

Medición de funciones de reflexión acústica en  
instrumentos musicales de viento.

María Angélica Suárez Hernández

Abril de 2004

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia (mi mamá, mi papá y mis hermanos) ya que ellos son mi fuerza, mi coraje y mis ganas para superar todos los problemas que se me presentan.

A mis amigos (alumnos y profesores de la Facultad de Ingeniería y del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico), por que sin sus pláticas y consejos, mi estancia en la carrera y en el desarrollo de este trabajo hubiese sido aburrido y monótono.

A las personas con las que vivo, ya que ellos han sido como unos segundos padres para mí.

A mi director de tesis, el Dr. Felipe Orduña Bustamante, por toda su paciencia, tiempo y amistad que me brindó durante la realización de este trabajo.

A todos ustedes, muchísimas gracias.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Descripción del tema de la tesis . . . . .	4
1.2. Contenido de la tesis . . . . .	5
<b>2. Acústica de los instrumentos de aliento</b>	<b>6</b>
2.1. Ondas acústicas en tubos . . . . .	6
2.1.1. Ondas planas . . . . .	7
2.1.2. Pérdidas en las paredes . . . . .	11
2.2. Impedancia acústica y coeficiente de reflexión . . . . .	13
2.2.1. Impedancia acústica característica . . . . .	13
2.2.2. Reflexión y transmisión entre dos medios . . . . .	14
2.2.3. Impedancia y reflexión a la entrada de un tubo . . . . .	14
2.2.4. Impedancia y reflexión en un tubo cilíndrico . . . . .	16
2.2.5. Impedancia y reflexión en un tubo cónico . . . . .	18
2.3. Función de reflexión . . . . .	20
2.4. Método de matrices de transferencia . . . . .	23
2.4.1. Agujeros de digitación . . . . .	25
2.4.2. Método para calcular la función de reflexión . . . . .	28
<b>3. Métodos para medir la función de reflexión</b>	<b>30</b>
3.1. Método de una fuente y un micrófono con extremo cerrado . . . . .	30
3.2. Método de impedancia de Wolfe et al. . . . .	35
3.2.1. Medición de $Z(f)$ . . . . .	37
3.3. Método alternativo de una fuente y un micrófono . . . . .	38
3.4. Método de una fuente y dos micrófonos . . . . .	43
<b>4. Pruebas y resultados experimentales</b>	<b>46</b>
4.1. Modelado de funciones de reflexión en una flauta . . . . .	46
4.2. Medición de funciones de reflexión en una flauta . . . . .	48

4.3.	Análisis de funciones de reflexión . . . . .	51
4.3.1.	Funciones de reflexión en el dominio del tiempo. . . . .	52
4.3.2.	Funciones de reflexión en el dominio de la frecuencia. . . . .	61
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>70</b>
5.1.	Aportaciones de la tesis . . . . .	70
5.2.	Sugerencias para trabajos futuros . . . . .	70
	<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>
<b>A.</b>	<b>Código de Matlab.</b>	<b>74</b>
A.1.	Cálculo de la función de reflexión. . . . .	74
A.2.	Tabla de digitación. . . . .	75
A.3.	Programa <code>medir.m</code> . . . . .	76
A.4.	Programa <code>reflexion.m</code> . . . . .	77
A.5.	Gráficas de la función de reflexión. . . . .	78

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Descripción del tema de la tesis

Esta tesis trata sobre el estudio de la acústica de los instrumentos musicales de viento. Algunas de las aplicaciones de este tema de estudio son: entender el funcionamiento de los instrumentos musicales, determinar la afinación de las notas que producen, la facilidad para tocarlo, evaluar la calidad del instrumento en cuanto a materiales, diseño y construcción. Otra aplicación importante es proveer información que pueda utilizarse en la síntesis artificial del sonido de estos instrumentos; especialmente por métodos digitales. El estudio se puede realizar analizando las señales que producen los instrumentos, analizando las técnicas de ejecución y de afinación y a través de simulaciones basadas en modelos físicos.

Los modelos físicos de los instrumentos musicales de viento están divididos conceptualmente en dos partes: el mecanismo de excitación (que puede ser controlado por vibraciones de una caña, por vibraciones de los labios o por oscilaciones de un chorro de aire) y el resonador acústico (formado por el tubo, los agujeros de digitación, las válvulas y otros elementos). Para cualquier digitación o configuración del instrumento, el resonador acústico queda caracterizado convenientemente por su función de reflexión  $r(t)$ , la cual determina las características más importantes del sonido producido. La función de reflexión representa la respuesta de presión sonora reflejada por el resonador debida a un pulso de presión incidente desde el punto de excitación.

Actualmente, los modelos teóricos y computacionales para el cálculo de las funciones de reflexión son muy conocidos y su validez está muy bien establecida [1], [2] y [3]. En contraste, ha sido muy poca la atención que se le ha dado al desarrollo de técnicas experimentales para medir las funciones de reflexión en los instrumentos de viento [4] y [5].

El objetivo de esta tesis es describir métodos experimentales para medir la función de reflexión de la columna de aire de una flauta (sin la sección de la embocadura) y comparar los resultados obtenidos experimentalmente (mediante uno de los métodos) con los que se

obtienen a partir de modelos computacionales. Cabe señalar que este trabajo no pretende abordar aplicaciones de síntesis de sonido, ni de caracterización de instrumentos; su objetivo se enfoca al desarrollo y validación aproximada del método experimental.

## 1.2. Contenido de la tesis

Esta tesis está organizada como sigue.

El Capítulo 2 describe el comportamiento de las ondas sonoras, la función de reflexión y el método de matrices de transferencia para calcular la función de reflexión.

El Capítulo 3 presenta cuatro métodos para medir la función de reflexión. El primero de ellos se basa en el artículo de Douglas H. Keefe: “Wind instruments reflection function measurements in the time domain” [4], en el cual su montaje de prueba está comprendido por una fuente acústica, modelada como una fuente de Thevenin, y un micrófono. El segundo método se obtiene del artículo de J. Wolfe: “Acoustic Impedance Spectra of Classical and Modern Flutes” [5], en el que se ocupa una fuente, un micrófono y un tubo de calibración que se usa para ecualizar la señal de entrada a la fuente. Los siguientes métodos han sido propuestos por el director de la tesis y no están reportados en la literatura. El tercer método utiliza una fuente y un micrófono como en el método de Keefe, pero considera la fuente como un transductor electroacústico para obtener la función de reflexión. Y por último, en el cuarto método se ocupa una fuente acústica y dos micrófonos, que permiten obtener las componentes de onda viajera del campo sonoro y la función de reflexión.

En el Capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos experimentalmente y se comparan con los obtenidos a través de un modelo numérico basado en el método de matrices de transferencia.

Por último, en el Capítulo 5 se exponen las conclusiones de esta tesis.

## Capítulo 2

# Acústica de los instrumentos de aliento

Los instrumentos musicales se han desarrollado en casi todas las culturas de diversas épocas. Se han hallado variaciones considerables en cuanto a la sofisticación del diseño y el nivel artesanal de construcción. Los instrumentos musicales han sido una fuente importante de los sonidos musicales y medios prácticos de expresión musical a través de los años.

Existen muchas maneras de clasificar los instrumentos musicales. Una de las maneras más comunes para clasificarlos es en tres familias: cuerdas, aliento y percusión.

En este capítulo se tratará acerca de los instrumentos de aliento, para ello necesitamos conocer la naturaleza de las ondas que generan el sonido en este tipo de instrumentos [6].

El material de la Sección 2.1 hasta la Sección 2.3 se basa casi en su mayoría en el libro de Fletcher y Rossing [7].

### 2.1. Ondas acústicas en tubos

El mundo está lleno de ondas: ondas sonoras, ondas de luz, ondas acuáticas, ondas de radio y otras. El lugar en donde estamos ubicados es entrecruzado por ondas de luz, ondas de radio y ondas sonoras de diferentes frecuencias; las ondas vibratorias, especialmente las de baja frecuencia, se propagan a través de las paredes y el techo. Prácticamente toda comunicación depende de ondas de algún tipo. Aunque las ondas sonoras son físicamente diferentes de las ondas de radio, todas las ondas poseen ciertas propiedades en común. En esta sección se discuten algunas de estas propiedades comunes y se hace incapié en algunas propiedades particulares de las ondas sonoras.

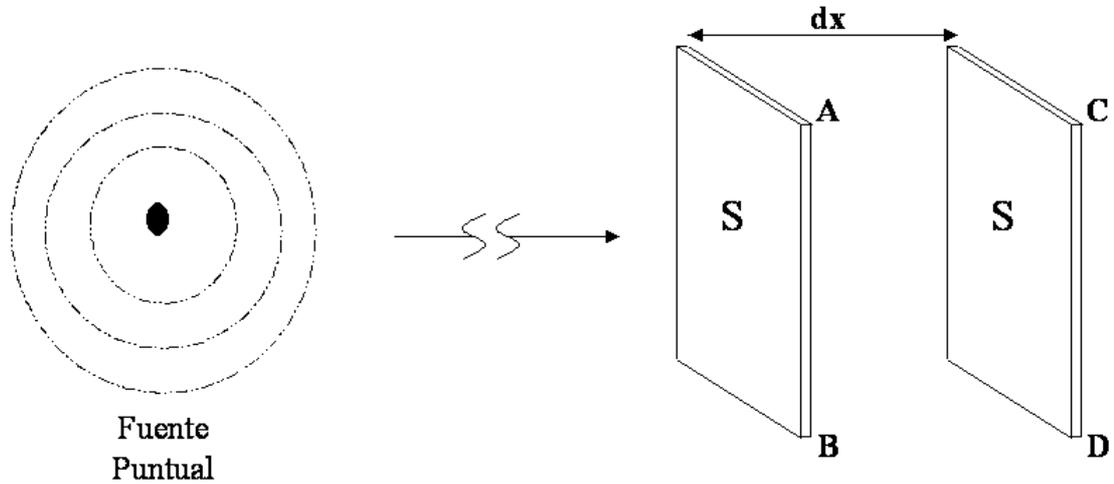


Figura 2.1: Frentes de onda acústica en perspectiva.

### 2.1.1. Ondas planas

Las ondas acústicas y mecánicas pueden propagarse en cualquier medio que tenga una distribución de masa y elasticidad. Los materiales sólidos, los cuales poseen elasticidad de corte y de compresión, permiten la propagación de ondas de corte (transversales) y ondas compresivas (longitudinales) cuya conducta puede resultar muy complicada.

Los fluidos, y en particular los gases como el aire, no poseen resistencia elástica al corte, pero sí poseen una resistencia viscosa; por lo tanto, las únicas ondas que pueden propagarse en ellos son las ondas longitudinales, en las que el movimiento del aire es en la misma dirección que la dirección de propagación de la onda.

Cuando las ondas sonoras son generadas por una fuente pequeña, estas se extienden en todas direcciones de manera esférica. Si tomamos una pequeña sección de onda a una distancia retirada de la fuente, entonces los frentes de onda pueden ser tratados como ondas planas en la dirección de propagación.

Supongamos que tenemos dos frentes de onda como muestra la Figura (2.1), ambos con área  $S$  y una separación  $dx$ , si llamamos  $\xi$  al desplazamiento del aire entre estos dos planos de tal manera que los puntos  $ABCD$  se muevan a  $A'B'C'D'$  como muestra la Figura (2.2), entonces el volumen de este elemento está dado por

$$V + dV = Sdx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right). \quad (2.1)$$

Por otra parte, supongamos que  $p_a$  es la presión total del aire, entonces el módulo de elasticidad volumétrica  $K$  queda definido por la relación

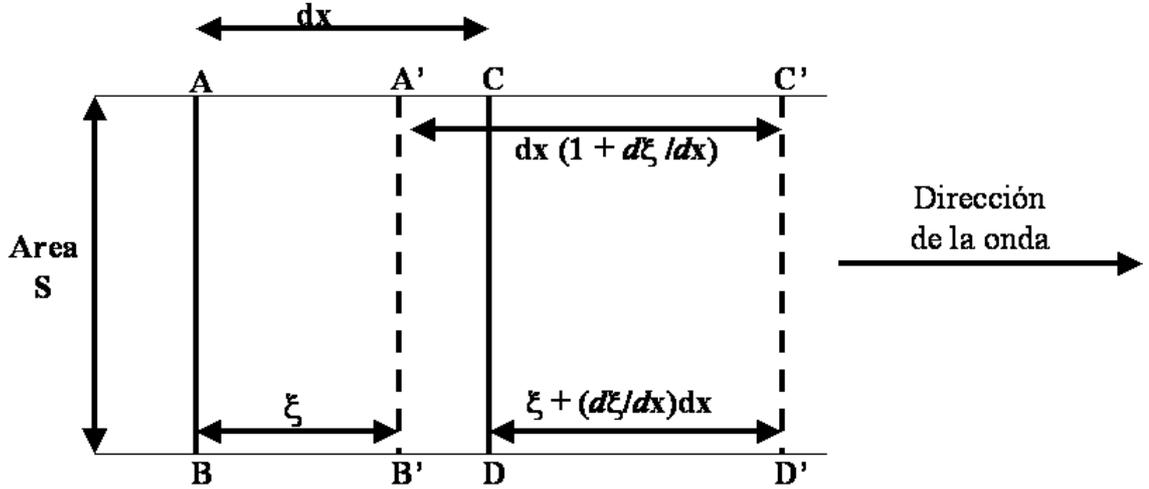


Figura 2.2: Frentes de onda acústica.

$$dp_a = -K \frac{dV}{V}; \quad (2.2)$$

el signo negativo indica que al disminuir la presión el volumen aumenta y viceversa.

Podemos llamar a la pequeña parte  $dp_a$  de  $p_a$  la presión sonora o presión acústica y escribirla simplemente como  $p$ . Entonces comparando la Ecuación (2.2) con la Ecuación (2.1), notamos que  $V$  es justamente  $Sdx$ , entonces

$$p = -K \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Finalmente notamos que el movimiento del elemento  $ABCD$  puede ser descrito por la ecuación de Newton, de modo que, poniendo la fuerza del gradiente de presión en la misma dirección que la masa multiplicada por la aceleración, nos dé

$$-S \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

ó

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Entonces de las Ecuaciones (2.3) y (2.5) tenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2.6)$$

Derivando otra vez con respecto a  $x$ , ó derivando la Ecuación (2.3) dos veces con respecto a  $t$  nos dá

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \quad (2.7)$$

que es la ecuación de onda acústica.

Las Ecuaciones (2.6) y (2.7) son dos diferentes maneras de la ecuación de onda en una dimensión, la primera refiriéndose al desplazamiento acústico  $\xi$  y la segunda a la presión acústica  $p$ . Estas ecuaciones se pueden aplicar de igual manera en cualquier fluido si se utilizan valores correspondientes para el módulo de elasticidad volumétrica  $K$  y densidad  $\rho$ .

Para el caso de propagación de ondas en el aire, es necesario saber si la conducta elástica (compresión y rarefacción del aire) es isotérmica, o sea que la temperatura es constante, o si es adiabática, es decir sin flujo de calor entre las partes calientes y frías.

El aire en condiciones normales se comporta aproximadamente como un gas ideal, la ecuación que describe a los gases ideales es

$$p_a V = nkT; \quad (2.8)$$

si la compresión es isotérmica, o sea, que la temperatura es constante, entonces se describe por

$$p_a V = \text{constante}; \quad (2.9)$$

si la conducta es adiabática, o sea, que no hay intercambio de calor, entonces queda descrito de la manera siguiente

$$p_a V^\gamma = \text{constante}; \quad (2.10)$$

en donde  $\gamma = C_p/C_v = 1,4$  es la razón de los calores específicos del aire a presión y volumen constante, respectivamente y  $p_a$  es la presión atmosférica promedio. Ciertamente la temperatura tiende a aumentar en aquellas partes de la onda en donde el aire se comprime y a disminuir en donde se expande. Todo lo anterior nos origina una duda: determinar si puede existir conducción térmica entre estas dos regiones. Debido a que el aire es un mal conductor del calor y que el tiempo disponible para que el calor se transfiera de las zonas calientes a las zonas frías (separadas  $\lambda/2$ ) es tan corto (aproximadamente  $T/2$ ), entonces resulta que el proceso es completamente adiabático (con la posible excepción del sonido que se propaga muy próximo a una pared, como se explicará en la siguiente sección, o bien, a frecuencias cercanas a los gigahertz).

Aplicando logaritmos a la Ecuación (2.10) y derivando, encontramos, utilizando la Ecuación (2.2), que

$$K = \gamma p_a; \quad (2.11)$$

con lo que la Ecuación (2.7) se convierte en

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \quad (2.12)$$

en donde

$$c^2 = \frac{K}{\rho} = \frac{\gamma p_a}{\rho}; \quad (2.13)$$

y similarmente para  $\xi$  de la Ecuación (2.5). Como podremos ver más adelante, la cantidad  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas sonoras.

Es fácil verificar por derivación, que posibles soluciones de la ecuación de onda (2.12) tienen la forma

$$p(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct); \quad (2.14)$$

en donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones continuas generales de sus argumentos. Podemos ver que  $f_1(x - ct)$  representa una onda de forma espacial arbitraria  $f_1(x - x_0)$  ó de conducta de tiempo arbitraria  $f_1(ct_0 - ct)$  propagándose en la dirección  $+x$  con velocidad  $c$ . Similarmente,  $f_2(x + ct)$  representa una onda diferente propagándose en la dirección  $-x$ , también con velocidad  $c$ . En el caso del aire ó cualquier otro gas cercano a un gas ideal, las Ecuaciones (2.8) y (2.10) muestran que

$$c(T) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/2} c(T_0), \quad (2.15)$$

en donde  $c(T)$  es la velocidad del sonido a la temperatura absoluta  $T$ . Sin embargo, no hay variación de  $c$  con la presión atmosférica. Para el aire a una temperatura  $\Delta T$  grados Celsius y 50% de humedad relativa tenemos

$$c \approx 332(1 + 0,00166\Delta T) \text{ m/s}, \quad (2.16)$$

dando  $c \approx 343$  m/s a temperatura ambiente.

La solución para la Ecuación (2.12) en el dominio de la frecuencia tiene la forma

$$p = Ae^{-jkx}e^{j\omega t} + Be^{jkx}e^{j\omega t}, \quad (2.17)$$

en donde  $k = \omega/c$  es el número de onda y los términos  $A$  y  $B$  representan ondas viajando a la derecha y a la izquierda, respectivamente.

### 2.1.2. Pérdidas en las paredes

Si suponemos que las ondas sonoras se propagan dentro de un tubo (por ejemplo el de un instrumento musical), entonces debemos considerar los efectos viscosos y térmicos que existen dentro de las paredes del tubo.

La capa límite es una capa de aire cercana a las paredes del tubo en la cual coexisten efectos viscosos y de conducción térmica. Las paredes contribuyen a un arrastre viscoso a la que de otra manera es una impedancia tipo masa asociada a la aceleración del aire en el tubo. La magnitud relativa del arrastre depende del grosor de la capa viscosa y su relación con el radio  $a$  del tubo. Una forma de cuantificar esto, es a través de la relación (adimensional) del radio del tubo con respecto al grosor de la capa límite, dada por la siguiente expresión:

$$r_v = (\omega\rho/\eta)^{1/2}a. \quad (2.18)$$

en donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\rho$  es la densidad del medio,  $\eta$  es la viscosidad y  $a$  es el radio del tubo.

Similarmente, los efectos de conducción térmica entre el aire y las paredes, presentan pérdidas a la que de otra manera se comportaría como una compresión del aire; la magnitud relativa de esta pérdida depende del factor adimensional

$$r_t = (\omega\rho C_p/\kappa)^{1/2}a \quad (2.19)$$

en donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\rho$  es la densidad del medio,  $C_p$  es el calor específico a presión constante,  $\kappa$  es la conductividad térmica y  $a$  es el radio del tubo.

Cerca de los 300 grados Kelvin (27 grados Celsius) podemos insertar valores numéricos

$$r_v \approx 632,8af^{1/2}(1 - 0,0029\Delta T), \quad (2.20)$$

y

$$r_t \approx 532,8af^{1/2}(1 - 0,0031\Delta T), \quad (2.21)$$

en donde  $\Delta T = 27 - T_{amb}$ .

Estos efectos producen atenuación al tubo, sin importar que este sea corto o largo, debido a que en las fórmulas no se hace referencia a la longitud; en la formulación teórica, al número de onda  $k$  se le asigna una parte compleja, para indicar que en el tubo existen pérdidas por viscosidad y conducción de calor.

El radio  $a$  del tubo determina si los efectos contribuyen en mayor ó en menor grado, por ejemplo, para el caso de un tubo de radio  $a = 6,75$  mm (típico del tubo de una flauta dulce soprano) a una frecuencia de 1 Hz y temperatura de 20 grados Celsius, tenemos

$$r_v = 632,8(6,75 \text{ mm})(1)^{1/2}(1 - 0,0029(7)) = 41,847 \quad (2.22)$$

$$r_t = 532,8(6,75 \text{ mm})(1)^{1/2}(1 - 0,0031(7)) = 3,5184 \quad (2.23)$$

si obtenemos el inverso de estos resultados y los multiplicamos por 100, nos damos cuenta que la capa límite es un 24 % del radio del tubo para el efecto viscoso y un 28 % para el efecto térmico.

Ahora para un tubo de radio  $a = 0,5 \text{ mm}$ , (típico de un agujero de digitación en una flauta dulce soprano) a una frecuencia de 1Hz y temperatura de 20 grados Celsius, tenemos

$$r_v = 632,8(0,5 \text{ mm})(1)^{1/2}(1 - 0,0029(7)) = 0,31 \quad (2.24)$$

$$r_t = 532,8(0,5 \text{ mm})(1)^{1/2}(1 - 0,0031(7)) = 0,2606 \quad (2.25)$$

Haciendo cálculos semejantes a los anteriores, vemos que la capa viscosa es un 322 % del radio del tubo y la capa térmica es un 383 %.

Si ahora suponemos una frecuencia de 1 kHz para los radios utilizados anteriormente, tenemos

para el tubo de radio  $a = 6,75 \text{ mm}$

$$r_v = 632,8(6,75 \text{ mm})(1000)^{1/2}(1 - 0,0029(7)) = 132,3315 \quad (2.26)$$

$$r_t = 532,8(6,75 \text{ mm})(1000)^{1/2}(1 - 0,0031(7)) = 111,2603 \quad (2.27)$$

La capa viscosa es un 0,75 % del radio del tubo y la capa térmica es un 0,89 % para el tubo de radio  $a = 0,5 \text{ mm}$

$$r_v = 632,8(0,5 \text{ mm})(1000)^{1/2}(1 - 0,0029(7)) = 9,823 \quad (2.28)$$

$$r_t = 532,8(0,5 \text{ mm})(1000)^{1/2}(1 - 0,0031(7)) = 8,2415 \quad (2.29)$$

La capa viscosa es un 10 % del radio del tubo y el efecto de la capa térmica es un 12 %.

Como se puede observar, la capa límite es más significativa cuando el radio del tubo es más pequeño y la frecuencia es muy baja, y tiende a ser despreciable cuando el radio del tubo es grande y la frecuencia aumenta. En los instrumentos de aliento, los cuales poseen un tubo en su constitución, también se pueden aplicar estos mismos principios.

## 2.2. Impedancia acústica y coeficiente de reflexión

En esta sección se explican algunos conceptos que serán de utilidad para las siguientes secciones, tal como la impedancia acústica característica en un solo medio, después se estudia qué pasa con una onda de presión sonora que se mueve de un medio de impedancia  $z_1$  a otro de impedancia  $z_2$ , obteniendo así el coeficiente de reflexión y el coeficiente de transmisión, posteriormente se analiza la impedancia y reflexión para un tubo finito ya sea cilíndrico ó cónico.

### 2.2.1. Impedancia acústica característica

Si consideramos una onda de frecuencia angular  $\omega$  viajando en la dirección  $+x$ , entonces podemos poner  $B = 0$  y  $A = 1$  en la Ecuación (2.3) y escribir

$$p = e^{-jkx} e^{j\omega t} \rightarrow \cos(-kx + \omega t), \quad (2.30)$$

en donde la segunda forma en que se escribe es justamente la parte real de la primera. De la Ecuación (2.6)  $\xi$  tiene una forma similar, aunque con una amplitud diferente y un factor de fase. Podemos relacionar  $p$  y  $\xi$  a través de la Ecuación (2.4), lo que nos dá

$$jkp = j\rho\omega \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (2.31)$$

ó, si escribimos  $u$  para la velocidad de flujo acústico  $\partial \xi / \partial t$  y recordando que  $k = \omega/c$ , entonces

$$p = \rho c u. \quad (2.32)$$

La presión acústica y la velocidad de flujo acústico (ó velocidad de partícula) en la dirección de propagación están en fase en una onda plana.

Esta situación hace útil definir una cantidad  $z$  llamada la impedancia de onda (ó a veces llamada la impedancia acústica específica).

$$z = \frac{p}{u} = \rho c \quad (2.33)$$

en donde  $p$  es la presión acústica del medio,  $u$  es la velocidad del fluido acústico,  $\rho$  es la densidad del medio y  $c$  es la velocidad del sonido.

Esta condición se cumple únicamente para una onda plana que viaja en la dirección positiva.

Es claramente una propiedad del medio y sus unidades son Pa/m ó kg/m<sup>2</sup>s, a veces toman el nombre de Rayls (en honor de Lord Rayleigh). Para el aire a una temperatura  $\Delta T$  grados Celsius y presión normal tenemos que

$$\rho c \approx 428(1 - 0,0017\Delta T)\text{kg/m}^2\text{s}. \quad (2.34)$$

### 2.2.2. Reflexión y transmisión entre dos medios

Un ejemplo común es el comportamiento de una onda de presión sonora  $Ae^{-jkx}$ , moviéndose desde un medio de impedancia  $z_1$  a otro de impedancia  $z_2$ . En general, nosotros esperaríamos una onda reflejada  $Be^{jkx}$  y una onda transmitida  $Ce^{-jkx}$ . La presión acústica de cualquier parte de la interface debe ser la misma, esto es, tomando la interface en  $x = 0$

$$A + B = C. \quad (2.35)$$

Similarmente, las velocidades de desplazamiento también deben ser las mismas en cualquier parte de la interface, entonces

$$\frac{A - B}{z_1} = \frac{C}{z_2}. \quad (2.36)$$

Podemos resolver las dos ecuaciones anteriores para encontrar el coeficiente de reflexión

$$\frac{B}{A} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}. \quad (2.37)$$

y el coeficiente de transmisión

$$\frac{C}{A} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}. \quad (2.38)$$

Estos coeficientes se refieren a las amplitudes de presión. Si  $z_2 = z_1$ , entonces  $B = 0$  y  $C = A$ . Si  $z_2$  es mayor que  $z_1$ , entonces la onda reflejada está en fase con la onda incidente y a una presión máxima se refleja como un máximo. Si  $z_2$  es menor que  $z_1$ , entonces hay un cambio de fase de 180 grados entre la onda reflejada y la onda incidente y la presión máxima se refleja como mínimo. Si  $z_2$  es mucho mayor que  $z_1$  ó viceversa, entonces la reflexión es casi completa.

### 2.2.3. Impedancia y reflexión a la entrada de un tubo

Algunos instrumentos musicales están compuestos por tubos, los cuales poseen una longitud finita, y dentro de estos tubos se dá la reflexión de la onda desde su extremo alejado, sea abierto o cerrado. Procederemos a calcular la impedancia de entrada para un tubo de longitud finita, el cual termina en una impedancia de carga finita  $Z_L$ . La impedancia de terminación  $Z_L$  generalmente se representa por un extremo abierto o cerrado, aunque no se restringe a estos casos. Ver Figura (2.3)

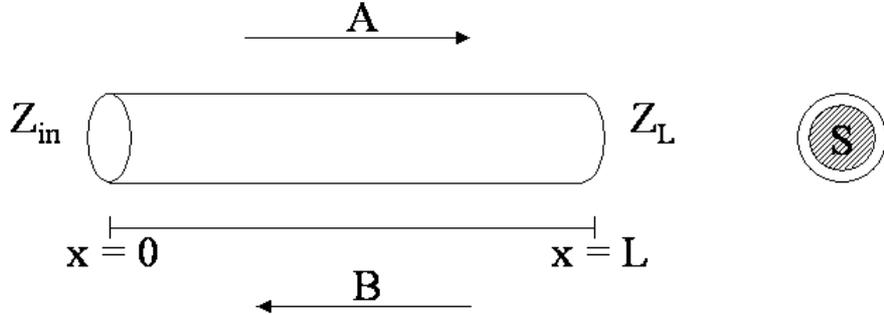


Figura 2.3: Impedancias en un tubo

Supongamos que el tubo se extiende desde  $x = 0$  hasta  $x = L$ , y que en  $x = L$  se termina por la impedancia  $Z_L$ . La presión en el tubo es una superposición de dos ondas, moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente, con amplitudes  $A$  y  $B$ , tomadas como cantidades complejas ya que pueden tener un factor de fase. Entonces en el punto  $x$

$$p(x, t) = (Ae^{-jkx} + Be^{jkx})e^{j\omega t}. \quad (2.39)$$

La velocidad de partícula acústica es similarmente una superposición de las velocidades de partícula asociadas con estas dos ondas y, multiplicando por la sección transversal  $S$  del tubo, el flujo acústico es

$$U(x, t) = \frac{S}{\rho c}(Ae^{-jkx} - Be^{jkx})e^{j\omega t}. \quad (2.40)$$

En el extremo que corresponde a  $x = L$ , presión y flujo se relacionan, como es requerido, por la impedancia de terminación  $Z_L$ , esto es

$$\frac{p(L, t)}{U(L, t)} = Z_L. \quad (2.41)$$

Esta ecuación es suficiente para determinar la razón compleja de  $B/A$ . Si nosotros escribimos para la impedancia característica del tubo

$$Z_0 = \rho c/S \quad (2.42)$$

entonces

$$\frac{B}{A} = e^{-2jkL} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (2.43)$$

y la potencia reflejada desde  $Z_L$  se obtiene de la siguiente manera

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right|^2. \quad (2.44)$$

Ciertamente, no hay reflexión si  $Z_L = Z_0$  y existe una reflexión completa si  $Z_L = 0$  ó  $\infty$ . Dado que  $Z_0$  es real para un tubo sin pérdidas, también existe una reflexión perfecta si  $Z_L$  es puramente imaginaria; sin embargo, si  $Z_L$  tiene una parte real que sea diferente de cero, entonces siempre habrá una pérdida en la reflexión.

#### 2.2.4. Impedancia y reflexión en un tubo cilíndrico

La cantidad en la cuál estamos interesados ahora es la impedancia de entrada  $Z_{in}$  en el punto  $x = 0$ . De las Ecuaciones (2.39) y (2.42), tenemos

$$Z_{in} = Z_0 \frac{A + B}{A - B} \quad (2.45)$$

ó de la Ecuación (2.43)

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos(kL) + j Z_0 \sin(kL)}{j Z_L \sin(kL) + Z_0 \cos(kL)} \quad (2.46)$$

De estas ecuaciones se derivan dos casos ideales importantes. El primero corresponde a un tubo rígido tapado en  $x = L$ , o sea  $Z_L = \infty$ . Para tal tubo tenemos

$$Z_{in}^{tapado} = -j Z_0 \cot(kL) \quad (2.47)$$

Por otro lado para el caso de un tubo idealmente abierto con  $Z_L = 0$ , el cual es difícil de realizar físicamente por la presencia de la impedancia de radiación, tenemos que

$$Z_{in}^{abierto} = j Z_0 \tan(kL) \quad (2.48)$$

Para tubos abiertos y tapados las familias de frecuencias de resonancias que se citan normalmente en los libros de Física Básica se obtienen de la consideración de que el extremo de entrada  $x = 0$  está abierto y por esta razón las resonancias ocurren en  $Z_{in} = 0$ . Para un tubo tapado esto requiere que  $\cot(kL) = 0$ , dando

$$\omega^{tapado} = (2n - 1)\pi c/2L \quad (2.49)$$

que corresponde a un múltiplo impar de cuartos de longitud de onda en la longitud del tubo. Para un tubo abierto, requerimos que  $\tan(kL) = 0$ , dando

$$\omega^{abierto} = n\pi c/L \quad (2.50)$$

Correspondiente a un múltiplo de medias longitudes de onda en la longitud del tubo.

Si consideramos un tubo idealmente abierto y al final de este encontramos que desemboca en un plano de un tamaño mucho mayor que una longitud de onda, y que por lo tanto se puede considerar infinito, entonces podemos encontrar su impedancia de carga en forma analítica. El tratamiento formal de Rayleigh [8] ([9] y [10]) hace la consideración de que el frente de onda en el extremo abierto del tubo es completamente plano y nos dá

$$Z^{apantallado} = R + jX \quad (2.51)$$

en donde

$$R = Z_0 \left[ \frac{(ka)^2}{2} - \frac{(ka)^4}{2^2 3} + \frac{(ka)^6}{2^2 3^2 4} - \dots \right] \quad (2.52)$$

$$X = \frac{Z_0}{\pi k^2 a^2} \left[ \frac{(2ka)^3}{3} - \frac{(2ka)^5}{3^2 5} + \frac{(2ka)^7}{3^2 5^2 7} - \dots \right] \quad (2.53)$$

y  $a$  es el radio del tubo

Esto resuelve el problema de manera general. Si hacemos la consideración de que  $ka \ll 1$ , entonces para obtener la impedancia de carga en este caso, la componente  $R$  puede despreciarse y nos queda

$$Z^{apantallado} \approx jZ_0 k \left( \frac{8a}{3\pi} \right) \quad (2.54)$$

Si ahora consideramos que el mismo tubo se extiende por una pequeña longitud  $l$  a una terminación idealmente abierta, entonces de la Ecuación (2.48) tenemos que

$$Z_l = jZ_0 \tan kl \approx jZ_0 kl \quad (2.55)$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones, observamos que son bastante parecidas y podemos identificar que

$$l = \frac{8a}{3\pi} \quad (2.56)$$

y esto equivale a que el tubo “apantallado” se comporte como un tubo idealmente abierto y su longitud aumente una fracción  $l$ .

A esta  $l$  se le llama “corrección en el extremo” y para este caso tiene un valor de

$$l^{apantallado} = \frac{8a}{3\pi} \approx 0,85a \quad (2.57)$$

Ahora, para determinar la “corrección de extremo” para un tubo idealmente abierto pero sin que desemboque en un plano, se realiza el mismo procedimiento, el cual lleva a un

cálculo muy complicado que se describe en el artículo de Levine y Schwinger [11], llegando a la siguiente conclusión

$$\Gamma^{abierto} \approx 0,61a \quad (2.58)$$

### 2.2.5. Impedancia y reflexión en un tubo cónico

Si consideramos un cono, como el que se muestra en la Figura (2.4), con una “garganta” de área  $S_1$  localizada en la posición  $x_1$ , una “boca” de área  $S_2$  en la posición  $x_2$  y cuya longitud es  $L = x_2 - x_1$ , tenemos

$$Z_{in} = \frac{\rho c}{S_1} \frac{j Z_L [\sin(kL - \theta_2) / \sin \theta_2] + (\rho c / S_2) \sin(kL)}{Z_L [\sin(kL + \theta_1 - \theta_2) / \sin \theta_1 \sin \theta_2] - (j \rho c / S_2) [\sin(kL + \theta_1) / \sin \theta_1]} \quad (2.59)$$

en donde  $\theta_1 = \tan^{-1} kx_1$ ,  $\theta_2 = \tan^{-1} kx_2$ , y tanto el punto  $x_1$  como el punto  $x_2$  empiezan a medirse a partir del ápice del cono a lo largo del eje  $x$ .

Esta ecuación nos servirá para analizar casos de conos con extremos abiertos ó tapados, considerando  $Z_L = 0$  para extremos abiertos y  $Z_L = \infty$  para extremos cerrados. Para un cono de longitud  $L$  con un extremo idealmente abierto, se obtiene, para cualquiera de los extremos del cono, lo siguiente

$$Z_{in} = j \left( \frac{\rho c}{S_1} \right) \frac{\sin(kL) \sin(\theta)}{\sin(kL + \theta_1)} \quad (2.60)$$

Esto no implica que la impedancia de entrada sea la misma en ambos extremos, ya que el signo de  $L$  y la magnitud de  $\theta_1$  serán diferentes en cada caso, según el cono se ensanche o se angoste hacia el extremo  $x = L$ .

En la impedancia de entrada los ceros ocurren a frecuencias para las cuales  $\sin(kL) = 0$ , estas frecuencias son las mismas si el extremo del cono se abre ó se cierra. Para una terminación angosta del cono es correcto considerar que la impedancia de carga  $Z_L$  está asociada con una reactancia finita, siempre y cuando se agregue una corrección en el extremo equivalente a  $0,6$  veces el radio del extremo abierto del cono.

Por otra parte, los infinitos en la impedancia de entrada ocurren a frecuencias que son diferentes si el extremo del cono se abre ó se cierra, esto es, la condición para que exista un infinito es

$$\sin(kL + \theta_1) = 0 \quad (2.61)$$

es decir,

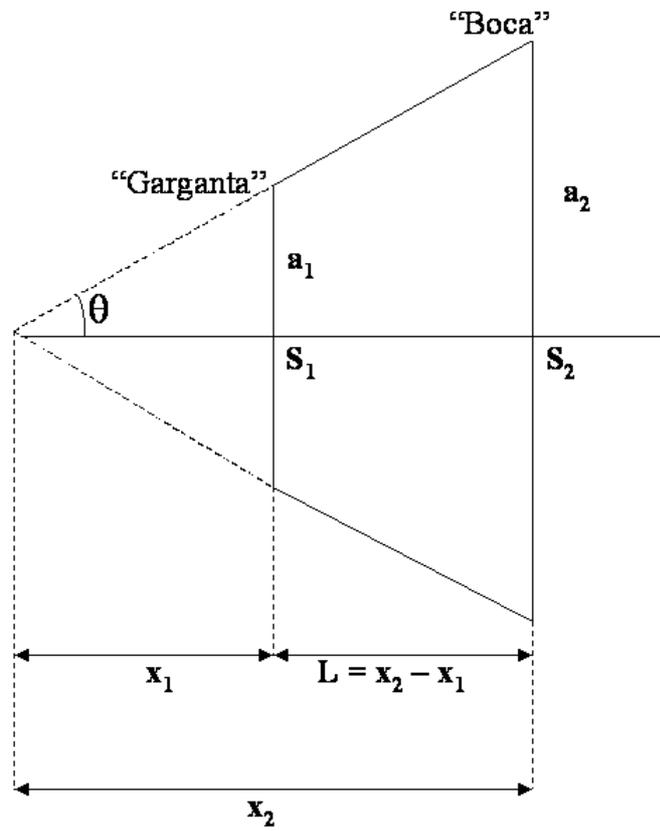


Figura 2.4: Cono Truncado

$$kL = n\pi - \tan^{-1} kx_1 \quad (2.62)$$

Para un cono que se mide desde su extremo angosto,  $L$  es positiva y, dado que  $\tan^{-1} \theta < \pi/2$  para cualquier  $\theta$ , las frecuencias de los máximos en  $Z_{in}$  son más grandes que aquellas correspondientes a cilindros de la misma longitud. Lo opuesto es cierto para un cono que se va cerrando, o sea  $kx_1 \ll 1$ , entonces  $\tan^{-1} kx_1 \approx kx_1$  y, dado que  $L = x_2 - x_1$ , de la Ecuación (2.62) se reduce a  $kx_2 \approx n\pi$ , haciendo que las frecuencias de los máximos en la impedancia se asemejen a aquellas frecuencias correspondientes a un cilindro abierto de longitud  $x_2/2$ .

Los conos que están cerrados en su extremo alejado son de menor interés musical. Si  $Z_L = \infty$ , entonces

$$Z_{in} = j \left( \frac{\rho c}{S_1} \right) \frac{\sin(kL - \theta_2) \sin(\theta_1)}{\sin(kL + \theta_1 - \theta_2)} \quad (2.63)$$

Los ceros están dados por  $(kL - \theta_2) = n\pi$ , lo cual da, recordando que  $L = x_2 - x_1$

$$(kx_2 - \tan^{-1} kx_2) - kx_1 = n\pi \quad (2.64)$$

De esta manera, si consideramos un cono que se va cerrando y la distancia  $x_2$  medida desde su extremo cerrado hasta el ápice imaginario es lo suficientemente menor a la unidad, entonces los términos entre paréntesis se pueden cancelar y el cono se comporta aproximadamente como si fuera de longitud  $x_1$  y completo hasta su vértice.

### 2.3. Función de reflexión

Casi toda nuestra discusión se ha mantenido en el dominio de la frecuencia, hemos examinado la propagación de ondas sinusoidales de frecuencia estacionaria en un tubo. Aunque este es generalmente el enfoque más conveniente para estudiar la física de los instrumentos musicales, a veces es útil considerar el dominio del tiempo y examinar la formación y el aumento de los disturbios de presión a lo largo del tubo y su reflexión desde su extremo abierto. Este es claramente el método más apropiado para analizar los transitorios iniciales de los sonidos musicales y también puede ser usado para analizar tonos en estado estacionario.

Finalmente, el tratamiento de un problema en el dominio del tiempo ó en el dominio de la frecuencia debe dar resultados idénticos, pero en la práctica estamos obligados a hacer aproximaciones en nuestros análisis con el fin de obtener una respuesta razonable, es decir, que frecuentemente la naturaleza de estas aproximaciones suele ser completamente diferente en ambos casos, dando como consecuencia que una puede utilizarse más fácilmente que la otra.

Si nosotros vemos la presión de la forma de onda  $p(t)$  observada en la boca del tubo cuando el flujo acústico hacia adentro es  $U(t)$ , podemos proceder en una de dos formas. En el dominio de la frecuencia, podemos expresar el flujo  $U(t)$  como una integral de Fourier, produciendo las componentes de Fourier  $U(\omega)$ , y entonces usamos la definición de la impedancia de entrada  $Z(\omega) = P(\omega)/U(\omega)$  para escribir

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)U(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (2.65)$$

Alternativamente, podemos definir la función de respuesta impulso, ó función de Green  $G(t - t')$ , la cual da la respuesta de presión al tiempo  $t$  a un impulso unitario de flujo al tiempo  $t'$ , y entonces escribir directamente la integral de convolución

$$p(t) = \int_{-\infty}^t G(t - t')U(t')dt' \equiv G(t) * U(t) \quad (2.66)$$

Como comentamos antes, estos resultados son formalmente equivalentes y, en efecto, la función de respuesta impulso  $G(t)$  es simplemente la Transformada de Fourier de la función de impedancia de entrada  $Z(\omega)$ .

Como Schumacher [12] señala, el problema de usar la ecuación anterior como una fórmula computacional con la cual derivar  $p(t)$  surge del hecho de que  $G(t - t')$  tiene una extensión considerable en el tiempo; un pulso de flujo acústico inyectado hacia adentro del tubo se refleja desde sus dos extremos en forma alternada por algunas decenas de períodos antes de que su amplitud se reduzca lo suficiente para volverse despreciable. Esto es consecuencia de la naturaleza picuda y aguda de  $Z(\omega)$ , que es el rasgo equivalente en el dominio de la frecuencia.

Schumacher propone una manera efectiva de evitar este problema computacional, que exponemos en la forma propuesta por Ayers [13]. Supongamos que el flujo entra al instrumento desde un tubo infinito con una sección transversal  $S$ , entonces, la función de reflexión de la onda plana  $R(\omega)$  a la entrada del instrumento puede ser expresada como

$$R(\omega) = \frac{Z(\omega) - Z_0}{Z(\omega) + Z_0} \quad (2.67)$$

en donde  $Z_0 = \rho c/S$ , es la impedancia característica a la entrada. Podemos reorganizar esta ecuación de la forma

$$Z(\omega) = Z_0 + Z_0R(\omega) + R(\omega)Z(\omega) \quad (2.68)$$

y aplicar la transformada inversa de Fourier para así obtener

$$G(t) = Z_0\delta(t) + Z_0r(t) + r(t) * G(t) \quad (2.69)$$

en donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac y  $r(t)$  es la transformada de Fourier de  $R(\omega)$ . Convolucionando esto con  $U(t)$  y usando la Ecuación (2.66) nos dá

$$p(t) = Z_0U(t) + Z_0r(t) * U(t) + r(t) * p(t) \quad (2.70)$$

$$p(t) = Z_0U(t) + \int_0^\infty r(t')[Z_0U(t-t') + p(t-t')]dt' \quad (2.71)$$

Resulta que  $r(t)$  es casi cero para  $t$  menor que el tiempo  $\tau$  del transitorio de la onda que vuelve a lo largo de la parte cilíndrica del agujero y también resulta tener una extensión mucho menor en el tiempo que la función impulso original  $G(t)$ . La razón de esto es obvia, dado que por convención, las ondas que regresan a la boquilla no son reflejadas sino absorbidas por la terminación acoplada a la entrada. Es relativamente fácil utilizar la Ecuación (2.71) como una ecuación integral con la cual calcular numéricamente el transitorio y la conducta de estado estacionario de un tubo excitado por un generador acústico.

Como un ejemplo, aplicamos las dos últimas ecuaciones al caso de un tubo cilíndrico uniforme que está abierto en su extremo lejano. Ignorando las correcciones de radiación en la “boca” abierta, tenemos, de la Ecuación (2.48)

$$Z = jZ_0 \tan(kL) \quad (2.72)$$

en donde  $L$  es la longitud del tubo y  $k = \omega/c$ . Entonces de la Ecuación (2.67)

$$r(\omega) = -e^{-2j\omega L/c} \quad (2.73)$$

aplicando la transformada de Fourier

$$r(t) = - \int e^{j\omega t} e^{-2j\omega L/c} d\omega = -\delta(t - \tau) \quad (2.74)$$

en donde

$$\tau = \frac{2L}{c} \quad (2.75)$$

sustituyendo en la Ecuación (2.71), encontramos

$$p(t) = Z_0U(t) - Z_0U(t - \tau) - p(t - \tau) \quad (2.76)$$

y, aplicando la Ecuación (2.71) otra vez en  $p(t - \tau)$

$$p(t) = p(t - 2\tau) + Z_0[U(t) - 2U(t - \tau) + U(t - 2\tau)]. \quad (2.77)$$

Para un instrumento de caña ó labios,  $Z_0U(t)$  es siempre mucho más pequeña que  $p(t)$ , dado que el mecanismo de excitación es controlado por presión. Podemos ignorar los términos de  $U$  de modo que

$$p(t) = p(t - 2\tau) \quad (2.78)$$

de esta manera el tubo actúa como un resonador de un cuarto de onda con una frecuencia fundamental  $1/2\tau = c/4L$ .

## 2.4. Método de matrices de transferencia

Esta sección se basa en su mayor parte en el artículo de Keefe [1].

Dado que la geometría de los instrumentos musicales de viento es usualmente bastante complicada, podemos considerar que están compuestos por varias cavidades, tubos y conos conectados juntos de un modo razonablemente simple. Esto es cierto aún cuando se considere el tracto vocal del instrumentista como parte del sistema. Por todo lo anterior es útil tener procedimientos para conocer el comportamiento acústico de tales sistemas acústicos.

El enfoque básico es similar a la teoría de redes eléctricas, sustituyendo el voltaje por la presión acústica  $p$  y la corriente eléctrica por el flujo de volumen acústico  $U$ , tomando en cuenta que ambas cantidades oscilan en el tiempo a una frecuencia angular  $\omega$ . Al igual que en el caso eléctrico, hay una distinción entre el análisis de redes a bajas frecuencias cuando la longitud de onda involucrada es mucho más grande que las dimensiones del sistema y solamente podemos utilizar un modelo de parámetros concentrados, por otro lado, a altas frecuencias usamos guías de ondas ó líneas de transmisión [7].

Ahora bien, si consideramos un sistema acústico arbitrario de dos puertos, la matriz de transferencia (cuyos coeficientes complejos se denotan por los parámetros A, B, C y D), mapea el flujo de volumen ( $U_1$ ) y presión ( $p_1$ ) de entrada y el flujo de volumen ( $U_0$ ) y presión ( $p_0$ ) de salida como sigue

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

De esta manera, suponemos que  $T_b(L, a_1, \theta)$  denota la matriz de transferencia para la propagación de onda dentro de un tubo cónico truncado con paredes lisas, con una longitud  $L$  y radio  $a_1$  a la entrada, considerando también las pérdidas de los efectos viscosos y térmicos en las paredes. El ángulo de semi-apertura del cono es  $\theta$ , por lo tanto, el ángulo total de apertura es  $2\theta$ . Para el caso de un tubo cilíndrico de longitud  $L$  y radio  $a_1$ , se obtiene poniendo  $\theta = 0$ . Considerando primero un cilindro simple, su matriz de transferencia  $T_b(L, a_1, 0)$  es

$$T_b(L, a_1, 0) = \begin{pmatrix} \cosh \Gamma L & Z_c \sinh \Gamma L \\ Z_c^{-1} \sinh \Gamma L & \cosh \Gamma L \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Las pérdidas viscosas y térmicas en las paredes del tubo son tomadas en cuenta en términos de la constante de propagación compleja  $\Gamma = jk$  ( $k$  es el número de onda) y la impedancia característica compleja  $Z_c$ , en donde ambas dependen del radio del tubo y de la frecuencia, como se vió en la subsección 2.1.2.

Un método exacto para modelar instrumentos con tubos cónicos se obtiene usando la matriz de transferencia. El tubo cónico truncado de longitud  $L$  posee una entrada de radio  $a_1$  y un radio  $a_2$  en su extremo opuesto, el cual es conveniente expresar en términos de la longitud  $x_1$  que se muestra en la Figura (2.4)

$$a_2 = a_1(1 + L/x_1) \quad (2.81)$$

lo cual se relaciona con  $\theta$  por

$$\tan \theta = a_1/x_1 = a_2/(L + x_1) \quad (2.82)$$

Esta longitud  $x_1$  es la distancia a lo largo del eje  $x$  del tubo cónico desde el ápice del cono completo hipotético a la entrada del cono truncado. Los coeficientes de esta matriz de transferencia  $T_b(L, a_1, \theta)$  para el tubo del cono truncado son expresados usando la parametrización de  $\theta$  en la Ecuación (2.82) dando como resultado las siguientes expresiones

$$A = \left[ \frac{(x_1 + L)}{x_1} \right] \cosh \Gamma L - \frac{\sinh \Gamma L}{[\Gamma(x_1 + L)]} \quad (2.83)$$

$$B = \left[ \frac{x_1}{(x_1 + L)} \right] Z_c \sinh \Gamma L \quad (2.84)$$

$$C = Z_c^{-1} \left[ \frac{x_1 + L}{x_1} - \left( \frac{1}{\Gamma x_1} \right)^2 \right] \sinh \Gamma L + \frac{\Gamma L}{(\Gamma x_1)^2} \cosh \Gamma L \quad (2.85)$$

$$D = \left[ \frac{x_1}{(x_1 + L)} \right] \left[ \cosh \Gamma L + \frac{1}{(\Gamma x_1)} \sinh \Gamma L \right] \quad (2.86)$$

En el límite en que  $x_1$  tiende a  $\infty$  (ó  $\theta \rightarrow 0$ ), el cono truncado se transforma en un tubo cilíndrico de radio  $a_1$  y la matriz de transferencia se transforma similarmente.

La impedancia acústica característica  $Z_c$  y la constante de propagación  $\Gamma$  que aparecen en las Ecuaciones (2.83) a (2.86), se calculan con buena aproximación si se usa un radio del tubo igual al radio promedio del tubo cónico, lo cual da un volumen igual al de un tubo cilíndrico equivalente. Un tubo cónico largo puede separarse en varios segmentos para

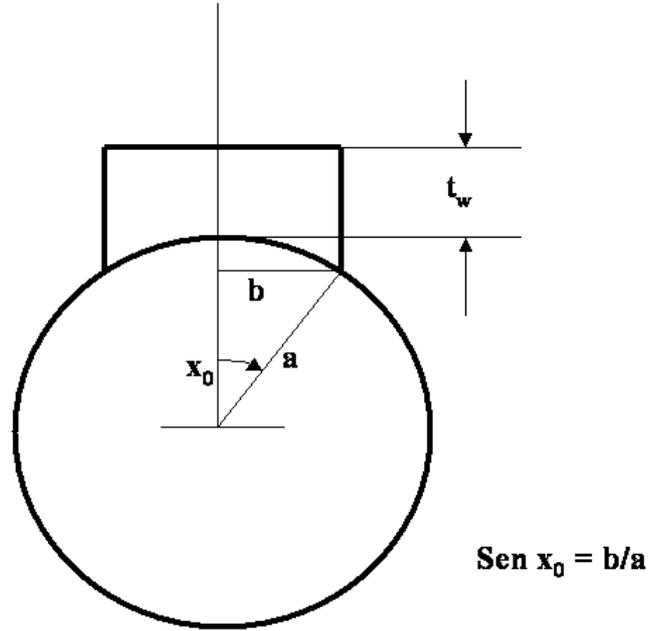


Figura 2.5: Sección transversal de un agujero de digitación de radio  $b$  y grosor de pared  $t_w$  localizado en el tubo principal de radio  $a$ .

mejorar la exactitud de éste método, tal que cada segmento tenga características apenas diferentes en los efectos de capa viscosa y térmica [1].

### 2.4.1. Agujeros de digitación

La conducta acústica de los instrumentos de viento puede representarse como una línea de transmisión en una dimensión, en la cual los efectos de los agujeros de digitación abiertos o tapados se representan como elementos concentrados. Esta sección describe los refinamientos al modelo desarrollado previamente por Keefe [2].

Consideremos un agujero de digitación cilíndrico (radio  $b$ ) localizado en un tubo cilíndrico ó cónico (radio  $a$ ) en el punto de intersección como lo muestra la Figura (2.5). Para un instrumento de tubo cónico, es suficientemente preciso ignorar la conicidad en una distancia que es del orden del diámetro de un agujero de digitación. Dado que la superficie de intersección entre el agujero de digitación y el tubo del instrumento es de la forma de “una silla de montar”, la altura del agujero de digitación  $t$  es definida como la longitud cuyo producto con el área transversal del agujero de digitación es exactamente igual al volumen geométrico  $V_h$  del agujero de digitación

$$t = \frac{V_h}{\pi b^2}. \quad (2.87)$$

En contraste, un parámetro de longitud del agujero de digitación que se puede medir fácilmente es el grosor de la pared  $t_w$  desde el exterior del agujero de digitación hacia el límite del tubo (Ver Figura (2.5)). Esta definición de  $t$  difiere de la anterior, pero es más parecida a la representación acústica de un agujero de digitación cerrado. La altura del

agujero de digitación definida en la ecuación anterior se relaciona con la otra magnitud por

$$t = t_w + (1/8)b(b/a) [1 + 0,172 (b/a)^2] \quad (2.88)$$

Los agujeros de digitación abiertos ó cerrados se representan en el modelo de línea de transmisión acústica de un instrumento de viento por elementos concentrados de impedancias en paralelo  $Z_s$  e impedancias en serie  $Z_a$ . Todas las impedancias son impedancias acústicas definidas como razones entre presión acústica con respecto a la velocidad de volumen a lo largo del eje  $x$  del tubo, y la dependencia de tiempo armónica asumida es  $e^{j\omega t}$ . Adoptando la convención de que el superíndice  $(c)$  y  $(o)$  denota agujeros cerrados y abiertos respectivamente, el conjunto completo de impedancias para agujeros de digitación es

$$Z_s^{(o)} = R_0(a/b)^2(jkt_e + \xi_e) \quad (2.89)$$

$$Z_s^{(c)} = -jR_0(a/b)^2 \cot kt \quad (2.90)$$

$$Z_a^{(o)} = -jR_0(a/b)^2 kt_a^{(o)} \quad (2.91)$$

$$Z_a^{(c)} = -jR_0(a/b)^2 kt_a^{(c)} \quad (2.92)$$

en donde  $c$  es la velocidad del sonido,  $k = \omega/c$  es el número de onda y la impedancia de onda  $R_0$  del tubo a la posición del agujero de digitación es

$$R_0 = \rho c / \pi a^2 \quad (2.93)$$

La densidad del aire es  $\rho$ .

La longitud efectiva del agujero de digitación  $t_e$ , las longitudes equivalentes  $t_a^{(o)}$  y  $t_a^{(c)}$ , y la resistencia específica  $\xi_e$ , se discuten para varios casos límite en Keefe [2] y [3]. La forma general de la longitud efectiva para un agujero de digitación abierto  $t_e$  difiere dependiendo de la presencia ó ausencia de una llave de digitación sobre el agujero. Si no existe la llave entonces

$$t_e = \frac{(1/k) \tan kt + b[1,40 - 0,58(b/a)^2]}{1 - 0,61kb \tan kt} \quad (2.94)$$

Si el agujero tiene una llave de digitación cuyo diámetro es de  $2R$ , entonces

$$t_e = \frac{(1/k) \tan kt + b0,61(R/b)^{0,18}(b/h)^{0,369} + (\pi/4)[1 - 0,74(b/a)^2]}{1 - 0,61(R/b)^{0,18}(b/h)^{0,39}kb \tan kt} \quad (2.95)$$

La resistencia específica del agujero abierto está dada por

$$\xi_e = 0,25(kb)^2 + \alpha t + (1/4)kd_v \ln(2b/r_c), \quad (2.96)$$

en donde el radio de la curvatura de las terminaciones del agujero de digitación interno y externo es  $r_c$ , el grosor de la capa viscosa  $d_v = \sqrt{2\eta/(\rho\omega)}$  está dado en términos de la viscosidad de corte del aire  $\eta$ , y la parte real de la propagación del número de onda del agujero de digitación es  $\alpha$ . En la aproximación del tubo grande con respecto a la capa límite, tenemos que

$$\alpha = 1/(2bc) \left[ \sqrt{2\eta\omega/\rho} + (\gamma - 1)\sqrt{2\kappa\omega/\rho C_p} \right] \quad (2.97)$$

en donde la razón de los calores específicos es  $\gamma$ , la conductividad térmica del aire es  $\kappa$ , y el calor específico a presión constante es  $C_p$ .

Las longitudes equivalentes de los agujeros de digitación abiertos ó cerrados en serie están dados por

$$t_a^{(o)} = \frac{0,47b(b/a)^4}{\tanh(1,84t/b) + 0,62(b/a)^2 + 0,64(b/a)} \quad (2.98)$$

$$t_a^{(c)} = \frac{0,47b(b/a)^4}{\coth(1,84t/b) + 0,62(b/a)^2 + 0,64(b/a)} \quad (2.99)$$

Las reactancias en paralelo de los agujeros de digitación abiertos ó cerrados en las Ecuaciones (2.89) a (2.92) se han escrito intencionalmente de manera asimétrica. La reactancia de los agujeros abiertos se expresa en términos de una reactancia acústica ( $R_0 ktc$ ) ya que el factor  $\tan kt$  asociado con la impedancia del tubo abierto de longitud  $t$  aparece en la definición de  $t_e$ . Los términos que aparecen en  $t_e$  expresan la inertancia acústica localizada en la intersección del agujero de digitación con el tubo y la inertancia de radiación localizada justo afuera del agujero. Estos términos son típicamente del mismo orden de magnitud que  $t$ . En contraste, la reactancia del agujero tapado tiene la forma de un tubo simple de longitud  $t$  cerrado en su extremo, y el factor  $\cot kt$  está explícito en la definición de reactancia. Hay de hecho, un término adicional en el agujero cerrado de la impedancia en paralelo debido a los campos acústicos homogéneos localizados en la intersección interna del agujero con el tubo. Una expresión más precisa para la reactancia en paralelo del agujero tapado es

$$Z_s^{(c)} = -jR_0 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left\{ \cot kt + kt \left[ \frac{1}{4} \left(\frac{b}{t}\right)^2 + 0,58 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{\pi b}{4t} \right] \right\} \quad (2.100)$$

En contraste con el caso de agujeros tapados, estos términos adicionales son casi siempre de un orden de magnitud más pequeña que el término de impedancia del tubo tapado y son

importantes sólo a altas frecuencias en donde media longitud de onda acústica se vuelve del orden de la altura  $t$  del agujero.

La matriz de transferencia  $T_h^{(c)}$  para un agujero cerrado está dada por

$$T_h^{(c)} = \begin{pmatrix} 1 & Z_a^{(c)} \\ 1/Z_s^{(c)} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

y la matriz de transferencia  $T_h^{(o)}$  para un agujero abierto está dada por

$$T_h^{(o)} = \begin{pmatrix} 1 & Z_a^{(o)} \\ 1/Z_s^{(o)} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

### 2.4.2. Método para calcular la función de reflexión

Esta descripción está tomada del artículo de Orduña y Elizalde [14].

Si deseamos calcular la función de reflexión  $r(t)$  del tubo de un instrumento musical (sea éste cónico ó cilíndrico), entonces es recomendable utilizar el método de matrices de transferencia en el dominio de la frecuencia y posteriormente aplicar la transformada inversa de Fourier para obtener la función de reflexión en el dominio del tiempo.

Como hemos visto, el método de matrices de transferencia divide el tubo en secciones de tubo cilíndricas ó cónicas, y en secciones de longitud nominal nula que representan agujeros de digitación cerrados o abiertos. En cada sección se produce un cambio de presión sonora y flujo de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} p_0(\omega) \\ u_0(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(\omega) \\ u_1(\omega) \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

En donde los elementos de la matriz de transferencia tienen expresiones particulares para cada tipo de sección, como se describió anteriormente.

El modelo completo del tubo se obtiene encadenando productos de matrices de transferencia. Si la presión se pone igual a la impedancia de radiación en el extremo del tubo  $Z_r(\omega)$  y el flujo se supone unitario, entonces la presión y el flujo en la embocadura se calculan de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} p(\omega) \\ u(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_r(\omega) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

en donde la matriz de transferencia es ahora el producto de las matrices de transferencia de todas las secciones.

La impedancia acústica específica del tubo completo se obtiene de la siguiente manera

$$Z(\omega) = \frac{p(\omega)}{U(\omega)} = \frac{A(\omega)Z_r(\omega) + B(\omega)}{C(\omega)Z_r(\omega) + D(\omega)} \quad (2.105)$$

A partir de esta, el coeficiente de reflexión (en el dominio de la frecuencia) se obtiene como

$$R(\omega) = \frac{Z(\omega) - Z_1}{Z(\omega) + Z_1} \quad (2.106)$$

en donde  $Z_1$  es la impedancia acústica característica correspondiente a la sección inicial del tubo. Finalmente, la función de reflexión  $r(t)$  se obtiene mediante la transformada inversa de Fourier de  $R(\omega)$ .

## Capítulo 3

# Métodos para medir la función de reflexión

En este capítulo se describen cuatro métodos para medir la función de reflexión. Los primeros dos métodos se extraen de los artículos de Keefe [4] y Wolfe et al. [5]. El tercero y cuarto métodos han sido propuestos por el director de la tesis y al parecer no se han reportado anteriormente en la literatura.

### 3.1. Método de una fuente y un micrófono con extremo cerrado

Este método fue propuesto por Keefe [4]. El montaje de prueba está comprendido por una fuente acústica (Etymotic ER-3A) y un micrófono (Etymotic ER-7C) conectados al tubo de prueba a través de una espuma cilíndrica cuyo diámetro se puede escoger similar al diámetro de la entrada de la columna de aire, como se muestra en la Figura (3.1).

Estos transductores están especialmente diseñados para realizar mediciones en el canal auditivo, las cuales se aplican en investigaciones audiológicas, sin embargo son bastante convenientes para mediciones acústicas en instrumentos de viento.

Supongamos que tenemos una fuente de Thevenin (acústica), por donde circula un flujo de volumen  $U$  y existe una fuente ideal de presión sonora  $P$ , como se muestra en la Figura (3.2).

De este circuito obtenemos dos pares de variables en el punto de referencia: presión y flujo, ó bien presión incidente y reflejada. Estas variables están relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} P \\ UZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

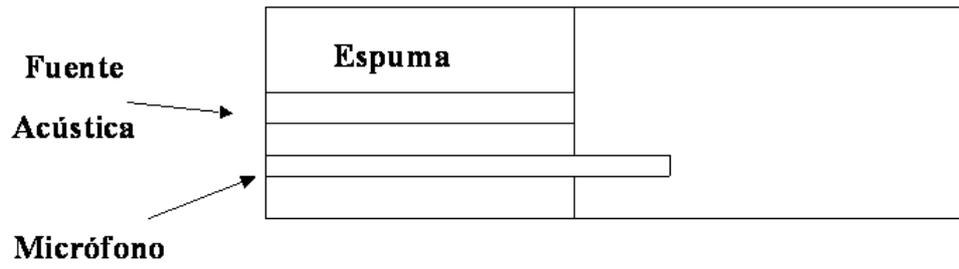


Figura 3.1: Montaje de prueba.

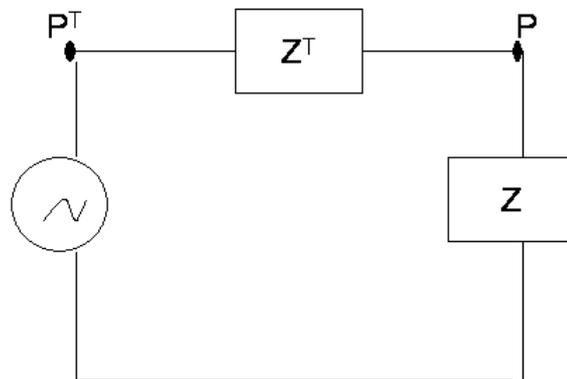


Figura 3.2: Circuito Acustico

En este caso, el coeficiente de reflexión es

$$R = \frac{B}{A}, \quad (3.2)$$

o en el dominio del tiempo

$$b(t) = (r * a)(t). \quad (3.3)$$

También sabemos que la impedancia es

$$P = ZU, \quad (3.4)$$

y que la admitancia es

$$U = YP. \quad (3.5)$$

La impedancia y el coeficiente de reflexión de la carga se relacionan mediante la expresión

$$Z = Z_0 \frac{1 + R}{1 - R}. \quad (3.6)$$

Para la impedancia interna de la fuente de Thevenin se da la relación correspondiente

$$Z^T = Z_0 \frac{1 + R^T}{1 - R^T}. \quad (3.7)$$

Podemos observar, de la fuente de Thevenin acústica (Figura (3.2)), que el flujo de volumen acústico es el mismo para todos los elementos (conexión en serie), entonces, podemos decir que

$$\frac{P^T}{Z^T + Z} = \frac{P}{Z}; \quad (3.8)$$

que se puede poner en la forma

$$\frac{P}{P^T} = \frac{Z}{Z^T + Z}. \quad (3.9)$$

Si sustituimos la Ecuación (3.6) y la Ecuación (3.7) en la última ecuación, tenemos

$$\frac{P}{P^T} = \frac{Z}{Z^T + Z} = \frac{\frac{1+R}{1-R}}{\frac{1+R}{1-R} + \frac{1+R^T}{1-R^T}}. \quad (3.10)$$

Ahora, acomodando los términos

$$P(1 - RR^T) = \frac{1}{2}P^T(1 - R^T)(1 + R). \quad (3.11)$$

Expandiendo los términos entre paréntesis y reacomodando

$$P = \frac{1}{2}P^T(1 - R^T) + \frac{1}{2}P^T(1 - R^T)R + PRR^T. \quad (3.12)$$

Factorizando R

$$P = \frac{1}{2}P^T(1 - R^T) + \left[\frac{1}{2}P^T(1 - R^T) + PR^T\right]R. \quad (3.13)$$

De esta última ecuación no conocemos ni  $R^T$ , ni  $P^T$ , entonces procedemos a modificar la ecuación en términos de variables que sí podemos obtener.

Si consideramos que

$$P_0 = \frac{1}{2}P^T(1 - R^T); \quad (3.14)$$

entonces la Ecuación (3.13) se puede escribir de la siguiente manera

$$P = P_0 + [P_0 + PR^T]R. \quad (3.15)$$

Si  $R$  corresponde a un sistema cuyo retardo es muy grande en comparación con la señal directa de la fuente, como por ejemplo el caso de un tubo muy largo cerrado en el extremo lejano, con función de reflexión

$$R = R^c, \quad (3.16)$$

entonces la Ecuación (3.15) dice que  $P_0$  es la señal incidente y el segundo término representa las reflexiones subsecuentes, que se pueden escribir en forma recursiva

$$P_{m+1} = [P_0 + P_m R^T]R^c. \quad (3.17)$$

En particular, para la primera reflexión se tiene

$$P_1 = [P_0 + P_0 R^T]R^c. \quad (3.18)$$

Ahora, para el caso de la flauta con coeficiente de reflexión  $R$ , partiendo de la Ecuación (3.15)

$$(P - P_0) = (P_0 + PR^T)R. \quad (3.19)$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $P_0 R^c$ , se obtiene

$$(P - P_0)P_0R^c = RPR^cP_0R^T + P_0^2RR^c. \quad (3.20)$$

Por otra parte, de la Ecuación (3.18) se tiene que

$$P_0R^TR^c = P_1 - P_0R^c. \quad (3.21)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.21) en la Ecuación (3.20) y reagrupando

$$(P - P_0)P_0R^c = R[PP_1 - P_0R^c + (P - P_0)] \quad (3.22)$$

Si definimos

$$S = (P - P_0)P_0R^c \quad (3.23)$$

$$Q = PP_1 - S \quad (3.24)$$

obtenemos

$$S = RQ \quad (3.25)$$

Las tres últimas ecuaciones se pueden poner en el dominio del tiempo en la forma

$$s = (p - p_0) * p_0 * r^c \quad (3.26)$$

$$q = p * p_1 - s \quad (3.27)$$

$$s = r * q \quad (3.28)$$

en donde  $p$  es la señal de presión medida en la flauta,  $p_0$  es la señal directa medida en el tubo de calibración,  $p_1$  es la primera reflexión medida en el tubo de calibración y  $r^c$  se toma de un resultado teórico que se explica en el artículo de Keefe [4], que a la vez lo toma del artículo de Polack et al [15]. La función de reflexión  $r(t)$  se obtiene aplicando un algoritmo de deconvolución

$$r(t) = \text{deconv}(s, q) \quad (3.29)$$

que se describe en [16].

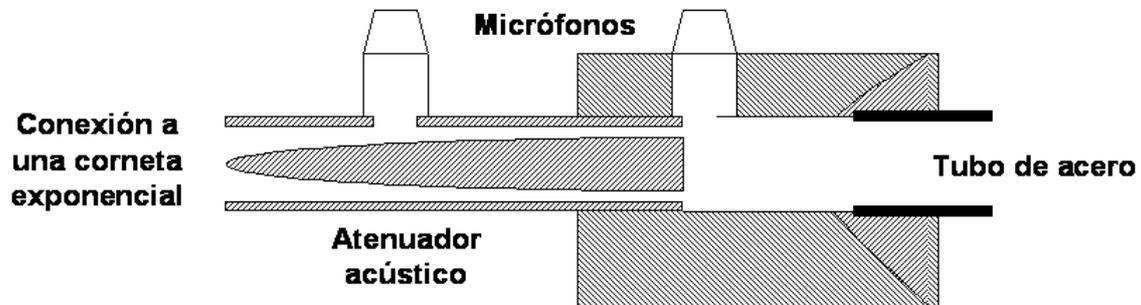


Figura 3.3: Ensamble de prueba.

### 3.2. Método de impedancia de Wolfe et al.

Este método se describe en el artículo de J. Wolfe et al. [5], en el cual utilizan un tubo de calibración recto de acero inoxidable que posee una longitud de 42 m y un diámetro interno de 7,8 mm.

Como muestra la Figura (3.3), el atenuador acústico es un tapón con forma de cono truncado. Las dos superficies cónicas están centradas por piezas de alambre rectas espaciadas  $120^\circ$  en la circunferencia entre el atenuador y el tubo. Se utilizan dos micrófonos: el micrófono río abajo (derecha) se usa para calibración y medición, mientras que el micrófono río arriba (izquierda) se utiliza en una prueba preliminar para evaluar el efecto de reflexiones desde el extremo río abajo del atenuador.

A una frecuencia de 200 Hz el tubo de calibración posee un coeficiente de atenuación de  $0,11\text{m}^{-1} = -1\text{dB/m}$  y el eco regresa con una pérdida de 80dB ó más. Su impedancia es puramente resistiva con resistencia igual a su impedancia característica  $R_{res} = 8,5\text{MPas/m}^3$ .

El tubo se encierra en un tubo de plástico para su aislamiento acústico y se adhiere al techo con unos sellos de goma. El uso de una impedancia de referencia independiente de la frecuencia mejora la relación señal a ruido sobre todo el rango y evita la necesidad de utilizar más de un micrófono en la rutina de calibración ó medición. Antes de realizar la calibración se escoge cómo debe depender  $U_{ref}(f)$  (que es la corriente acústica) con la frecuencia. Si el ruido se distribuye aproximadamente igual a través de las frecuencias, entonces es conveniente utilizar una señal tal que su frecuencia sea independiente con una relación señal a ruido uniforme. Para estos experimentos, en los cuales el ruido de baja frecuencia no es mayor problema, la corriente acústica se puede escoger independiente de la frecuencia.

Una forma de onda de voltaje  $V_{ref}(f)$  cuyas componentes armónicas son independientes de la frecuencia en el rango deseado, se sintetiza y entra al amplificador de potencia, como muestra la Figura (3.4).

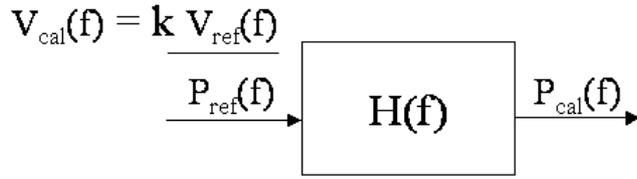
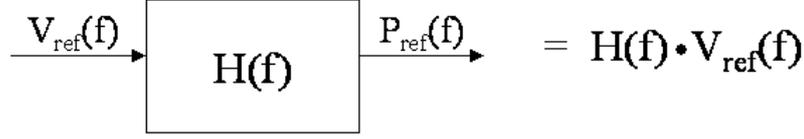


Figura 3.4: Sistema de calibración

La presión acústica es medida con el micrófono río abajo y es enviada a través de los preamplificadores de bajo ruido, (cuya ganancia se controla computacionalmente), al convertidor analógico-digital. El espectro de presión  $p_{ref}(f)$  se calcula, este incluye la respuesta en frecuencia del convertidor analógico-digital, los amplificadores, los altavoces, la corneta, el atenuador, el micrófono y los demás accesorios. Una forma de onda calibrada se sintetiza con los componentes de Fourier  $V_{cal}(f)$  (Figura (3.4)); que es proporcional a  $V_{ref}(f)/p_{ref}(f)$ . Esta señal sale a través de los mismos elementos a la impedancia de referencia. El micrófono regresa ahora un espectro calibrado  $p_{cal}(f)$ , que en este caso es un “espectro plano”, es decir una señal cuyos componentes de Fourier son esencialmente independientes de la frecuencia. Esta  $p_{cal}(f)$  se graba.

De la Figura (3.4) vemos que

$$P_{cal}(f) = H(f)V_{cal}(f) \quad (3.30)$$

Ahora si sustituimos  $V_{cal}(f)$  por  $k(V_{ref}(f)/P_{ref}(f))$ , en la ecuación anterior tenemos:

$$P_{cal}(f) = H(f)k \frac{V_{ref}(f)}{P_{ref}(f)} \quad (3.31)$$

y si tomamos en cuenta que  $P_{ref}(f) = H(f)V_{ref}(f)$ , entonces

$$P_{cal}(f) = H(f)k \frac{V_{ref}(f)}{H(f)V_{ref}(f)} \quad (3.32)$$

y esto nos lleva a que  $P_{cal}(f)$  es una constante

$$P_{cal}(f) = k \quad (3.33)$$

Para mediciones de impedancia acústica mucho menores que la del atenuador, el espectrómetro se puede aproximar a una fuente de corriente ideal y la corriente acústica a  $U_{ref}(f)$ . Ver Figura (3.5)

La salida del atenuador esta en paralelo con el sistema de medición, entonces podemos decir que la admitancia medida es

$$\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{R_a} \quad (3.34)$$

por lo tanto, la admitancia de la carga es

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_m} - \frac{1}{R_a} \quad (3.35)$$

Esto indica que todas las admitancias medidas deben corregirse, restando la conductancia del atenuador  $1/R_a$ .

De las dimensiones del atenuador calculamos una impedancia característica  $Z_a = R_a = 170\text{MPa/m}^3$ . La impedancia real es probablemente un poco diferente, debido a que los alambres no estan completamente rectos. Entonces se determina el valor de  $Z_a$  midiendo cargas conocidas con altas impedancias, para los cuales en este caso es el primer máximo en el espectro de impedancia de cilindros de acero inoxidable abiertos. Esto da un valor de  $155\text{MPa/m}^3$ . La atenuación de la onda viajera en el estrecho espacio entre los conos es largo y la salida del atenuador se espera sea puramente resistiva (otra guía de onda semi-infinita). Esta consideración requiere que la onda viajera desde el extremo final del atenuador regrese a la entrada del atenuador y vuelva a regresar al extremo final casi de manera despreciable. Para checar esto el micrófono ríó arriba se usó para medir la presión de la forma de onda en la entrada del atenuador durante las calibraciones (en donde la carga fue  $8,5\text{MPa/m}^3$ , independiente de la frecuencia) y mediciones de cilindros con resonancias fuertes (en donde  $Z(f)$  varía de los  $20\text{kPa/m}^3$  a los  $200\text{kPa/m}^3$ ). No se observa una diferencia medible, pero la atenuación en esta onda es suficiente para poder despreciarla en las mediciones.

### 3.2.1. Medición de $Z(f)$

El medidor de impedancia, incluyendo los micrófonos y el atenuador, se conectó a la flauta a través del adaptador que se muestra en la Figura (3.6), lo cual es acústicamente equivalente a un cilindro. El adaptador tiene el mismo radio que el cilindro de calibración y tiene una longitud de 6 mm. Esta carga puede ser removida de la medición, pero sus dimensiones fueron escogidas para dar una impedancia equivalente a aquella impedancia de radiación de la embocadura del agujero bajo condiciones típicas cuando se esta tocando.

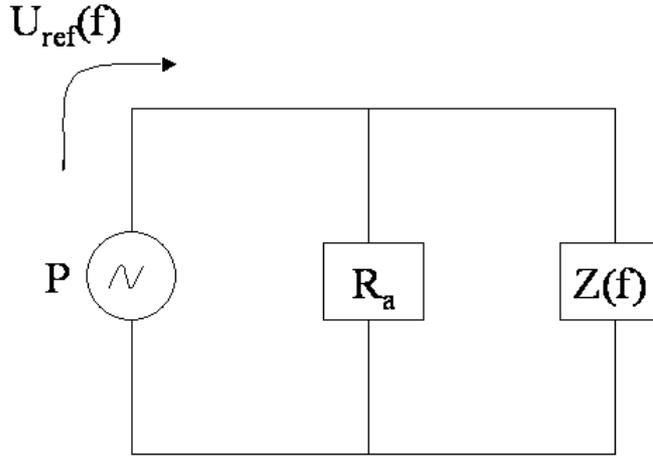


Figura 3.5: Sistema en paralelo.

La señal de referencia se aplica en la flauta y los componentes de Fourier  $p_{med}(f)$  se miden. La admitancia total  $p_{cal}(f)/(p_{med}(f)R_{ref})$  se calcula y la conductancia del atenuador se sustrae para dar la admitancia de la flauta. Cuando se terminan las mediciones el espectrómetro se reconecta a la impedancia de referencia y se toma una medición para compararla con la calibración.

El ruido de fondo en el laboratorio, aunque regularmente bajo puede afectar las mediciones de señales de presión débiles a una impedancia mínima. Por esta razón los instrumentos musicales u otras cargas a medir, se colocan dentro de una caja rígida la cual se forra con material absorbente acústico para minimizar las resonancias en la caja. El operador pasa sus brazos a través de unas mangas rígidas que están en la caja para tocar el instrumento y controla las mediciones con un pedal.

### 3.3. Método alternativo de una fuente y un micrófono

Otra manera para medir la función de reflexión es considerar la fuente como un transductor electroacústico. Ver Figura (3.7).

Las variables electroacústicas se relacionan a través de la expresión

$$\begin{pmatrix} V \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Z_0 U \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

En términos de la matriz de transducción con elementos  $A, B, C, D$ .

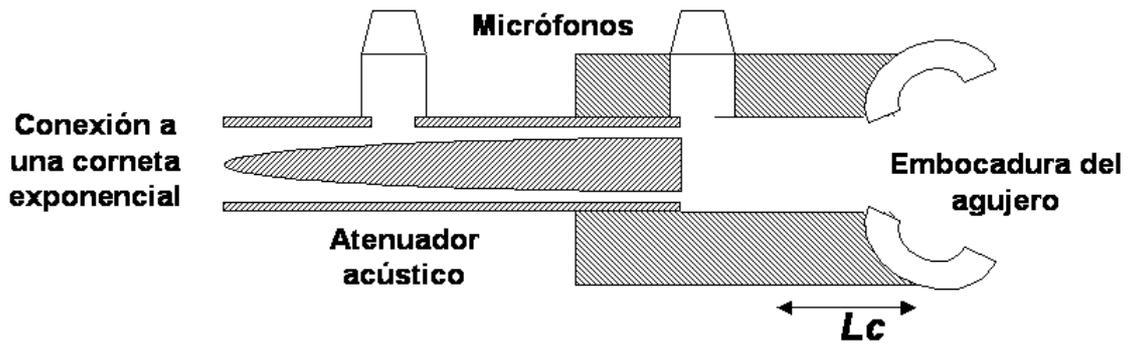


Figura 3.6: Ensamble de prueba con flauta

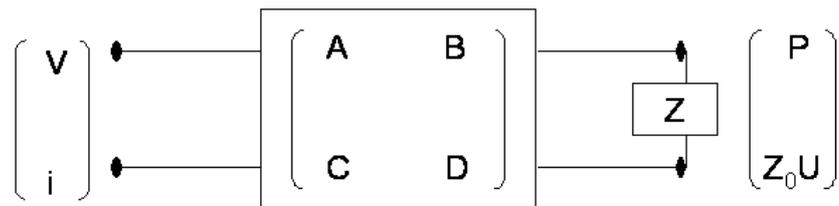


Figura 3.7: Modelo de dos puertos de un transductor electroacústico

En particular, el voltaje aplicado al transductor es

$$V = AP + BZ_0U \quad (3.37)$$

Ahora bien, definimos la función de respuesta en frecuencia medida entre el voltaje de la fuente y la presión medida por el micrófono como

$$H \equiv \frac{P}{V} \quad (3.38)$$

Por otro lado, sabemos que

$$U = YP \quad (3.39)$$

Si sustituimos la ecuación anterior en la Ecuación (3.37), nos dá

$$V = (A + BZ_0Y)P \quad (3.40)$$

Si trabajamos algebraicamente llegamos a que

$$H = \frac{P}{V} = \frac{1}{A + BZ_0Y} \quad (3.41)$$

Tomando en cuenta que

$$Y = \frac{1}{Z_0} \frac{1 - R}{1 + R} \quad (3.42)$$

Y sustituyendo la ecuación anterior en la Ecuación (3.41), tenemos que

$$H = \frac{1 + R}{A(1 + R) + B(1 - R)} \quad (3.43)$$

Y la función de respuesta medida queda de la siguiente manera

$$H = \frac{1 + R}{(A + B) + (A - B)R} \quad (3.44)$$

Ahora se procederá a obtener la función de respuesta bajo diferentes condiciones a fin de eliminar los parámetros de transducción A y B, que no se conocen directamente.

### Función de respuesta del acoplador tapado

Para el caso de un acoplador tapado tenemos las siguientes condiciones  $U = 0$  ó  $R = 1$  (extremo cerrado sin flujo).

Si sustituimos estas condiciones en la Ecuación (3.41) tenemos

$$H_1 = \frac{1 + 1}{(A + B) + (A - B)} = \frac{2}{2A} \quad (3.45)$$

es decir, que la función de respuesta medida con el acoplador tapado es

$$H_1 = \frac{1}{A} \quad (3.46)$$

### Función de respuesta del tubo largo

Ahora, para el caso de un tubo largo (considerando únicamente la señal incidente)  $R = 0$  (tubo infinito)

Es decir, que el pulso incidente de la respuesta a impulso medida en el tubo largo es

$$H_0 = \frac{1}{A + B} \quad (3.47)$$

### Relaciones entre $A$ , $B$ y $H_0$ , $H_1$

De la Ecuación (3.46) y de la Ecuación (3.47) se pueden obtener las siguientes relaciones con denominador común  $H_0H_1$ :

$$A = \frac{H_0}{H_0H_1} \quad (3.48)$$

$$B = \frac{H_1 - H_0}{H_0H_1} \quad (3.49)$$

$$A + B = \frac{H_1}{H_0H_1} \quad (3.50)$$

$$A - B = \frac{2H_0 - H_1}{H_0H_1} \quad (3.51)$$

### Función de respuesta de la flauta

Ahora, para el caso de la flauta, la función de respuesta es

$$H = \frac{1 + R}{(A + B) + (A - B)R} \quad (3.52)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.50) y la Ecuación (3.51) en la ecuación anterior nos dá

$$H = \frac{1 + R}{\frac{H_1}{H_0 H_1} + \left(\frac{2H_0 - H_1}{H_0 H_1}\right)R} \quad (3.53)$$

Multiplicando numerador y denominador por  $H_0 H_1$ :

$$H = \frac{(1 + R)(H_0 H_1)}{H_1 + (2H_0 - H_1)R} \quad (3.54)$$

Si pasamos el denominador al lado izquierdo

$$H[H_1 + (2H_0 - H_1)R] = (1 + R)(H_0 H_1) \quad (3.55)$$

Multiplicando  $H$  por los elementos entre corchetes

$$HH_1 + H(2H_0 - H_1)R = H_0 H_1 + H_0 H_1 R \quad (3.56)$$

Pasando el término  $H(2H_0 - H_1)R$  de lado derecho

$$HH_1 - H_0 H_1 = H_0 H_1 R - H(2H_0 - H_1)R \quad (3.57)$$

Factorizando  $R$

$$H_1(H - H_0) = R[H_0 H_1 - H(2H_0 - H_1)] \quad (3.58)$$

Si despejamos  $R$

$$R = \frac{[H_0 H_1 - H(2H_0 - H_1)]}{H_1(H - H_0)} \quad (3.59)$$

Esta ecuación está en el dominio de la frecuencia, si queremos pasarla al dominio del tiempo tenemos que deconvolucionar.

Si decimos que  $B = H_1(H - H_0)$  y  $A = H_0 H_1 - H(2H_0 - H_1)$  nos dá la siguiente ecuación

$$R = \frac{B}{A} \quad (3.60)$$

o bien

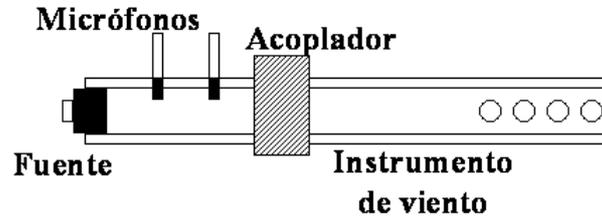


Figura 3.8: Esquema del método con dos micrófonos.

$$b = r * a \quad (3.61)$$

Deconvolucionando y despejando  $r$

$$r = \text{deconv}(b, a) \quad (3.62)$$

El algoritmo de deconvolución descrito aquí sería como el que se ocupa en [16].

### 3.4. Método de una fuente y dos micrófonos

Este método fue propuesto por el director de la tesis y el ensamble de prueba que se muestra en la Figura (3.8) está comprendido por un audífono de inserción (tipo walkman) como fuente de sonido y dos micrófonos, estos tres elementos se insertan en un acoplador de acrílico y dicho acoplador se une a la flauta (sin la sección de la embocadura).

El método consiste en medir las señales de presión sonora captadas por los micrófonos, estas señales se someten a un procesamiento digital que permite distinguir entre la señal incidente y la señal reflejada. El cociente de las amplitudes de la señal reflejada con respecto a la señal incidente en el dominio de la frecuencia se conoce como el coeficiente de reflexión. La transformada inversa de Fourier permite conocer la función de reflexión en el dominio del tiempo.

Supongamos que tenemos dos ondas, una viajando hacia la derecha (onda A) y la otra hacia la izquierda (onda B), dentro del tubo, las cuales podemos representar por la siguiente ecuación

$$p(x, \omega) = Ae^{-jkx} + Be^{jkx} \quad (3.63)$$

Si ahora a esta misma ecuación la pasamos al dominio del tiempo y obtenemos su parte real, tenemos

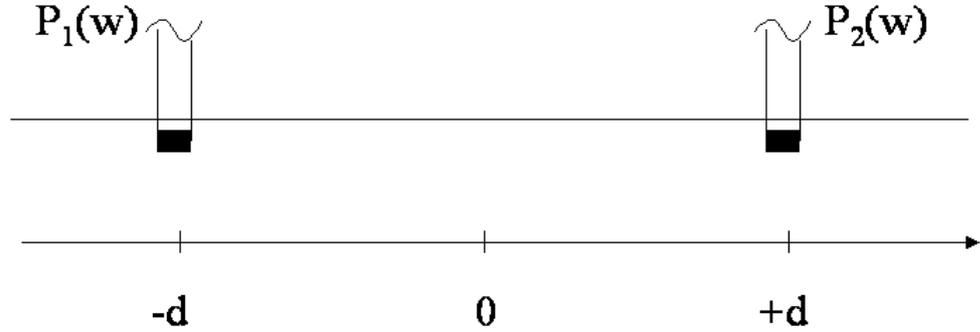


Figura 3.9: Esquema del arreglo de dos micrófonos.

$$p(x, t) = \text{Re}\{p(x, \omega)e^{j\omega t}\} \quad (3.64)$$

$$p(x, t) = \text{Re}\{Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}\} \quad (3.65)$$

Si consideramos 0 al punto medio entre los dos micrófonos,  $-d$  a la distancia medida desde 0 hasta  $P_1$  y  $d$  la distancia de 0 hasta  $P_2$ , (ver Figura (3.9)) y sustituimos en  $x$ , tenemos que

para  $x = -d$

$$P_1 = Ae^{+jkd} + Be^{-jkd} \quad (3.66)$$

y para  $x = d$

$$P_2 = Ae^{-jkd} + Be^{+jkd} \quad (3.67)$$

Si con estas ecuaciones formamos una ecuación con matrices, tenemos

$$\begin{pmatrix} e^{+jkd} & e^{-jkd} \\ e^{-jkd} & e^{+jkd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Si despejamos la columna A, B

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{2jkd} - e^{-2jkd}} \begin{pmatrix} e^{jkd} & -e^{-jkd} \\ -e^{-jkd} & e^{jkd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Ahora, despejando A

$$A = \frac{P_1 e^{jkd} - P_2 e^{-jkd}}{e^{2jkd} - e^{-2jkd}} \quad (3.70)$$

si multiplicamos numerador y denominador por  $e^{-2jkd}$  nos queda

$$A = \frac{P_1 e^{-jkd} - P_2 e^{-3jkd}}{1 - e^{-4jkd}} \quad (3.71)$$

Si recordamos que  $\delta(t - \tau)$  tiene transformada de Fourier  $e^{-j\omega\tau}$  y que  $k = \omega/c$ , entonces

$$A = \frac{P_1 e^{-j\omega d/c} - P_2 e^{-3j\omega d/c}}{1 - e^{-4j\omega d/c}} \quad (3.72)$$

Por comparación, vemos que  $\tau = d/c$  y si sustituimos esto en la ecuación anterior, tenemos

$$A = \frac{P_1 e^{-j\omega\tau} - P_2 e^{-3j\omega\tau}}{1 - e^{-4j\omega\tau}} \quad (3.73)$$

y haciendo un tratamiento similar para  $B$ , nos queda

$$B = \frac{P_2 e^{-j\omega\tau} - P_1 e^{-3j\omega\tau}}{1 - e^{-4j\omega\tau}} \quad (3.74)$$

El proceso consiste en medir las señales de presión sonora captadas por los micrófonos y posteriormente estas señales se someten a un procesamiento digital para poder distinguir la señal incidente de la reflejada utilizando la Ecuación (3.73) y la Ecuación (3.74)

El cociente de las amplitudes de la señal reflejada con respecto a la señal incidente nos dá el coeficiente de reflexión en el dominio de la frecuencia, esto es

$$R(\omega) = \frac{B}{A} = \frac{P_2 - P_1 e^{-2j\omega\tau}}{P_1 - P_2 e^{-2j\omega\tau}} \quad (3.75)$$

Si a  $R(\omega)$  le aplicamos la transformada inversa de Fourier obtenemos la función de reflexión en el dominio del tiempo.

# Capítulo 4

## Pruebas y resultados experimentales

En este capítulo se explica el procedimiento experimental para llevar a cabo las mediciones de la función de reflexión, tal como se describe en la Sección 3.4, utilizando una flauta dulce soprano. También se presentan los resultados de un cálculo numérico de las mismas funciones de reflexión.

Siguiendo este procedimiento se obtiene la función de reflexión de las notas do, re, mi, fa, sol, la, si, de la primera octava de la flauta (registro grave), y do de la segunda octava (registro agudo). Posteriormente se comparan las funciones de reflexión medidas con las que se obtuvieron a través del modelado [14], [17].

Los métodos de medición descritos en las secciones de la 3.1 a la 3.3 no se realizaron, por falta del equipo correspondiente (micrófono y fuente audiológica, acoplador exponencial, etc.). Se realizó un intento de sustituir la sonda audiológica, necesaria en los métodos de las secciones 3.1 y 3.3, pero los resultados no fueron satisfactorios y por lo tanto no se reportan.

### 4.1. Modelado de funciones de reflexión en una flauta

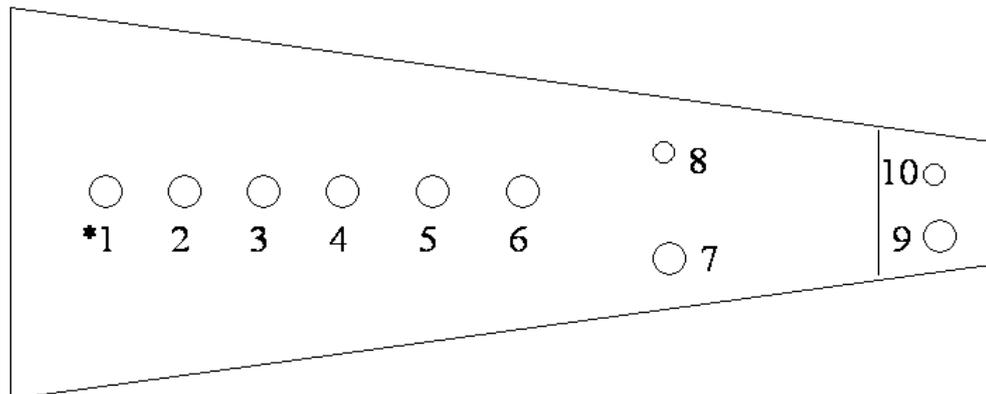
En esta sección se describe el modelado del instrumento que se utilizó, que en este caso se trata de una flauta dulce soprano. Figura (4.1)

Dicha flauta posee una longitud aproximada de 33 cm. Si consideramos que en los experimentos es necesario quitar la sección del silbato (que tiene forma cilíndrica), entonces el tubo restante tiene una longitud aproximada de 22 cm. Precisamente esta sección del tubo de la flauta, tiene la forma de un cono truncado que cierra hacia la derecha (hacia el extremo opuesto al silbato).

Asignándole un número a los agujeros de digitación como muestra la Figura (4.2), se obtienen las medidas de sus diámetros, la posición, el grosor de la pared y el volumen, que se muestran en el Cuadro (4.1).



Figura 4.1: Flauta dulce soprano



**\*El agujero de digitación 1 se encuentra en la parte trasera de la flauta**

Figura 4.2: Diagrama de la flauta dulce soprano

Agujero $n$	Diámetro $d_n$ (mm)	Posición $x_n$ (mm)	Grosor $h_n$ (mm)	Volumen $V_n$ (mm <sup>3</sup> )
1	5,5	12,20	4	$95,033 \times 10^{-9}$
2	4,5	12,20	4	$95,033 \times 10^{-9}$
3	6,0	11,80	4	$113,09 \times 10^{-9}$
4	5,7	11,70	4	$113,09 \times 10^{-9}$
5	4,9	11,20	4	$30,78 \times 10^{-6}$
6	5,9	10,30	4	$37,07 \times 10^{-6}$
7	4,3	9,00	4	$58,08 \times 10^{-9}$
8	2,25	9,00	4	$15,90 \times 10^{-9}$
9	4,40	8,95	5,95	$90,47 \times 10^{-9}$
10	2,5	8,95	5,95	$29,20 \times 10^{-9}$

Cuadro 4.1: Dimensiones de los agujeros de digitación de una flauta dulce soprano.

El método de matrices de transferencia descrito por Keefe (Sección 2.4) se programó como un conjunto de funciones para Matlab [14], [17] y se utilizó para generar las notas modeladas que se mencionaron anteriormente. Ver Apéndice A.1. Los resultados se muestran en las figuras de la Sección 4.3.

## 4.2. Medición de funciones de reflexión en una flauta

Como podemos observar de la Figura (4.3) el ensamble está comprendido por varios elementos, tales como un audífono de inserción (tipo walkman), dos micrófonos (Marca Brüel & Kjaer, tipo 4134), un amplificador (Marca Brüel & Kjaer, tipo 2807), una PC y una flauta.

El audífono y los micrófonos se insertan en un acoplador que se diseñó especialmente para este método. El acoplador consiste en un pequeño tubo de acrílico (cuya longitud es de aproximadamente 10 cm) que en su pared tiene dos orificios por donde se insertan los micrófonos. Se procuró que su diámetro coincidiera con el de la sección de entrada de la flauta, como se muestra en la Figura (4.4). Se une la flauta con el acoplador y en el extremo opuesto de este último se inserta el audífono.

Por compatibilidad con el procesamiento digital de las señales, se decidió que el tiempo que le toma al sonido recorrer la distancia  $d$  debe corresponder a un múltiplo entero  $N$  de períodos de muestreo, o sea que

$$NT = \tau \quad (4.1)$$

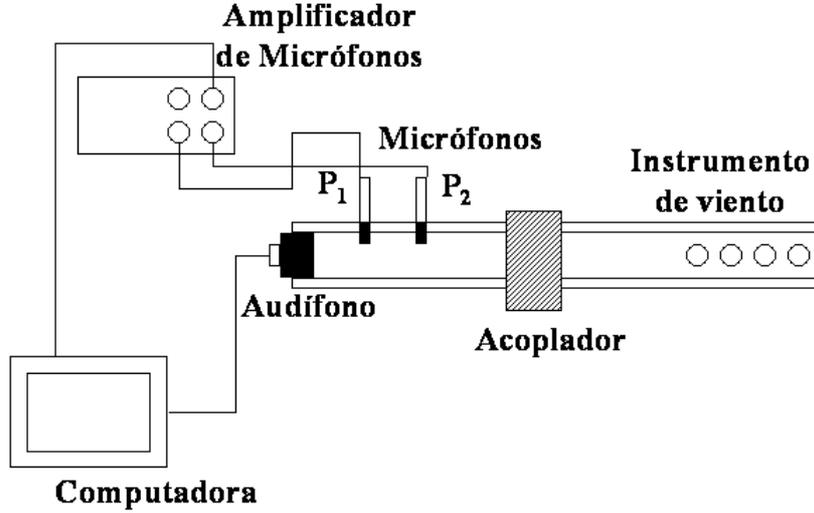


Figura 4.3: Montaje de prueba con dos micrófonos.

$$NT = \frac{d}{c} \quad (4.2)$$

$$\frac{N}{fs} = \frac{d}{c} \quad (4.3)$$

en donde  $fs$  es la frecuencia de muestreo, que en este caso corresponde a 48 kHz. Para determinar  $d$ , con un factor de sobre-muestreo de  $N = 4$ , entonces

$$d = \frac{Nc}{fs} = \frac{(4)(343\text{m/s})}{48\text{kHz}} = 0,0286\text{m} \quad (4.4)$$

Si consideramos que  $D = 2d$ , entonces

$$D = 2(0,0286\text{m}) = 0,0572\text{m} \quad (4.5)$$

Una vez obtenido esto se une la flauta (sin la sección del silbato) con el acoplador y en el extremo opuesto de este último se inserta el audífono, como se muestra en la Figura (4.5)

Usando la PC, y un sistema de procesamiento digital de señales basado en el microprocesador Texas Instruments TMS320C40, [18], [19] y [20], se mide la función de respuesta a impulso entre la señal alimentada a la fuente de sonido y la señal captada por cada uno de los micrófonos. Esta medición se realizó usando un programa basado en el método de secuencias MLS (Secuencias de Máxima Longitud) ó de pseudo-ruido [21]. Este programa se controla a su vez mediante un programa de Matlab.

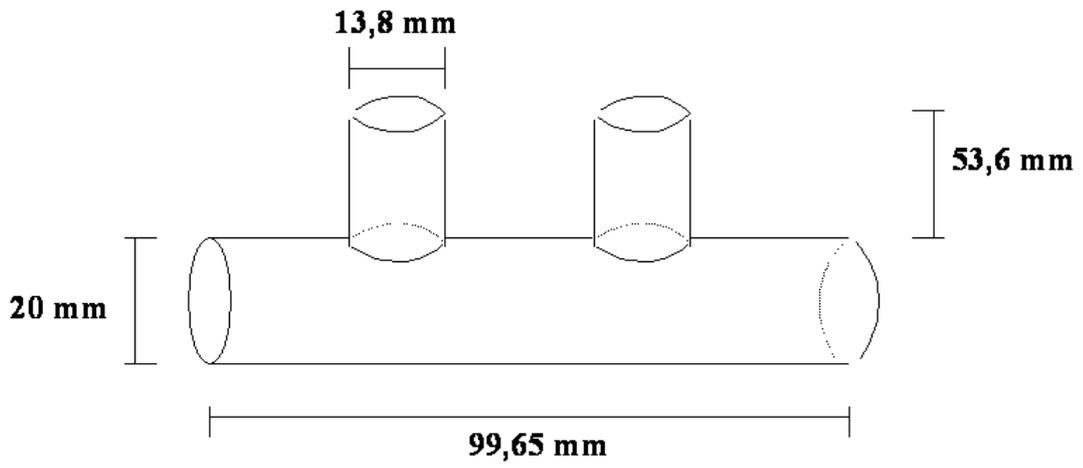


Figura 4.4: Dimensiones del acoplador de acrílico.



Figura 4.5: Ensamble de prueba con acoplador

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C5 (do)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D5 (re)	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
E5 (mi)	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
F5 (fa)	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
G5 (sol)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
A5 (la)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
B5 (si)	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C6 (do)	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 4.2: Digitaciones de las notas musicales.

En teoría, ambos micrófonos deberían ser idénticos, pero en realidad tienen diferencias de amplitud y de fase, que afectan el desempeño del método. Por esta razón, se realizaron todas las mediciones solamente con uno de los dos micrófonos (cambiando de posición los micrófonos para cada medición). De esta manera se evita el problema de la diferencia de respuesta, a la vez que se mantienen condiciones físicas equivalentes (con un micrófono en cada posición).

Se colocó una abrazadera para unir el acoplador con la flauta, esto con el fin de lograr un buen acoplamiento acústico e impedir en lo posible la entrada de ruido del exterior. Para configurar la digitación de las notas musicales se dejan abiertos o tapados ciertos agujeros, lo cuál se realiza utilizando una masilla adhesiva. Véase Cuadro (4.2).

Configurando la digitación de las notas musicales obtenemos la función de reflexión para cada una de ellas. El método para calcular la función de reflexión descrito en la sección 3.4, se programó en Matlab. El código se muestra en el Apéndice A.4.

### 4.3. Análisis de funciones de reflexión

En esta sección, se muestran las funciones de reflexión modeladas y medidas en el dominio del tiempo, así como también las gráficas de magnitud y fase en el dominio de la frecuencia. En estas figuras se muestra el producto de la función de reflexión por el período de muestreo  $r(t)T$  (o su equivalente en el dominio de la frecuencia  $R(f)T$ ), que es una cantidad adimensional. Esto se ve de la relación entre la presión incidente  $a(t)$  y la reflejada  $b(t)$  a través de la integral de convolución:

$$b(t) = \int_0^{\infty} a(t-t')r(t')dt'; \quad (4.6)$$



Figura 4.6: Vista ampliada

cuya expresión en tiempo discreto es

$$b(n) \approx \sum_{n'=0}^{N-1} a(n - n')[r(n')T]. \quad (4.7)$$

Si  $a(n - n')$  y  $b(n)$  representan la presión en pascales, entonces  $r(n')T$  debe ser adimensional (y  $r(n')$  debe tener unidades de  $1/s$ ).

#### 4.3.1. Funciones de reflexión en el dominio del tiempo.

Las funciones de reflexión modeladas y medidas en el dominio del tiempo se muestran a partir de la Figura (4.7) hasta la Figura (4.14). El código del programa para obtenerlas se muestra en el apéndice A.5.

Si observamos las gráficas correspondientes a la nota C5, podemos observar que el pico negativo es el que predomina en la señal. Esto es lo que se espera, debido a que la señal reflejada desde el extremo opuesto y abierto del tubo da como resultado una onda de presión negativa. Sin embargo, en la gráfica obtenida experimentalmente tenemos algunos “rizos” en la parte inicial de la gráfica (entre 0 y 1 ms, aproximadamente), que se deben a reflexiones muy tempranas, originadas quizás en el acoplador y en el empalme. Los otros picos más

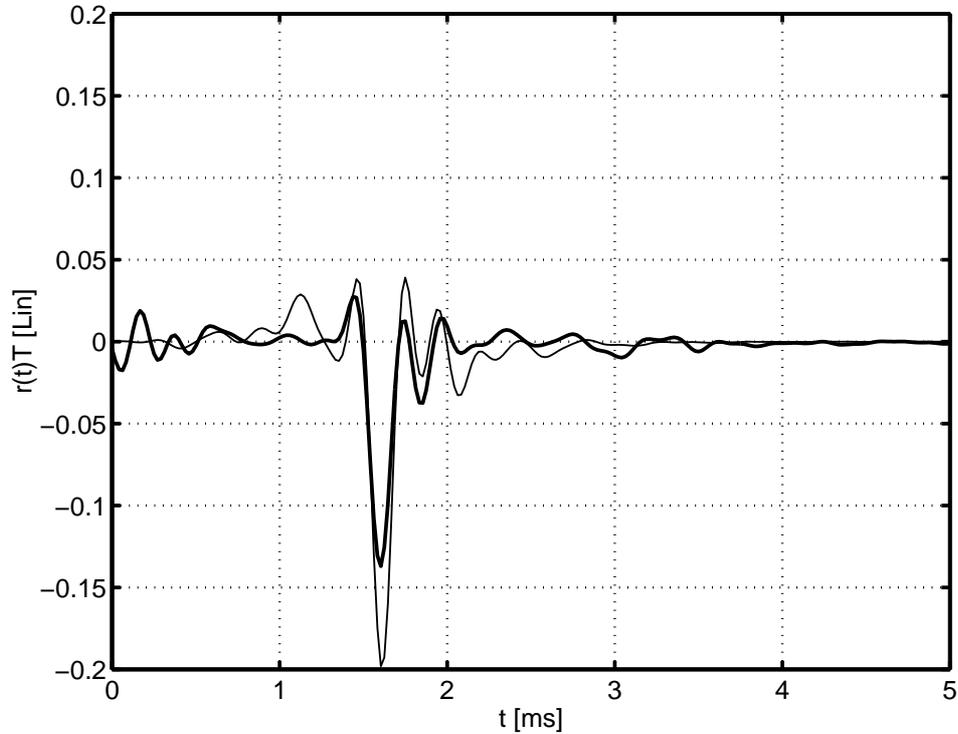


Figura 4.7: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota C5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

pequeños, que se encuentran un poco antes y después del pico negativo, son una contribución de las reflexiones múltiples provocadas por los agujeros de digitación cerrados.

Cabe señalar que conforme se va aumentando la altura del tono (destapando agujeros de digitación) el pico negativo se va acercando hacia tiempos menores. Esto se explica, debido a que se van destapando agujeros y la longitud acústica efectiva del tubo de la flauta va disminuyendo. Por otra parte, el retardo de tiempo inicial no es representativo del funcionamiento normal del instrumento, ya que no incluye la sección de tubo que contiene la embocadura (silbato).

Las funciones de reflexión modeladas y medidas en una flauta dulce soprano muestran una buena correspondencia en términos generales. Sin embargo, algunos efectos de amortiguamiento no se describen adecuadamente en el modelo. Por otra parte, la diferencia en la escala vertical se debe a discrepancias en la estimación de efectos de amortiguamiento. En este sentido el modelo predice una respuesta con menos amortiguamiento que la respuesta medida.

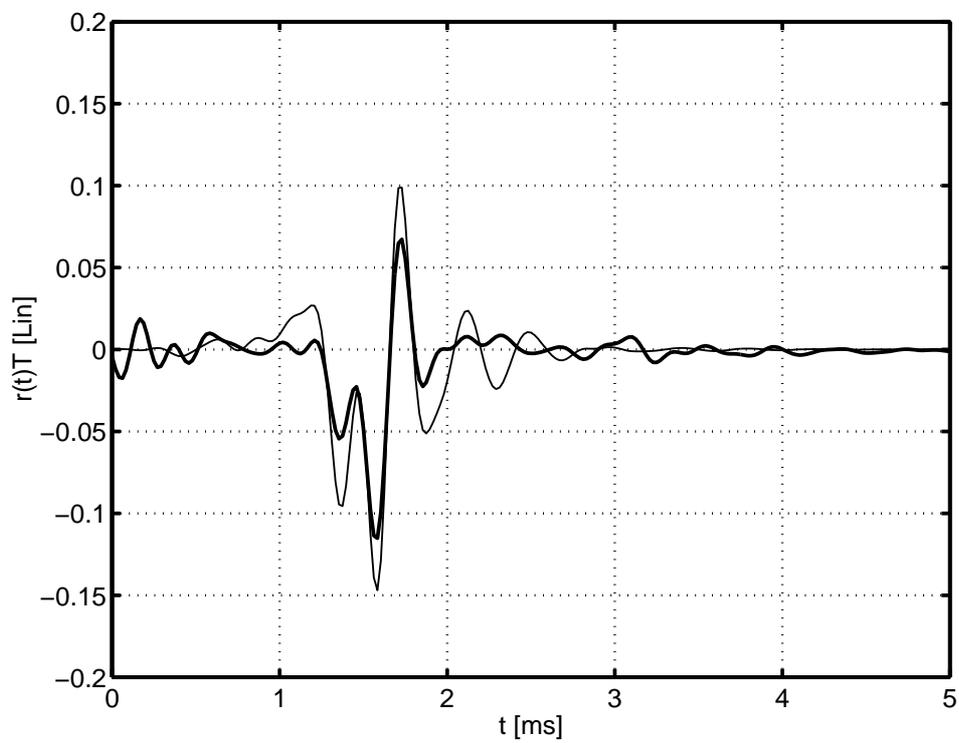


Figura 4.8: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota D5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

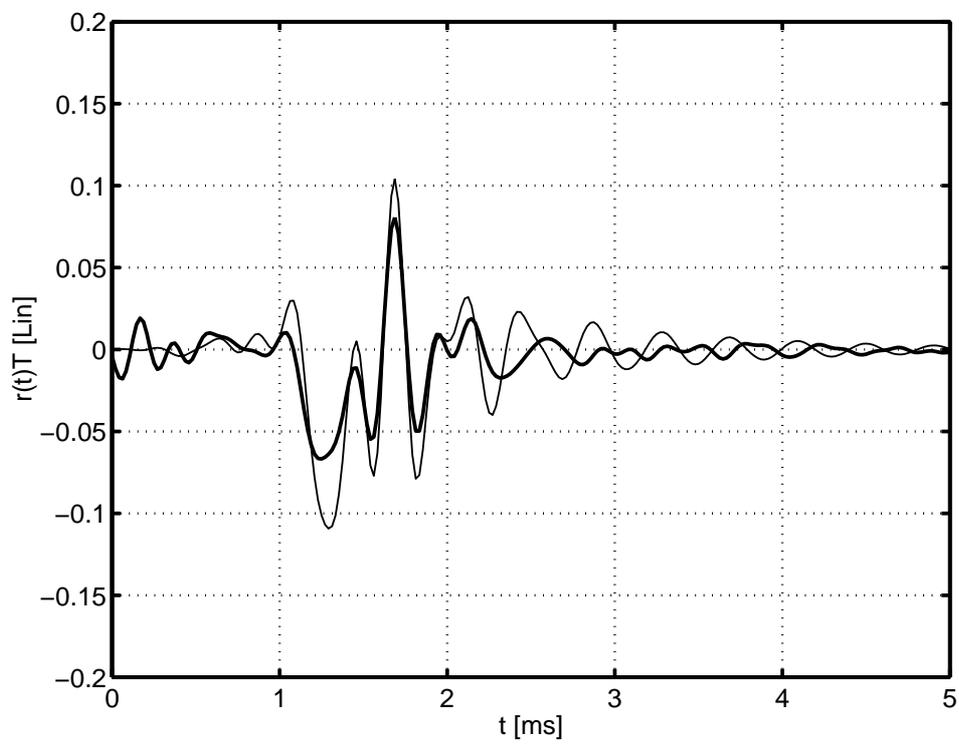


Figura 4.9: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota E5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

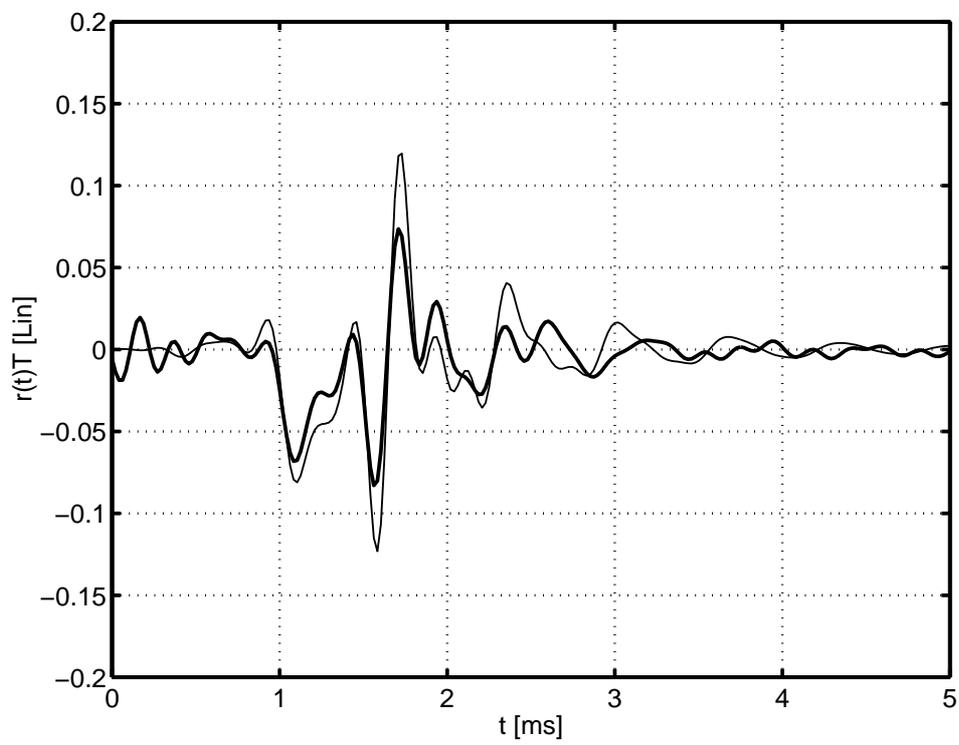


Figura 4.10: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota F5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

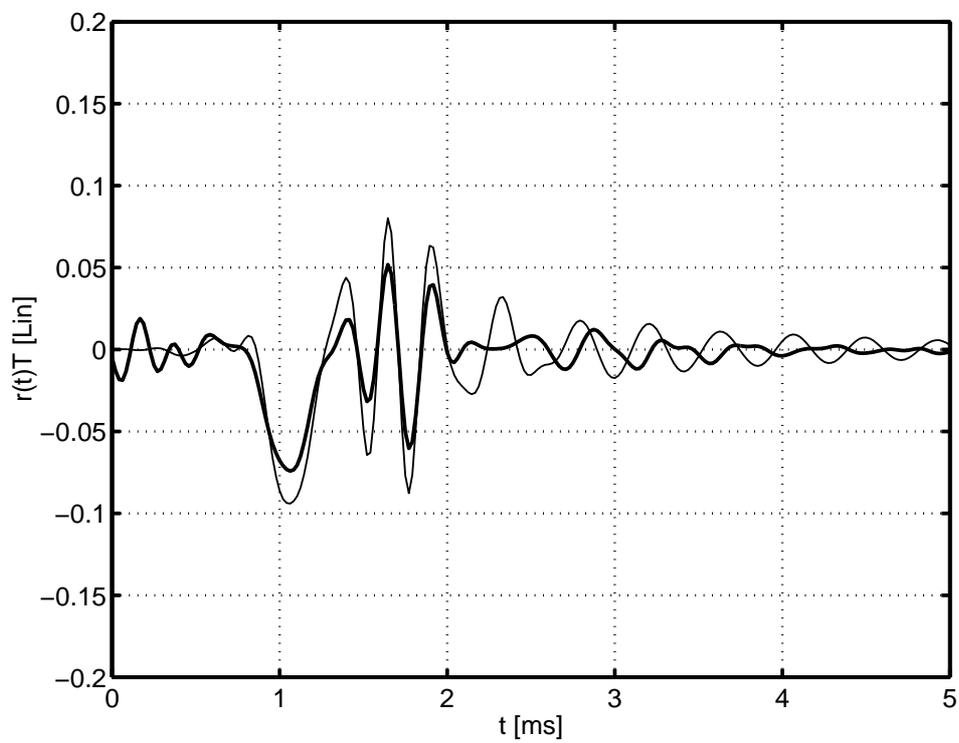


Figura 4.11: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota G5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

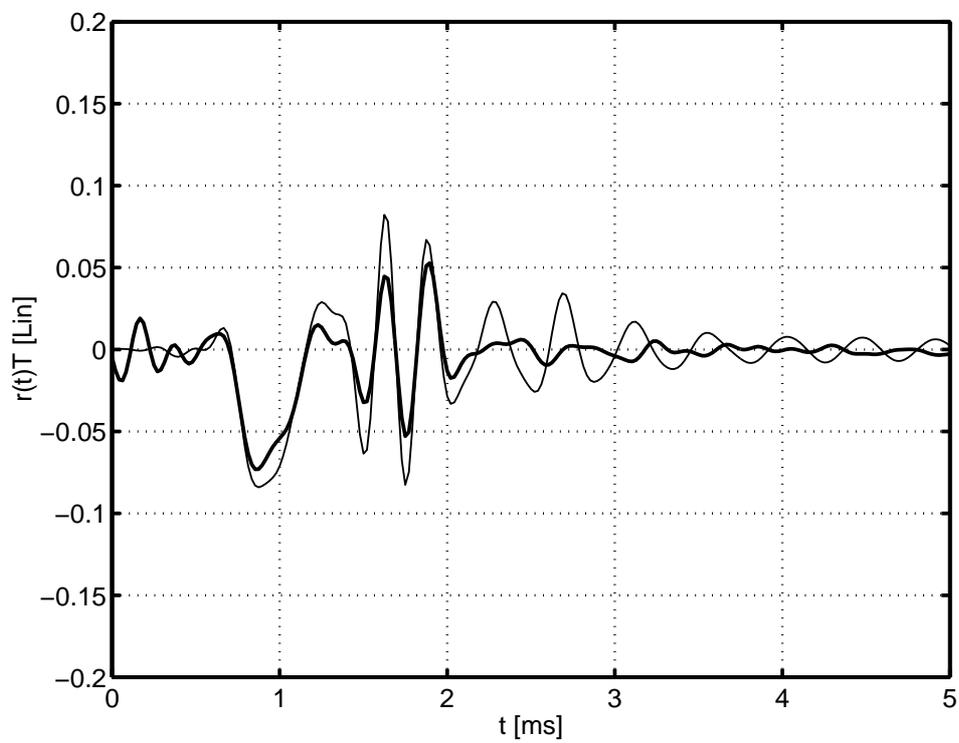


Figura 4.12: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota A5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

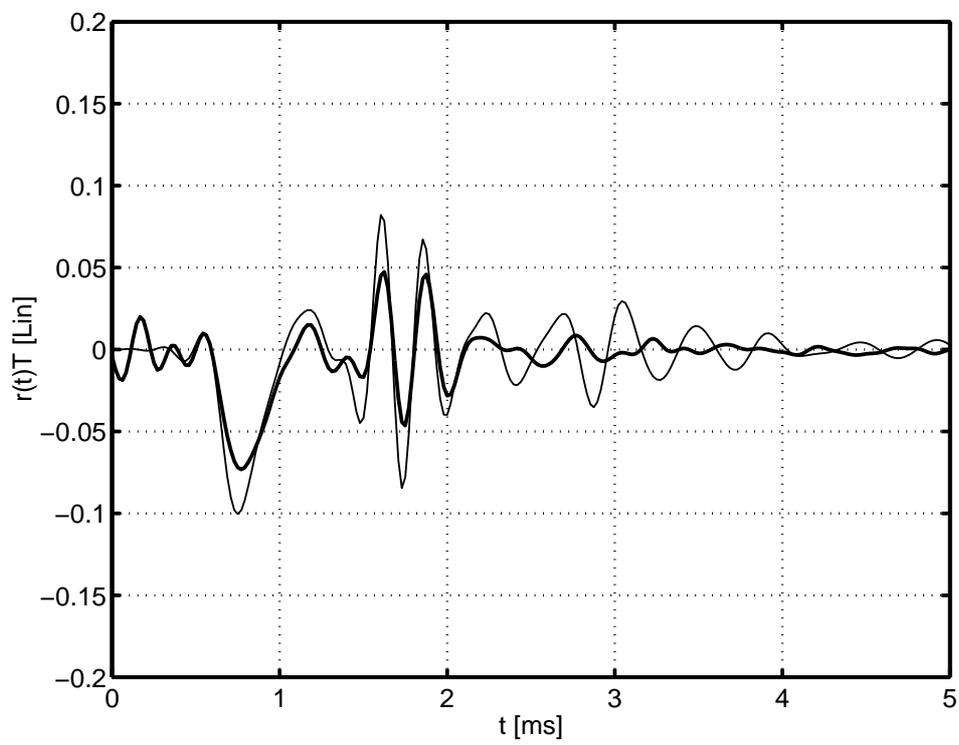


Figura 4.13: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota B5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

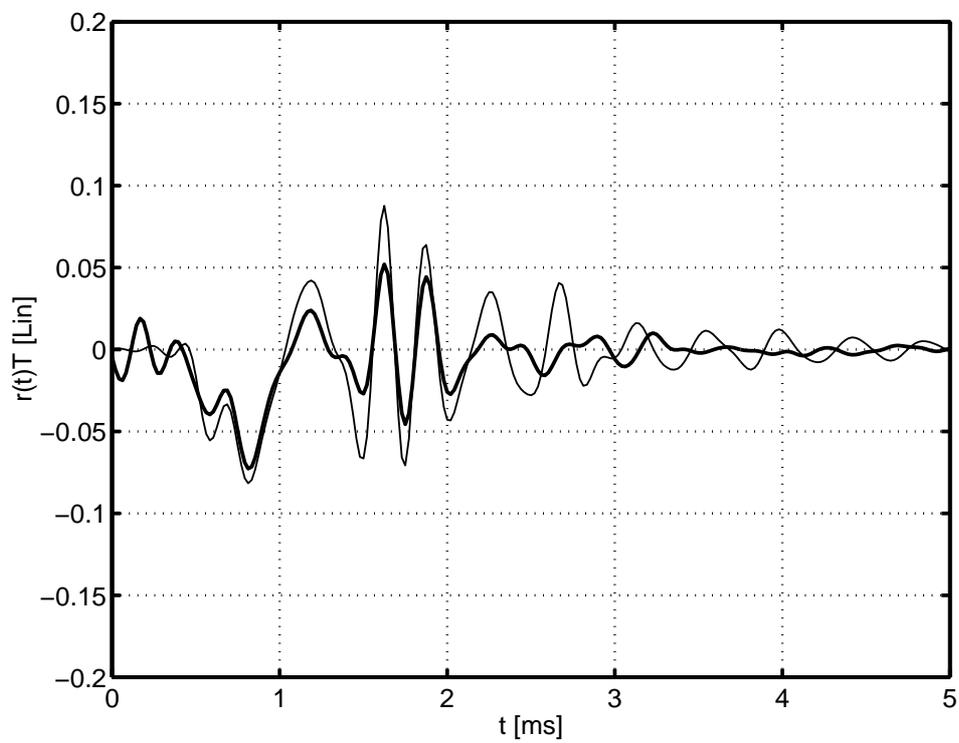


Figura 4.14: Función de reflexión en el dominio del tiempo para la nota C6: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

### 4.3.2. Funciones de reflexión en el dominio de la frecuencia.

Las gráficas de magnitud y fase en el dominio de la frecuencia, de las funciones de reflexión modeladas y medidas, se muestran a partir de la Figura (4.15) hasta la Figura (4.22). El código del programa para obtenerlas se muestra en el apéndice A.5.

Para analizar las funciones de reflexión en el dominio de la frecuencia, utilizaremos el siguiente ejemplo idealizado de un simple retardo  $\tau$  en el dominio del tiempo (con amplitud negativa, como la de un tubo con extremo abierto)

$$r(t) = -\delta(t - \tau). \quad (4.8)$$

Ahora, pasándolo al dominio de la frecuencia

$$R(f) = -e^{-j2\pi f\tau}; \quad (4.9)$$

la cual tiene una magnitud  $\text{mag}(R) = 1$ , constante con la frecuencia, y fase  $\text{arg}(R) = -2\pi f\tau$ , que representa una recta en función de la frecuencia con pendiente de  $-2\pi\tau$ . Es decir, la pendiente de la fase indica el retardo. A su vez, la frecuencia fundamental de la nota producida es el inverso del retardo  $f_1 = 1/\tau$ .

En las gráficas de las funciones de reflexión en el dominio de la frecuencia, podemos observar que la magnitud modelada es mayor que la medida, y que la diferencia se incrementa conforme se va aumentando en la escala (para las notas agudas). Esto probablemente es debido a un valor del amortiguamiento que es demasiado pequeño en el modelo en relación con el medido. Otro factor importante, es que la función de reflexión de la flauta se contamina cada vez más con las reflexiones propias del acoplador. Por ejemplo, a partir de la nota G5, aparece un mínimo alrededor de 2100 Hz. Este mínimo se debe, al parecer, a una resonancia entre el borde del audífono y el punto de acoplamiento del primer micrófono. Entre ellos hay una distancia de aproximadamente 4 cm, si suponemos que esto representa 1/4 de la longitud de onda, entonces  $\lambda \approx 16$  cm y  $f = c/\lambda \approx 2144$  Hz.

En la respuesta de fase, se observa una disminución progresiva de la pendiente (a frecuencias abajo de 2 kHz), que indica que la nota aumenta, lo cuál se traduce en una buena correspondencia de la frecuencia fundamental entre la nota medida y la nota modelada.

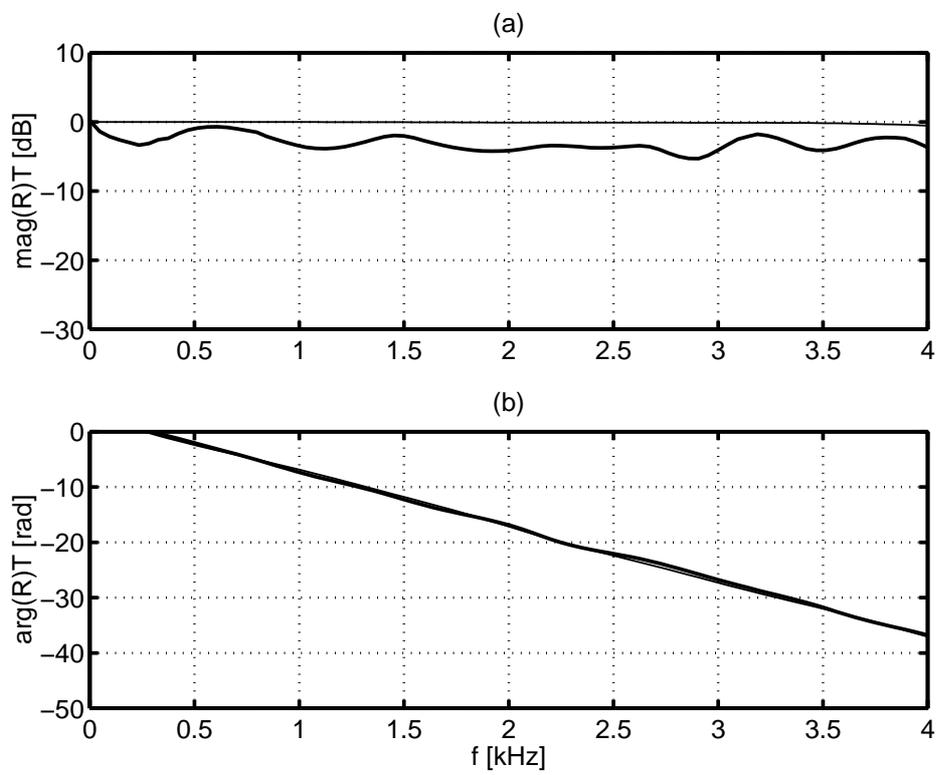


Figura 4.15: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota C5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

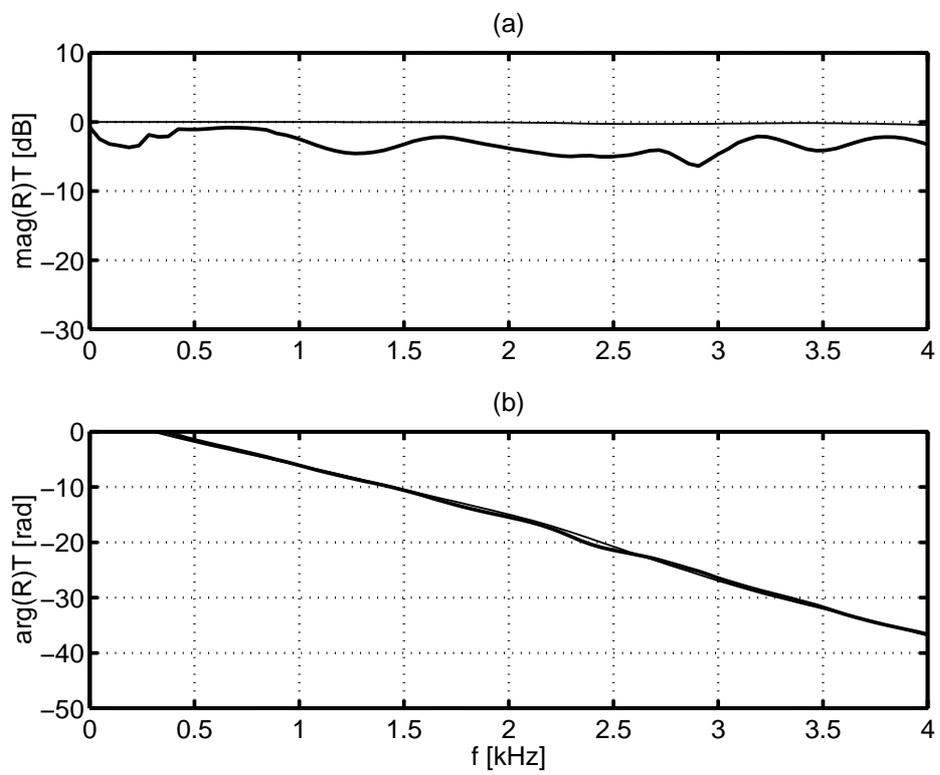


Figura 4.16: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota D5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

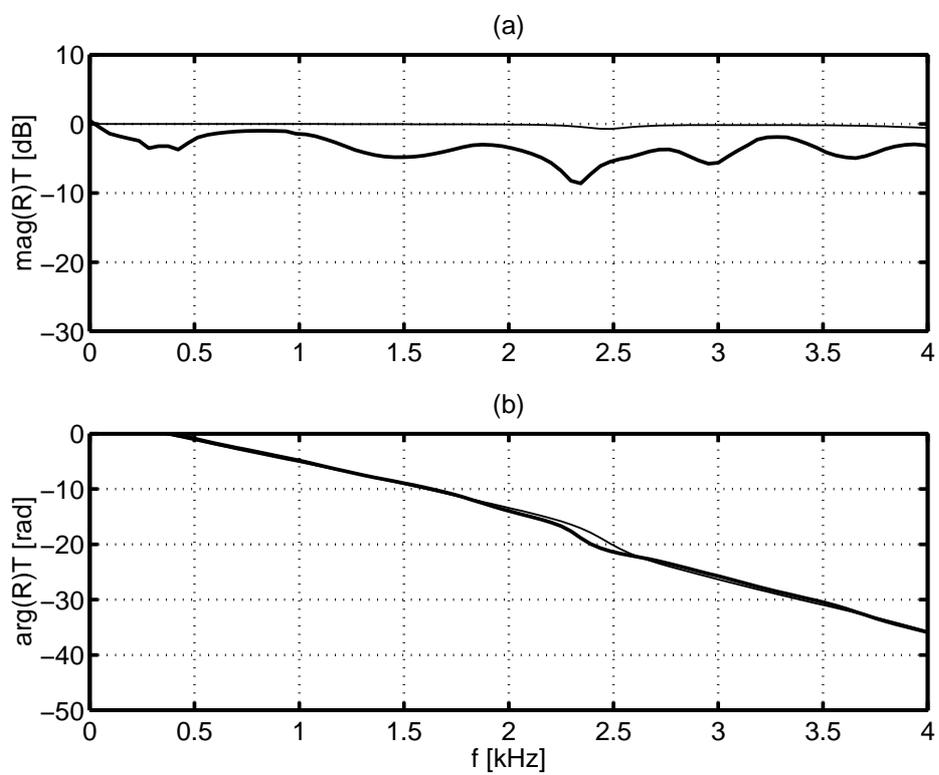


Figura 4.17: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota E5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

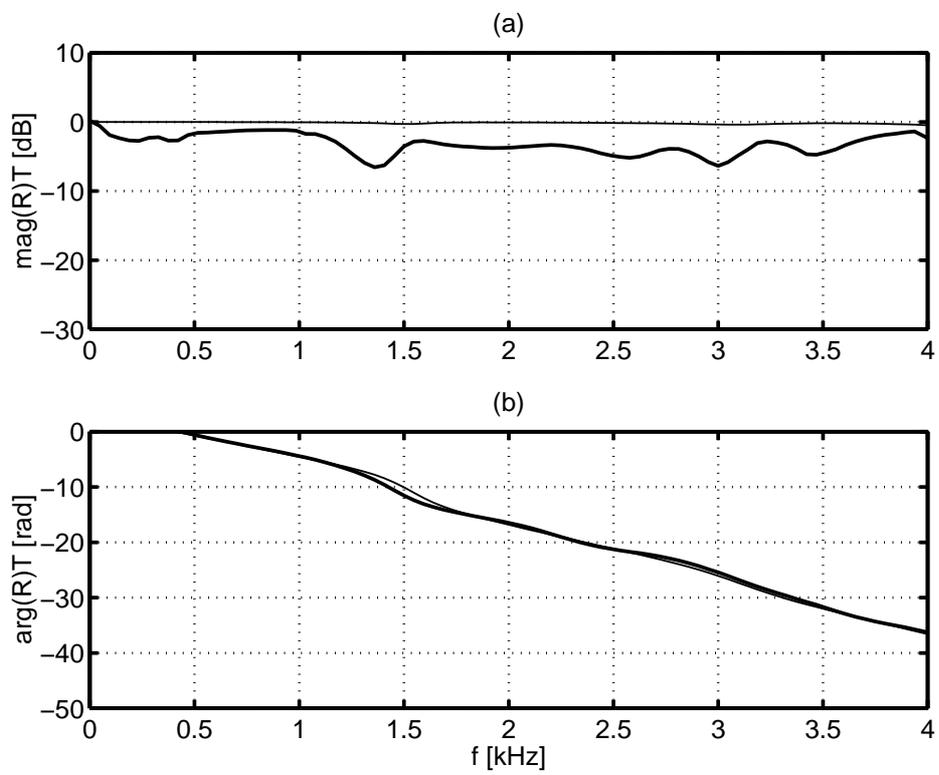


Figura 4.18: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota F5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

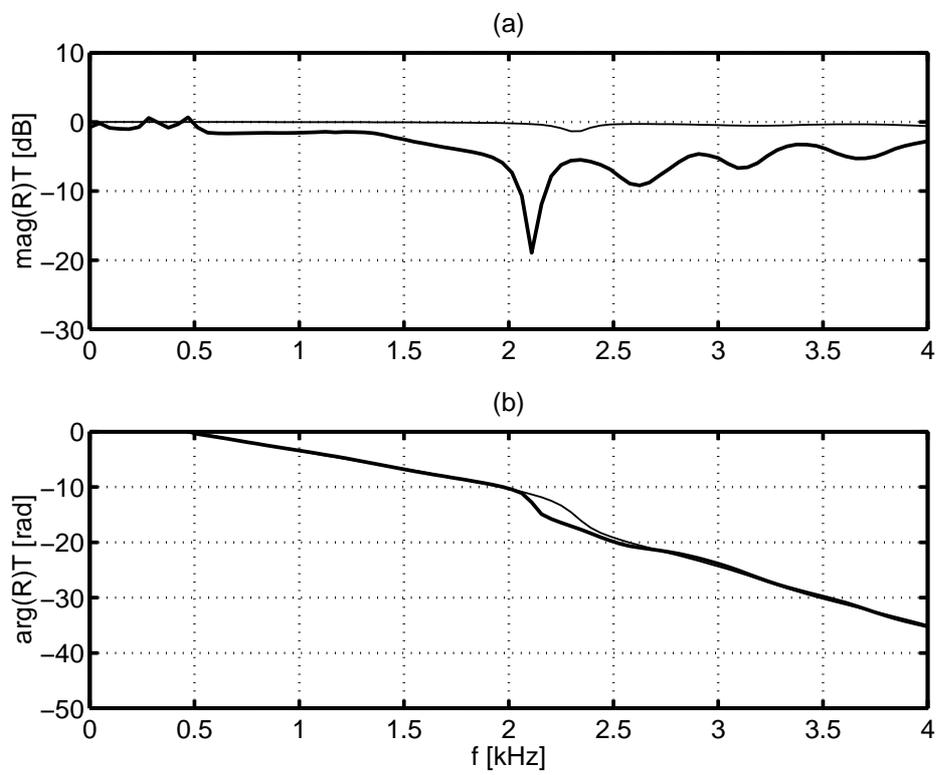


Figura 4.19: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota G5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

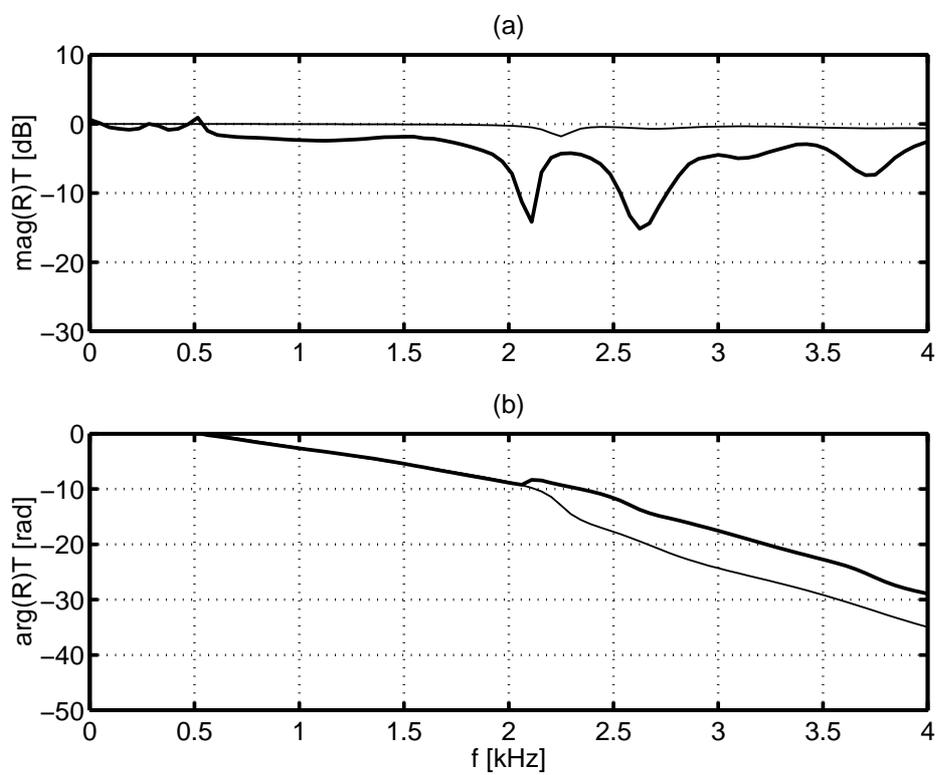


Figura 4.20: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota A5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

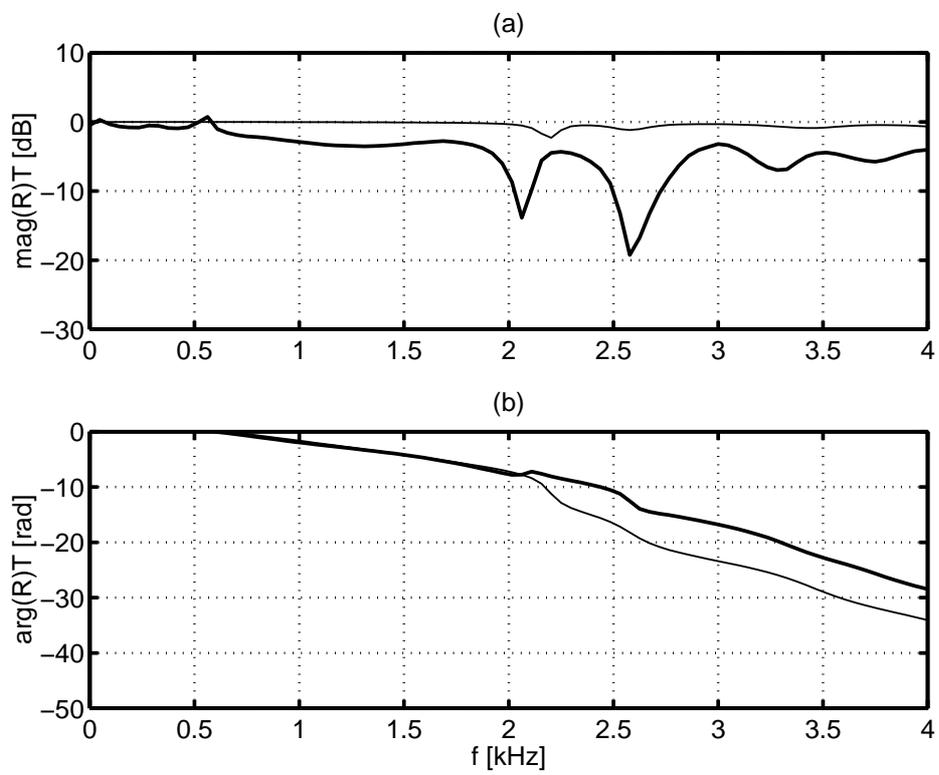


Figura 4.21: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota B5: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

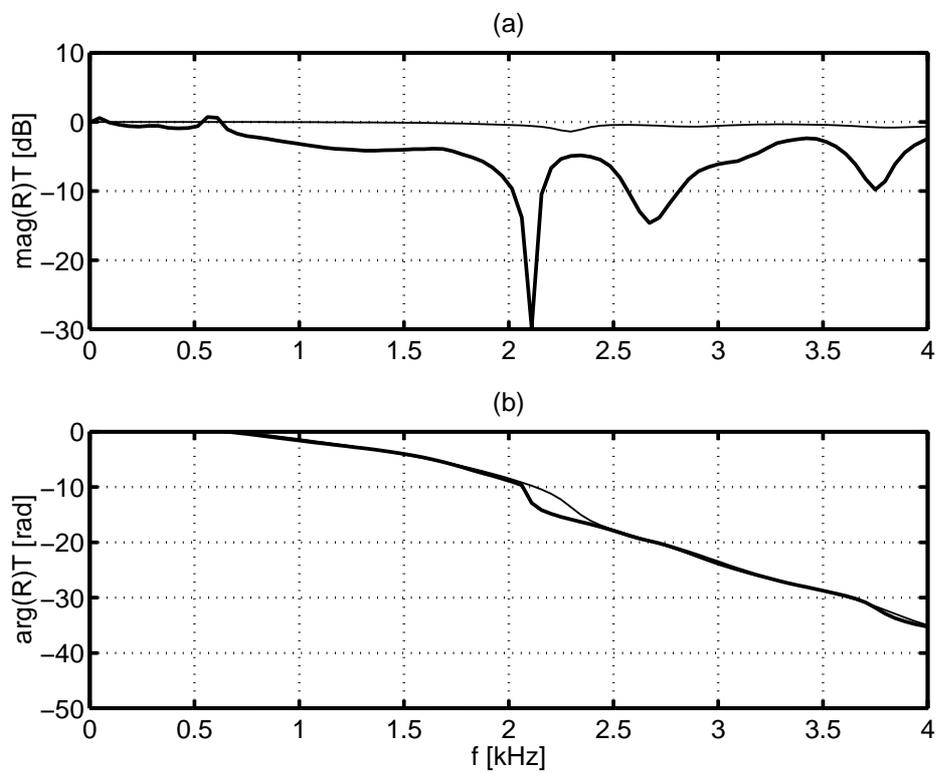


Figura 4.22: Magnitud (a) y fase (b) en el dominio de la frecuencia de la función de reflexión para la nota C6: modelada (línea delgada) y medida (línea gruesa).

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Aportaciones de la tesis

En este trabajo, se realizó una investigación documental de la literatura relacionada al tema, tal como los artículos de Keefe [4] y de Wolfe et al. [5]. También se consultaron algunos libros, en los cuales se revisaron los conceptos básicos de acústica, como por ejemplo el comportamiento de las ondas acústicas en tubos cónicos ó cilíndricos, y las pérdidas en las paredes internas de estos tubos. También, los conceptos de impedancia acústica, coeficiente de reflexión, función de reflexión, transmisión entre dos medios, el método de matrices de transferencia y análisis de la conducta acústica de los instrumentos de viento.

Por otra parte, se prepararon y se realizaron experimentos para obtener la función de reflexión, con el método de dos micrófonos que se describe en la Sección 3.4. Posteriormente se hizo una comparación con las funciones de reflexión obtenidas a través de un modelo numérico. Al realizar la comparación entre las funciones modeladas y las experimentales, observamos que el modelo predice un amortiguamiento menor que el medido. Esto se observa en una amplitud menor de las funciones medidas, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Esto se traduciría en una diferencia en la calidad de las notas musicales. Por otra parte, existe una buena correspondencia en el tiempo de retardo (pendiente inicial de la fase), que se traduciría en que las notas producidas tendrían la misma frecuencia, y en consecuencia la misma altura o entonación. Por lo tanto, podemos concluir que el método experimental arroja resultados confiables.

### 5.2. Sugerencias para trabajos futuros

Para proyectos posteriores queda la tarea de revisión e implementación de los otros métodos que se proponen en esta tesis, y quizá sería conveniente hacer una comparación entre

ellos para observar las semejanzas y diferencias existentes.

Una vez habiendo comparado los resultados es posible validar los métodos y teniendo ya un método confiable para obtener la función de reflexión, y utilizarla en aplicaciones tales como la síntesis de sonido, evaluación de instrumentos musicales, etc.

# Bibliografía

- [1] Douglas H. Keefe. Woodwind air columns models. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88(1):35–51, July 1990.
- [2] Douglas H. Keefe. Theory of the single woodwind tonehole. *Journal of the Acoustical Society of America*, 72:676–687, 1982.
- [3] Douglas H. Keefe. Experiments on the single woodwind hole. *Journal of the Acoustical Society of America*, 73:694–694, 1983.
- [4] Douglas H. Keefe. Wind-instrument reflection function measurements in the time domain. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(4):2370–2381, April 1996.
- [5] Tann J Wolfe Joe, Smith John and Fletcher N.H. Acoustic impedance spectra of classical and modern flutes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 243(1):127–144, September 2001.
- [6] Thomas Rossing. *The Science of sound*. Addison Wesley Publishing Company, second edition, 1990.
- [7] Neville H. Fletcher and Thomas Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [8] Lord Rayleigh. The theory of sound. *Macmillan, London*, 1948.
- [9] P.M. Morse. Vibrations and sound. *Acoustical Society of America*, 1948.
- [10] H.F. Olson. Acoustical engineering. *Princeton*, 1957.
- [11] H Levine and R.T. Schwinger. On the radiation of sound from an unflanged pipe. *Phys. Rev.*, 1948.
- [12] R.T. Schumacher. Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet. *Acústica*, 48:71–85, 1981.

- [13] R.D. Ayers. Impulse responses for feedback to the driver of a musical wind instrument. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100:1190–1198, 1996.
- [14] Orduña F. and Elizalde R. Desarrollo de un simulador de instrumentos musicales de viento. En Memorias SOMI XIV Congreso de Instrumentación, Tonantzintla Puebla, México, Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico UNAM, 1999.
- [15] Polack J.D. Menial X. Kergomard J. Cosuard C. and Bruneau M. *Journal of the Acoustical Society of America*, 22(331), 1987.
- [16] Cardona S. y Keefe D.H. Argulló J. Time domain deconvolution to measure reflection functions for discontinuities in waveguides. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97:1950–1957, Marzo 1995.
- [17] Orduña F. and Suárez A. Modelado numérico y caracterización experimental de instrumentos musicales de aliento. En Memorias SOMI XVIII Congreso de Instrumentación, México D.F., Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico UNAM, 2003.
- [18] Spectrum Signal Processing Inc. *Spectrum*, Septiembre 1994.
- [19] Spectrum Signal Processing Inc. *Spectrum*, Agosto 1994.
- [20] Spectrum Signal Processing Inc. *Spectrum*, Diciembre 1994.
- [21] Vanesa Garrido Hernández. Medición y cálculo de índices acústicos en recintos. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería UNAM, 1999.

# Apéndice A

## Código de Matlab.

### A.1. Cálculo de la función de reflexión.

A continuación se muestra el código del programa para obtener las gráficas de las funciones de reflexión modelada. Este programa se basa en la función `woodwind` que es parte de un paquete desarrollado por el Dr. Felipe Orduña [17]. También es necesaria la tabla de digitación almacenada en el archivo `soprano.dig`, la cual se muestra en la siguiente sección.

```
% flauta.m: Modelo de flauta barroca soprano Yamaha.    -*- text -*-

clear

% Distancia entre agujeros (de borde final a borde inicial) en [mm]/1000
%x=[0 36.05 11.87 21.05 21.35 22.30 21.80 21.60 26.50 44.68]'/1000;
%x=[0 333.3 6.87 15.8 15.5 17 16.4 16.5 -2.25 21.8 -2.7 44.8 ]'/1000;
x=[0 44.0+33.30 6.87 15.8 15.5 17 16.4 16.5 -2.25 21.8 -2.7 44.8 ]'/1000;

% Diámetro de agujeros en [mm]/(2*1000).
b=[0 5.5 4.5 6 5.7 4.9 5.9 4.3 2.25 4.4 2.5 0]'/2000;

% Espesor de agujeros en [mm]/1000.
t=[0 4 4 4 4 4 4 4 4 5.95 5.95 0]'/1000;

% Diámetro de flauta en [mm]/(2*1000).
a=[12.2 12.2 12.2 11.8 11.7 11.2 10.3 9 9 8.95 8.95 8.65]'/2000;

x=cumsum(x+2*abs([0;b(1:length(b)-1)]));
```

```

load soprano.dig
ndig = [1 3 5 7 10 12 15 17];
nota = ['C5'; 'D5'; 'E5'; 'F5'; 'G5'; 'A5'; 'B5'; 'C6'];

for n = 1 : length(ndig)

    dig = [0 soprano(ndig(n),:) 0]';
    dig = 1 - 2*dig;

    fs=48000;
    N=4096;
    [Z, R, r, freq, time] = woodwind(x, b .* dig, t, a, fs, N);
    Z0=415/(pi*a(1)^2);
    r = r(1:1024);
    eval(['save ' nota(n,:) '_mod.dat r -ascii']);
end

```

## A.2. Tabla de digitación.

La tabla de digitación que se muestra abajo almacenada en el archivo `soprano.dig` nos indica que el número 0 corresponde a un agujero abierto en su totalidad, el número 0.25 indica un agujero tapado a la mitad y el 1 indica un agujero completamente tapado.

El primer dígito leído de izquierda a derecha corresponde al agujero nombrado como No. 1 según la Figura (4.2) y en ese orden siguen los demás agujeros.

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 0 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 1 1 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
1 1 1 0 1 1 1 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 0 0

```

```

1 1 0 1 1 0 0 0 0 0
1 0 1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 0 0
0.25 1 1 1 1 1 0 0 0 0
0.25 1 1 1 1 0 0 0 0 0
0.25 1 1 1 1 0 1 1 0 0
0.25 1 1 1 0 1 0 0 1 1
0.25 1 1 1 0 1 1 0 0 0
0.25 1 1 1 0 1 0 0 0 0
0.25 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0.25 1 1 1 0 1 1 1 1 1
0.25 1 1 0 1 0 0 0 0 0
0.25 1 1 0 0 0 0 0 0 0
0.25 1 1 0 1 1 1 1 0 0
0.25 1 1 0 1 1 0 0 0 0
0.25 1 0 0 1 1 0 0 0 0
0.25 1 0.25 1 1 0 1 1 1 1
0.25 1 0 1 1 0 1 1 1 0

```

### A.3. Programa medir.m

El siguiente programa es utilizado durante la realización de las mediciones que se describen en la Sección 4.2. Este programa se basa en el programa `c40mls` que es parte de un paquete desarrollado por la Ing. Vanesa Garrido y el Dr. Felipe Orduña [21].

```

function [h,t]=medir(filename)
%function [h,t]=medir(filename)
if exist(filename, 'file')
    error(['El archivo ' filename ' ya existe.'])
end
dos('c40mls -N100 -L8191 -G1 | mlscorr > h.dat');
load h.dat
t=(0:length(h)-1)*1000/48000;

```

```

plot(t(1:2400),h(1:2400))
grid
eval(['save ' filename ' h t']);

```

## A.4. Programa reflexion.m

Una vez que se ha realizado la medición de las notas llamamos a este programa para que nos arroje la función de reflexión.

```

function [R,f,r] = reflexion(arch1, arch2);
%function [R,f,r] = reflexion(arch1, arch2);

eval(['load ' arch1]);
P1=fft([h;0]);
eval(['load ' arch2]);
P2=fft([h;0]);
%load calb;
%P2=calb.*P2;
N=length(P1);
fs = 48000;
f=[0:N-1]'*(fs/N);
fmax=5000;
nmax=round(N*fmax/fs);
orden=8;
w=2*pi*f;
d=0.0143;
c=344;
T=d/c;

A=((P1.*exp(-j*w*T))-(P2.*exp(-3*j*w*T))); %% ./ (1-exp(-4*j*w*T));
B=((P2.*exp(-j*w*T))-(P1.*exp(-3*j*w*T))); %% ./ (1-exp(-4*j*w*T));

R = B./A;

R = fftshift(R);
R = [ R(1) ; (R(2:N) + flipud(conj(R(2:N)))) / 2 ];
%W = [zeros(N/2-nmax,1); hanning(2*nmax+1); zeros(N/2-nmax-1,1)];
W = 1 ./ (1+((f-fs/2)/fmax).^ (2*orden));
R = W .* R;

```

```

R = ifftshift(R);

r=real(ifft(R));
r = r(1:1024);
eval(['save ' arch1 '_exp.dat r -ascii']);

```

## A.5. Gráficas de la función de reflexión.

Este programa se utilizó para obtener las gráficas de la magnitud y fase de la función de reflexión en el dominio del tiempo.

```

function grafica(nota)
%function grafica(nota)

r_mod = load(['Mod/' nota '_mod.dat']);
r_exp1 = load(['Exp-1/' nota 'b1_exp.dat']);
r_exp2 = load(['Exp-1/' nota 'b2_exp.dat']);
r_exp = (r_exp1 + r_exp2) / 2;

R_mod = fft(r_mod);
R_exp = fft(r_exp);

R_mod_mag = 20*log10(abs(R_mod));
R_exp_mag = 20*log10(abs(R_exp));
R_mod_arg = -phase(R_mod)';
R_exp_arg = -phase(R_exp)';

N = length(r_mod);
fs = 48000;
t = (0:N-1)'*1000/fs;
f = (0:N-1)'*fs/N/1000;

clf;
plot(t, r_mod, '-','LineWidth', 1);
axis([0 5 -0.2 +0.2]); hold on;
plot(t, r_exp, '-','LineWidth', 2);
grid;
set(gca, 'LineWidth', 2, 'FontSize', 14);
xlabel('t [ms]', 'FontSize', 14);

```

```

ylabel('r(t)T [Lin]', 'FontSize', 14);
eval(['print -deps ' nota '_rt.eps']);
%pause;

clf;
subplot(2,1,1)
plot(f, R_mod_mag, '- ', 'LineWidth', 1);
axis([0 4 -30 +10]); hold on;
plot(f, R_exp_mag, '- ', 'LineWidth', 2);
grid;
set(gca, 'LineWidth', 2, 'FontSize', 14);
xlabel('f [kHz]', 'FontSize', 14);
ylabel('mag(R)T [dB]', 'FontSize', 14);
title('(a)', 'FontSize', 14);
subplot(2,1,2)
plot(f, R_mod_arg, '- ', 'LineWidth', 1);
axis([0 4 -50 0]); hold on;
plot(f, R_exp_arg, '- ', 'LineWidth', 2);
grid;
set(gca, 'LineWidth', 2, 'FontSize', 14);
xlabel('f [kHz]', 'FontSize', 14);
ylabel('arg(R)T [rad]', 'FontSize', 14);
title('(b)', 'FontSize', 14);
eval(['print -deps ' nota '_rf.eps']);
%pause;
close;

```