



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA
LA IMBIBICIÓN RADIAL NO ISOTÉRMICA PARA
UN FLUIDO NO NEWTONIANO**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Pérez Hernández Miguel Ángel

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Melesio Sánchez Huerta



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023

Agradecimientos

Esta tesis representa el final de mi preparación profesional y el inicio de un gran sueño, es por ello que el presente trabajo está dedicado a mi abuela por tener siempre una palabra de ánimo, una lección que enseñarme. Aunque hoy no pueda abrazarlo físicamente, lo abrazo con el alma.

A mis padres el a quienes agradezco inmensamente por darme el total apoyo y amor para cumplir mis sueños y enfrentar cualquier obstáculo, porque gracias a ustedes y a su educación he logrado llegar a donde me encuentro hoy en día.

Agradezco enormemente a mi universidad por la gran preparación que he recibido de su parte y por las grandes oportunidades que me ha brindado, hoy me siento orgulloso de llevar en alto el nombre de mi máxima casa de estudios la UNAM.

A mi asesor, profesor, mentor y amigo el Dr. José Melesio Sánchez Huerta le doy gracias por ser mi guía y apoyo durante mi preparación profesional.

Dedico este trabajo a mis hermanos, por ser mis fieles compañeros a lo largo de la vida, por ser los impulsores de mis sueños y locuras. Por estar a mi lado aun cuando no merecía que lo estuvieran.

A mi novia, por ser la primera en echarme porras, porque siempre me viste sosteniendo mi título universitario, aunque faltara aún mucho camino por recorrer. Gracias por tener toda la fe puesta en mí.

También agradezco a mis amigos por acompañarme durante todo este camino el cual compartimos, enfrentando cada reto y superando cada obstáculo en su compañía.

Por ultimo solo queda agradecerme a mí mismo por no rendirme, por creer en mí y jamás retroceder ante la presencia de nuevos retos, es por ello que me siento orgulloso de mi trabajo y los resultados de mi dedicación, hoy gracias a mi preparación y capacidad con seguridad me hago llamar Ingeniero.

Resumen

En este trabajo se presenta el estudio teórico de la imbibición radial entre placas bajo gradientes de temperatura para un fluido no newtoniano

Se analizan tres casos de temperatura, gradiente positivo ($G+$), gradiente negativo ($G-$) y el caso isotérmico ($G=0$), el estudio analiza dos tipos de fluido Pseudoplastico y Newtoniano. Los resultados obtenidos muestran los efectos de la temperatura en la velocidad del frente de imbibición.

Objetivo

Derivar un modelo matemático que describa la velocidad del frente de penetración de un fluido entre dos placas circulares, paralelas, considerando los cambios tanto en la tensión superficial como la viscosidad por los efectos de la temperatura.

Nomenclatura

- σ Tensión superficial. (N/m)
- σ_p Gradiente evaluada a la temperatura fría, gradiente positivo
- σ_n Gradiente negativo evaluada a la temperatura caliente, gradiente negativo
- Fc Fuerza capilar
- Ff Fuerza de fricción

- T_0 Temperatura inicial. (K)

- T_1 Temperatura final. (K)

- g Gravedad (m/s²)
- t Tiempo. (s)
- R0 Radio Interior (mm)
- R1 Radio Exterior (mm)
- Tv Valor de incremento de temperatura para el cual la viscosidad presenta un incremento igual a e
- K0 indice de congruencia dimensional

Índice

Agradecimientos	2
Resumen	3
Objetivo	3
Nomenclatura	4
1. Introducción	6
2. Antecedentes.	6
2.1 Conceptos.	6
2.1.1 Definición de Fluido.	6
2.1.2 Propiedades de los fluidos.	7
2.2 Tipos de Fluidos.	8
2.2.1 Fluidos Newtonianos.	8
2.2.2 Fluidos no Newtonianos.	9
2.3 Imbibición.	11
2.3.1 Imbibición en capilares cónicos.	12
2.3.2 Imbibición en celdas de Hele Shaw.	13
2.3.3 Imbibición en tubos rectos.	15
2.3.4 Imbibición en un medio poroso.	16
2.3.5 Flujo radial laminar entre discos paralelos.	17
Justificación.	20
3 Modelo Matemático.	21
3.1 Descripción del problema.	21
3.2 Perfil de temperatura.	21
3.3 Desarrollo del modelo matemático.	22
3.3 Fuerza Capilar.	22
3.4 Fuerza de fricción.	23
Modelo para el gradiente de temperatura.	25
4 Resultados.	27
4.1 Curvas obtenidas mediante el modelo matemático.	28
4.1.1 Fluido Newtoniano.	28
4.1.2 Fluido Pseudoplastico.	29
4.1.3. Fluido Dilatante.	30
5.1 Conclusiones.	31
Bibliografía.	32
Apéndice A.	34
Entrada.	34
Malla.	34
Programa.	35

1. Introducción

El Capítulo uno, Introducción, presenta un breve resumen de la organización de este trabajo y detalles de cada capítulo. En el Capítulo dos, Antecedentes, se dan los conceptos básicos y un resumen de trabajos publicados que son la base teórica para la obtención del modelo matemático. En el capítulo tres, Modelo Matemático, se desarrollan paso a paso los modelos matemáticos para las tres condiciones de temperatura, así mismo se muestran las ecuaciones discretizadas las cuales son programadas en fortran y los resultados se presentan en el capítulo cuatro, Resultados, en este capítulo de manera gráfica se muestran los resultados derivados de los modelos matemáticos, las gráficas muestran la influencia del gradiente de temperatura y del índice de comportamiento. Las conclusiones resultantes del análisis de las curvas presentadas en cada gráfica se encuentran en el capítulo cinco. Finalmente se presenta la Bibliografía y apéndices A

2. Antecedentes.

Tanto la mecánica de fluidos como la termodinámica son dos ramas de la física que se relacionan cuando se analiza el movimiento de fluidos bajo la influencia o en presencia de gradientes de temperatura. Esta interrelación ha llevado a desarrollar ecuaciones para el movimiento del fluido y relaciones constitutivas para las propiedades termo físicas que permitan de manera conjunta describir el comportamiento de los fluidos considerando los efectos transferencia de calor en las propiedades.

2.1 Conceptos.

2.1.1 Definición de Fluido.

De acuerdo con la mecánica de fluidos, una sustancia en la fase líquida o en la gaseosa se conoce como fluido, sin embargo, estos cuentan con características físicas que los identifican, como lo es su capacidad de deformación, esto ya que los fluidos oponen una resistencia muy baja a los esfuerzos cortantes que se les aplican, deformándose de manera continua debido a la aplicación de estos. Para este trabajo nos enfocaremos únicamente en los fluidos que se encuentran en la fase líquida [1].

2.1.2 Propiedades de los fluidos.

A continuación, se definen algunas propiedades importantes de los fluidos que serán utilizadas en este trabajo.

- **Densidad:** es una magnitud escalar referida a la cantidad de masa en un determinado volumen de una sustancia o un objeto sólido. Usualmente, se simboliza mediante la letra *rho* (ρ) y se define como $\rho = m/V$, donde m es la masa del en [kg] y V es volumen en [m³]. Esta propiedad de los fluidos puede cambiar como función de la temperatura y de la presión, disminuyendo con el aumento de temperatura y aumentando con el aumento de la presión.

- **Viscosidad:** La viscosidad es una propiedad de los fluidos que es de gran importancia en múltiples procesos industriales. Se puede decir que la viscosidad es la medida de la resistencia a la deformación que presentan los fluidos al aplicarse un esfuerzo. Esta propiedad indica la capacidad de las moléculas del fluido a permanecer juntas, entre mayor sea esa capacidad, mayor será la resistencia a fluir, las unidades para la viscosidad dinámica, μ , son [Pa*s] y [m²/s] para la viscosidad cinemática, ν .

- **Tensión superficial:** Es la propiedad de la interfaz entre dos fluidos la cual mide que tan diferentes son. Mide la fuerza que actúa tangencialmente por unidad de longitud en el borde de una superficie de un líquido en equilibrio. Si mide la tensión entre un líquido y el aire se denomina tensión superficial; si mide la tensión entre dos líquidos (o dos fluidos) se denomina tensión interfacial. Sus unidades en SI son: N/m. [2] .

-

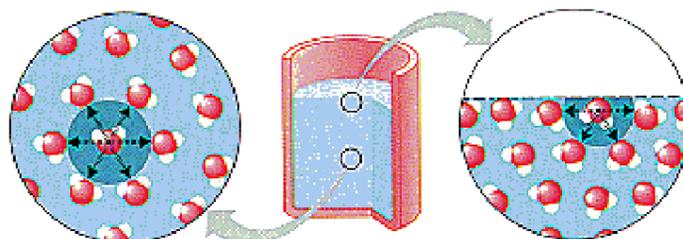


Figura 2.2 Cohesión entre partículas y la tensión superficial

Hay una fuerza de atracción entre las moléculas iguales llamada fuerza de cohesión en líquidos, y los líquidos pueden fluir hasta que adquieren la forma que maximiza esta fuerza de atracción. Debajo de la superficie del líquido, la fuerza de la cohesión entre las moléculas es igual en todas las direcciones, como se indica en la figura 2.2

Las moléculas en la superficie del líquido, sin embargo, sienten una fuerza neta de atracción que tira de ellas nuevamente hacia dentro del cuerpo líquido. Consecuentemente, el líquido intenta adquirir la forma que tiene el área superficial más pequeña posible, es decir la forma de una esfera. La magnitud de la fuerza que controla la forma del líquido se llama la tensión superficial. Cuanto más fuertes son los enlaces entre las moléculas en el líquido, más grande es la tensión superficial [3].

2.2 Tipos de Fluidos.

2.2.1 Fluidos Newtonianos.

Fueron llamados así debido al Físico Británico Isaac Newton, quien estableció una relación constitutiva en la cual el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la velocidad de deformación y son descritos mediante por la ley de viscosidad de Newton $\tau = \mu (\partial u / \partial y)$, donde, τ es el esfuerzo cortante, μ es la viscosidad dinámica [Pa*s] y $\partial u / \partial y$ es la velocidad de deformación.

Los fluidos newtonianos se caracterizan por tener una viscosidad constante la cual sólo se puede ver afectada por los cambios de temperatura y de presión, como prueba de esto en la Figura 2.3 se observa que la relación Esfuerzo Cortante contra Velocidad de Deformación es completamente lineal ($\tau = \mu \dot{\epsilon}$). [4]

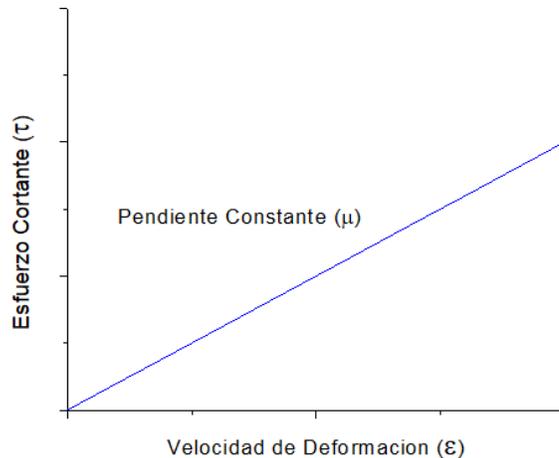


Figura 2.3 Comportamiento lineal de un fluido newtoniano

Esta relación de proporcionalidad corresponde a la viscosidad dinámica μ , por lo tanto, los fluidos newtonianos pueden ser considerados linealmente viscosos.

2.2.2 Fluidos no Newtonianos.

La Reología es la rama de la mecánica de fluidos encargada del estudio y análisis del comportamiento de los fluidos y las propiedades mecánicas de sustancias que son capaces de fluir pero que su comportamiento no está controlado por las propiedades que rigen a los fluidos Newtonianos [3].

Los fluidos no newtonianos se comportan de manera diferente al aplicarse un esfuerzo cortante sobre estos, donde su resistencia a fluir varía respecto a la magnitud del esfuerzo y la duración en que este se aplica, es por esta razón que este tipo de fluidos no tiene un valor constante de viscosidad y por ende no obedecen la ley de viscosidad de Newton.

El modelo reológico más utilizado para este tipo de fluidos es el correspondiente a la ley de potencia para la viscosidad.

$$\mu = k_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1}$$

Donde $(\partial u/\partial y)$ es la velocidad de deformación, K_0 es el índice de congruencia dimensional, μ la viscosidad del fluido y n es el índice de comportamiento.

Dentro de esta clasificación se pueden mencionar, polímeros en disolución, tinta, mermelada, etc.

En la Figura 2.4 se puede observar la diferencia de comportamiento que hay entre los diferentes fluidos al aplicarse sobre estos un esfuerzo cortante.

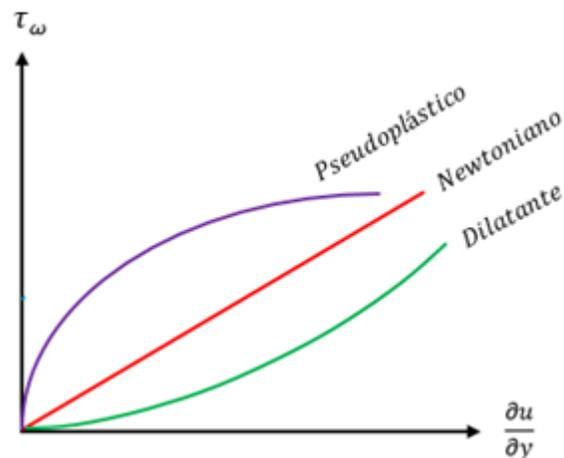


Figura 2.4 Variación del esfuerzo cortante con la razón de deformación para fluidos newtonianos y no newtonianos

Los fluidos no newtonianos se clasifican de la siguiente manera:

- Comportamiento Pseudoplástico.

Los fluidos que se consideran pseudoplástico son aquellos que tienen un índice de comportamiento $n < 1$, estos fluidos se caracterizan por tener una alta viscosidad, la cual disminuye rápidamente al aumentar el esfuerzo sobre el fluido.

- Comportamiento Dilatante.

Los fluidos que se consideran Dilatantes son aquellos que tienen un índice de comportamiento $n > 1$, estos fluidos se caracterizan por tener una baja viscosidad, la cual aumenta conforme aumenta la velocidad de los esfuerzos aplicados sobre estos. Los fluidos dilatantes son poco comunes de manera cotidiana, por lo tanto, un ejemplo de un fluido con estas características sería la mezcla de fécula de maíz con agua, la cual, al ser expuesta a una alta rapidez de corte, aumenta su viscosidad.

- Comportamiento Viscoplastico. (Plástico de Bingham)

Este tipo de fluidos se caracterizan por su comportamiento, el cual es similar al de un sólido hasta que se le aplica una fuerza la cual excede su esfuerzo de cedencia y este comienza a fluir, en ese momento se presenta una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, donde esta relación se describe por el modelo reológico de Bingham ($r = r_0 + \eta_p(\partial u/\partial y)$), donde $(\partial u/\partial y)$ es la velocidad de deformación, r el esfuerzo cortante y η_p es la viscosidad plástica. Algunos ejemplos con las características de un fluido plástico son la pasta dental, pomadas, grasas, etc.

2.3 Imbibición.

La Imbibición es el proceso de absorción por efectos de la presión capilar que se genera al poner en contacto el líquido con el sólido poroso o capilar, siendo la presión capilar la que produce el movimiento del fluido en el medio poroso, la cual se puede cuantificar por la relación de la tensión superficial entre el tamaño de poro o radio del capilar, σ/d [N/m²] [5].



Figura 2.5 proceso de absorción por efectos de la presión capilar

Los trabajos que se han realizado hasta el momento han sido desarrollados tanto en capilares como medios porosos, donde los capilares se conforman principalmente por tubos rectos, conos o placas, por otra parte, los medios porosos pueden ser muestras de papel radiales o rocas verticales de sección circular o cuadrada.

A continuación, se presentan un breve resumen de diferentes trabajos que se son base teórica para este trabajo.

2.3.1 Imbibición en capilares cónicos.

El avance de un fluido a través de un medio capilar se ve directamente afectado por la presencia de la presión capilar la cual a su vez depende de la naturaleza del fluido y del medio, es razonable pensar que la geometría de este medio también puede considerarse un factor que influya en el ascenso del fluido, en este sentido Sánchez y Ortíz [6] presentan un trabajo donde realizan un estudio teórico y experimental de la dinámica de un fluido a través de capilares cónicos, donde se menciona que la evolución del flujo capilar se ve afectada por la geometría del medio y por los efectos de la temperatura, donde la viscosidad del fluido es función de este último parámetro, cabe mencionar que durante el ascenso capilar en el interior del tubo se genera un

flujo de Poiseuille, donde el frente de imbibición se detiene cuando se equilibran las fuerzas capilares y gravitacionales.

En la Figura 2.6 presentan los resultados teóricos y experimentales para el frente de imbibición ξ en función del tiempo τ , por lo tanto, se demuestra que la evolución del ascenso capilar se ve afectada por la geometría del medio y también por la presencia de un gradiente de temperatura el cual modifica la tensión superficial y viscosidad del fluido.

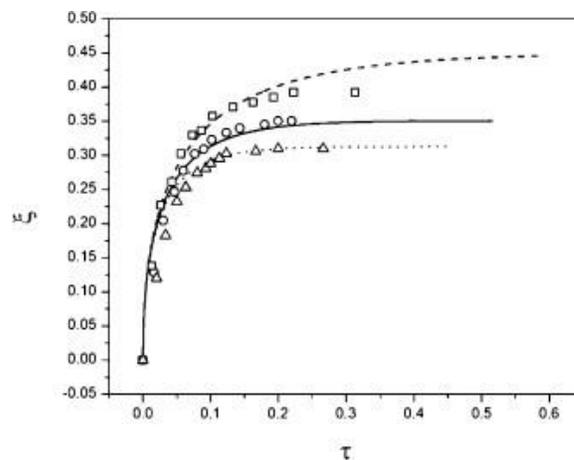


Figura 2.6 Curvas comparativas de los resultados teóricos (líneas) y experimentales (símbolos) para para la evolución de frente de imbibición ξ en función del tiempo t , para los gradientes $G = -500$ (K/m), (triángulos), $G = +500$ (K/m), (cuadrados) y el caso isotérmico, $T_0 = 300$ (K) (círculos).

2.3.2 Imbibición en celdas de Hele Shaw.

En el trabajo desarrollado por Sánchez [7], se estudia de manera experimental la evolución temporal del frente de imbibición para fluidos no newtonianos en una celda de Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura utilizando como fluido de trabajo una solución acuosa con cuatro condiciones de concentración de carboximetilcelulosa (CMC) y se empleó una celda formada por dos placas de vidrio. Los resultados obtenidos se pueden ver en las Figuras 2.7, 2.8 y 2.9.

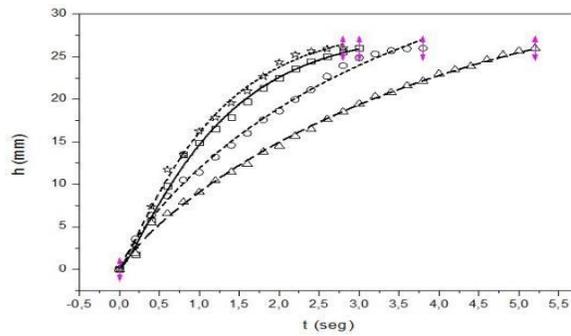


Figura 2.7 Evolución temporal isotérmica del frente de imbibición, para las cuatro concentraciones. Los resultados experimentales (símbolos) y las líneas de tendencia para cada valor del índice de comportamiento “n”: (\square) $n=0.9$, (\circ) $n=0.75$; (Δ) $n=0.64$; (\times) $n=0.56$.

La figura anterior muestra el caso isotérmico en el que la solución del 4% ($n=0.56$) asciendatan rápido como la solución de 1% ($n=0.95$) que es una solución muy cercana a un fluido Newtoniano.

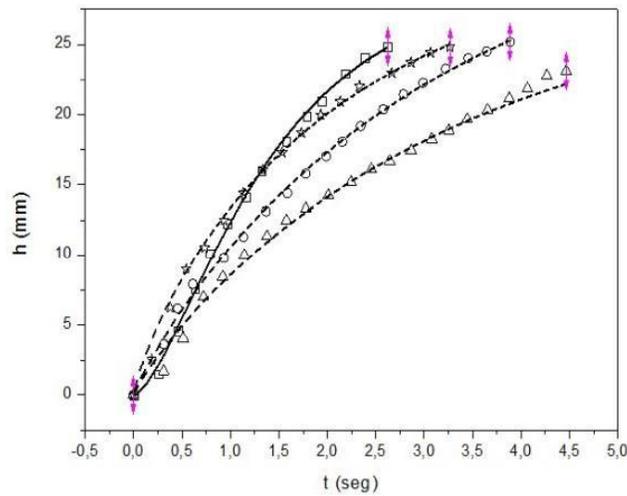


Figura 2.8 Evolución temporal Gradiente Positivo del frente de imbibición, para las cuatro concentraciones.

Los resultados experimentales (símbolos) y las líneas de tendencia para cada valor del índice de comportamiento “n”: (\square) $n=0.9$, (\circ) $n=0.75$; (Δ) $n=0.64$; (\times) $n=0.56$. [7]

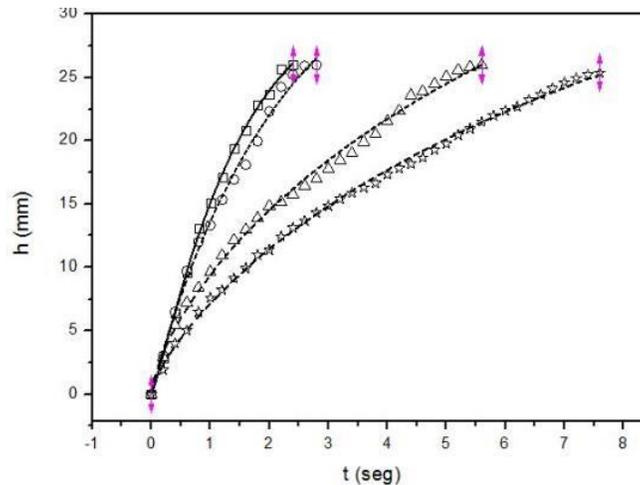


Figura 2.9 Evolución temporal Gradiente Negativo del frente de imbibición, para las cuatro concentraciones.

Los resultados experimentales (símbolos) y las líneas de tendencia para cada valor del índice de comportamiento “n”: (\square) $n=0.9$, (\circ) $n=0.75$; (\triangle) $n=0.64$; (\times) $n=0.56$.

En La Figura 2.7, se presenta el caso de gradiente positivo, se observa que tiene un comportamiento similar en relación al caso isotérmico, en ambos casos para valores del índice de comportamiento 0.75 y 0.64 el ascenso es más lento. En la Figura 2.9, se muestra el gradiente negativo, en este caso el flujo es mucho más lento respecto a los casos anteriores, bajo estas condiciones de temperatura se observa que la velocidad del frente de imbibición es directamente proporcional con el incremento del índice de comportamiento. [7]

2.3.3 Imbibición en tubos rectos.

El ascenso del flujo en tubos capilares generalmente es caracterizado tanto en los capilares como en los medios porosos por la posición de su superficie libre $h(t)$ (frente de imbibición) la cual obedece la ley de Lucas-Washburn, pero esta ley funciona correctamente cuando se trata en sistemas sin gravedad y es válida a pequeñas distancias de penetración en sistemas verticales. [8]

Sin embargo, en el desarrollo de esta ley se consideran constantes las propiedades de los fluidos, lo cual no es suficiente ya que como se observa en los trabajos ya

mencionados la influencia de la temperatura y la geometría afectan directamente a la velocidad y altura que presenta el frente de imbibición.

2.3.4 Imbibición en un medio poroso.

Durante mucho tiempo los medios porosos han sido uno de los temas de interés de la comunidad científica y la ingeniería, debido a su complejidad inherente e importancia en muchas áreas tecnológicas [9], para este trabajo el medio poroso se define como un elemento físico finito tridimensional el cual no es continuo, dotado de una serie de poros (huecos) ubicados de forma aleatoria y de una misma dimensión entre sí, los cuales son capaces de permitir el flujo de fluidos a través del medio, ver (Figura 2.11).

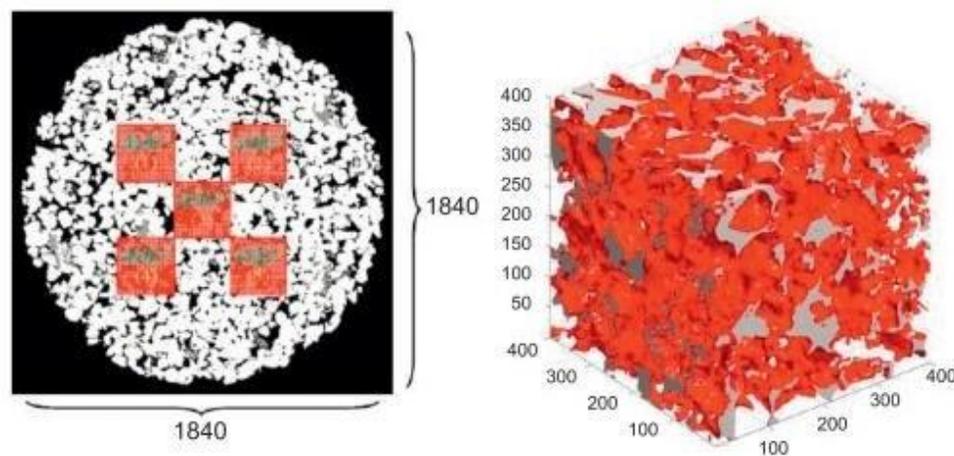


Figura 2.10 Berea sandstone: Left side is a core sample, subdivided into sub-volumes 1–5; right side is sub-volume 3 with grey-shaded mineral skeleton and, in red, the pore space network [15]

En este sentido Sánchez [9] presenta un trabajo en el cual se obtiene un modelo de predicción del ascenso capilar considerando los cambios de temperatura a través de los medios porosos.

A partir de las pruebas experimentales y teóricas, donde se trabaja con tres casos diferentes de temperatura, se obtuvieron los resultados que muestran en la figura 2.11.

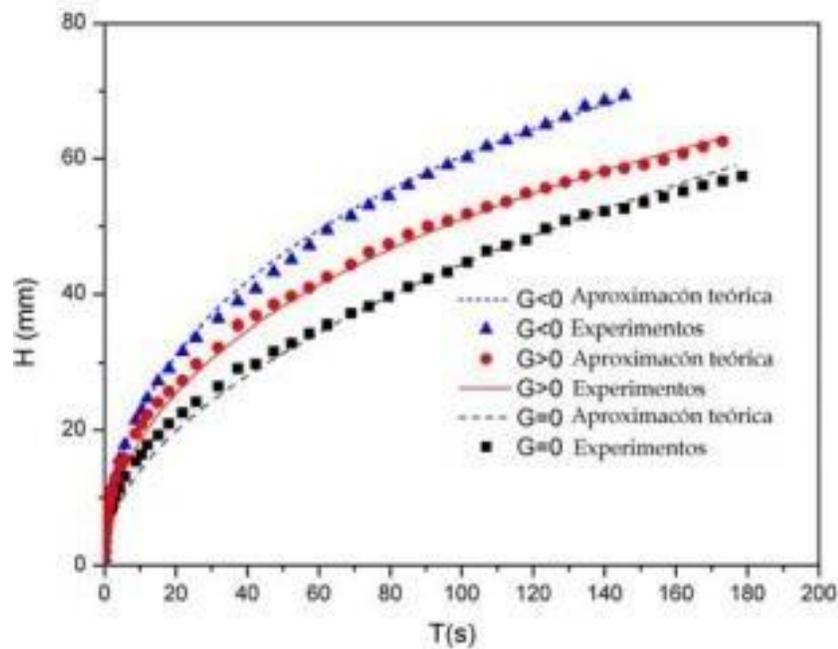


Figura 2.11 Comparación de resultados teóricos (curvas) y resultados experimentales (símbolos) para la evolución temporal del frente de imbibición $h(t)$, para los distintos valores de G considerados: en este caso para $G = 0$ donde $T_0 = T_1 = T_{Lab} = 295.2$ K (■), $G < 0$ donde $G^- = -47$ K/m (▲) y $G > 0$ donde $G^+ = 47$ K/m (●). [9]

En la Figura 2.11 se observa que los flujos sometidos a un gradiente de temperatura presentan una mayor velocidad de ascenso que el caso isotérmico, siendo el más rápido y con una mayor altura de equilibrio el caso con gradiente negativo, por lo tanto, este trabajo nuevamente demuestra que los efectos del cambio de temperatura afectan directamente al avance del flujo, en este experimento ocurre para la imbibición en un medio poroso, por último, se destaca que este análisis se desarrolla para un fluido newtoniano.

2.3.5 Flujo radial laminar entre discos paralelos.

J.D JACKSON AND G.R SYMMONS presenta un trabajo donde se realizan experimentos para probar predicciones teóricas recientes de la distribución de

presión para flujo laminar entre discos paralelos, incluyendo efectos de inercia. La investigación experimental cubrió la condición donde los efectos de inercia siempre fueron completamente dominantes sobre la región central de los discos en contraste con otros trabajos experimentales recientes sobre el problema donde el diámetro de inyección central era considerablemente mayor. [14]

El problema considerado es el de laminar radial flujo de aire, a velocidades incompresibles, entre paralelos muy próximos discos (ver fig. 2.12).

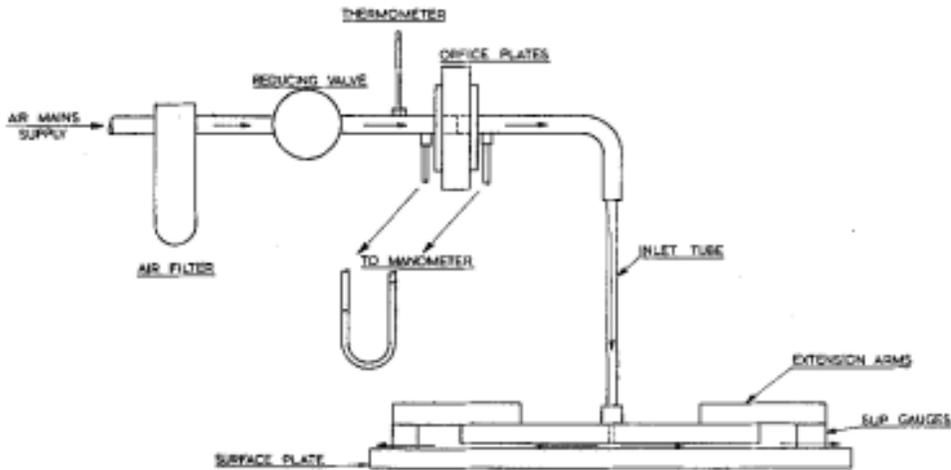


Figura 2.12 diagrama de disposición del aparato

Se realizaron estudios de presión detallados a nuestras tasas de flujo de aire. Lecturas de caída de presión en el orificio, presión en el orificio relativa a la atmósfera y Se tomó la temperatura en cada caso.

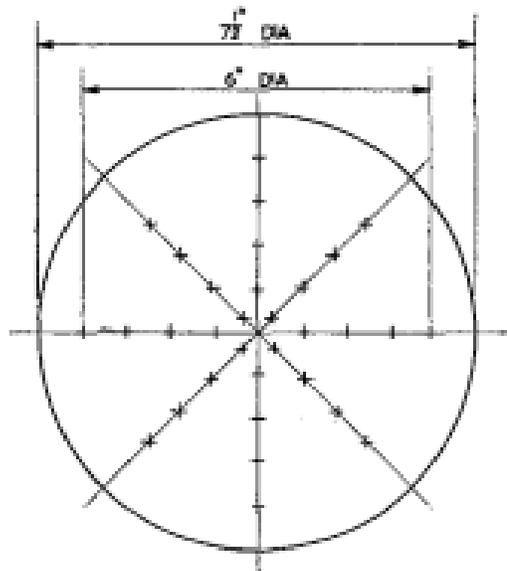


Figura 2.13 Disposición de los orificios de presión estática orificios de presión estática 0,025 diámetro entrada 5/32

Se tomaron cuatro lecturas de presión para cada posición radial en el. Se encontró que en todas las configuraciones para los 10 y 20 holgura de milésimas de pulgada y en los ajustes de flujo más bajos para el de 30 y 40 milésimas, la presión experimental

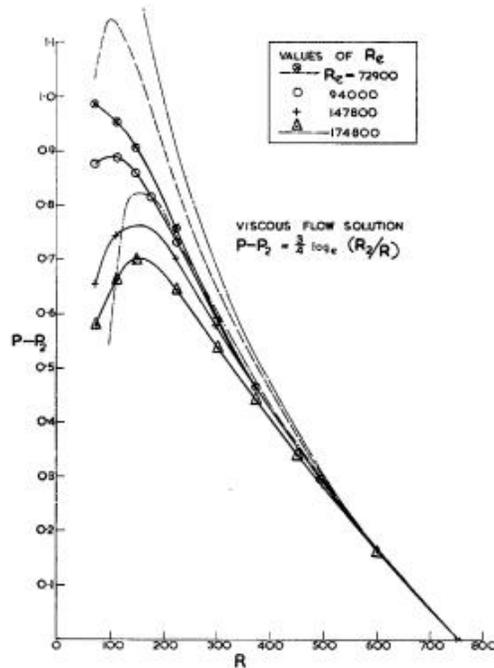


Figura 2.14 Diferencia de presión adimensional, relativa al borde de la placa contra distancia adimensional.

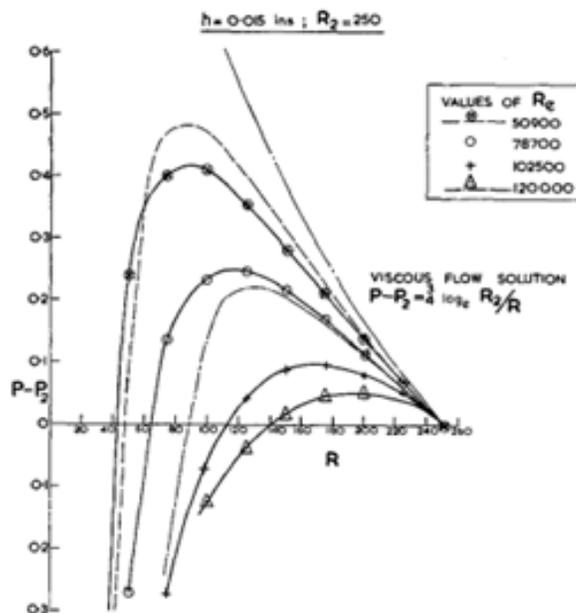


Figura 2.15 Diferencia de presión adimensional, relativa al borde de la placa contra distancia adimensional

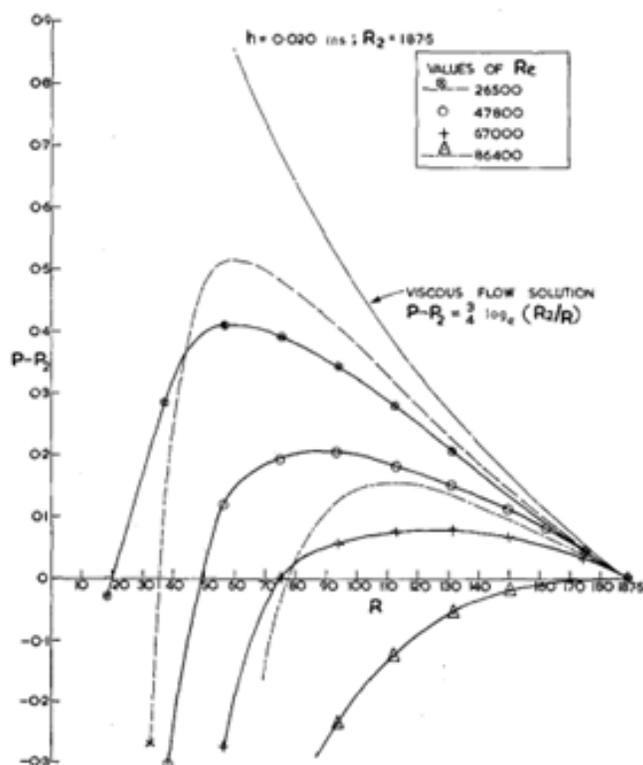


Figura 2.16 Diferencia de presión adimensional, relativa al borde de la placa versus distancia adimensional

Los presentes resultados experimentales demuestran la limitación de la teoría disponible bajo condiciones donde apreciables gradientes de presión adversos ocurren en la región central de los discos parece que es necesario tener en cuenta términos adicionales en el análisis de la serie de potencias para reducir esta discrepancia. El tipo de flujo considerado es intrínsecamente inestable. cuando grandes gradientes de presión adversa están presentes en el centro regiones de los discos. [10]

Justificación.

La imbibición bajo gradientes de temperatura ha sido estudiada muy poco en años recientes y con ello, existe poca información en la literatura especializada relacionada con efectos capilares y fluidos no newtonianos. Por lo anterior resulta de gran importancia analizar la imbibición de fluidos no newtonianos bajo gradientes de temperatura. Este trabajo coadyuvara a sentar las bases teóricas para la imbibición radial considerando los efectos de temperatura.

3 Modelo Matemático.

3.1 Descripción del problema.

El análisis del movimiento del fluido entre las placas se realiza empleando coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , considerando el origen del sistema en el centro de la celda con radio interno R_0 y externo R_1 . La celda está formada por dos placas circulares separadas una distancia $2h$ y esta sujeta a un gradiente de temperatura como se muestra en la figura 3.1

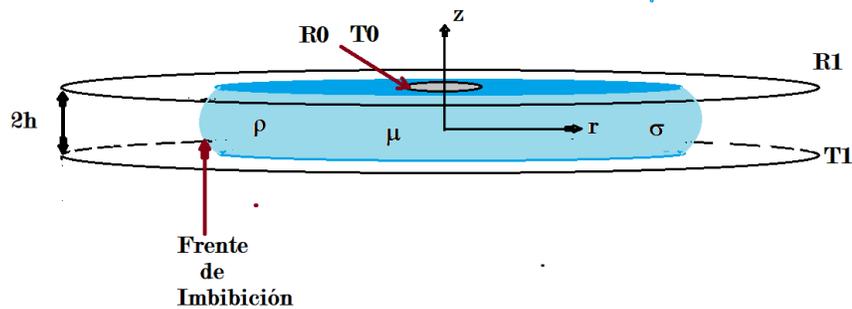


Figura 3.1 Esquema del flujo radial en una celda Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura.

3.2 Perfil de temperatura.

La distribución de temperatura en la celda se puede obtener a partir de la ecuación de Laplace $\Delta^2 T = 0$ considerando las siguientes condiciones de frontera. $T(r = R_0) = T_0$ y $T(r = R_1) = T_1$. El perfil de temperatura resultante se presenta a continuación

$$T = T_0 + \left(\frac{(T_1 - T_0)}{(\ln R_1 - \ln R_0)} \right) (\ln r - \ln R_0) \quad (1)$$

A partir de la ecuación anterior se puede obtener el gradiente de temperatura $G = dT/dr$, es decir

$$G = \left(\frac{(T_1 - T_0)}{(\ln R_1 - \ln R_0)} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2)$$

3.3 Desarrollo del modelo matemático.

Durante el movimiento del fluido, que es generado por la presión capilar, la fuerza de fricción que se genera en las paredes de la placa se opone al avance del mismo, este balance de fuerzas se puede expresar como $F_{capilar} - F_{friccion} = 0$ o bien

$$\int P_c dA - \int \tau_\omega dA_t = 0 \quad (3)$$

3.3 Fuerza Capilar.

Para calcular la fuerza capilar GUEGUEN Y PALCIAUSKAS plantean que la presión capilar para un celda radial puede ser determinada por la siguiente expresión [11]

$$P_c = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r} \right) \quad (4)$$

Tomando esto en cuenta se puede demostrar que la fuerza capilar es

$$F_c = \int P_c dA = \int_{R_1}^R 2\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) 2\pi h dr \quad (5)$$

$$F_c = 4\pi\sigma h \left[\left(\frac{R}{R_1} - 1 \right) + \ln \left(\frac{R}{R_1} \right) \right] \quad (6)$$

3.4 Fuerza de fricción.

Como se mencionó anteriormente, el movimiento del fluido es generado por la presión capilar. Para estimar la fuerza de fricción en primer lugar se debe de evaluar el perfil de velocidades que se desarrolla dentro de las placas. En este sentido se parte de la ecuación de cantidad de movimiento y se emplea la ley de potencia para la viscosidad ya que el fluido entre las placas es un fluido no newtoniano, considerando un flujo unidimensional y parabólico, por lo que la ecuación simplificada es:

$$\frac{dp}{dz} = k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n \quad (7)$$

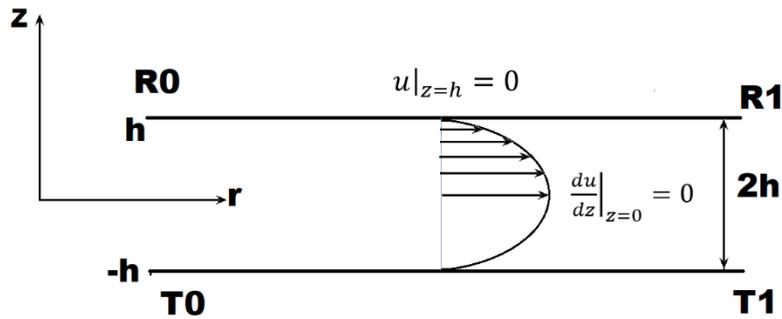


Figura 3.2 Esquema del perfil de velocidad desarrollado entre las placas circulares

La ecuación anterior está sujeta a las condiciones de frontera tanto de no deslizamiento en la pared de la celda como de simetría, es decir.

$$\begin{aligned} u \Big|_{z=h} &= 0 \\ \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Con las condiciones de frontera anteriores se puede demostrar que el perfil de velocidades está determinado por la siguiente ecuación

$$u = \left(\frac{1}{k} \frac{dp}{dr} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1+n} \right) \left[z^{\frac{1+n}{n}} - h^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (9)$$

El gradiente de presiones puede ser evaluado a través del gasto volumétrico esto es

$$Q = \int u dA \quad (10)$$

Con el perfil de velocidades obtenido se puede demostrar que el gradiente de presiones está determinado por la siguiente expresión

$$\frac{dp}{dr} = k \left[\frac{(n+1)Q}{4\pi h^{\frac{2+n}{n}} \left[\frac{n}{2+n} - 1 \right]} \right]^n \quad (11)$$

Con la ecuación anterior y el gradiente de presiones ya definidos, se puede estimar la fuerza de fricción en las paredes, tomando en cuenta que el gasto puede ser estimado con una velocidad promedio del frente de imbibición, $Q=dr/dt$

$$F_f = \int k \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n d_l \quad (12)$$

$$F_f = 4\pi\Psi \left(\frac{dr}{dt} \right)^n R^n \left[R^{2-n} - R_1^{2-n} \right] \quad (13)$$

$$\Psi = \frac{\left(\frac{1}{h^n} \frac{k(n+1)}{4\pi h^{\frac{2+n}{n}} \left[\frac{n}{2+n} - 1 \right]} 2\pi h \right)^n}{2-n} \quad (14)$$

Con las ecuaciones tanto para la fuerza capilar como la fuerza de fricción se puede reescribir la ecuación (3) como

$$4\pi\sigma h \left[\left(\frac{R}{R_1} - 1 \right) + \ln \left(\frac{R}{R_1} \right) - 4\pi\Psi \left(\frac{dr}{dt} \right)^n R^n \left[R^{2-n} - R_1^{2-n} \right] \right] = 0 \quad (15)$$

Para obtener un modelo general, se proponen las siguientes variables adimensionales

$$\tau = \frac{t}{tc}; \varepsilon = \frac{R}{R_1} \quad (16)$$

Sustituyendo en la ecuación (15) se puede demostrar que la ecuación adimensional para la evolución temporal del frente de imbibición isotérmico es

$$(\varpi\varepsilon - 1) + \ln(\varepsilon) - \left(\frac{d\varepsilon}{d\tau} \right)^n \left[\varpi\varepsilon^{2-n} - \varepsilon^n \right] = 0 \quad (17)$$

Donde el tiempo característico “ $tc^n = \Psi R_1^{2n} R_0^{2-n} / \sigma h$ ”

Modelo para el gradiente de temperatura.

Para la obtención del modelo considerando los efectos del gradiente de temperatura se sigue el mismo procedimiento que para el caso isotérmico. En este caso tanto la tensión superficial como el coeficiente de congruencia dimensional K_0 cambian de valor según sea la temperatura local. Los cambios en la tensión superficial se evalúan considerando una expansión en series de Taylor, es decir.

$$\sigma(R) = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) \left(\frac{dT}{dR} \right) [R - R_1] \right) \quad (18)$$

Mientras que, para la viscosidad, el coeficiente de congruencia adimensional cambia de acuerdo a la ecuación presentada por Kamil Wichterle [12].

$$k(T) = k_0 e^{-n \frac{T_y - T_0}{T_v}}$$

ajustada a el caso radial es

$$K = K_0 e^{-n \frac{T_1 - T_0}{[\ln R_1 - \ln R_0] T_v}} \left(\frac{R}{R_0} \right) \quad (19)$$

Finalmente, la ecuación resultante es

$$\frac{4\sigma_0\pi h}{R_1} \left\{ (1+\zeta) \frac{R}{R_1} + \zeta \left(\frac{R_1}{R} - 2 \right) + \ln \frac{R}{R_1} - 1 \right\} - \phi \left(\frac{dR}{dt} \right)^n R^n \left[R^{n(\lambda-1)+2} - R_1^{n(\lambda-1)+2} \right] = 0$$

(20)

$$\lambda = -n \frac{T_1 - T_0}{[\ln R_1 - \ln R_0] T_v}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) \Phi$$

$$\Phi = \frac{T_1 - T_v}{[\ln R_1 - \ln R_0]}$$

$$\phi = \frac{4h\pi(2\pi\gamma\beta)^n}{n(\lambda-1)+2}$$

$$\gamma = \frac{(n+1)}{4\pi h^n \left[\frac{n}{2+n} - 1 \right]}$$

$$\beta = k_0 e^{-\frac{T_0}{T_v}}$$

Considerando las siguientes variables adimensionales el modelo para el caso no isotérmico es:

$$\xi = \frac{R}{R_1}; \tau = \frac{t}{t_c} \quad (21)$$

$$\xi + \frac{\zeta}{\varpi(1+\zeta)} \left(\frac{1}{\varpi\xi} - 2 \right) + \frac{1}{\varpi(1+\zeta)} \ln(\varpi\xi) - \frac{1}{\varpi(1+\zeta)} - \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^n \left[\varpi^{n(\lambda-1)+2} \xi^{\lambda n+2} - \xi^n \right] = 0 \quad (22)$$

$$t_c = \left[\frac{\phi R_0^{n(\lambda-1)+2+2n}}{4\sigma_0 \pi h \varpi (1+\zeta)} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (23)$$

4 Resultados.

Las ecuaciones diferenciales obtenidas se resuelven numéricamente empleando un esquema de diferencias finitas hacia atrás, el programa se realiza en fortran, apéndice A.

Las propiedades del fluido no newtoniano se toman del trabajo de Sodah [13], las cuales se presentan en la siguiente tabla.

Test Material Mixture	%Consistency cm ⁻²	dyne. Sec. Flow	Behaviour index	Type of Flow
	(k)	(n)	(1 ± tanθ) ^o .	
CS100	26.77	1.000	1.00	Newtonian
HI00	13.80	0.830	0.819	pseudoplastic
SC100	81.50	0.834	0.368	pseudoplastic
CS80 : SC20	5.84	0.860	0.857	pseudoplastic
CS70 : SC30	5.99	0.808	0.825	pseudoplastic
CS60 : SC40	15.00	0.684	0.699	pseudoplastic
CS50 : SC50	17.31	0.632	0.637	pseudoplastic
CS40 : SC60	18.11	0.607	0.628	pseudoplastic
H60 : SC40	2.58	1.300	1.320	dilatant
H30 : CS70	2.35	1.179	1.185	dilatant
H20 : CS80	1.81	1.102	1.109	dilatant

Tabla 4.1 Características de flujo de Jarabe de Maíz (CS), Miel (H), Crema comestible (SC) y mezclas entre estos CS: SC and H:CS [13]

4.1 Curvas obtenidas mediante el modelo matemático.

A continuación, se muestran de manera gráfica los resultados derivados de los modelos matemáticos presentados anteriormente. Las gráficas corresponden tanto a las características físicas del fluidos (Newtoniano, Pseudoplastico, Dilatante) como del gradiente de temperatura.

4.1.1 Fluido Newtoniano.

En la Figura 4.1, se muestran los resultados para un fluido con características $n=1$ $k_0=26.77$, y las tres condiciones de temperatura .

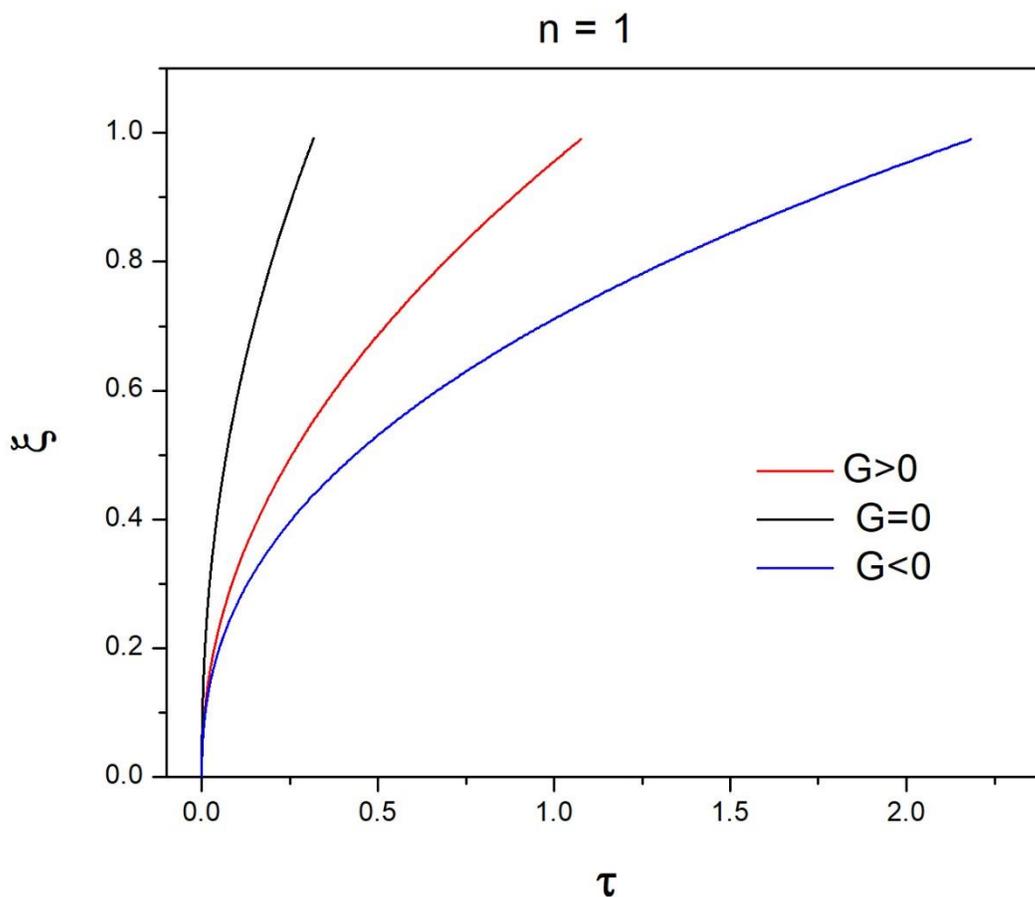


Figura 4.1. Grafica para un fluido Newtoniano con características $n=1$ $k_0=26.77$ donde la línea roja muestra el gradiente positivo, línea negra gradiente igual a cero, línea azul gradiente negativo

En este caso se puede notar que la evolución de frente de imbibición se acelera, respecto a las otras dos condiciones, cuando el gradiente es igual a cero. Como se puede observar el gradiente negativo tiene la evolución más lenta. En los tres casos se muestra una tendencia similar.

4.1.2 Fluido Pseudoplastico.

Para un fluido con características $n=0.632$ $k_0 = 17.31$ $T_v=1.0$ Se obtiene las siguientes curvas de la [Figura 4.2]

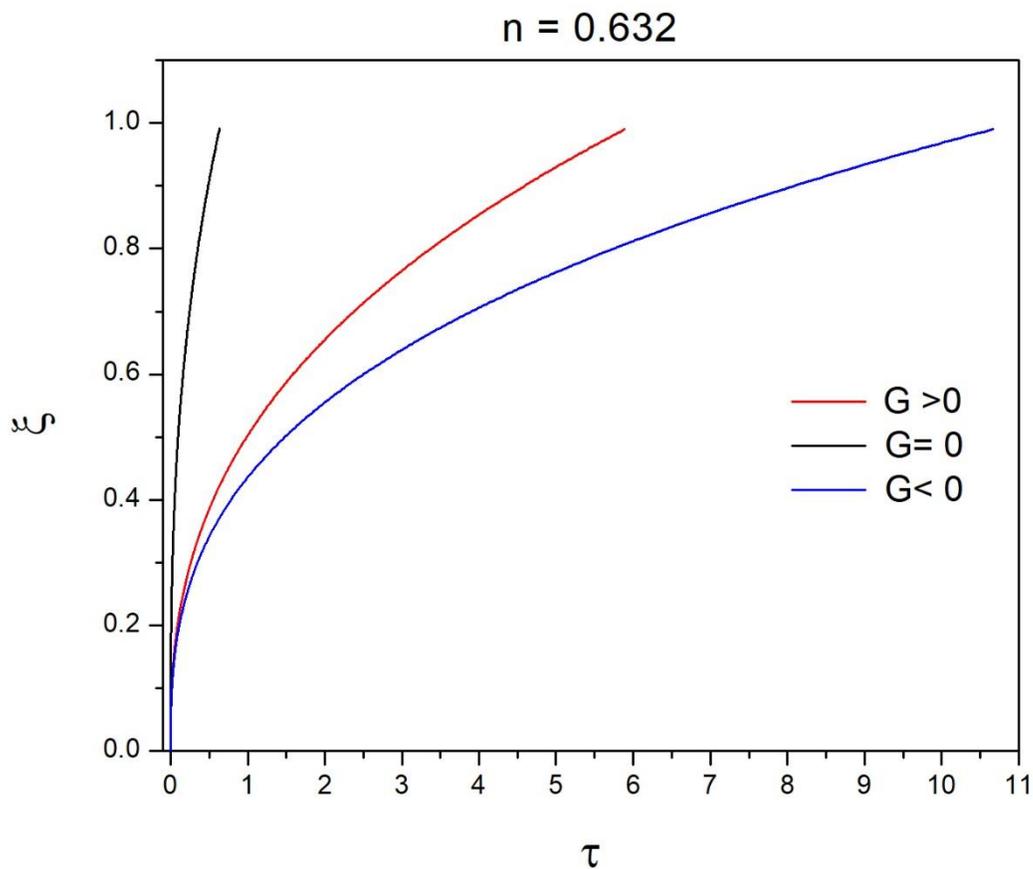


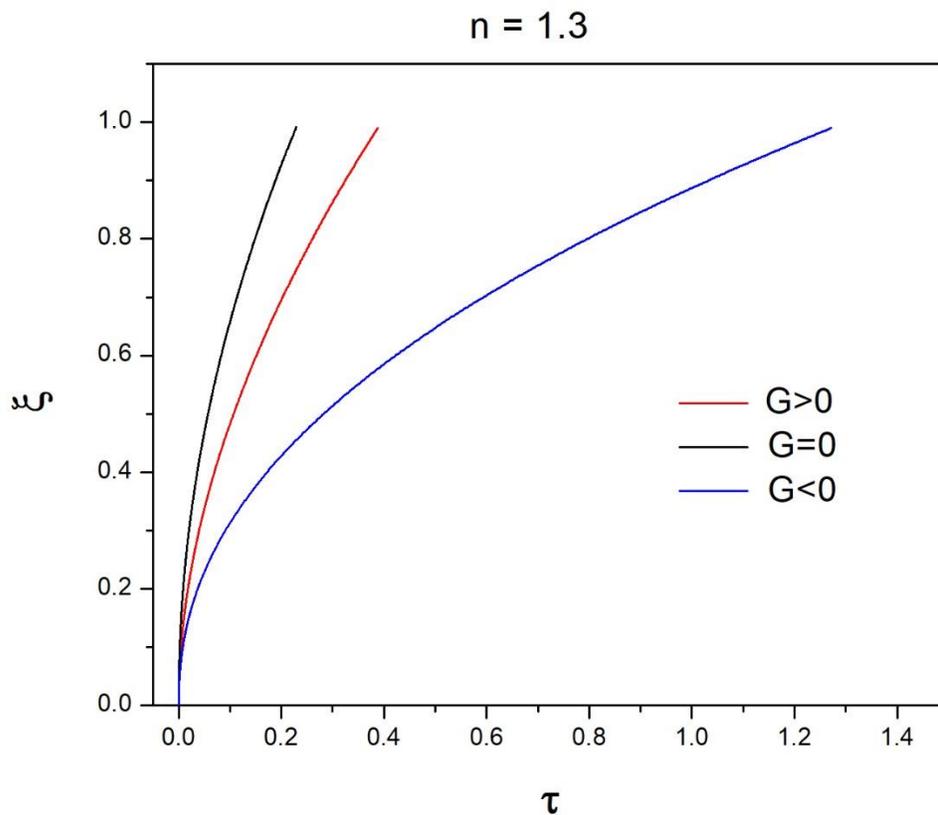
Figura 4.2 Grafica para un fluido Pseudo plastico con características $n=0.632$ $k_0=17.31$ donde la línea roja muestra el gradiente positivo, línea negra gradiente igual a cero, línea azul gradiente negativo

En este caso se puede notar que la evolución de frente de imbibición se acelera, respecto a las otras dos condiciones, cuando el gradiente es igual a cero. Como

se puede observar el gradiente negativo tiene la evolución más lenta. En los tres casos se muestra una tendencia similar.

4.1.3. Fluido Dilatante.

Para un fluido con características $n=1.3$ $k_0=2.58$. Se obtiene las siguientes curvas de la [Figura 4.3]



. Figura 4.3 Grafica para un fluido Dilatante con características $n=1.3$ $k_0=2.58$ donde la línea roja muestra el gradiente positivo, línea negra gradiente igual a cero, línea azul gradiente negativo

En la Figura 4.3 se puede notar que la evolución de frente de imbibición se acelera cuando el gradiente es igual a cero ya que su velocidad es claramente mayor, después nuestro caso positivo muestra su perfil de velocidad y por ultimo con menor aceleración es el caso negativo. Se presenta un comportamiento asintótico de las curvas que describen la velocidad del frente de imbibición.

5.1 Conclusiones.

En este trabajo se obtienen dos modelos matemáticos para la imbibición en una celda radial de Hele-Shaw, estos modelos consideran tanto el caso isotérmico como la presencia de un gradiente de temperatura. Los resultados se presentan de manera gráfica y se analizan tres fluidos, Newtoniano, Pseudoplastico y Dilatante.

- El caso isotérmico muestra la mayor velocidad del frente de imbibición para los tres tipos de fluidos.
- Para los tres tipos de fluidos la velocidad es menor para el caso del gradiente negativo
- La evolución del frente de imbibición muestra un comportamiento asintótico en función del incremento del tiempo, esto se debe a que la fuerza de fricción crece con el aumento del área mojada por el fluido, lo cual se opone a los efectos de la presión capilar.

Los resultados fueron obtenidos por el modelo matemático desarrollado para este trabajo, muestran comportamiento similar para un medio poroso Villaseñor [16].

A reserva de su validación experimental, los modelos derivados en este trabajo muestran la influencia del gradiente de temperatura durante la imbibición radial entre placas circulares.

Bibliografía.

- [1] https://www2.dgeo.udec.cl/juaninzunza/docencia/mecanica_fluidos/fluidos1.pdf
- [2] Maximino Ventura Sánchez & Juan Guillermo Cervantes. (2019). Estudio teórico- experimental de la imbibición para un fluido pseudoplástico. Ciudad Universitaria, Cd. Mx.: UNAM – Dirección General de Bibliotecas.
- [3] <https://www.ier.unam.mx/~ojs/pub/Liquid3/node10.html>
- [4] Zitzewitz, P.W. (2004). Física. Colombia: McGraw-Hill.
- [5] Robert L. Mott. (1996). MECÁNICA DE FLUIDOS APLICADA. 4a. Ed. CalJe 4 N° 25-2~ piso Fracc, Ind. Alce Blanco, Naucalpan de Juárez, Edo. de México, c.P. 53370: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- [6] Reiner, M., and Scott Blair, Rheology terminology, in Rheology, Vol. 4 pp. 461, (New York: Academic Press, 1967).
- [7] Abraham Medina Ovando, José Antonio Cordova y Raimundo Martínez-Angeles. (20 de julio de 1999). Imbibición en papel. Ciencias Exactas y Aplicadas, Vol.1, p.271.
- [8] J.M. Sánchez Huerta, A. Ortiz Gómez. (2021, Julio 16). Imbibition in conical capillaries under temperature gradients. ELSEVIER, 412, pp.1-5.
- [9] J.M Sánchez, J.G Cervantes. (2017, septiembre 20-22). Estudio Experimental del frente de Imbibición de fluidos no-newtonianos en una celda de Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura. MEMORIAS DEL XXIII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMIM, 1ro, pp. 1-5.

- [10] José Melesio Sánchez Huerta. (AGOSTO 2005). Imbibición en medios porosos fracturados. Facultad de Ingeniería, UNAM: Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería. José Melesio Sánchez Huerta (AGOSTO 2005). Spontaneous imbibition in a porous medium under longitudinal temperature gradients. REVISTA MEXICANA DE FÍSICA, 1er. Volumen
- [11] An investigation of laminar radial flow between two parallel discs by j. d. Jackson and G. R. Symmons
- [12] Guéguen, Y., & Palciauskas, V. (1994). Introduction to the physics of rocks. Princeton, NJ: Princeton University Press
- [13] Kamil Wichterle., Heat transfer in temperature-dependent non-Newtonian flow.
- [14] Jackson, J. D. and G. R. Symmons, Int. J. Mech. Sci. 7 (1965) 239.
- [15] Jürgen H. Schön. (2015). Chapter 2 - Pore Space Properties. ELSEVIER, Vol. 1, Figure 2.45.
- [16] Estudio Teórico de la Imbibición en un medio poroso bajo gradiente de temperatura en un fluido no newtoniano

Apéndice A.

Programa utilizado para la solución numérica del modelo matemático

Entrada.

```
subroutine input

use var
implicit none

n=1.54d0
roo= 998.d0
g = 9.81d0 !Gravedad
sigma= 20.94d-3 !Tensión superficial
sigmaP=36.94d-3 ! evaluada a la temperatura fria, gradiente positivo
sigmaN=30.5d-3 !evaluada a la temperatura caliente, gradiente negativo
R0=1.d-3
Rl=5.d-2
Tl=35.d0 + 273.15d0
T0=25.d0 + 273.15d0 !Siempre es la menor temperatura, el progrma ya la cambia
dsigmaP= -1.428d-4
dsigmaN= 1.428d-4

Tv=1.0d2
k0=2.58d-3 ! Es H0

end subroutine input
```

Malla.

```
subroutine malla

use var
implicit none
! ***** CONO CONVERGENTE *****
do i=1,imax,1

Y(i) = ( (i-1.d0)/(imax-1.d0) )**2.d0

! ((1.d0/B0**0.5d0)-a)*(i-1.d0)/(imax)

end do
!***** CONO DIVERGENTE *****
do i=1,imax,1

X(i) =( (i-1.d0)/(imax-1.d0) )**2.0d0

!
! (((i-1.d0)/(imax-1.d0))/1.d0)**3.d0
! (4100.d0-i)*( (i-1.d0)/(imax-1.d0) )**2.d0 )
end do

end subroutine malla
```

Programa.

```
program radial
use var
implicit none

    call input
    call iniciales
    call malla

Print*, 'INICIA Radial Isotermico'
pause

open(unit=11, file='sal_Isotermico_Radiadsdsfddl.dat')

    Print*, 'INICIA ROCA ISOTERMICO'

        do i=2, imax, 1
            iso1=Y(i)-Y(i-1)
            iso2=Y(i)-1.d0+ Log( Y(i))
            iso3=Y(i)**2.d0-Y(i)**n

                tao(i)= ( iso1 / (iso2/iso3)**(1.d0/n) )+tao(i-1)

            write(11,*) tao(i),Y(i)
            write(*,*) tao(i),Y(i)
            if( Y(i)>0.991d0) exit
        end do

Print*, 'QUE PASA'
    close (unit=11)

open(unit=12, file='sal Gradiente Positivo Radial.dat')
|
Print*, 'INICIA Radial POSITIVO'
pause
```

```

do i=2,imax,1

    fi=(T1-T0)/log(R1/R0)
    lam=-n*fi/Tv
    Zeta = (1.d0/sigmaP)*dsigmaP*fi

    pos1=X(i)-X(i-1)
    pos2= (X(i)**((2.d0)+lam*n))-X(i)**n
    pos3=X(i)+((zeta/(1.d0+zeta))*(1.d0/X(i))-2.d0)

    pos4= ((1.d0/(1.d0+zeta))*(log(X(i))))-(1.d0/(1.d0+zeta))

    taop(i)=(pos1/(((pos3+pos4)/pos2)**(1.d0/n)))+ taop(i-1)
    if( x(i)>0.991d0) exit

    write(12,*) taop(i),X(i)
    write(*,*) taop(i), X(i)

end do

close (unit=12)
pause

>rint*, 'INICIA ROCA NEGATIVO'
call malla
open(unit=13,file='sal_Gradiente_Negativo_Radial.dat')
do i=2,imax,1

    fi=(T0-T1)/log(R1/R0)
    lam=-n*fi/Tv
    Zeta = (1.d0/sigmaN)*dsigmaN*fi

```

```

neg1=X(i)-X(i-1)
neg2= (X(i)**(lam*n+(2.d0)))-(X(i)**n)
neg3=X(i)+ ( zeta/(1.d0+zeta))*((1.d0/X(i))-2.d0 )

neg4= ((1.d0/(1.d0+zeta))*(log(X(i)) ) )-(1.d0/(1.d0+zeta))

  taoN(i)=(neg1/(((neg3+neg4)/neg2)**(1.d0/n)))+ taoN(i-1)
if( x(i)>0.991d0) exit
  write(13,*) taoN(i),X(i)
  write(*,*) taoN(i),X(i),neg3+neg4

  end do

close (unit=13)

```

```

end program radial

```