en este caso se presenta la componente horizontal transversal  $U_y$  donde se observan los desplazamientos generados por la onda SH que se propaga a través del plano x-z.

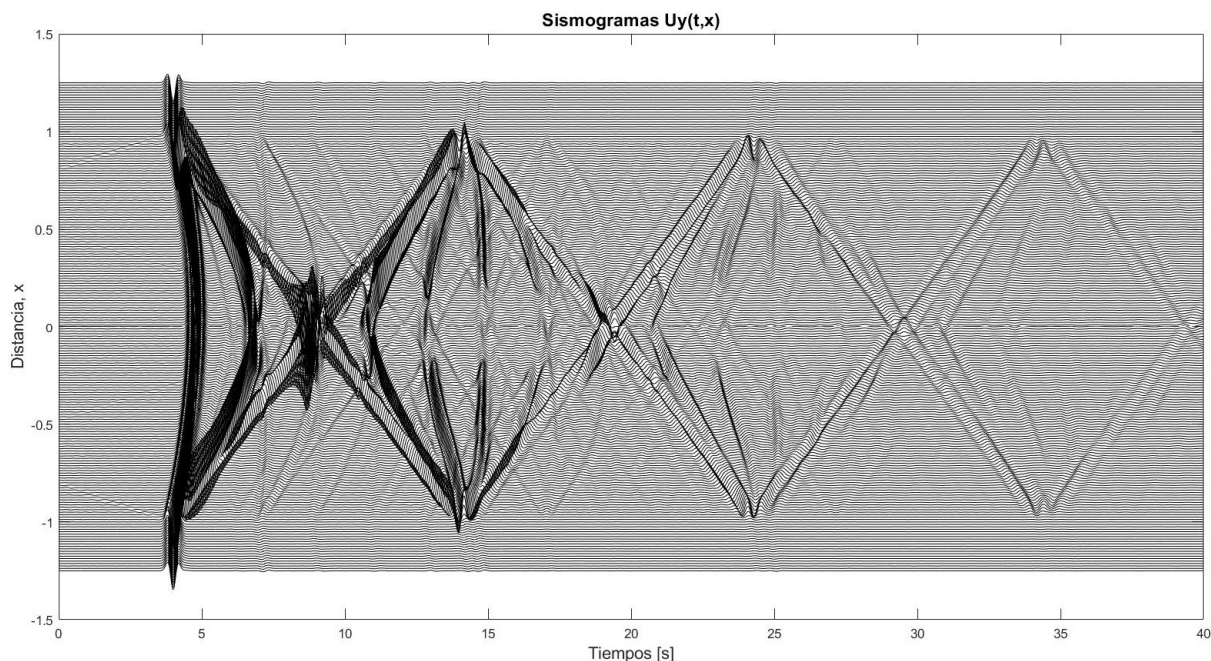


Figura 19. Desplazamientos superficiales de una onda incidente SH, incidencia normal a  $0^\circ$ .  
Componente horizontal  $U_y$ .

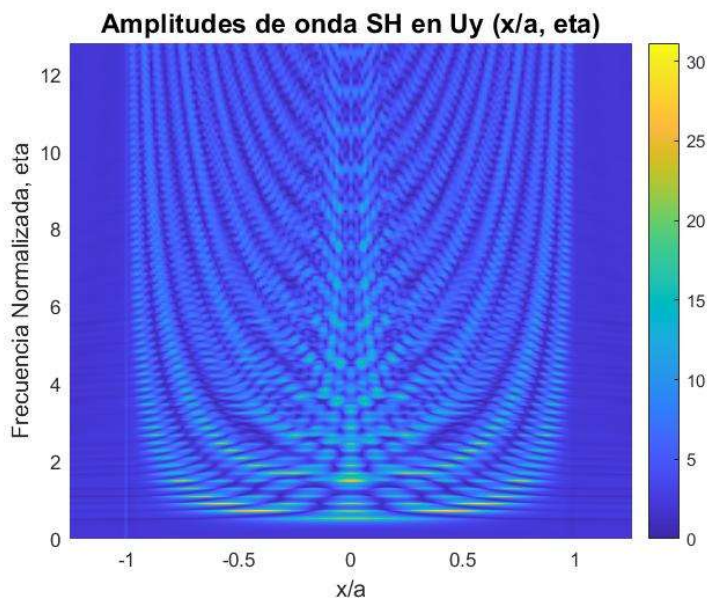


Figura 20. Amplificaciones superficiales para onda incidente SH con incidencia normal.

Es fácil notar en las figuras 19 y 20 que la onda SH se queda atrapada dentro del valle  $-1 < x < 1$ , en los sismogramas el efecto se observa como un patrón de chevrón lo cual implica que la

onda no logra salir del valle aluvial por la impedancia; en el caso del espectro de amplitud el fenómeno es descrito por una acumulación en la energía en la zona del valle, mientras que fuera de este  $abs(x) > 1$  hay un bajo contenido energético.

Se muestran también en la siguiente figura 21 los desplazamientos a profundidad producidos por la onda SH.

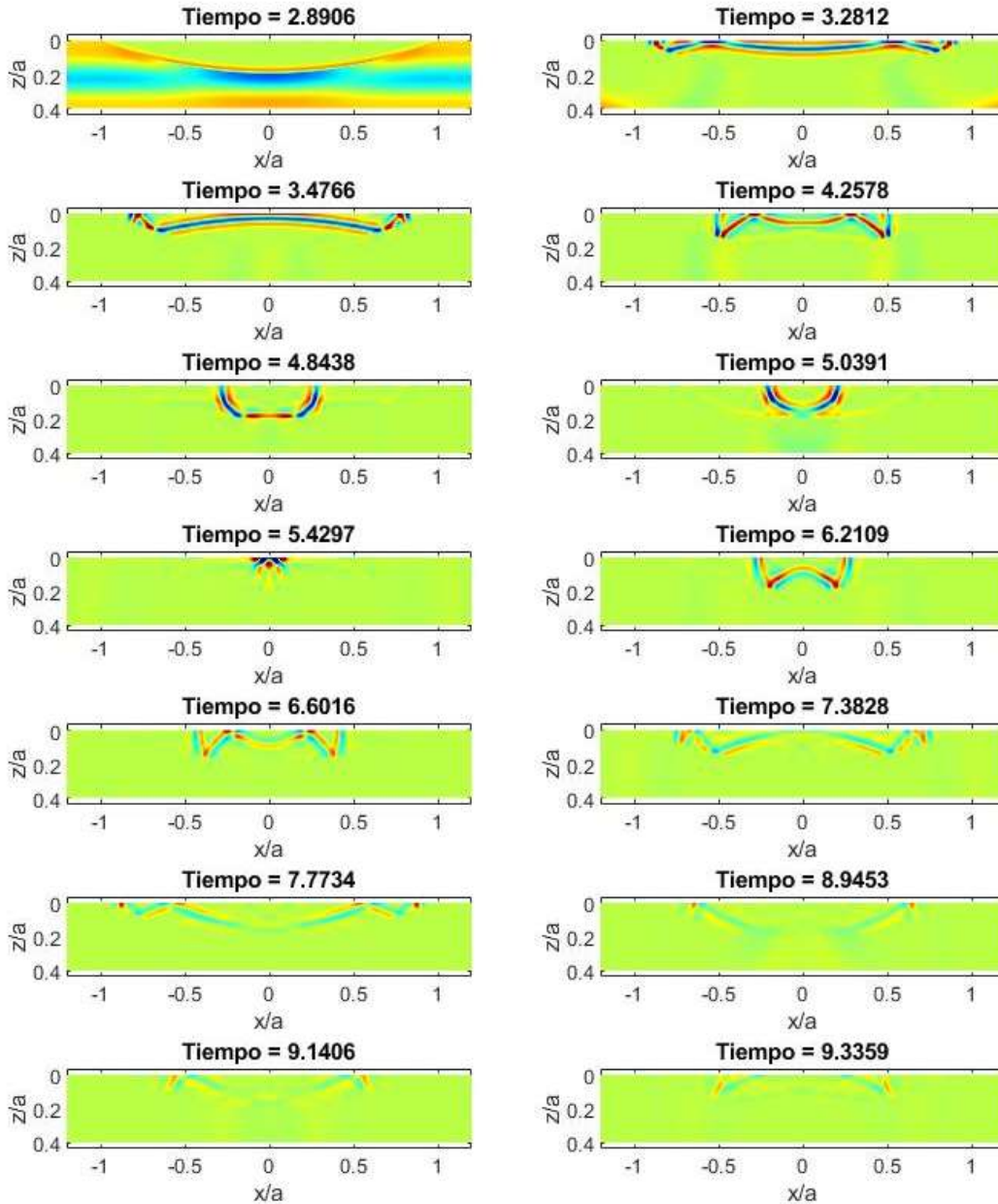


Figura 21. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_y$  para una onda SH con incidencia normal en un valle parabólico.



Se observa el atrapamiento de las ondas debidas al contraste de los materiales en las imágenes de la figura 21, también se puede notar que la onda en el semiespacio viaja a una velocidad mucho mayor a la del valle por lo que en cuestión de segundos sale del dominio de cálculo mostrado.

### ***Incidencia de onda SV***

Igualmente utilizando las propiedades mecánicas descritas en el capítulo 4.2.1, se generaron los siguientes resultados para el caso de la incidencia normal a  $0^\circ$  de una onda SV. Se decidió presentar una incidencia normal porque en el siguiente capítulo 5.2.1 se muestra una comparativa de los resultados del IBEM contra los resultados de un método basado en diferencias finitas y elementos finitos, donde este método conocido como FLAC solamente trabaja para incidencias normales.

Dada la naturaleza de las ondas SV, se muestran resultados en la componente horizontal  $U_x$  y en la componente vertical  $U_z$ ; se presentan sismogramas superficiales y espectros de amplitud para estas componentes. En el caso de las imágenes de los desplazamientos presentes a profundidad, solamente se anexa la componente  $U_x$ ; los desplazamientos a profundidad en la componente  $U_z$  se encuentran en el anexo A.3 en la [figura A1](#).

A continuación, se incluyen las figuras 22 y 23, que representan el conjunto de sismogramas en la superficie del modelo para las componentes  $U_x$  y  $U_z$ . En este caso la componente  $U_y$  es nula por el tipo de onda presentada.

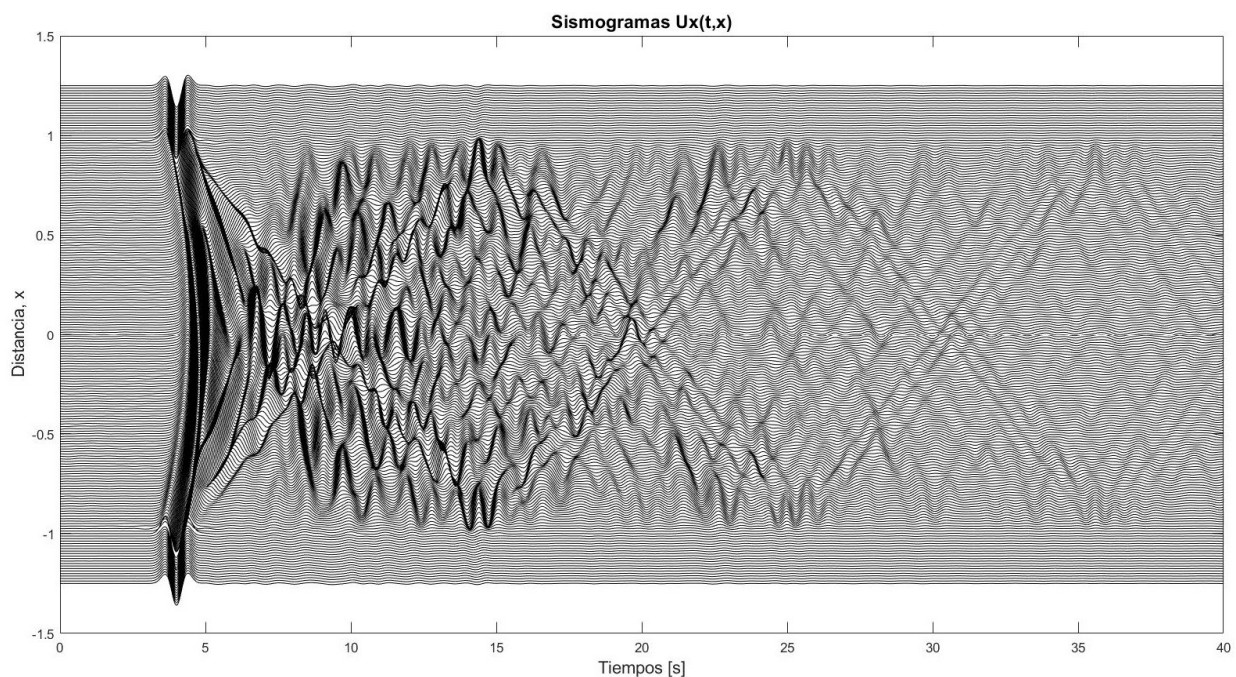


Figura 22. Desplazamientos superficiales de una onda incidente SV, incidencia normal a  $0^\circ$ .  
Componente horizontal  $U_x$ .

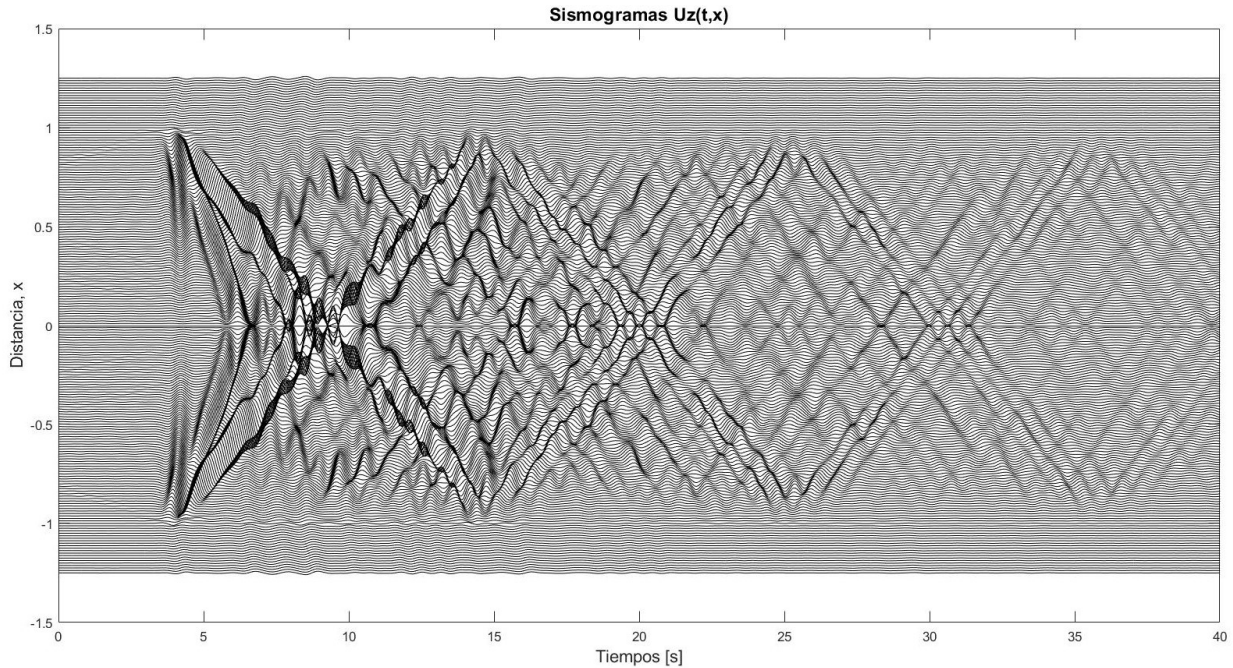


Figura 23. Desplazamientos superficiales de una onda incidente SV, incidencia normal a  $0^\circ$ .  
Componente vertical  $U_z$ .

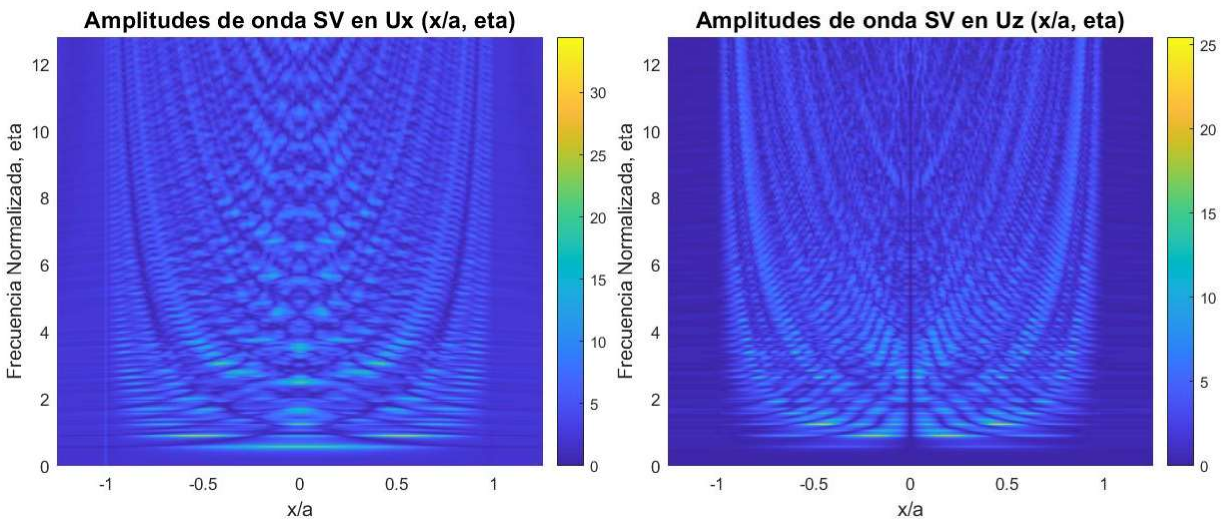


Figura 24. Amplificaciones superficiales para onda incidente SV con incidencia normal. Componentes  $U_x$  y  $U_z$ , horizontal y vertical.

Recordando los resultados para una topografía semicircular en el capítulo 5.1, los arribos en ese caso se presentaron antes dentro de la irregularidad debido a que esa era la superficie del modelo; en este caso la superficie es plana, pero se observa un retraso en los arribos, los cuales se deben al decremento en la velocidad de propagación dentro de la inclusión. Esto es notable en los



sismogramas de las figuras 22 y 23, también se nota el atrapamiento de energía en los sismogramas y los espectros de amplitud. La siguiente figura 25 demuestra que las ondas se quedan dentro de la inclusión nuevamente.

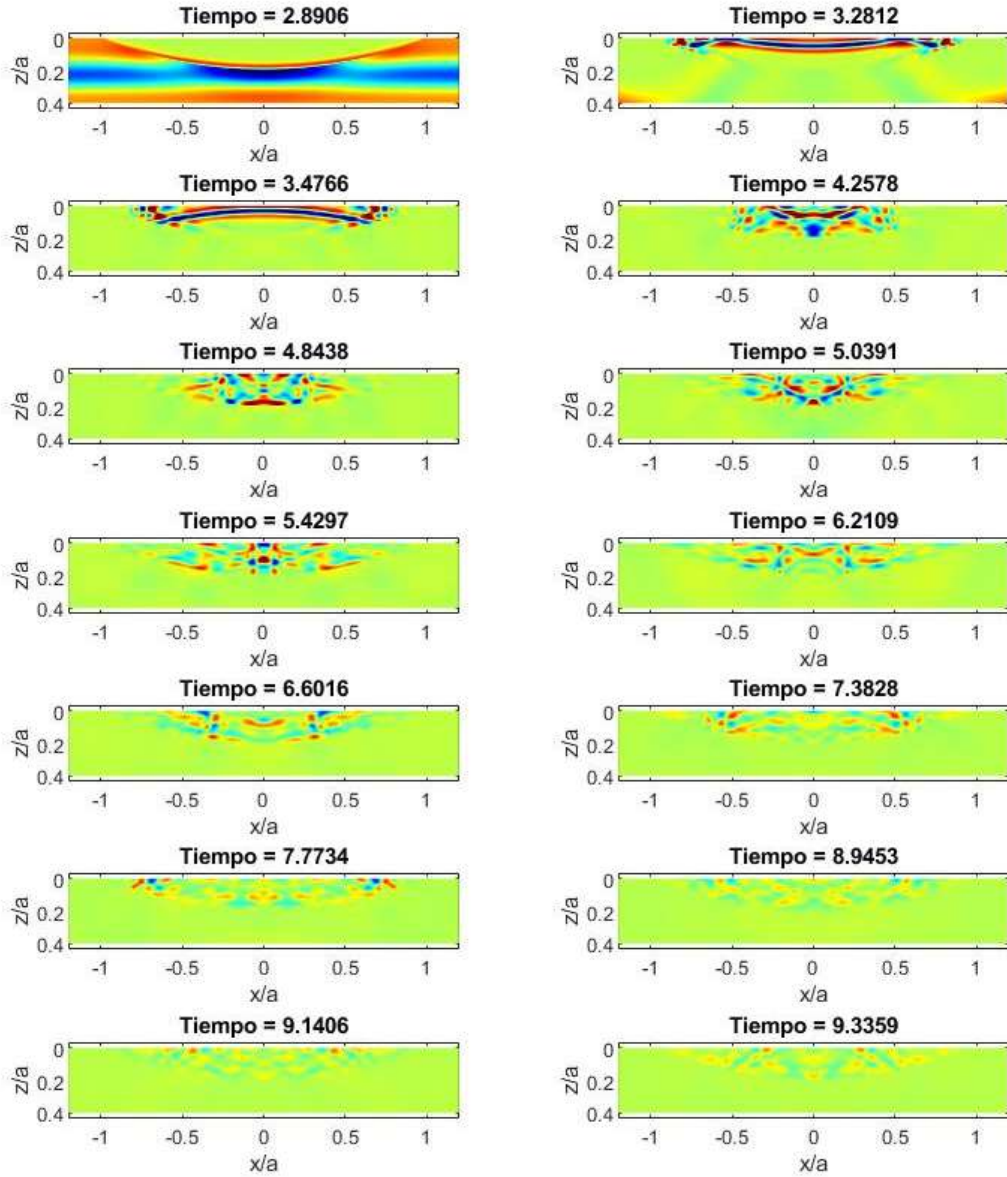


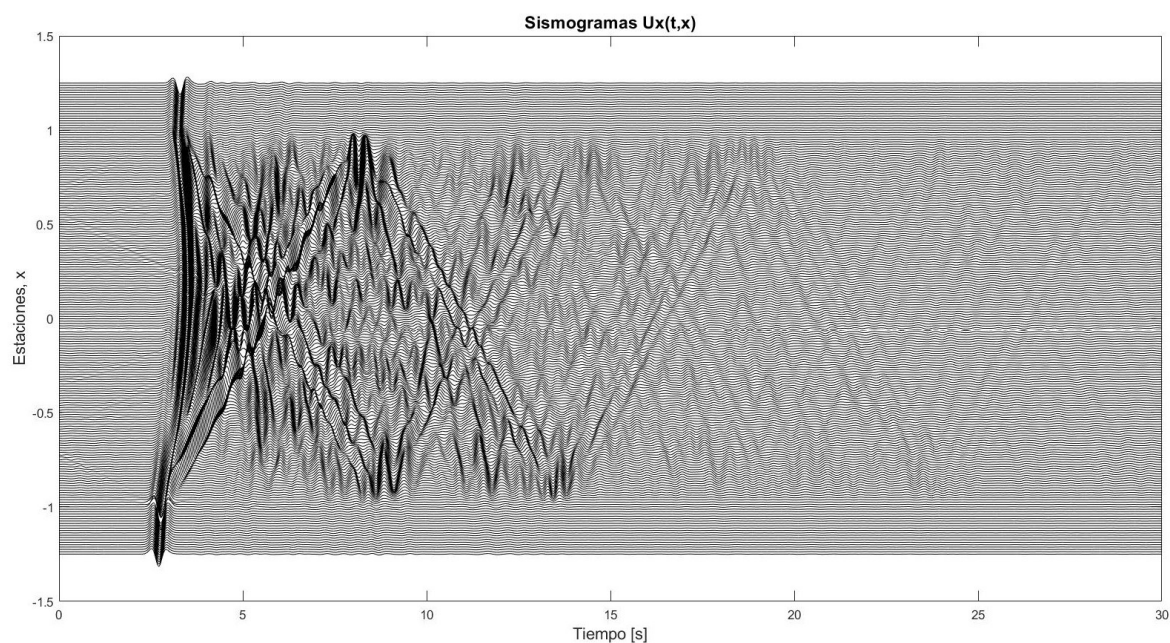
Figura 25. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_x$  para una onda SV con incidencia normal en un valle parabólico.

Considerando que en el caso actual incide una onda SV en la superficie y la inclusión, se debe de considerar la presencia de ondas P generadas, así como ondas superficiales de Rayleigh que se producen por la interacción entre las ondas SV incidentes/reflejadas y las ondas P presentes en el medio. La figura 25 muestra desplazamientos más complejos a comparación con los del caso SH.

### ***Incidencia de ondas P***

Para el caso de la incidencia de una onda P, en vez de una incidencia normal el modelo involucra una incidencia oblicua a  $67.5^\circ$  (se redondeó a  $67^\circ$  para las descripciones de las gráficas). Las propiedades mecánicas son las mismas y las dimensiones no cambian a los casos anteriores.

Se presenta a continuación los sismogramas en la componente  $U_x$ :



*Figura 26. Desplazamientos superficiales de una onda incidente P, incidencia oblicua a  $67^\circ$ .  
Componente horizontal  $U_x$ .*

Se podrá notar que el conjunto de sismogramas presentes en la figura 26 muestran un comportamiento similar al de las ondas SV pero con cierto sesgo debido a la incidencia a  $67^\circ$ , además se puede observar que las amplitudes son ligeramente menores a comparación con los desplazamientos  $U_x$  para onda incidente SV mostrados en la figura 22, esto porque la energía se reparte entre las componentes  $U_x$  y  $U_z$ .

Otro fenómeno muy notable al comparar en el tiempo la componente vertical  $U_z$  de la onda SV con incidencia normal y la onda P con incidencia oblicua en las figuras 23 y 27, es el hecho de que en la figura 23 ( $U_z$  para onda SV) no se observa la onda que incide, mientras que en la figura 27 ( $U_z$  para onda P) sí; esto debido a que la onda SV incide con  $0^\circ$ , se propaga en el eje z y por lo tanto sus desplazamientos sólo son detectados en la componente horizontal  $U_x$ . Esto significa que lo observado en la componente  $U_z$  en la figura 23 son las ondas difractadas y reflejadas generadas por la incidencia de la onda SV en la superficie y en la interfaz entre la inclusión y el



semiespacio. Por otra parte, la figura 27 que muestra la incidencia oblicua de ondas P, representa un campo de desplazamientos donde si se incluye la incidencia y además se tienen las reflexiones y difracciones. Nótese que, si la incidencia de la onda P fuera normal, la figura 26 no presentaría el efecto por parte de la incidencia de la onda P, porque los desplazamientos de esta onda son paralelos a la dirección a la que se propaga y por lo tanto se vería un efecto similar en los sismogramas al descrito.

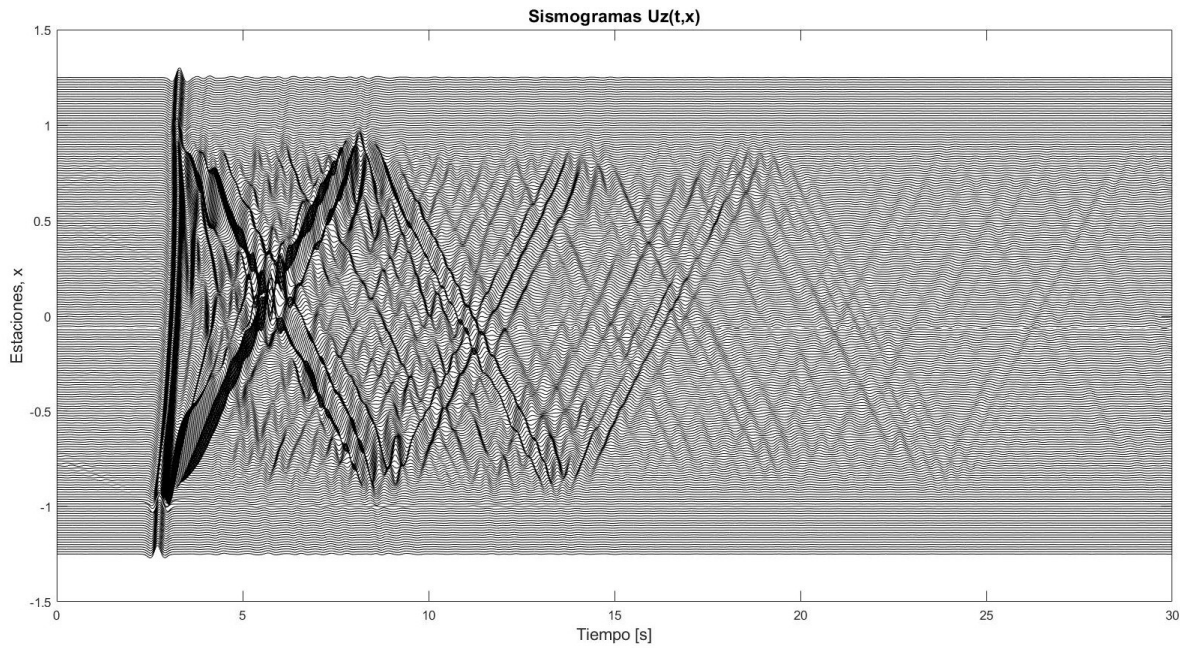


Figura 27. Desplazamientos superficiales de una onda incidente P incidencia oblicua a  $67^\circ$ .  
Componente vertical  $U_z$ .

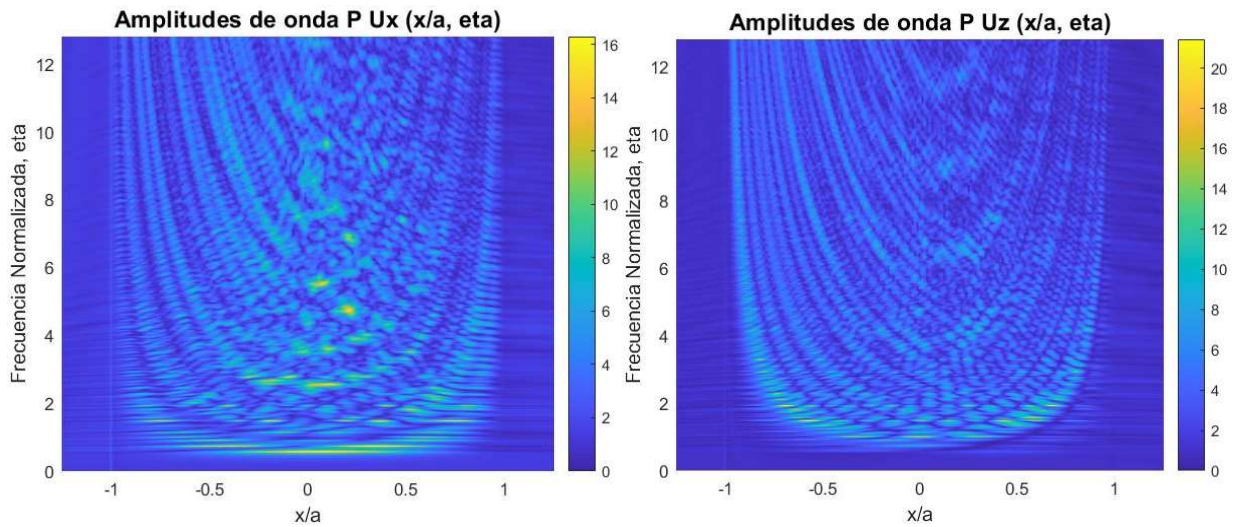


Figura 28. Amplificaciones superficiales para onda incidente P con incidencia oblicua a  $67^\circ$ .  
Componentes  $U_x$  y  $U_z$ , horizontal y vertical.

Los espectros de amplitud muestran que los desplazamientos máximos se encuentran dentro del valle aluvial y que aparecen a más alta frecuencia conforme se aumenta el ángulo de incidencia; observando las figuras 24 y 28 se nota el efecto.

En la [figura A1](#) se muestra con más claridad que no hay una onda incidente, mientras que en la [figura A2](#) si se observa la onda incidente, aunque con menor energía que en la figura 29.

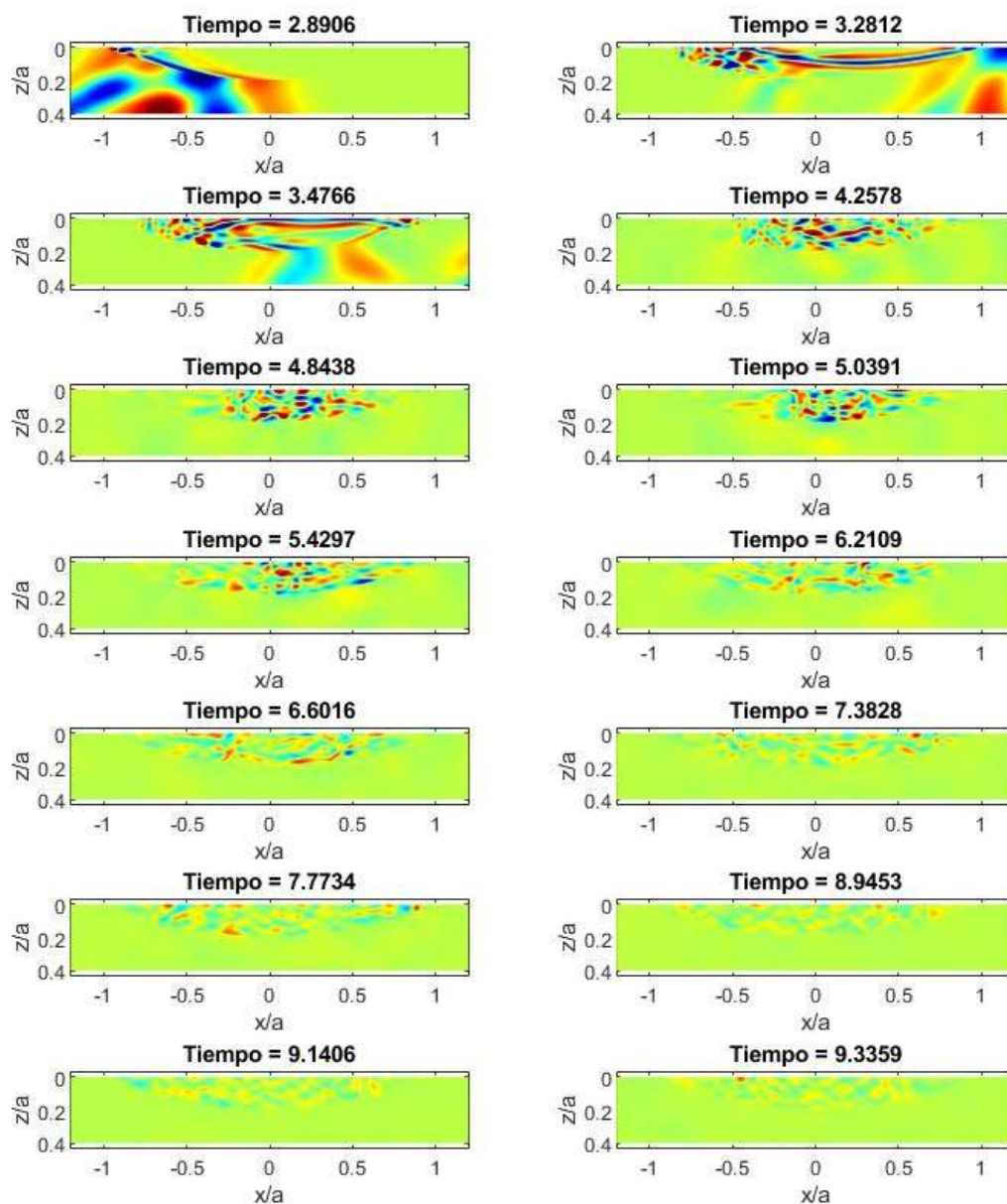
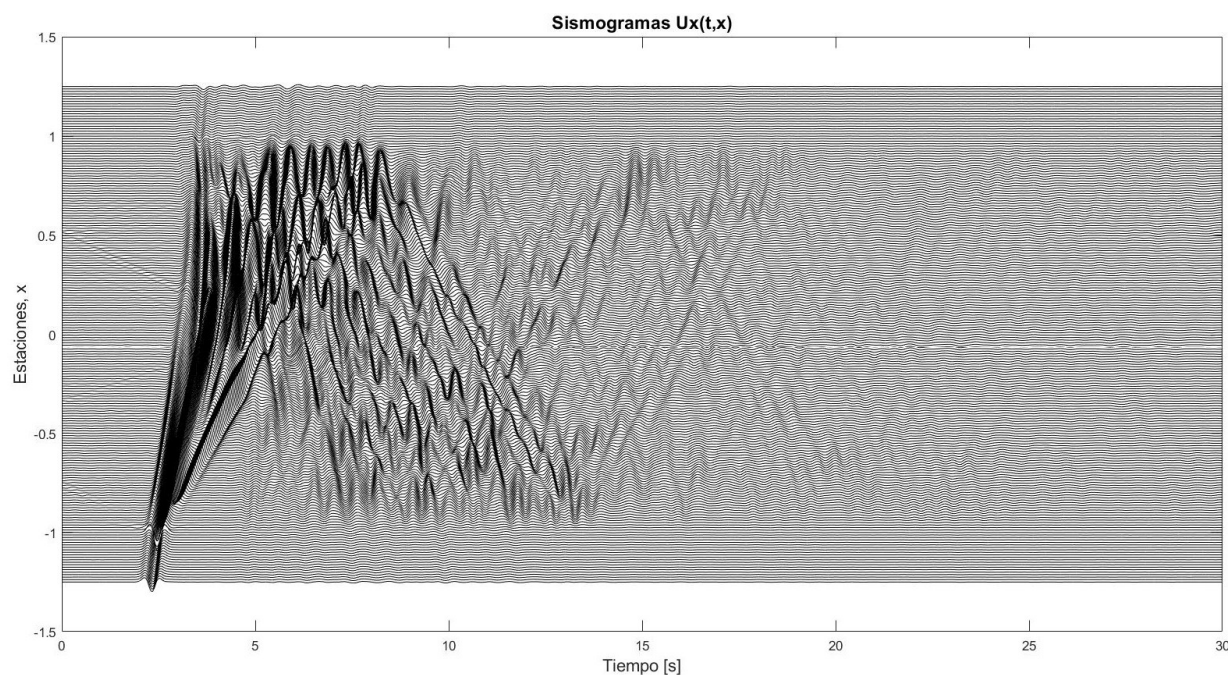


Figura 29. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_x$  para una onda  $P$  con incidencia oblicua a  $67^\circ$  en un valle parabólico.

### ***Incidencia de ondas de Rayleigh***

Las ondas de Rayleigh pueden ser producidas por la interacción superficial entre las ondas P y SV, no se debe de descartar que para los casos anteriores (menos la incidencia de ondas SH) se encontrara la presencia de ondas superficiales de Rayleigh.

En este caso se estudia la incidencia de la onda de Rayleigh que llega por el costado o borde izquierdo del valle aluvial. La dirección en la que llega la onda de Rayleigh es fácilmente identificable en las figuras 30 y 31, donde los arribos llegan desde las posiciones  $x$  negativas y avanzan hacia los valores positivos; comparando ahora la figura 30 con la 26 se puede notar una diferencia entre los arribos que implica la baja velocidad de las ondas superficiales a comparación con las ondas de cuerpo P y S, este efecto también es notable entre las figuras 31 y 27 de la componente  $U_z$ .



*Figura 30. Desplazamientos superficiales de una onda de Rayleigh incidente. Componente horizontal  $U_x$ .*

En las figuras 30 y 31, el segmento de la superficie libre que interactúa con el semiespacio, muestra el efecto de la onda de Rayleigh muy bajo porque estas disminuyen su amplitud con respecto a la profundidad, pero al incidir la onda con la inclusión aluvial se observan las difracciones hacia el interior del valle y al semiespacio. Cuando la onda de Rayleigh se transmite al valle se nota que las amplitudes de la onda incrementan con respecto a la profundidad, porque la geometría de la inclusión propicia un ambiente ideal para las ondas de Rayleigh.



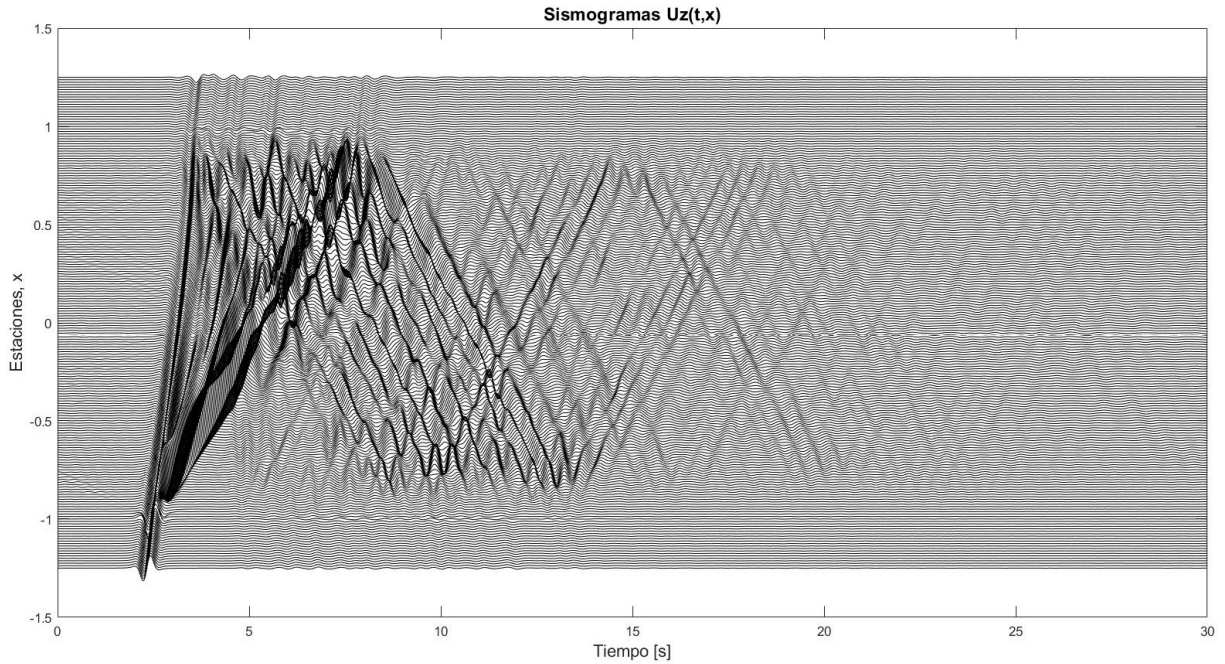


Figura 31. Desplazamientos superficiales de una onda de Rayleigh incidente. Componente vertical  $U_z$ .

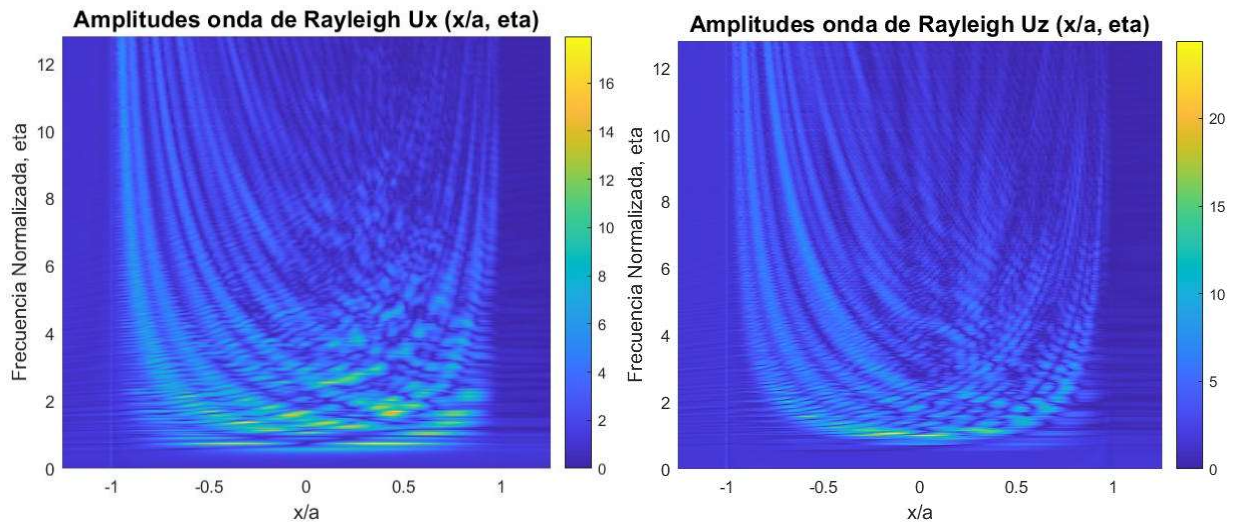
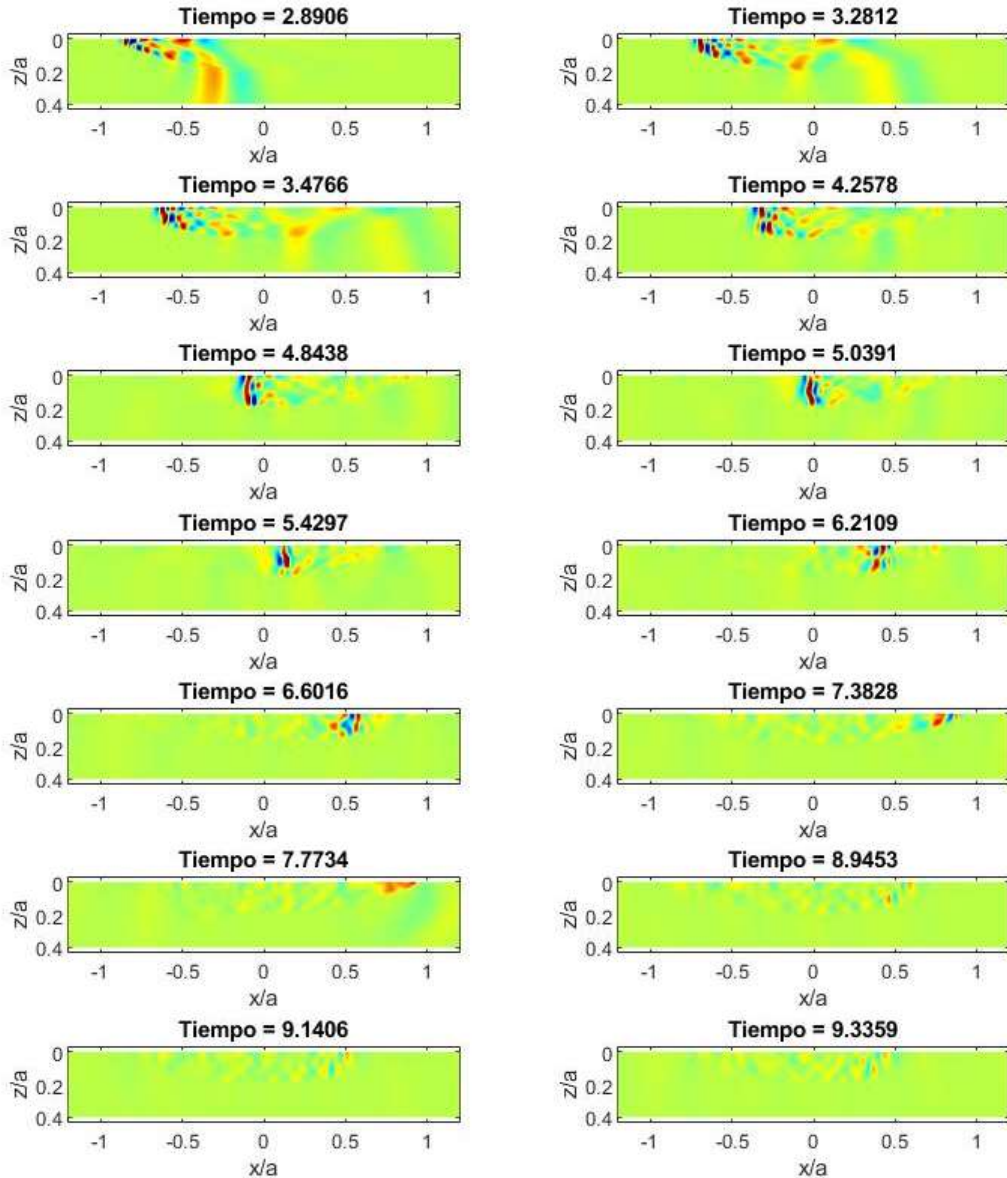


Figura 32. Amplificaciones superficiales para una onda de Rayleigh incidente. Se presentan las componentes  $U_x$  y  $U_z$ , horizontal y vertical.

El incremento en las amplitudes de la onda de Rayleigh dentro del valle puede corroborarse con los espectros que tienen una mayor cantidad de máximos que los casos con ondas de cuerpo, además el incremento a profundidad también puede ser corroborado con las figuras 33 y A3 que muestran los desplazamientos por parte de la onda a profundidad.

*Resultados: Respuesta Sísmica de un Valle Aluvial Simple*



*Figura 33. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_z$  para una onda de Rayleigh incidente en un valle parabólico.*

El análisis en espectros  $f$ - $k$  es principalmente utilizado para la detección de ondas superficiales, en la figura 34 se presentan dos espectros obtenidos mediante la transformada bidimensional de Fourier que muestran los casos de una onda de Rayleigh y una onda SV incidente. La energía que representa a la onda de Rayleigh se indica con una flecha, así como la onda de Rayleigh reflejada la cual tiene menor energía. Examinando el espectro  $f$ - $k$  se observan varios modos de la onda de Rayleigh. También se puede notar que hay presencia de ondas superficiales en el espectro  $f$ - $k$  para la onda SV; alta energía en el espectro  $f$ - $k$  representa la presencia de ondas superficiales de Rayleigh. Las líneas extremas con altas amplitudes posiblemente se deben a las ondas de Rayleigh en la zona del semiespacio.



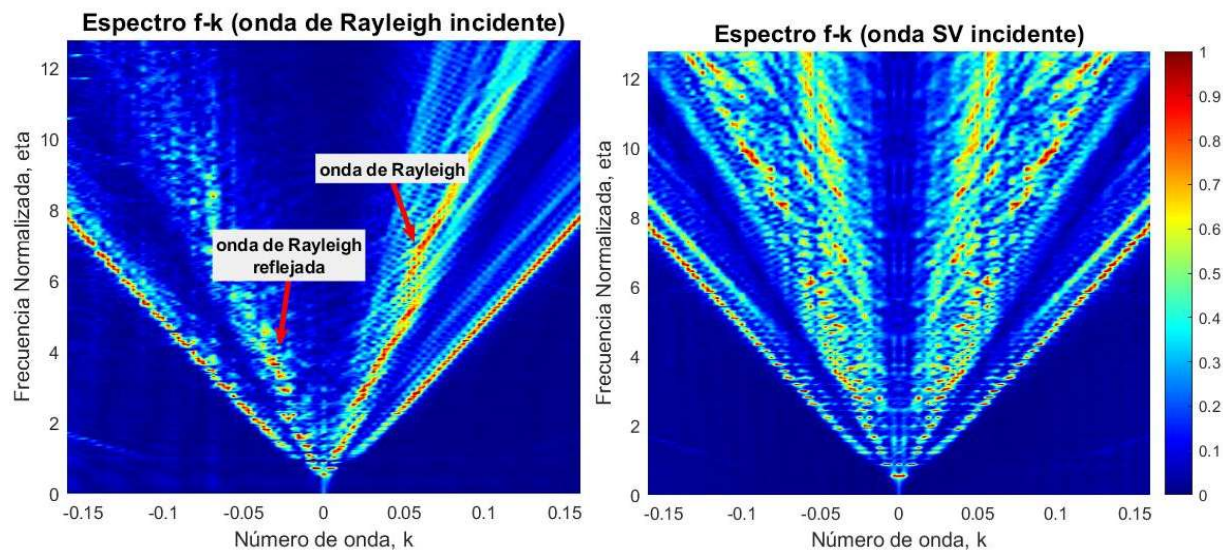


Figura 34. Espectros  $f$ - $k$  de la componente  $U_x$  para incidencias con una onda de Rayleigh y una onda SV a  $0^\circ$ . Las amplitudes del espectro se normalizaron.

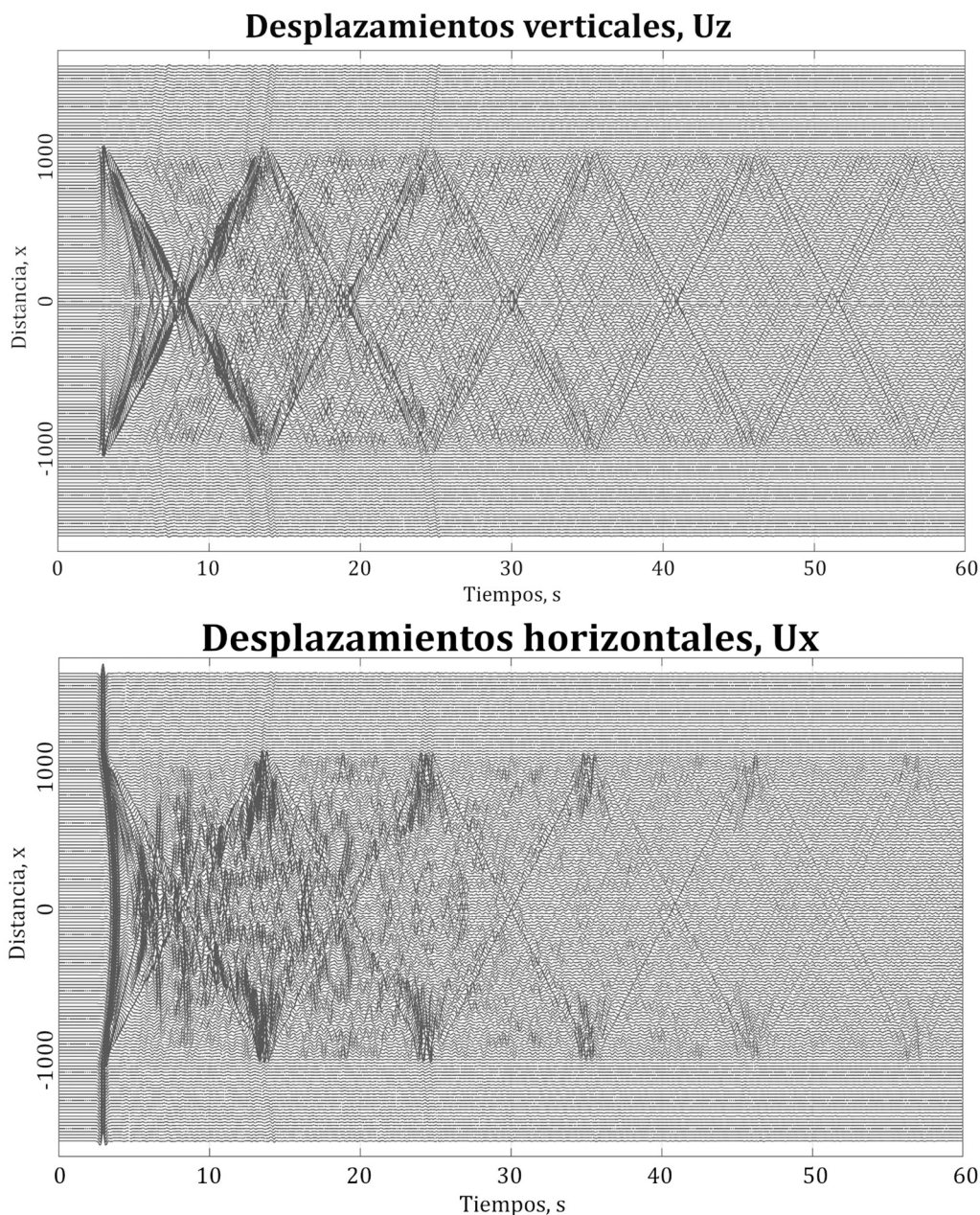
### 5.2.1 Comparaciones con FLAC

Se realizó una comparación entre los resultados en tiempo del IBEM con el Fast Lagrangian Analysis of Continua (FLAC). El FLAC es un método híbrido que explota las ventajas de los métodos de Diferencias Finitas y de Elementos Finitos para modelar comportamientos complejos del subsuelo, este es un código comercial utilizado en la academia, en la industria y fue desarrollado por el Dr. Peter Cundall de Minneapolis, EUA. Este software es utilizado para el diseño geotécnico y la ingeniería civil principalmente, además de poder ser utilizado por ingenieros mineros.

A diferencia del IBEM, el FLAC que trabaja con Diferencias Finitas y Elementos Finitos llega a ser más tardado para el cálculo de la respuesta en un medio por la cantidad de cálculos requeridos por el método, también tiene la desventaja de solo poder realizar cálculos para ondas con incidencia normal por lo que el IBEM le sacó una ligera ventaja en esos ámbitos. Debido a que el FLAC solamente permite hacer cálculos en incidencia normal, la comparación de los métodos se realiza con solamente incidencia a  $0^\circ$ . El modelo y las propiedades mecánicas del medio son iguales, pero en los resultados del FLAC se muestran los sismogramas hasta el segundo 60. Otro factor importante es que el FLAC trabaja con dimensiones espaciales reales en metros, mientras que en el IBEM se trata con distancias adimensionales. Para simular la misma respuesta con IBEM se tomó en cuenta un valle con 200 metros de profundidad, 2000 metros de largo en la distancia horizontal del eje  $x$  con receptores a cada 5 metros, se utilizó una velocidad de la onda S de  $200 \text{ m/s}$ , una densidad de  $1.6 \text{ ton/m}^3$  y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.45$ . Las propiedades mecánicas del semiespacio utilizadas fueron  $1000 \text{ m/s}$  de velocidad de la onda, una densidad de  $2 \text{ ton/m}^3$  y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . También es importante mencionar

que los cálculos realizados con el FLAC no tuvieron ningún tipo de amortiguamiento tanto para el valle como para el semiespacio.

Siguiendo el formato del capítulo anterior (5.2) y dado a que FLAC despliega directamente los resultados en el dominio del tiempo, se muestra primero la respuesta en tiempo en forma de sismogramas para una onda SV con incidencia normal. Se utilizó un pulso de Gabor con un  $t_p$  de 0.5 segundos y un  $t_s$  de 2 segundos.



*Figura 35. Sismogramas con componente vertical y horizontal para una onda SV con incidencia normal. Sismogramas calculados utilizando FLAC con un pulso de Gabor y un  $t_p=0.5$ .*

En la figura 35 se observa al igual que en el caso de los sismogramas por IBEM, un atrapamiento de la onda dentro de los límites en  $x$   $[-1000, 1000]$  que definen la zona perteneciente al valle aluvial. Se puede notar fácilmente que en ambas direcciones  $U_x$  y  $U_z$ , hay un patrón con forma de chevron significando que las ondas difractadas llegaban al borde o a los extremos del valle, por el alto contraste entre los materiales se reflejaron casi por completo y se propagaron hasta el otro extremo. A pesar de no haber utilizado nada de amortiguamiento, uno puede percatarse que las ondas van perdiendo energía con respecto al tiempo, aunque esta pérdida energética es a un grado mucho menor que con el caso del IBEM en el que si se utilizó amortiguamiento; esta ligera pérdida en la amplitud de las ondas se debe a que parte de la energía logra escaparse al semiespacio cada vez que las ondas se reflejan en los bordes y en el centro del valle.

Además del cálculo de sismogramas en el FLAC, también se realizó una comparación más exhaustiva entre el IBEM y el FLAC para un sismograma individual. Se realizaron comparaciones de las respuestas en tiempo con el sismograma localizado en la superficie de la parte central del valle aluvial, por lo tanto para ambos métodos el receptor se encuentra en  $x = 0$ . La comparación en la parte central del valle permite analizar las diferencias entre los métodos para el cálculo de las difracciones atrapadas. Se muestra en las siguientes figuras los casos para onda SV con su componente horizontal, la onda SV con su componente vertical y la onda SH con su componente horizontal; para todos los casos se muestran los resultados con un periodo de onda de Ricker de 1 segundo y 0.5 segundos, en esta ocasión se utilizó el pulso de Ricker para la comparación del sismograma central. También cabe mencionar que como se describió anteriormente, en el caso del FLAC no se utilizó amortiguamiento mientras que en el IBEM si, por lo que para realizar la comparación se “corrigieron” los datos en FLAC para agregar posterior a los cálculos un amortiguamiento equivalente al de IBEM.

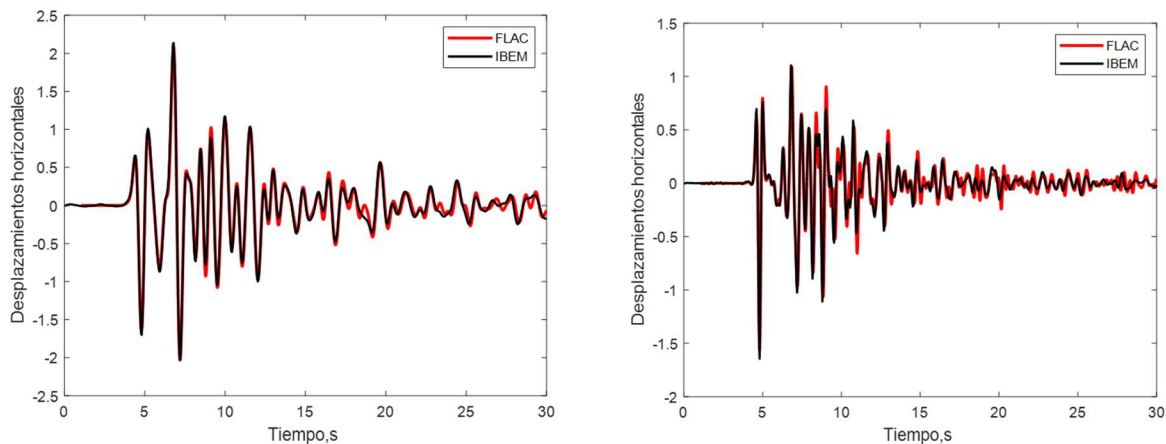


Figura 36. Incidencia de onda SV, componente horizontal paralela al eje  $x$ ,  $t_p$  de 1s y  $t_p$  de 0.5s



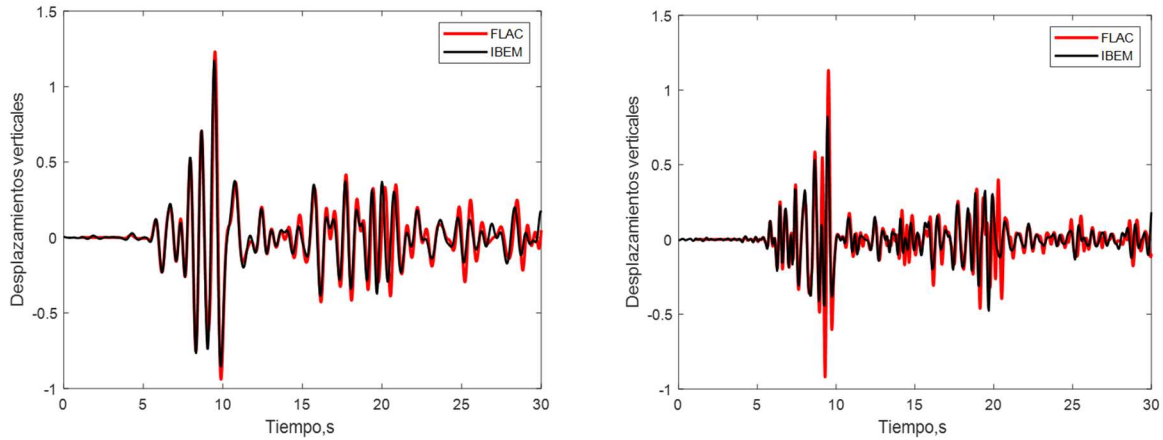


Figura 37. Incidencia de onda SV, componente vertical,  $tp$  de 1s y  $tp$  de 0.5s

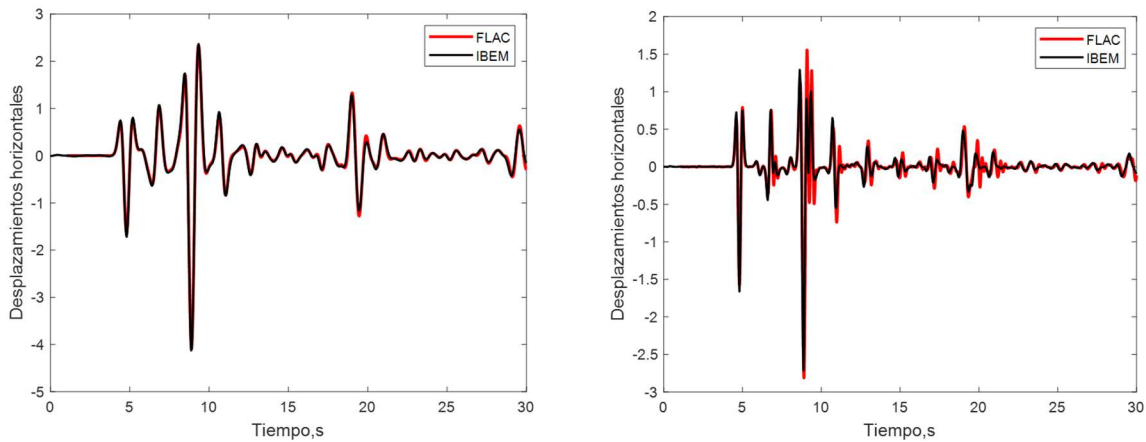


Figura 38. Incidencia de onda SH, componente horizontal transversal al eje x,  $tp$  de 1s y  $tp$  de 0.5s

En las figuras 36, 37 y 38, la línea roja representa el sismograma de FLAC y la línea oscura representa al IBEM; se nota que para el periodo de 1 segundo de la wavelet de Ricker ambos métodos dan resultados muy similares, pero con periodos menores como en el caso del  $tp = 0.5$  se llega a tener más discrepancias.

### 5.3 Respuesta Sísmica de Valles Aluviales Adyacentes

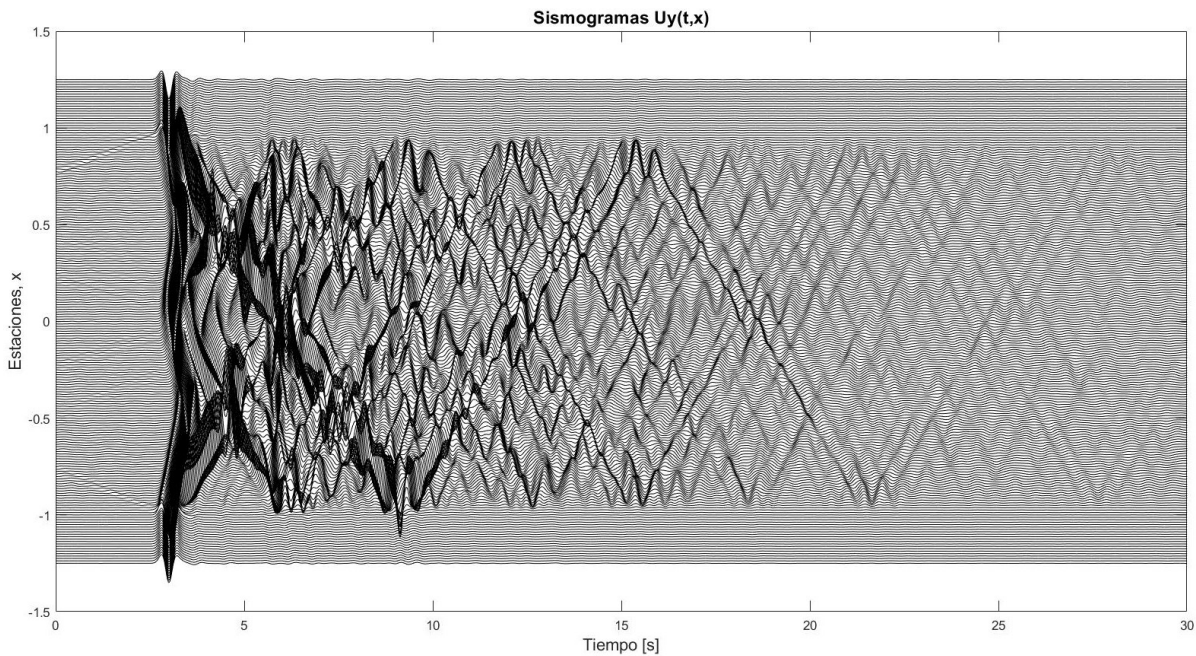
A continuación, se presentan los resultados obtenidos en tiempo y frecuencia para el caso de un valle aluvial dual o valles aluviales adyacentes. Este modelo fue introducido en el capítulo 4.2.2 y tiene como objetivo principal obtener una aproximación a una cuenca sedimentaria real mediante la inclusión suave.

Se mostrarán resultados de ondas incidentes SH, SV, P y de Rayleigh respectivamente; para este modelo se optó calcular incidencia normal para la onda SH, mientras que se usa incidencia oblicua para las ondas P y SV.

Igual que en el capítulo 5.2, para los sismogramas en superficie se hizo uso de un periodo fundamental del pulso de Ricker de  $t_p = 0.5$  con un  $t_s = 3$ . Para los desplazamientos a profundidad, la wavelet de Ricker se construyó con  $t_p = 0.2$  y  $t_s = 3$ , de esta forma los desplazamientos dentro del valle a profundidad se lograron apreciar con una mejor definición. Los espectros de amplitud mostrados son graficados solamente hasta la parte útil del espectro, o sea hasta la frecuencia de Nyquist. Se seleccionó la componente más significativa para presentar los desplazamientos a profundidad y la otra componente restante puede ser consultada en el apéndice A.3

### ***Incidencia de ondas SH***

La incidencia de una onda de cuerpo SH, se realizó tomando en cuenta un ángulo de incidencia normal. Ya que el  $t_s = 3$ , los primeros arribos llegan a los 3 segundos en los sismogramas de la figura 39:



*Figura 39. Desplazamientos superficiales de una onda SH incidente, incidencia normal a  $0^\circ$ .  
Componente horizontal  $U_y$ .*

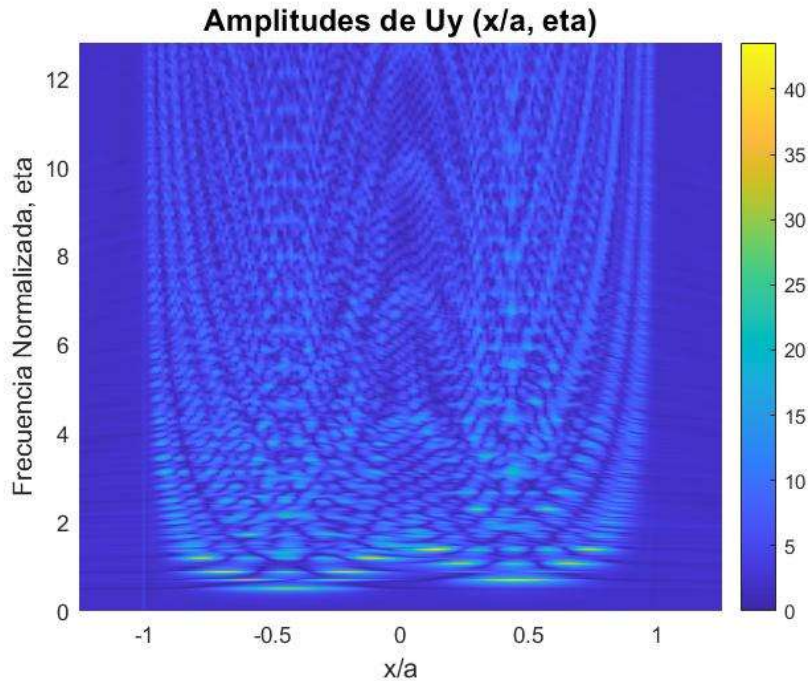


Figura 40. Amplificaciones superficiales para onda SH incidente. Se presenta la componente  $U_y$ .

La incidencia vertical de la onda SH presenta un espectro que se asemeja al de la figura 20 pero dividido para cada valle, las máximas amplitudes observadas se encuentran a bajas frecuencias y en el centro de cada valle. La unión entre los valles no presenta amplitudes grandes a altas frecuencias.

Los desplazamientos a profundidad (figura 41) demuestran que la respuesta por la onda SH dentro de cada valle generan resultados similares a los de un solo valle aluvial, pero en este caso la onda queda atrapada en dos valles y se generan varias difracciones en la conexión entre estos además de las esquinas del modelo. A pesar de la similitud con las reflexiones cuando solo se tiene un valle, con las difracciones no sucede lo mismo; en los sismogramas de la figura 39 se nota que el anexo de otro valle y la unión entre estos genera aún más difracciones que las vistas en el sismograma de la figura 19, además en los desplazamientos a profundidad para un solo valle (figura 21) la cantidad de difracciones también se ve incrementada en su cantidad. Este fenómeno implica un mayor riesgo sísmico para un arreglo geológico de este estilo, lo cual implica complicaciones en el caso del Valle de México considerando su estructura geológica actual y su antecedente como cuenca endorreica.

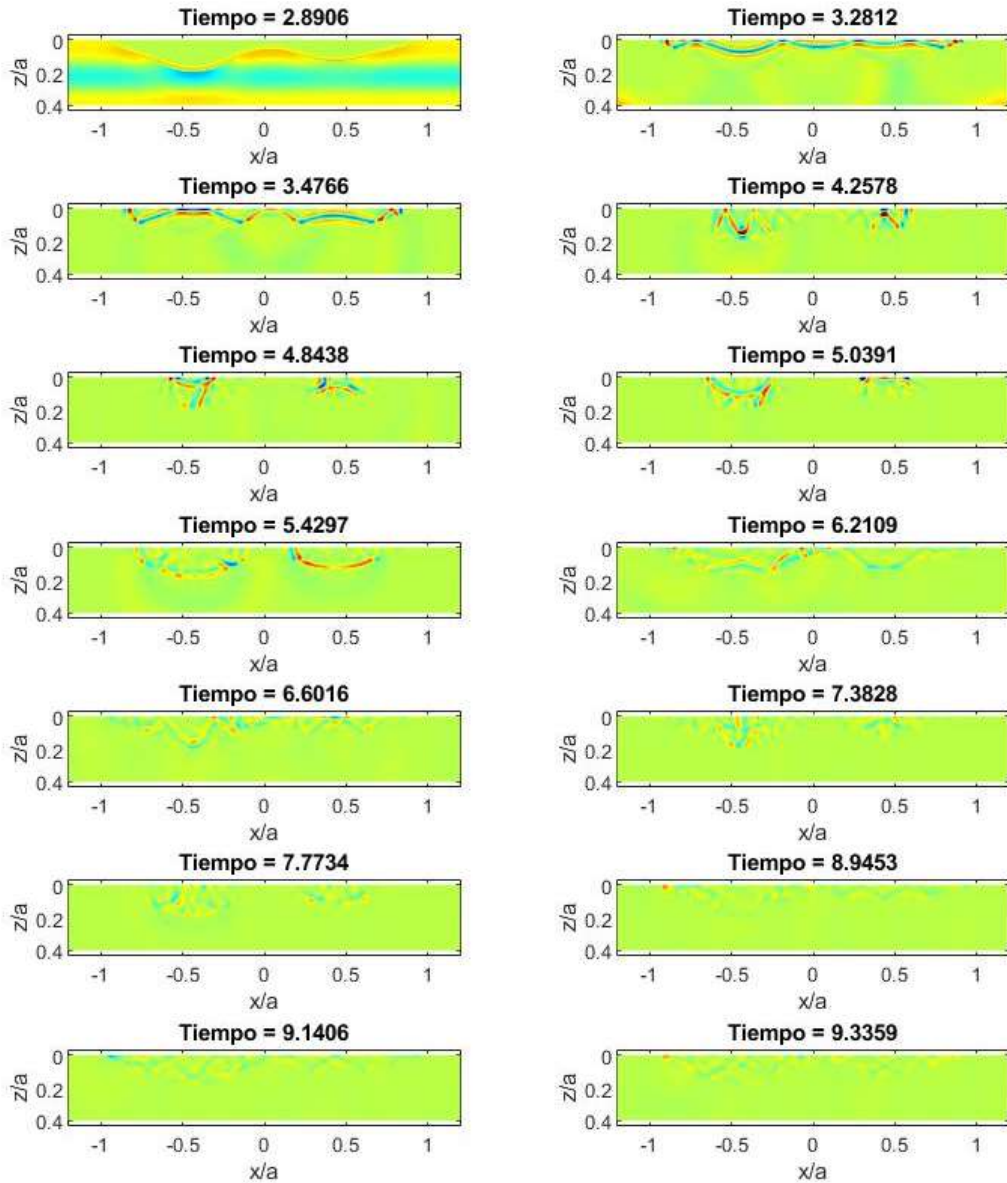


Figura 41. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_y$  para una onda SH con incidencia normal en un valle aluvial adyacente.

### ***Incidencia de ondas SV***

Se muestra ahora la respuesta para una onda SV con incidencia oblicua a  $75^\circ$ . Se hizo uso de un ángulo de incidencia alto para corroborar en los espectros que las amplificaciones se desplazan a frecuencias más altas en estos casos de incidencia oblicua.

En los sismogramas de las figuras 42 y 43 se muestra nuevamente el efecto del atrapamiento de la onda en el valle aluvial.

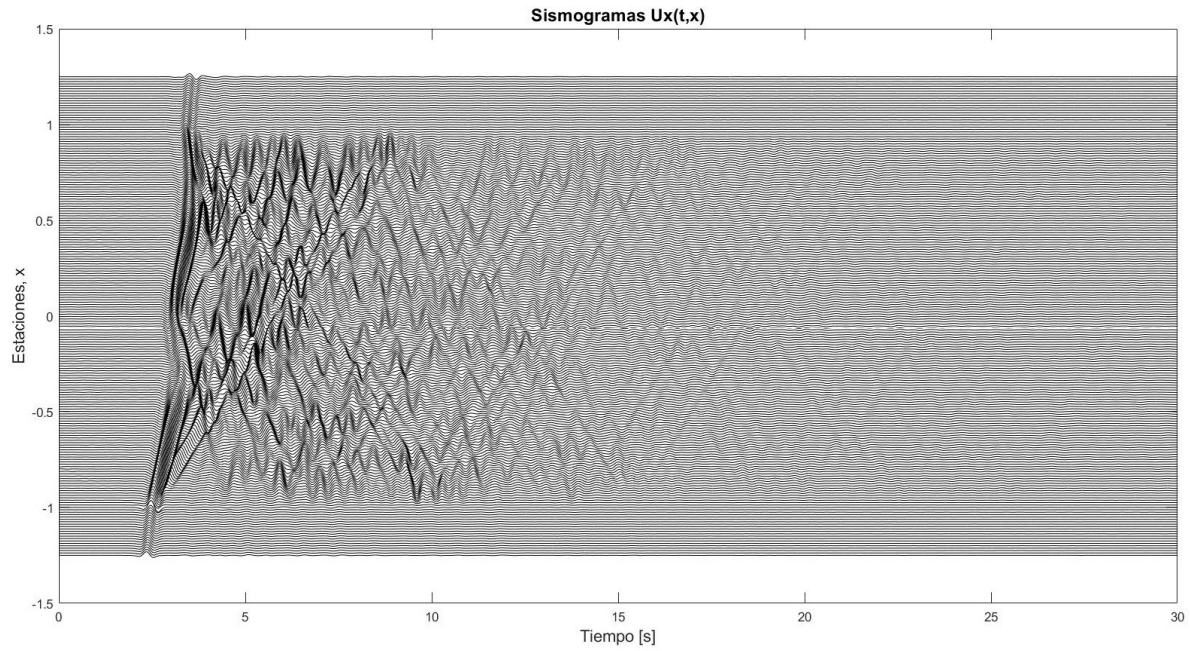


Figura 42. Desplazamientos superficiales de una onda SV incidente, incidencia oblicua a  $75^\circ$ .  
Componente horizontal  $U_x$ .

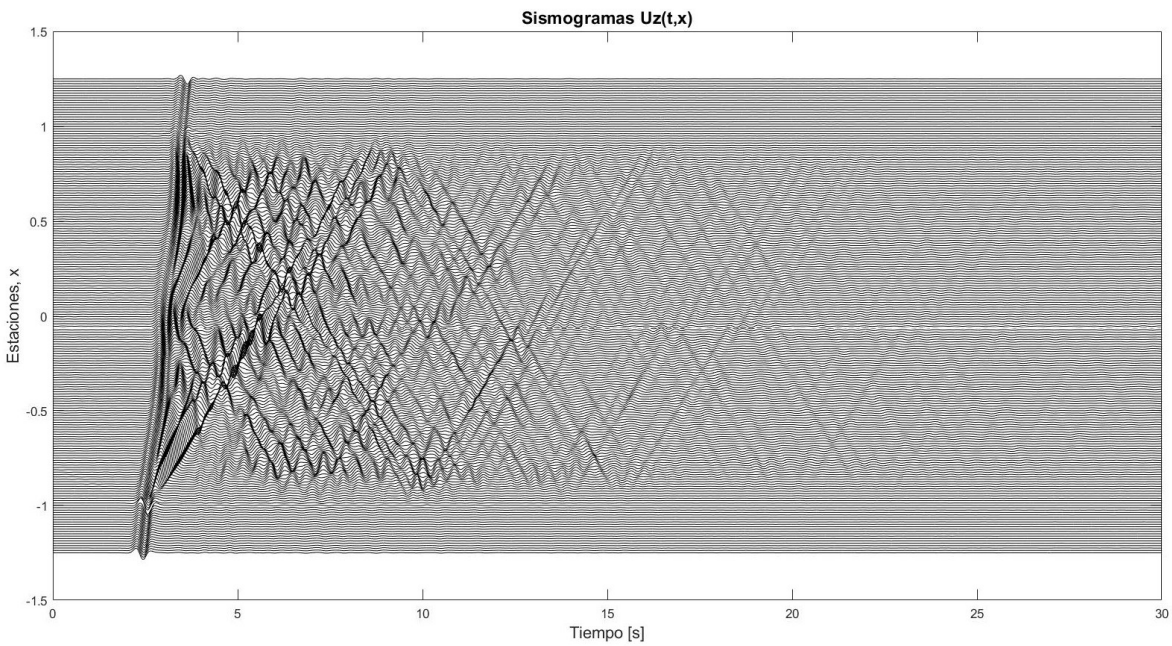


Figura 43. Desplazamientos superficiales de una onda SV incidente, incidencia oblicua a  $75^\circ$ .  
Componente vertical  $U_z$ .



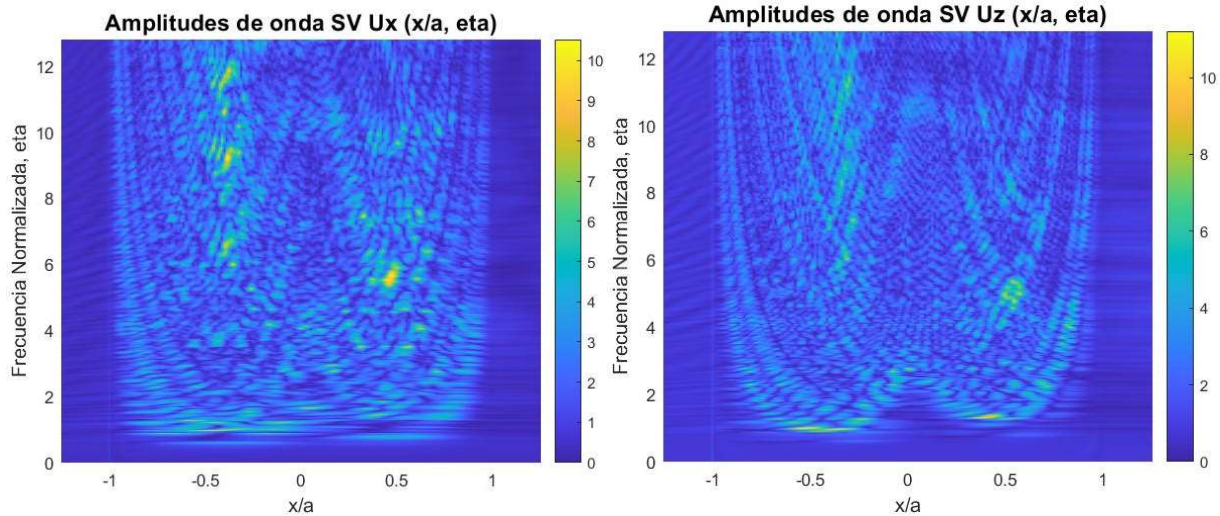


Figura 44. Amplificaciones superficiales para onda SV que incide a  $75^\circ$ . Se presentan las componentes  $U_x$  y  $U_z$ , horizontal y vertical.

En los casos de incidencia normal realizados para el valle aluvial simple y la incidencia normal para los valles aluviales adyacentes, se notaba que las máximas amplitudes se encontraban a frecuencias menores de  $\eta = 2$ , pero en este caso que se utilizó un ángulo de incidencia alto ( $75^\circ$ ) las amplificaciones se encuentran a frecuencias bastante altas. También en la figura 44, puede observarse que el valle más profundo donde la onda incide primero ( $x < 0$ ), se tiene más amplificaciones que en el valle de menor profundidad ( $x > 0$ ); el valle profundo llega a mostrar tres picos importantes en el centro del valle a las frecuencias de 6.5, 9 y 11.7; mientras que el valle de profundidad 0.15 solamente tiene una amplificación importante a la frecuencia de  $\sim 6$ . El efecto se nota en las dos componentes ( $U_x$  y  $U_z$ ), pero en la componente vertical  $U_z$  se puede identificar amplificaciones a frecuencias bajas para la parte central de ambos valles.

La detección de las amplificaciones son de suma importancia para un análisis de riesgo sísmico en un valle; primero observamos que en un caso de dos valles unidos con diferentes profundidades, cada valle va a tener una respuesta diferente a las ondas sísmicas registradas, además la diferencia en las frecuencias a las que se encuentran las amplificaciones significa que cada valle afectará de diferente manera a las edificaciones encontradas en cada uno, por lo tanto el valle profundo generaría más daños para edificios con frecuencias de resonancia altas y el valle más somero afectaría a edificaciones con frecuencias estructurales más bajas.

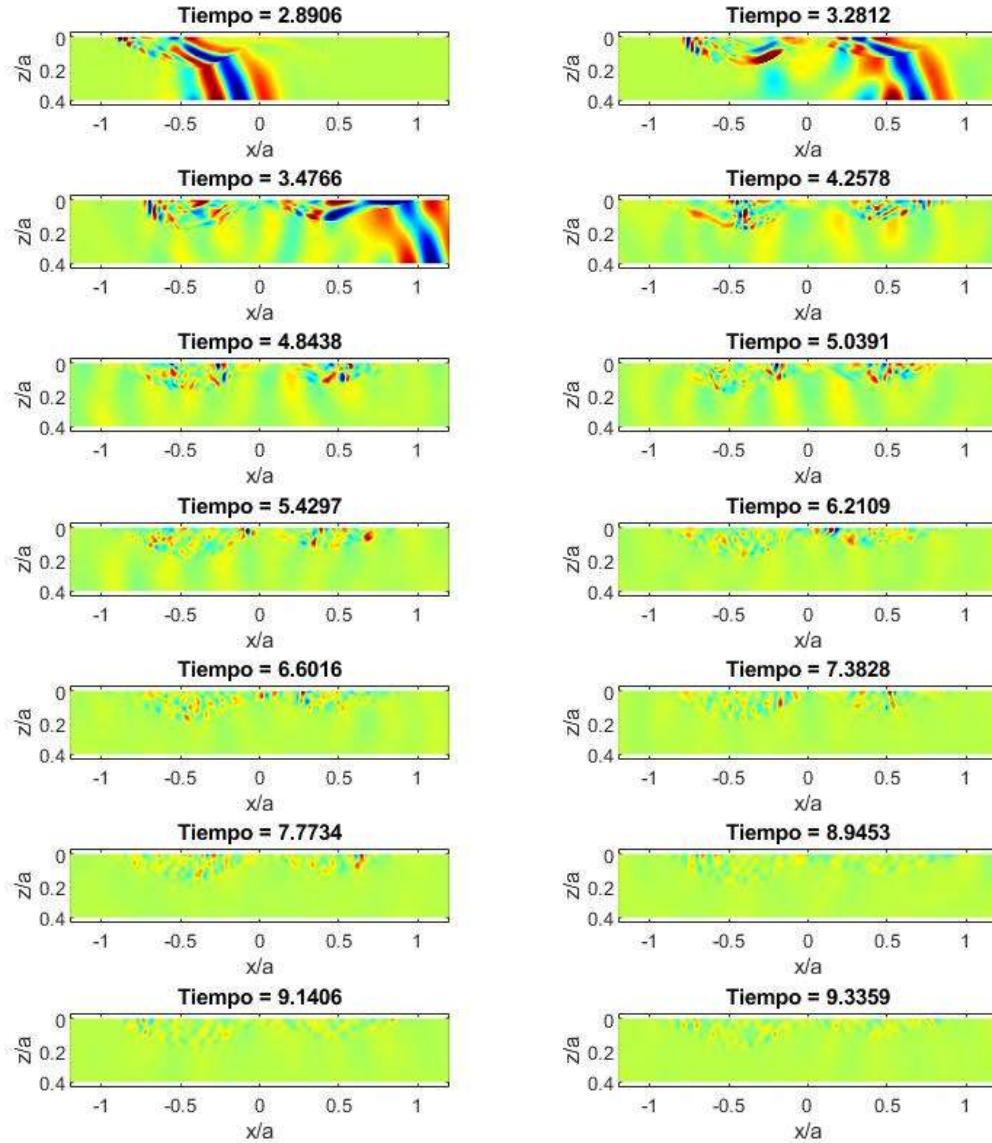
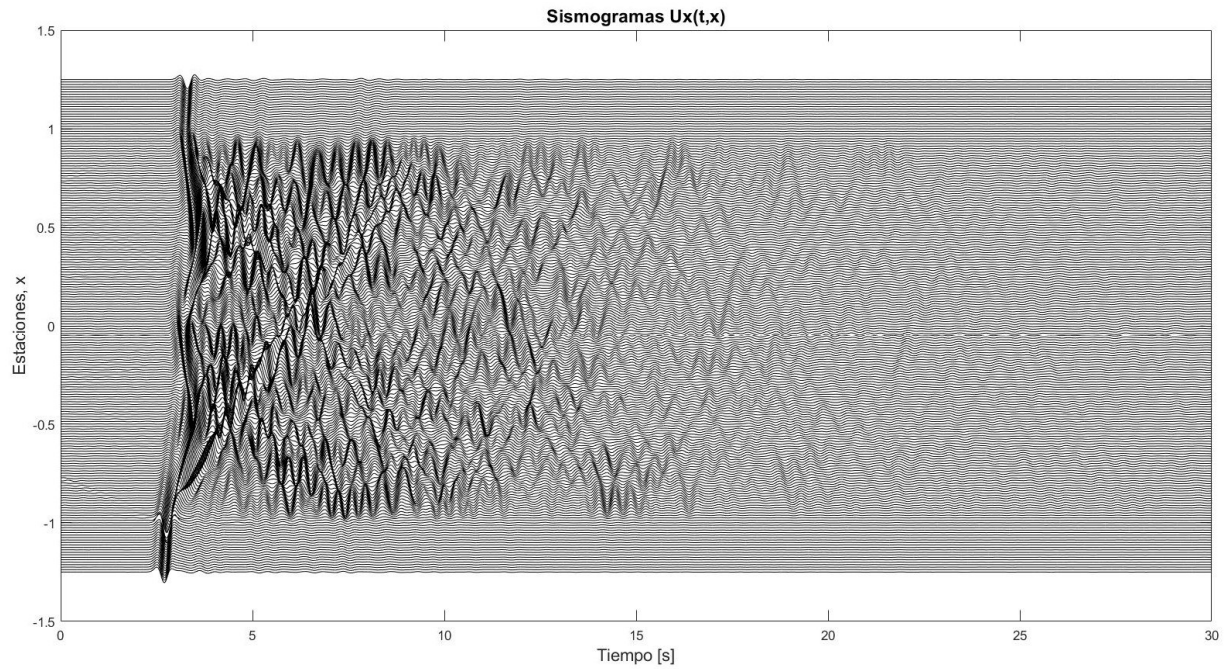


Figura 45. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_z$  para una onda SV con incidencia oblicua a  $75^\circ$  en un valle aluvial adyacente.

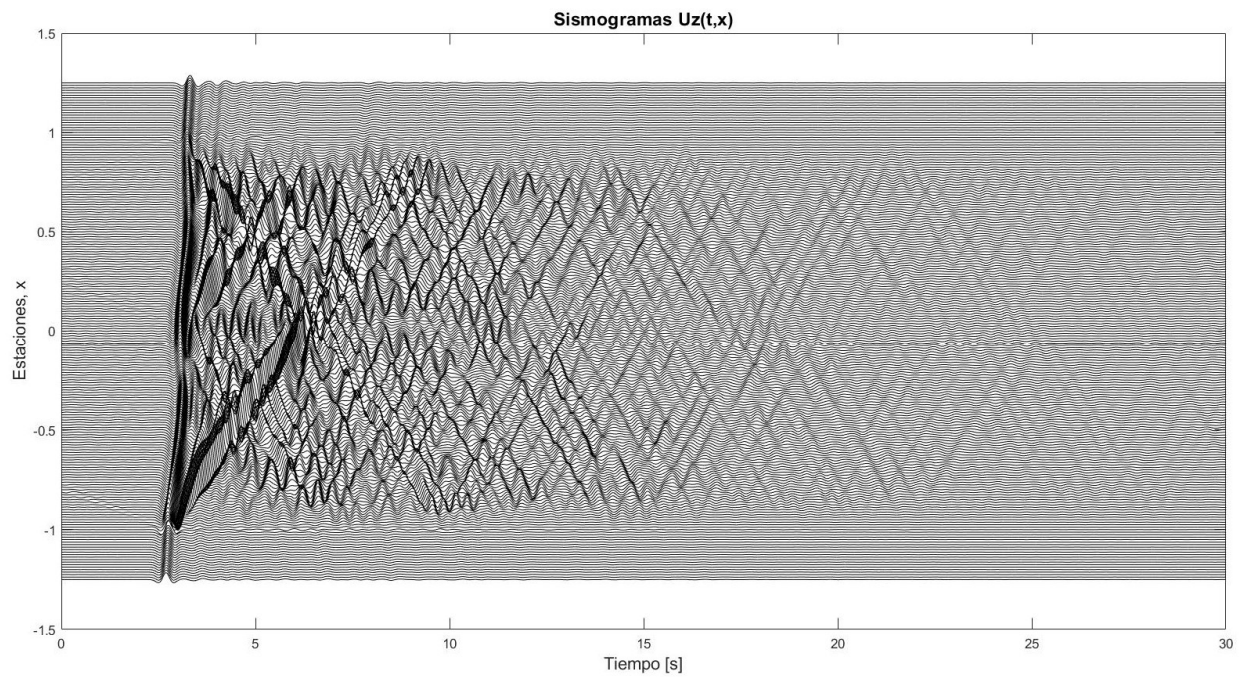
En la figura 45, los desplazamientos a profundidad ilustran sobre el atrapamiento y las difracciones que se dan dentro del valle, a pesar de la alta impedancia que hay entre los medios también se detecta que las ondas llegan a transmitirse hacia el semiespacio; esto se puede rectificar viendo los sismogramas de las figuras 42 y 43, donde los receptores que están fuera del valle detectan ligeras oscilaciones debidas a la poca energía que logra escapar del valle.

### ***Incidencia de ondas P***

La incidencia oblicua de ondas P refleja una respuesta un tanto diferente al de las ondas SV; primero los sismogramas presentan mayores amplitudes:



*Figura 46. Desplazamientos superficiales de una onda P incidente, incidencia oblicua a 75°.  
Componente horizontal Ux.*



*Figura 47. Desplazamientos superficiales de una onda P incidente, incidencia oblicua a 75°.  
Componente vertical Uz.*



La onda P calculada representa a la de una incidencia oblicua a  $75^\circ$  en la misma dirección que en el caso de las ondas SV.

En las figuras 46 y 47, el campo de desplazamientos obtenido a partir de la incidencia de una onda P llega a tener mayores amplitudes a tiempos más altos comparando con la misma incidencia, pero de ondas SV. La figura 48 que representa las amplificaciones en la superficie a diferentes frecuencias, muestra nuevamente que las amplificaciones principales se encuentran en los centros de los valles, pero ahora solamente en la componente horizontal ( $U_x$ ) se observan ligeras amplificaciones a altas frecuencias debido a la característica de la dirección en los desplazamientos de una onda P que son compresionales y paralelos a la dirección de propagación. También es importante mencionar que nuevamente se observan amplificaciones a bajas frecuencias las cuales están posiblemente relacionadas con ondas superficiales de Rayleigh generadas dentro del valle por la onda P incidente y las ondas SV reflejadas.

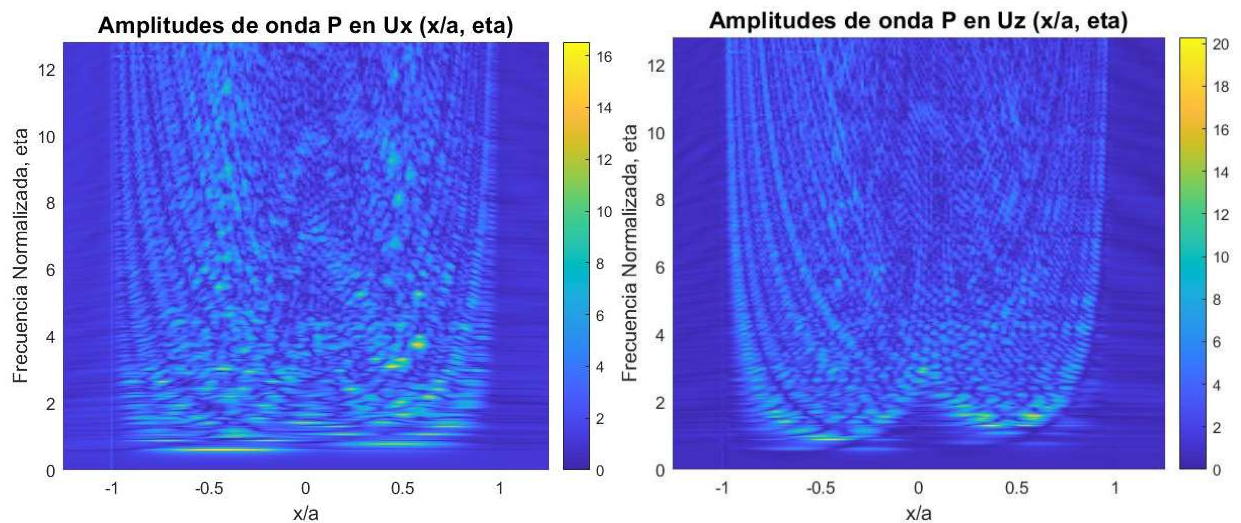


Figura 48. Amplificaciones superficiales para onda P que incide a  $75^\circ$ . Se presentan las componentes  $U_x$  y  $U_z$ , horizontal y vertical.

Los desplazamientos a profundidad en la figura 49 presentan una gran cantidad de difracciones que tardan en desvanecerse a pesar del amortiguamiento presente dentro del valle.

Dado los espectros que mostraron altos componentes energéticos para los casos de incidencia oblicua de onda P y SV, demuestran que las ondas difractadas son persistentes ya que también en los desplazamientos a profundidad y en los sismogramas se nota un campo de desplazamientos complejo.

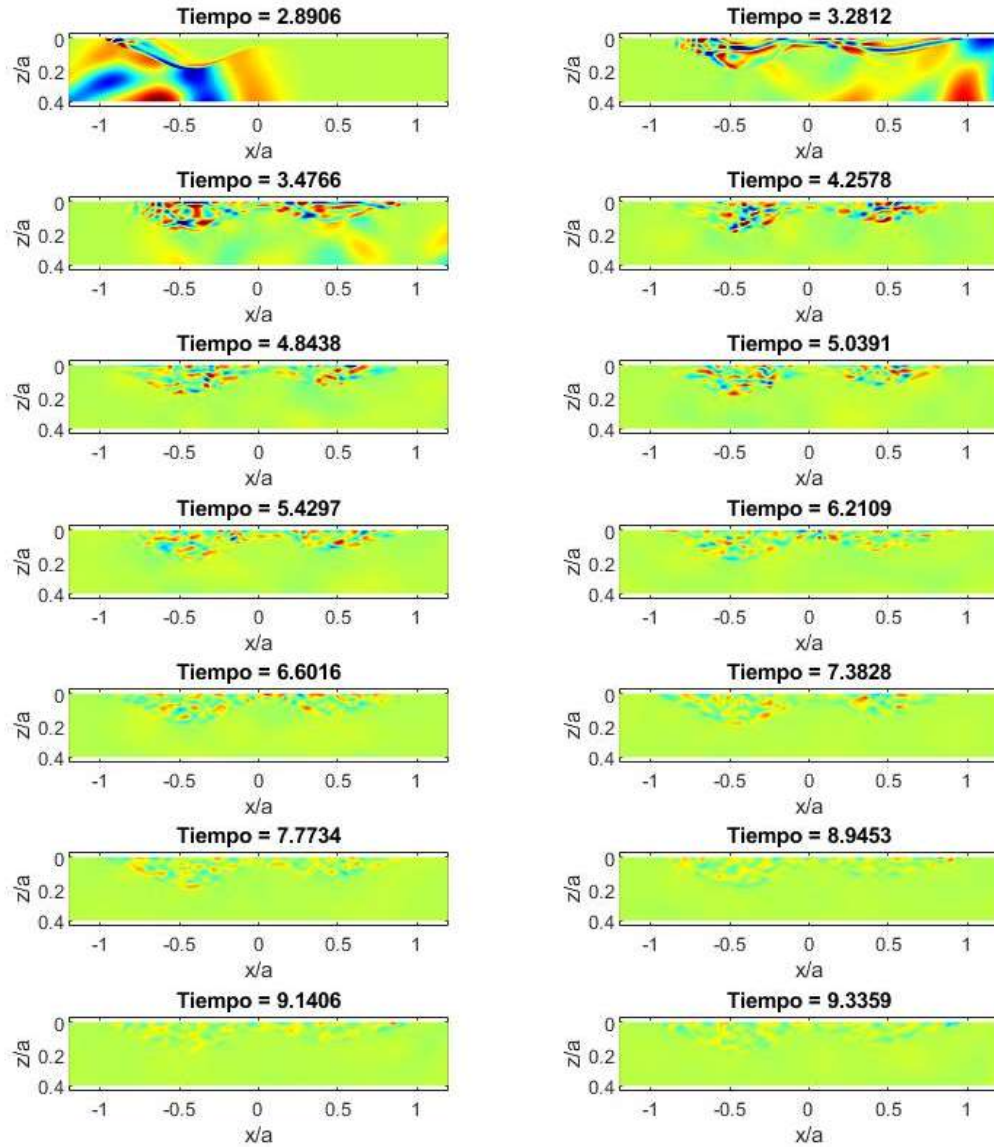


Figura 49. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_x$  para una onda  $P$  con incidencia oblicua a  $75^\circ$  en un valle aluvial adyacente.

### ***Incidencia de ondas de Rayleigh***

Se presenta ahora la incidencia de ondas de Rayleigh sobre los valles aluviales adyacentes. Las ondas inciden desde los  $x$  negativos y desarrollan una gran cantidad de difracciones porque entran al valle desde una de las esquinas.

En la siguiente página se muestran los sismogramas para la onda de Rayleigh incidente.

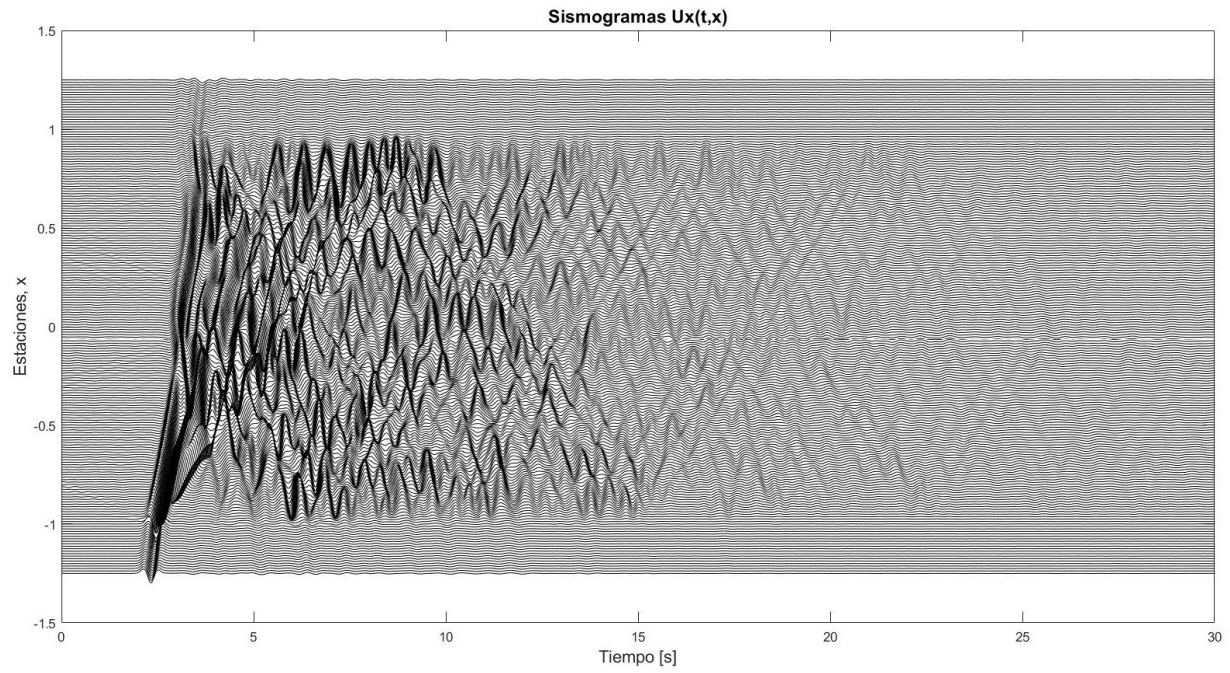


Figura 50. Desplazamientos superficiales de una onda de Rayleigh incidente. Componente horizontal  $U_x$ .

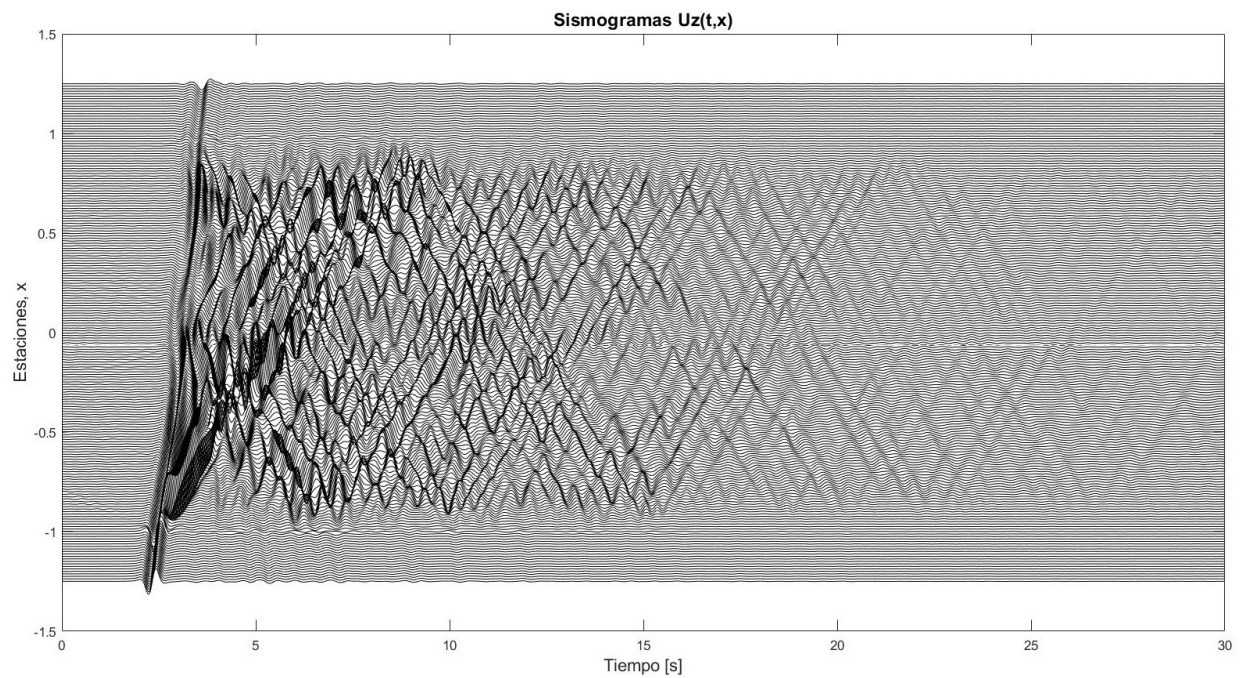


Figura 51. Desplazamientos superficiales de una onda de Rayleigh incidente. Componente vertical  $U_z$ .

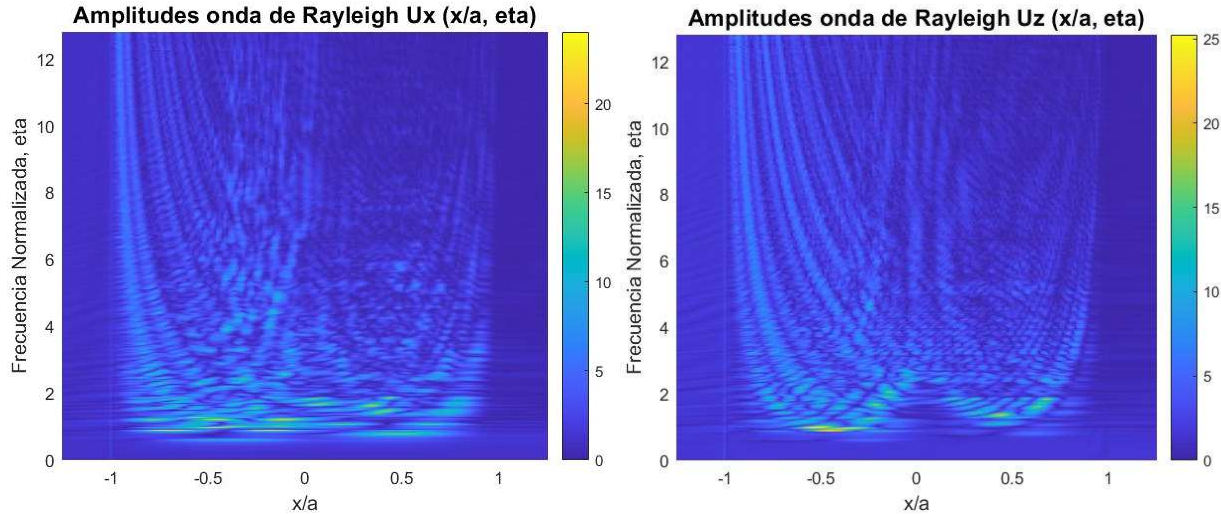


Figura 52. Amplificaciones superficiales para una onda de Rayleigh incidente. Se presentan las componentes  $U_x$  y  $U_z$ , horizontal y vertical.

Los sismogramas en las figuras 50 y 51 presentan un campo de desplazamientos complejo debido a la onda de Rayleigh que entra por el borde izquierdo del valle aluvial y que genera una significativa cantidad de difracciones por la presencia de la esquina.

Los espectros de amplitud en la figura 52 demuestran que las ondas de Rayleigh predominantemente contienen mucha energía a frecuencias bajas y a altas frecuencias no presentan amplitudes tan significativas. Es bien sabido que las ondas superficiales de Rayleigh usualmente son las más destructivas debido a esto mismo, ya que son ondas con mucho contenido a bajas frecuencias también tienen distancias de propagación muy grandes a comparación con las ondas de cuerpo que se presentan en frecuencias más altas, además por sus frecuencias bajas llegan a tener factores de amortiguamiento bajos por lo que el contenido energético de estas ondas se mantiene por periodos largos.

Ya teniendo la información de los espectros de amplitud para una onda incidente de Rayleigh, comparándolos estos con los espectros de las ondas incidentes P y SV, se confirma que la incidencia oblicua a  $75^\circ$  de esas ondas de cuerpo generaron ondas superficiales en el valle. Las altas amplificaciones a bajas frecuencias se deben principalmente a las ondas superficiales encontradas a bajas profundidades en el dominio del tiempo-espacio.

En los sismogramas sintéticos es difícil visualizar las ondas de Rayleigh que viajan a través de ellos, pero las capturas a profundidad de los desplazamientos ilustran perfectamente la onda de Rayleigh que viaja por la superficie en los casos de incidencia de onda P, SV y por supuesto de Rayleigh.

Revisando la siguiente figura que representa los desplazamientos a profundidad en  $U_z$  cuando incide una onda de Rayleigh, se observa claramente el desplazamiento del conjunto de ondas superficiales a través del tiempo.



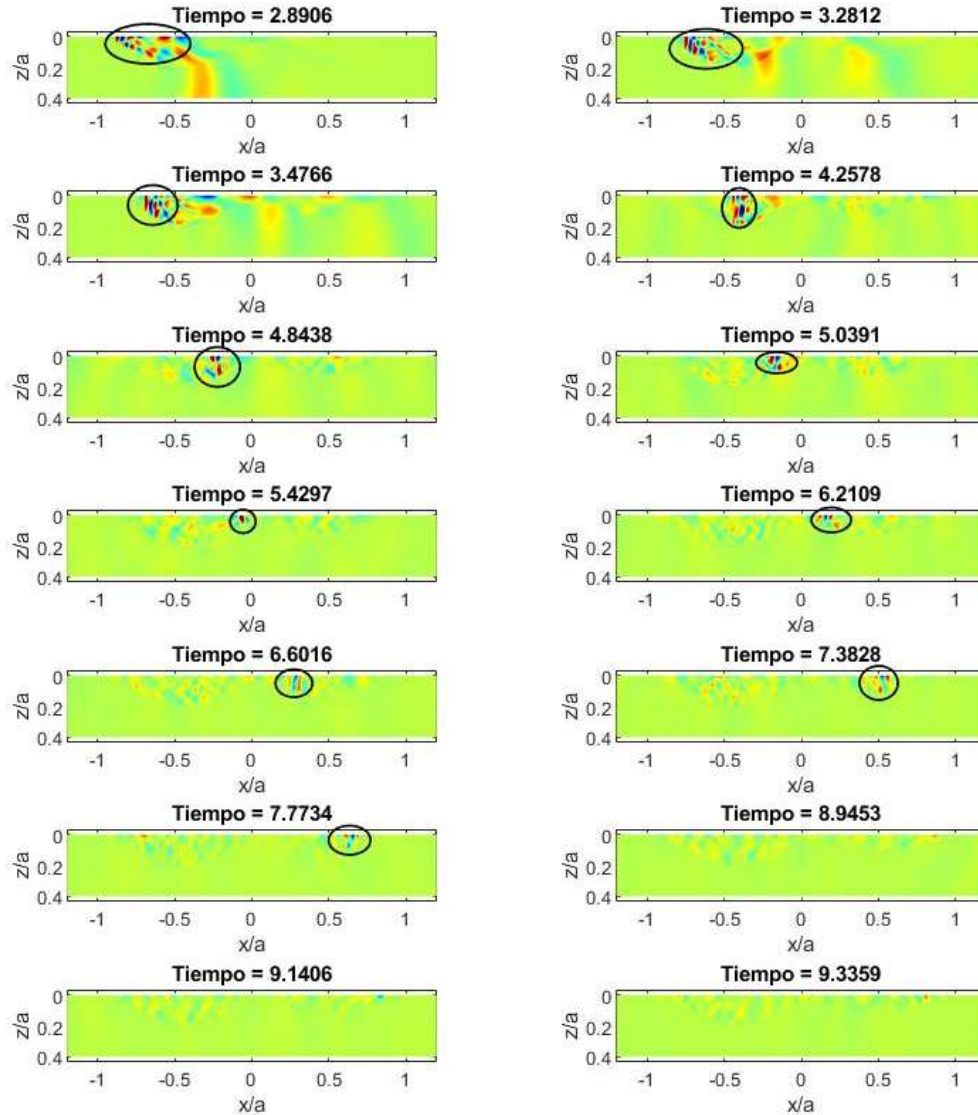


Figura 53. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_z$  para una onda de Rayleigh incidente en un valle aluvial adyacente.

En el tiempo uno de la figura 53  $t = 2.89$  s la onda ya ingresó al valle por la esquina izquierda, nótese que la onda de Rayleigh que viajaba en el semiespacio es más rápida, pero pierde energía a profundidad y termina ingresando al valle la mayor parte de la onda.

En los siguientes tiempos de la figura 53 también se identifica fácilmente el desplazamiento de las ondas superficiales, para facilitar la identificación al lector se usaron elipses para seguirla.

Le toma a la onda alrededor de 9 segundos para llegar al otro extremo del valle adyacente. Lo interesante es que la onda de Rayleigh también es bastante visible a profundidad en la figura 45 con los desplazamientos para una onda incidente SV a  $75^\circ$  en su componente  $U_z$ , o en los desplazamientos a profundidad de la componente  $U_z$  para una incidencia de onda P a  $75^\circ$  (figura A5), de la cual se tomó una parte para mostrar a detalle la onda superficial:

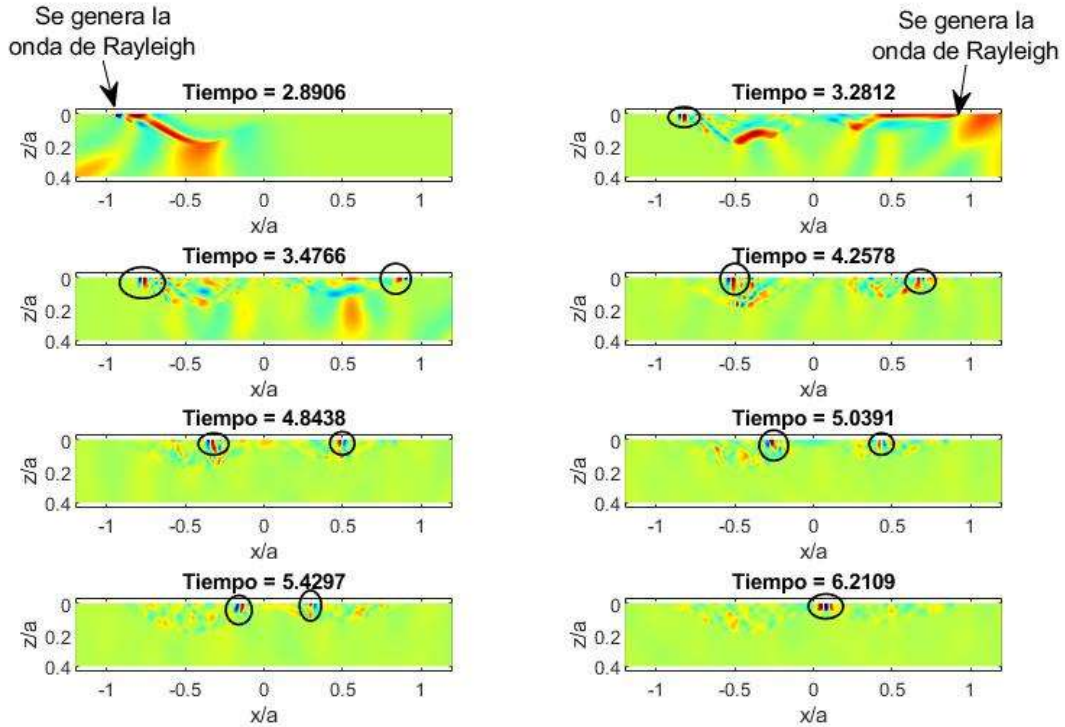


Figura 54. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_z$  para una onda P oblicua a  $75^\circ$ . Segmento de la figura A5

Observando la figura 54 la cual representa los desplazamientos a profundidad con la incidencia de una onda P, se observa primero que la esquina izquierda (por donde incide la onda P) genera un paquete de ondas superficiales de Rayleigh que pueden diferenciarse claramente al respecto de las ondas de cuerpo porque, primero viajan en la zona próxima a la superficie y segundo se mueven a una velocidad mucho más lenta que el resto de las ondas observadas. Además, comparando esta figura 54 con la figura anterior (figura 53), es claro que la onda de Rayleigh viaja a la misma velocidad en ambos casos. Pero en la figura 54 se observa un efecto adicional muy importante; la incidencia de la onda P oblicua genera primero un grupo de ondas de Rayleigh en la esquina izquierda, la onda de Rayleigh se mueve a una velocidad más baja que la onda P por lo que la onda de cuerpo llega rápidamente a la esquina derecha, en este borde derecho la onda termina generando más ondas de Rayleigh y en el último tiempo de la figura 54 ambos paquetes de ondas superficiales coinciden en sus posiciones en x. La incidencia de onda de Rayleigh no mostró ondas que se propagarán desde la esquina contraria porque no había ondas de cuerpo que llegarán hasta la otra esquina para generar más ondas superficiales.

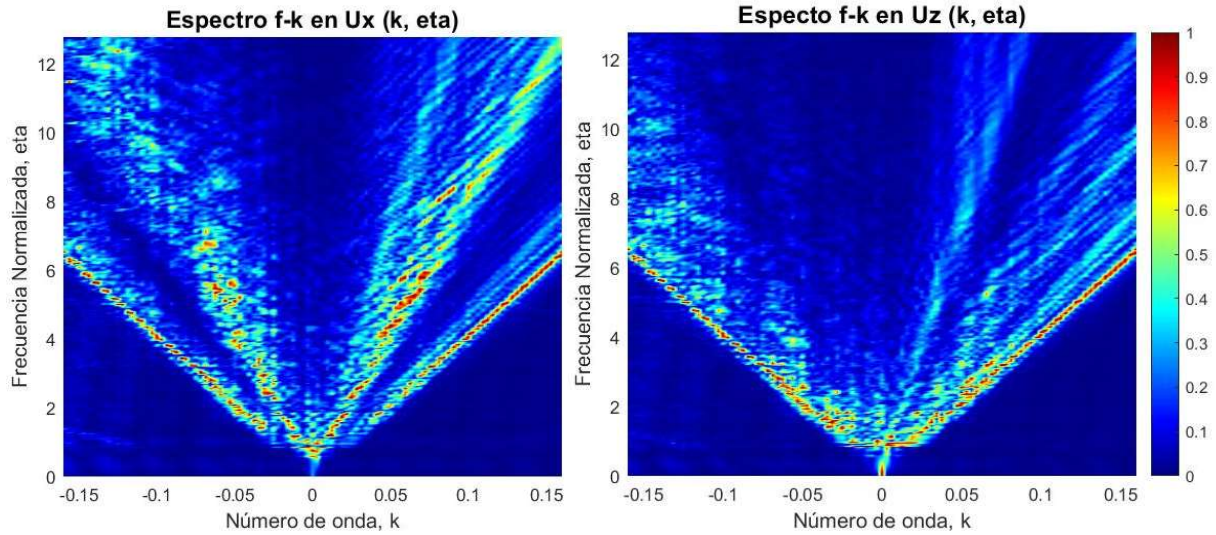


Figura 55. Espectros f-k de las componentes Ux/Uz para incidencia con una onda de Rayleigh en un valle aluvial adyacente. Las amplitudes del espectro se normalizaron.

La figura 55 muestra los espectros f-k para la incidencia de una onda de Rayleigh por el borde izquierdo del valle aluvial adyacente. En el espectro la presencia de las ondas superficiales es principalmente visible en la componente Ux, donde comparando con la figura 34 de los espectros para un valle aluvial simple se encontrará que la energía dentro del espectro se reparte de manera similar. La onda de Rayleigh que se transmite de izquierda a derecha viene siendo representada por las ampliaciones encontradas en los números de onda positivos, mientras que la onda que se refleja en la esquina derecha es representada por las amplitudes hacia la izquierda que tienen una menor cantidad de energía por ser la parte reflejada.

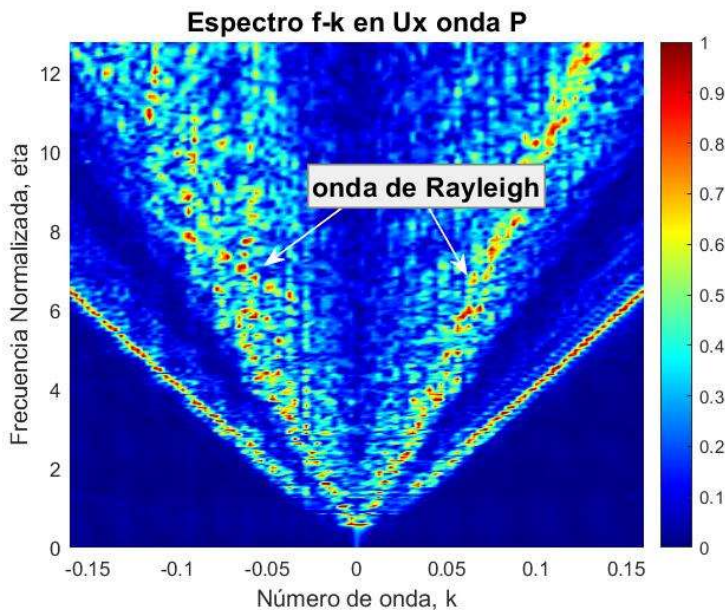


Figura 56. Espectro f-k de la componente Ux para una incidencia de onda P a 75°

Por último, la figura 56 representa el espectro f-k para la incidencia de una onda P, la cual ya se discutieron sus resultados en el tiempo a profundidad. Por las capturas de los desplazamientos a profundidad se sabe de la presencia de ondas de Rayleigh que además se generaron, casi al mismo tiempo en cada borde por la interacción de la onda P con la superficie; estas ondas superficiales igualmente son visibles dentro del espectro f-k donde se observan dos conjuntos altamente energéticos que son pertenecientes a cada grupo de ondas superficiales generado en los bordes. Por lo tanto, las amplificaciones a la derecha representan a la onda que se generó en el borde izquierdo, mientras que las amplificaciones a la izquierda se deben a las ondas superficiales producidas en el borde derecho del modelo; hay una ligera diferencia entre ambos grupos de la onda de Rayleigh en el espectro que se deben al retraso en que se generó la onda a la derecha del modelo, así como por la profundidad de los valles presentes.

Con estos resultados se puede determinar también que, en el caso del valle aluvial parabólico simple, en la figura 34 donde se muestran espectros f-k para la incidencia de una onda de Rayleigh y una onda SV, el espectro SV mostró un contenido energético simétrico y se observó la presencia de ondas superficiales, pero en este caso las ondas se generaron en el mismo tiempo ya que la incidencia fue normal, y además las ondas se propagaron dentro del mismo valle.



# Capítulo 6.

## Conclusiones

---

Se estudió el método 2.5D del IBEM para realizar un análisis exhaustivo de valles aluviales con geometría simple e irregular. La versatilidad del IBEM permitió la simulación de la respuesta para modelos con topografías e interfaces irregulares, así como la adición de inclusiones con propiedades diferentes al semiespacio. Esta versatilidad es muy beneficiosa para calcular modelos geométricos que definen a valles aluviales con una inclusión suave. Se realizaron comparaciones cuantitativas con los métodos del BEM directo y el FLAC, estos mostraron que los resultados obtenidos con el IBEM son aceptables y da respuestas equivalentes, la validación de los resultados se realizó con incidencia de ondas SH y SV.

Se presentó brevemente un caso de topografía irregular para un semicírculo convexo que recibe ondas SH incidentes, estos resultados dieron pauta a las aplicaciones del IBEM, así como la confiabilidad de la respuesta obtenida mediante el método.

Se generaron dos valles aluviales con inclusiones y propiedades mecánicas diferentes para analizar los efectos geométricos relacionados con la reflexión, difracción y de generación de ondas, por la incidencia de ondas P, S y de Rayleigh. Se propuso un modelo de valle aluvial simple parabólico y un valle aluvial adyacente conformado por la unión de dos valles con las mismas características físicas, pero con profundidades diferentes.

Los modelos de valles aluviales presentaron respuestas determinantes para el análisis de la generación de ondas por parte de las esquinas de ambos modelos, se observó tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo las difracciones producidas y la existencia de ondas superficiales de Rayleigh para las incidencias de ondas de cuerpo P y SV, donde las ondas superficiales surgen principalmente de los bordes de ambos modelos. Este análisis fue posible gracias a la simulación con la incidencia de ondas de Rayleigh y la comparación entre las diferentes respuestas obtenidas con las ondas de cuerpo.

Además de la detección de ondas superficiales generadas por los bordes, también se encontró amplificaciones importantes a diferentes frecuencias para las distintas incidencias generadas; las ondas superficiales demostraron tener un alto contenido energético en frecuencias bajas, mientras que las ondas de cuerpo tuvieron amplificaciones significativas a frecuencias más altas, que además incrementan dependiendo del ángulo de incidencia y de la profundidad de los valles(en el caso del modelo de valles adyacentes). Las diferencias en las frecuencias donde se encuentran los

picos de las ampliaciones son importantes para prevenir daños sismológicos que están directamente relacionados con las propiedades mecánicas y la geometría; los valles adyacentes diseñados teniendo en cuenta al Valle de México mostraron amplitudes a frecuencias más altas para el valle profundo, mientras que las ampliaciones en el valle somero se encontraron a frecuencias ligeramente más bajas.

Se encontró que la ampliación más importante para ambos valles aluviales propuestos se localizó principalmente en el centro de cada valle. Los valles aluviales adyacentes generaron una gran cantidad de difracciones debidas a los bordes del modelo, así como de la conexión o la unión entre los dos valles. El contraste entre las propiedades del valle y el semiespacio provocaron un atrapamiento de la energía entre la superficie libre y la interfaz, esto generó una gran cantidad de difracciones que pueden apreciarse con claridad en las capturas de los desplazamientos a profundidad, además los arribos a tiempos tardíos en sismogramas se debieron a esto.

Con las simulaciones realizadas se determinó que, para dos valles con una conexión somera, se pueden tener diferentes ampliaciones dependiendo de la geometría del modelo y de la dirección en la que se propaga la onda sísmica. Si los sismos son profundos y con distancias epicentrales pequeñas, asemejando a la incidencia de ondas normales, se tendrá ampliaciones más significativas a frecuencias bajas. En el caso de sismos con distancias epicentrales grandes, los ángulos de incidencia incrementarán y generarán una respuesta más significativa en frecuencias altas.

# Reconocimientos

Agradezco a toda aquella persona que me brindó apoyo durante mi carrera universitaria.

Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma, mi director de tesis y tutor en el área de la modelación numérica de la propagación de ondas sísmicas, por sus grandes enseñanzas en el área y por contagiarme de su pasión por el estudio de la propagación de ondas elásticas.

A mis padres Marimo Sugahara y Oscar López, a mi hermano Danjiro y a toda mi familia, por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida y por sus grandes consejos.

A Brenda Carla, por su apoyo, compañía y por ser una de mis más grandes inspiraciones.

A Sergio Ramos, por haberme acompañado a lo largo de mi carrera universitaria siendo un gran amigo y compañero.

A mis amigos de la facultad, a mis amigos de la preparatoria y a todas mis amistades que me han acompañado.

Al Ing. Roberto Jesús Rivas Medina, por facilitarme los resultados obtenidos mediante el FLAC.

Al Dr. José Piña Flores, por su ayuda en la generación de animaciones.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT), proyecto IN107720 de la UNAM.

Al Jurado:

- Dr. Martín Cárdenas Soto
- M.c. David Escobedo Zenil
- Dra. Marcela Baena Rivera
- Dra. Úrsula Iturrarán Viveros

A mis profesores de la carrera y a la Universidad Nacional Autónoma de México, por sus enseñanzas y por permitirme estudiar la carrera de Ing. Geofísica.

# Bibliografía

Afzalirad M., Naghizadehrokni M. & Khosravi I. (2018). Dynamic behavior of double and triple adjacent 2D hills using boundary element method. Elsevier, Heliyon.

Aki, K. y P. Richards (1980). Quantitative Seismology. Theory and Methods. W.H. Freeman and Company, San Francisco

Ba Z. & Yin X. (2016). Wave scattering of complex local site in a layered half-space by using a multidomain IBEM: incident plane SH waves

Baena-Rivera M., Perton M. & Sánchez-Sesma F. J. (2016). Surface-Wave Retrieval from Generalized Diffuse Fields in 2D Synthetic Models of Alluvial Valleys. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 106, pp. 2811-2816

Blakely R. J. (1996). Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications. Cambridge University Press

Bergmann, L. (1948). Ultrasonics and Their Scientific and Technical Application Wiley, New York.

Campillo, M., and M. Bouchon (1985). Synthetic SH seismograms in a laterally varying medium by the discrete wavenumber method, Geophysical Journal International. 83, no. 1, 307–317.

Campillo, M., F. J. Sánchez-Sesma, and K. Aki (1990). Influence of small lateral variations of a soft surficial layer on seismic ground motion, Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 9, 284-287.

Chai Juin-Fu, Teng TJ, Yeh CS, Shyu WS. (2002). Resonance analysis of a 2D alluvial valley subjected to seismic waves. J Acoust Soc Am. Vol. 112(2), 430-40. doi: 10.1121/1.1494809. PMID: 12186023.

Freund L. B. (1998). Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge University Press. p. 83. ISBN 978-0521629225.

Gaffet, S. and M. Bouchon (1989). Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in P-SV cases, Journal of the Acoustical Society of America. 85, 2277-2283.

Hisada Y., Aki K. & Teng Ta-Liang (1993). 3-D Simulations of Surface wave propagation in the Kanto sedimentary basin, Japan Part 2: Application of the surface wave BEM. BSSA, Vol. 83, No.6, pp. 1700-1720

Kawase H. (1988) Time-domain response of a semicircular canyon for incident SV, P and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 78 1415-37

Kupradze V. D. (1963) *Dynamical Problems in Elasticity*, in *Progress in Solid Mechanics*. Vol. III, North-Holland Publishing Company, Amsterdam

Lamb H. (1904) On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Royal Soc. London*. Vol. 203, 1-42

Lee, V. W., H. Luo, and J. Liang (2006). Antiplane (SH) Waves Diffraction by a Semicircular Cylindrical Hill Revisited: An Improved Analytic Wave Series Solution, *Journal of Engineering Mechanics* 132, 1106–1114.

López-Sugahara O. I., Mejía-López J., Sánchez-Sesma F. J. & Piña-Flores J. (2022). El método Indirecto de Elementos de Contorno IBEM para Simular Ondas Sísmicas en Topografías Abruptas. *Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica XXIII*

Love A. E. H. (1926). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, Oxford

Mejía-López J., López-Sugahara O. I., Piña-Flores J., Sánchez-Sesma F. J., Ge Z., Wei J., Rong M. & Ba Z. (2021). Seismic Response of 2D Topographic Profiles for Incident SH Waves: Iterative Solution and Comparison of Direct and Indirect BEM. *Bull. Seism. Soc. Am.*

Montero García Ismael Arturo (2002). *Huizachtepetl Geografía sagrada de Iztapalapa*. Gobierno del Distrito Federal, México.

Ortíz-Alemán C., Sánchez-Sesma F. J., Rodríguez-Zúñiga J. L. & Luzón F. (1998). Computing topographical 3D site effects using a fast IBEM/conjugate gradient approach. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 88, 393-399

Pedersen, Sánchez-Sesma & Campillo, (1994). Three-Dimensional Scattering by Two-Dimensional Topographies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 84, No. 4, pp. 1169-1183

Rahman M. & Michelitsch T. (2005). A note on the formula for the Rayleigh wave speed. *ELSEVIER, WAVEMOTION* Vol. 43, 272-276

Rial J. A. (1989). Seismic wave resonances in 3-D sedimentary basins. *Geophys. J. Int.* Vol. 99, pp. 81-90.

Sánchez-Sesma F. J. & Rosenblueth E. (1979). Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves. *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 69, 1107-1120

Sánchez-Sesma, F.J. & Campillo M. (1991). Diffraction of S, SV, and Rayleigh waves by topographic features: a Boundary integral formulation. Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 81, 2234-2253

Sánchez-Sesma, F.J. & Luzón F. (1995). Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves. Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 81, 269-284

Timoshenko S. P. & Goodier J. N. (1970). Theory of Elasticity. International Student Edition-McGraw Hill. Third Edition

Tong J. & Kuribayashi E. (1988). The Three-Dimensional Resonance of Axisymmetric Sediment-Filled Valleys. Soils and Foundations Vol. 28, No. 4, pp. 130-146.

Trifunac M. D. (1973). Scattering of Plane SH Waves by a Semi-Cylindrical Canyon, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 267-281.

Tucker B. E. & King J. L. (1984). Dependence of sediment-filled valley response on the input amplitude and the valley properties. Bull. Seism. Soc. Am. Vol. 74, pp. 153-165.

Webster, A. G. (1955). Partial differential equations in mathematical physics. Dover Publications Inc. New York.

Wei, J., Z. Ge, M. Rong, and Z. Ba (2020). Preconditioned Splitting Series Approximation for 2D Rough Surface Scattering, Bull. Seismol. Soc. Am. 110, 1149–1161

Wong, H. L. and P. C. Jennings (1975). Effect of canyon topographies on strong ground motion, Bulletin of the Seismological Society of America. 65, 1239-1257.

### ***Bibliografía complementaria***

Aki, K. y P. Richards (2002). Quantitative Seismology. Geology (University Science Books). 2nd edition. Seismology. University Science Books: ISBN: 9780935702965, 2009

Levi E. (1980). Teorías y métodos de las matemáticas aplicadas. UNAM. Segunda edición.

Viniegra Heberlein F. (2011). Mecánica de cuerpos deformables. UNAM, Facultad de Ciencias. 1a edición.

# Apéndices

## A.1 Tabla de Coeficientes para la Cuadratura de Gauss

Se muestran los valores de las constantes para fórmulas de hasta el seis puntos:

<i>Puntos</i>	<i>Factor de ponderación</i>	<i>Argumentos de la función</i>
2	$C_0 = C_1 = 1$	$x_0 = -0.577350269$ $x_1 = 0.577350269$
3	$C_0 = 0.5555556$ $C_1 = 0.8888889$ $C_2 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$ $x_1 = 0.000000000$ $x_2 = 0.774596669$
4	$C_0 = 0.3478548$ $C_1 = 0.6521452$ $C_2 = 0.6521452$ $C_3 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$ $x_1 = -0.339981044$ $x_2 = 0.339981044$ $x_3 = 0.861136312$
5	$C_0 = 0.2369269$ $C_1 = 0.4786287$ $C_2 = 0.5688889$ $C_3 = 0.4786287$ $C_4 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$ $x_1 = -0.538469310$ $x_2 = 0.000000000$ $x_3 = 0.538469310$ $x_4 = 0.906179846$
6	$C_0 = 0.1713245$ $C_1 = 0.3607616$ $C_2 = 0.4679139$ $C_3 = 0.4679139$ $C_4 = 0.3607616$ $C_5 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$ $x_1 = -0.661209386$ $x_2 = -0.238619186$ $x_3 = 0.238619186$ $x_4 = 0.661209386$ $x_5 = 0.932469514$



## A.2 Ecuaciones Complementarias de la Función de Green para una Fuente Móvil

Las notaciones utilizadas para simplificar las ecuaciones de la función de Green son:

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{x_1 - x_1^0}{R}, \quad \gamma_3 = \frac{x_3 - x_3^0}{R}$$

$$q = \frac{\omega}{\alpha}, \quad k = \frac{\omega}{\beta}, \quad v = \frac{\omega}{c}$$

$$Q = \sqrt{q^2 - v^2} = \omega \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}}$$

$$K = \sqrt{k^2 - v^2} = \omega \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}}$$

Cuando  $\text{Imag}(Q) \leq 0$ ;  $\text{Imag}(K) \leq 0$

$$A = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) H_0^{(2)}(QR) + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) H_0^{(2)}(KR)$$

$$B = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) H_2^{(2)}(QR) - \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) H_2^{(2)}(KR)$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}} H_1^{(2)}(KR) - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}} H_1^{(2)}(QR)$$

$$E = \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) H_0^{(2)}(KR) - \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) H_0^{(2)}(QR)$$

$$D(z) = z H_1^{(2)}(z).$$

Las expresiones anteriores ayudan a la simplificación de las ecuaciones de la función de Green y de las tracciones de Green, ambas necesarias para la construcción del sistema de ecuaciones que se resuelve para obtener la respuesta del medio.

Los términos  $e$  y  $l$  utilizados para las tracciones de Green son descritos como:

$$l_{ijk} = \frac{\partial G_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_i}$$

$$e_i = \frac{i}{4\rho R} \exp(-ivx_2) \gamma_i \frac{D(QR)}{\alpha^2}, \quad i = 1, 3$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= -\frac{i}{4\rho} \exp(-ivx_2) \frac{\omega}{c\alpha^2} H_0^{(2)}(QR) \\
l_{111} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \gamma_1 \left\{ 2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_1^2 D(QR) + 2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_3^2 D(KR) \right. \\
&\quad \left. + 2(3\gamma_3^2 - \gamma_1^2)B + \frac{2}{c^2} D(KR) \right\} \\
l_{131} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \gamma_3 \left\{ 2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_1^2 D(QR) + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) D(KR) \right. \\
&\quad \left. + 2(3\gamma_1^2 - \gamma_3^2)B + \frac{1}{c^2} D(KR) \right\} \\
l_{133} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \gamma_1 \left\{ 2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_3^2 D(QR) + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) (\gamma_1^2 - \gamma_3^2) D(KR) \right. \\
&\quad \left. - 2(3\gamma_3^2 - \gamma_1^2)B + \frac{1}{c^2} D(KR) \right\} \\
l_{333} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \gamma_3 \left\{ 2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_3^2 D(QR) + 2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_1^2 D(KR) \right. \\
&\quad \left. + 2(3\gamma_1^2 - \gamma_3^2)B + \frac{2}{c^2} D(KR) \right\} \\
l_{113} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \gamma_3 \left\{ 2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_1^2 D(QR) - 2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_1^2 D(KR) - 2(3\gamma_1^2 - \gamma_3^2)B \right\} \\
l_{331} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \gamma_1 \left\{ 2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_3^2 D(QR) - 2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{c^2}\right) \gamma_3^2 D(KR) - 2(3\gamma_3^2 - \gamma_1^2)B \right\} \\
l_{121} &= \exp(-ivx_2) \left[ \frac{1}{4\rho c R} \{ C(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) + \omega ER \gamma_1^2 \} - \frac{\omega}{8\rho c} \{ A - B(2\gamma_1^2 - 1) \} \right] \\
l_{233} &= \exp(-ivx_2) \left[ \frac{1}{4\rho c R} \{ C(\gamma_1^2 - \gamma_3^2) + \omega ER \gamma_3^2 \} - \frac{\omega}{8\rho c} \{ A - B(2\gamma_3^2 - 1) \} \right] \\
l_{112} &= \exp(-ivx_2) \frac{1}{2\rho c R} \{ C(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) + \omega ER \gamma_1^2 \} \\
l_{332} &= \exp(-ivx_2) \frac{1}{2\rho c R} \{ C(\gamma_1^2 - \gamma_3^2) + \omega ER \gamma_3^2 \} \\
l_{122} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \left\{ \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{c^2}\right) D(KR) + \frac{2}{c^2} D(QR) \right\} \gamma_1 \\
l_{232} &= \exp(-ivx_2) \frac{i}{4\rho R} \left\{ \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{c^2}\right) D(KR) + \frac{2}{c^2} D(QR) \right\} \gamma_3 \\
l_{123} &= l_{231} = l_{132} = \exp(-ivx_2) \frac{\omega}{2\rho c} B \gamma_1 \gamma_3
\end{aligned}$$

### A.3 Desplazamientos a Profundidad en Valles Aluviales (Figuras)

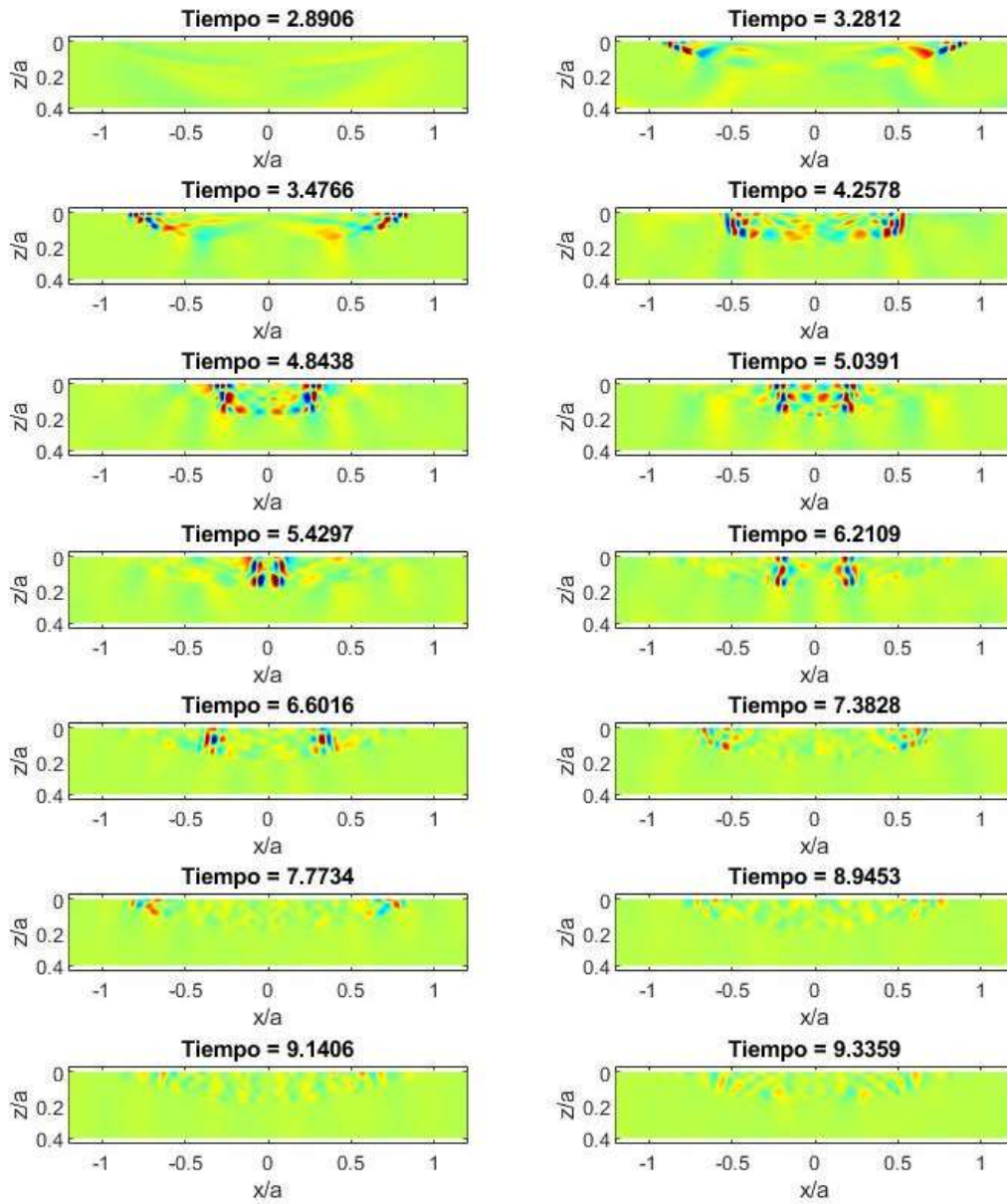


Figura A1. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_z$  para una onda SV con incidencia normal en un valle parabólico.

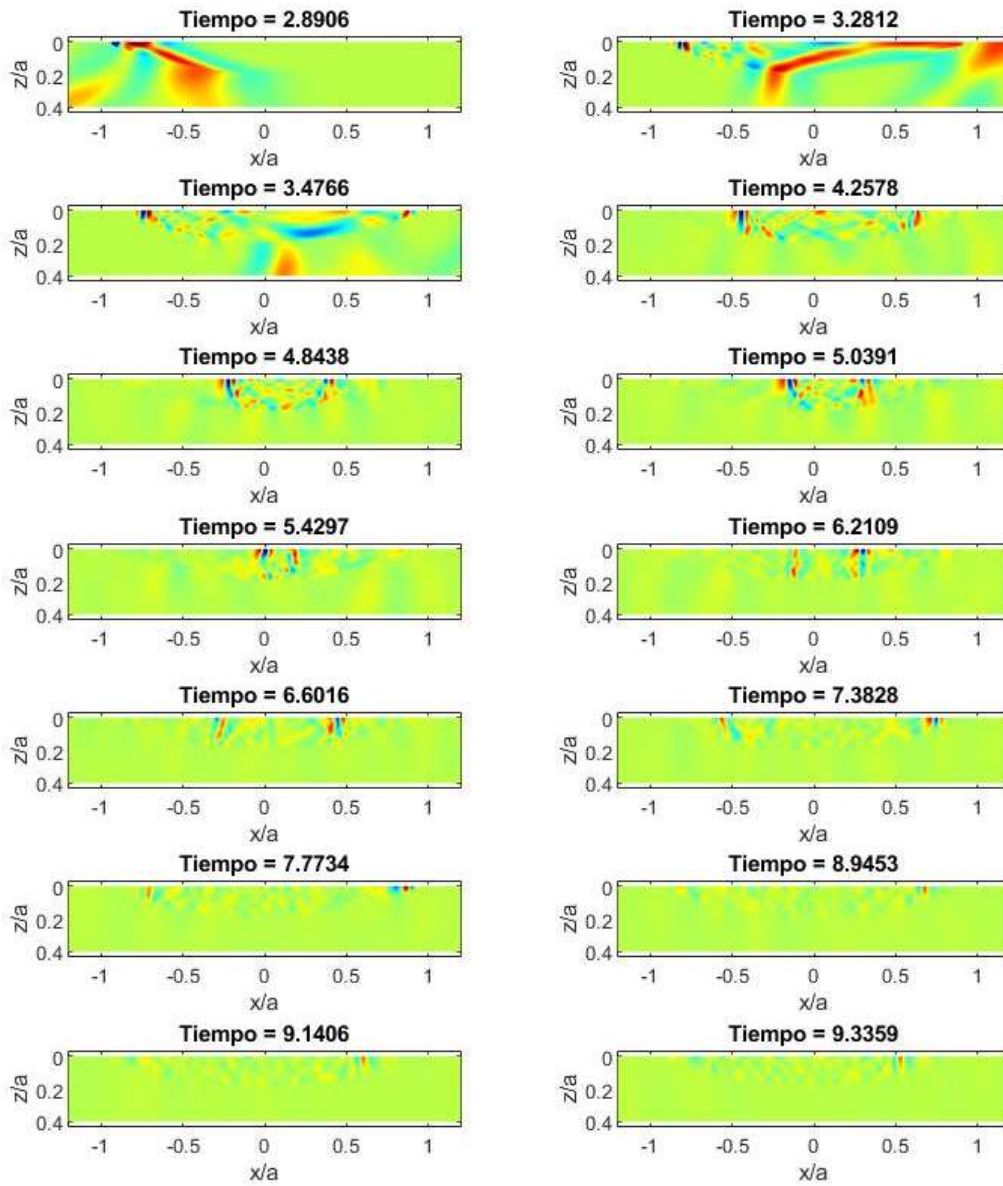


Figura A2. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_z$  para una onda  $P$  con incidencia oblicua a  $67^\circ$  en un valle parabólico.

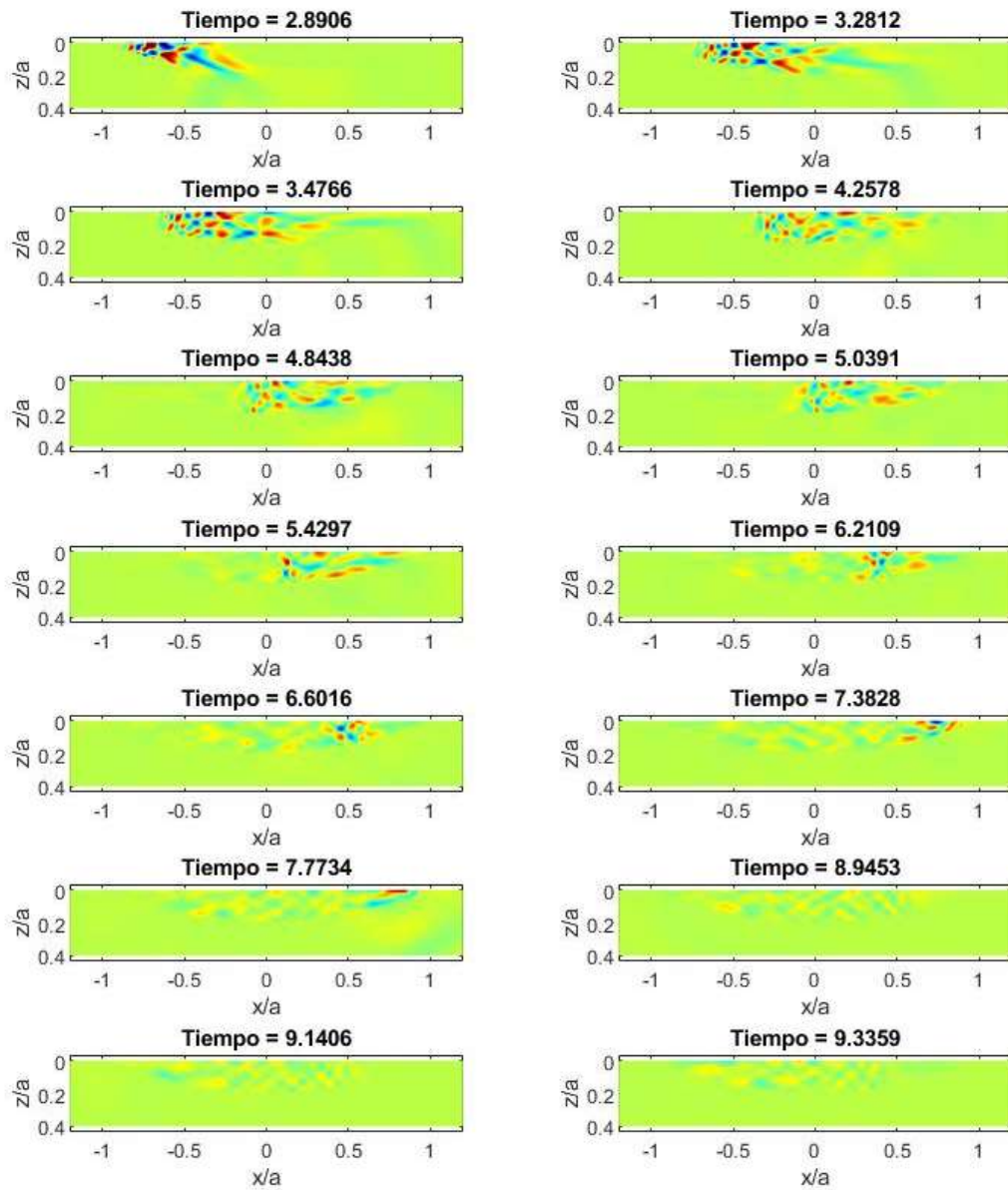


Figura A3. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_x$  para una onda de Rayleigh incidente en un valle parabólico.

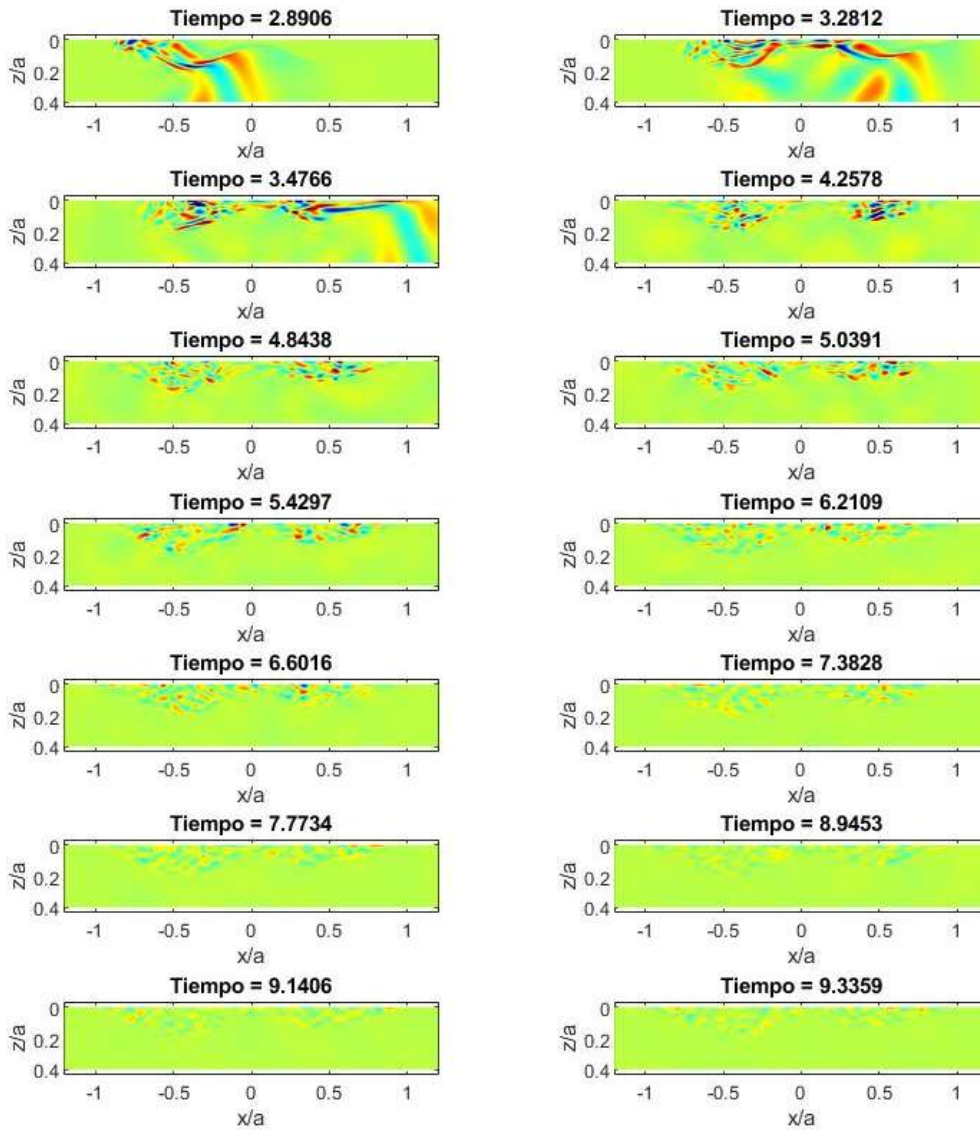


Figura A4. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_x$  para una onda SV con incidencia oblicua a  $75^\circ$  en un valle aluvial adyacente.



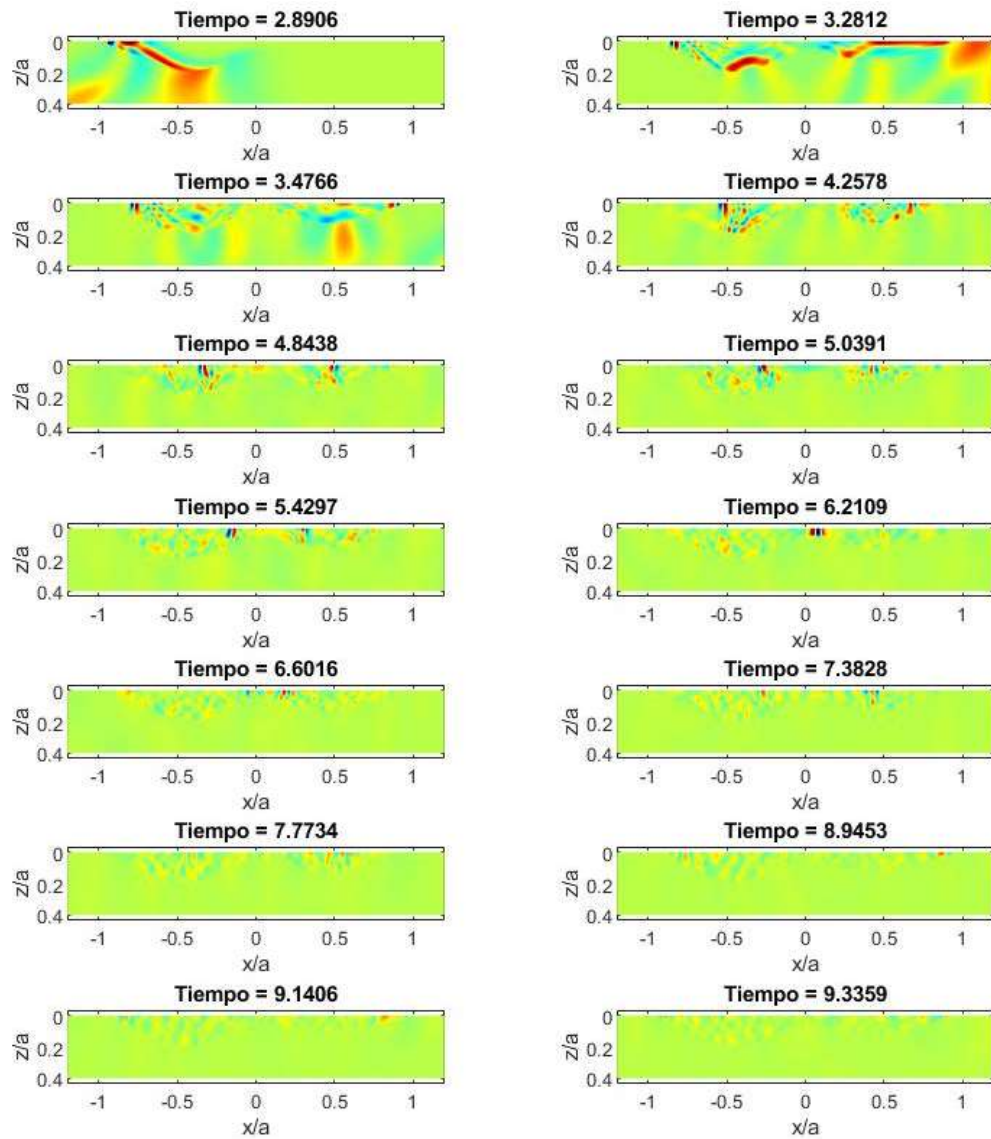


Figura A5. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_z$  para una onda P con incidencia oblicua a  $75^\circ$  en un valle aluvial adyacente.



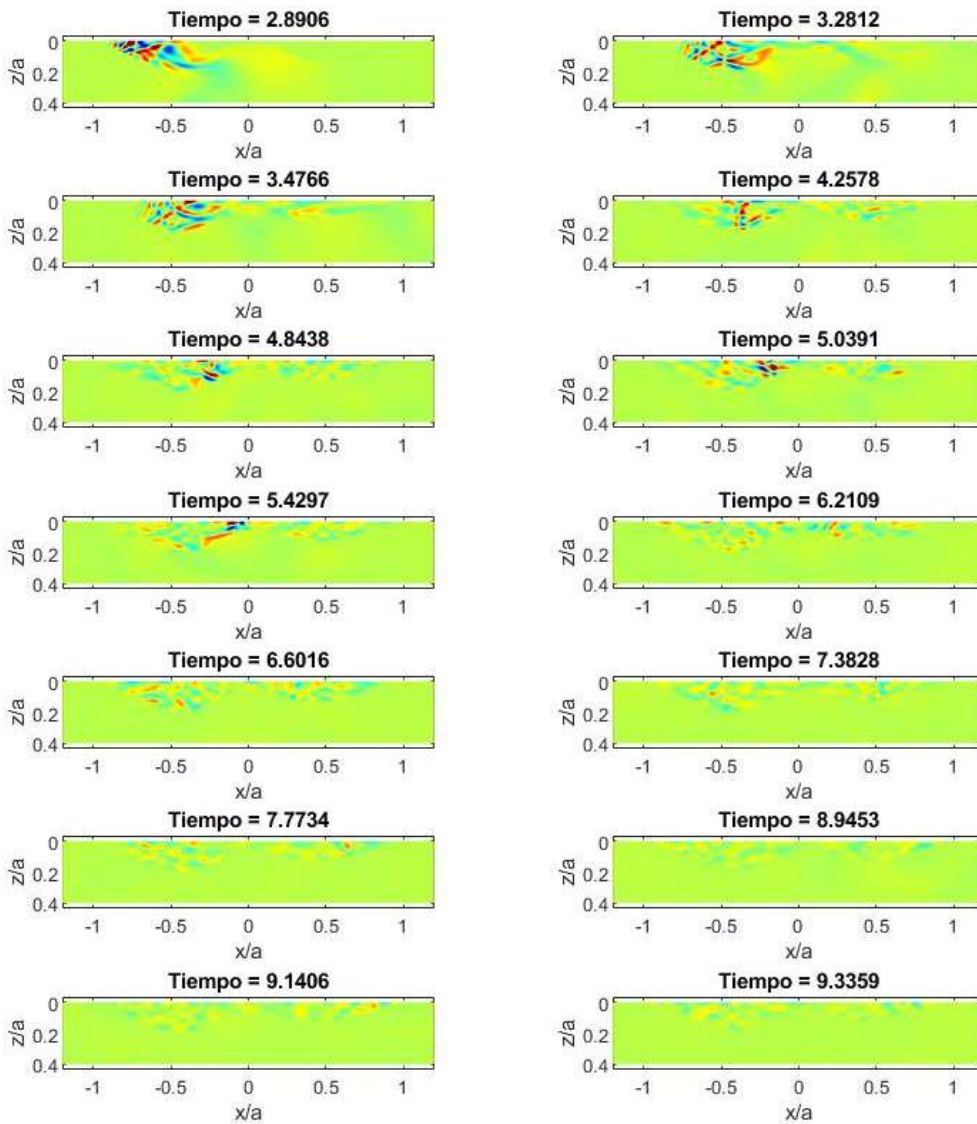


Figura A6. Desplazamientos a profundidad visualizados mediante snapshots de la componente  $U_x$  para una onda de Rayleigh incidente en un valle aluvial adyacente.