



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Análisis del flujo alrededor
de un perfil aerodinámico
con movimiento oscilatorio y
transferencia de calor**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero mecánico

P R E S E N T A

José Gilberto Montiel Galindo

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Rubén Ávila Rodríguez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022

A mi hermanito, mi mamá y mi papá.

Agradecimientos.

Al doctor Rubén por todo su apoyo, su guía, su paciencia y su instrucción; también por motivarme y orientarme a lo largo de este trabajo, así como el constante ánimo e impulso que me transmitió.

A Omar, por las charlas, académicas y personales, que entablamos en estos meses, pero sobretodo por la entrañable amistad que hemos forjado.

A la comunidad de estudiantes, profesores e investigadores, que aún a la distancia y con mucha solidaridad comparten sus conocimientos, especialmente a Yu-Hsiang Lan y a Phillip Fischer.

A los profesores que me han acompañado a lo largo de mi vida escolar. Sepan que su enseñanza se ha reunido para ayudarme a superar cada etapa académica.

A mis compañeros, por formar parte de este camino, y especialmente a mis amigos, por cada palabra, detalle, consejo, abrazo y momento que compartimos.

A mi familia, por estar pendiente de mí desde el día que nací, y, de maneras tan diversas, quererme, asistirme y abrazarme.

A Marianita, que me ha apoyado, escuchado, impulsado, apapachado y motivado inmensamente durante todos estos meses. Gracias por tu luz, por todo tu amor y por hacer la vida tan preciosa.

A mi hermanito, por su cariño, su valentía y su alegría incesante, que me contagia y anima de manera constante.

A mi papá y mi mamá, por todo el amor que me han dado, por criarme, educarme, acompañarme y cuidarme como lo han hecho desde siempre. Gracias por todo; tengan presente que este trabajo es suyo.

Índice general.

Nomenclatura	1
1. Introducción.	4
1.1. Contexto actual y motivación.	4
1.2. Microvehículos aéreos.	5
1.2.1. Retos y dificultades particulares.	5
1.2.2. Clasificación.	6
1.3. Estado del arte.	7
1.3.1. Características aerodinámicas a bajos números de Reynolds.	7
1.3.2. Perfiles aerodinámicos con aleteo.	9
1.4. Objetivo y alcance.	12
2. Modelo físico.	13
2.1. Traslación vertical oscilante o <i>plunging</i>	13
2.2. Oscilación angular o <i>pitching</i>	15
3. Modelo matemático.	17
3.1. Ecuación de continuidad.	17
3.2. Ecuación de cantidad de movimiento.	17
3.3. Ecuación de la energía.	18
3.4. Ecuaciones adimensionales.	18
3.5. Condiciones de frontera.	19
4. Modelo numérico.	21
5. Validación del modelo numérico.	25
5.1. Caso hidrodinámico (sin transferencia de calor) del flujo sobre un perfil aerodinámico en posición fija.	25
5.2. Caso hidrodinámico del flujo sobre un perfil aerodinámico con movimiento de <i>pitching</i>	27
5.3. Caso hidrodinámico del flujo sobre un perfil aerodinámico con movimiento de <i>plunging</i>	35
5.4. Validación del flujo de calor sobre una placa plana.	37
5.5. Validación del flujo de calor sobre un perfil aerodinámico en posición fija.	39

6. Resultados	40
6.1. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico: $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$.	40
6.1.1. Variación del número de Reynolds; $\alpha_m = 0^\circ$.	40
6.1.2. Variación del ángulo de ataque medio; $Re = 1,000$.	52
6.1.3. Análisis de resultados.	73
6.2. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico con movimiento de <i>pitching</i> : $\alpha_0 = 1^\circ$, $h_0 = 0$.	79
6.2.1. Análisis de resultados.	93
6.3. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico con movimiento de <i>plunging</i> : $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0.0125$.	96
6.3.1. Análisis de resultados.	100
6.4. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico con movimientos de <i>pitching</i> y <i>plunging</i> acoplados: $\alpha_0 = 1^\circ$, $h_0 = 0.0125$.	103
6.4.1. Análisis de resultados.	106
7. Conclusiones y trabajo a futuro.	109
Referencias.	111
Apéndice A. El perfil aerodinámico.	114
Apéndice B. Adimensionalización de las ecuaciones.	116
B.1. Ecuación de continuidad.	117
B.2. Ecuación de cantidad de movimiento.	117
B.3. Ecuación de la energía.	123
Apéndice C. Flujo externo y fuerzas aerodinámicas.	125

Índice de figuras

2.1. Esquema del perfil con movimiento de <i>plunging</i>	14
2.2. Esquema del perfil con movimiento de <i>pitching</i>	15
3.1. Dominio computacional y esquema de las condiciones de frontera.	20
4.1. Malla original, acercamiento al perfil aerodinámico.	22
4.2. Malla con 10 puntos GLL en cada dirección de los macroelementos.	23
5.1. Validación de los coeficientes aerodinámicos; caso estático.	26
5.2. Validación del coeficiente de sustentación; $\alpha_m = 0^\circ, \omega^* = 4.304$	27
5.3. Validación del coeficiente de arrastre; $\alpha_m = 0^\circ, \omega^* = 4.304$	28
5.4. Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ, \omega^* = 17.214$	29
5.5. Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 11^\circ, \omega^* = 4.304$	30
5.6. Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 11^\circ, \omega^* =$ 17.214.	31
5.7. Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 4.304$	32
5.8. Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* =$ 17.214.	33
5.9. Coeficientes aerodinámicos adelantados un periodo en el tiempo; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 17.214$	34
5.10. Validación de los coeficientes aerodinámicos; caso con <i>plunging</i>	36
5.11. Comparación de la distribución de vorticidad. Caso experimental en la posición superior (Lai y Platzer, 1999); en la inferior, la simulación numérica del presente trabajo.	37
5.12. Validación del número de Nusselt; caso estático.	39
6.1. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $Re = 30$	42
6.2. Coeficientes de arrastre; $Re = 30$	43
6.3. Coeficientes de sustentación; $Re = 30$	44
6.4. Números de Nusselt, $Re = 30$	45
6.5. Coeficientes de arrastre; $Re = 60$	46
6.6. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $Re = 60$	47

6.7. Coeficientes de sustentación; $Re = 60$	48
6.8. Números de Nusselt, $Re = 60$	49
6.9. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $Re = 120$	50
6.10. Coeficientes aerodinámicos; $Re = 120$	51
6.11. Números de Nusselt, $Re = 120$	52
6.12. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 0^\circ$	54
6.13. Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ$	55
6.14. Números de Nusselt; $\alpha_m = 0^\circ$	56
6.15. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 5^\circ$	57
6.16. Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 5^\circ$	58
6.17. Números de Nusselt; $\alpha_m = 5^\circ$	59
6.18. Coeficientes de arrastre; $\alpha_m = 10^\circ$	60
6.19. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 10^\circ$	61
6.20. Coeficientes de sustentación; $\alpha_m = 10^\circ$	62
6.21. Números de Nusselt; $\alpha_m = 10^\circ$	63
6.22. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 15^\circ$	65
6.23. Coeficientes de arrastre; $\alpha_m = 15^\circ$	66
6.24. Coeficientes de sustentación; $\alpha_m = 15^\circ$	67
6.25. Números de Nusselt; $\alpha_m = 15^\circ$	68
6.26. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 20^\circ$	69
6.27. Coeficientes de arrastre; $\alpha_m = 20^\circ$	70
6.28. Coeficientes de sustentación; $\alpha_m = 20^\circ$	71
6.29. Números de Nusselt; $\alpha_m = 20^\circ$	72
6.30. Influencia del número de Rayleigh; variación del número de Reynolds.	75
6.31. Influencia del número de Rayleigh; variación de α_m	76
6.32. Mapa de casos: $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$. Número de Rayleigh contra número de Reynolds, con $\alpha_m = 0^\circ$	77
6.33. Mapa de casos: $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$. Número de Rayleigh contra ángulo de ataque medio, con $Re = 1,000$	78
6.34. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 4.304$	81
6.35. Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 4.304$	82
6.36. Números de Nusselt; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 4.304$	83
6.37. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 17.214$	84
6.38. Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 17.214$	85
6.39. Números de Nusselt; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 17.214$	86
6.40. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 4.304$	87

6.41. Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 4.304$	88
6.42. Números de Nusselt; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 4.304$	89
6.43. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 17.214$	90
6.44. Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 17.214$	91
6.45. Números de Nusselt; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 17.214$	92
6.46. Influencia del número de Rayleigh; <i>pitching</i>	94
6.47. Mapa de casos para el perfil aerodinámico con movimiento de <i>pitching</i>	95
6.48. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; caso con <i>plunging</i>	97
6.49. Coeficientes de arrastre; <i>plunging</i>	98
6.50. Coeficientes de sustentación; <i>plunging</i>	99
6.51. Números de Nusselt; <i>plunging</i>	100
6.52. Influencia del número de Rayleigh; <i>plunging</i>	101
6.53. Mapa de casos para el perfil con movimiento de <i>plunging</i>	102
6.54. Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; caso con movimientos acoplados.	104
6.55. Coeficientes aerodinámicos; movimientos acoplados.	105
6.56. Números de Nusselt; movimientos acoplados.	106
6.57. Influencia del número de Rayleigh; movimientos acoplados.	107
6.58. Mapa de casos para el perfil aerodinámico con los movimientos acoplados.	108
A.1. Esquema de los elementos de un perfil aerodinámico.	115
C.1. Esquema de las fuerzas aerodinámicas actuando sobre un cuerpo.	127

Índice de tablas

4.1. Análisis de independencia de malla. Dado que la diferencia entre los casos con 12 y 10 puntos GLL es muy reducida en comparación con aquella entre los casos con 8 y 10 GLL, se eligen 10 puntos GLL para configurar la simulación numérica.	21
6.1. Perfil aerodinámico con $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$ y ángulo de ataque medio $\alpha_m = 0^\circ$. Se varía el número de Reynolds progresivamente entre 30 y 120; para cada caso se tiene un rango de números de Rayleigh entre 0 y 5,000.	41
6.2. Perfil aerodinámico con $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$ y número de Reynolds $Re = 1,000$. Se varía el ángulo de ataque medio entre 0° y 20° , aumentando 5° entre casos; para cada uno se toma un intervalo de números de Rayleigh entre 1,000 y 1,000,000.	53
6.3. Perfil con movimiento de <i>pitching</i> , y número de Reynolds $Re = 1,000$. La amplitud de oscilación es $\alpha_0 = 1^\circ$. Se consideran dos ángulos de ataque medios, $\alpha_m = 0^\circ$ y $\alpha_m = 15^\circ$, con dos valores de frecuencia: $\omega^* = 4.304$ y $\omega^* = 17.214$; para cada caso se toma un intervalo de números de Rayleigh entre 1,000 y 1,000,000.	80
6.4. Perfil con movimiento de <i>plunging</i> ; el número de Reynolds es $Re = 1,000$. La amplitud de oscilación es $h_0 = 0.0125$ y la frecuencia es $\omega^* = 7.86$. Se revisa un intervalo de números de Rayleigh entre 0 y 1,000,000.	96
6.5. Perfil con movimientos acoplados de <i>pitching</i> y <i>plunging</i> . El número de Reynolds es $Re = 1,000$, con un ángulo de ataque geométrico medio nulo. La amplitud del <i>pitching</i> es $h_0 = 0.0125$ y la del <i>plunging</i> es $\alpha_0 = 1^\circ$. La frecuencia es $\omega^* = 7.86$. El rango de números de Rayleigh es $0 < Ra < 1,000,000$	103

Nomenclatura

α	ángulo de ataque geométrico [°].
α_0	amplitud del movimiento de <i>pitching</i> [°].
α_m	ángulo de ataque geométrico medio [°].
\bar{p}	presión hidrostática [N/m^2].
β	coeficiente de expansión térmica [$1/K$].
Δp	cambio en la presión respecto de la presión hidrostática [N/m^2].
ΔT_0	diferencia entre la temperatura del fluido y la temperatura de referencia [K].
ΔT_a	diferencia entre la temperatura de corriente libre y la del perfil aerodinámico [K].
δ_T	espesor de capa límite térmica [m].
$\dot{\alpha}$	velocidad de rotación del perfil aerodinámico [$1/s$].
\dot{h}	velocidad de traslación vertical del perfil aerodinámico [m/s].
κ	difusividad térmica [m^2/s].
κ_{ci}	coeficiente de compresibilidad isotérmica [m^2/N].
μ	viscosidad dinámica [$kg/(m \ s)$].
ν	viscosidad cinemática [m^2/s].
ω	frecuencia angular [$1/s$].
$\overline{C_d}$	coeficiente de arrastre promedio.
$\overline{C_l}$	coeficiente de sustentación promedio.
\overline{Nu}	número de Nusselt promedio.
ϕ_h	ángulo de fase asociado al movimiento de <i>plunging</i> [°].

ϕ_α	ángulo de fase asociado al movimiento de <i>pitching</i> [°].
ψ	diferencia entre los ángulos de fase de los movimientos oscilatorios [°].
ρ	densidad [kg/m^3].
ρ_0	densidad media [kg/m^3].
τ	esfuerzo cortante en la pared del cuerpo inmerso en el flujo [N/m^2].
\mathbf{c}	vector de velocidad del fluido relativa a la malla computacional [m/s].
\mathbf{e}_i	vector unitario en dirección <i>i</i> ésima.
\mathbf{g}	vector de aceleración de la gravedad [m/s^2].
\mathbf{u}	vector de velocidad del fluido [m/s].
\mathbf{v}	vector de velocidad del perfil aerodinámico [m/s].
\mathbf{w}	vector de velocidad de la malla computacional [m/s].
c	cuerda del perfil aerodinámico [m].
C_d	coeficiente de arrastre bidimensional.
C_l	coeficiente de sustentación bidimensional.
F_d	fuerza de arrastre por unidad de longitud [N/m].
F_l	fuerza de sustentación por unidad de longitud [N/m].
g	magnitud de la aceleración de la gravedad [m/s^2].
h	posición vertical del perfil aerodinámico [m].
h_0	amplitud adimensional del movimiento de <i>plunging</i> .
h_M	amplitud del movimiento de <i>plunging</i> [m].
n	dirección normal a la frontera.
Nu	número de Nusselt.
P	periodo de oscilación [s].
p	presión [N/m^2].
Pr	número de Prandtl.
Ra	número de Rayleigh.
Re	número de Reynolds.
T	temperatura [K].

t	tiempo [s].
T_0	temperatura de referencia [K].
T_∞	temperatura de corriente libre [K].
T_a	temperatura del perfil aerodinámico [K].
u_∞	velocidad de corriente libre [m/s].
u_i	velocidad del fluido en dirección i ésima [m/s].
v_i	velocidad del perfil aerodinámico en dirección i ésima [m/s].
x_i	posición en dirección i ésima [m].

Capítulo 1

Introducción.

En este capítulo se presenta el tema de la investigación, el escenario en el que se encuentra y los motivos que la han impulsado. También se hace una revisión del trabajo previo que se ha hecho en la materia y, finalmente, se establece el objetivo del presente escrito.

1.1. Contexto actual y motivación.

Un microvehículo aéreo (*micro air vehicle* - MAV) puede definirse como una "micro aeronave no tripulada capaz de completar misiones en entornos abiertos o cerrados"(Moschetta, 2014); se caracterizan por tener una dimensión máxima de 15 cm y una velocidad máxima del orden de 20 m/s. Su historia puede remontarse al globo de aire caliente de los hermanos Montgolfier, quienes lograron hacer volar su artefacto en 1783, causando un gran interés en la aviación experimental, y al aeroplano no tripulado diseñado en 1799 por el ingeniero e inventor británico Sir George Cayley, pionero de la investigación aeronáutica.

El desarrollo de micro y nanotecnologías ha dado factibilidad técnica al desarrollo de las micro aeronaves. Por su parte, la gran variedad de aplicaciones de los MAVs han generado mucho interés en su desarrollo, abarcando tareas urbanas, como el control de tránsito y cartografía citadina; agrícolas, como apoyo en la caracterización de suelos y la inspección de cultivos; atención a emergencias, como en tareas de búsqueda y rescate en situaciones de desastre natural; sensado bioquímico y de contaminantes; estudios geológicos y geográficos, entre muchos otros más, incluida la investigación científica. Por ejemplo, en (Jaroszewicz, Sądziadek y Sibilski, 2013) se describe el diseño de un MAV que emula el vuelo de un insecto en las condiciones de la atmósfera marciana, la cual, siendo menos densa que la terrestre, hace que el régimen del flujo sea de bajo número de Reynolds, además que el vuelo de la aeronave contemplaría bajas velocidades por las tareas de reconocimiento y maniobras como el vuelo estacionario; en estas condiciones "un vehículo con una envergadura de 1 m estaría en el mismo régimen de número de Reynolds que un insecto en la Tierra". Aunado a lo anterior, si

bien es cierto que mucho se sabe sobre el vuelo a gran escala, aún falta bastante camino por recorrer en el entendimiento de los vuelos a pequeña escala, tanto el de los voladores naturales, caracterizados por variados y efectivos mecanismos de sustentación, como el de las máquinas construidas por humanos, donde se busca generar vuelos eficientes y ampliamente controlados.

1.2. Microvehículos aéreos.

1.2.1. Retos y dificultades particulares.

Los MAVs no son simplemente versiones a escala de las aeronaves más grandes. Si bien ciertos diseños, como los de ala fija, suelen beneficiarse de la tecnología y los lineamientos de las máquinas convencionales, las condiciones de operación y las características de estos vehículos involucran diversos retos físicos y tecnológicos. En principio se tiene al propio movimiento del aire sobre el vehículo. Debido a su tamaño pequeño y la baja velocidad con la que se mueven, el número de Reynolds al que operan oscila típicamente entre 10^4 y 10^5 , dos órdenes de magnitud por debajo de las aeronaves convencionales, las cuales suelen operar a un número de Reynolds superior a 10^6 (Winslow *et al.*, 2018).

Los efectos del bajo número de Reynolds influyen considerablemente en el desempeño de un perfil aerodinámico. En principio, el régimen de vuelo es crítico y predecir la presencia de una capa límite laminar o turbulenta se vuelve muy complicado. La tasa de sustentación contra arrastre también disminuye debido a la burbuja de separación laminar, que puede abarcar una porción importante del perfil. Como se menciona en (Moschetta, 2014), una burbuja larga genera un gran arrastre. Adicionalmente al número de Reynolds, la curvatura del perfil, su espesor, la rugosidad de la superficie y la tasa de aspecto tienen una influencia importante en el desempeño de este tipo de vuelos (Wey Shyy *et al.*, 2008).

Otro fenómeno relevante en este régimen de flujo es la presencia de los vórtices del borde de ataque y del borde de salida (*leading edge vortex* - LEV y *trailing edge vortex* - TEV, respectivamente), así como la interacción entre ellos (Lian, Ol y Wei Shyy, 2008). Debido a su tamaño, los MAVs son más sensibles a perturbaciones atmosféricas. Si bien el hecho de que la geometría sea pequeña no tiene mucho efecto en esta cuestión, la gran reducción de la inercia del vehículo sí lo tiene. Además, las ráfagas de viento a las que pueden estar expuestos llegan a oscilar entre los 2 m/s y los 5 m/s, velocidades comparables con el propio vuelo de estas aeronaves (Moschetta, 2014).

Adicionalmente, la integración del sistema es compleja. Esto radica en que los MAVs deben ser completamente operacionales con respecto a la altitud del vuelo, aceleración, estabilidad, velocidad, entre otros aspectos, a la vez que los sensores y el procesamiento de señales deben ser integrados en un volumen muy reducido, con un peso limitado y conservando un bajo consumo de energía. En este sentido, por ejemplo, en el diseño debe cuidarse que la masa total del vehículo se mantenga tan reducida como sea posible, considerando que duplicar la masa implicaría casi triplicar el consumo de potencia (Petricca, Ohlckers

y Grinde, 2011).

A pesar de lo previamente comentado, la miniaturización de los sistemas electrónicos y mecánicos, en principio, aunado al avance en la investigación de la aerodinámica a bajos números de Reynolds, ha permitido el desarrollo de aeronaves de muy limitado tamaño y peso.

1.2.2. Clasificación.

Se puede clasificar a los MAVs con base en el método de propulsión y sustentación: de ala fija, de ala rotatoria y con aleteo.

- Ala fija.

Las aeronaves de alas fijas han tenido una considerable atención en la medida en la que pueden diseñarse con base en los métodos establecidos para vehículos más grandes, con ciertas precauciones y modificaciones pertinentes en las características aerodinámicas (Petricca, Ohlckers y Grinde, 2011). La velocidad requerida para este tipo de MAVs es relativamente alta: por arriba de los 6 m/s.

En (Moschetta, 2014) se menciona la importancia de la selección del perfil alar para la presente configuración, concluyendo que los perfiles de menor espesor presentan un mejor desempeño aerodinámico que los más anchos (aquellos cuyo espesor es alrededor del 10 % de la cuerda). Esto es consistente con lo que se reporta en (Wey Shyy *et al.*, 2008).

Una desventaja de las aeronaves de ala fija es que no tiene la capacidad de realizar vuelo estacionario (*hovering*) y de reducir su velocidad, así que su uso excluye el vuelo en interiores. Algunas de las aplicaciones en las que se pueden emplear son en incendios forestales y la búsqueda de personas varadas en el mar.

- Ala rotatoria.

Los MAVs de ala rotatoria tienen la estructura de los helicópteros convencionales, o bien pueden disponerse con arreglos de rotores. Son capaces de volar a velocidades por encima de los 2 m/s, hacer vuelo estacionario y efectuar despegue y aterrizaje vertical.

Gracias a estas habilidades son de gran utilidad para vuelos en interiores y reconocimiento de rango corto (Petricca, Ohlckers y Grinde, 2011). Algunos ejemplos de aplicaciones son fotografía y filmación aérea e inspección remota en situaciones post-desastre, por ejemplo, un edificio muy afectado por un sismo o incendio.

Aun con las capacidades mencionadas una limitante de esta configuración es la duración de vuelo, pues el consumo de energía es alto y con la miniaturización aparecen varias dificultades, como la baja eficiencia del sistema de rotores (Petricca, Ohlckers y Grinde, 2011).

- Con aleteo.

Las configuraciones con aleteo surgen como alternativa a las alas fijas y rotatorias, pues si bien las tecnologías en las que se basan han sido ampliamente

desarrolladas, aparecen muchos problemas causados por los efectos del bajo número de Reynolds. Están enfocadas a integrar el control y la generación de sustentación y de propulsión; también ofrecen un sustancioso potencial para realizar tanto vuelo frontal como estacionario, además de adaptarse a las ráfagas de viento (Lian y Wei Shyy, 2007).

Se suele atribuir esta idea a un proceso de biomimesis basado en el vuelo de aves e insectos. Conviene observar que, en este sentido, hay dos clases de vehículos: aquellos basados en las aves se conocen como ornitópteros, mientras que los que se basan en los insectos son llamados entomópteros. Las diferencias radican en que los ornitópteros generan sustentación aleteando de arriba hacia abajo con ligeras variaciones en el ángulo de incidencia, aunque esto requiere un vuelo fontal y por lo tanto anula la capacidad de hacer vuelo estacionario, además que exige la presencia de alcanzar cierta velocidad inicial antes de despegar; por su parte, los entomópteros se valen de un amplio y veloz cambio en el ángulo de incidencia, lo que les permite generar mucha sustentación y, gracias a ello, hacer vuelo estacionario y maniobras de despegue - aterrizaje en vertical (Petricca, Ohlckers y Grinde, 2011). Los insectos son capaces de alcanzar coeficientes de sustentación muy altos (del orden de 5, en comparación con coeficientes alrededor de 1 para aeronaves convencionales) gracias a la formación y separación de vórtices producto de su intenso aleteo, aunque se cree que al crecer el número de Reynolds su habilidad para generar esa sustentación se ve mermada (Jaroszewicz, Saśiadek y Sibilski, 2013). Es por dichas capacidades y características que la investigación del vuelo en régimen de bajo número de Reynolds se ha enfocado en mayor medida a este tipo de aeronaves.

1.3. Estado del arte.

1.3.1. Características aerodinámicas a bajos números de Reynolds.

La sensibilidad del desempeño de un perfil aerodinámico a diferentes intervalos del número de Reynolds depende, en muy buena medida, de las características de la capa límite. Esto está directamente asociado al hecho de que, mientras más bajo sea el número de Reynolds, los efectos viscosos en el flujo tomarán más importancia.

Como se describe en (Winslow *et al.*, 2018), para números de Reynolds por arriba de $5 \cdot 10^5$, el flujo laminar sobre la parte superior del perfil aerodinámico está sometido a un cambio de presión adverso cerca del borde de ataque, lo que provoca que el flujo se separe. Después de este proceso, el flujo separado se hace cada vez más irregular hasta llegar a la transición, para posteriormente ganar cantidad de movimiento obtenida de la corriente libre en la región cercana a la pared, causando que el flujo vuelva a unirse al perfil con una capa límite turbulenta, generando a su paso una burbuja de separación laminar. Usualmente la capa límite turbulenta se mantendrá unida al perfil hasta el borde de salida, aunque a un ángulo de ataque suficientemente grande el flujo se separará sin

reincorporarse, causando que la sustentación caiga y que el arrastre aumente. Este fenómeno se conoce como *caída en pérdida de sustentación*, o *stall*.

Conforme el número de Reynolds se hace menor y cae en un intervalo de $5 \cdot 10^4 < Re < 10^5$, la burbuja de separación se hace cada vez más grande. Como en el caso anterior, la capa separada toma energía cinética de la corriente libre, pero esta vez se vuelve a unir al perfil más cerca del borde de salida, lo que también ocurre conforme el ángulo de ataque se incrementa. Cuando se está cerca de la caída en pérdida de sustentación, el flujo alterna entre el regreso al contacto con la geometría y la separación completa. En un régimen de flujo similar, $7.5 \cdot 10^4 < Re < 2 \cdot 10^5$, como se aborda en (Wey Shyy *et al.*, 2008), la razón C_L/C_D depende fuertemente del número de Reynolds. Conforme este disminuye, el intervalo del ángulo de ataque dentro del que se tiene un comportamiento aerodinámico satisfactorio se hace más corto. Otro factor relevante es la curvatura del perfil y su espesor: una mayor curvatura y un espesor reducido mejoran el desempeño aerodinámico. En el caso de números de Reynolds en el intervalo de $10^4 < Re < 5 \cdot 10^4$, el punto de separación se desplaza cerca del borde de salida debido a que la capa límite laminar es más estable y resistente a la transición. Cuando el ángulo de ataque aumenta, el punto de separación se mueve hacia el borde de ataque y el flujo ya no logra unirse de nuevo al perfil, generando un alto arrastre por presión y muy poca sustentación (Winslow *et al.*, 2018).

Para regímenes de flujo con un número de Reynolds entre $10^3 < Re < 10^4$, en (Wey Shyy *et al.*, 2008) se reporta, coincidiendo con lo previamente comentado, que la reducción del espesor y el aumento de la curvatura benefician el comportamiento aerodinámico. Asimismo, la posición de la curvatura máxima aumenta los coeficientes aerodinámicos conforme se desplaza hacia al borde de salida; en un perfil con geometría de arco y curvatura del 5% de la cuerda, se encontró que el valor máximo de la tasa C_L/C_D , y por tanto, el mejor desempeño aerodinámico, se tiene cuando la posición de la curvatura máxima se ubica al 25% de la cuerda (Sunada *et al.*, 2002). Un ejemplo interesante de este régimen de flujo es el vuelo de algunos insectos, cuyas alas son de superficie rugosa, a diferencia de los perfiles convencionales: la libélula tiene un perfil alar corrugado que provee un bajo arrastre junto con una sustentación considerable, cercana incluso al de algunas langostas, las cuales también tienen pliegues en sus alas y poseen de los coeficientes de sustentación más elevados que se han registrado (Kesel, 2000).

En (Mateescu y Abdo, 2009) se presenta el comportamiento aerodinámico de diferentes perfiles NACA en el rango de $400 < Re < 6 \cdot 10^3$. Los resultados coinciden en que a menor espesor y mayor curvatura se mejora el comportamiento aerodinámico. El efecto del número de Reynolds es que, para un mismo coeficiente de sustentación, el coeficiente de arrastre se hace más grande conforme decrece el número de Reynolds. En lo que respecta a la separación completa del flujo, se encontró que esta puede ocurrir incluso a bajos ángulos de ataque (entre 2° y 6°).

1.3.2. Perfiles aerodinámicos con aleteo.

Con esta configuración se presentan estructuras de flujo y fenómenos físicos cuya influencia en los efectos aerodinámicos es muy importante, como la presencia de burbujas de separación laminar, la formación y desprendimiento de los vórtices del borde de ataque, así como la interacción de estos con los vórtices del borde de salida; dinámicas complejas en los movimientos del aleteo, entre otros. Asimismo, el análisis de los patrones de vórtices en la estela que dejan las geometrías permite conocer información valiosa, por ejemplo, si se tiene generación de empuje o de arrastre. Una de las razones por las que se han enfocado atención y esfuerzos a los diseños de MAVs con esta característica es debido a su potencial capacidad para incrementar la sustentación en regímenes de bajo número de Reynolds y con ello el desempeño aerodinámico, la tolerancia a las ráfagas de viento y la facilidad de maniobras, las cuales han sido expuestas por voladores aleteantes biológicos, especialmente los insectos, los cuales operan en el mismo régimen de flujo (Lankford, Mayo y Chopra, 2016).

Por ejemplo, en (Kesel, 2000) se investigan las características aerodinámicas de los perfiles de ala de las libélulas. Se analizaron tres perfiles asociados a diferentes secciones transversales: a 30 %, 50 % y 70 % de la envergadura del ala, respectivamente. Asimismo se analizó otra triada de perfiles, basados en los previamente mencionados, con la diferencia de que se rellenaron los valles y crestas para formar geometrías cerradas. Se realizaron experimentos para medir las fuerzas aerodinámicas en un régimen de flujo de $Re = 10^4$, con ángulos de ataque entre -10° y 10° . Los resultados mostraron que los perfiles corrugados alcanzan una buena sustentación, mejor que sus contrapartes rellenadas, y bajo arrastre, similar al de una placa plana paralela al flujo, al tiempo que satisfacen las demandas estáticas de la estructura, proveyendo estabilidad. La exitosa generación de sustentación se debe a que los pliegues se llenan con vórtices, los cuales modifican la forma efectiva del perfil, incorporando el efecto de sustentación aumentada observado en los perfiles con curvatura.

En cuanto a los estudios que abordan el flujo sobre perfiles en movimiento, se aborda en (Ol, Reeder *et al.*, 2009) el movimiento oscilatorio de *plunging* puro en un perfil SD7003 bidimensional, de forma numérica y experimental. El intervalo de número de Reynolds es $10^4 < Re < 6 \cdot 10^4$, la frecuencia reducida (o normalizada) varía entre $k = 0.8$ y $k = 3.93$ y la amplitud es del 5% de la cuerda. Con $k = 3.93$ se observó la presencia de una calle de vórtices de Kármán en reversa, característica de una estela propulsiva. Ya que los resultados son similares a los reportados para un perfil NACA0012, se concluye que con alta frecuencia y baja amplitud, la presencia de un ángulo de ataque geométrico pequeño y curvatura en el perfil no modifican los resultados significativamente.

También en (Chiereghin, Cleaver y Gursul, 2019) se estudia experimentalmente el movimiento de *plunging* puro, esta vez en un perfil NACA0012. El número de Reynolds es de $20 \cdot 10^3$, la amplitud es de hasta 50 % de la cuerda y el ángulo de ataque geométrico varía entre 0° y 20° . Para los valores más grandes de frecuencia reducida y amplitud considerados, se encontró que, dependiendo del ángulo de ataque geométrico, el flujo pasa de estar unido al perfil a estar

dominado por la presencia de vórtices. Se encontró también que la sustentación máxima está determinada por la circulación alrededor del perfil, y que la formación de vórtices en el borde de ataque incrementa la sustentación media.

Por su lado, en (Medjroubi *et al.*, 2011) se analiza numéricamente el flujo sobre un perfil NACA0012, también con movimiento de *plunging*, en un rango de números de Reynolds de $800 < Re < 10^4$, variando el ángulo de ataque geométrico entre 12° y 20° . Los resultados muestran que el movimiento del perfil incrementa los coeficientes aerodinámicos en comparación con un caso estático, además que tiene un efecto similar al de incrementar el ángulo de ataque en un perfil sin movimiento. El incremento en el número de Reynolds tiene poca influencia en las cargas aerodinámicas y en la estructura del flujo con el perfil en movimiento, pero el ángulo de ataque incrementa considerablemente a los coeficientes aerodinámicos aun con muy bajos números de Reynolds, pues se generan vórtices de mayor fuerza y tamaño.

La pérdida de sustentación estática se debe al incremento del ángulo de ataque en un perfil aerodinámico fijo. En cambio, la *pérdida de sustentación dinámica* es un fenómeno en donde un perfil con movimiento excede el ángulo de pérdida de sustentación estática, al mismo tiempo que la sustentación sobrepasa su valor para dicha condición. Su característica más destacada es la formación y convección de una estructura coherente conocida como *vórtice de pérdida de sustentación*, el cual aparece en el borde de ataque (Mulleners y Raffel, 2012).

El fenómeno anterior se estudia sobre un perfil simétrico NACA0012 con movimiento de *pitching* en (Akbari y Price, 2003), a números de Reynolds de $Re = 3 \cdot 10^3$ y $Re = 10^4$, con una amplitud de 10° donde se investiga la influencia de la frecuencia reducida y del ángulo de ataque medio. Se observó que el movimiento oscilatorio retrasa la separación del flujo y que la fuerza normal a la cuerda del perfil aumenta a pesar de haberse superado el ángulo de pérdida de sustentación estática. También se encontró que el máximo coeficiente de fuerza normal crece con la frecuencia reducida. El aumento en el ángulo de ataque medio provoca que la separación ocurra más pronto en el ciclo oscilatorio.

En (Amiralaei, Alighanbarin y Hashemi, 2010) también se aborda el caso de un perfil en *pitching* puro. Para el mismo perfil NACA0012, con un ángulo de ataque geométrico medio de 0° y centro de giro a 25% de la cuerda, se revisa la influencia de la amplitud de oscilación, la frecuencia reducida y el número de Reynolds. El aumento de la amplitud angular radica en el crecimiento de los valores extremos de los coeficientes aerodinámicos. El incremento de la frecuencia reducida tiene el mismo efecto, aunado a que, en su valor más alto ($k = 0.25$), reduce el arrastre mínimo. Finalmente, el número de Reynolds influye en la formación y separación de vórtices, además que, con $Re \geq 2,000$, también se consigue reducir el arrastre.

Otra revisión sobre perfiles a bajo número de Reynolds con movimiento de *pitching* se hace en (Kurtulus, 2019). En este estudio se investiga numéricamente el flujo sobre un perfil NACA0012 oscilando con amplitud de 1° . Se estudian dos frecuencias de movimiento y se varía el ángulo de ataque medio para revisar su influencia. Los resultados muestran que con la frecuencia más baja se presenta desprendimiento de vórtices en todo el rango de ángulos de ataque medios,

mientras que en la frecuencia alta no se observa un desprendimiento periódico de vórtices hasta que el ángulo de ataque medio llega a los 8° . Asimismo, se genera cierto empuje con la frecuencia alta con ángulos de ataque medios entre 3° y 37° .

Otros estudios analizan el flujo de perfiles con movimientos acoplados. En (Moriche, Flores y García-Villalba, 2017) se estudia el movimiento combinado de *plunging* y *pitching* en un perfil NACA0012 con alta amplitud, números de Reynolds moderados y se varía el ángulo de ataque geométrico medio, así como el ángulo de fase entre los movimientos. Conforme se va aumentando el ángulo de ataque geométrico medio, se encontró que la sustentación incrementa pero el empuje disminuye. Respecto al ángulo de fase, se tiene que cuando aumenta, tanto la sustentación como el empuje crecen hasta cierto límite: los coeficientes aerodinámicos más altos se encuentran con 110° de desfase, aunque la mayor eficiencia de propulsión ocurre cuando el desfase es de 90° .

En cuanto a considerar efectos térmicos, en (Hinz, Alighanbari y Breitsamter, 2013) se estudia el efecto de la transferencia de calor sobre el desempeño aerodinámico de un perfil NACA0012, modelando la viscosidad dinámica y la difusividad térmica como función de la temperatura. Se revisaron tres casos: el perfil sin movimiento con $\alpha = 0^\circ$; con movimiento de *plunging* y con movimiento de *pitching*. Los resultados muestran que, en general, el desempeño aerodinámico se ve disminuido.

También se observa la influencia de la transferencia de calor en (Samiee *et al.*, 2018) sobre perfiles NACA simétricos y con curvatura, esta vez con menor temperatura en la superficie superior y mayor temperatura en la inferior; en todos los casos el ángulo de ataque es nulo. Los autores llaman *curvatura térmica* al fenómeno que se presenta con esta configuración. Similarmente al caso anterior, se modelan la viscosidad dinámica y la conductividad térmica en función de la temperatura. Encontraron que sólo disminuir o aumentar la temperatura en toda la geometría afecta al arrastre pero poco influye en la sustentación. En cambio, disponer al perfil de una temperatura baja en la superficie superior y una alta en la inferior tiene como consecuencia aumentar el desempeño aerodinámico de manera similar a como se mejoraría si se usara un perfil con curvatura.

En investigaciones más recientes, se han estudiado las características de la estela en perfiles con movimientos combinados de *pitching* y *plunging* (Verma y Hemmati, 2022), encontrando que el aumento en la frecuencia y en el ángulo de fase entre los movimientos provoca que la oscilación del perfil aerodinámico pase de ser dominada por el movimiento angular a ser dominada por el movimiento vertical. Se encontraron dos modos en los que se desarrolla la estela, que pueden ser usados cuando se requiere que se genere empuje, o bien que no haya recirculación de flujo detrás de la geometría. Por otro lado, en (Majumdar, Chandan y Sarkar, 2022) se aborda la influencia de varios parámetros sobre el desarrollo del flujo, entre ellos el espesor del perfil, la posición del eje de giro, la amplitud de los movimientos y el desfase entre ellos. Se propuso un mapa donde se muestra la transición de una estela periódica a una caótica (sin estructuras coherentes) basada en dos cantidades adimensionales, en las cuales

pueden tomarse en cuenta los efectos de los diferentes parámetros geométricos y de movimiento: el número de Strouhal basado en la amplitud del movimiento del borde de ataque y el ángulo de ataque efectivo. También se encontró que la magnitud del vórtice del borde de ataque está altamente correlacionado con la periodicidad (o irregularidad) de la estela.

Aún con lo anterior, queda pendiente mucha investigación para entender los fenómenos físicos que se involucran en los vuelos a bajos números de Reynolds, tanto los que son puramente hidrodinámicos como los que surgen debido a los efectos térmicos. El presente trabajo aborda un enfoque que no se ha explorado en la literatura, pues se consideran los efectos de las fuerzas de flotación que producen el mecanismo de convección térmica, con las que el fluido con mayor temperatura, y menor densidad, se desplaza en dirección opuesta al vector gravedad.

1.4. Objetivo y alcance.

El objetivo de la tesis es analizar el flujo bidimensional sobre un perfil aerodinámico NACA0012 a bajos números de Reynolds, con movimiento oscilatorio y transferencia de calor. Para alcanzarlo, se emplean soluciones numéricas a través del método de elementos espectrales. Se estudia la influencia de la flotación en los coeficientes aerodinámicos, en el número de Nusselt y en las estructuras de flujo.

A continuación se describe el contenido del trabajo: en el capítulo dos se revisa el modelo físico, presentando la descripción cinemática de los movimientos oscilatorios. En el tercer capítulo se describe el modelo matemático y se indican las condiciones de frontera que caracterizan al problema. El capítulo cuatro presenta brevemente el método de elementos espectrales. El quinto capítulo se dedica a la validación del modelo numérico. En el capítulo seis se presentan los resultados obtenidos y la discusión de los mismos. Finalmente, el séptimo capítulo expone las conclusiones y plantea las posibilidades de trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelo físico.

A continuación se expone la configuración del flujo al que se somete el perfil aerodinámico y se muestra el modelo empleado para los movimientos que efectúa este último: la oscilación vertical y la oscilación angular. Para cada uno, se muestran las ecuaciones que los conforman acompañadas de esquemas gráficos.

La geometría sometida al flujo es un perfil NACA0012; para una descripción más detallada de las características de los perfiles aerodinámicos, consúltese el apéndice A. El flujo es horizontal y lleva una velocidad de entrada u_∞ , con la gravedad, \mathbf{g} , figurando como fuerza de cuerpo. La temperatura de la corriente libre es T_∞ , siendo menor a la temperatura de la geometría, T_a . La longitud característica del perfil es la cuerda, c . El dominio computacional (ver figura 3.1) se comprende de 30 cuerdas de largo por 20 cuerdas de alto.

Con respecto al movimiento del perfil se tiene, por un lado, una traslación vertical oscilante de amplitud h_M ; por otro lado, una oscilación angular de amplitud α_0 y ángulo de ataque geométrico medio α_m , positivo en sentido antihorario. La frecuencia angular de la oscilación del perfil aerodinámico se denota con ω . Conviene formular las ecuaciones cinemáticas con base en variables adimensionales, así que considérense:

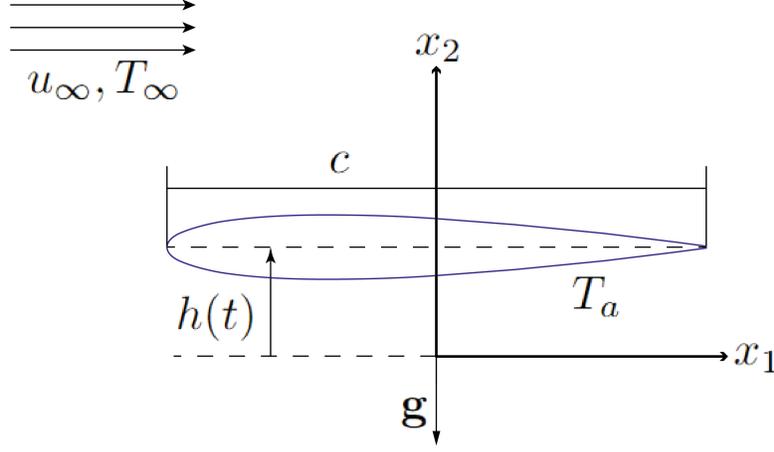
$$t^* = \frac{t u_\infty}{c} \quad \omega^* = \frac{\omega c}{u_\infty}$$

donde el signo * indica que la variable es adimensional, t es el tiempo, u_∞ es la velocidad de corriente libre y c es la cuerda del perfil aerodinámico. Al despejar las variables dimensionales de las expresiones anteriores, para hacer las sustituciones pertinentes en las ecuaciones cinemáticas, se tiene:

$$t = \frac{t^* c}{u_\infty} \quad \omega = \frac{u_\infty \omega^*}{c}$$

2.1. Traslación vertical oscilante o *plunging*.

En principio se describe el desplazamiento traslacional. Un ciclo de este movimiento se completa una vez que el perfil asciende a la posición máxima, desciende

Figura 2.1: Esquema del perfil con movimiento de *plunging*.

a la mínima y regresa a su posición original. Dicho comportamiento se puede describir por medio de una función senoidal:

$$h = h_M \sin\left(\frac{2\pi}{P} t + \phi_h\right) \quad (2.1)$$

donde h es la posición vertical, ϕ_h es el ángulo de fase asociado al movimiento traslacional, P es el periodo de oscilación y t es el tiempo. A su vez, se tiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} \quad (2.2)$$

así que sustituyendo (2.2) en (2.1) se obtiene:

$$h = h_M \sin(\omega t + \phi_h) . \quad (2.3)$$

Para expresar esta ecuación de manera adimensional se requieren adimensionalizar la posición vertical y la amplitud de movimiento, como sigue:

$$h^* = \frac{h}{c} \quad h_0 = \frac{h_M}{c}$$

obteniendo al despejar las variables originales:

$$h = c h^* \quad h_M = c h_0 .$$

Incorporando las variables adimensionales a la ecuación 2.3 y haciendo las simplificaciones algebraicas correspondientes, se obtiene:

$$c h^* = c h_0 \sin\left(\frac{u_\infty \omega^* t^* c}{c} + \phi_h\right)$$

$$h^* = h_0 \sin(\omega^* t^* + \phi_h) . \quad (2.4)$$

Con base en lo anterior, la velocidad de traslación vertical adimensional se obtiene al derivar (2.4) respecto a t^* como sigue:

$$\frac{dh^*}{dt^*} = \dot{h}^* = \omega^* h_0 \cos(\omega^* t^* + \phi_h) . \quad (2.5)$$

2.2. Oscilación angular o *pitching*.

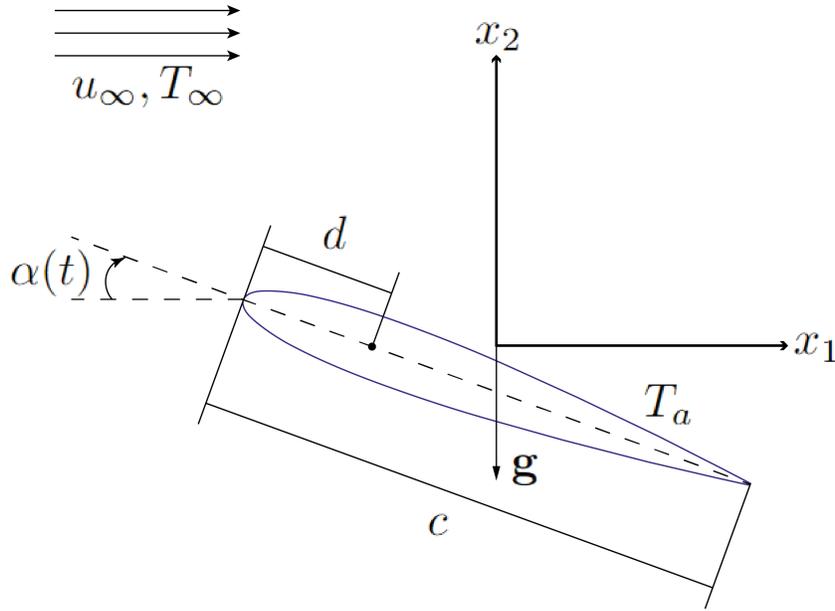


Figura 2.2: Esquema del perfil con movimiento de *pitching*.

En el caso del movimiento rotatorio, un ciclo de movimiento se comprende al girar el perfil en el ángulo correspondiente a la amplitud del movimiento, regresar a su posición inicial, girar una vez más, ahora en sentido opuesto, el ángulo definido por la amplitud, y finalmente llegar de nuevo al ángulo de ataque medio. El eje de giro es normal al plano en el que se encuentra la geometría, y se encuentra a 25% de la cuerda desde el borde de ataque. La posición angular, que para la configuración considerada es el ángulo de ataque geométrico, es también descrita por una función senoidal, de la forma:

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{P} t + \phi_\alpha\right) . \quad (2.6)$$

Donde ϕ_α es el ángulo de fase asociado al movimiento angular. Al sustituir (2.2) en (2.6):

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t + \phi_\alpha) . \quad (2.7)$$

Una vez que se incluyen las variables adimensionales, la expresión queda:

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \sin\left(\frac{u_\infty \omega^* t^* c}{c u_\infty} + \phi_\alpha\right)$$

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega^* t^* + \phi_\alpha) . \quad (2.8)$$

Se ha conservado la variable original para la posición angular, puesto que carece de dimensiones. A partir de esto, se puede calcular la velocidad angular adimensional con la derivada de (2.8) con respecto de t^* :

$$\frac{d\alpha}{dt^*} = \dot{\alpha}^* = \omega^* \alpha_0 \cos(\omega^* t^* + \phi_\alpha) . \quad (2.9)$$

La diferencia entre los ángulos de fase de los movimientos de *pitching* y *plunging*, $\psi = \phi_h - \phi_\alpha$, es nula, de manera que están sincronizados.

Capítulo 3

Modelo matemático.

Este capítulo sirve para mostrar las ecuaciones que gobiernan al problema, las cuales se resuelven numéricamente para obtener los campos de velocidad, presión y temperatura. Se presentan también las escalas y los parámetros empleados para el proceso de adimensionalización. Finalmente, se indican las condiciones de frontera que configuran al problema. Las ecuaciones de gobierno son las de Navier - Stokes en dos dimensiones para flujo incompresible con propiedades físicas constantes.

3.1. Ecuación de continuidad.

La ecuación de conservación de masa, o de continuidad, llamada así porque asume que la velocidad y la densidad son funciones continuas, está dada por la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

siendo \mathbf{u} el vector velocidad. Desarrollando la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

donde x denota las direcciones espaciales.

3.2. Ecuación de cantidad de movimiento.

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento está expresada como:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$$

donde ρ_0 es la densidad media, t es el tiempo, p es la presión, μ es la viscosidad dinámica y \mathbf{g} es el vector gravedad, que actúa como fuerza de cuerpo. Para

esta ecuación se usa la aproximación de Boussinesq, desarrollada en el apéndice B, que en esencia se emplea para estudiar fenómenos convectivos cuando se considera que la compresibilidad del medio es despreciable, salvo en la dirección en la que actúa la gravedad, donde se busca una ecuación de estado para la densidad, ρ . Considerando lo anterior, se tiene para la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta p) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + g \beta \Delta T_0 \mathbf{e}_2.$$

siendo ν la viscosidad cinemática, β el coeficiente de expansión térmica, ΔT_0 la diferencia de temperaturas entre un punto del campo de flujo y una temperatura de referencia T_0 , g la magnitud de la aceleración gravitacional y \mathbf{e}_2 el vector unitario en dirección vertical; la temperatura de referencia es la de corriente libre. En la primera dirección, la ecuación es:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)$$

mientras que en la segunda dirección, se tiene:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + g \beta \Delta T_0 .$$

3.3. Ecuación de la energía.

La ecuación de conservación de la energía se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

donde T es la temperatura y κ es la difusividad térmica. Al desarrollar la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right)$$

3.4. Ecuaciones adimensionales.

A continuación se presentan las ecuaciones de gobierno en su forma adimensional. Las ventajas, como se menciona en (Çengel y Cimbala, 2014), son: *a*) se identifican las relaciones entre los parámetros principales del problema y *b*) el número de parámetros en una ecuación adimensional es menor al número de parámetros en su forma dimensional. En principio se precisa definir las escalas adimensionales, las cuales se muestran a continuación:

$$u_i^* = \frac{u_i}{u_\infty} \quad t^* = \frac{t u_\infty}{c} \quad x_i^* = \frac{x_i}{c}$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_a} \quad \Delta T_0^* = \frac{\Delta T_0}{\Delta T_a}$$

$$\Delta T_0 = T - T_0 \quad \Delta T_a = T_a - T_\infty .$$

donde el signo * indica que la variable es adimensional, el subíndice $i \in \{1, 2\}$ refiere a cada una de las direcciones espaciales, u es la velocidad, u_∞ es la velocidad de corriente libre, c es la cuerda del perfil aerodinámico, x es la posición, T_∞ es la temperatura de corriente libre y ΔT_a es la diferencia de temperaturas entre el perfil, T_a , y la corriente libre. Después del proceso de adimensionalización, que se desarrolla en el apéndice B, aparecen los siguientes parámetros adimensionales: número de Reynolds, Re ; número de Rayleigh, Ra , y número de Prandtl, Pr , que se definen como

$$Re = \frac{u_\infty c}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad Ra = \frac{g \beta \Delta T_a c^3}{\kappa \nu} .$$

Con lo anterior, omitiendo el signo * por simplicidad, se tienen las ecuaciones de gobierno en su forma adimensional:

- Continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- Cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ra}{Re^2 Pr} \Delta T_0 \mathbf{e}_2$$

- Energía térmica:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T$$

3.5. Condiciones de frontera.

Como se ilustra en la figura 3.1, considerando que están expresadas en forma adimensional, las condiciones de frontera son las siguientes:

- Frontera de entrada del flujo, $x_1 = -10$:

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 0 \quad T = 0$$

- Frontera de salida del flujo, $x_1 = 20$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

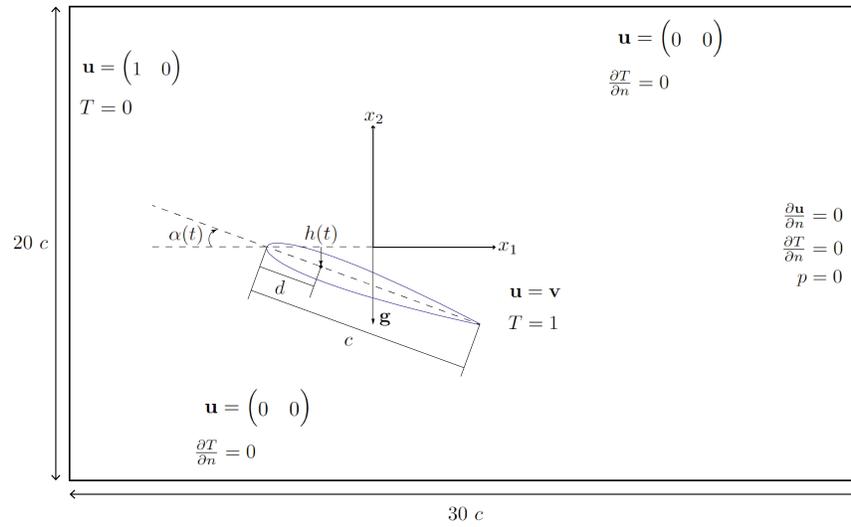


Figura 3.1: Dominio computacional y esquema de las condiciones de frontera.

- Frontera superior e inferior, $x_2 = 10$ y $x_2 = -10$:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

- Frontera del perfil aerodinámico:

$$u_1 = v_1 \quad u_2 = v_2 \quad T = 1$$

Donde \mathbf{v} es la velocidad del perfil aerodinámico, con componentes v_1, v_2 , y n es la dirección normal a la frontera.

Capítulo 4

Modelo numérico.

El presente capítulo tiene por objeto exponer brevemente el método numérico empleado para resolver las ecuaciones de gobierno y generar las simulaciones computacionales. Este es el método de elementos espectrales (*Spectral Element Method*, SEM). Como se aborda brevemente en (Barkley y Henderson, 1996), el dominio de fluido Ω contiene una malla de K macroelementos, dentro de los cuales tanto la geometría como las variables a resolver, en este caso velocidad, presión y temperatura, se representan usando expansiones polinomiales de orden N . Asimismo, se emplean polinomios de Gauss - Lobatto - Legendre (GLL) como base para la solución numérica.

La configuración del número de puntos GLL permite refinar la malla computacional sin que sea necesario generar una nueva malla en cada iteración. Esta característica es de mucha ayuda en el análisis de independencia de malla (tabla 4.1), pues a partir de un mallado con pocos macroelementos se puede conseguir una buena resolución simplemente aumentando el orden del polinomio de interpolación.

$\alpha_m [^\circ]$	$\alpha_0 [^\circ]$	h_0	ω^*	$\overline{C_d}$		
				8 GLL	10 GLL	12 GLL
0	1	0	4.304	0.1213	0.1214	0.1214
11	1	0	4.304	0.1845	0.1849	0.1849
11	1	0	17.214	0.1547	0.1644	0.1642
0	0	0.0125	7.86	0.1232	0.1233	0.1234

Tabla 4.1: Análisis de independencia de malla. Dado que la diferencia entre los casos con 12 y 10 puntos GLL es muy reducida en comparación con aquella entre los casos con 8 y 10 GLL, se eligen 10 puntos GLL para configurar la simulación numérica.

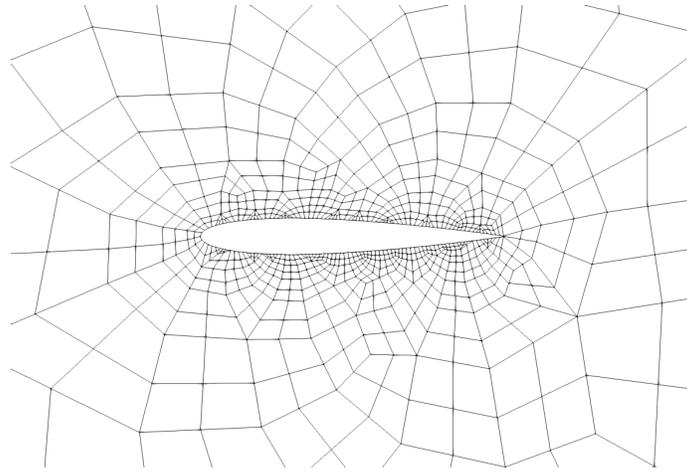


Figura 4.1: Malla original, acercamiento al perfil aerodinámico.

Esto puede observarse al comparar las figuras 4.1 y 4.2. Por un lado se tiene la malla original, donde figuran tan solo 1,124 macroelementos. Es una malla sumamente sencilla, con pocos puntos para generar los cálculos del campo de flujo. Sin embargo, al emplear un polinomio de interpolación de orden 10, se obtiene una malla mucho más refinada, con 100 veces más puntos para generar los cálculos. Obsérvese que la resolución cerca del perfil es considerablemente mayor al resto del dominio computacional. Esto se debe a que la mayor parte de los efectos de interés se desarrollarán en esta zona, de manera que se dispone una mayor cantidad de puntos en la vecindad de la geometría.

Por otro lado, el presente trabajo involucra el uso del algoritmo Lagrangiano - Euleriano arbitrario (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*, ALE) debido a que se analiza el flujo sobre una geometría en movimiento, requiriéndose entonces que la propia malla se desplace. En la mecánica de medio continuo usualmente se emplean dos descripciones del movimiento: la descripción Lagrangiana y la descripción Euleriana, nombradas así en honor a los científicos Leonhard Euler y Joseph Louis Lagrange, respectivamente, por haberlos usado sistemáticamente en sus estudios. El marco Lagrangiano, o sustancial, se distingue porque el sistema de referencia “está moviéndose junto con las partículas materiales”, y es mayormente usado en la mecánica de sólidos; en cambio el marco Euleriano, o local, “está fijo con respecto a la deformación misma”, y se utiliza ampliamente en la mecánica de fluidos (Levi, 1976).

En un entorno computacional, por un lado, la descripción Lagrangiana permite afrontar problemas estructurales, de flujo con superficie libre y de interface entre materiales diferentes, aunque su debilidad es la incapacidad de manejar distorsiones muy amplias de la malla computacional; por otro lado, la descripción Euleriana puede manejar grandes deformaciones del medio continuo aunque son menos precisas la definición de las interfaces y la resolución de los detalles

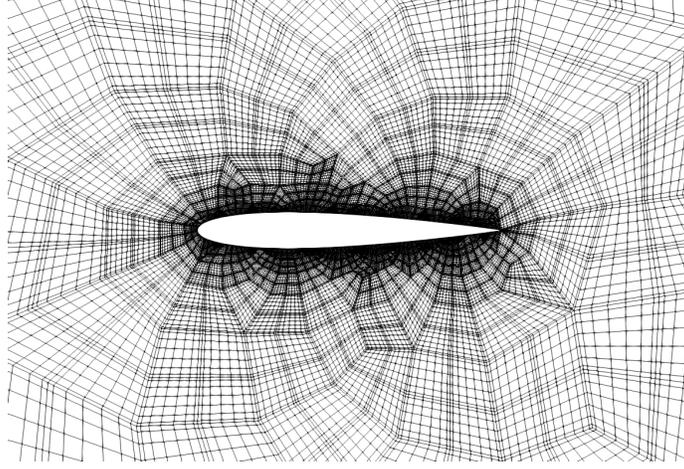


Figura 4.2: Malla con 10 puntos GLL en cada dirección de los macroelementos.

del flujo. Con base en lo anterior, la descripción ALE es una técnica desarrollada con el objetivo de combinar las capacidades de las anteriores, en donde los nodos de la malla pueden moverse con el medio continuo (de forma Lagrangiana), permanecer fijos (de forma Euleriana) o bien de moverse arbitrariamente y tener la capacidad de acomodarse de forma continua.

La formulación ALE se resume a continuación, siguiendo el proceso desarrollado en (Fischer, Schmitt y Tomboulides, 2017). En principio, considérese un campo de velocidades $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ que caracteriza a una serie de puntos en los que interesa seguir la evolución de ciertas variables, y que es diferente del campo de las partículas materiales; en la práctica se asigna al dominio computacional, es decir, que \mathbf{w} es la velocidad de la malla. Ahora bien, considérese la derivada material de una variable f :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f .$$

Si se considera una partícula ficticia con velocidad \mathbf{w} , puede definirse la derivada al tiempo de f , siguiendo la definición la derivada material, como:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla f$$

la cual recibe el nombre de *derivada ALE*. Nótese que se toma la forma anterior cuando $\mathbf{w} \neq \mathbf{u} \neq 0$, a diferencia del caso en el que $\mathbf{w} = 0$, donde la malla es fija y la derivada ALE es la derivada parcial al tiempo:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

retomándose la descripción Euleriana; o bien cuando $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, en cuyo caso se llega a la descripción Lagrangiana y la derivada ALE es la derivada material.

A continuación se presenta la velocidad relativa del medio continuo respecto del movimiento del marco de referencia de la malla móvil, denotada por \mathbf{c} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{c}$$

de manera que la relación entre la derivada material y la derivada ALE se puede establecer como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{c} + \mathbf{w}) \cdot \nabla f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla f + \mathbf{c} \cdot \nabla f \\ \Rightarrow \frac{Df}{Dt} &= \frac{\delta f}{\delta t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f \end{aligned}$$

Puesto que la derivada material con respecto al tiempo es inherente a las leyes de conservación, el vínculo entre esta y la derivada ALE es necesaria para expresar las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en la descripción ALE.

Respecto a las condiciones de frontera, la formulación ALE puede manejar superficies materiales con las siguientes condiciones, como se describe en (Donea *et al.*, 2004): ninguna partícula puede cruzar la superficie y los esfuerzos deben ser continuos a través de la misma. Particularmente en la interacción entre fluido y estructura, para cumplir la primera condición se requiere que las componentes normales a la superficie de la velocidad del fluido y de la velocidad de la malla sean iguales,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$$

además que la velocidad de la estructura y del fluido coincidan en la interface, considerando que se tiene un fluido viscoso:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} .$$

Esto último se realiza colocando dos nodos de la malla en dicha zona: uno de fluido y otro estructural. Aprovechando la capacidad de la formulación ALE para mover la malla de forma arbitraria e incluso de forma independiente al movimiento del fluido mismo, se restringen los nodos que corresponden al fluido a que permanezcan contiguos a los de la estructura. Para hacer esto se asigna en la interfase a la velocidad de la malla, \mathbf{w} , la velocidad de la propia estructura. De tal forma se logra que durante todo el movimiento los nodos en la interfaz se mantengan contiguos.

Capítulo 5

Validación del modelo numérico.

En este capítulo se comparan los resultados obtenidos con el modelo numérico y los reportados en la literatura. Se busca que el acuerdo entre ellos sea cercano y así concluir que los cálculos efectuados son confiables.

5.1. Caso hidrodinámico (sin transferencia de calor) del flujo sobre un perfil aerodinámico en posición fija.

El rango de inclinaciones varía de 0° a 20° y el incremento es $\Delta\alpha = 1^\circ$. Se calculan los valores del coeficiente de arrastre, C_d , y del coeficiente de sustentación, C_l , para compararlos con los valores reportados en (Kurtulus, 2015). En el apéndice C se aborda el tema de flujo externo y fuerzas aerodinámicas, donde además se indica cómo se calculan los coeficientes de arrastre y sustentación.

Una vez que el perfil aerodinámico está en posición fija, el flujo requiere de cierto tiempo para alcanzar un estado estacionario o cuasiestacionario. Dicho estado se identifica en los coeficientes aerodinámicos ya sea cuando estos convergen a un cierto valor, para ángulos de ataque reducidos, o bien cuando sus valores observan una oscilación regular en el tiempo, en el caso de ángulos más grandes. Estos valores responden a un promedio espacial asociado a toda la geometría, así que adicionalmente se efectúa un promedio temporal una vez que se identifica que el flujo es permanente o periódico.

Con base en los resultados mostrados en la figura 5.1, se observa un muy buen acuerdo entre los valores reportados en la literatura y los calculados en las presentes simulaciones, así que se concluye que la obtención de las fuerzas y los respectivos coeficientes aerodinámicos es válida. Adicionalmente, conviene notar que el empleo del movimiento de la malla computacional para fijar al perfil en el ángulo de ataque correspondiente no influye en los resultados finales.

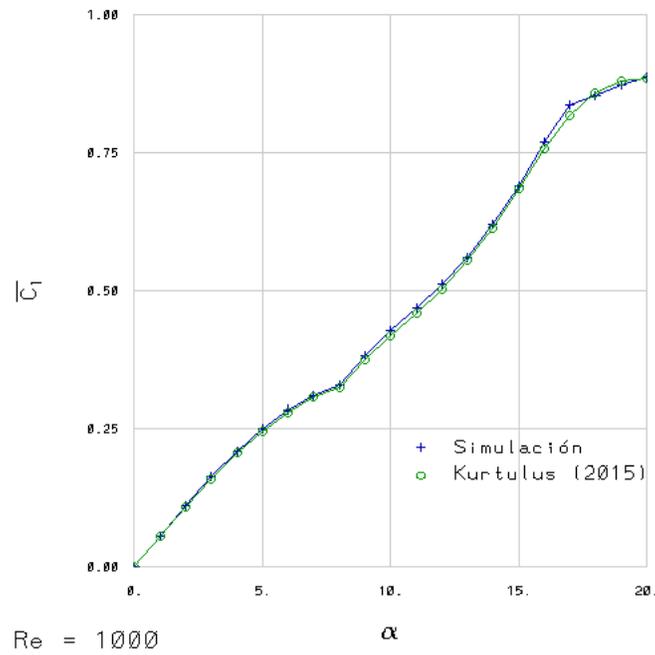
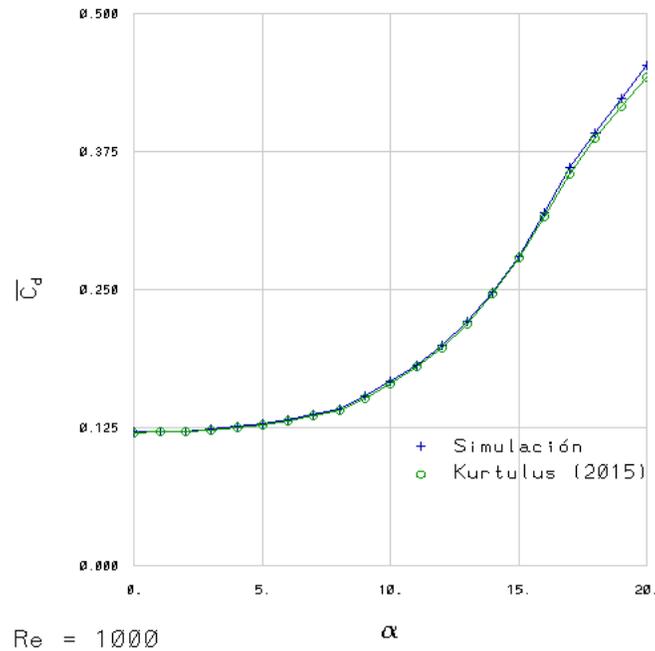


Figura 5.1: Validación de los coeficientes aerodinámicos; caso estático.

5.2. Caso hidrodinámico del flujo sobre un perfil aerodinámico con movimiento de *pitching*.

La comparación para este caso se llevó a cabo con el estudio numérico realizado en (Kurtulus, 2019), donde se oscila el ángulo de ataque geométrico respecto de un ángulo medio con una amplitud de 1° . El número de Reynolds es $Re = 1,000$ y se emplean dos valores de frecuencia: $\omega^* = 4.304$ y $\omega^* = 17.214$. En los casos donde el ángulo medio es distinto de 0° , primero se hace que el perfil adopte su posición inicial y posteriormente se mantiene estático un momento para dar inicio a la oscilación angular. Se efectuaron comparaciones de los coeficientes aerodinámicos para ángulos medios de $\alpha_m = 0^\circ$, $\alpha_m = 11^\circ$ y $\alpha_m = 15^\circ$.

En el primer caso, con $\alpha_m = 0^\circ$ se tiene una comparación favorable en $\omega^* = 4.304$ para el C_l , aunque hay cierta discrepancia en la magnitud del C_d ; si bien es cierto que el comportamiento es el mismo, se tiene un error relativo máximo del 8 %.

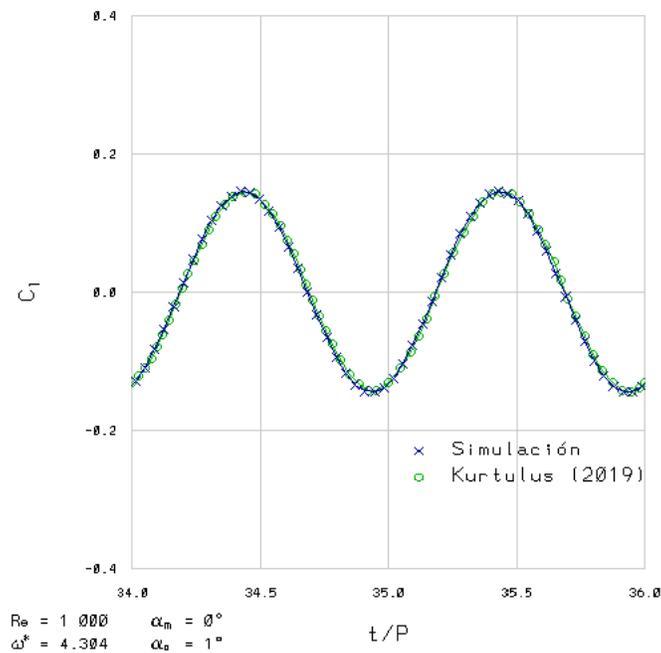


Figura 5.2: Validación del coeficiente de sustentación; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 4.304$.

Cabe mencionar la diferencia entre los métodos numéricos. En el presente trabajo se está empleando el método de elementos espectrales, que es de mayor orden que el de volúmenes de control usado en el artículo de referencia. Para mostrar la consistencia de la solución, primero se empleó un polinomio de interpolación de orden 8, al que siguieron los órdenes 10, 12 y 14.

Considerando que la diferencia relativa entre los resultados con 8 GLL y 10 GLL es del 0.1 %, se observa que una vez empleando 10 puntos GLL la solución muestra cambios muy reducidos con respecto al orden de interpolación, pues la variación relativa entre 10 GLL y 12 GLL es apenas del 0.007 %; entre 10 GLL y 14 GLL, es del 0.027 %. Por tal motivo, se emplea este orden de interpolación para efectuar los cálculos, al tiempo que se muestran resultados más exactos de la mano de un método numérico de mayor orden. En lo que respecta a $\omega^* = 17.214$, para el mismo ángulo de ataque, hay un buen acuerdo entre los resultados (figura 5.4).

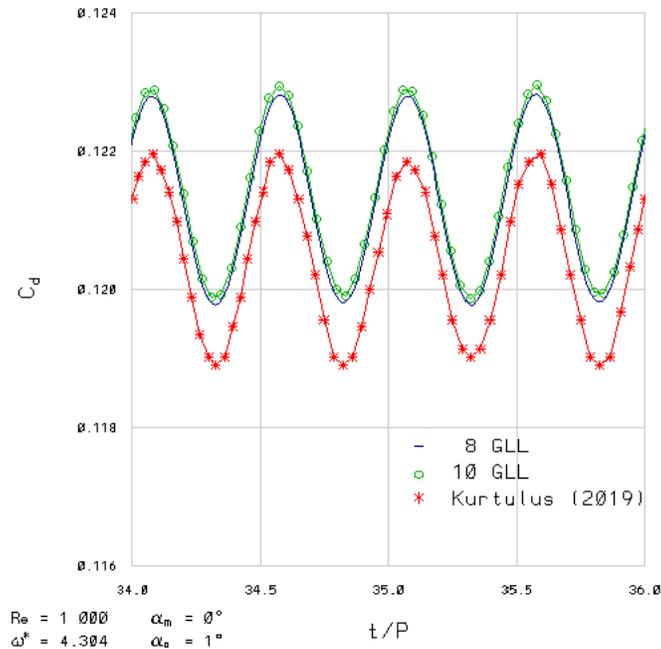


Figura 5.3: Validación del coeficiente de arrastre; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 4.304$.

Con base en los resultados previamente comentados, se emplean 10 GLL para el resto de los casos. Con $\alpha_m = 11^\circ$, como se aprecia en las figuras 5.5 y 5.6, se tiene una comparación favorable para $\omega^* = 4.304$ y aún mejor en $\omega^* = 17.214$. El primer caso observa un error relativo máximo del orden de 7.84 %, que se presenta en la curva del C_l , mientras que el de mayor frecuencia tiene un empalme excelente con los datos de referencia.

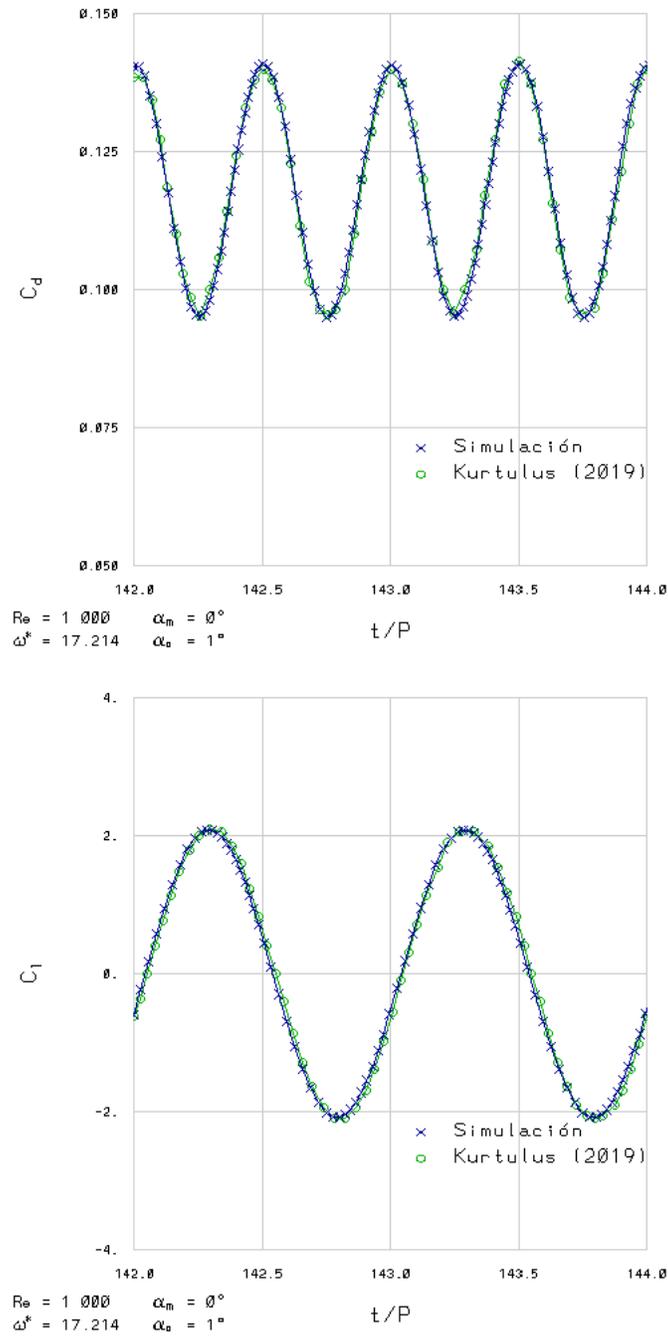


Figura 5.4: Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 17.214$.

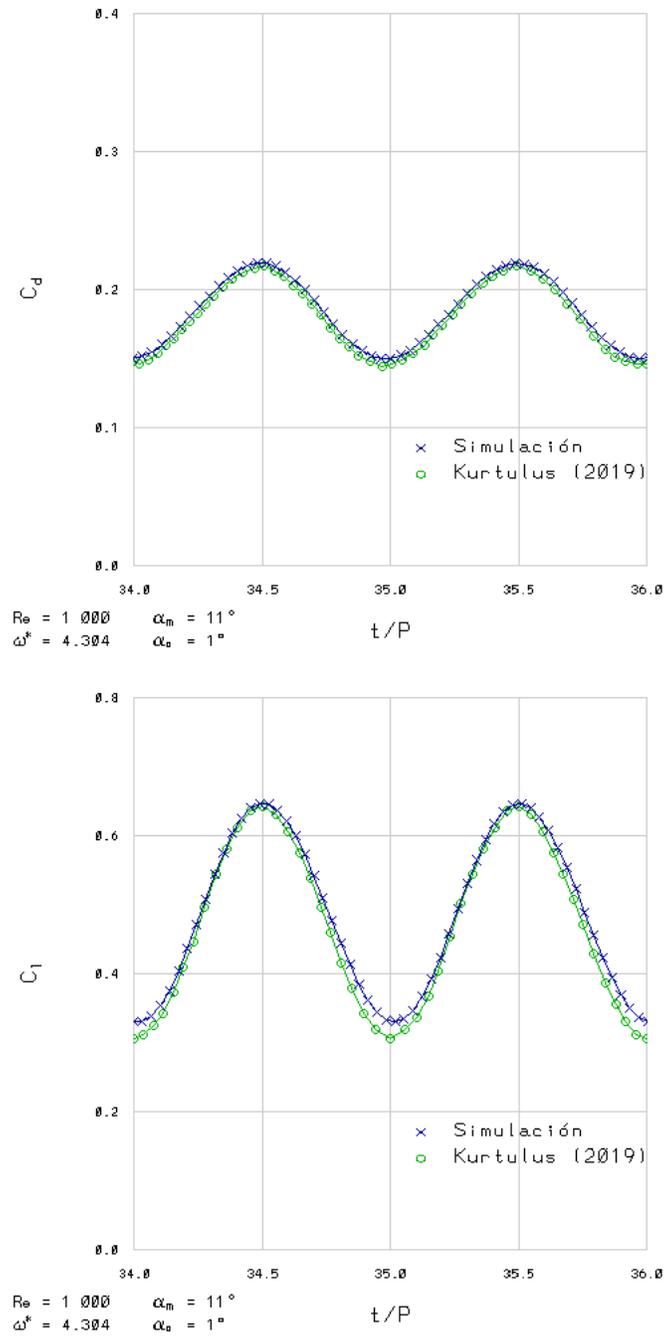


Figura 5.5: Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 11^\circ, \omega^* = 4.304$.

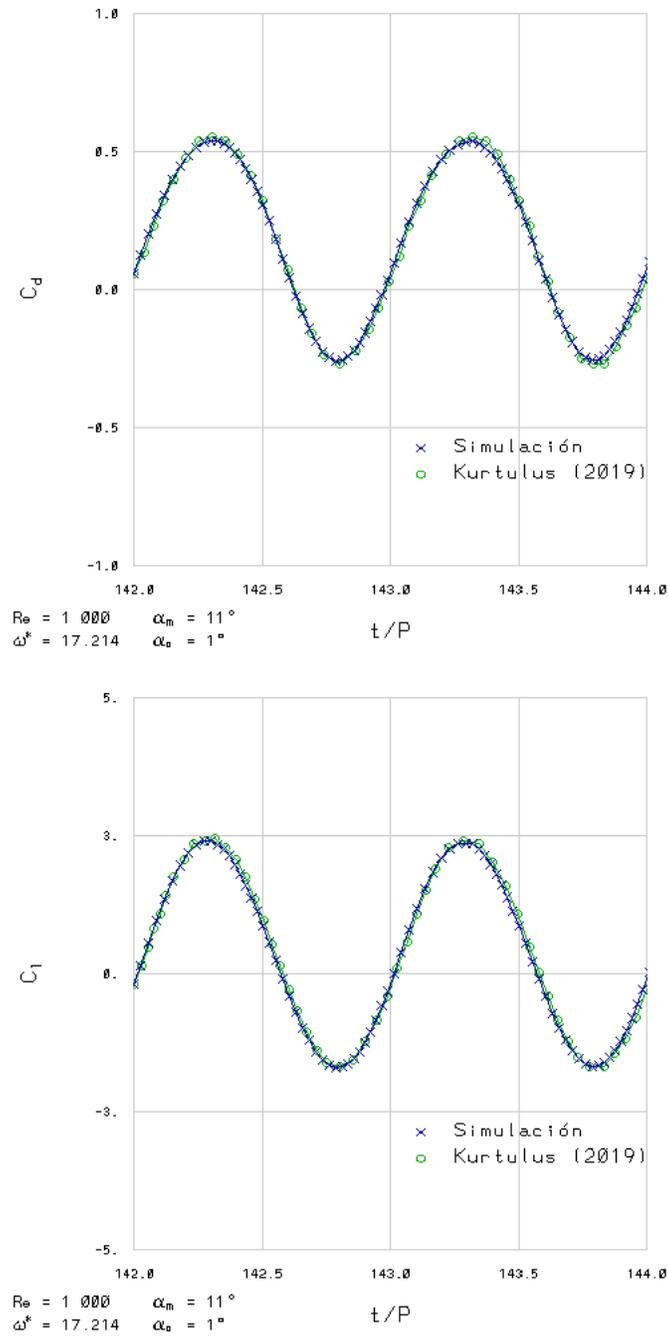


Figura 5.6: Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 11^\circ$, $\omega^* = 17.214$.

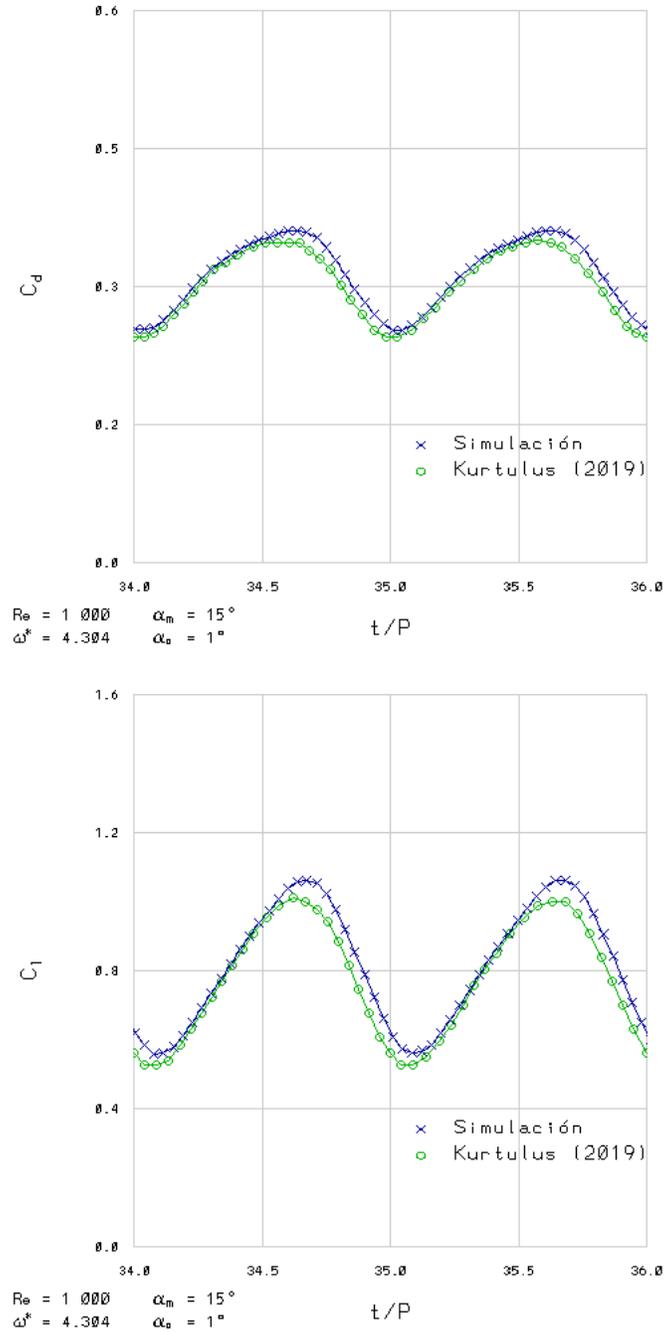


Figura 5.7: Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 4.304$.

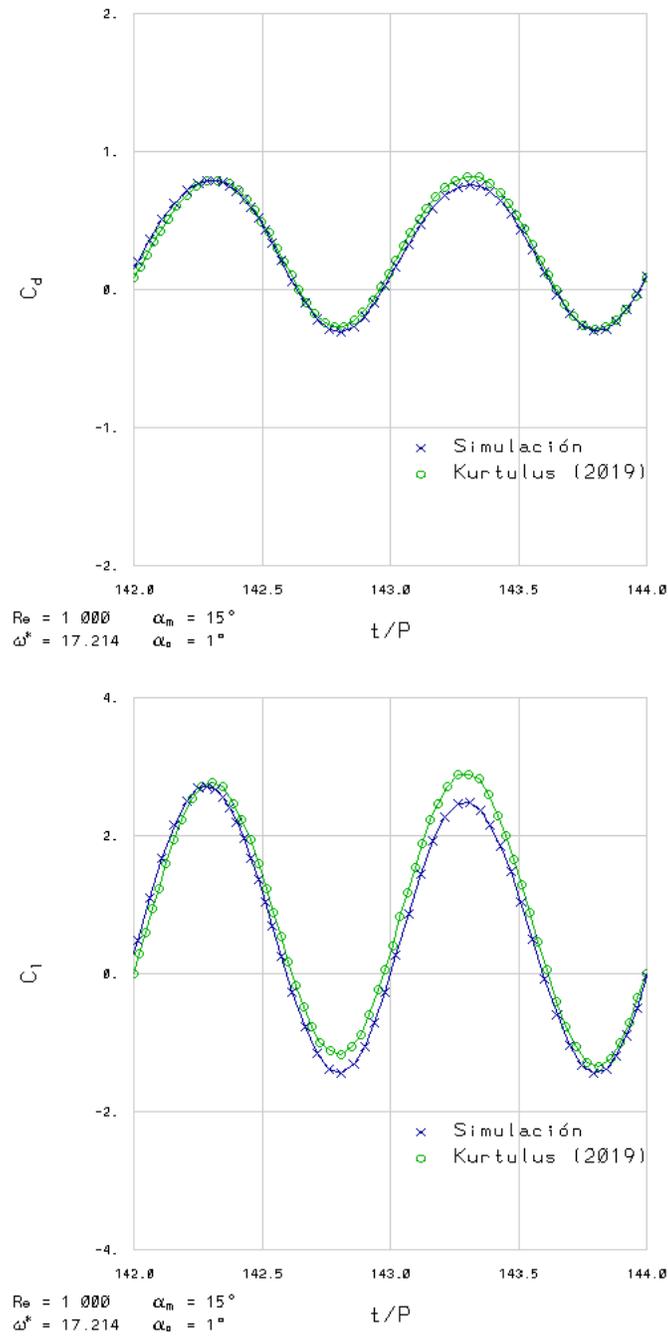


Figura 5.8: Validación de los coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 17.214$.

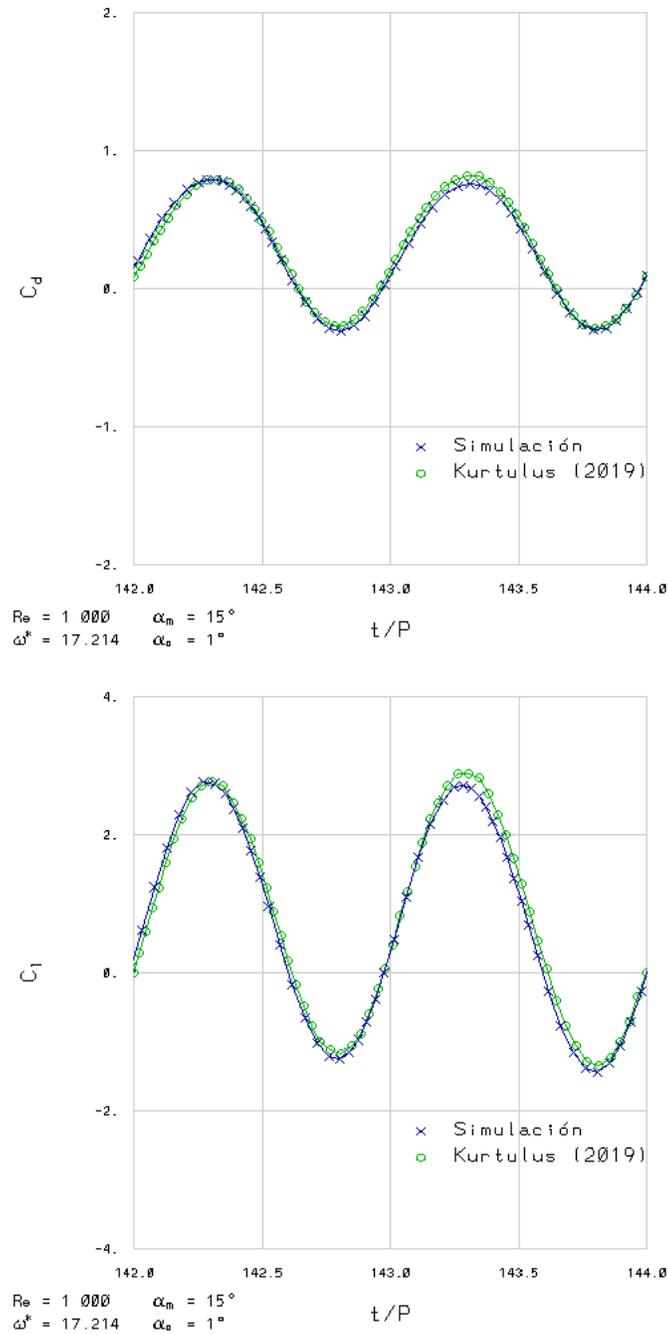


Figura 5.9: Coeficientes aerodinámicos adelantados un periodo en el tiempo; $\alpha_m = 15^\circ, \omega^* = 17.214$.

Finalmente, para $\alpha_m = 15^\circ$, en $\omega^* = 4.304$ se tiene el mismo orden de magnitud y un comportamiento estrechamente similar, aunque hay cierta disensión en la magnitud de valles y crestas tanto para el C_d como para el C_l , así como en el tiempo de los intervalos donde los valores decrecen. El error relativo máximo en el C_d es de 2.85% y en el C_l de 5.24%. Obsérvese la figura 5.7.

Con $\omega^* = 17.214$ el acuerdo del C_d es muy bueno, y aunque en el C_l hay un error relativo máximo del 14% presentado en la segunda cresta de los periodos analizados, el orden de magnitud es el mismo, como se muestra en la figura 5.8. Cabe mencionar que al avanzar un periodo en el tiempo y comparando los resultados el acuerdo se mejora, reduciendo el error relativo máximo en el C_l a un 6% (figura 5.9). Esto podría indicar que en estas condiciones, con un ángulo de ataque geométrico medio más amplio, el flujo resiente en el tiempo la perturbación inicial, donde el perfil se coloca en posición previamente al movimiento oscilatorio, aunque finalmente la evolución de los coeficientes aerodinámicos conserva el orden de magnitud y el comportamiento.

5.3. Caso hidrodinámico del flujo sobre un perfil aerodinámico con movimiento de *plunging*.

Para este caso, se efectuó una comparación con los resultados obtenidos en (Lian y Wei Shyy, 2007) y con los obtenidos por Young, reportados en el mismo artículo a través de la comunicación directa entre autores. También se compara la distribución de vorticidad con un caso experimental reportado en (Lai y Platzer, 1999). La frecuencia asociada a la traslación oscilante es $\omega^* = 7.86$, la amplitud del movimiento es $h_0 = 0.0125$ y el número de Reynolds es $Re = 20 \cdot 10^3$.

Como puede observarse en la figura 5.10, el acuerdo entre los resultados es muy cercano. En el caso del coeficiente de arrastre, se observa incluso más cercanía en los valles de la curva con los resultados de Young que la alcanzada por Lian y Wei Shyy, y aunque las crestas no alcanzan perfectamente el valor reportado por los autores, el acuerdo es muy cercano. Para el coeficiente de sustentación los resultados son prácticamente iguales.

Asimismo, la figura 5.11 muestra una comparación cualitativa con un resultado experimental obtenido por Lai y Platzer. Los vórtices que rotan en sentido horario se identifican con el color rojo, mientras que los que rotan en sentido antihorario se muestran en color verde. En ambos casos la estela se ensancha verticalmente y los vórtices separados se agrupan por pares, alternándose entre el extremo superior y el inferior de la estela.

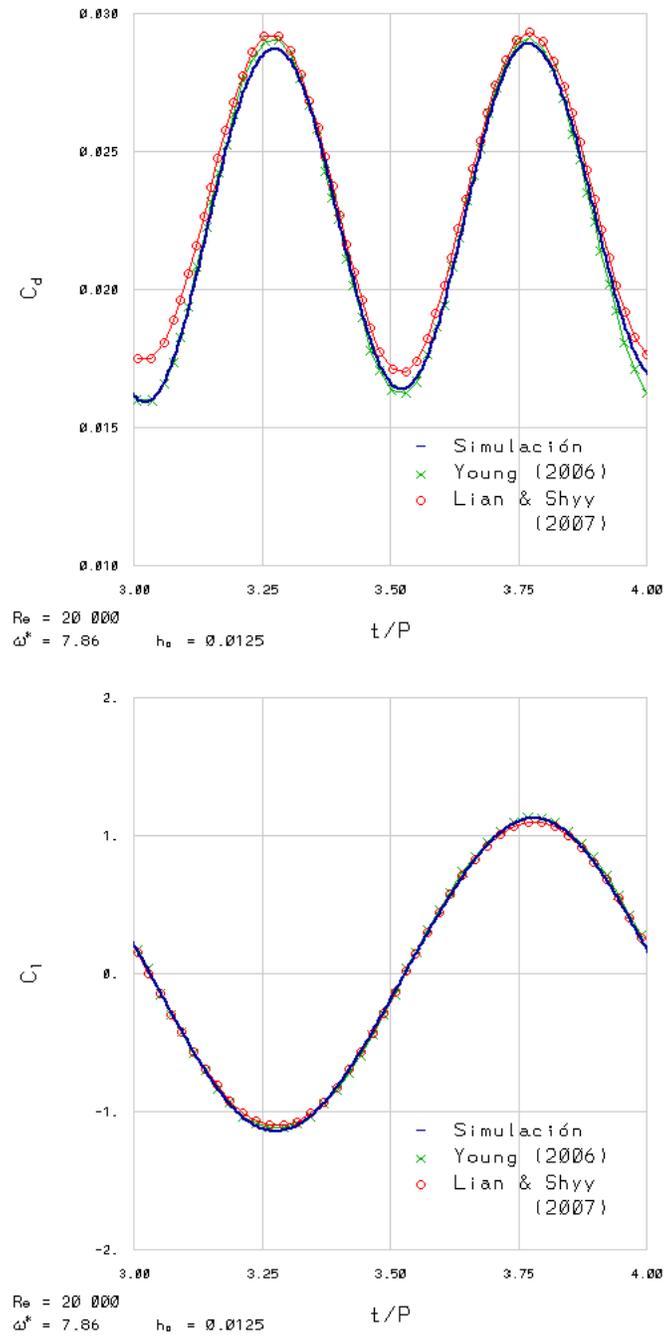


Figura 5.10: Validación de los coeficientes aerodinámicos; caso con *plunging*.

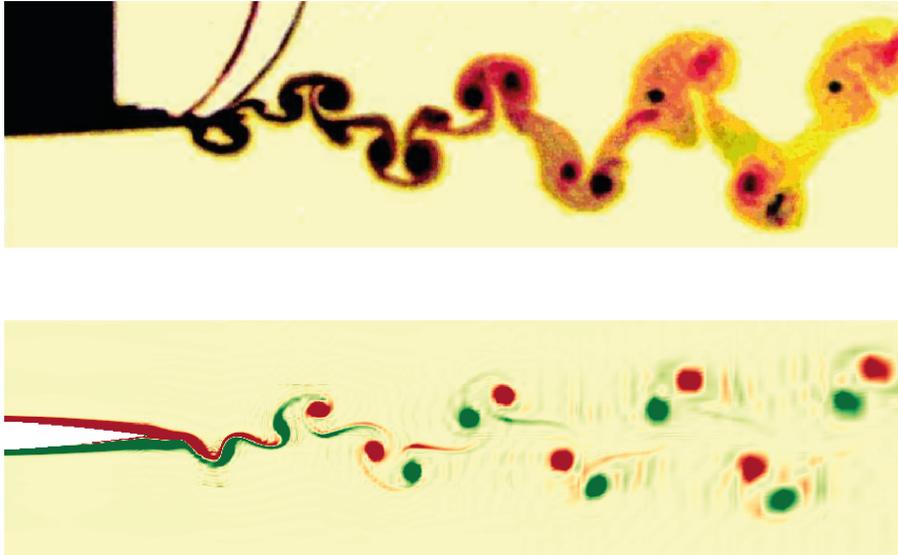


Figura 5.11: Comparación de la distribución de vorticidad. Caso experimental en la posición superior (Lai y Platzler, 1999); en la inferior, la simulación numérica del presente trabajo.

5.4. Validación del flujo de calor sobre una placa plana.

Se efectuó una comparación de resultados numéricos con la teoría de capa límite, en particular, con la solución semianalítica de Blasius para el flujo sobre una placa plana paralela al movimiento del fluido. El caso se configura con un filamento de longitud unitaria con condición de no deslizamiento, donde la temperatura es máxima sobre la geometría y mínima en la corriente libre. El número de Reynolds a la longitud de la placa es $Re_L = 10 \cdot 10^3$.

Para la porción hidrodinámica se tiene que el coeficiente de arrastre promedio, $\overline{C_d}$, es:

$$\overline{C_d} = \frac{1.328}{Re_L^{1/2}}.$$

Se obtuvieron $\overline{C_d}_{simulación} = 0.01328$ y $\overline{C_d}_{Blasius} = 0.01365$, así que se tiene un error relativo del 2.79%.

Para la porción térmica, el espesor de capa límite, δ_T , se calcula con la expresión siguiente:

$$\frac{\delta_T}{x_1} = \frac{\eta_T}{Re_{x_1}^{1/2}}; \quad \eta_T \mid \Theta = 0.99$$

donde η_T es la variable de semejanza asociada a la capa límite térmica, mientras que $\Theta = (T - T_s)/(T_\infty - T_s)$ es la temperatura adimensional, siendo T_s la temperatura de la placa y T_∞ la de la corriente libre; en la solución de Blasius, se propone que $\Theta = \Theta(\eta_T)$. El valor de η_T se toma de manera tal que la diferencia de temperatura entre el flujo y la placa sea el 99% de la diferencia de temperatura entre la corriente libre y la placa. La solución depende del número de Prandtl, que para este caso es $Pr = 0.7$. Una vez que se resuelve numéricamente la ecuación de la energía con la solución de Blasius, se obtiene que cuando $\Theta = 0.99$, $\eta_T = 5.6744$, así que la expresión queda como:

$$\frac{\delta_T}{x_1} = \frac{5.6744}{Re_{x_1}^{1/2}} .$$

El espesor se calcula cada $\frac{1}{10}$ de la placa; en la simulación se identifica en qué posición vertical la temperatura adimensional ha alcanzado el valor de 99% y se comparan resultados. En promedio, el error relativo es de 3.26%. Finalmente, el número de Nusselt en la posición x_1 , Nu_{x_1} , viene dado por:

$$Nu_{x_1} = \frac{h_{x_1} x_1}{k}$$

donde h_{x_1} es el coeficiente convectivo en la posición x_1 y k es la conductividad térmica. A su vez, se tiene que:

$$h_{x_1} = k \left(\frac{u_\infty}{\nu x_1} \right)^{1/2} \left. \frac{d\Theta}{d\eta_T} \right|_{\eta_T=0}$$

siendo ν la viscosidad cinemática. Para obtener el coeficiente convectivo promedio en toda la placa se plantea:

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_{x_1} dx_1$$

obteniendo como resultado:

$$\bar{h}_L = 2 k \left(\frac{u_\infty}{\nu L} \right)^{1/2} \left. \frac{d\Theta}{d\eta_T} \right|_{\eta_T=0} = 2 h_L .$$

Con esto, se tiene para el número de Nusselt promedio

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{k} = \frac{2 h_L L}{k} .$$

Sustituyendo h_L y haciendo las reducciones algebraicas correspondientes, se llega a

$$\overline{Nu}_L = 2 Re_L^{1/2} \left. \frac{d\Theta}{d\eta_T} \right|_{\eta_T=0}$$

y de la solución de Blasius se sabe que $\left. \frac{d\Theta}{d\eta_T} \right|_{\eta_T=0} = 0.29268$. Por lo tanto:

$$\overline{Nu}_L = 0.58536 Re_L^{1/2} .$$

De tal forma, obteniendo $\overline{Nu}_{L_{simulación}} = 58.5360$ y $\overline{Nu}_{L_{Blasius}} = 57.2634$, en este rubro se tiene un error relativo del 2.22%.

5.5. Validación del flujo de calor sobre un perfil aerodinámico en posición fija.

Se compara el número de Nusselt promedio obtenido para un perfil NACA0012 a diferentes números de Reynolds con los resultados numéricos reportados en (Shrestha, 2020). El ángulo de ataque geométrico es nulo. Como se puede observar en la figura 5.12, el acuerdo es sumamente cercano entre los valores de la literatura y los del presente trabajo.

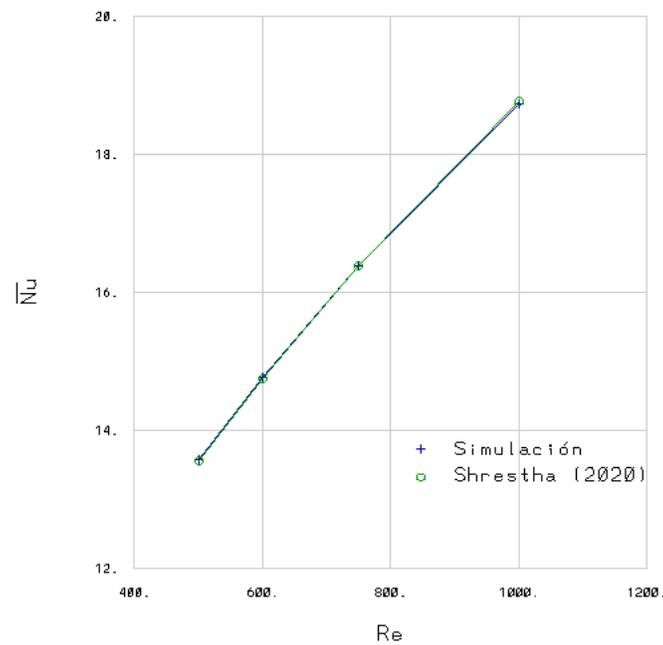


Figura 5.12: Validación del número de Nusselt; caso estático.

Capítulo 6

Resultados

A continuación se describe la influencia del número de Rayleigh sobre los coeficientes aerodinámicos y el número de Nusselt. Al final de cada sección se incluyen mapas con campos de flujo para observar el impacto de los parámetros considerados sobre el movimiento del fluido.

6.1. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico: $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$.

6.1.1. Variación del número de Reynolds; $\alpha_m = 0^\circ$.

En principio se efectuaron varios casos a números de Reynolds muy bajos. El rango de números de Rayleigh es de 0 a 5,000, mientras que el número de Reynolds varía de 30 a 120. El ángulo de ataque medio es $\alpha_m = 0^\circ$.

- $Re = 30$.

En la figura 6.1 puede observarse que el punto de estancamiento cercano al borde de ataque se mueve hacia la superficie superior del perfil con el aumento en el número de Rayleigh. Debido al efecto de la flotación, el fluido a mayor temperatura se desplaza en dirección contraria a la aceleración de la gravedad, lo que modifica el lugar en el que el fluido impacta al perfil. Con un número de Rayleigh de 5,000 la influencia de la flotación es muy alta y se observa la formación de un vórtice largo en la superficie inferior perfil, que circula en sentido contrario a la corriente en esta zona, aproximadamente desde la mitad de la geometría hasta el borde de ataque; al mismo tiempo, se tiene que el fluido circula en sentido contrario en la porción restante, hacia el borde de salida, de manera que el fluido está impactando directa y verticalmente al perfil en la zona inferior.

Con respecto a las fuerzas aerodinámicas, como se muestra en la figura 6.2, el $\overline{C_d}$ casi no observa cambios entre $Ra = 0$ y $Ra = 100$, pues la variación es

Caso con $\alpha_0 = 0^\circ$ y $h_0 = 0$; $\alpha_m = 0^\circ$.					
Re	Ra	$\overline{C_d}$	$\overline{C_l}$	$\overline{C_l}/\overline{C_d}$	\overline{Nu}
30	0	0.880	0.000	0.000	3.811
	100	0.876	-0.147	-0.168	3.809
	500	0.796	-0.703	-0.883	3.761
	1,000	0.585	-1.228	-2.099	3.623
	2,500	0.129	-0.802	-6.217	3.151
	5,000	0.415	0.738	1.778	3.281
60	0	0.578	0.000	0.000	5.156
	100	0.578	-0.029	-0.050	5.156
	500	0.575	-0.145	-0.252	5.152
	1,000	0.564	-0.289	-0.512	5.139
	2,500	0.492	-0.687	-1.396	5.049
	5,000	0.293	-1.113	-3.799	4.740
120	0	0.386	0.000	0.000	7.037
	100	0.386	-0.006	-0.016	7.037
	500	0.386	-0.029	-0.075	7.037
	1,000	0.386	-0.058	-0.150	7.036
	2,500	0.383	-0.145	-0.379	7.029
	5,000	0.372	-0.287	-0.772	7.003

Tabla 6.1: Perfil aerodinámico con $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$ y ángulo de ataque medio $\alpha_m = 0^\circ$. Se varía el número de Reynolds progresivamente entre 30 y 120; para cada caso se tiene un rango de números de Rayleigh entre 0 y 5,000.

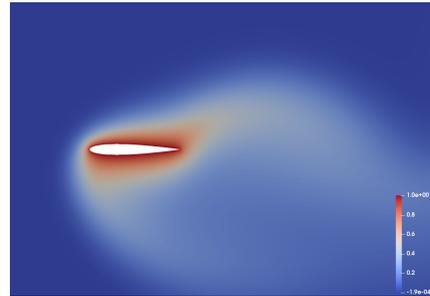
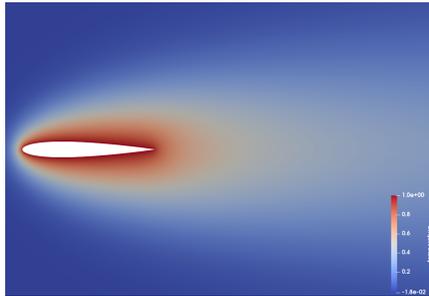
apenas del 0.45%. Cuando $Ra = 500$ el valor decrece de 0.876 a 0.796, y con $Ra = 1,000$ la reducción es más sensible, llegando a 0.585. Para $Ra = 2,500$ se alcanza a un valor mínimo, 0.129, para después incrementar hasta 0.415 en $Ra = 5,000$.

A su vez, como se aprecia en la figura 6.3, el $\overline{C_l}$ observa una reducción sensible hasta llegar a $Ra = 500$, pasando de la sustentación nula a -0.703 ; decrece a -1.228 en $Ra = 1,000$ y después comienza a aumentar hasta $Ra = 5,000$, donde alcanza el valor más alto y se distinguen fluctuaciones en el tiempo, si bien es cierto que ocurren alrededor de un valor medio: 0.738. Este comportamiento llama la atención considerando que el crecimiento en la sustentación es bastante más elevado que el aumento en el arrastre, beneficiándose entonces el desempeño aerodinámico.

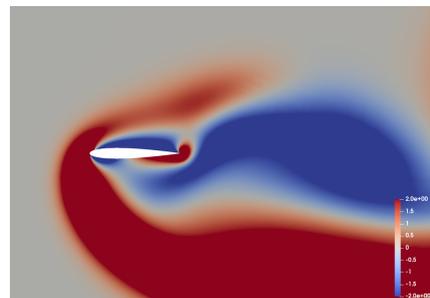
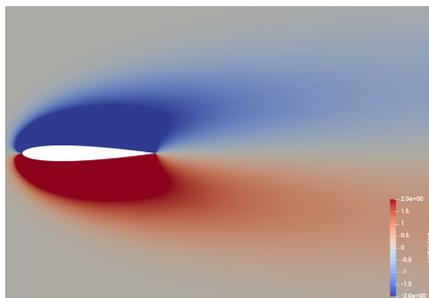
El \overline{Nu} permanece casi sin variaciones hasta $Ra = 500$, donde se reduce en 1.31%. En $Ra = 1,000$ vuelve a reducirse un 1.26% y sigue con la tendencia en $Ra = 2,500$ con otro decremento del 13.03%, para finalmente aumentar 4.13% en $Ra = 5,000$ (figura 6.4).

$Ra = 100.$

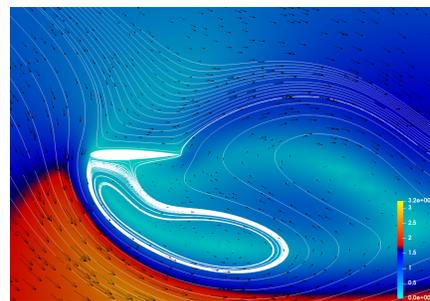
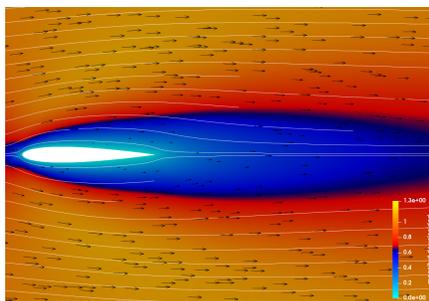
$Ra = 5,000.$



Campo de temperaturas.



Distribución de vorticidad.



Campo de velocidades.

Figura 6.1: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $Re = 30$.

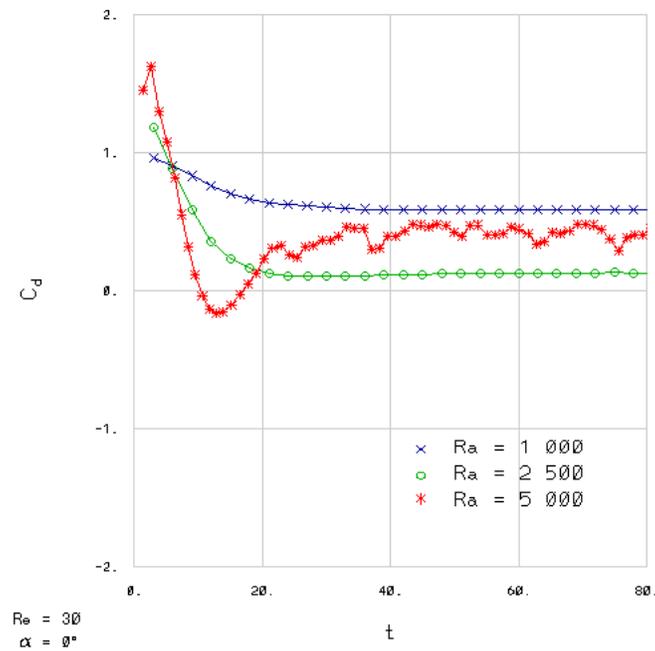
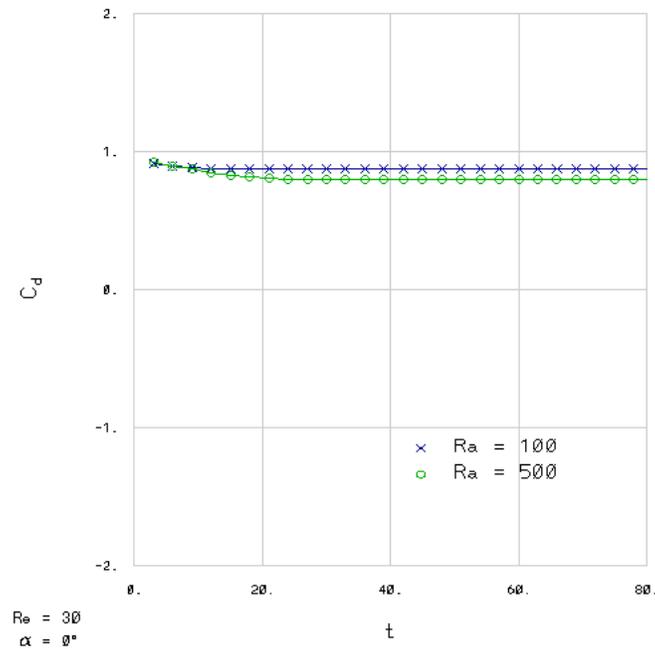


Figura 6.2: Coeficientes de arrastre; $Re = 30$.

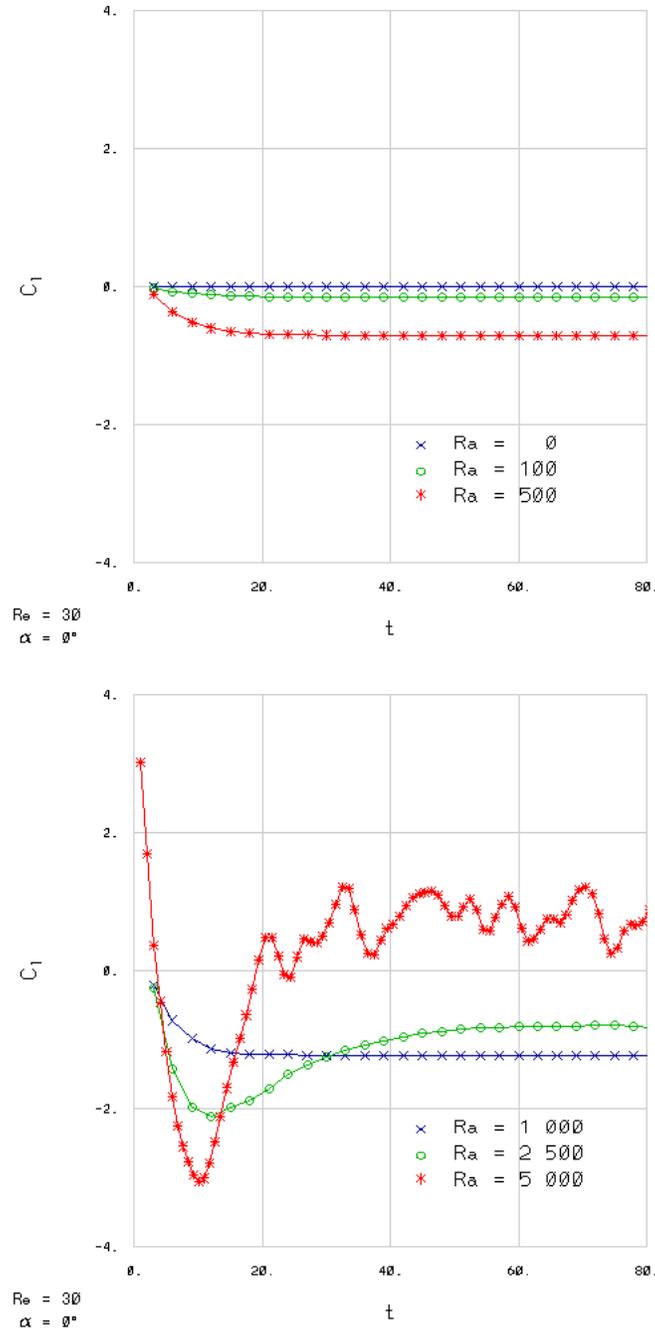


Figura 6.3: Coeficientes de sustentación; $Re = 30$.

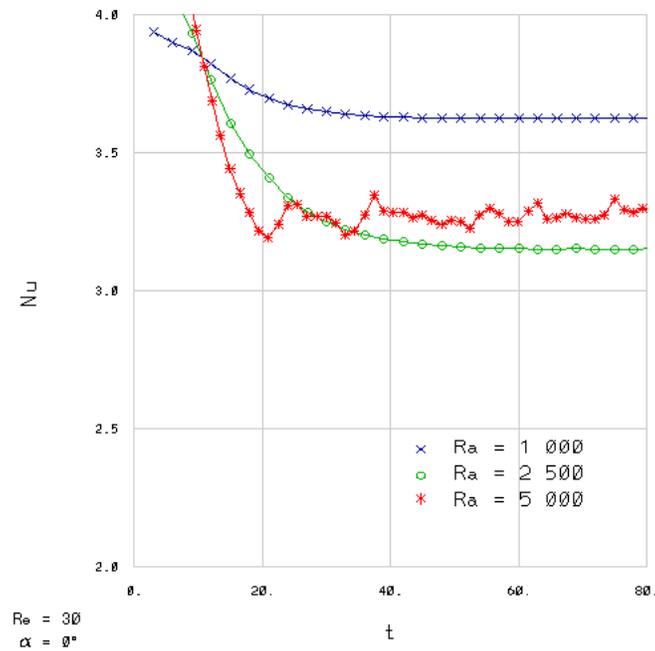
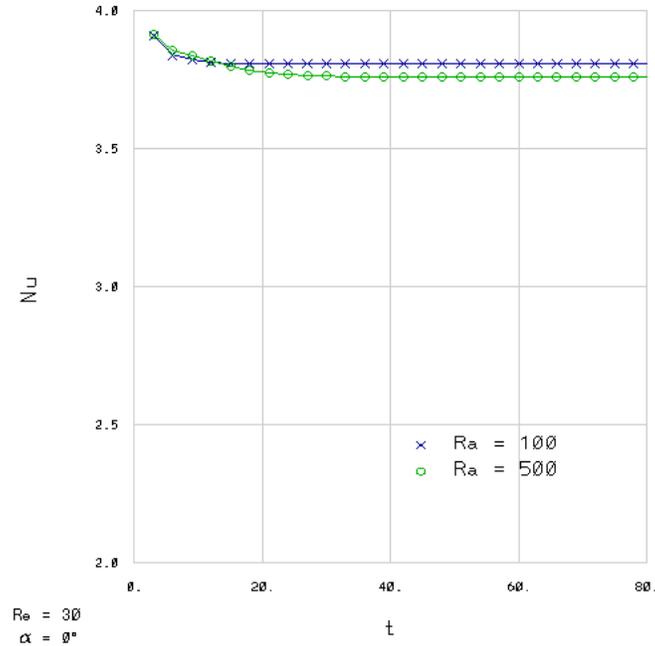


Figura 6.4: Números de Nusselt, $Re = 30$.

- $Re = 60$.

De manera similar al caso anterior, y como puede observarse en la figura 6.6, el punto de estancamiento se desplaza a la superficie superior del perfil cuando incrementa el número de Rayleigh. Nótese que con $Ra = 5,000$ el fluido acelera por debajo de la superficie inferior; las líneas de corriente indican que el flujo se está separando cerca del borde de ataque en la superficie inferior del perfil, generando una zona de baja presión y contribuyendo así al descenso en la sustentación. Para los coeficientes aerodinámicos, así como se muestra en la figura 6.5, el $\overline{C_d}$ se reduce con el aumento de la flotación, aunque a bajos números de Rayleigh las variaciones no exceden del 0.52 % respecto de $\overline{C_d} = 0.578$. En $Ra = 1,000$ se tiene un decremento del 2.43 %; posteriormente, en $Ra = 2,500$ el valor decrece otro 12.77 % y se continúa con este comportamiento en $Ra = 5,000$, con una nueva reducción del 40.45 %, llegando a $\overline{C_d} = 0.293$. Con el $\overline{C_l}$ se presenta un comportamiento similar (figura 6.7), aunque los cambios serán apreciables desde $Ra = 500$, pasando de 0 a -0.145 . Después, el valor disminuye más sensiblemente y la tendencia sigue hasta que se llega a $\overline{C_l} = -1.113$ en $Ra = 5,000$. El \overline{Nu} se mantiene prácticamente invariante con un valor de 5.156, con cambios menores al 0.33 %, hasta $Ra = 2,500$, donde se observa, en la figura 6.8, un decremento del 2.08 %. Se continúa así en $Ra = 5,000$ para llegar a 4.74, esta vez con un cambio del 6 % respecto del valor anterior.

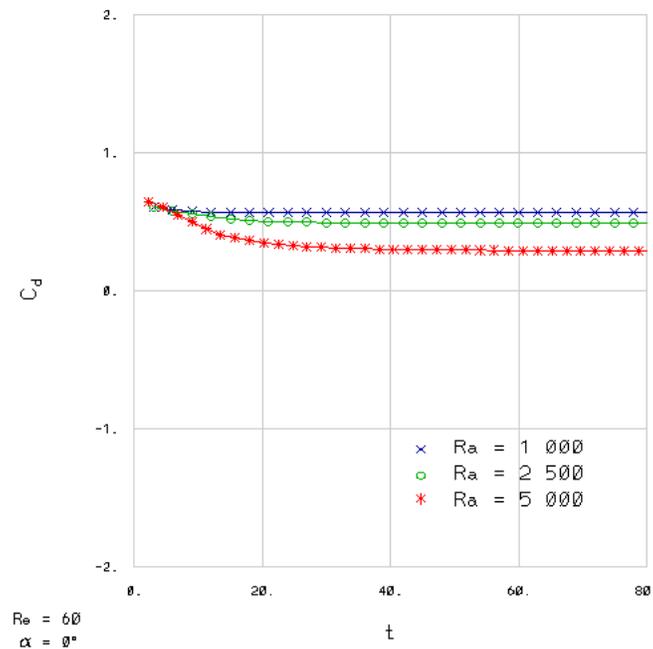
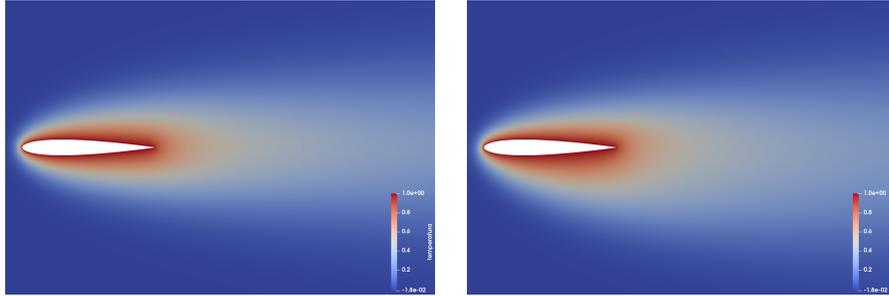


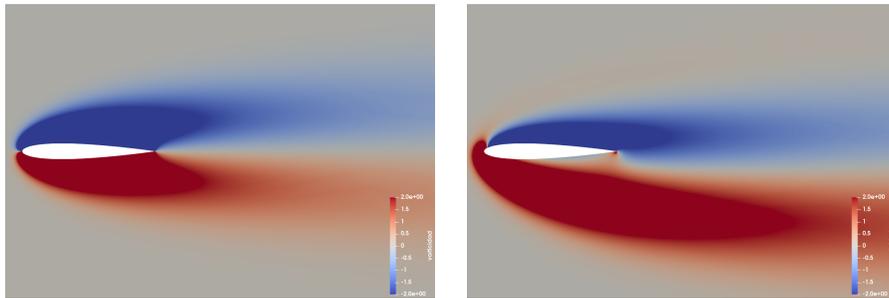
Figura 6.5: Coeficientes de arrastre; $Re = 60$.

$Ra = 100.$

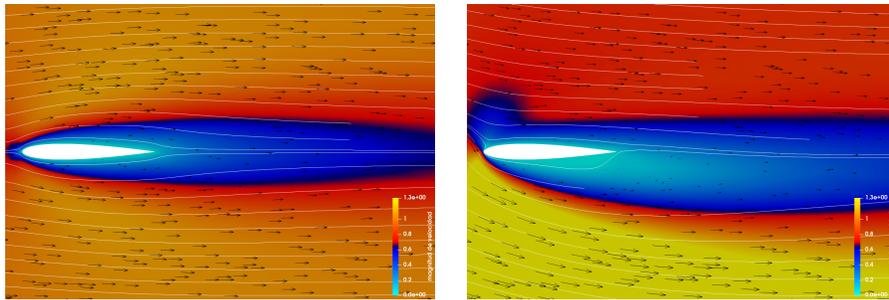
$Ra = 5,000.$



Campo de temperaturas.



Distribución de vorticidad.



Campo de velocidades.

Figura 6.6: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $Re = 60$.

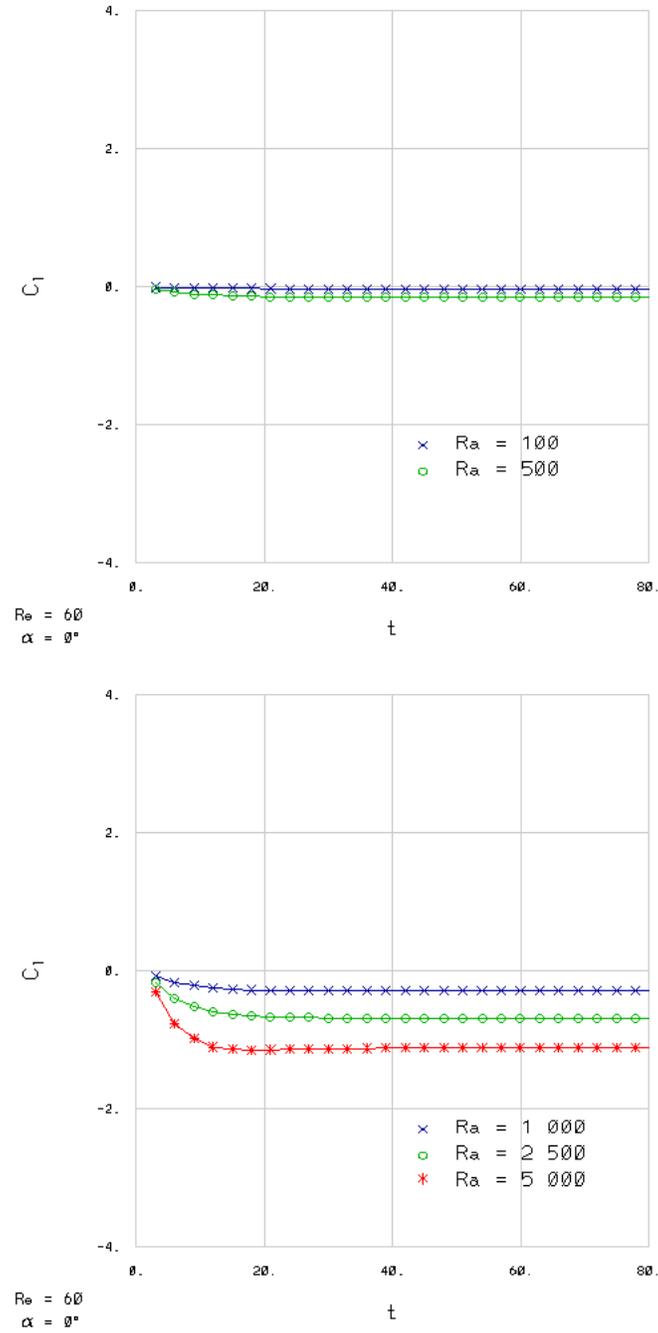
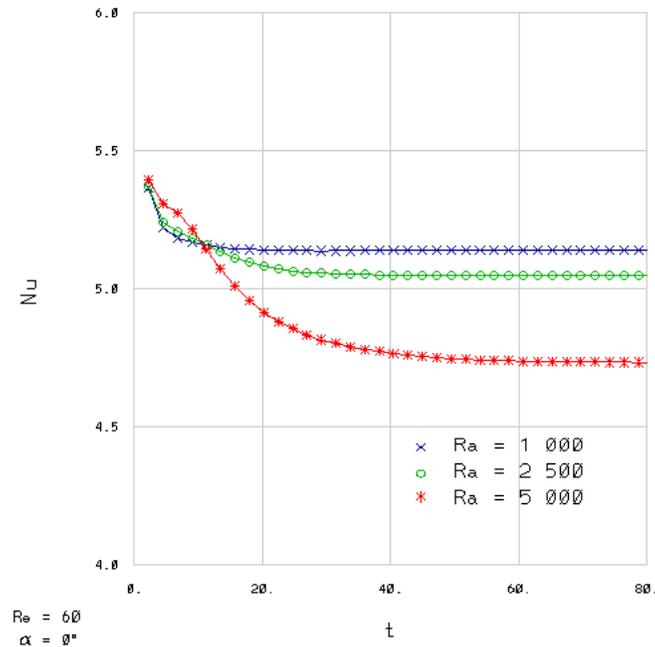


Figura 6.7: Coeficientes de sustentación; $Re = 60$.

Figura 6.8: Números de Nusselt, $Re = 60$.

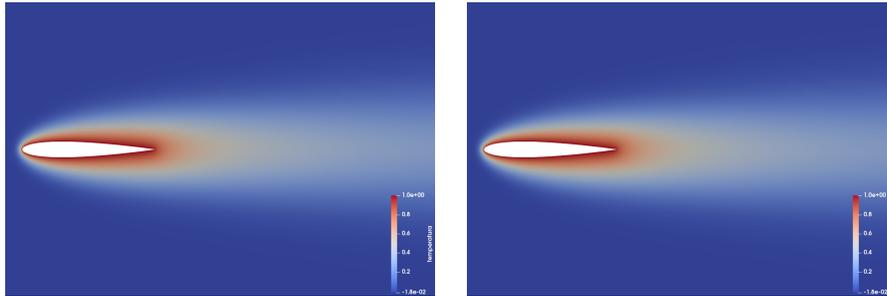
■ $Re = 120$.

En este caso (figura 6.9) también se observa que el fluido se acelera hacia la superficie inferior con el efecto de la flotación, aunque de manera mucho menos notoria; el punto de estancamiento observa la misma tendencia que los casos anteriores, si bien es cierto que de manera más limitada, y de ahí que el desempeño aerodinámico se reduzca más moderadamente.

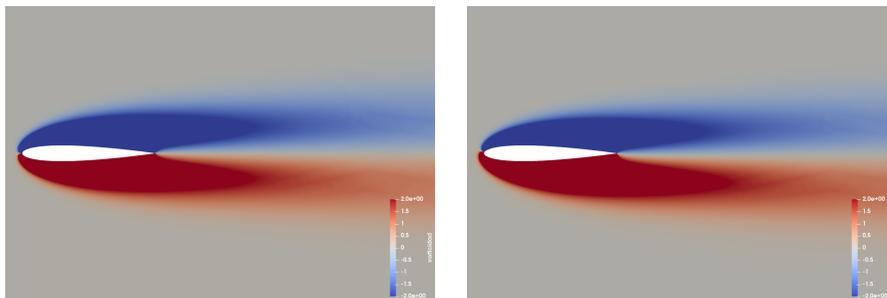
El $\overline{C_d}$ se mantiene sin cambios hasta $Ra = 2,500$, donde la variación es apenas del 0.78%, aunque en $Ra = 5,000$ el decremento es del 3.6% respecto del caso sin flotación (figura 6.10a). El $\overline{C_l}$ observa decrementos limitados: pasa de la sustentación cero a -0.006 en $Ra = 100$ y a -0.029 en $Ra = 500$. A partir de $Ra = 1,000$ (figura 6.10b) los decrementos son gráficamente apreciables hasta llegar a $Ra = 5,000$, donde se tiene que $\overline{C_l} = -0.287$. También el \overline{Nu} se mantiene con variaciones casi nulas; obsérvese que el decremento mayor es solamente del 0.48%, como se muestra en la figura 6.11, ocurriendo en $Ra = 5,000$.

$Ra = 100.$

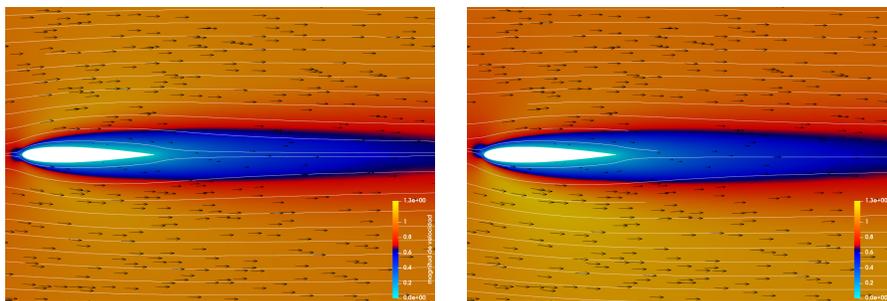
$Ra = 5,000.$



Campo de temperaturas.

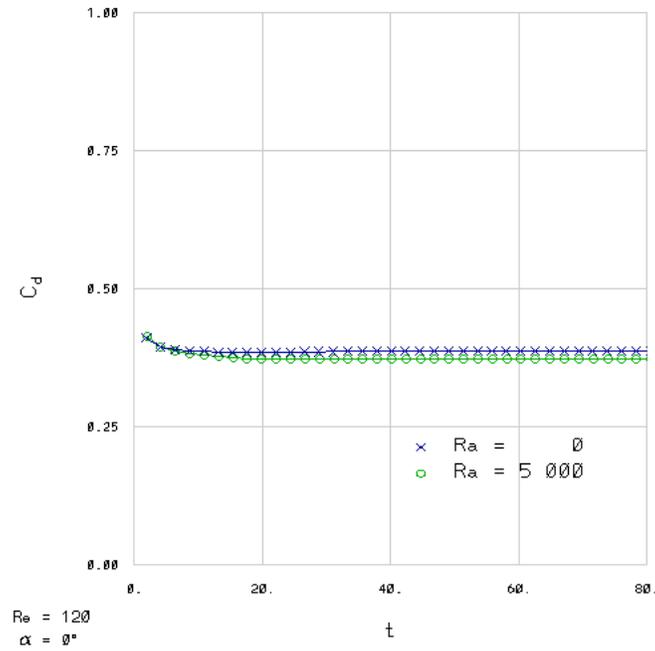


Distribución de vorticidad.

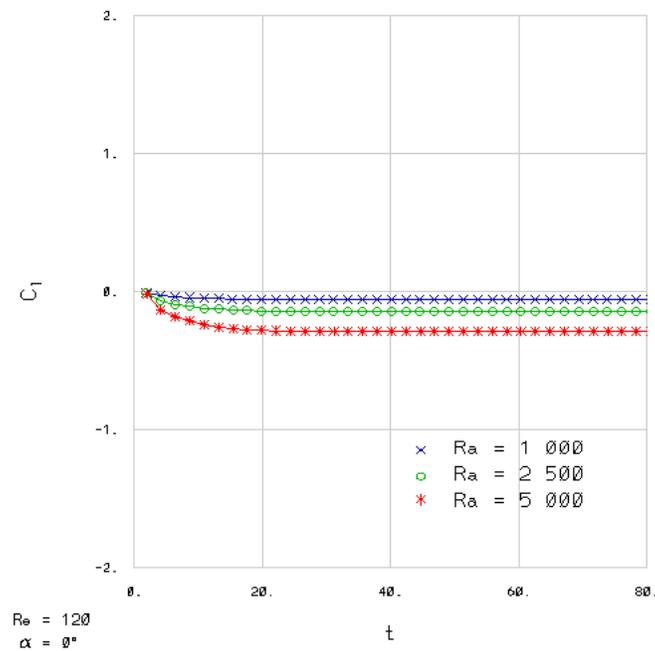


Campo de velocidades.

Figura 6.9: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $Re = 120$.

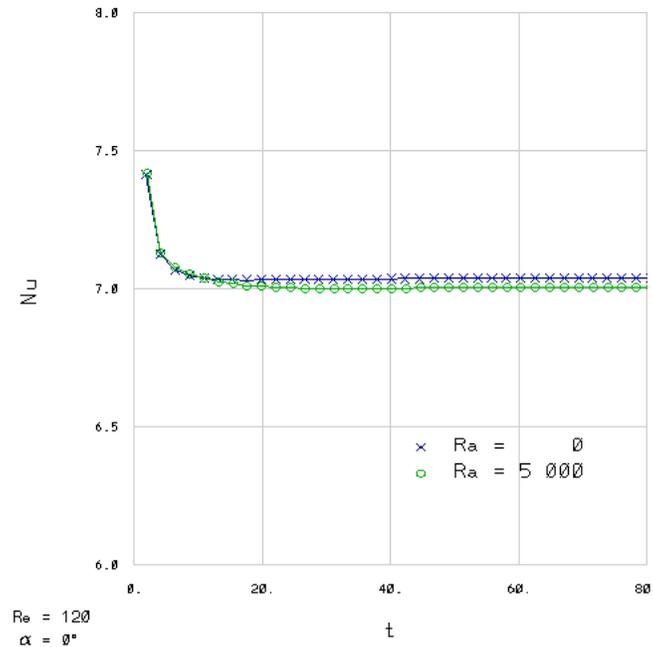


(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.10: Coeficientes aerodinámicos; $Re = 120$.

Figura 6.11: Números de Nusselt, $Re = 120$.

6.1.2. Variación del ángulo de ataque medio; $Re = 1,000$.

Se hace un procedimiento análogo para un número de Reynolds de 1,000. El rango de números de Rayleigh se amplió, partiendo de 1,000 y llegando hasta 1,000,000, tomando en cuenta que la influencia de $Ra = 5,000$ para $Re = 120$ es bastante limitada. Esta vez se varía el ángulo de ataque medio en incrementos de 5° en un intervalo de $0^\circ < \alpha_m < 20^\circ$.

- $\alpha_m = 0^\circ$.

En los campos de flujo (figura 6.12) se muestra que también el punto de estancamiento se desplaza hacia la superficie superior con el aumento del número de Rayleigh. Se observa cómo el flujo lleva más velocidad por debajo del perfil aerodinámico, lo que provoca la caída en la sustentación, además que la estela se deflecta hacia arriba.

Para el $\overline{C_d}$, que se muestra en la figura 6.13a, no se tienen cambios hasta llegar a $Ra = 500 \cdot 10^3$, donde el valor decrece un 5.79%, para continuar con esta tendencia en $Ra = 10^6$ con otra reducción del 16.67%.

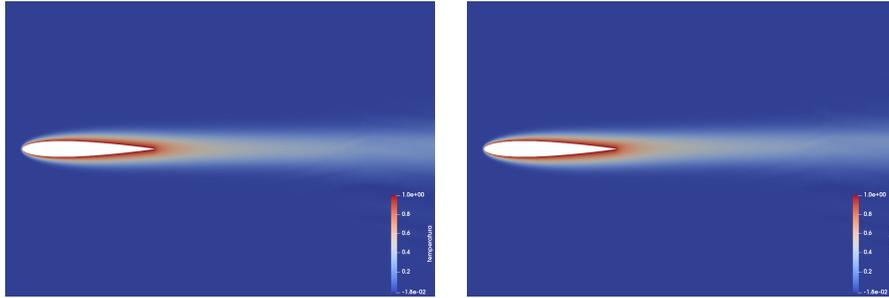
El $\overline{C_l}$ también decrece con el incremento del número de Rayleigh (figura 6.13b), variando de una sustentación nula a -0.021 en $Ra = 50 \cdot 10^3$. La tendencia continúa con variaciones cada vez mayores, llegando hasta -0.421 en $Ra = 10^6$.

Caso con $\alpha_0 = 0^\circ$ y $h_0 = 0$; $Re = 1,000$.					
α_m [°]	Ra	\overline{C}_d	\overline{C}_l	$\overline{C}_l/\overline{C}_d$	\overline{Nu}
0	1,000	0.121	0.000	0.000	18.734
	5,000	0.121	-0.002	-0.017	18.734
	10,000	0.121	-0.004	-0.033	18.734
	50,000	0.121	-0.021	-0.174	18.733
	100,000	0.121	-0.043	-0.355	18.731
	500,000	0.114	-0.215	-1.886	18.644
	1,000,000	0.095	-0.421	-4.432	18.348
5	1,000	0.129	0.251	1.946	18.246
	5,000	0.129	0.249	1.930	18.248
	10,000	0.129	0.247	1.915	18.250
	50,000	0.129	0.230	1.783	18.268
	100,000	0.129	0.209	1.620	18.287
	500,000	0.124	0.034	0.274	18.363
	1,000,000	0.104	-0.193	-1.856	18.277
10	1,000	0.167	0.427	2.557	17.383
	5,000	0.167	0.426	2.551	17.386
	10,000	0.167	0.424	2.539	17.389
	50,000	0.167	0.411	2.461	17.416
	100,000	0.166	0.394	2.373	17.449
	500,000	0.158	0.240	1.519	17.669
	1,000,000	0.139	0.027	0.194	17.813
15	1,000	0.280	0.690	2.464	17.509
	5,000	0.280	0.689	2.461	17.510
	10,000	0.280	0.687	2.454	17.511
	50,000	0.280	0.676	2.414	17.518
	100,000	0.276	0.662	2.399	17.528
	500,000	0.257	0.531	2.066	17.672
	1,000,000	0.232	0.347	1.496	17.915
20	1,000	0.453	0.886	1.956	18.852
	5,000	0.452	0.885	1.958	18.854
	10,000	0.452	0.883	1.954	18.855
	50,000	0.449	0.875	1.949	18.862
	100,000	0.446	0.866	1.942	18.882
	500,000	0.430	0.809	1.881	19.011
	1,000,000	0.404	0.709	1.755	19.197

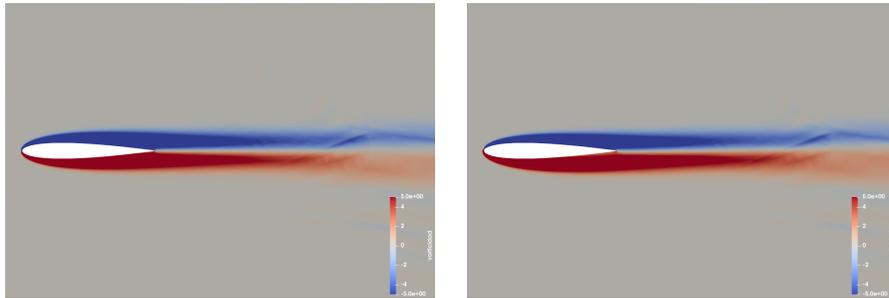
Tabla 6.2: Perfil aerodinámico con $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$ y número de Reynolds $Re = 1,000$. Se varía el ángulo de ataque medio entre 0° y 20° , aumentando 5° entre casos; para cada uno se toma un intervalo de números de Rayleigh entre 1,000 y 1,000,000.

$Ra = 1,000.$

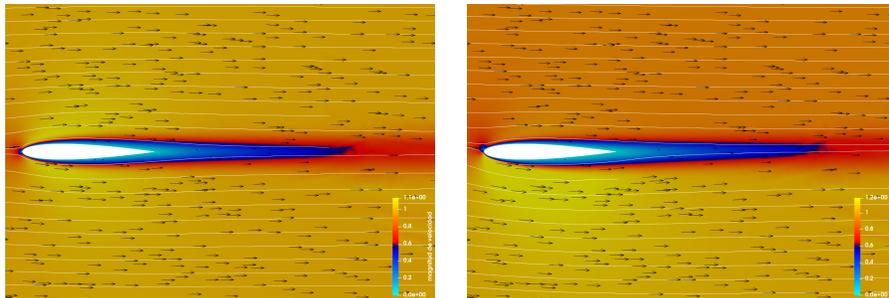
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.

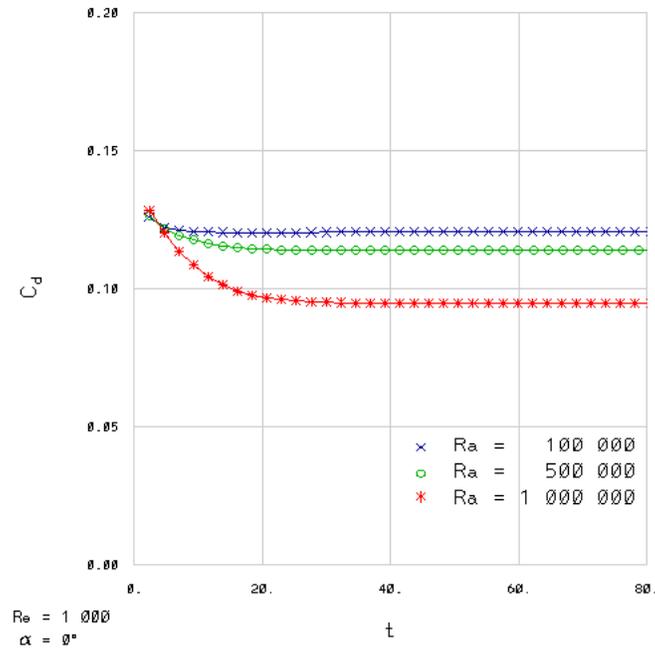


Distribución de vorticidad.

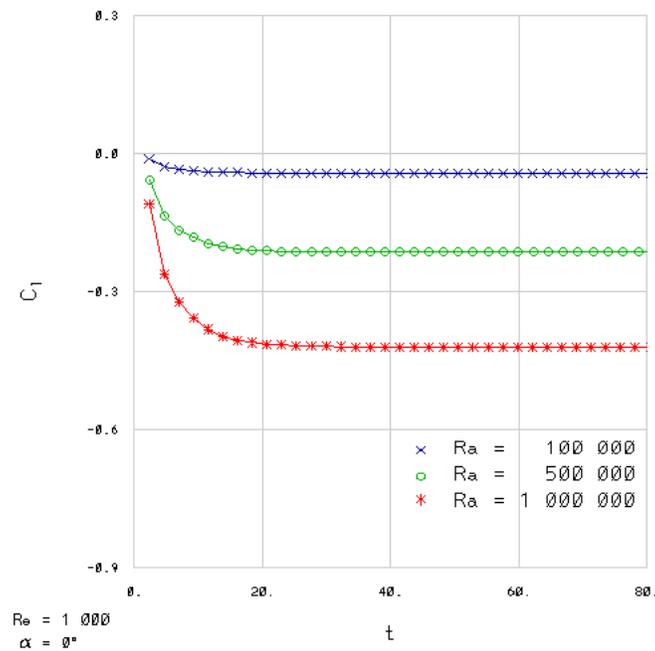


Campo de velocidades.

Figura 6.12: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 0^\circ$.



(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.13: Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ$.

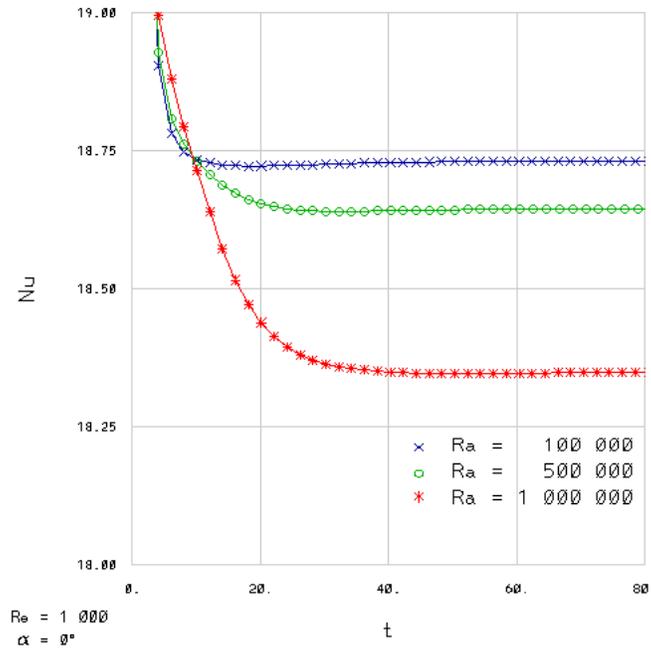


Figura 6.14: Números de Nusselt; $\alpha_m = 0^\circ$.

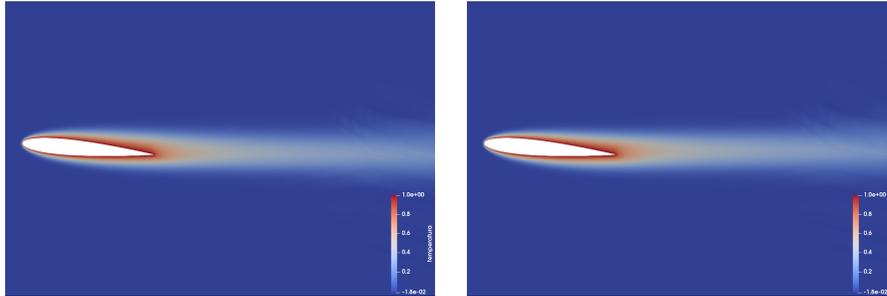
En lo que concierne al \overline{Nu} (figura 6.14), este se mantiene casi invariante (los cambios son menores del 0.02 %) hasta el caso con $Ra = 500 \cdot 10^3$, donde su valor decrece de 18.734 a 18.644, manteniéndose este comportamiento en $Ra = 10^6$, con una reducción del 2 % para llegar a 18.348.

■ $\alpha_m = 5^\circ$.

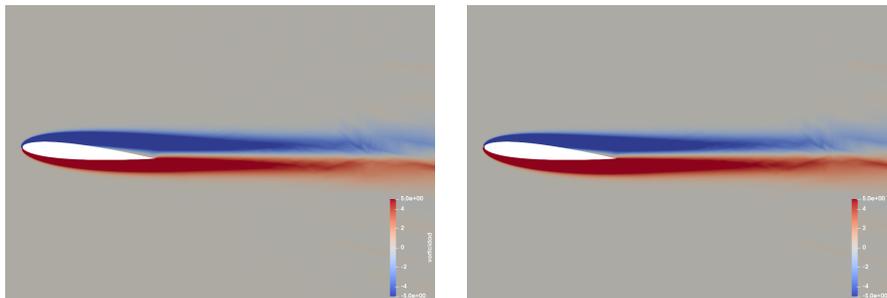
En este caso, como se muestra en la figura 6.15, el punto de estancamiento se desplaza de la superficie inferior al borde de ataque con el incremento del número de Rayleigh. El efecto sobre la velocidad es similar al caso anterior, pues el flujo se acelera hacia la superficie inferior, además que la estela se deflecta verticalmente. En el comportamiento del $\overline{C_d}$, nuevamente no hay cambios hasta $Ra = 500 \cdot 10^3$ y la tendencia es decreciente, aunque ahora la reducción del arrastre es del 3.87 %, a la vez que en $Ra = 10^6$ merma un 16.13 % más. En cuanto al $\overline{C_l}$, se tiene que la variación con respecto al Ra es más sensible: en $Ra = 100 \cdot 10^3$ disminuye en 16.73 %, para $Ra = 500 \cdot 10^3$ el valor es casi nulo con $\overline{C_l} = 0.034$ y en $Ra = 10^6$ incluso cambia el sentido de la sustentación, llegando a -0.193 . Obsérvese la figura 6.16. Para el \overline{Nu} , mostrado en la figura 6.17, se tiene que su valor va incrementando ligeramente desde 18.246 hasta observar un aumento del 0.6 % en $Ra = 500 \cdot 10^3$, tendencia que se invierte en $Ra = 10^6$, donde decrece y llega a un valor de 18.277, muy cercano al del caso con $Ra = 100 \cdot 10^3$, donde $\overline{Nu} = 18.287$.

$Ra = 1,000.$

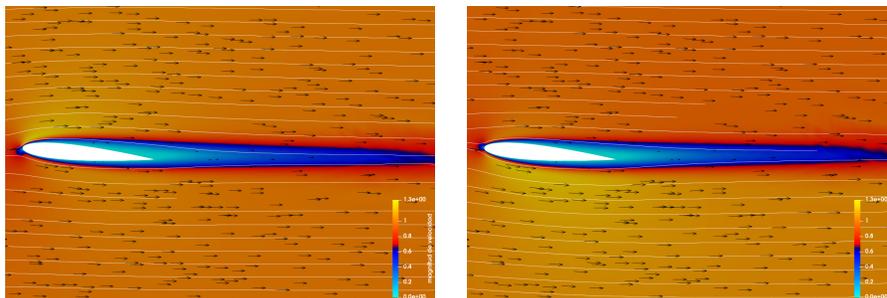
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.

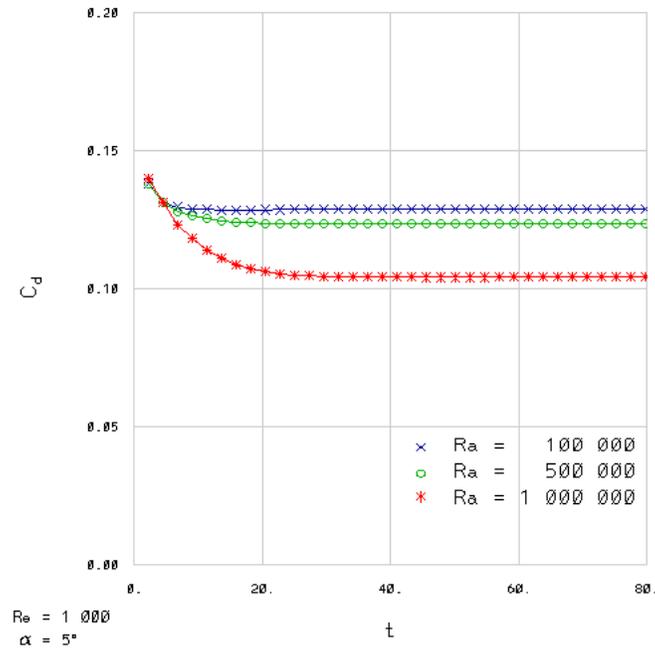


Distribución de vorticidad.

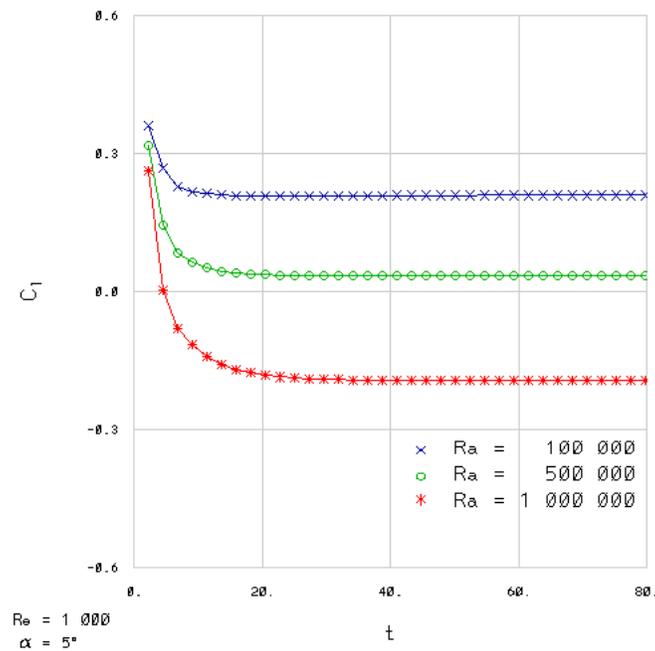


Campo de velocidades.

Figura 6.15: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 5^\circ$.



(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.16: Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 5^\circ$.

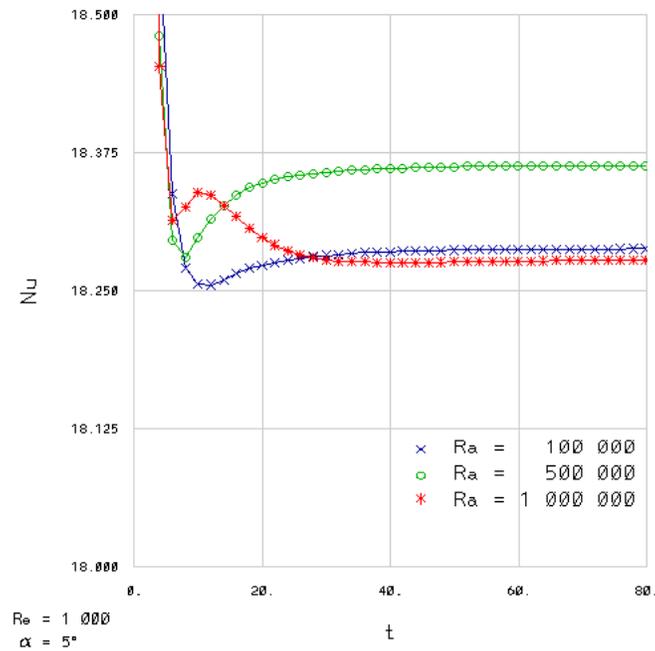
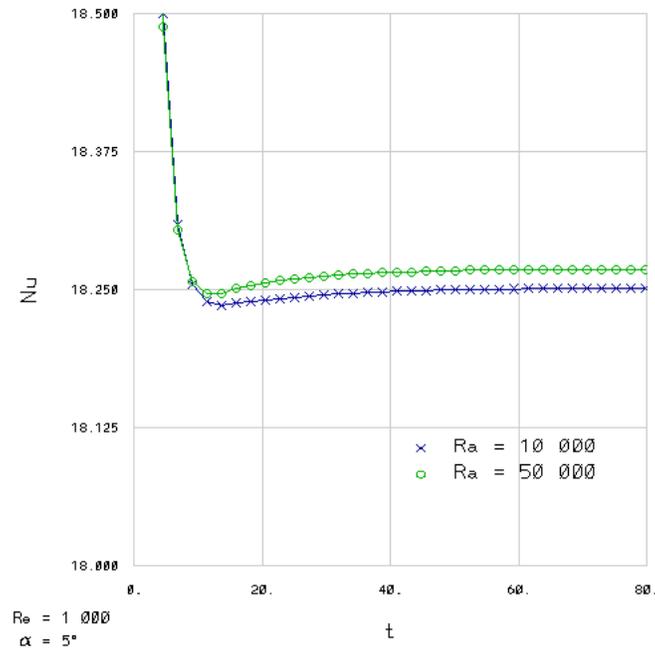
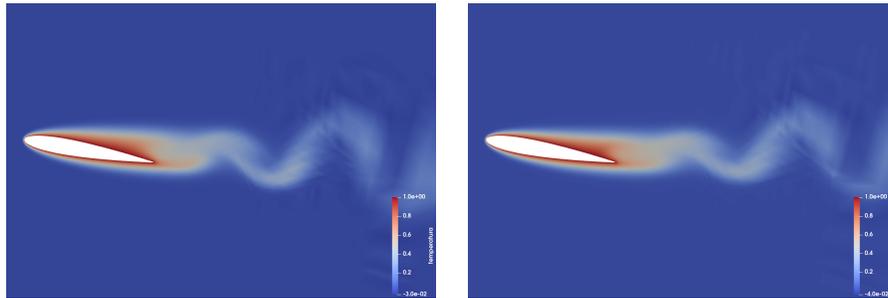


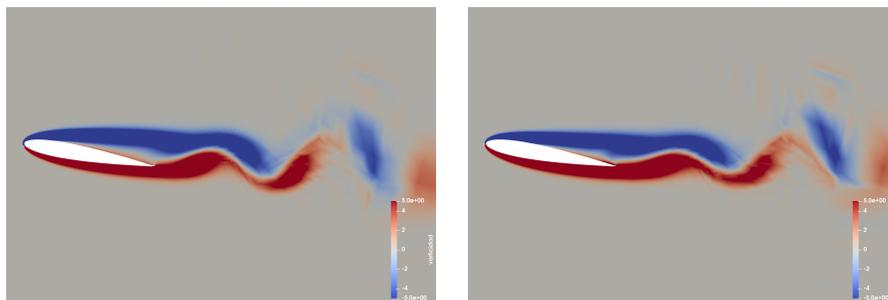
Figura 6.17: Números de Nusselt; $\alpha_m = 5^\circ$.

$Ra = 1,000.$

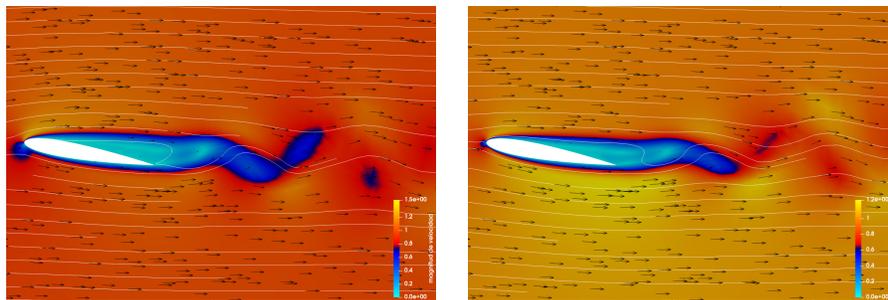
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.



Distribución de vorticidad.



Campo de velocidades.

Figura 6.19: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 10^\circ$.

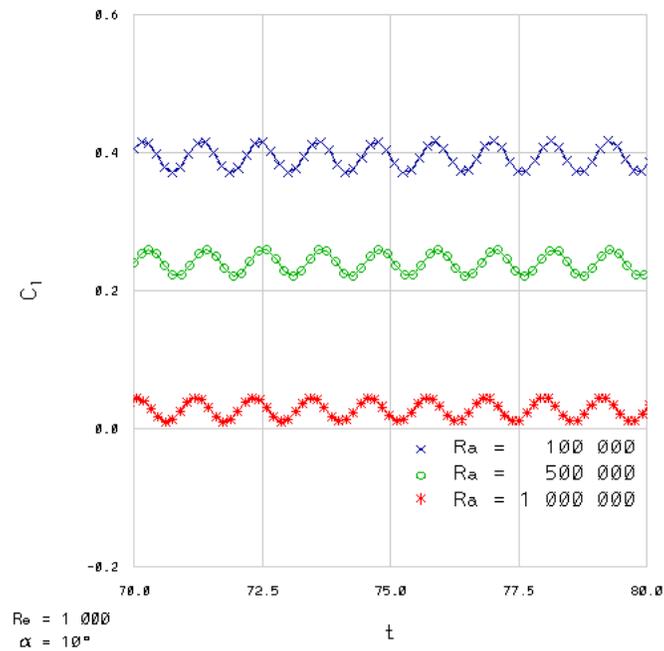
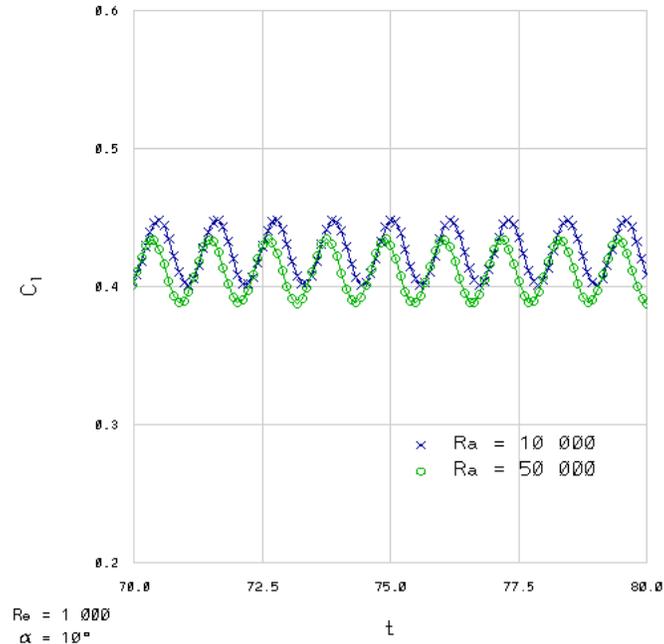


Figura 6.20: Coeficientes de sustentación; $\alpha_m = 10^\circ$.

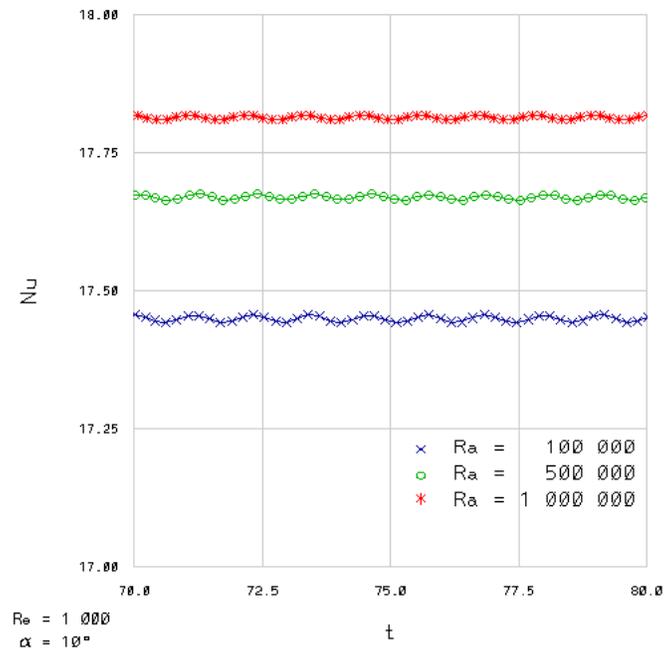
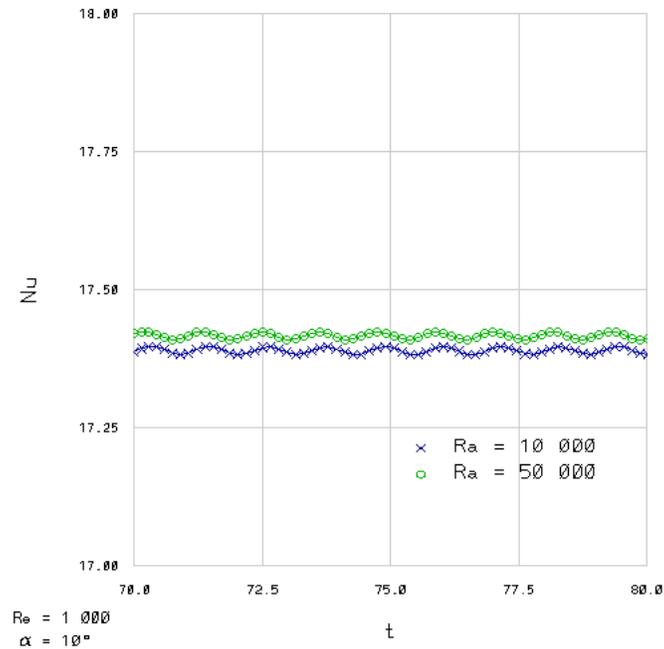


Figura 6.21: Números de Nusselt; $\alpha_m = 10^\circ$.

Con respecto al Nu , como se observa en la figura 6.21, se tiene un aumento paulatino, aunque limitado, de su valor medio; a partir de $Ra = 100 \cdot 10^3$ los incrementos son de mayor magnitud. El cambio entre el caso con $Ra = 1,000$ y aquel con $Ra = 10^6$ es del 2.47 %.

- $\alpha_m = 15^\circ$.

Nuevamente, como se puede observar en la figura 6.22, el punto de estancamiento se mantiene en la superficie inferior, pero sigue desplazándose hacia el borde de ataque cuando incrementa el número de Rayleigh. La separación sobre la superficie superior es más amplia con el bajo número de Rayleigh, mientras que cuando aumenta la flotación el flujo separado es más próximo al perfil.

Parecido al caso anterior, el comportamiento oscilatorio del C_d empieza a modificarse con un ligero desfase a partir de $Ra = 50 \cdot 10^3$, aunque no se tienen cambios en el valor medio, como se observa en la figura 6.23. Posteriormente el $\overline{C_d}$ decrece con el incremento de la flotación, primero en un 1.43 % cuando $Ra = 100 \cdot 10^3$; después, se reduce 6.66 % más y, finalmente, sigue la tendencia con otra reducción del 9.73 %. Una diferencia notable respecto del caso con ángulo de ataque medio de 10° es que la oscilación ya no muestra un comportamiento sinusoidal, pues ahora las crestas se muestran más estrechas.

El C_l por su lado muestra, en la figura 6.24, un comportamiento análogo al previamente descrito, aunque en $Ra = 50 \cdot 10^3$ el valor promedio decrece en un 2.03 % respecto del caso con menor número de Rayleigh y se observa otra reducción del mismo orden de magnitud en $Ra = 100 \cdot 10^3$. Posteriormente se sigue la tendencia decreciente, aunque la variación es mayor: 19.79 % para $Ra = 500 \cdot 10^3$ y 34.65 % en $Ra = 10^6$.

En este caso es cuando el Nu comienza a presentar un comportamiento oscilatorio (figura 6.25). Hasta $Ra = 50 \cdot 10^3$ se mantiene prácticamente el mismo valor medio, pues las variaciones no pasan del 0.05 %, aunque se presenta un ligero desfase. En los siguientes números de Rayleigh, la magnitud media incrementa ligeramente, alcanzando un crecimiento del 2.22 % en $Ra = 10^6$ respecto del caso con $Ra = 50 \cdot 10^3$.

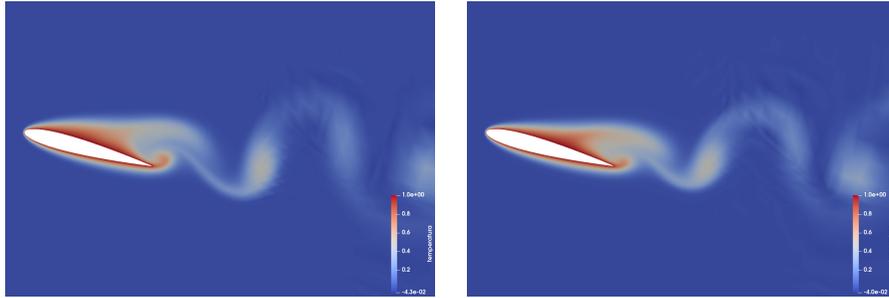
- $\alpha_m = 20^\circ$.

Para este ángulo de ataque se observa una separación de flujo más grande y vórtices más pronunciados (figura 6.26). Nuevamente, con el aumento de la flotación el punto de estancamiento se mueve hacia el borde de ataque. La reducción en la separación del flujo con $Ra = 10^6$ en este caso y el anterior puede explicar el retraso de la pérdida de sustentación en ángulos de ataque altos, al reducirse el arrastre en una proporción mayor que la sustentación.

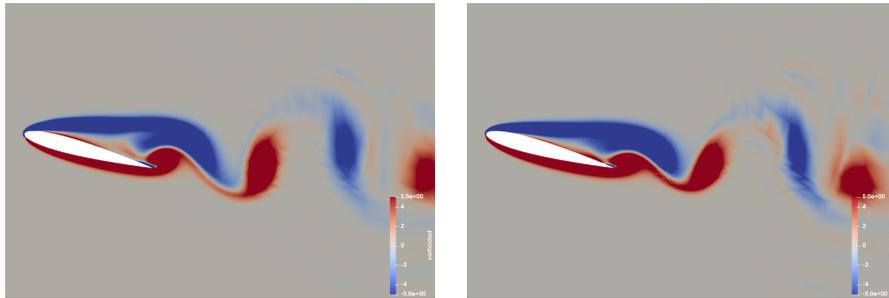
Para el C_d , se observa en la figura 6.27 un comportamiento periódico donde se identifican dos crestas y un valle. Este permanece casi invariante hasta $Ra = 50 \cdot 10^3$, con cambios menores al 0.90 % en el valor medio. En $Ra = 100 \cdot 10^3$ el promedio decrece 1.55 %, al tiempo que la segunda cresta va reduciéndose de manera paulatina, incluso ya sin cambio de concavidad en $Ra = 10^6$, donde el promedio se ha reducido 10.82 % respecto del caso con la flotación más débil.

$Ra = 1,000.$

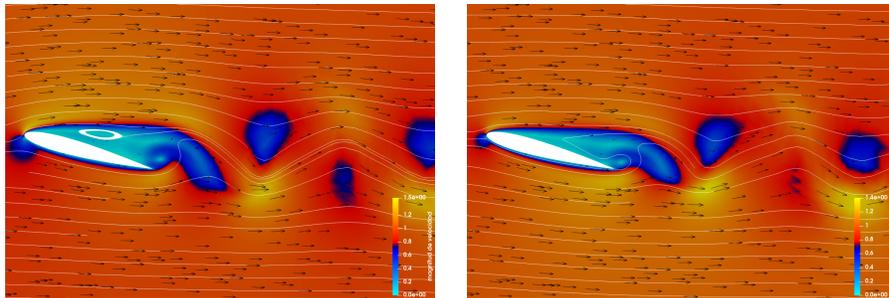
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.



Distribución de vorticidad.



Campo de velocidades.

Figura 6.22: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 15^\circ$.

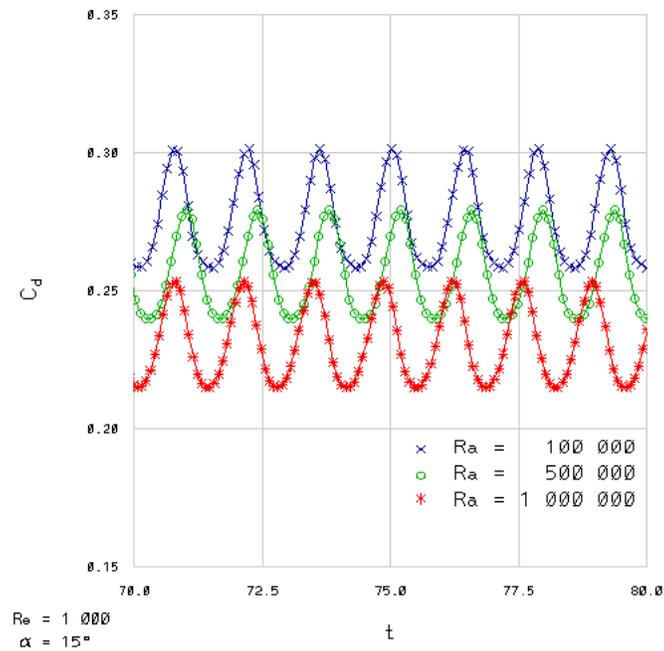
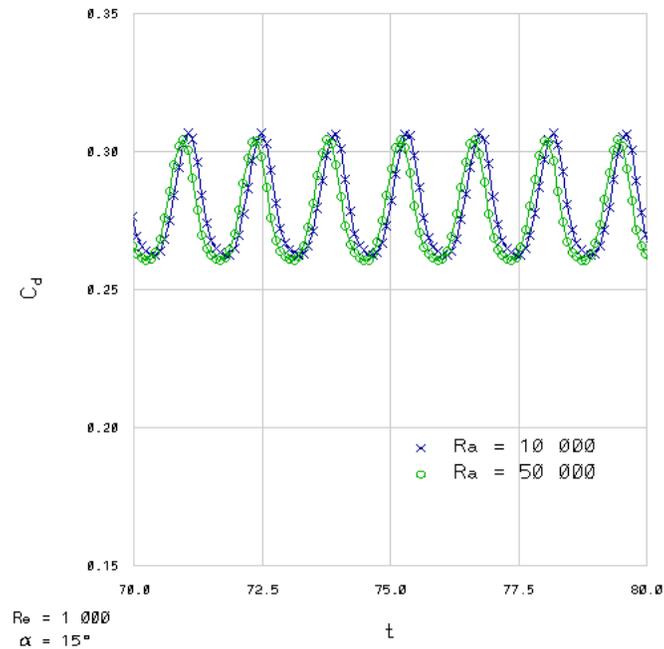


Figura 6.23: Coeficientes de arrastre; $\alpha_m = 15^\circ$.

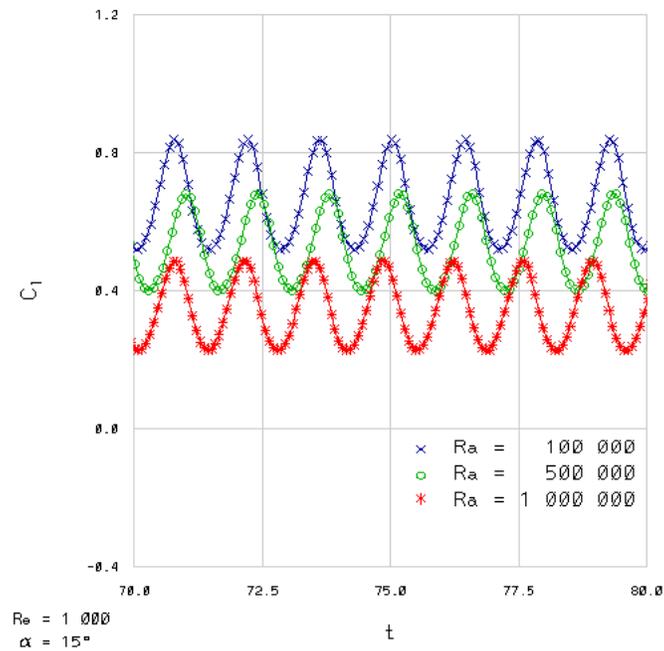
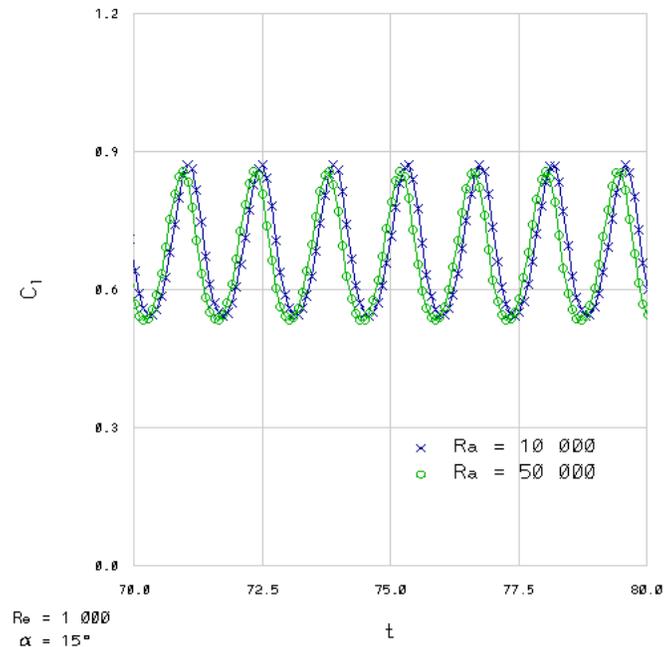


Figura 6.24: Coeficientes de sustentación; $\alpha_m = 15^\circ$.

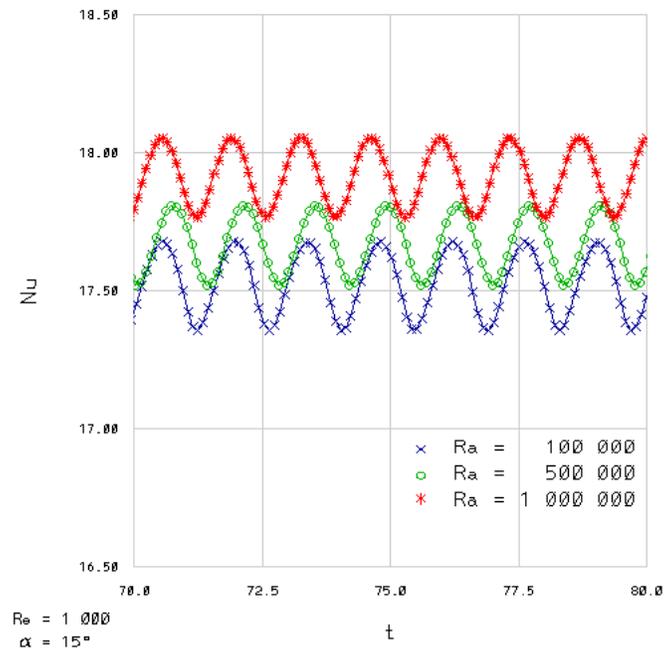
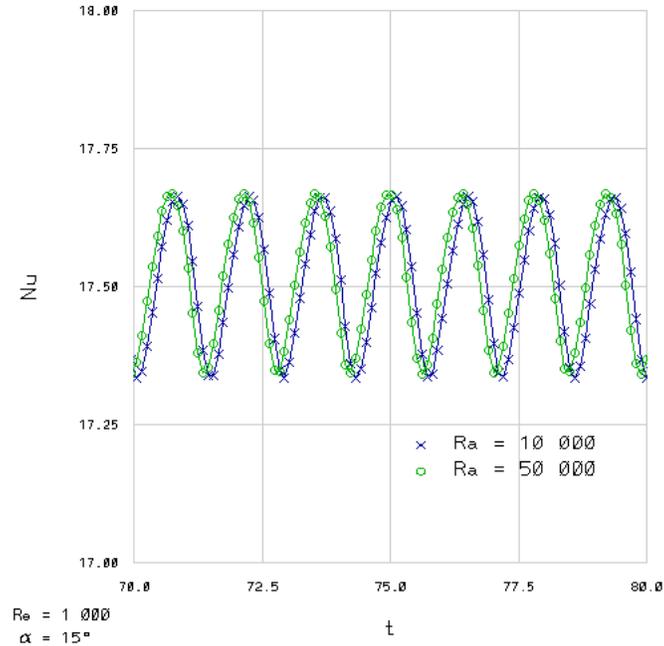
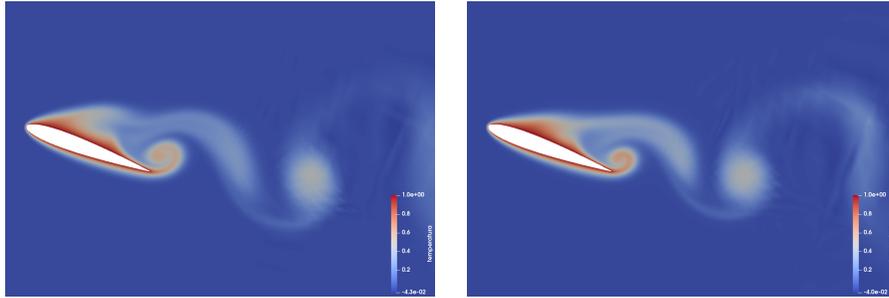


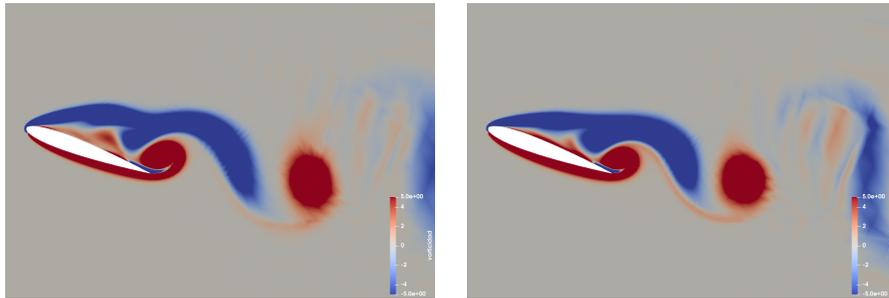
Figura 6.25: Números de Nusselt; $\alpha_m = 15^\circ$.

$Ra = 1,000.$

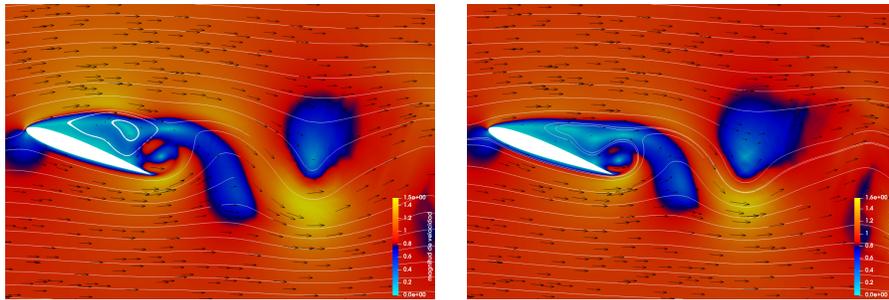
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.



Distribución de vorticidad.



Campo de velocidades.

Figura 6.26: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 20^\circ$.

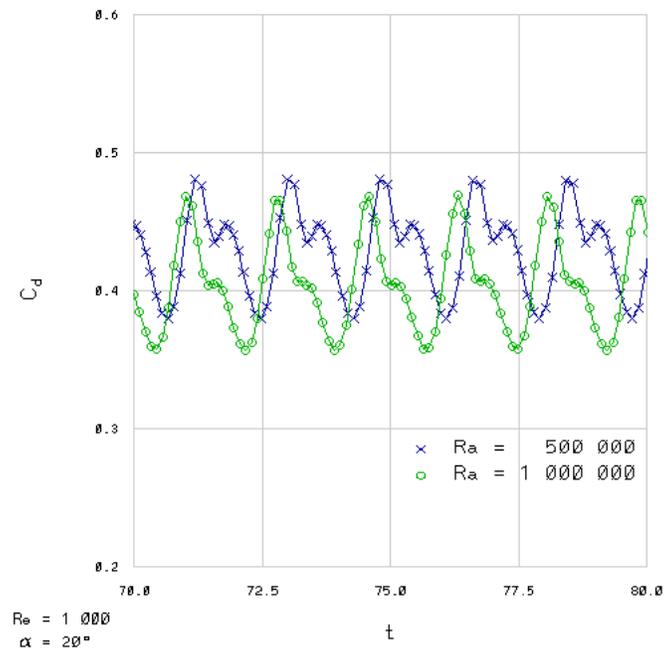
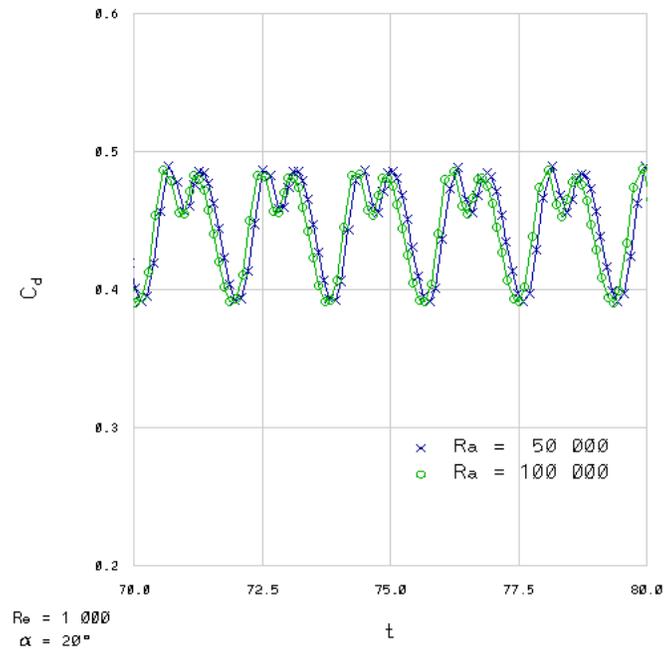


Figura 6.27: Coeficientes de arrastre; $\alpha_m = 20^\circ$.

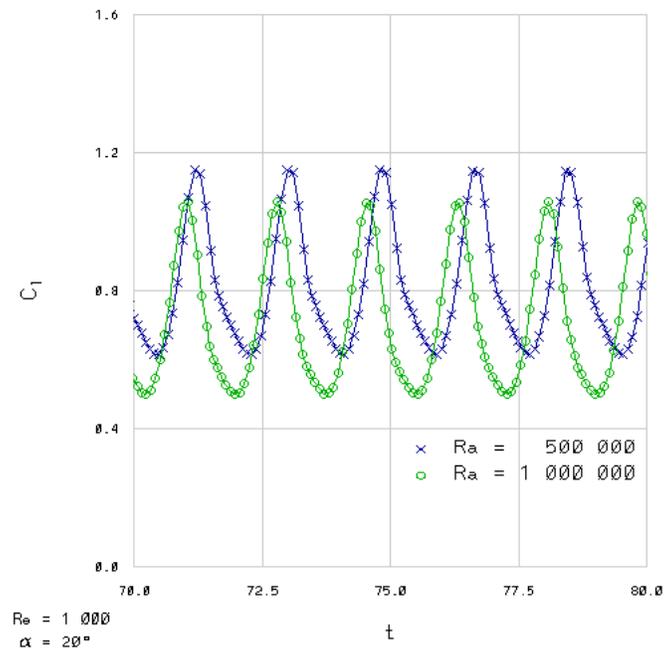
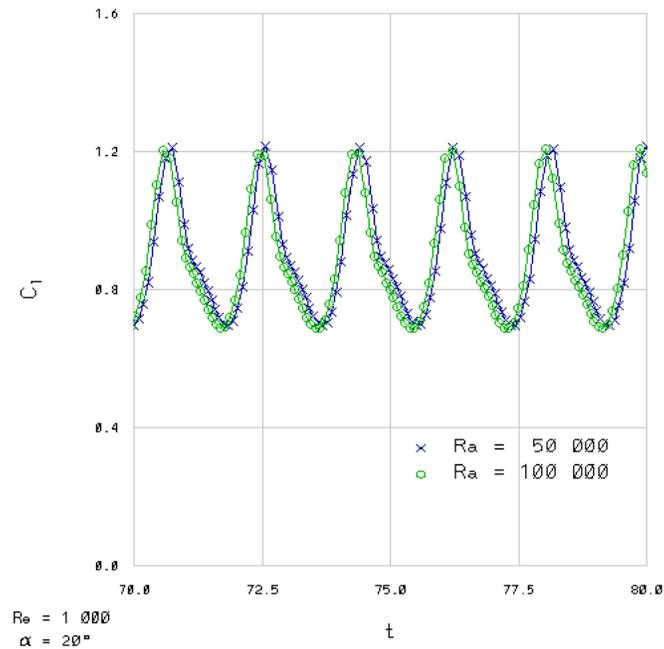


Figura 6.28: Coeficientes de sustentación; $\alpha_m = 20^\circ$.

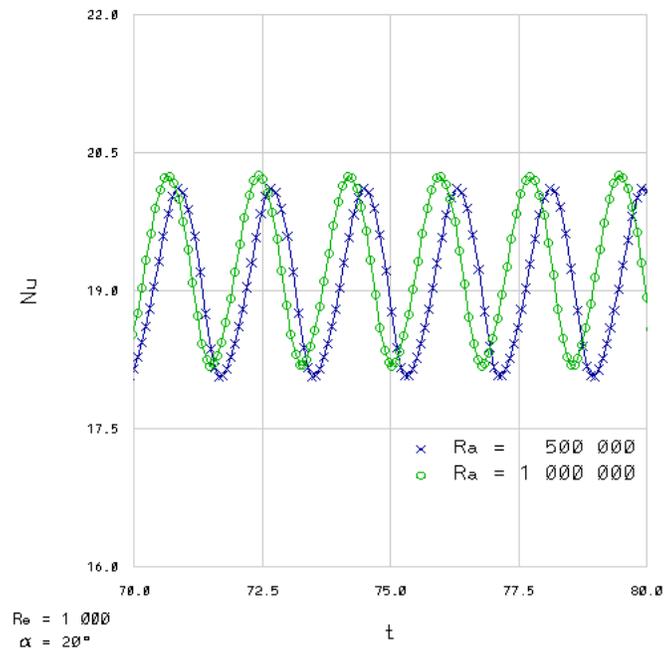
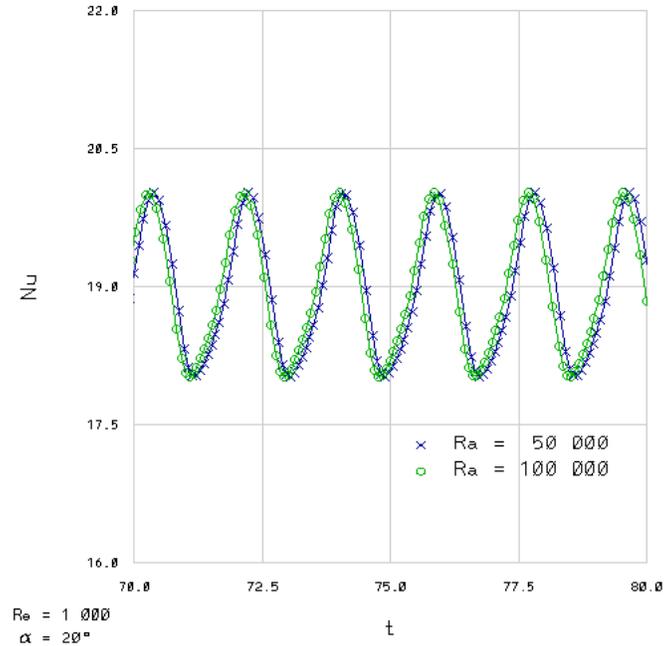


Figura 6.29: Números de Nusselt; $\alpha_m = 20^\circ$.

En el C_l (figura 6.28), la influencia del aumento en el número de Rayleigh comienza a observarse en $Ra = 50 \cdot 10^3$, donde el valor medio decrece 1.24%. La tendencia decreciente persiste hasta el caso con $Ra = 10^6$, donde el promedio ha decrecido 19.98% respecto del caso con $Ra = 1,000$.

Finalmente, el Nu también presenta un comportamiento oscilatorio, esta vez con una mayor amplitud a los casos anteriores (figura 6.29). El valor medio apenas presenta cambios, distinguiendo un crecimiento del 1.83% entre los casos con menor y mayor número de Rayleigh, si bien es cierto que también se observan desfases a partir de $Ra = 100 \cdot 10^3$.

6.1.3. Análisis de resultados.

En el caso donde se va aumentando el número de Reynolds (véase la figura 6.30), se tiene que en $Re = 30$ el desempeño aerodinámico cae de forma abrupta con el aumento de la flotación hasta $Ra = 2,500$, pues aunque el arrastre disminuye, la sustentación también hace lo propio y toma valores negativos. Cabe mencionar que para este número de Rayleigh la sustentación comienza a recuperarse, pero al seguir siendo negativa y con un ligero aumento del arrastre, la razón $\overline{C_l}/\overline{C_d}$ disminuye considerablemente. En $Ra = 5,000$ la tendencia se invierte, aunque el arrastre también haya aumentado, pues el incremento de la sustentación es suficiente como para mejorar con creces el desempeño aerodinámico. En los siguientes casos sólo se observa detrimento del comportamiento aerodinámico, aunque entre mayor es el número de Reynolds este efecto es menos dramático, debido a que la porción inercial amortigua los efectos de flotación sobre las fuerzas aerodinámicas.

Con respecto al número de Nusselt, puede observarse que en $Re = 30$ se ve disminuido con el incremento del número de Rayleigh, lo que podría indicar que la porción advectiva del mecanismo de transferencia de calor se está mermando debido a la reducción de la magnitud de la velocidad del flujo alrededor del perfil, aunque en $Ra = 5,000$ comienza a recuperarse. Con $Re = 60$ tan solo se observan decrementos en el número de Nusselt de menor magnitud que en el caso anterior. Finalmente, en $Re = 120$ apenas se observan cambios, con una ligera reducción del número de Nusselt en $Ra = 5,000$. Con lo anterior, se tiene que la transferencia de calor pasa de ser considerablemente influenciada por la flotación a observar variaciones muy limitadas, así que puede decirse que, como se esperaba, en principio se tiene convección mixta, pero con el aumento del número de Reynolds prepondera la convección forzada.

En los casos donde se incrementa el ángulo de ataque medio de forma gradual (como se muestra en la figura 6.31) y se establece el número de Reynolds a $Re = 1,000$, se distinguen comportamientos análogos en el desempeño aerodinámico. En todas las posiciones del perfil el aumento del número de Rayleigh provoca que la razón $\overline{C_l}/\overline{C_d}$ disminuya. Sin embargo, al mismo tiempo el ángulo de ataque amortigua la influencia de este parámetro, reduciendo la magnitud de las mermas en el desempeño. Obsérvese que el valor de $\overline{C_l}/\overline{C_d}$ para la flotación más baja, con $Ra = 1,000$, se reduce cuando $\alpha_m = 20^\circ$, quedando por debajo de los casos con $\alpha_m = 10^\circ$ y $\alpha_m = 15^\circ$. En principio esto advierte que el perfil

se encuentra en pérdida de sustentación. Tomando en cuenta lo anterior, llama la atención que cuando se tiene $Ra = 10^6$, el efecto del incremento en el número de Rayleigh se amortigua con el aumento del ángulo de ataque, dando lugar a que el desempeño aerodinámico esta vez sea mejor con $\alpha_m = 20^\circ$ que en el resto de los casos. Incluso, este comportamiento puede observarse también comparando $\alpha_m = 10^\circ$ y $\alpha_m = 15^\circ$: con un bajo número de Rayleigh el desempeño aerodinámico es menor con el ángulo más grande, pero una vez que se llega a $Ra = 100 \cdot 10^3$ los resultados se invierten.

Para el número de Nusselt, se tiene que con $\alpha_m = 0^\circ$ el incremento de la flotación beneficia a la convección hasta $Ra = 500 \cdot 10^3$, aunque después se ve disminuida en $Ra = 10^6$. A su vez, el cambio de $\alpha_m = 0^\circ$ a $\alpha_m = 5^\circ$ beneficia al número de Nusselt, aunque para este ángulo de ataque medio el aumento en el número de Rayleigh causa que se reduzca. Una vez que se cambia la posición del perfil a $\alpha_m = 10^\circ$ la convección se ve disminuida, si bien es cierto que esta vez crece con el número de Rayleigh. Un comportamiento análogo se observa con $\alpha_m = 15^\circ$, al tiempo que el número de Nusselt se beneficia del aumento en el ángulo de ataque. Esta última tendencia se repetirá con creces en $\alpha_m = 20^\circ$, donde la convección es mayor que en todos los casos anteriores, además que incrementa de la mano de la flotación.

En los mapas de casos se muestra el campo de temperaturas y puede notarse cómo se modifica la estela del flujo. Se asocia el eje vertical con el número de Rayleigh; en el eje horizontal, en la figura 6.32 se tiene el número de Reynolds, mientras que en la figura 6.33, se tiene el ángulo de ataque medio.

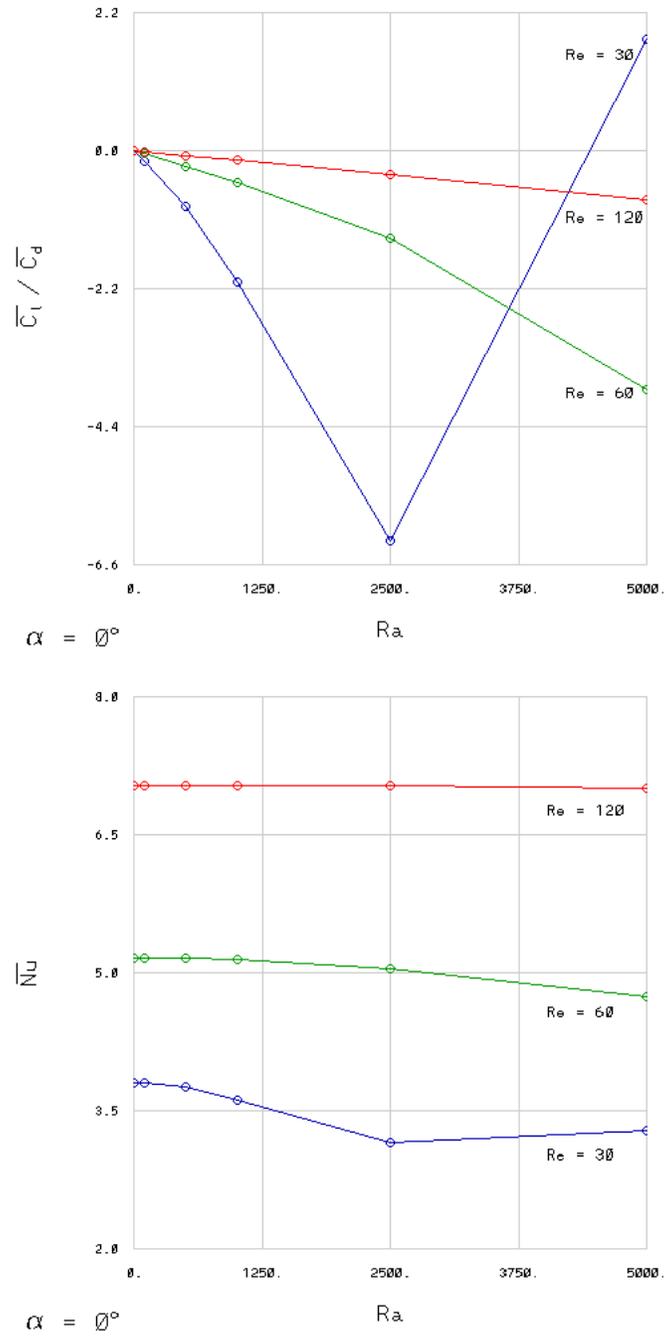


Figura 6.30: Influencia del número de Rayleigh; variación del número de Reynolds.

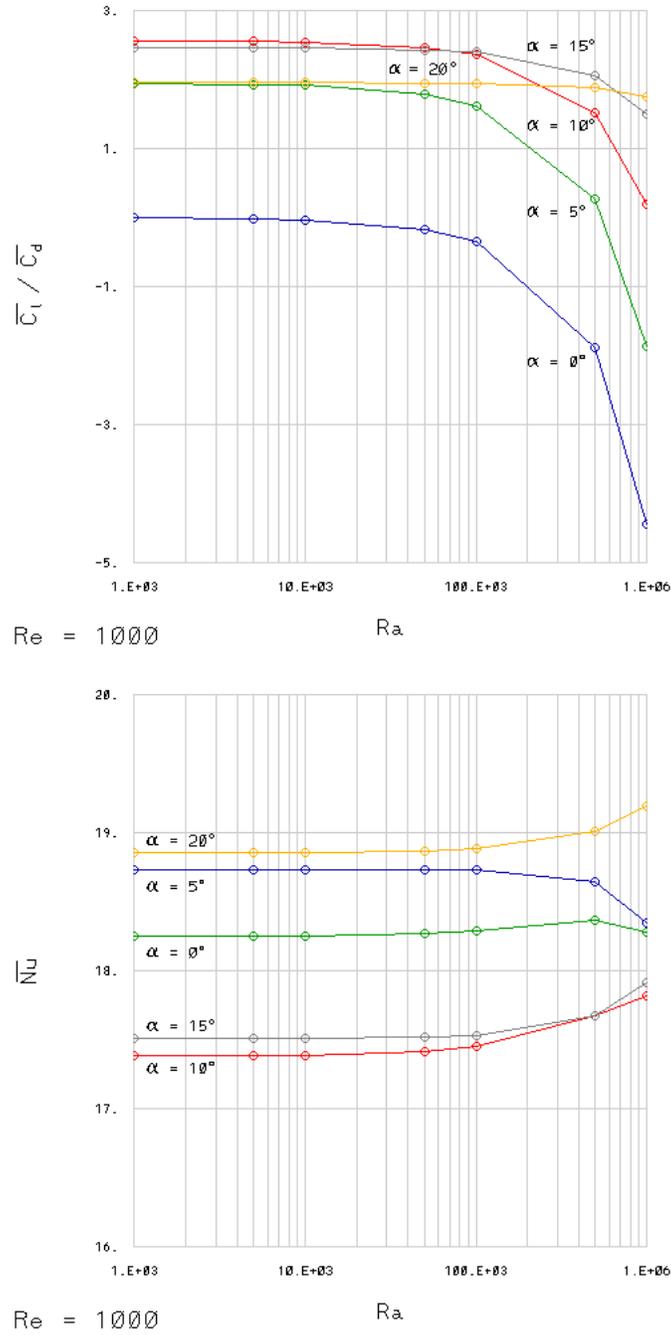


Figura 6.31: Influencia del número de Rayleigh; variación de α_m .

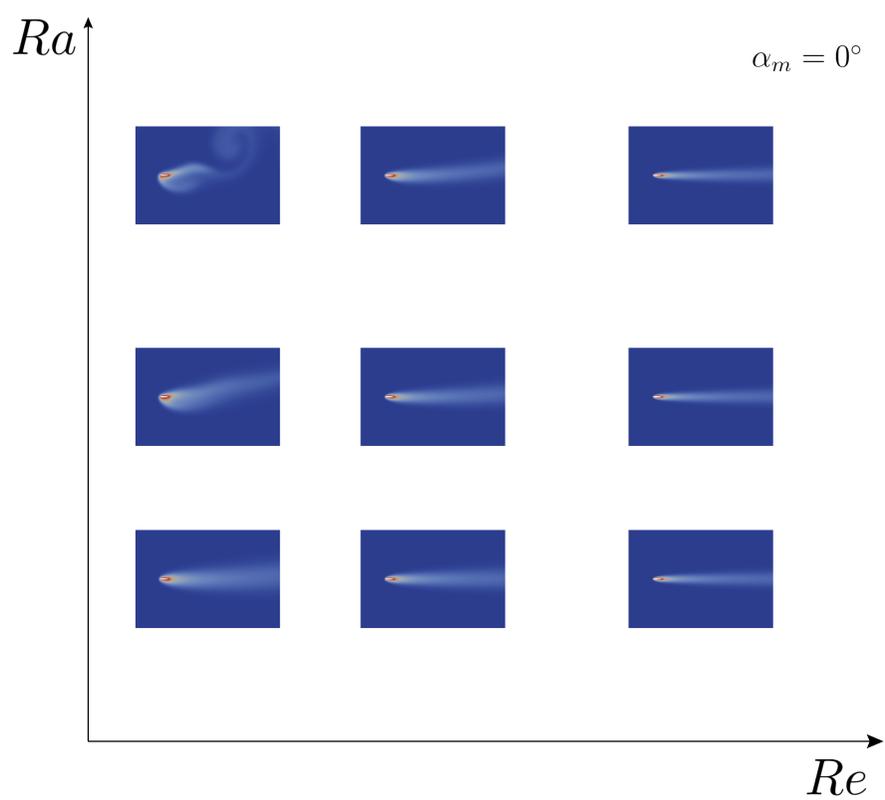


Figura 6.32: Mapa de casos: $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$. Número de Rayleigh contra número de Reynolds, con $\alpha_m = 0^\circ$.

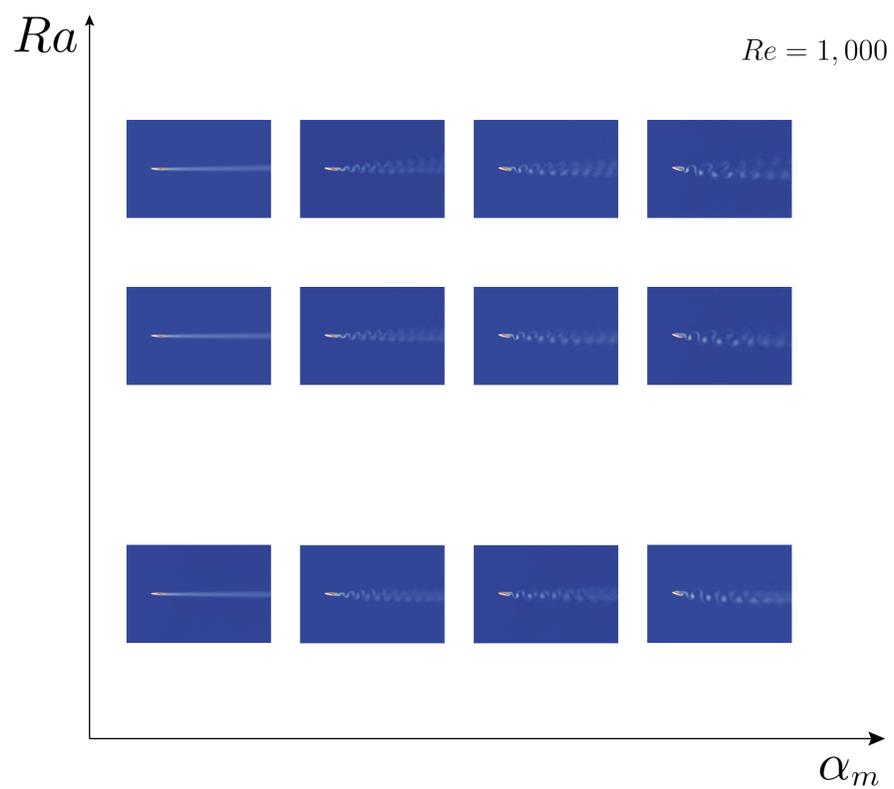


Figura 6.33: Mapa de casos: $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$. Número de Rayleigh contra ángulo de ataque medio, con $Re = 1,000$.

6.2. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico con movimiento de *pitching*: $\alpha_0 = 1^\circ$, $h_0 = 0$.

Dado que se revisa el movimiento de pitching puro, se fija $h_0 = 0$. La amplitud de movimiento es $\alpha_0 = 1^\circ$. Se abordan los casos con $\alpha_m = 0^\circ$ y $\alpha_m = 15^\circ$, cada uno con dos valores de frecuencia adimensional, $\omega^* = 4.304$ y $\omega^* = 17.214$, en un intervalo de número de Rayleigh entre 1,000 y 1,000,000. El número de Reynolds es $Re = 1,000$.

- $\alpha_m = 0^\circ$.

Los campos de flujo (figura 6.34 y 6.37) se comparan aproximadamente en el momento en el que se alcanza la mayor sustentación en el ciclo. En este caso, el punto de estancamiento se posiciona sobre la superficie superior con un número de Rayleigh de 10^6 . Con $\omega^* = 4.304$ la sustentación es siempre negativa bajo la influencia de la flotación, aunque cuando $\omega^* = 17.214$ se tiene una porción positiva que coincide con el movimiento descendente del borde de ataque. El alto número de Rayleigh hace que los vórtices se desprendan ligeramente más pronto en el caso con $\omega^* = 4.304$, además que las líneas de corriente cerca de la estela se deflectan ligeramente en dirección vertical. Mientras tanto, con $\omega^* = 17.214$ no hay desprendimiento de vórtices (como se encontró en Kurtulus, 2019) y este comportamiento se mantiene con la flotación más alta; también hay una deflexión de la estela en dirección vertical, aunque la reducción en el desempeño aerodinámico es menor que con la baja frecuencia.

Con $\omega^* = 4.304$, el comportamiento aerodinámico se puede observar en la figura 6.35. El C_d no es apreciablemente influido por el aumento del número de Rayleigh hasta $Ra = 500 \cdot 10^3$, donde el valor medio decrece 4.96 %, y se conserva esta tendencia en $Ra = 10^6$, con otra reducción del 17.35 %. El C_l muestra cambios muy limitados, siempre dirigidos hacia la sustentación negativa y apreciables en $Ra = 500 \cdot 10^3$, donde el valor medio es -0.209 , para culminar con un $\overline{C_l} = -0.412$ en $Ra = 10^6$. Similarmente, el \overline{Nu} presenta cambios menores al 0.01 % hasta que se tiene $Ra = 500 \cdot 10^3$, donde se observa, en la figura 6.36, una disminución del 0.38 %. Al final, la variación sigue siendo reducida, considerando que en $Ra = 10^6$ se tiene un decremento de 1.64 % con respecto al caso con el número de Rayleigh más bajo.

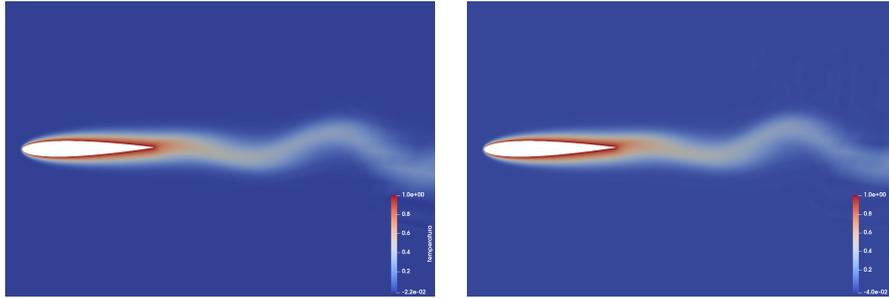
A su vez, en $\omega^* = 17.214$, y como en el caso anterior, no hay variaciones sensibles de parámetro alguno con el incremento de la flotación hasta $Ra = 500 \cdot 10^3$. Tanto el C_d como el C_l (figura 6.38) ven disminuidos sus valores medios: por un lado, el arrastre experimenta un decremento del 5.08 % en $Ra = 500 \cdot 10^3$ y uno más del 15.18 % en $Ra = 10^6$; por el otro, la sustentación se reducirá un 42.05 % respecto del caso con menor flotación en $Ra = 100 \cdot 10^3$, pasará a sustentación negativa en $Ra = 500 \cdot 10^3$ y se agudizará este efecto en $Ra = 10^6$, llegando a -0.257 . En cuanto al Nu , mostrado en la figura 6.39, el aumento de la flotación también provoca que su valor medio se vea disminuido en 1.93 % con $Ra = 10^6$ respecto al caso con $Ra = 1,000$.

Caso con <i>pitching</i> , $Re = 1,000$.						
α_m [°]	ω^*	Ra	$\overline{C_d}$	$\overline{C_l}$	$\overline{C_l}/\overline{C_d}$	\overline{Nu}
0	4.304	1,000	0.121	0.000	0.000	18.802
		5,000	0.121	-0.002	-0.017	18.803
		10,000	0.121	-0.004	-0.033	18.803
		50,000	0.121	-0.021	-0.174	18.802
		100,000	0.121	-0.042	-0.347	18.800
		500,000	0.115	-0.209	-1.817	18.730
		1,000,000	0.098	-0.412	-4.204	18.493
	17.214	1,000	0.118	0.088	0.746	19.109
		5,000	0.118	0.086	0.729	19.111
		10,000	0.118	0.085	0.720	19.111
		50,000	0.118	0.069	0.585	19.110
		100,000	0.118	0.051	0.432	19.107
		500,000	0.112	-0.095	-0.848	19.025
		1,000,000	0.095	-0.257	-2.705	18.741
15	4.304	1,000	0.313	0.817	2.610	18.055
		5,000	0.313	0.815	2.604	18.056
		10,000	0.313	0.814	2.601	18.057
		50,000	0.310	0.800	2.581	18.067
		100,000	0.307	0.783	2.550	18.079
		500,000	0.283	0.637	2.251	18.152
		1,000,000	0.253	0.434	1.715	18.200
	17.214	1,000	0.292	0.708	2.425	17.868
		5,000	0.289	0.698	2.415	17.868
		10,000	0.286	0.686	2.399	17.861
		50,000	0.286	0.674	2.357	17.810
		100,000	0.269	0.610	2.268	17.918
		500,000	0.280	0.633	2.261	18.007
		1,000,000	0.199	0.247	1.241	18.302

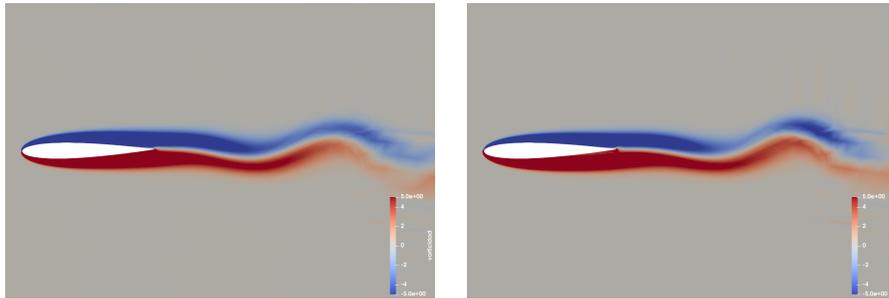
Tabla 6.3: Perfil con movimiento de *pitching*, y número de Reynolds $Re = 1,000$. La amplitud de oscilación es $\alpha_0 = 1^\circ$. Se consideran dos ángulos de ataque medios, $\alpha_m = 0^\circ$ y $\alpha_m = 15^\circ$, con dos valores de frecuencia: $\omega^* = 4.304$ y $\omega^* = 17.214$; para cada caso se toma un intervalo de números de Rayleigh entre 1,000 y 1,000,000.

$Ra = 1,000.$

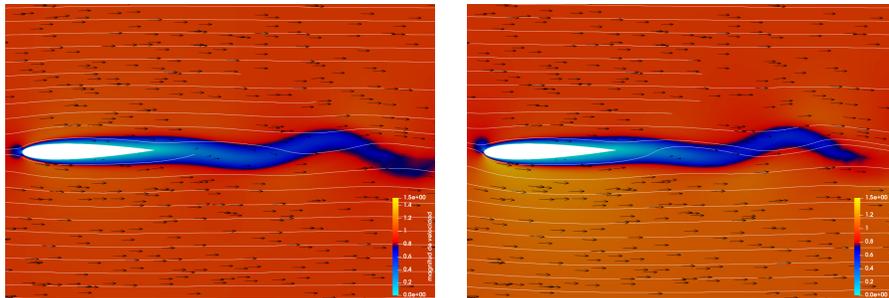
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.

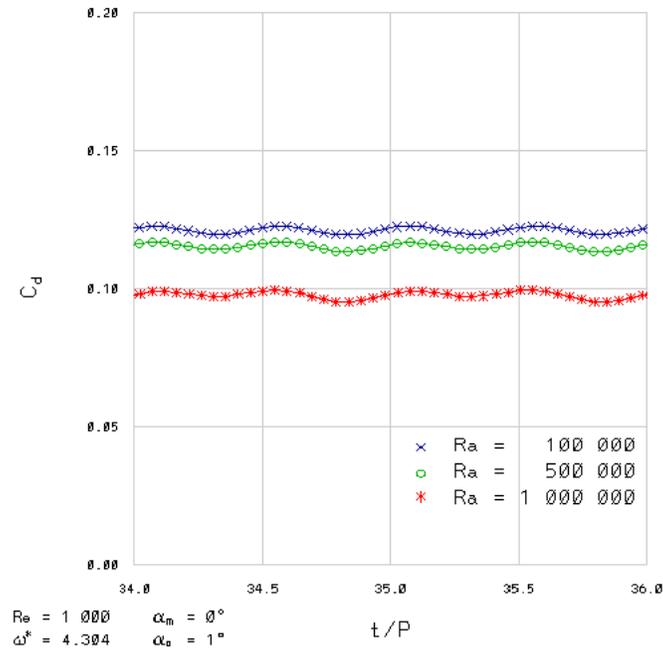


Distribución de vorticidad.

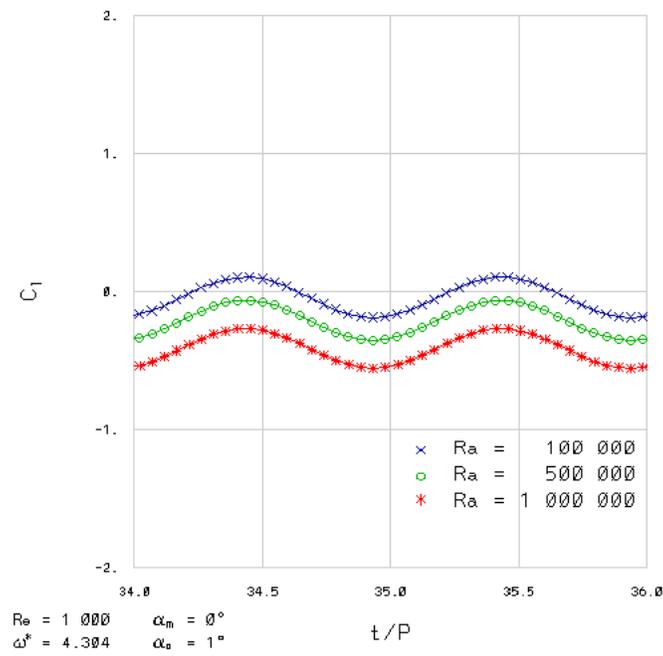


Campo de velocidades.

Figura 6.34: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 4.304$.



(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.35: Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 4.304$.

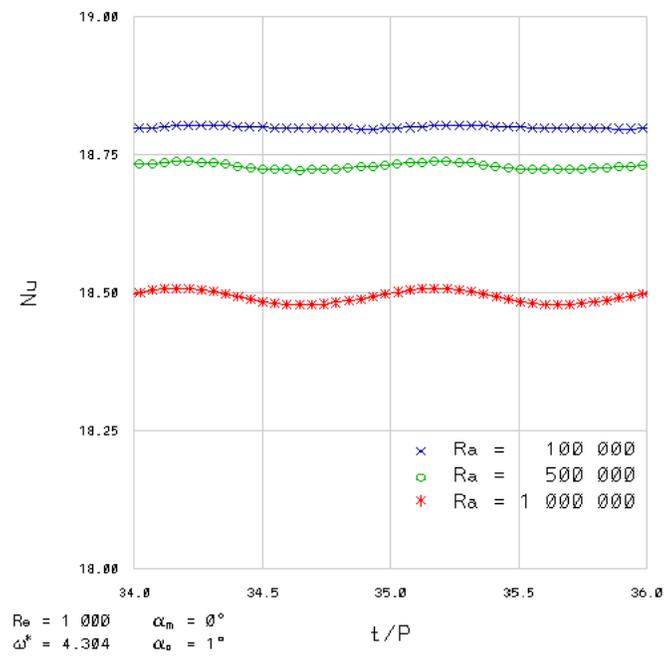
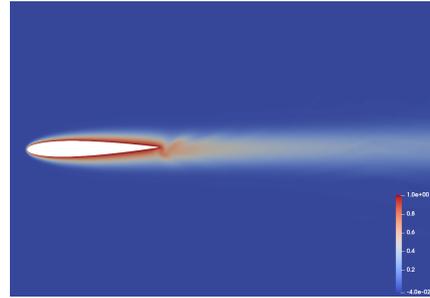
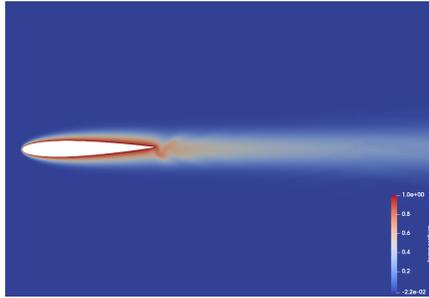


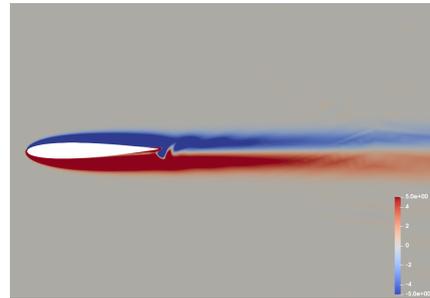
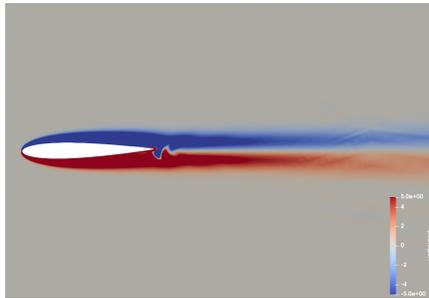
Figura 6.36: Números de Nusselt; $\alpha_m = 0^\circ, \omega^* = 4.304$.

$Ra = 1,000.$

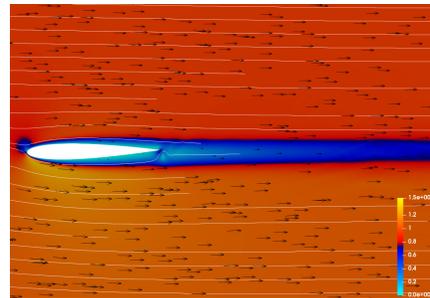
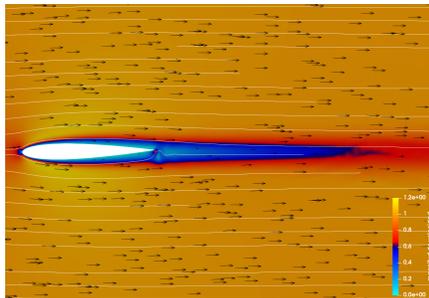
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.

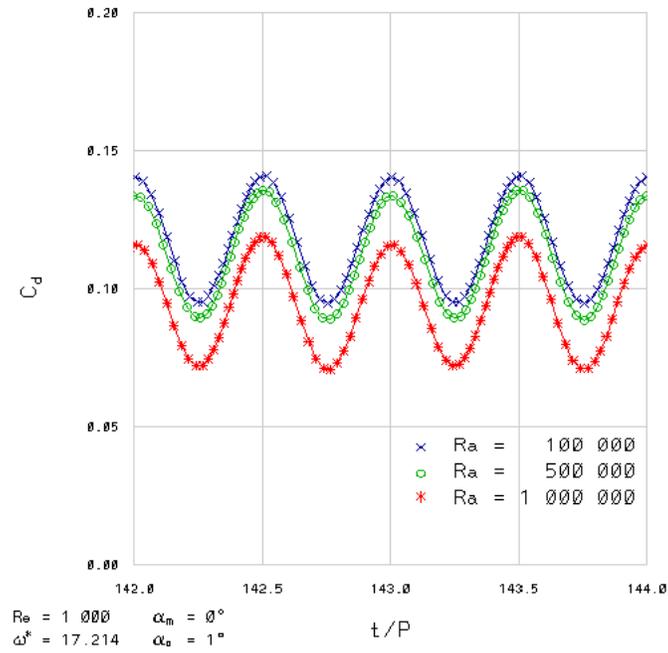


Distribución de vorticidad.

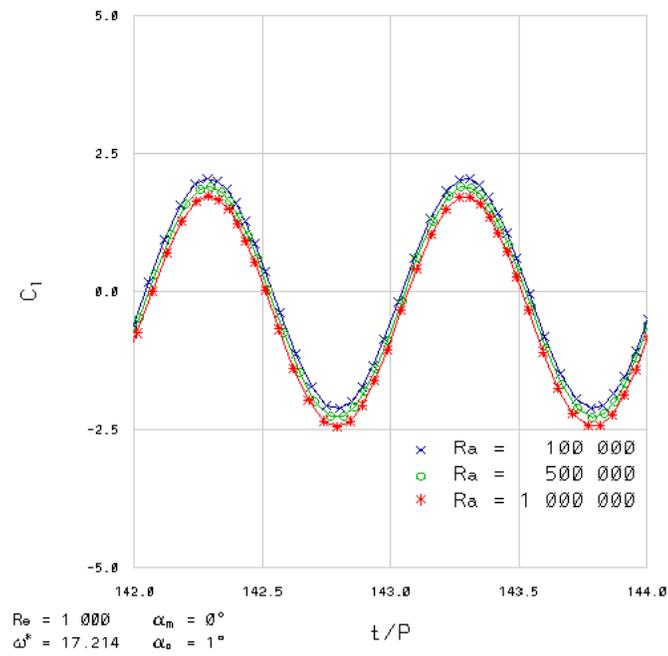


Campo de velocidades.

Figura 6.37: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; $\alpha_m = 0^\circ$, $\omega^* = 17.214$.



(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.38: Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 0^\circ, \omega^* = 17.214$.

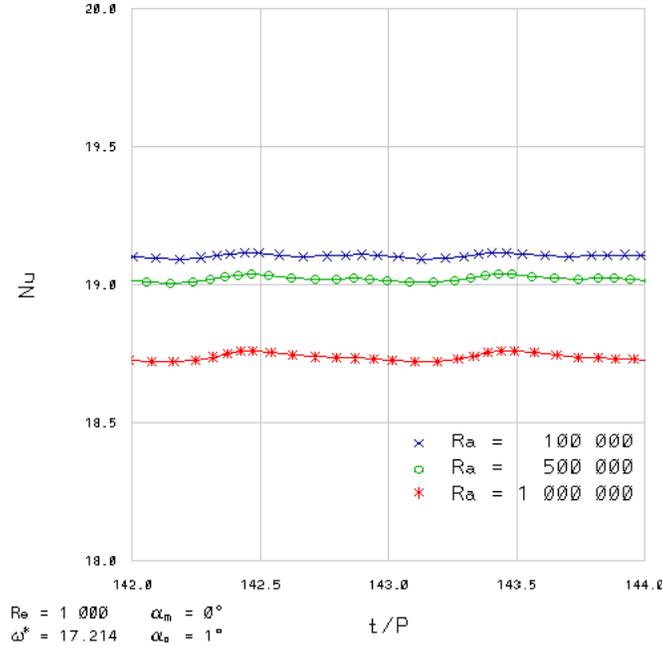


Figura 6.39: Números de Nusselt; $\alpha_m = 0^\circ, \omega^* = 17.214$.

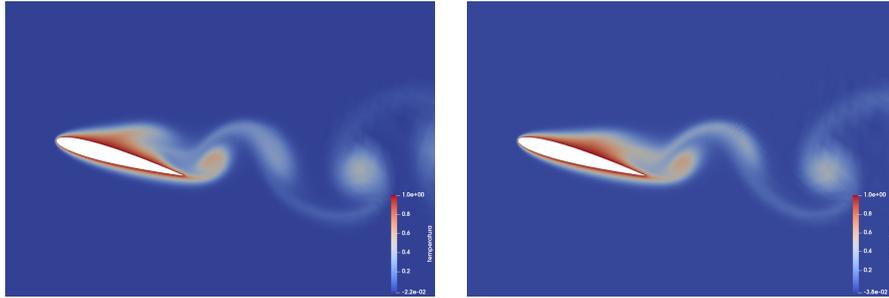
■ $\alpha_m = 15^\circ$.

Con el aumento en el ángulo de ataque medio, el efecto del incremento de la flotación es más limitado. Como se observa en las figuras 6.40 y 6.43, el punto de estancamiento también se desplaza, esta vez hacia el borde de ataque y se mantiene en la superficie inferior, lo que muestra por qué la sustentación sigue siendo positiva y es la razón por la que se amortigua la influencia del número de Rayleigh. Por otro lado, se tiene que la zona de separación de flujo es más limitada bajo la presencia de la flotación, lo que puede explicar que la reducción en el desempeño aerodinámico sea menor que en el caso con $\alpha_m = 0^\circ$.

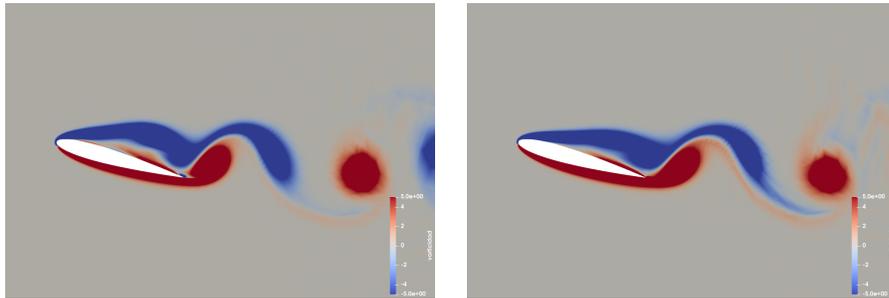
Para $\omega^* = 4.304$, el aumento de la flotación sobre el C_d influye, con bajo impacto, en $Ra = 100 \cdot 10^3$, reduciendo su valor medio 1.92%; disminuye un 7.82% adicional en $Ra = 500 \cdot 10^3$ y cierra con una reducción más del 10.60% en $Ra = 10^6$. Mientras tanto, también para el C_l hay cierta influencia desde $Ra = 50 \cdot 10^3$, mermando 2.08% en su valor medio; en $Ra = 100 \cdot 10^3$ hay otra disminución del mismo orden de magnitud, y posteriormente el efecto se agudiza con reducciones del 18.65% y 31.87% en $Ra = 500 \cdot 10^3$ y $Ra = 10^6$, respectivamente (figura 6.41). Esta vez el Nu aumenta ligeramente con el crecimiento del número de Rayleigh en su valor medio, pues la variación máxima es apenas del 0.80% comparando los casos con mayor y menor flotación.

$Ra = 1,000.$

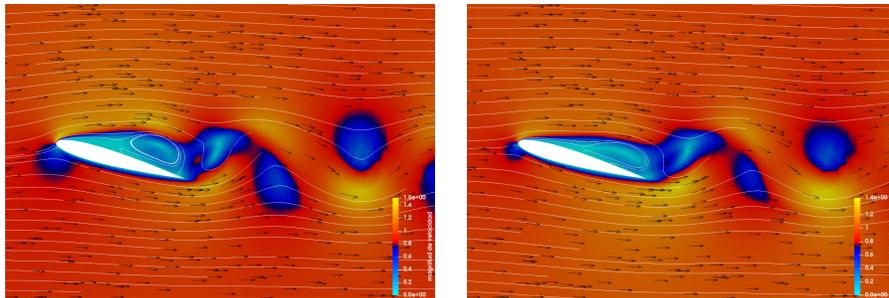
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.

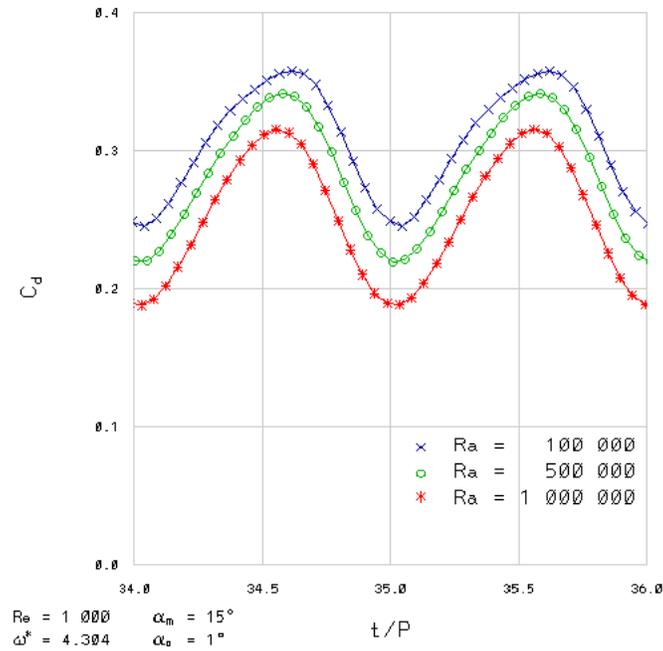


Distribución de vorticidad.

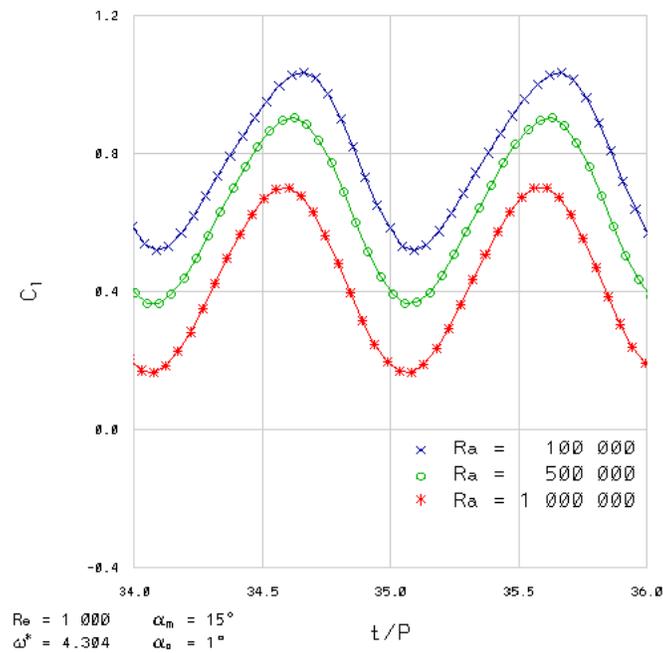


Campo de velocidades.

Figura 6.40: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 4.304$.



(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.41: Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 4.304$.

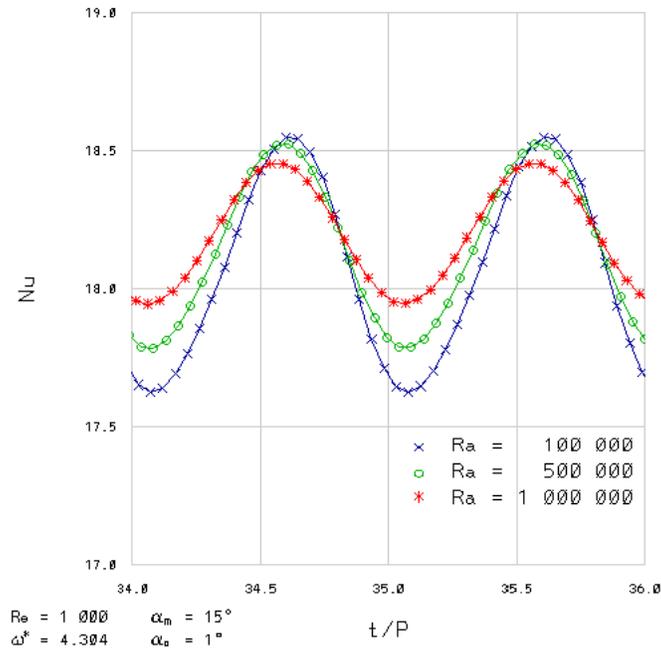
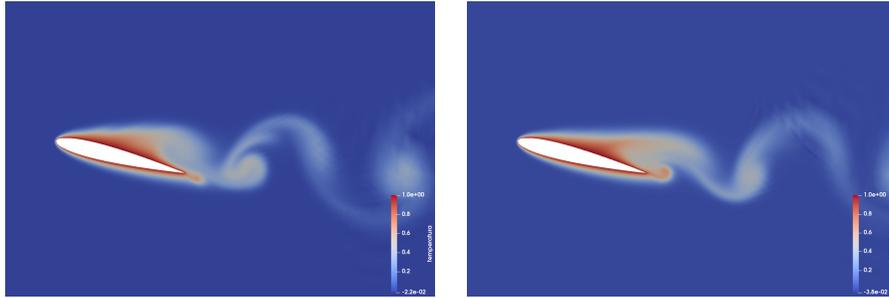


Figura 6.42: Números de Nusselt; $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 4.304$.

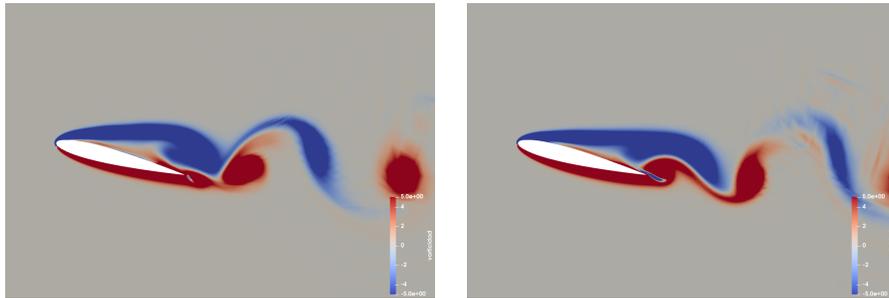
Por último, como se muestra en la figura 6.44 y con $\omega^* = 17.214$, el C_d presenta cambios apreciables en su valor medio en $Ra = 100 \cdot 10^3$ con una reducción del 7.88 %, seguida esta vez de un incremento del 4.09 % en $Ra = 500 \cdot 10^3$ y cerrando con una merma del 28.93 % en $Ra = 10^6$. Con respecto al C_l , se tiene que los valores medios van disminuyendo ligeramente con el aumento de la flotación, hasta que en $Ra = 100 \cdot 10^3$ la reducción es del 13.84 % respecto del caso con menor flotación; después se recupera un 3.77 % en $Ra = 500 \cdot 10^3$ y finaliza en $Ra = 10^6$ con una disminución del 60.98 %. Con respecto al Nu , se observa en la figura 6.45 un comportamiento fluctuante y no periódico, donde figuran algunos cambios notables en su comportamiento en el tiempo a partir de $Ra = 50 \cdot 10^3$, aunque el valor medio apenas cambia con un decrecimiento del 0.32 %. Para los siguientes casos este valor aumenta ligera y paulatinamente hasta llegar a $Ra = 10^6$, donde el crecimiento es del 2.76 %.

$Ra = 1,000.$

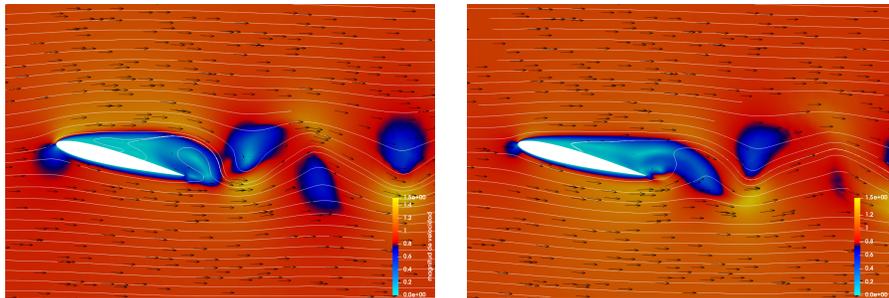
$Ra = 10^6.$



Campo de temperaturas.

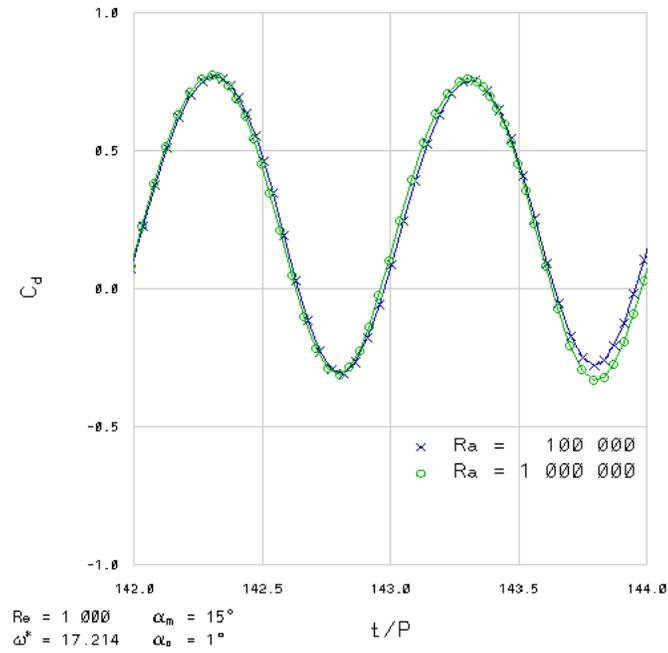


Distribución de vorticidad.

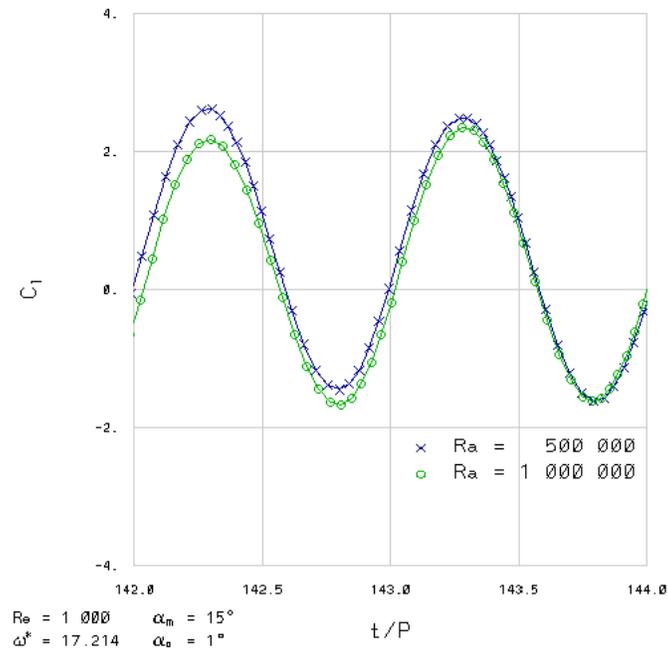


Campo de velocidades.

Figura 6.43: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades, $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 17.214$.



(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.44: Coeficientes aerodinámicos; $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 17.214$.

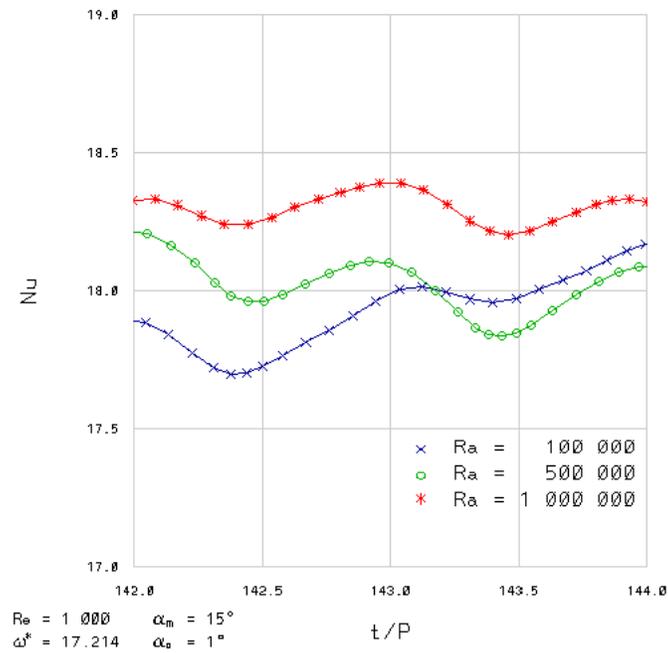
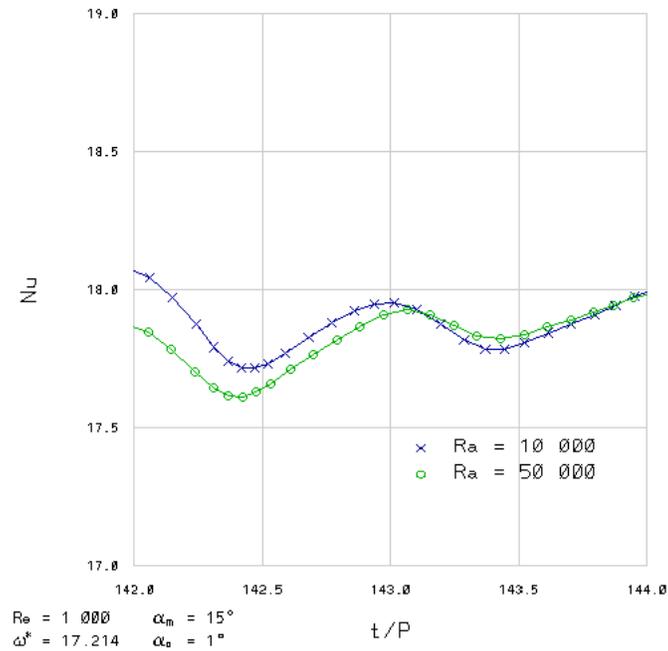


Figura 6.45: Números de Nusselt; $\alpha_m = 15^\circ$, $\omega^* = 17.214$.

6.2.1. Análisis de resultados.

Obsérvese en la figura 6.46 que, en cuanto al desempeño aerodinámico, en principio se observa que el aumento en el ángulo de ataque geométrico medio beneficia al $\overline{C_l}/\overline{C_d}$. Para $\alpha_m = 0^\circ$ el aumento en la frecuencia también mejora el desempeño, aunque en $\alpha_m = 15^\circ$ el comportamiento se invierte, esta vez con una diferencia más estrecha. La influencia del incremento en el número de Rayleigh radica en la reducción del $\overline{C_l}/\overline{C_d}$, si bien es cierto que el aumento en el ángulo de ataque geométrico medio amortigua este efecto, de manera similar a como se observó en el caso estático con variación en el ángulo de ataque.

El número de Nusselt observa valores más altos para el caso con $\alpha_m = 0^\circ$, además que se beneficia del aumento en la frecuencia, a pesar de que el incremento de la flotación provoca que la convección se vea mermada. Por el contrario, en $\alpha_m = 15^\circ$ el Nu es más reducido y crece con el número de Rayleigh (nótese que este comportamiento también se observa cuando se aumenta el ángulo de ataque en el caso estático), además de que la frecuencia alta provoca que el número de Nusselt decrezca. Hay que mencionar que, con $\omega^* = 17.214$, la tendencia primero es decreciente, pero se invierte en $Ra = 50 \cdot 10^3$ e incluso, cuando $Ra = 10^6$, el número de Nusselt es mayor que en el caso con $\omega^* = 4.304$.

En el mapa de casos (figura 6.47) el eje horizontal está referido al número de Rayleigh, el eje vertical al ángulo de ataque medio y el último eje a la frecuencia. Se muestra la distribución de vorticidad: en rojo el sentido es antihorario (positivo) y en azul es horario (negativo). Puede observarse el efecto gradual de la flotación sobre la estela, que en general la deflecta hacia arriba y hace que la distribución abarque una porción vertical mayor.

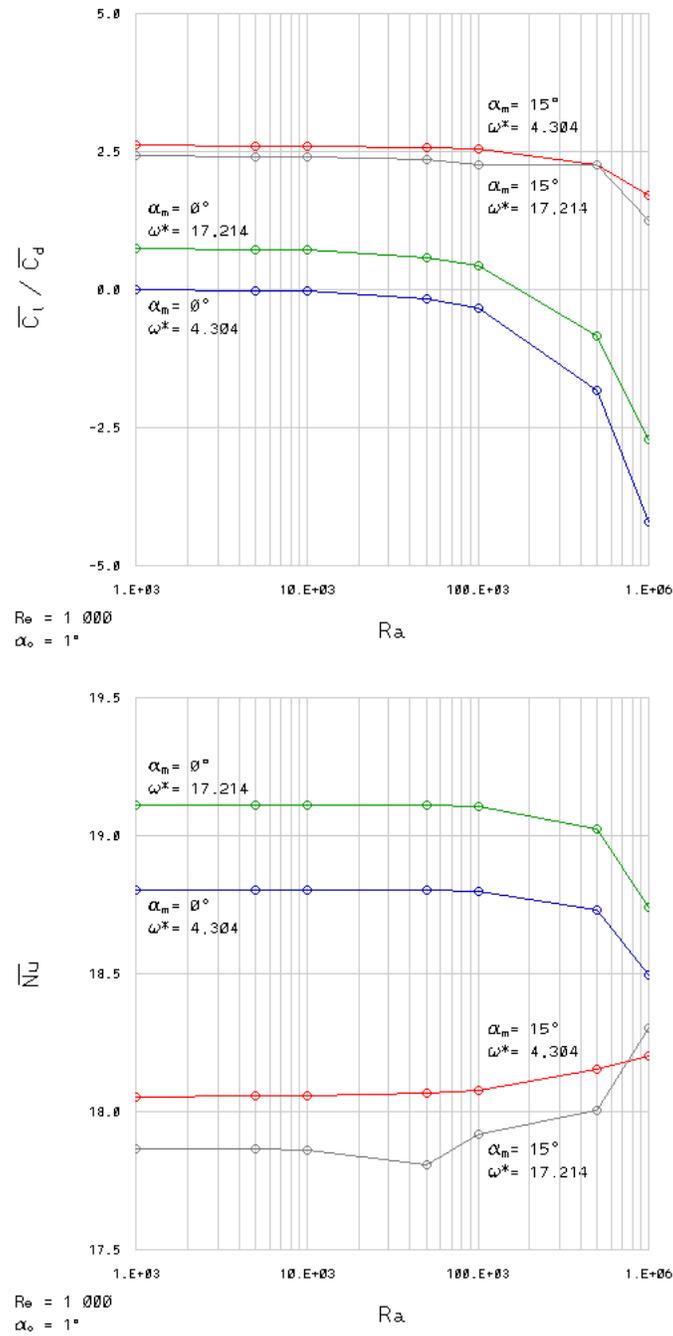


Figura 6.46: Influencia del número de Rayleigh; *pitching*.

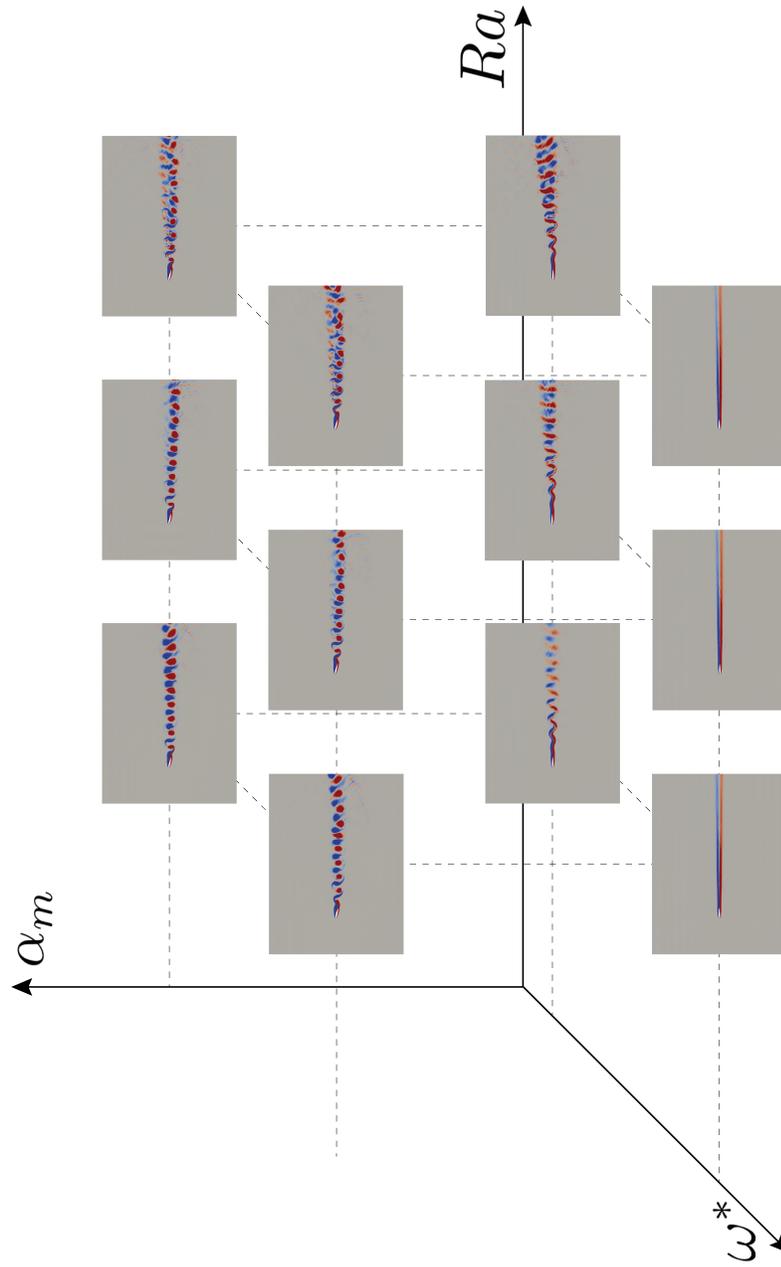


Figura 6.47: Mapa de casos para el perfil aerodinámico con movimiento de *pitching*.

6.3. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico con movimiento de *plunging*: $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0.0125$.

Se emplean los mismos parámetros que se usaron en la validación para el caso hidrodinámico, $\omega^* = 7.86$, $h_0 = 0.0125$, salvo por el número de Reynolds, que esta vez se fija a $Re = 1,000$. El ángulo de ataque medio es $\alpha_m = 0^\circ$. El rango de números de Rayleigh es $0 < Ra < 10^6$.

Caso con <i>plunging</i> , $Re = 1,000$.						
h_0	ω^*	Ra	$\overline{C_d}$	$\overline{C_l}$	$\overline{C_l}/\overline{C_d}$	\overline{Nu}
0.0125	7.86	0	0.123	0.001	0.008	19.069
		10,000	0.123	-0.003	-0.024	19.069
		50,000	0.123	-0.019	-0.154	19.068
		100,000	0.123	-0.039	-0.317	19.067
		500,000	0.118	-0.198	-1.678	19.013
		1,000,000	0.103	-0.388	-3.767	18.848

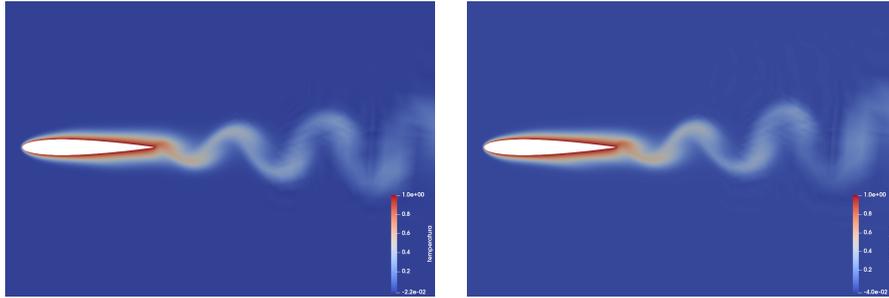
Tabla 6.4: Perfil con movimiento de *plunging*; el número de Reynolds es $Re = 1,000$. La amplitud de oscilación es $h_0 = 0.0125$ y la frecuencia es $\omega^* = 7.86$. Se revisa un intervalo de números de Rayleigh entre 0 y 1,000,000.

Al observar el campo de flujo en la figura 6.48, nuevamente se tiene que con el incremento de la flotación el punto de estancamiento se desplaza a la superficie superior, provocando que durante toda la oscilación el flujo en esa zona baje su velocidad y, con ello, la sustentación se ve afectada debido a que la presión es mayor en esa parte. La sustentación máxima se consigue en ambos casos, sin flotación y con $Ra = 10^6$, cuando el perfil asciende y llega a la posición vertical más alta, pues se desprende el vórtice del borde de salida formado en la superficie inferior.

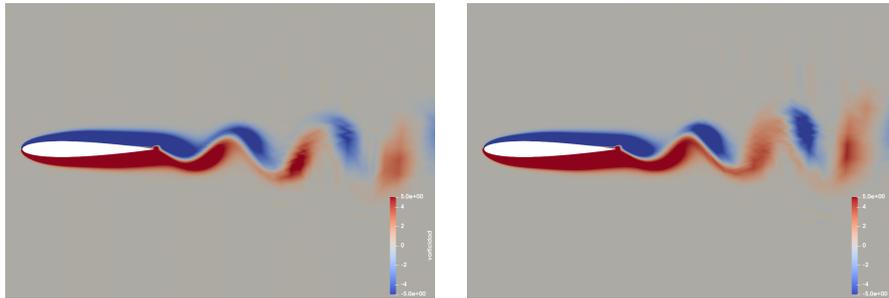
Los coeficientes aerodinámicos muestran un comportamiento oscilatorio que coincide con el movimiento del perfil. En lo que respecta al C_d , se tiene que no hay variación del valor medio hasta $Ra = 500 \cdot 10^3$, donde decrece en 4.07%, continuando con esta tendencia en $Ra = 10^6$ al reducirse un 12.71% más. Sin embargo, el cambio en el comportamiento de la oscilación en los valores instantáneos es muy notable: aunque en $Ra = 10 \cdot 10^3$ se presenta ligeramente, puede observarse de manera más clara en $Ra = 50 \cdot 10^3$ que cada periodo se caracteriza por la presencia de dos crestas, la segunda ligeramente más alta, y dos valles, con el segundo visiblemente más reducido; esta observación se sigue también en $Ra = 100 \cdot 10^3$. Para $Ra = 500 \cdot 10^3$ se observan ahora un valle y una cresta, esta vez presentándose primero la cresta y ampliándose la amplitud de la oscilación; el mismo comportamiento se tiene en $Ra = 10^6$, y nuevamente la amplitud es bastante mayor.

$Ra = 10^4$.

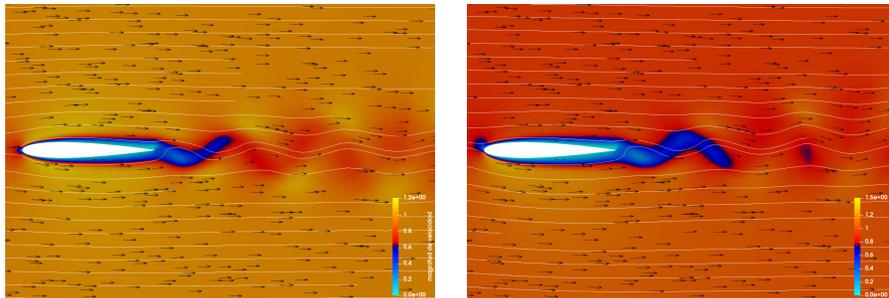
$Ra = 10^6$.



Campo de temperaturas.



Distribución de vorticidad.



Campo de velocidades.

Figura 6.48: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; caso con *plunging*.

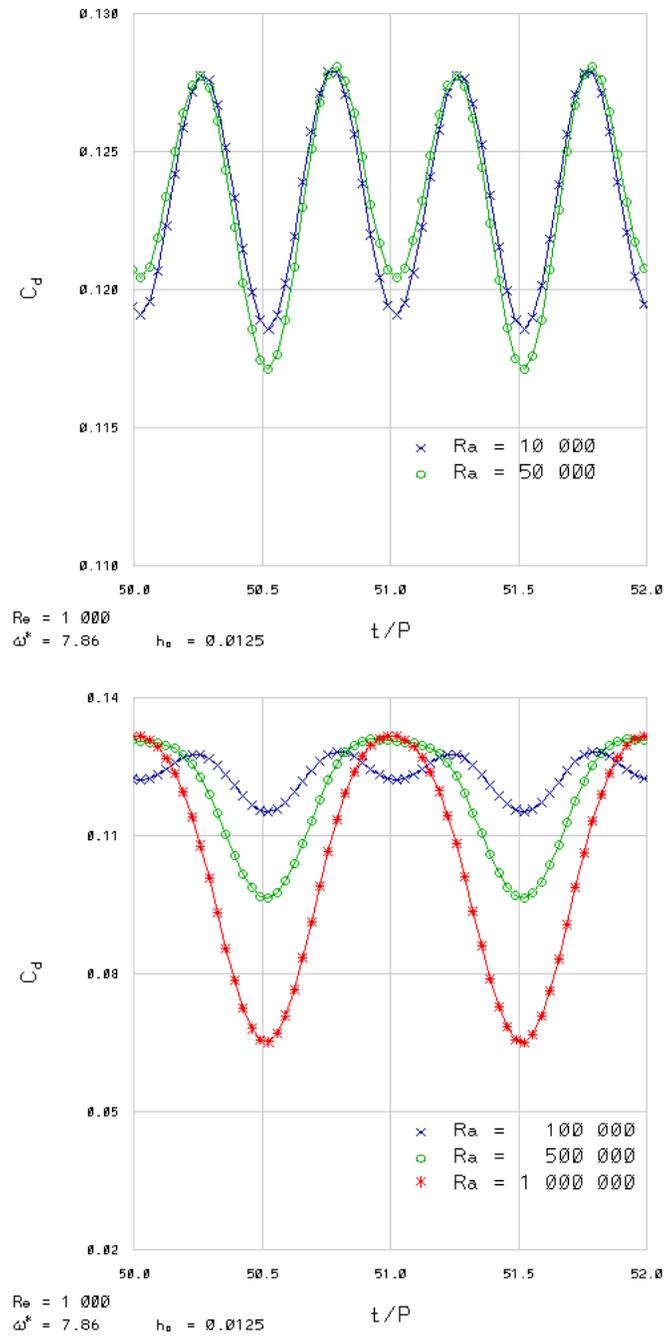


Figura 6.49: Coeficientes de arrastre; *plunging*.

El C_l también decrece, como se observa en la figura 6.50, y desde el primer caso con flotación, $Ra = 10 \cdot 10^3$, observa una sustentación media negativa, si bien es cierto que muy próxima a cero. Con el aumento del número de Rayleigh se continúa mermando la sustentación y la tendencia se mantiene hasta el último caso, con $Ra = 10^6$, donde figura un valor medio de -0.388 . A diferencia del arrastre, el comportamiento de la sustentación en el tiempo no muestra cambios significativos a diferentes números de Rayleigh.

Finalmente, el número de Nusselt (figura 6.51) se mantiene casi invariante, considerando que observa cambios menores al 0.29% en el valor medio, hasta el caso con $Ra = 10^6$, donde decrece 1.16%. Si bien con este parámetro se observa un comportamiento oscilatorio con dos crestas por periodo, se tiene que la amplitud es limitada y que con el aumento del número de Rayleigh la segunda cresta se reduce, lo cual se aprecia más claramente con $Ra = 10^6$.

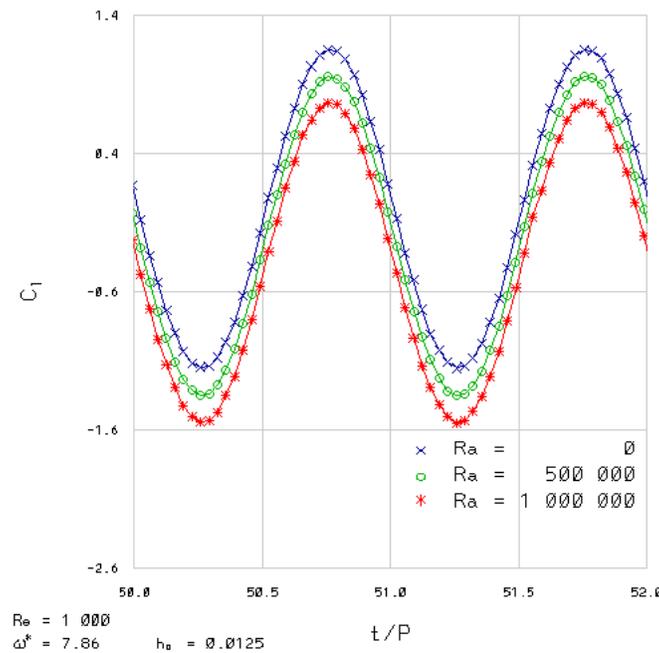
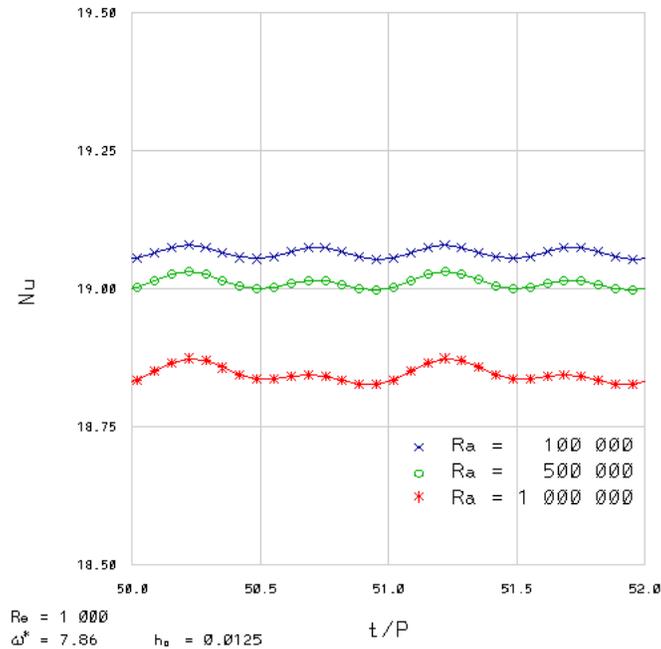


Figura 6.50: Coeficientes de sustentación; *plunging*.

Figura 6.51: Números de Nusselt; *plunging*.

6.3.1. Análisis de resultados.

En este caso, el comportamiento aerodinámico se ve influenciado negativamente por el aumento de la flotación, terminando en $Ra = 10^6$ con un $\overline{C_l}/\overline{C_d} = -3.767$. Cabe comparar estos resultados con el caso estático que tiene el mismo ángulo de ataque geométrico, pues el movimiento de *plunging* amortigua la influencia de la flotación: en promedio, el $\overline{C_l}/\overline{C_d}$ es un 15 % más positivo cuando se incorpora este movimiento.

Por otro lado, el número de Nusselt también disminuye, si bien es cierto que ligeramente, con la influencia de la flotación. Retomando el cotejo con el caso estático, se observa que la transferencia de calor se ve levemente beneficiada con la traslación oscilatoria, aumentando, en promedio, un 2%. También el efecto del número de Rayleigh se ve amortiguado, ya que la disminución máxima en el número de Nusselt es 43 % menor con el movimiento de *plunging*.

Conviene notar que en el caso con alto número de Rayleigh la estela se deflecta hacia arriba, a la vez que se ensancha; en la parte de la estela más lejana al perfil, el vórtice con circulación antihoraria se bifurca, quedando en medio un vórtice con circulación horaria. Este efecto puede observarse gradualmente en el mapa de casos (figura 6.53), donde se muestra la distribución de vorticidad para diferentes números de Rayleigh, el cual crece en la dirección del eje.

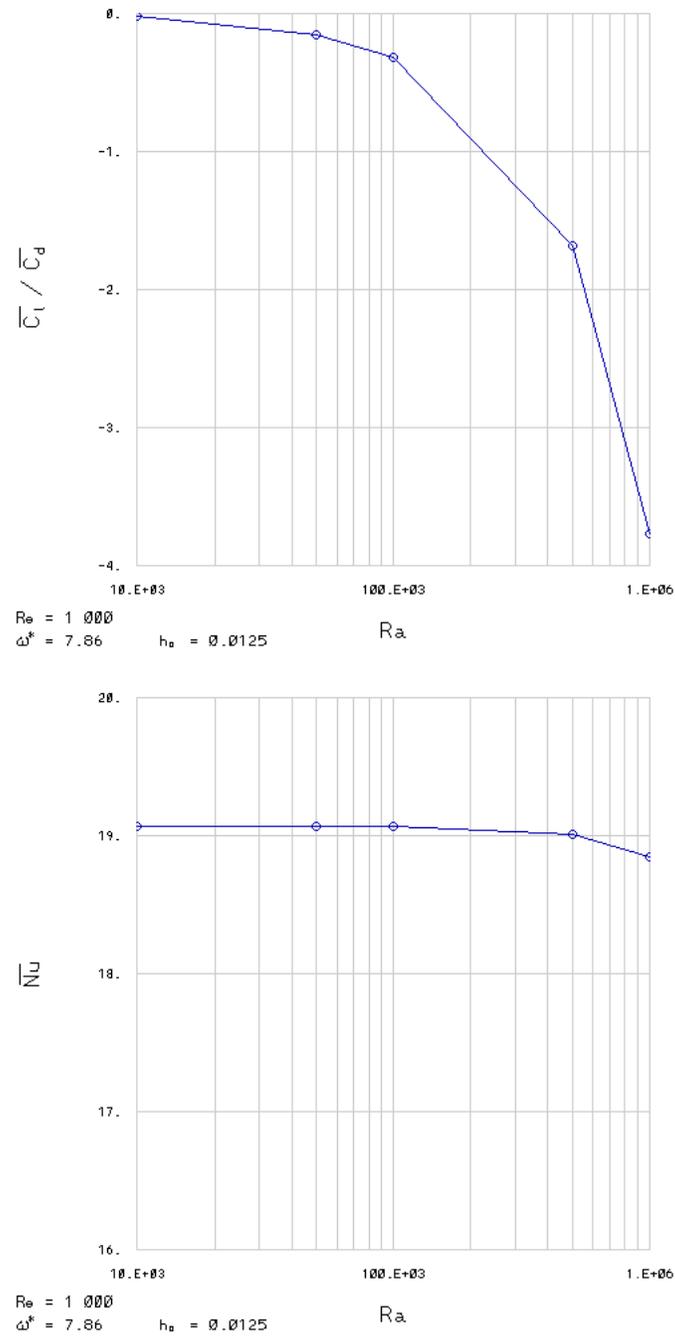
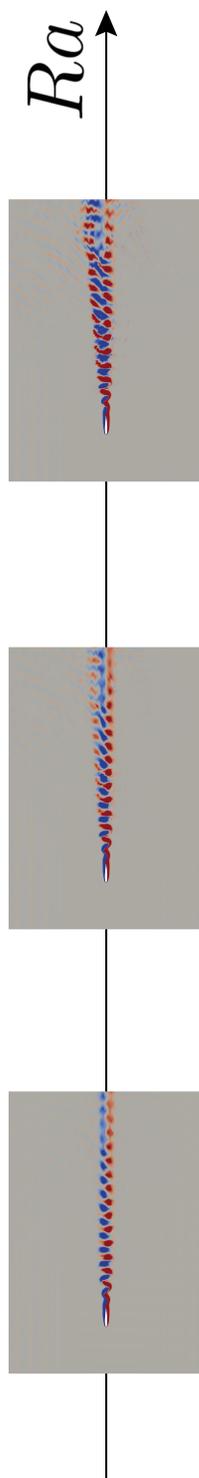


Figura 6.52: Influencia del número de Rayleigh; *plunging*.

Figura 6.53: Mapa de casos para el perfil con movimiento de *plunging*.

6.4. Comportamiento aerodinámico y transferencia de calor en un perfil aerodinámico con movimientos de *pitching* y *plunging* acoplados: $\alpha_0 = 1^\circ$, $h_0 = 0.0125$.

Para este caso se acoplan los dos movimientos previamente abordados, donde los parámetros son los mismos que se usaron en el caso de *plunging*, con $\omega^* = 7.86$, $h_0 = 0.0125$ y $Re = 1,000$, con la adición de $\alpha_0 = 1^\circ$, que es la misma amplitud empleada en el caso de *pitching*. El ángulo de ataque medio es $\alpha_m = 0^\circ$. Cabe mencionar que la frecuencia es la misma para ambos movimientos y que no hay desfase entre ellos. Nuevamente, el rango de números de Rayleigh va de 0 a 10^6 .

Caso con <i>plunging</i> y <i>pitching</i> acoplados, $Re = 1,000$.						
h_0	ω^*	Ra	$\overline{C_d}$	$\overline{C_l}$	$\overline{C_l}/\overline{C_d}$	\overline{Nu}
α_0 [°]						
0.0125	7.86	0	0.123	-0.003	-0.024	18.782
		10,000	0.123	-0.007	-0.057	18.782
		50,000	0.123	-0.024	-0.195	18.781
		100,000	0.122	-0.045	-0.369	18.779
		500,000	0.117	-0.210	-1.795	18.710
		1,000,000	0.100	-0.408	-4.080	18.496

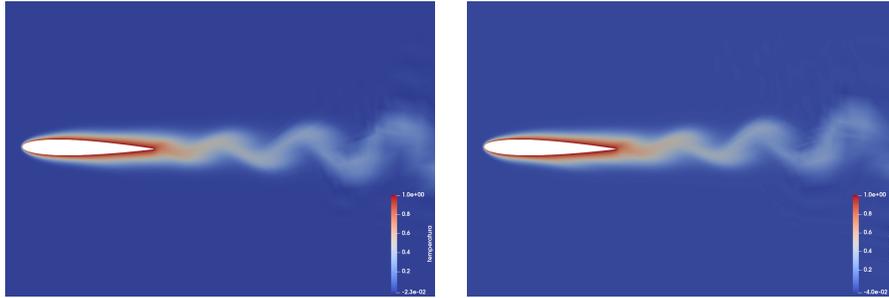
Tabla 6.5: Perfil con movimientos acoplados de *pitching* y *plunging*. El número de Reynolds es $Re = 1,000$, con un ángulo de ataque geométrico medio nulo. La amplitud del *pitching* es $h_0 = 0.0125$ y la del *plunging* es $\alpha_0 = 1^\circ$. La frecuencia es $\omega^* = 7.86$. El rango de números de Rayleigh es $0 < Ra < 1,000,000$.

En el campo de flujo mostrado en la figura 6.54 se observa, aunado al consistente cambio de posición del punto de estancamiento, un comportamiento análogo al caso con *plunging*: en el caso con alto número de Rayleigh, el flujo es más lento en la superficie superior, además que la sustentación alcanza su valor máximo cuando el perfil alcanza la mayor posición vertical y el ángulo de ataque más grande. Sin embargo, esta vez el punto de desprendimiento de vórtices es ligeramente más lejano al borde de salida del perfil, además de que la bifurcación del vórtice en sentido antihorario se presenta en una zona más alejada de la estela.

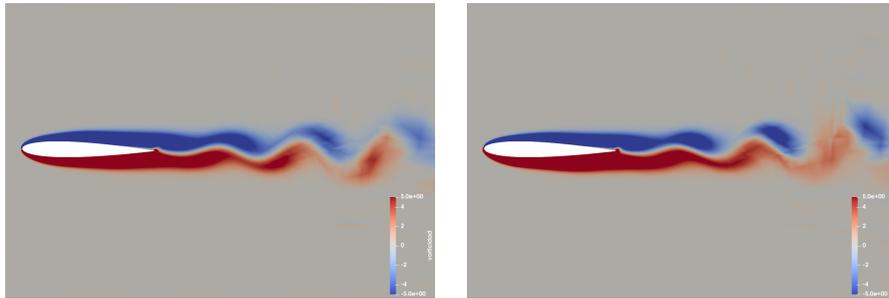
En lo que respecta al C_d , se tiene prácticamente el mismo comportamiento con el aumento de la flotación hasta $Ra = 100 \cdot 10^3$, donde el valor medio comienza a decrecer. Posteriormente se continúa con esa tendencia al decrecer 5% con $Ra = 500 \cdot 10^3$ y después otro 17% en $Ra = 10^6$. Por otro lado, la evolución del C_d se modifica notablemente a partir de $Ra = 500 \cdot 10^3$, observando un valle más profundo en cada periodo.

$Ra = 10^4$.

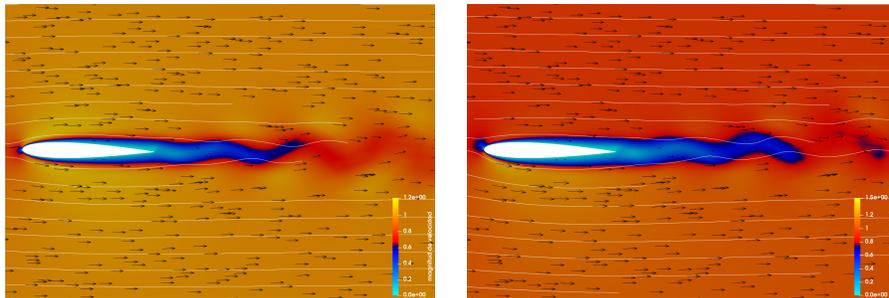
$Ra = 10^6$.



Campo de temperaturas.

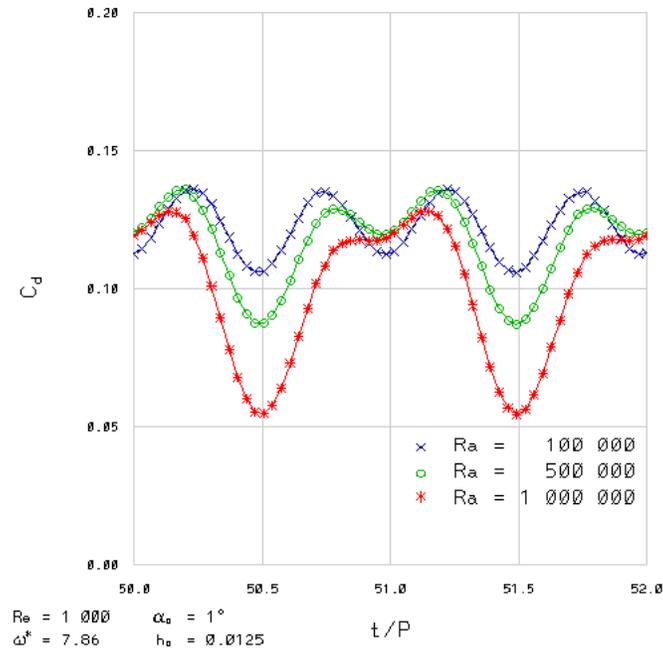


Distribución de vorticidad.

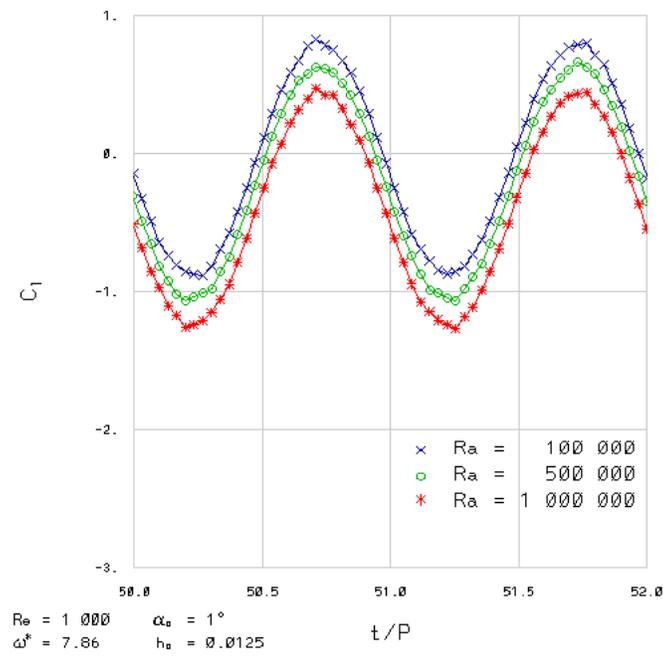


Campo de velocidades.

Figura 6.54: Campo de temperaturas, distribución de vorticidad y campo de velocidades; caso con movimientos acoplados.



(a) Coeficientes de arrastre.



(b) Coeficientes de sustentación.

Figura 6.55: Coeficientes aerodinámicos; movimientos acoplados.

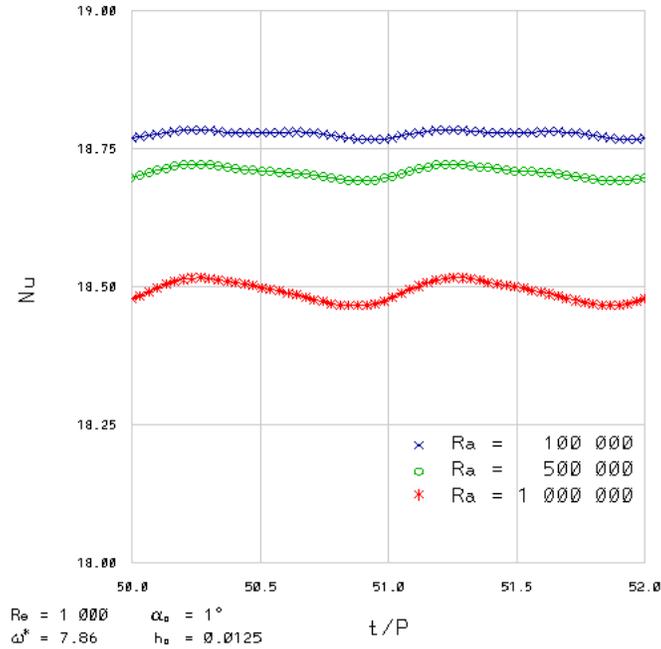


Figura 6.56: Números de Nusselt; movimientos acoplados.

Por su parte, el C_l muestra un comportamiento similar en el valor medio, decreciendo con el incremento del número de Rayleigh hasta llegar a $\overline{C_l} = -0.408$ en $Ra = 10^6$. El comportamiento de la sustentación no muestra cambios significativos en el tiempo salvo por la disminución en el valor medio. Finalmente, el número de Nusselt observa una evolución periódica que se modifica con el incremento del número de Rayleigh, observando una cresta cada vez más marcada en la primera parte del ciclo. Su valor medio también se ve mermado con el aumento de la flotación, reduciéndose 1.55% con $Ra = 10^6$.

6.4.1. Análisis de resultados.

Similarmente al caso de *plunging* puro, el comportamiento aerodinámico se ve disminuido con el aumento del número de Rayleigh. Sin embargo, esta vez el movimiento de *pitching* acoplado hace que el desempeño sea más bajo que en el caso anterior, en promedio un 14.58%. Asimismo, el número de Nusselt disminuye paulatinamente guardando cercanía con el caso de *plunging* puro, aunque en promedio es 1.62% más reducido.

El mapa de casos, figura 6.58, muestra la distribución de vorticidad para diferentes números de Rayleigh, el cual crece en la dirección del eje; se puede apreciar cómo la estela se deflecta y ensancha gradualmente, así como la bifurcación de vórtices antes mencionada.

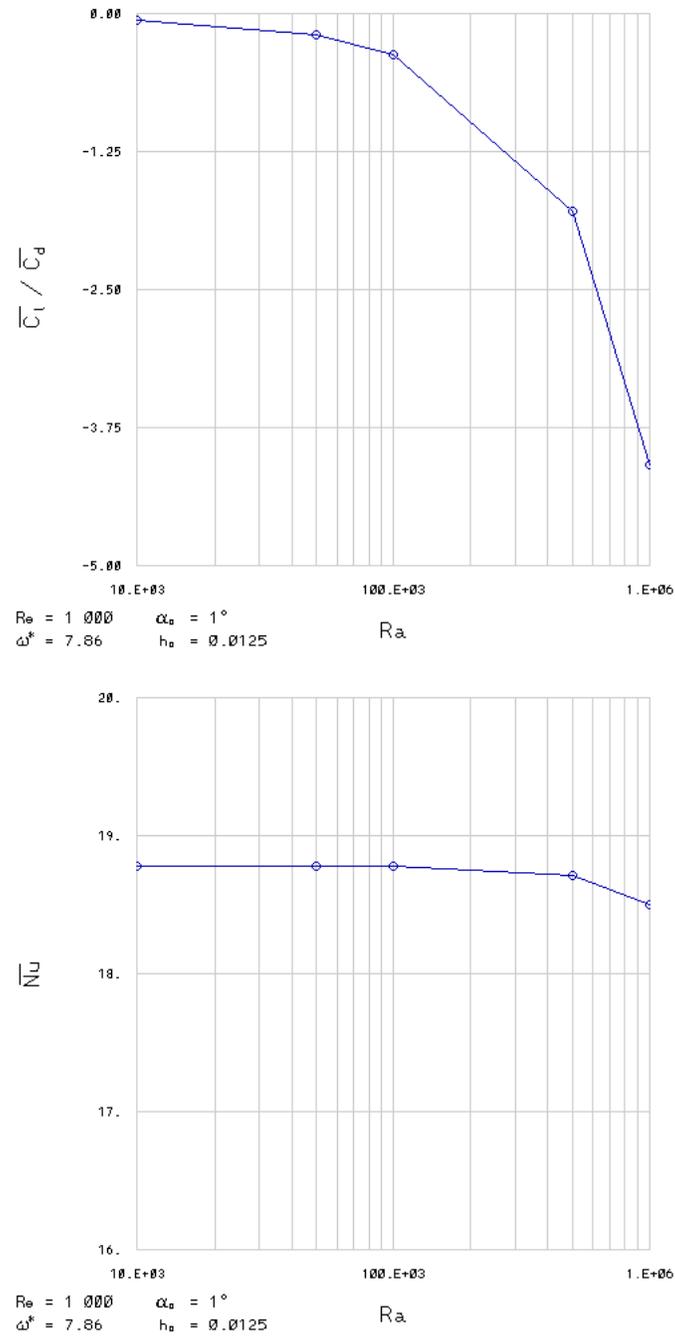


Figura 6.57: Influencia del número de Rayleigh; movimientos acoplados.

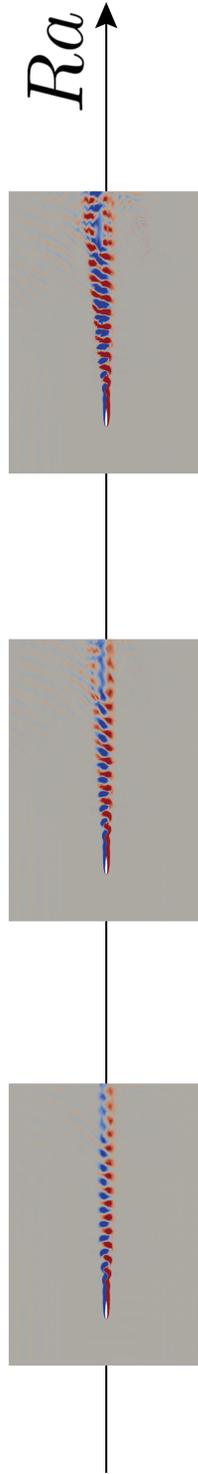


Figura 6.58: Mapa de casos para el perfil aerodinámico con los movimientos acoplados.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo a futuro.

Los resultados muestran que, en términos generales, el aumento del número de Rayleigh tiene un impacto negativo en el desempeño aerodinámico, pues el punto de estancamiento cercano al borde de ataque se desplaza hacia la superficie superior (o al mismo borde, si el ángulo de ataque geométrico es suficientemente amplio). De los casos presentados, la excepción es el caso con $Re = 30$ y $Ra = 5,000$, donde se genera un vórtice en la superficie inferior que hace, por un lado, que la corriente baje su velocidad en esa zona, y por otro, que el fluido impacte directamente al perfil en dirección vertical, aumentando con creces la sustentación y el propio desempeño aerodinámico, pasando de $\overline{C_l}/\overline{C_d} = -6.2$, con $Ra = 2,500$, a $\overline{C_l}/\overline{C_d} = 1.8$. En cuanto al número de Nusselt el comportamiento es similar: decrece hasta $Ra = 2,500$, pero aumenta cuando $Ra = 5,000$ en 1 %.

El incremento en el número de Reynolds hace que la influencia del número de Rayleigh se reduzca, ya que el flujo pasa a ser dominado por los efectos inerciales y los de flotación pierden relevancia; cuando el número de Reynolds aumenta de 60 a 120, el decremento en el desempeño aerodinámico es 80 % más reducido, mientras que la reducción del número de Nusselt es 92 % menor. Es decir, el efecto del incremento en la flotación se ve limitado. También el aumento en el ángulo de ataque amortigua el decremento del desempeño aerodinámico e incluso demora la caída en pérdida. Por ejemplo, el decremento en el desempeño aerodinámico con $Ra = 10^6$ para el perfil con $\alpha_m = 5^\circ$ es de 3.802, mientras que cuando $\alpha_m = 20^\circ$ la reducción es tan solo de 0.201; esto es 92 % menos que el caso anterior. En lo que respecta a la transferencia de calor, el aumento en el ángulo de ataque hace que el número de Nusselt incremente junto con el número de Rayleigh, observación que se presenta cuando $\alpha \geq 10^\circ$.

Para los casos con movimiento de *pitching*, el incremento en la flotación también merma al desempeño aerodinámico. Con un ángulo de ataque medio $\alpha_m = 0^\circ$, el aumento en la frecuencia disminuye este efecto en 18 %. Para

$\alpha_m = 15^\circ$ el impacto del incremento en el número de Rayleigh es menor, en 72 %, coincidiendo con el comportamiento reportado anteriormente. El número de Nusselt se comporta de manera similar al caso con $\alpha_0 = 0^\circ$ y $h_0 = 0$, en el sentido de que con $\alpha_m = 0^\circ$ disminuye cuando crece la flotación, pero aumenta con la misma cuando $\alpha_m = 15^\circ$.

El movimiento de *plunging*, con frecuencia $\omega^* = 7.86$ y amplitud $h_0 = 0.0125$, también reduce el impacto del número de Rayleigh sobre el desempeño aerodinámico respecto del perfil con $\alpha_0 = 0^\circ$, $h_0 = 0$: el decremento del desempeño es 15 % menor. Incluso el perfil con movimientos acoplados muestra este comportamiento, aunque con los parámetros considerados ($h_0 = 0.0125$, $\alpha_m = 1^\circ$, $\omega^* = 7.86$, $\psi = 0$) el amortiguamiento es menor: 8.5 %. El número de Nusselt muestra un decremento en ambos casos cuando aumenta la flotación, siendo un 23 % menor cuando sólo se tiene movimiento de *plunging*.

Como trabajo futuro se considera ampliar los rangos de los parámetros considerados, especialmente el número de Rayleigh, así como extender la amplitud de las oscilaciones, considerando que los casos con el perfil en movimiento del presente trabajo son de baja amplitud. Queda investigar si para una flotación suficientemente alta el desempeño aerodinámico mejora o si la tendencia a la baja se mantiene, así como observar las estructuras de flujo asociadas a la convección natural, como las plumas convectivas. En ese sentido, se contempla hacer análisis de estabilidad lineal para identificar no sólo inestabilidades hidrodinámicas sino, especialmente, inestabilidades térmicas, que permitan identificar en qué condiciones se tendría preponderancia de la convección mixta, e incluso si este mecanismo provocaría que el flujo se hiciera tridimensional, así como identificar los efectos en el comportamiento aerodinámico y en la propia transferencia de calor.

Referencias.

- Adrian, Ronald J., Sivaram P. Gogineni y Alexander J. Smits (1997). *Drag of Blunt Bodies and Streamlined Bodies*. URL: https://www.princeton.edu/~asmits/Bicycle_web/blunt.html. (accessed: 10.10.2021).
- Akbari, M.H. y S.J. Price (2003). «Simulation of dynamic stall for a NACA 0012 airfoil using a vortex method». En: *Journal of Fluids and Structures* 17, págs. 855-874.
- Amiralaei, M.R., H. Alighanbarin y S.M. Hashemi (2010). «An investigation into the effects of unsteady parameters on the aerodynamics of a low Reynolds number pitching airfoil». En: *Journal of Fluids and Structures* 26, págs. 979-993.
- Anderson, J. M. *et al.* (1998). «Oscillating foils of high propulsive efficiency». En: *Journal of Fluid Mechanics* 360, págs. 41-72.
- Barkley, Dwight y Ronald D. Henderson (1996). «Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder». En: *Journal of Fluid Mechanics* 322, págs. 215-241.
- Çengel, Yunus A. y John M. Cimbala (2014). *Fluid mechanics: fundamentals and applications*. McGraw - Hill Education. ISBN: 9780073380322.
- Chierighin, N., D. J. Cleaver e I. Gursul (2019). «Unsteady Lift and Moment of a Periodically Plunging Airfoil». En: *AIAA Journal* 57, págs. 208-222.
- Crouch, Tom D. (s.f.). *Sir George Cayley. British Inventor and Scientist*. URL: <https://www.britannica.com/biography/Sir-George-Cayley>. (accessed: 10.10.2021).
- Donea, Jean *et al.* (2004). «Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods». En: *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, págs. 413-437.
- Fischer, Paul, Martin Schmitt y Ananias Tomboulides (2017). «Recent Developments in Spectral Element Simulations of Moving-Domain Problems». En: *Recent Progress and Modern Challenges in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science*. Ed. por Roderick Melnik, Roman Makarov y Jacques Belair. New York, NY: Springer New York, págs. 213-244.
- Gershuni, Grigori Z. y E. M. Zhukhovitskii (1976). *Convective stability of incompressible fluids*. Keter publishing House Jerusalem, Ltd. ISBN: 0706515625.
- Hinz, Denis F., Hekmat Alighanbari y Christian Breitsamter (2013). «Influence of heat transfer on the aerodynamic performance of a plunging and pitching NACA0012 airfoil at low Reynolds numbers». En: *Journal of Fluids and Structures* 37, págs. 88-99.

- Jaroszewicz, Adam, Jerzy Sasiadek y Krzysztof Sibilski (2013). «"Modeling and Simulation of Flapping Wings Entomopter in Martian Atmosphere»». En: *Aerospace Robotics: Selected Papers from I Conference on Robotics in Aeronautics and Astronautics*. Ed. por Jerzy Sasiadek. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 143-162.
- Kesel, Antonia B. (2000). «Aerodynamic characteristics of dragonfly wing sections compared with technical aerofoils»». En: *Journal of Experimental Biology* 203, págs. 3125-3135.
- Kurtulus, Dilek Funda (2015). «On the unsteady behaviour of the flow around NACA0012 airfoil with steady external conditions at $Re = 1000$ »». En: *International Journal of Micro Air Vehicles* 7, págs. 301-326.
- (2019). «Unsteady aerodynamics of a pitching NACA 0012 airfoil at low Reynolds number»». En: *International Journal of Micro Air Vehicles* 11, págs. 1-21.
- Lai, J. C. S. y M. F. Platzer (1999). «Jet Characteristics of a Plunging Airfoil»». En: *AIAA Journal* 37, págs. 1529-1537.
- Lankford, James, David Mayo e Inderjit Chopra (2016). «Computational investigation of insect-based flapping wings for micro air vehicle applications»». En: *International Journal of Micro Air Vehicles* 8, págs. 64-78.
- Levi, Enzo (1976). *Mecánica del medio continuo*. Limusa. ISBN: 0706515625.
- Lian, Yongsheng, Michael V. Ol y Wei Shyy (2008). «Comparative Study of Pitch-Plunge Airfoil Aerodynamics at Transitional Reynolds Number»». En: *AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* 46, págs. 29-40.
- Lian, Yongsheng y Wei Shyy (2007). «Aerodynamics of low Reynolds number plunging airfoil under gusty environment»». En: *AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* 45, págs. 29-40.
- Majumdar, Dipanjan, Bose Chandan y Sunetra Sarkar (2022). «Transition boundaries and an order-to-chaos map for the flow field past a flapping foil»». En: *Journal of Fluid Mechanics* 942, A40-1 - A40-32.
- Mateescu, D. y M. Abdo (2009). «Analysis of flows past airfoils at very low Reynolds numbers»». En: *Journal of Aerospace Engineering* 224, págs. 757-775.
- Medjroubi, W. *et al.* (2011). «High-order numerical simulations of the flow around a heaving airfoil»». En: *Computers and Fluids* 51, págs. 68-84.
- Moriche, M., O. Flores y M. García-Villalba (2017). «On the aerodynamic forces on heaving and pitching airfoils at low Reynolds number»». En: *Journal of Fluid Mechanics* 828, págs. 395-423.
- Moschetta, Jean-March (2014). «The aerodynamics of micro air vehicles: technical challenges and scientific issues»». En: *International Journal of Engineering Systems Modeling and Simulation* 6, págs. 134-148.
- Mueller, Thomas J. (2009). «On the birth of micro air vehicles»». En: *International Journal of Micro Air Vehicles* 1, págs. 1-12.
- Mulleners, Karen y Markus Raffel (2012). «The onset of dynamic stall revisited»». En: *Experiments in fluids* 52, págs. 779-793.
- NACA 4 digit airfoil generator (s.f.). URL: <http://airfoiltools.com/airfoil/naca4digit>. (accessed: 10.10.2021).

- Nakayama, Y. y R. F. Boucher (2000). *Introduction to Fluid Mechanics*. Butterworth - Heinemann. ISBN: 0340676493.
- Ol, Michael V., Luis Bernal *et al.* (2009). «Shallow and deep dynamic stall for flapping low Reynolds number airfoils». En: *Experiments in fluids* 46, págs. 883-901.
- Ol, Michael V., Mark Reeder *et al.* (2009). «Computation vs. Experiment for High-Frequency Low-Reynolds Number Airfoil Plunge». En: *International Journal of Micro Air Vehicles* 1, págs. 99-119.
- Petricca, Luca, Per Ohlckers y Christopher Grinde (2011). «Micro- and Nano-Air Vehicles: State of the Art». En: *International Journal of Aerospace Engineering* 2011.
- Samiee, Ahmad *et al.* (2018). «Improvement of Airfoils Aerodynamic Efficiency by Thermal Camber Phenomenon at Low Reynolds Number». En: *Journal of Aerospace Technology and Management* 10.
- Shrestha, Prateek (2020). «Heat transfer study of airfoil arrays in low Reynolds number gas flows». Auburn University.
- Shyy, Wey *et al.* (2008). *Aerodynamics of Low Reynolds Number Flyers*. Cambridge University Press. ISBN: 9780511478710.
- Sunada, S. *et al.* (2002). «Comparison of Wing Characteristics at an Ultralow Reynolds Number». En: *Journal of Aircraft* 39, págs. 331-338.
- Verma, Suyash y Arman Hemmati (2022). «Characterization of bifurcated dual vortex streets in the wake of an oscillating foil». En: *Journal of Fluid Mechanics* 945, A7-1 - A7-32.
- White, Frank M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw - Hill Education. ISBN: 9789385965494.
- Winslow, Justin *et al.* (2018). «Basic Understanding of Airfoil Characteristics at Low Reynolds Number (10^4 - 10^5)». En: *AIAA Journal of Aircraft* 55, págs. 1050-1061.
- Xiao, Tianhang *et al.* (2016). «Numerical study on the flow characteristics of micro air vehicle wings at low Reynolds numbers». En: *International Journal of Micro Air Vehicles* 8, págs. 29-40.

Apéndice A

El perfil aerodinámico.

Los cuerpos que están inmersos en un flujo se pueden clasificar según su forma. Se dice que un cuerpo es de frente ancho o con interferencia (*blunt* o *bluff*) si tiende a bloquear el flujo, como un edificio, un cuadrado o un cilindro. Por otro lado, se dice que un cuerpo es aerodinámico (*streamlined*) si se alinea su forma con las líneas de corriente en el flujo (Çengel y Cimbala, 2014). Un cuerpo aerodinámico se ve como un pez, o como un auto deportivo. Cabe aclarar, sin embargo, que para ángulos de ataque muy elevados un perfil aerodinámico se considera como un cuerpo de frente ancho, en especial cuando entra en pérdida de sustentación.

Según Nakayama y Boucher, un perfil aerodinámico puede definirse como un cuerpo manufacturado con el objetivo de hacer que la sustentación sea mayor que el arrastre. Se pueden identificar los elementos que componen su geometría de la siguiente manera, como se muestra en la figura A.1: el *borde de ataque* es el extremo al que el flujo contacta primero, mientras que el otro es el *borde de salida*; la línea recta que conecta los bordes es la *cuerda*; la línea que conecta los puntos medios entre las superficies superior e inferior del perfil se conoce como *línea de combadura* o *línea de curvatura*; la altura máxima de la línea de curvatura respecto de la cuerda se conoce como *curvatura máxima*; el *espesor máximo* es la mayor distancia vertical entre la superficie superior y la inferior, y el ángulo formado entre la dirección del flujo y la cuerda se conoce como *ángulo de ataque geométrico*.

Muchas de las geometrías de los perfiles aerodinámicos están nombradas a partir de las instituciones que han hecho estudios sobre sus características. Algunos de los más conocidos son los de la Universidad de Göttingen, en Alemania, la *Royal Aircraft Establishment* (RAE) de Reino Unido y la National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), renombrada en 1959 como la National Aeronautics and Space Administration (NASA). Estas últimas son de particular interés para el presente escrito porque el perfil que se emplea es precisamente un perfil NACA.

Los perfiles NACA se identifican con un conjunto de números que especifican las características de sus dimensiones. Los de cuatro números, como es el caso

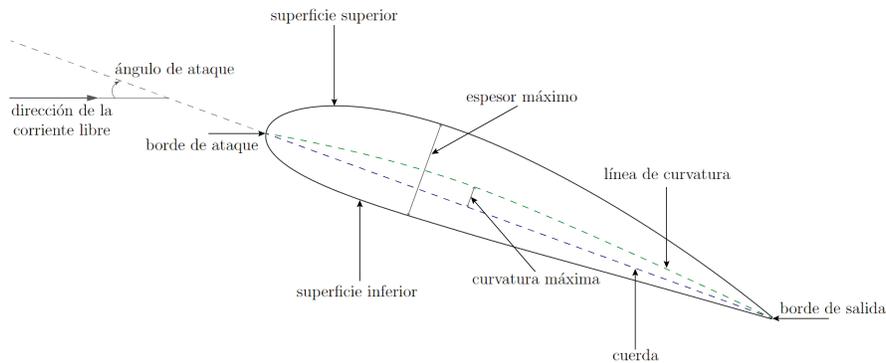


Figura A.1: Esquema de los elementos de un perfil aerodinámico.

del perfil que figura en este trabajo, pueden representarse de manera general como NACA $MPXX$, y los números que lo identifican describen al perfil de la siguiente manera:

- M es curvatura máxima multiplicada por 100; su valor se encuentra entre 0 y 0.09, o 0% y 9% de la cuerda.
- P es la posición, relativa a la cuerda, de la curvatura máxima multiplicada por 10; dicha cantidad oscila entre 0 y 0.9, o 0% y 90% de la cuerda.
- XX es el espesor máximo del perfil multiplicado por 100; puede tener un valor de hasta 0.4, o 40% de la cuerda.

De tal manera, el perfil NACA0012 se caracteriza por tener curvatura nula y un espesor del 12% de la cuerda.

Apéndice B

Adimensionalización de las ecuaciones.

Para generar las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía térmica en forma adimensional, se proponen las siguientes variables adimensionales:

$$u_i^* = \frac{u_i}{u_\infty} \quad t^* = \frac{t u_\infty}{c} \quad x_i^* = \frac{x_i}{c}$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_a} \quad \Delta T_0^* = \frac{\Delta T_0}{\Delta T_a}$$

donde i corresponde a cada una de las componentes espaciales ($i \in \{1, 2\}$), u es la velocidad del fluido, u_∞ es la velocidad de corriente libre, t es el tiempo, x es la posición, c es la cuerda del perfil aerodinámico, ΔT_0 es la diferencia entre la temperatura del fluido en un punto del campo de flujo, T , y una temperatura de referencia, T_0 , mientras que ΔT_a es la diferencia entre la temperatura del perfil aerodinámico, T_a , y la temperatura de la corriente libre, T_∞ , es decir:

$$\Delta T_0 = T - T_0 \quad \Delta T_a = T_a - T_\infty .$$

En el proceso de adimensionalización se requiere sustituir las variables originales expresadas en términos de las adimensionales. Efectuando los despejes correspondientes se tiene:

$$u_i = u_i^* u_\infty \quad t = \frac{t^* c}{u_\infty} \quad x_i = x_i^* c .$$

En el caso de la temperatura, conviene contar tanto con esta misma variable como con la diferencia de temperaturas:

$$T = \Delta T_a T^* + T_\infty \quad \Delta T_0 = \Delta T_a \Delta T_0^* .$$

B.1. Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad para un flujo incompresible es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (\text{B.1})$$

En principio se efectúa el producto escalar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \right) \cdot (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2) = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{B.2})$$

donde \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son los vectores unitarios que apuntan en cada dirección del sistema de coordenadas rectangulares. Posteriormente se sustituyen las variables adimensionales como sigue:

$$\frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_1^* c)} + \frac{\partial(u_2^* u_\infty)}{\partial(x_2^* c)} = 0 .$$

Se extraen los valores constantes u_∞ y c de las derivadas parciales y se factorizan:

$$\left(\frac{u_\infty}{c} \right) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \left(\frac{u_\infty}{c} \right) \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0$$

$$\frac{u_\infty}{c} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right) = 0 .$$

Después se multiplican ambos lados de la ecuación por c/u_∞ para obtener:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (\text{B.3})$$

y si se define el operador nabla adimensional como:

$$\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x_1^*} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \mathbf{e}_2 \quad (\text{B.4})$$

se llega finalmente a la ecuación adimensionalizada:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \quad (\text{B.5})$$

B.2. Ecuación de cantidad de movimiento.

La ecuación de cantidad de movimiento viene dada por

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{B.6})$$

donde μ es la viscosidad dinámica y \mathbf{g} es el vector gravedad, $-g \mathbf{e}_2$, apuntando \mathbf{e}_2 en dirección vertical. Se tiene que la densidad que acompaña a la derivada material de la velocidad es constante, toma un valor de referencia y se denota ρ_0 . Por otro lado, se requiere una ecuación de estado para la densidad en el término de fuerza de cuerpo, asociado a la gravedad, la cual depende de la presión y de la temperatura. Es decir, que:

$$\rho = \rho(p, T) . \quad (\text{B.7})$$

Diferenciando (B.7) se obtiene:

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT . \quad (\text{B.8})$$

Por otro lado, se definen a los coeficientes de compresibilidad isotérmica, κ_{ci} , y de expansión térmica, β , como en (Çengel y Cimbala, 2014):

$$\kappa_{ci} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad \beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p .$$

Despejando las derivadas parciales se tiene:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \rho_0 \kappa_{ci} \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\rho_0 \beta$$

y sustituyendo los resultados anteriores en (8) se llega a:

$$d\rho = \rho_0 \kappa_{ci} dp - \rho_0 \beta dT$$

$$\frac{1}{\rho_0} d\rho = \kappa_{ci} dp - \beta dT . \quad (\text{B.9})$$

Tómese en cuenta que se asume que las variaciones en la temperatura y en la presión, ΔT y Δp respectivamente, son pequeñas, y en ese mismo sentido lo serán los cambios en la densidad. Ahora bien, la expresión (B.9) puede aproximarse por medio de cambios finitos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta \rho = \kappa_{ci} \Delta p - \beta \Delta T \quad (\text{B.10})$$

donde la diferencia de temperaturas es entre la de cualquier punto en el campo de flujo y una temperatura de referencia; es decir, $\Delta T = \Delta T_0$. El miembro izquierdo puede escribirse, a su vez, como:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 . \quad (\text{B.11})$$

De esta forma, sustituyendo (B.11) en (B.10) se sigue que:

$$\frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \kappa_{ci} \Delta p - \beta \Delta T_0 \quad (\text{B.12})$$

y despejando la densidad de (B.12):

$$\rho = \rho_0(1 + \kappa_{ci} \Delta p - \beta \Delta T_0) . \quad (\text{B.13})$$

Sin embargo, se asume que las variaciones de densidad debidas a la presión no uniforme son muy limitadas en comparación con aquellas que se deben a los cambios de temperatura:

$$\kappa_{ci} \Delta p \ll \beta \Delta T_0$$

así que, despreciando el término de cambio de presión, (B.13) se reduce a:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) . \quad (\text{B.14})$$

Nótese que la persistencia del término asociado a la temperatura no uniforme se debe a que, en principio, este es el mecanismo que produce la convección. Sustituyendo (B.14) en (B.6) se tiene:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) \mathbf{g} . \quad (\text{B.15})$$

Observando el miembro derecho de la ecuación,

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) \mathbf{g} \quad (\text{B.16})$$

se tiene que la presión puede expresarse con

$$p = \bar{p} + \Delta p \quad (\text{B.17})$$

como se indica en (Gershuni y Zhukhovitskii, 1976), donde \bar{p} es la presión hidrostática con la densidad de referencia y Δp es el cambio de la presión respecto a \bar{p} . Sustituyendo (B.17) en (B.16) se tiene:

$$-\nabla(\bar{p} + \Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) \mathbf{g} \quad (\text{B.18})$$

y desarrollando los paréntesis en (B.18) se llega a:

$$-\nabla \bar{p} - \nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \beta \Delta T_0 \mathbf{g} . \quad (\text{B.19})$$

Ahora bien, la presión hidrostática varía únicamente con la dirección vertical de la siguiente manera:

$$\Delta \bar{p} = -\rho_0 g \Delta x_2 \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta x_2} = -\rho_0 g$$

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} -\rho_0 g$$

$$\frac{d\bar{p}}{dx_2} = -\rho_0 g . \quad (\text{B.21})$$

El gradiente de la presión hidrostática viene dado por

$$\nabla \bar{p} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} \mathbf{e}_2$$

pero como no hay cambios en la primera dirección, y considerando el resultado en (B.21), se tiene que:

$$\nabla \bar{p} = \frac{d\bar{p}}{dx_2} \mathbf{e}_2 = -\rho_0 g \mathbf{e}_2 = \rho_0 \mathbf{g} . \quad (\text{B.22})$$

Sustituyendo (B.22) en (B.19) se sigue:

$$-\rho_0 \mathbf{g} - \nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \beta \Delta T_0 \mathbf{g}$$

para llegar finalmente, después de simplificar términos semejantes, a:

$$-\nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 g \beta \Delta T_0 \mathbf{e}_2. \quad (\text{B.23})$$

Con (B.23), la ecuación (B.15) se hace:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 g \beta \Delta T_0 \mathbf{e}_2$$

y si se divide entre ρ_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta p) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + g \beta \Delta T_0 \mathbf{e}_2. \quad (\text{B.24})$$

donde ν es la viscosidad cinemática. La ecuación (B.24), las suposiciones consideradas y el proceso para llegar a ella se conocen como la aproximación de Boussinesq.

Conviene efectuar el proceso de adimensionalización en cada una de las direcciones espaciales, así que en la primera se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right). \quad (\text{B.25})$$

Incorporando las variables adimensionales, (B.25) se hace:

$$\frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(t^* c / u_\infty)} + u_1^* u_\infty \frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_1^* c)} + u_2^* u_\infty \frac{\partial(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_2^* c)} =$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial(x_1^* c)} + \nu \left(\frac{\partial^2(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_1^* c)^2} + \frac{\partial^2(u_1^* u_\infty)}{\partial(x_2^* c)^2} \right)$$

y al extraer los valores constantes de las derivadas parciales, además de factorizarlos:

$$\left(\frac{u_\infty^2}{c}\right)\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*}\right) = -\frac{1}{\rho_0 c} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_1^*} + \frac{\nu u_\infty}{c^2} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}}\right)$$

para posteriormente multiplicar ambos miembros por c/u_∞^2 , obteniendo:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = -\frac{1}{\rho_0 u_\infty^2} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{u_\infty c} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}}\right). \quad (\text{B.26})$$

Al inspeccionar los términos del miembro derecho de (B.26), se tiene en el que está asociado a la presión que las constantes pueden introducirse a la derivada parcial, es decir:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 u_\infty^2}\right)$$

donde surge la presión adimensional, siendo la escala el producto de la densidad media con el cuadrado de la velocidad de corriente libre, resultando entonces:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 u_\infty^2}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*}. \quad (\text{B.27})$$

Para el otro término en la porción derecha de (B.26), se considera la definición del número de Reynolds:

$$Re = \frac{u_\infty c}{\nu} \quad (\text{B.28})$$

y se nota que el coeficiente del término se compone del mismo cociente que Re pero con los elementos dispuestos recíprocamente, de manera que puede expresarse como:

$$\frac{\nu}{u_\infty c} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}}\right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}}\right). \quad (\text{B.29})$$

Adicionalmente, si se define el operador laplaciano adimensional como:

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{*2}} \quad (\text{B.30})$$

al incorporar (B.30) en (B.29) y usando (B.27), el miembro derecho de la ecuación adimensionalizada termina siendo:

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u_1^*. \quad (\text{B.31})$$

Con lo anterior, al sustituir (B.31) en (B.26), la ecuación adimensionalizada en la primera dirección se escribe:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* u_1^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u_1^*. \quad (\text{B.32})$$

En la segunda dirección se tiene:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + g \beta \Delta T_0. \quad (\text{B.33})$$

El proceso de adimensionalización es muy similar al caso de la primera dimensión, salvo por el último término del miembro derecho, asociado a la gravedad. Sustituyendo con las variables adimensionales y extrayendo valores constantes de las derivadas parciales se llega a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_\infty^2}{c} \right) \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right) = \\ - \frac{1}{\rho_0 c} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_2^*} + \frac{\nu u_\infty}{c^2} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^{*2}} \right) + g \beta \Delta T_a \Delta T_0^*. \end{aligned}$$

Multiplicando toda la ecuación por c/u_∞^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = \\ - \frac{1}{\rho_0 u_\infty^2} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{u_\infty c} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^{*2}} \right) + \frac{c \beta \Delta T_a g}{u_\infty^2} \Delta T_0^*. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Ahora bien, observando el coeficiente del último término,

$$\frac{c \beta \Delta T_a g}{u_\infty^2} \quad (\text{B.35})$$

se observan elementos comunes al número de Rayleigh, que está definido como:

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T_a c^3}{\kappa \nu}. \quad (\text{B.36})$$

donde κ es la difusividad térmica. Además, el cuadrado de la velocidad en el denominador sugiere la presencia del recíproco del número de Reynolds, (B.28), elevado al cuadrado. Se propone entonces completarlo al multiplicar (B.35) por $(\nu^2 c^2)/(\nu^2 c^2)$ y reordenar los factores de la siguiente manera:

$$\frac{c \beta \Delta T_a g}{u_\infty^2} \frac{\nu^2 c^2}{\nu^2 c^2} = \frac{c^3 \beta \Delta T_a g}{\nu^2} \frac{\nu^2}{u_\infty^2 c^2} = \frac{c^3 \beta \Delta T_a g}{\nu^2} \frac{1}{Re^2}.$$

Esta manipulación de términos, además de arrojar al primer parámetro adimensional, permite completar la definición del número de Rayleigh, (B.36), si ahora se multiplica por κ/κ :

$$\frac{1}{Re^2} \frac{c^3 \beta \Delta T_a g \kappa}{\nu^2 \kappa} = \frac{1}{Re^2} \frac{g \beta \Delta T_a c^3 \kappa}{\kappa \nu} \frac{\kappa}{\nu} = \frac{Ra \kappa}{Re^2 \nu}$$

y, finalmente, al reconocer en los factores restantes al recíproco del número de Prandtl, que se define como

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (\text{B.37})$$

se obtiene

$$\frac{Ra}{Re^2} \frac{\kappa}{\nu} = \frac{Ra}{Re^2 Pr}. \quad (\text{B.38})$$

Así entonces, sustituyendo (B.38) en (B.34) y usando los operadores adimensionales (B.4) y (B.30), la ecuación adimensional en la segunda dirección es:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* u_2^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} u_2^* + \frac{Ra}{Re^2 Pr} \Delta T_0^*. \quad (\text{B.39})$$

Finalmente, con (B.32) y (B.39) se puede formular la ecuación de conservación de cantidad de movimiento adimensional en su forma vectorial, siendo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{Ra}{Re^2 Pr} \Delta T_0^* \mathbf{e}_2. \quad (\text{B.40})$$

B.3. Ecuación de la energía.

La ecuación de la energía viene dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (\text{B.41})$$

donde no hay generación de calor. Al desarrollar los operadores diferenciales se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{B.42})$$

y al incorporar las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(t^* c / u_\infty)} + u_1^* u_\infty \frac{\partial(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_1^* c)} + u_2^* u_\infty \frac{\partial(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_2^* c)} = \\ \kappa \left(\frac{\partial^2(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_1^* c)^2} + \frac{\partial^2(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_2^* c)^2} \right). \end{aligned}$$

Extrayendo valores fijos de las derivadas parciales y eliminando las derivadas de constantes:

$$\frac{u_\infty \Delta T_a}{c} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} \right) = \kappa \frac{\Delta T_a}{c^2} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} \right).$$

Al multiplicar ambos miembros por $c/(u_\infty \Delta T_a)$:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} = \frac{\kappa}{u_\infty c} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} \right) \quad (\text{B.43})$$

Si se observa con detenimiento el coeficiente que acompaña al miembro derecho de la ecuación (B.43), $\kappa/(u_\infty c)$, se identifica la porción inercial del número

de Reynolds en el denominador. Para completar el parámetro con la porción viscosa, conviene en principio reescribir el coeficiente de la siguiente manera:

$$\left(\frac{u_\infty c}{\kappa}\right)^{-1}$$

para multiplicar posteriormente por ν/ν :

$$\left(\frac{u_\infty c \nu}{\kappa \nu}\right)^{-1} = \left(\frac{u_\infty c \nu}{\nu \kappa}\right)^{-1}$$

donde además del número de Reynolds se identifica al número de Prandtl. De esta forma:

$$\left(\frac{u_\infty c \nu}{\nu \kappa}\right)^{-1} = \left(Re Pr\right)^{-1} = \frac{1}{Re Pr} . \quad (\text{B.44})$$

Al sustituir (B.44) en (B.43) la ecuación queda:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} \right)$$

y haciendo uso de (B.4) y (B.30), la ecuación de la energía puede escribirse en términos adimensionales como:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* T^* = \frac{1}{Re Pr} \nabla^{*2} T^* . \quad (\text{B.45})$$

Apéndice C

Flujo externo y fuerzas aerodinámicas.

En muchas situaciones se presentan casos de flujos que pasan sobre cuerpos sólidos, desde los glóbulos rojos en el flujo sanguíneo hasta el caso que motiva al presente escrito: un vehículo volador inmerso en el aire. En ocasiones un fluido pasa sobre un cuerpo sin movimiento, como el agua de un río pasando sobre una roca sumergida, y en otros el cuerpo es el que se mueve en el fluido, como una pelota viajando por el aire. Ambos procesos son equivalentes, pues lo que importa es el movimiento relativo entre el fluido y el cuerpo. Este tipo de movimiento se puede estudiar con un sistema de referencia unido al cuerpo y se conoce como flujo externo (Çengel y Cimbala, 2014). Además, se encuentran comúnmente en estudios de ingeniería, como en la aerodinámica (aeronaves, cohetes), la hidrodinámica (barcos, bombas hidráulicas, submarinos), la ingeniería del viento (edificios, puentes, aerogeneradores) y la ingeniería oceánica (cables submarinos, escolleras) (White, 2016).

Las geometrías y los campos de flujo en este tipo de problemas suelen ser muy complejos como para resolverse de manera analítica, considerando también que en muchos casos las simplificaciones pueden llegar a ser extremadamente limitantes y los resultados perderían mucha exactitud. Es por esto que se recurre a los datos y correlaciones experimentales, por un lado, y por otro, gracias a la disponibilidad de cada vez más poder de cómputo, a las simulaciones numéricas. Esta técnica permite conocer en amplia extensión el comportamiento del flujo y, en un proceso de diseño, relega la experimentación a los estadios finales, ahorrando una gran cantidad de tiempo y costos.

Aunado a lo anterior, hay casos en los que un campo de flujo puede idealizarse como bidimensional siempre que se puedan despreciar los efectos de los extremos del cuerpo en la dirección no considerada, que tenga sección transversal constante y que el flujo aproximándose al cuerpo sea uniforme. Por ejemplo, en (Lian, Ol y Wei Shyy, 2008) se comparan resultados computacionales y experimentales de un perfil no simétrico en dos dimensiones, a un número de Reynolds

de $6 \cdot 10^4$, con movimiento oscilatorio angular y vertical (*pitching* y *plunging*). La técnica de visualización de flujo empleada fue la velocimetría de imágenes de partículas (*particle image velocimetry* - PIV). Para la obtención de datos experimentales de un campo de flujo lo más bidimensional posible, se dejó un espacio del 0.7% de la cuerda del modelo entre los extremos del mismo y las paredes del túnel de viento, y se colocó el haz de luz del PIV, con un espesor del 0.3% de la longitud del modelo, a $3/4$ de la envergadura. Reportaron que la comparación cualitativa entre los modelos computacionales y los datos experimentales guardan un acuerdo razonable, especialmente en los casos en los que el campo de flujo es periódico, es decir, que las distribuciones instantáneas de velocidad son similares al promedio sobre varios ciclos de movimiento. Otro ejemplo es el de (Ol, Bernal *et al.*, 2009), donde se compara un enfoque experimental, computacional y teórico en un perfil con movimiento combinado de *pitching* y *plunging*, caracterizado por una caída en pérdida débil de sustentación, y con *plunging* puro, el cual muestra una caída en pérdida profunda de sustentación. La comparación de enfoques muestra un comportamiento bidimensional adecuado para un caso de prueba estático. En el caso con *plunging* y *pitching* acoplados se tiene un buen acuerdo entre la simulación numérica y la experimentación con PIV. Una limitante de la suposición bidimensional se ilustra en el caso con *plunging* puro, donde el acuerdo entre la simulación y el experimento es menor, ya que se tiene la presencia de fuertes vórtices en el borde de ataque y de procesos tridimensionales de reincorporación del flujo separado a la geometría.

Además, en lo que atañe al presente escrito, para perfiles aerodinámicos sometidos a regímenes con bajos números de Reynolds, los estudios en dos dimensiones son sumamente útiles para comprender las características del flujo y pueden ayudar a evaluar la manera en la que influyen diferentes parámetros sobre el desempeño aerodinámico (Amiralaei, Alighanbarin y Hashemi, 2010), desde los que constituyen aspectos geométricos (curvatura, ángulo de ataque geométrico, espesor) hasta los involucrados en movimientos como los de *pitching* y *plunging*, donde figuran el propio número de Reynolds, la amplitud y frecuencia del movimiento, entre otros.

Siempre que un cuerpo se coloca en un flujo se somete a una fuerza ejercida por el fluido que lo rodea (Nakayama y Boucher, 2000). Un fluido estacionario solamente ejerce presión en dirección normal a la superficie del cuerpo sumergido en él, pero uno en movimiento adicionalmente ejerce fuerzas tangenciales producto de los efectos viscosos. En un flujo bidimensional, esta fuerza puede separarse en dos componentes: una en la dirección del flujo, la cual recibe el nombre de arrastre, y otra en una dirección normal a la del flujo, llamada sustentación, además que actuará un momento de inclinación o cabeceo en dirección normal a estas componentes.

Las fuerzas aerodinámicas pueden calcularse de la siguiente manera: la presión del fluido, p , actúa sobre un diferencial de área, dA , normal a la superficie, mientras que la fuerza de fricción por unidad de área, τ , actúa tangencialmente. Ambos efectos toman parte en la generación de la fuerza aerodinámica total. Si se toma la componente de cada uno en la dirección del flujo, y se integra en toda la superficie del cuerpo, se obtiene el arrastre (Nakayama y Boucher, 2000):

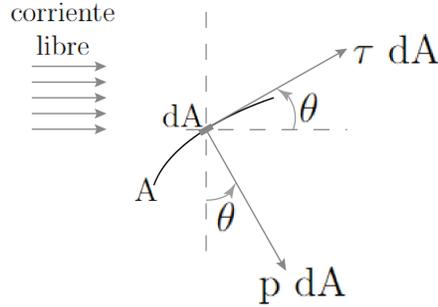


Figura C.1: Esquema de las fuerzas aerodinámicas actuando sobre un cuerpo.

$$F_{D_p} = \int_A p \sin\theta \, dA$$

$$F_{D_f} = \int_A \tau \cos\theta \, dA$$

Similarmente, si se hace lo propio en la dirección normal al flujo, esta vez se obtiene la sustentación:

$$F_{L_p} = \int_A p \cos\theta \, dA$$

$$F_{L_f} = \int_A \tau \sin\theta \, dA$$

donde F_{D_p} y F_{D_f} son las fuerzas de arrastre por presión y por fricción debido a efectos viscosos, respectivamente; de manera similar, F_{L_p} y F_{L_f} son las correspondientes fuerzas de sustentación.

Obtener la distribución de la presión y las fuerzas cortantes, analítica y experimentalmente, es muy complicado salvo por algunos cuerpos de geometría muy simple y velocidades limitadas. En los análisis experimentales muchas veces no se requiere de dicha información, pues usualmente basta conocer las fuerzas de arrastre y sustentación resultantes; en cambio, en las simulaciones numéricas se emplea junto con las ecuaciones anteriores para hallar las fuerzas aerodinámicas.

En ese sentido, y considerando que no es práctico enlistar las fuerzas en términos de todas las cantidades de las que dependen, como la densidad, la velocidad de corriente libre, la forma, orientación y tamaño del cuerpo, entre otras, se propone emplear números adimensionales representativos de las características del cuerpo en lo que respecta al arrastre y a la sustentación (Çengel y Cimbala, 2014). Respectivamente, se definen como:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 A} \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 A}$$

siendo C_D el coeficiente de arrastre, C_L el coeficiente de sustentación, F_D la fuerza de arrastre, F_L la fuerza de sustentación, ρ la densidad del fluido, u_∞ la velocidad de corriente libre y A es un área representativa del cuerpo. Estos coeficientes dependen principalmente de la forma del cuerpo, aunque también lo son del número de Reynolds y de la rugosidad de la superficie (Çengel y Cimbala, 2014).

En el caso de geometrías bidimensionales se calcula la fuerza por unidad de longitud. Para un perfil aerodinámico, denotando la componente paralela al flujo con F_d y la componente perpendicular como F_l , se tiene que los coeficientes aerodinámicos bidimensionales son:

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 c} \quad C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 c}$$

donde c es la cuerda del perfil. Aunado a lo anterior, a través de estas cantidades puede conocerse el desempeño aerodinámico de una geometría. En particular, la razón C_l/C_d , conocida como tasa de sustentación - arrastre, es una medida de esta característica, y es ampliamente usada al evaluar el desempeño de los perfiles aerodinámicos.

La fuerza de arrastre puede separarse en dos porciones: a la que es causada por los esfuerzos cortantes en la superficie se le conoce como *arrastre por fricción*, mientras que a la causada por la presión se le conoce como *arrastre por presión* o *arrastre de forma*. Es un efecto que suele evitarse o reducirse lo más posible. En la práctica, esto se traduce en menor consumo de combustible para diferentes vehículos, mayor durabilidad y seguridad de estructuras expuestas a vientos fuertes y la reducción de ruido y vibraciones, si bien es cierto que hay algunos casos en los que es deseable, como por ejemplo en el caso del polen y otras semillas aerotransportadas, los paracaídas e incluso en algunos movimientos del nado.

Un parámetro adimensional muy relevante para conocer el régimen o tipo de flujo que se tiene es el número de Reynolds, el cual refleja la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas y está definido como:

$$Re = \frac{\rho u_\infty L}{\mu}$$

siendo L una longitud característica de la geometría y μ la viscosidad dinámica del fluido. El arrastre por fricción está asociado con el desarrollo de capas límite y depende fuertemente de la viscosidad. Considerando que esta propiedad se encuentra en el denominador del parámetro previamente definido, puede observarse que mientras mayor sea el número de Reynolds menor será la contribución de los efectos viscosos en el arrastre. Por otro lado, el arrastre por presión depende del área frontal y de la diferencia de presiones entre la parte anterior y posterior del cuerpo, a la vez que está asociada con la estela que se forma detrás de la geometría. Cuando la velocidad del flujo es suficientemente alta como para que el fluido no sea capaz de seguir la curvatura del cuerpo, este se separa del sólido y genera una zona de muy baja presión, lo que provoca un gran incremento en esta porción del arrastre.

Ambos tipos de arrastre se deben, formalmente, a la viscosidad, aunque la distinción es útil porque los fenómenos que los causan son diferentes. El arrastre por fricción es relevante para los flujos que no se separan y está relacionado con el área superficial expuesta al flujo. El arrastre por presión es importante para los flujos separados y se asocia a la sección transversal del cuerpo (Adrian, Gogineni y Smits, 1997). En un cuerpo aerodinámico el arrastre está dominado por el efecto viscoso, mientras que en uno de frente ancho lo está por el de la presión: la porción que domine el arrastre dependerá completamente de la forma del cuerpo. Un cuerpo aerodinámico siempre tendrá menor resistencia que uno de frente ancho (Adrian, Gogineni y Smits, 1997); es en ese sentido que es común hacer cuerpos aerodinámicos con el objeto de reducir la separación del flujo.

Se disminuye el arrastre por presión al retrasar la separación de la capa límite, pues se reduce la diferencia de presión entre la parte anterior y la parte posterior del cuerpo, aunque al mismo tiempo se incrementa el arrastre por fricción al aumentar la superficie que está en contacto con el flujo (Çengel y Cimbala, 2014). Considerando lo anterior, el proceso de diseño de un cuerpo aerodinámico debe considerar la suma de ambos efectos con el objeto de que efectivamente se consiga reducir el arrastre. Por ejemplo, en el caso de la sección de un cilindro elíptico, conforme la longitud L se hace más grande que el espesor D , el coeficiente de arrastre va disminuyendo hasta que ya casi no presenta cambios a partir de $L/D = 4$ (Çengel y Cimbala, 2014). En ese momento la porción del arrastre debido a la presión es despreciable y el efecto está dominado por la fricción viscosa.

Con respecto a la sustentación, en los perfiles aerodinámicos, siempre que el número de Reynolds sea lo suficientemente alto, la contribución de los efectos viscosos es muy limitada, pues las fuerzas cortantes son aproximadamente normales a la dirección de la sustentación en una gran parte del cuerpo (Çengel y Cimbala, 2014). De tal forma, la contribución principal a esta fuerza es efectuada por los efectos de la presión, buscándose entonces reducirla en la superficie superior e incrementarla en la inferior para hacer que el cuerpo se eleve. Se debe aclarar que en cuerpos de baja masa volando a una velocidad limitada, y por lo tanto a un bajo número de Reynolds, los efectos de la viscosidad se hacen de gran importancia.

Puede emplearse como guía la ecuación de Bernoulli para identificar las zonas de alta y baja presión: si la velocidad del fluido es baja, entonces la presión es alta; en cambio, si la velocidad es alta, la presión será baja. Conviene comentar cómo es que esto sucede en un perfil aerodinámico de vuelo convencional, donde el régimen de flujo es del orden de $Re = 10^6$ o superior y la viscosidad puede ser despreciada. Como explican Çengel y Cimbala, la razón por la cual un ala produce sustentación es debido a que se genera un flujo circulatorio. En un perfil aerodinámico, lo anterior se logra gracias a que el borde de salida está afilado.

Considérese un flujo potencial, caracterizado por una vorticidad nula. En el caso de un perfil simétrico con un ángulo de ataque de 0° no se tiene sustentación, como se espera de la propia simetría (la distribución de presiones es la misma en ambas superficies), y los puntos de estancamiento se encuentran en los bordes de ataque y de salida. En un perfil no simétrico con un ángulo de ataque

pequeño, el punto de estancamiento anterior se coloca en la superficie inferior, cerca del borde de ataque, mientras que el punto de estancamiento posterior se coloca en la superficie superior, cerca del borde de salida; inesperadamente, la sustentación persiste en un valor nulo, de forma contraria a los resultados experimentales.

Esta inconsistencia es fruto de la posición del punto de estancamiento posterior predicho por la teoría de flujo potencial, pues se obliga al flujo a rodear el perfil aerodinámico por el borde de salida, pero esto no es lo que pasa en los experimentos. Lo que ocurre en realidad es que el flujo se separa del borde de salida, donde se encuentra el punto de estancamiento, forzando a la corriente de la superficie superior a cerrarse en esa zona y formando con esto una circulación en sentido horario alrededor del perfil, cuyo efecto tendrá como consecuencia que la velocidad en la parte superior aumente y la presión disminuya, al tiempo que en la parte inferior la velocidad se haga más baja y la presión crezca, desarrollándose entonces, con esta diferencia de presiones, la fuerza de sustentación. Posteriormente se desprende del borde de salida un vórtice en sentido antihorario, el cual se aleja del perfil conducido por el flujo principal. Durante el vuelo, el incremento o la merma de sustentación causará que se vuelvan a formar los vórtices, siempre dejando un flujo aproximadamente paralelo a la cuerda en el borde de salida (White, 2016). Cuando la teoría de flujo potencial se modifica con una adecuada circulación, de manera que el punto de estancamiento se posicione en el borde de salida, se encuentra muy buena concordancia entre la teoría y los resultados experimentales (Çengel y Cimbala, 2014). Esta modificación es conocida como *condición de Kutta* o *hipótesis de Joukowski*.

No hay teoría simple disponible para flujos de muy bajos números de Reynolds, y esto es debido a los efectos de la viscosidad, que influyen en la distribución de la presión, la separación de flujo, el desprendimiento de vórtices y la interacción entre ellos, además de otros fenómenos, de manera que el estudio de casos en estos regímenes de flujo se hace de forma experimental o por medio de modelos computacionales. Precisamente, el vuelo de aves, insectos y MAVs se encuentra en regímenes de bajo número de Reynolds.