



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis de las técnicas para  
determinar la dimensión  
fractal a través de los  
contornos de superficies con  
rugosidad aleatoria**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniera Mecánica**

**P R E S E N T A**

Mariana Galván Coeto

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Carlos Gabriel Figueroa Alcántara



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023

*Para mi abuelo, en cualquier lugar.*

## Agradecimientos

A mi mamá, gracias por ser mi luz, mi pilar y mi guía en la vida, las palabras nunca serán suficientes para ti. A mi papá por dejarme tomarte del dedito y aprender de ti con cada plática, recuerdo y canción; los momentos contigo son infinitos. Gracias a los dos por guiarme en este camino y enseñarme que lo más valioso aparte de una carrera universitaria es el amor, la familia y seguir nuestros sueños. Se todos los sacrificios que hicieron para que yo pudiera escribir este trabajo, es de ustedes con todo mi amor.

A mi hermana por ser mi cómplice de aventuras y la persona que quiero tener a mi lado hasta el fin de los tiempos, sin ti mi vida estaría incompleta. A mi abuela por siempre estar detrás de mí con un abrazo, una charla o una anécdota familiar, tu amor es lo más puro que conozco. A Andrés, gracias por compartir momentos increíbles conmigo y por todas las hazañas que nos quedan por vivir.

A mis grandes amigos por crecer conmigo y enseñarme que las memorias más valiosas se hacen a lado de las personas que te acompañan en los mejores y peores momentos. Les agradezco la confianza, las risas y los sueños compartidos. Nos quedan muchos años para seguir reventándola.

Al Dr. Schouwenaars por ponerme retos desde el primer día y enseñarme a pensar diferente. Al Dr. Figueroa por la confianza depositada en mí, el apoyo y el gran trabajo que hemos realizado juntos. A Jorge Alarcón por enseñarme desde cero qué es la dimensión fractal y aconsejarme en este muy largo camino. A los sinodales por su tiempo y dedicación en la revisión y corrección de este trabajo.

A la UNAM por mostrarme un mundo nuevo en el que la sabiduría siempre apremia y por ser un lugar al que todos podemos pertenecer. Gracias por darme la oportunidad de encontrarme a mí misma.

Agradezco a la DGAPA por el apoyo otorgado mediante los proyectos PAPIIT-IA106720 "Influencia de elementos aleantes en la mojabilidad matriz-partícula en materiales compuestos de matriz metálica. Teoría y experimentos" y PAPIIT-IA103422 "Análisis energético de la compatibilidad tribológica entre materiales metálicos"

Finalmente, gracias a mi abuelo por enseñarme que no existe algo más valioso que aprender y que el amor cruza todas las fronteras de lo material. Por ti realicé este trabajo y sé que has estado en cada paso.

## Contenido

Capítulo 1. Introducción .....	6
1.1 Rugosidad y ondulación.....	7
1.2 Tribología, rugosidad y contacto mecánico.....	9
1.3 Relevancia y tendencias .....	9
1.4 Propósito del trabajo y objetivos .....	10
Capítulo 2. Marco teórico .....	12
2.1 Rugosidad.....	12
2.1.1 Superficies.....	13
2.1.2 Parámetros de medición de superficies.....	14
2.1.3 Análisis fractal.....	20
2.1.4 Medición de la rugosidad.....	25
2.2 Matriz de decisión.....	27
Capítulo 3. Metodología .....	32
3.1 Midpoint Displacement Algorithm .....	32
3.2 Métodos de cálculo de la dimensión fractal .....	34
3.2.1 Método de Yardstick .....	36
3.2.2 Método de Box Count .....	39
3.2.3 Consideraciones sobre los métodos.....	41
3.3 Metodología de análisis. ....	43
3.3.1 Yardstick.....	46
3.3.2 Box Count.....	53
Capítulo 4. Resultados .....	56
4.1 Box Count.....	57
4.2 Yardstick 1. Aproximación por posición de coordenadas .....	63
4.3 Yardstick 2. Aproximación por distancia a una región .....	66
Capítulo 5. Discusión .....	71
Capítulo 6. Conclusión .....	74
Capítulo 7. Bibliografía .....	75

## Capítulo 1. Introducción

El estudio de las superficies de los materiales es un tema que desde finales del siglo XX ha ganado relevancia y que es de vital importancia en el desarrollo de la ciencia y la tecnología. La ingeniería está cada vez más interesada en manipular la superficie de un material, no solo para cambiar su forma y estructura, sino también para controlarla. La superficie influye directamente en el desempeño de un elemento tanto estática como dinámicamente; en su aspecto físico, así como en propiedades mecánicas, eléctricas, térmicas y magnéticas [1] [2].

Un espejo con aplicaciones astronómicas debe cumplir con medidas estrictas de acabado superficial. Para ser de utilidad en su aplicación, debe tener una rugosidad de 3 a 8 Å [3]. El desempeño mecánico de un adhesivo depende en gran medida de la rugosidad de la pieza en la que se emplea; se ha estudiado que entre mayor es la rugosidad de la superficie, mayor será la fuerza de la unión entre el adhesivo y el material [4]. En el área biológica se realizó un estudio que comprobó que la adhesión de células en biomateriales depende profundamente de la rugosidad de estos últimos [5].

Las pruebas de control de calidad, además de comprobar las dimensiones, geometrías o tolerancias, también analizan la rugosidad de las piezas manufacturadas. Estos análisis también ayudan a identificar si los procesos de mecanizado son exitosos para la necesidad que buscan cubrir [2].

La tendencia creciente hacia el estudio de la topografía de un material va de la mano con el desarrollo tecnológico. En la actualidad la ciencia ha permitido tener observaciones nanométricas de las superficies, con lo que es factible estudiarlas a escalas cada vez menores. La incertidumbre de no conocer su estructura se va disminuyendo [6].

De acuerdo con John C. Vickerman e Ian S. Gilmore, una superficie se define como la capa de un elemento que se encuentra en contacto con una fase diferente a la misma. Debido a que cualquier elemento se compone por capas y capas de moléculas o átomos apilados, definir la superficie es complicado; como consecuencia, se determinó que la superficie es la interfaz del material,

aproximadamente del orden de 0.5 a 3 nanómetros, que se considera la medida de dos a diez capas moleculares o atómicas [7]. En casos en los que se aplican recubrimientos o películas, solo se considera como superficie aquel espesor menor a 100 nm. [7]. Con la finalidad de saber la naturaleza de la superficie de un material, se realizan estudios de topografía superficial, composición, estructura química y estructura atómica [1].

La topografía toma en consideración que las superficies nunca son lisas. Todo proceso de mecanizado o de acabado superficial da como resultado una superficie rugosa en mayor o menor medida [1]. La topografía de la superficie se puede analizar como una distribución de ondas de diversas frecuencias y amplitudes que describen puntos máximos y mínimos de altura en una sección de análisis [1].

La rugosidad, en todos sus aspectos, puede deteriorar el desempeño de un componente o mejorarlo. Por lo tanto, no es correcto referirse a la rugosidad como una imperfección de la superficie. Dicho de manera más precisa, es una propiedad que se puede optimizar. Para esto, se requieren métodos de análisis de esta rugosidad y establecer la relación entre rugosidad y funcionalidad.

La micro y nano topografía se define como la desviación existente en una superficie con respecto a un plano de referencia definido matemáticamente o con base en un proceso de medición. Tiene como principales áreas de estudio: la rugosidad, la ondulación, los defectos y las direcciones principales, por ejemplo, como las que se definen en el mecanizado de los materiales [1].

### **1.1 Rugosidad y ondulación**

La rugosidad y la ondulación son los principales parámetros que describen a la textura superficial. Entre estos, la rugosidad es el parámetro más utilizado. La ondulación analiza las irregularidades de una superficie con ondas de longitud larga y con frecuencia media, y es también llamada macro rugosidad. Se debe principalmente a desviaciones de una máquina o pieza de trabajo, vibraciones o tratamiento térmicos en la etapa de producción [1]. La figura 1.1 muestra la diferencia básica entre rugosidad y ondulación de una pieza mecanizada.

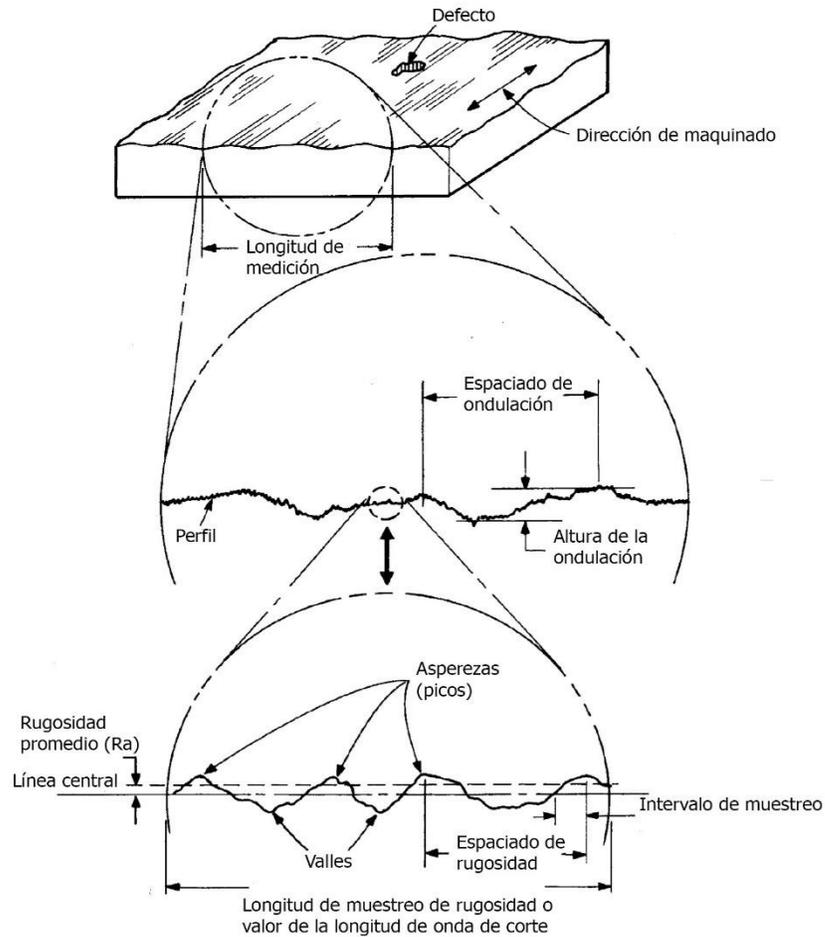


Figura 1.1 Representación esquemática de una superficie [1]

La rugosidad se refiere principalmente al estudio de ondas de una longitud corta y frecuencia alta que se ven representadas como valles y crestas espaciados y de diversas amplitudes. Está generalmente asociada a los procesos de mecanizado o producción [1]. Ha sido estudiada tanto en el campo de la ingeniería de materiales, como en la preservación de obras de arte, así como en implantes médicos, estudios dermatológicos, y piezas arqueológicas [7]. Un ejemplo claro es que gracias a los estudios de rugosidad se puede aplicar y seleccionar la pintura o el pegamento apto para diferentes materiales, desde metálicos, compuestos, o hasta biológicos.

## **1.2 Tribología, rugosidad y contacto mecánico**

La rugosidad tiene una gran trascendencia en la tribología, que se define como la ciencia que estudia la interacción entre dos cuerpos sujetos a un movimiento relativo bajo condiciones de contacto seco. Dicha ciencia toma en consideración el estudio de la mecánica de sólidos, la transferencia de calor, la ciencia de materiales y la mecánica de fluidos, por mencionar algunas [5].

La mecánica de contacto es un campo de especialización de la tribología que investiga la interacción entre superficies sólidas, los esfuerzos generados, el desgaste, la fractura y la falla entre éstas [8]. Debido a que el contacto entre elementos se da en la superficie de los materiales, la rugosidad de estos es un concepto clave para su entendimiento [9]. Se puede observar la gran relevancia del estudio tribológico de los materiales en todas las aplicaciones de la ingeniería, debido a que los elementos en movimiento y contacto definen lo que es un mecanismo.

## **1.3 Relevancia y tendencias**

En la actualidad los estudios topográficos tienen un problema fundamental que está relacionado directamente con los instrumentos de medición y con los parámetros utilizados para medir la rugosidad. En primera instancia, varios autores mencionan que los instrumentos que se usan para la medición de rugosidad no estiman el mismo valor. Existe una extensa incertidumbre en las mediciones de rugosidad, puesto que las diferencias pueden ser mayores al 10%. Aunado a esto, no existe forma de comprobar qué medición es la correcta [7].

Por otro lado, la mayor parte de los parámetros que evalúan la rugosidad de una superficie son dependientes de la zona de muestreo, el perfil o área de análisis. Eso quiere decir que la muestra puede o no ser representativa de la superficie total o que la repetibilidad de resultados por una persona externa no sea posible. En ese mismo contexto, el análisis completo de una superficie necesita más de un parámetro, puesto que cada uno describe información diferente de la superficie.

Existen parámetros de amplitud, espaciamiento e híbridas, los cuales serán detallados más adelante [10].

En la actualidad se busca disminuir el número de parámetros necesarios para describir una superficie, y encontrar un parámetro que no dependa del área de muestreo. Una de las soluciones más prometedoras ha sido a través del análisis fractal, que desde la segunda mitad del siglo XIX ha estado en constante desarrollo [10]. Su uso en la ciencia de materiales ha abarcado desde el análisis de fracturas de piezas de ingeniería, hasta los análisis de rugosidad [10].

#### **1.4 Propósito del trabajo y objetivos**

Este trabajo tiene como finalidad realizar un estudio comparativo de métodos de obtención de la dimensión fractal. Se analizarán superficies simuladas por Midpoint Algorithm a las cuales se les calculará la dimensión fractal por el método de Yardstick y Box Count. Se analizarán los resultados, se compararán entre ellos y se propondrán rangos de uso. A su vez, se realizará una extensa investigación sobre procesos de acabado superficial y manufactura de los que se obtengan superficies aleatorias con la finalidad de poder extender este trabajo a una investigación experimental en el futuro.

A continuación, se explicará brevemente la estructura de la presente tesis. El segundo capítulo comprende el marco teórico en el que se explica a profundidad el tema de rugosidad. En primera instancia se expone la definición de rugosidad, los parámetros comúnmente utilizados para su descripción y se plantea el estudio de la rugosidad por medio de la dimensión fractal. Consecutivamente, se mencionan los procesos de mecanizado que generan superficies con rugosidad aleatoria y se presenta una matriz de decisión para seleccionar el proceso más adecuado para este estudio.

En el tercer capítulo se aborda la metodología a seguir para el cálculo de la dimensión fractal por los métodos antes mencionados, se explicará a profundidad Yardstick y Box Count, así como la paquetería elaborada. El cuarto capítulo describe

los resultados obtenidos, la síntesis de los análisis de rugosidad y la comparativa de los métodos. Finalmente, se concluye sobre este estudio.

**Los objetivos del presente trabajo son:**

- a) Desarrollar un programa en Wolfram Mathematica para calcular la dimensión fractal de superficies rugosas simuladas a partir del Midpoint Algorithm.
- b) Comparar los dos métodos de cálculo de la dimensión fractal propuestos, sus alcances, así como sus áreas de oportunidad.
- c) Analizar y concluir sobre los resultados obtenidos comparándolos con los valores teóricos de la simulación.

## **Capítulo 2. Marco teórico**

En este capítulo se definirán los conceptos más relevantes para esta investigación. Se abordarán tres temas principales relacionados con los objetivos de este trabajo.

Se detallará el estudio de la rugosidad, los parámetros comunes que se usan para medirla, haciendo especial énfasis en el estudio de la dimensión fractal. Se mencionarán los instrumentos que se usan cotidianamente para la medición de rugosidad, así como las técnicas de manufactura que generan superficies con rugosidad aleatoria. Se abordará el proceso de mecanizado sugerido para la experimentación.

### **2.1 Rugosidad**

Como se mencionó en los capítulos anteriores, la rugosidad se define como la variación de alturas en un perfil o superficie con respecto a una línea o plano de referencia [1]. Estas desviaciones de altura se pueden representar también como una distribución de crestas y valles, como en el caso de las ondas. El estudio de la rugosidad considera parámetros que relacionan la amplitud de estas desviaciones, así como su frecuencia en el área de muestreo [1].

Por otro lado, el estudio de la rugosidad se realiza de manera estadística, principalmente debido a que las mediciones se hacen en una línea o área de muestreo representativo de la superficie. A partir del análisis de esta zona de muestreo se puede encontrar la distribución de las diferencias de alturas y, así, extrapolar la rugosidad medida hacia toda la superficie. Es importante mencionar también, que algunos de los parámetros de análisis son dependientes del área o perfil de muestreo, mientras que otros pueden describir la superficie de manera independiente [11].

Los estudios topográficos tanto de relieves terrestres como de superficies de ingeniería han probado que estas tienen una naturaleza multiescala. Esta naturaleza hace referencia a que la rugosidad en sí misma es un conjunto de rugosidades superpuestas a diferentes escalas. Este fenómeno multiescala tiene

como consecuencia que la medición de la rugosidad dependa de la resolución del instrumento de medición, ya que esto define la escala que se está observando. La tendencia en la topografía es encontrar un parámetro que caracterice la rugosidad de una superficie en todas sus escalas [11].

### 2.1.1 Superficies

Las superficies sólidas se pueden categorizar de acuerdo con la distribución de rugosidad que presentan. Las distribuciones que se analizarán en este estudio están íntimamente relacionadas con diversos procesos de mecanizado. Dependiendo del tipo de proceso que se lleve a cabo sobre una superficie, se puede predecir la distribución que presentará [1]. El siguiente diagrama muestra la tipología general de las superficies sólidas.

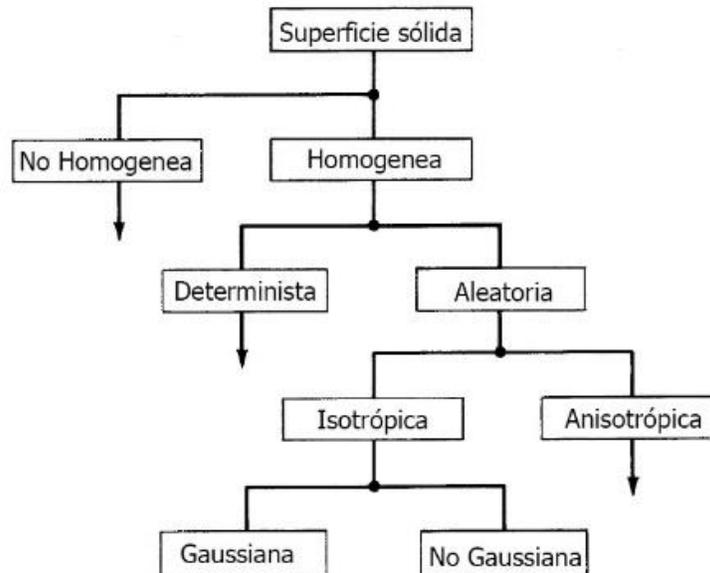


Fig. 2.1 Tipos de Superficies sólidas [1]

Se observa de la figura que hay dos principales tipos de superficies. Las no homogéneas que varían drásticamente de una zona a otra, y las homogéneas, a las que se les puede encontrar una distribución. Analizando de forma general esta

tipología, una superficie determinista, es aquella que tiene un patrón definido de desviación, resultado de la repetición de una textura definida, como en el caso del moleteado. Por otro lado, las superficies que carecen de un patrón conocido se definen como aleatorias.

Dentro de los procesos aleatorios, aquellos que son isotrópicos tienen como característica ser uniformemente aleatorios, no tienen una distribución dependiente del sentido de medición o área de muestreo. Por otro lado, una superficie anisotrópica tiene un sentido preferente de distribución, generalmente generado por procesos donde la herramienta o proceso de mecanizado tiene una trayectoria definida. Tal es el caso de procesos como el torneado, fresado y rectificado. Estos procesos dan como resultado una superficie anisotrópica y no Gaussiana.

También existen procesos cuya distribución de alturas es acumulativa, donde la forma final de una zona es resultado de la distribución aleatoria de eventos discretos, e independiente de la distribución de cada evento. Este proceso aleatorio tiene una distribución Gaussiana y se encuentra principalmente en procesos de lapeado, electropulido o granallado [1]. Para este trabajo, este tipo de superficies son las de interés para su estudio.

### **2.1.2 Parámetros de medición de superficies**

Independientemente del tipo de superficie de análisis, los parámetros de medición son los mismos, en casi todos los casos. Estos se dividen en tres grandes grupo: los parámetros de amplitud, de espaciamento y los híbridos, que conjuntan los dos primeros grupos [1] [11].

Es importante mencionar que las mediciones se pueden hacer de dos formas, sobre una línea de muestreo o en una superficie de muestreo [1]. Los parámetros en general están diseñados para mediciones de perfiles (una sola línea de análisis), pero se extrapolan a superficies, siendo las superficies múltiples líneas paralelas consecutivas [10]. Debido a que los parámetros de amplitud y espaciamento no atañen este estudio se dará una descripción general y se presentarán solo algunos parámetros de cada tipo.

## Parámetros de amplitud

Los parámetros de amplitud miden las desviaciones verticales de una superficie [10]. Únicamente miden las alturas de cada punto, y son los más usados para la descripción topográfica de una superficie. Si bien los parámetros de amplitud pueden describir la distribución de alturas, no son capaces de dar información acerca de pendientes, formas o tamaños de asperezas, la frecuencia o la regularidad de éstas. Debido a esto, muchas veces no son suficientes para describir completamente una superficie [1].

- Media aritmética de alturas o rugosidad promedio (Ra o CLA).

Mide la desviación de alturas con respecto a una línea media de referencia sobre la longitud de muestreo, como se muestra en la figura 2.2 [10]. El plano o línea de referencia se define como la línea que tiene la misma cantidad de área del perfil por debajo y sobre ella [1].

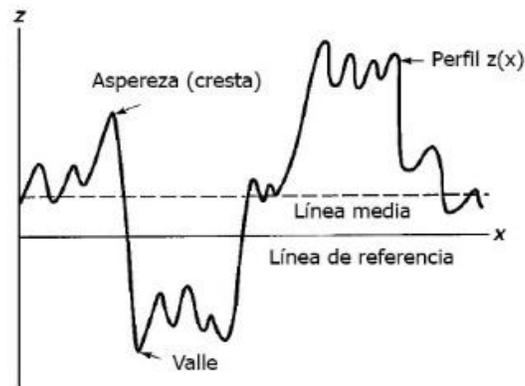


Fig. 2.2 Perfil de una superficie [1]

La media aritmética se calcula con las siguientes fórmulas.

$$R_a = \frac{1}{L} \int_0^L |y(x)| dx \quad (1)$$

$$R_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y(i)| \quad (2)$$

La media aritmética es un parámetro muy utilizado para caracterizar superficies que tuvieron un mismo proceso de mecanizado y cuya descripción no necesita ser muy extensa. No da información alguna sobre longitud de onda y no es sensible a cambios pequeños de alturas. Da una descripción somera de las variaciones de altura y depende de la longitud de muestreo [12] [10].

Algunos procesos de mecanizado arrojan valores conocidos de Ra, por ejemplo: una superficie cortada con soplete puede tener un Ra aproximado de 50 µm, la extrusión de 10 µm y el electropulido de 0.1 µm [12].

- Media cuadrática (RMS o Rq)

Este parámetro mide el promedio de las desviaciones cuadráticas con respecto a la línea media [12]. Se conoce como la desviación estándar de las alturas de la superficie y es uno de los parámetros que analiza estadísticamente la distribución del área de muestreo [10]. Es más sensible a los cambios de altura que Ra [10] y se calcula a partir de las ecuaciones 3 y 4.

$$Rq = \frac{1}{l} \sqrt{\int_0^l \{y(x)\}^2 dx} \quad (3)$$

$$Rq = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N yi^2} \quad (4)$$

En casos en los que las variaciones de altura son poco significativas Ra y Rq pueden ser intercambiables. Para el caso de superficies Gaussianas, la relación entre Ra y Rq se describe con la ecuación 5:

$$Rq \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} Ra \quad (5)$$

## Parámetros de espaciamiento

Estos parámetros tienen la virtud de medir las características horizontales de un perfil de rugosidad. A continuación, se describirán algunos de los principales parámetros.

- Cuenta de picos (Pc)

Parámetro relevante para procesos de formado, aplicación de pintura y recubrimientos. Se proyectan dos líneas paralelas a una misma distancia por arriba y por debajo de la línea media (denominadas bandas), y se determina la cantidad de intersecciones del perfil con estas dos líneas por lo menos dos veces. El resultado se da como el número de picos por unidad de longitud en el área de análisis [10]. La figura 2.3 presenta gráficamente este procedimiento.

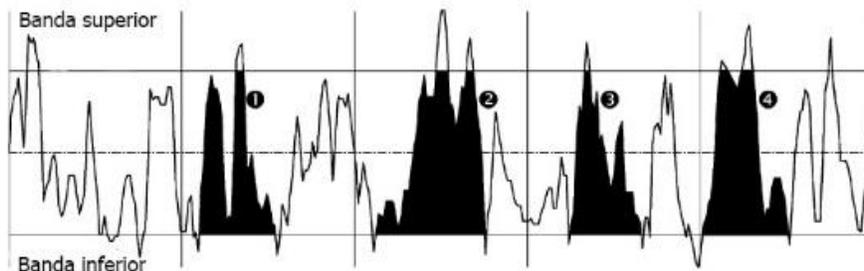


Fig. 2.3 Representación esquemática de la cuenta de picos [10]

- Espaciamiento promedio de picos locales adyacentes (S)

Como su nombre lo indica, se define a partir de la distancia promedio que existe entre los picos locales consecutivos. Un pico local se define como la zona más alta que se encuentra entre dos puntos mínimos adyacentes. Se calcula por medio de la siguiente ecuación [11]:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n S_i \quad (6)$$

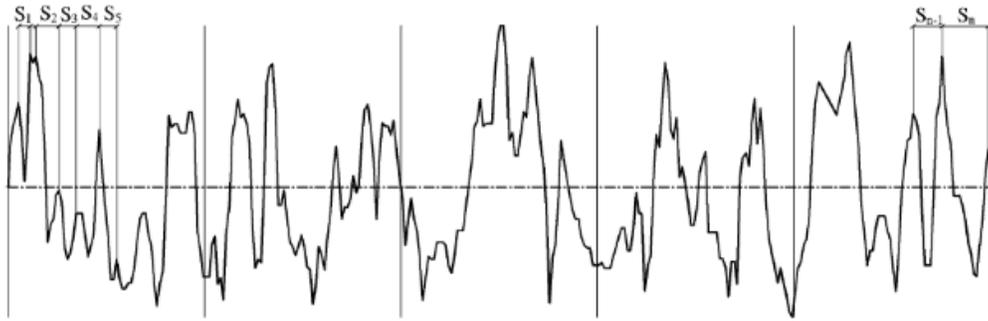


Fig. 2.4 Esquema del espaciamiento promedio de picos locales adyacentes [10]

La figura 2.4 muestra cómo se observan los picos  $S_i$  en una superficie.

- Radio promedio de las asperezas ( $r_p$ )

Se calcula obteniendo el promedio del radio de la curvatura de todas las asperezas en el perfil de medición ( $r_{pi}$ ). A partir de la siguiente ecuación, donde  $y$  representa la altura y  $l$  la longitud de muestreo [10]:

$$r_{p_i} = \frac{2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}}{l^2} \quad (7)$$

Por consiguiente, el promedio de los radios es:

$$r_p = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{r_{p_i}} \quad (8)$$

### Parámetros híbridos

Como su nombre lo indica, estos parámetros son una combinación de los parámetros de amplitud y de espaciamento. Son ampliamente utilizados en estudios tribológicos donde caracterizar completamente a una superficie es esencial [10].

- Pendiente media del perfil ( $\Delta_a$ )

Para este parámetro, se debe calcular la pendiente entre cada punto consecutivo sobre una línea de medición y luego obteniendo el promedio de todas estas. El valor de la pendiente media del perfil se ve afectada por fenómenos de desgaste, contacto, lubricación hidrodinámica, entre otros.

El valor del parámetro se calcula por medio de la siguiente ecuación [10]:

$$\Delta_a = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\delta_{yi}}{\delta_{xi}} \right| \quad (9)$$

- Longitud de onda promedio ( $\lambda_q$ )

Considera los efectos espaciales y de amplitud de los picos y valles para calcular el espaciamento entre ellos, a partir de parámetros antes definidos [10]. En este caso relaciona el parámetro que calcula la pendiente promedio y la altura promedio a lo largo de todo el perfil.

$$\lambda_q = \frac{2\pi R_a}{\Delta_a} \quad (10)$$

### 2.1.3 Análisis fractal

Para solucionar la problemática mencionada anteriormente, se ha abordado el estudio topográfico con diferentes perspectivas que permiten analizar la superficie independientemente del instrumento y de la longitud de muestreo. Una de estas alternativas es estudiar la rugosidad a través de la geometría fractal.

Los fractales fueron descubiertos por el francés Benoît Mandelbrot a finales del siglo XX cuando el científico trataba de comprender la geometría que gobierna a la naturaleza. Mandelbrot notó que varias formaciones naturales no se pueden describir correctamente a través de la geometría euclidiana, pues la considera una aproximación simplificada. Tal es el caso de las costas, Mandelbrot observó que la medición del perímetro de una costa es dependiente del instrumento de medición que se use y que conforme dicho instrumento tenga una escala menor se descubren más detalles y la longitud total medida es mayor. Este fenómeno se conoce como *La paradoja de las líneas de costa* y se representa gráficamente en la figura 2.5 [13].

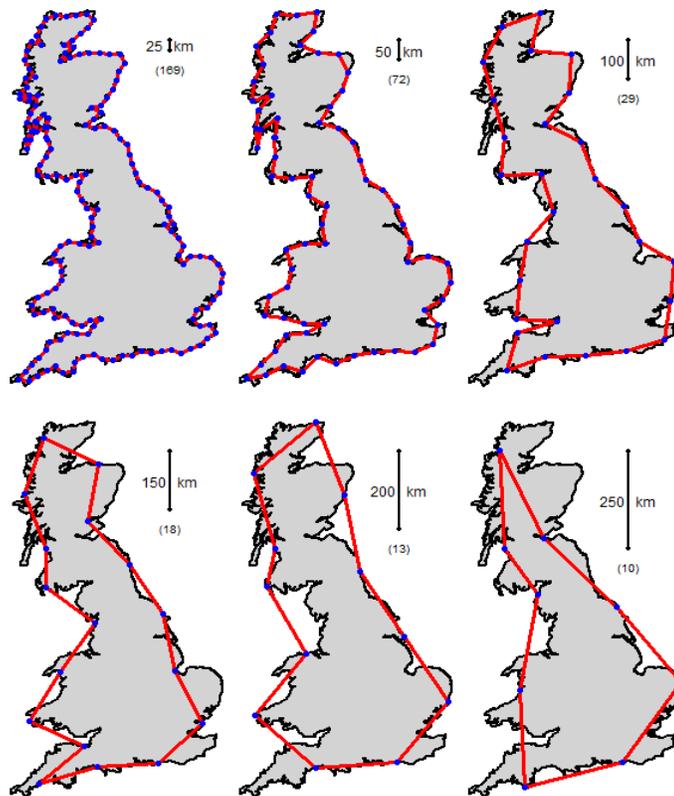


Fig. 2.5 Representación de la medición de una costa [11]

Otra característica de este tipo de fenómenos es que a pesar de que las observaciones o mediciones se escalen, siempre tienen una tendencia a parecerse a la superficie “original” sin escalar. Estas dos peculiaridades definen a la autosimilitud, una propiedad intrínseca de la geometría fractal [14].

La autosimilitud representa un caso particular en el que la escala en cualquier dirección tiene el mismo resultado de detalle como de semejanza a la observación “original”. En el sentido matemático, las superficies son estadísticamente autosimilares cuando a diferentes direcciones y escalas los parámetros estadísticos son los mismos. Se presenta también el caso en el que una misma escala en diferentes direcciones no presenta este comportamiento, y es necesario tener una escala diferente en cada dirección para obtener las observaciones de autosimilitud. A este fenómeno se le conoce como autoafinidad. Es importante conocer cuál es el caso en el análisis fractal para poder hacer la aproximación correcta. Se ha demostrado que en el estudio de la topografía el comportamiento es en su mayoría autoafín [15] [16] [17].

Matemáticamente la autosimilitud y autoafinidad están dadas por [15]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \lambda x \\ Z(x) \rightarrow \mu Z(x) \end{array} \right\} \quad (11)$$

Donde se observa que al escalar una variable, en este caso  $x$ , la función de  $x$ ,  $Z(x)$ , también se escala pero con otro valor. Dicho valor está representado por una función de tipo:

$$\mu = \lambda^H \quad (12)$$

Donde  $H$  es el exponente de rugosidad de Hurst, el cual varía entre uno y cero (será abordado a detalle posteriormente). Para casos en los que se analiza autosimilitud  $H$  tiene un valor igual a uno y entonces se cumple que  $\lambda = \mu$  y, por lo tanto, es el mismo valor de escalamiento en las dos direcciones. Se sabe también que  $Z(x)$  es estadísticamente invariante cuando se cumplen las ecuaciones antes mencionadas [15].

Algunos de los parámetros que se obtienen por este método de análisis de la rugosidad son: la dimensión fractal ( $DF$ ) y el exponente de Hurst ( $H$ ), ambos pueden describir a una superficie independientemente de la longitud de muestreo y rango. A continuación, se describirá cada uno de ellos.

### **Dimensión fractal, $DF$**

De acuerdo con Benoît Mandelbrot, la dimensión fractal se desarrolló a partir de la percepción de que una línea de longitud  $L$  puede ser subdividida en varias partes de un mismo tamaño  $N$ . La suma de cada una de estas partes da el total de longitud de esta línea con la relación  $r = \frac{L}{N}$ . En este análisis la dimensión de la línea está dada por:

$$D = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log N}{-\log \left( \frac{1}{r} \right)} \quad (13)$$

Para una línea o curva este resultado es uno. Si se hace el mismo análisis, pero en el caso de una superficie, como la superficie de un cubo o de una esfera, la dimensión será dos. Esto define a la geometría euclidiana, donde las dimensiones siempre son números enteros y las figuras con las mismas características (líneas, superficies o volúmenes) tienen la misma dimensión (1,2 y 3, respectivamente) [14].

Por otro lado, en el comportamiento fractal la dimensión se calcula con la ecuación antes descrita, pero el resultado no es un número entero. Existe la posibilidad de calcular una dimensión con números fraccionarios. Si se estudia por ejemplo una línea o curva, la dimensión se encontrará entre 1 y 2, y en una superficie entre 2 y 3. La parte fraccionaria se puede considerar como la tendencia que tiene un elemento a transformarse a la siguiente dimensión [18].

## Exponente de Hurst ( $H$ )

En el modelado de procesos aleatorios se busca conocer el valor de una variable aleatoria a lo largo del tiempo, donde el valor en un tiempo  $t$  depende del estado inicial, pero también de todo el comportamiento de la variable desde el estado inicial hasta el tiempo  $t$ . El estudio de estos fenómenos desarrolló el concepto de proceso estocástico. Este concepto fue acuñado por el ruso Andrei Kolmogorov en 1933, y fue definido por Joseph Doob en 1953 como: "Cualquier proceso a lo largo del tiempo que se rige por las reglas de la probabilidad... específicamente cualquier familia de variables aleatorias  $X_t$  donde una variable aleatoria es simplemente una función medible" [19].

Uno de los procesos estocásticos más conocidos es el movimiento fractal Browniano (fBm, por sus siglas en inglés), y que ha sido estudiado en varias áreas del conocimiento como la economía y la ingeniería. Pentland encontró que muchos modelos físicos se comportan a través de la función Browniana [20]. Esta función tiene como características: ser auto-afín y dependiente en un rango amplio de análisis. La relación estadística del fBm está dado por [15]:

$$\text{var} \langle (Z(t_1) - Z(t_2))^2 \rangle \propto |t_1 - t_2|^{2H} \quad (14)$$

Y la probabilidad está dada por:

$$\text{probabilidad} \left\{ \frac{Z(t + \Delta) - Z(t)}{|\Delta|^H} < x \right\} = F(x) \quad (15)$$

Donde  $F(x)$  es la función de distribución de la variable  $x$ .

El exponente de Hurst,  $H$ , es el único parámetro necesario para describir a esta función, y describe funciones continuas que no son diferenciables, como la función de Weirstrass. Esto en una superficie significa que conforme la escala se disminuye y se encuentran más detalles de la rugosidad, es imposible encontrar un límite de escala que tienda a cero. Con este parámetro se estudia la tendencia de dicha

función a ser discontinua cuando  $H$  vale 0 y a ser diferenciable cuando vale 1 [15]. Por esta razón el intervalo de valores que  $H$  puede tomar está determinado por  $0 < H < 1$ . Esto se extrapola a que una superficie con un exponente de Hurst igual a uno tiende a ser completamente lisa; conforme disminuye el exponente, aumenta la rugosidad de la superficie [15]. Otra aproximación que se hace sobre el comportamiento del exponente de Hurst tiene que ver con la probabilidad de la tendencia de la variable. Cuando  $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  se dice que si la tendencia de la variable es a disminuir es más probable que en el futuro aumente, y viceversa. Por otro lado si  $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  la tendencia a aumentar o disminuir, probablemente continúe así [21].

El exponente de Hurst está relacionado con la dimensión fractal  $DF$  por medio de la siguiente ecuación:

$$DF = E + 1 - H \quad (16)$$

Donde  $E$  es la dimensión euclidiana del fenómeno analizado. Si se trata de un perfil de rugosidad  $E = 1$ , y para una superficie  $E = 2$  [15].

Se puede observar que si se considera un perfil:

$$DF = 1 + 1 - H \quad (17)$$

Y se analizan los casos extremos del exponente de Hurst:

Para  $H = 1 \rightarrow D_F = 1$ , definiendo una línea continua y diferenciable, con una dimensión entera puramente euclidiana, que se puede relacionar con una superficie lisa. Para  $H = 0 \rightarrow D_F = 2$  describe una línea discontinua y no diferenciable, representando la tendencia de la línea a ocupar el espacio de la siguiente dimensión, el plano. Este resultado se puede extrapolar a una superficie considerablemente rugosa.

Otra virtud del estudio de la rugosidad a través de la dimensión fractal es que, al analizar un perfil, se puede extrapolar el valor de la dimensión fractal hacia la

superficie, y viceversa. Esto se logra al intersecar la superficie con un plano paralelo en la dirección normal. La dimensión fractal de una superficie se puede calcular sumándole la unidad a la dimensión fractal del perfil. En sentido inverso se le resta la unidad a la dimensión fractal de la superficie para obtener la dimensión del perfil [18]. Esto es de especial interés debido a que partir del análisis de un contorno o isolínea, se puede obtener la dimensión fractal de toda la superficie.

#### 2.1.4 Medición de la rugosidad

Existen diversas técnicas que se utilizan para la medición de la rugosidad, éstas se pueden catalogar dependiendo del principio físico que utilicen, la tecnología de medición o el rango de análisis. En el caso del rango de análisis, se pueden hacer mediciones en escala milimétrica, micrométrica o nanométrica. Las mediciones nanométricas se pueden realizar por medio de difracción de electrones de baja energía, métodos de haz molecular y microscopía de fuerza atómica. Para mediciones micrométricas se pueden utilizar métodos de contacto u ópticos [1].

A continuación, se hará una descripción de la medición de la rugosidad por medio de perfilometría óptica y de microscopía de fuerza atómica debido a que son las dos técnicas a disposición.

- Perfilometría óptica, técnica de cromática confocal

Esta técnica se utiliza para medir la topografía de una superficie por medio del análisis del reflejo de un haz de luz sobre la muestra. Primero se hace incidir un rayo de luz sobre la superficie, se refleja en esta, y es posteriormente detectado por

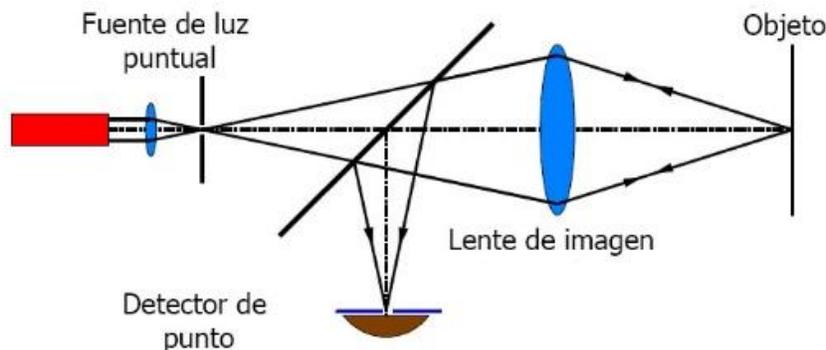


Fig. 2.6 Representación esquemática de la técnica cromática confocal [21]

un sensor. Este sensor usa una lente con alta aberración cromática: la luz con longitudes de onda distinta se enfoca a distancias distintas. Al detectar el color de la luz reflejada, se puede detectar la distancia hasta el punto focal. De esta forma se pueden medir las diferentes alturas de la topografía de la muestra. Este método tiene la limitante de solo poder medir superficies reflejantes y con una rugosidad micrométrica [22]. La figura 2.6 muestra una representación esquemática de la técnica de cromática confocal.

- Microscopía de fuerza atómica (AFM, por sus siglas en inglés)

El microscopio de fuerza atómica se usa para la medición de superficies con una rugosidad nanométrica. La medición se lleva a cabo a través de una micro viga en cantiléver con una punta de entre 5 y 50 nm de longitud. En el modo de contacto, la muestra se traslada y la superficie de análisis entra en contacto con la punta del elemento. Las fuerzas que actúan entre la punta y la pieza generan una deflexión en la viga, la cual se mide por medio de un láser que se incide sobre el cantiléver.

El láser es emitido por un diodo y es direccionado por un prisma hacia la parte de atrás del cantiléver. El láser es reflejado y es direccionado por un espejo hacia un fotodetector. El cambio de altura en la superficie se observa como una deflexión del cantiléver y es detectada por el fotodetector a través del cambio de intensidad del láser. La resolución vertical del mapa topográfico puede ser menor a 0.1 nm y una

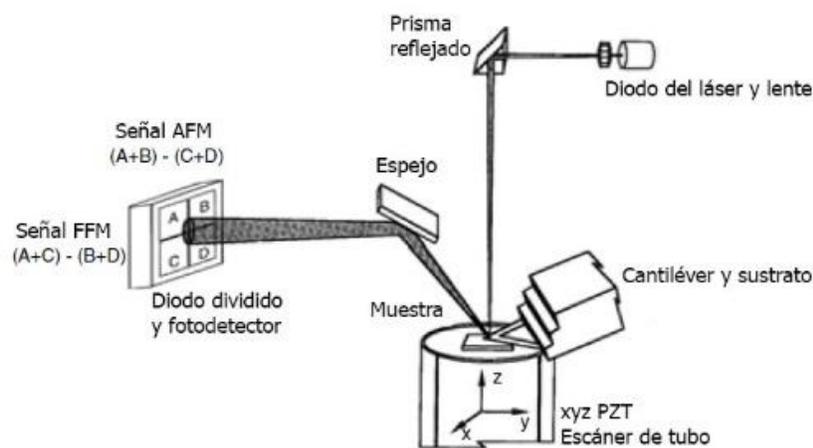


Fig. 2.7 Representación esquemática del AFM [1]

resolución lateral de aproximadamente 1 nm. Se puede analizar un área de escaneo desde 0.7  $\mu\text{m}$  hasta 125  $\mu\text{m}$  [1] [22].

## 2.2 Matriz de decisión

A continuación se presenta una matriz de decisión con la cual se busca comparar diversas técnicas de mecanizado superficial con la finalidad de definir aquél propio para una investigación experimental posterior.

La matriz de decisión se conforma de varios parámetros y a cada uno de estos se les otorgó una calificación entre uno y cinco, siendo cinco el valor con mayor significancia. Los parámetros que se consideraron son los siguientes:

- **Disponible:** Hace referencia a que se cuente con el equipo necesario para realizar la técnica. Se dará un valor de 5 a aquellos con los que se cuente en la UDIATEM, 4 a los disponibles en la FI, 3 que estén en algún laboratorio de la UNAM, 2 si es posible ocuparlos a través de un grupo de investigación o empresa con la que se colabore y 1 para cualquier otro caso.
- **Medible** Se refiere a que se cuente con el equipo indispensable para medir la rugosidad generada, preferentemente en el AFM o el perfilómetro de acuerdo con la investigación realizada.  
Solo se califica con valor igual a uno o cinco, refiriéndose a que se tiene o no el equipo necesario; o se puede o no medir la rugosidad con los instrumentos disponibles.
- **Bajo costo:** Se busca que el proceso utilizado sea del menor costo posible, ya que de esto depende la cantidad de experimentos que se pueden llevar a cabo. El uso del equipo, los recursos necesarios para llevar a cabo el procedimiento (gases, compuestos químicos, etc.), el material apto para cada técnica, entre otros factores, serán evaluados en este rubro.  
En el límite de costo mínimo se encuentra el lapeado y el de máximo costo están el granallado láser, PVD y mecanización por rayos láser.

- Innovación científica y tecnológica: Es importante que este estudio sea de relevancia para la industria y la investigación, así mismo que tenga oportunidad de desarrollo. Se considerará relevancia cada proceso en la industria, y si se sigue haciendo investigación sobre el tema.  
Los métodos más innovadores, recientes y los que en la actualidad tienen un amplio campo de investigación son el granallado láser y la mecanización por rayo láser. Por otro lado, el menos innovador es el lapeado.
- Utilidad: Es de particular interés que el proceso tenga el mayor impacto posible en varias industrias, y que sea utilizado en diversos productos, herramientas o piezas. Se analizará también si la técnica solo se usa para mecanizar, dar acabado superficial o para la generación de recubrimientos. Se considera que los recubrimientos son de mayor utilidad debido a que tienen gran influencia en las posibles funciones de un material.  
Los procesos que resultaron tener un mayor impacto en la industria son el PVD, la proyección térmica y la electrodeposición, siendo esas tres usadas como técnicas de aplicación de recubrimientos. Se considera a los menos útiles el lapeado y el electropulido.
- Facilidad: Es necesario que el proceso seleccionado no requiera un amplio conocimiento técnico y que pueda ser reproducido varias veces. En cuanto a este parámetro, de nuevo el lapeado es el más sencillo de llevar a la práctica, mientras que la mecanización por rayos láser, PVD, y el granallado láser son aquellos que son los más complejos de realizar.

Matriz de decisión por proceso de mecanizado						
Procesos	Disponible	Medible	Bajo costo	Innovación tecnológica y científica	Utilidad	Facilidad
Lapeado	4	5	5	1	1	5
Electropulido	5	5	4	2	1	4
Mecanizo por rayos láser	4	1	1	5	4	1
Electroerosión	5	1	3	3	4	3
Granallado láser	1	1	1	5	3	1
Pulverización catódica	4	5	3	4	5	2
Electrodeposición	5	5	4	3	5	4
Proyección térmica	4	5	3	3	5	4
PVD/CVD	4	1	1	5	5	1

Posteriormente, a cada uno de los parámetros se le dio un peso de relevancia. Por ejemplo, es de mayor importancia que el equipo esté disponible en la UNAM a que sea de bajo costo. Se debe multiplicar el valor dado a cada parámetro por el peso que tiene dentro de la matriz de decisión. Consecuentemente se realiza la suma por proceso de cada uno de los parámetros previamente multiplicados y el proceso con el valor más alto es el método óptimo para este trabajo.

Matriz de decisión con ponderación							
Procesos	Ponderación						Puntuación
	4	5	4	3	4	5	
	Disponible	Medible	Bajo costo	Innovación tecnológica y científica	Utilidad	Facilidad	
Lapeado	16	25	20	3	4	25	93
Electropulido	20	25	16	6	4	20	91
Mecanizo por rayos láser	16	5	4	15	16	5	61
Electroerosión	20	5	12	9	16	15	77
Granallado láser	4	5	4	15	12	5	45
Pulverización catódica	16	25	12	12	20	10	95
Electrodeposición	20	25	16	9	20	20	110
Proyección térmica	16	25	12	9	20	20	102
Deposición química de vapor	26	5	4	15	20	5	75

De la tabla anterior se puede observar que los procesos con mayor puntuación resultaron la electrodeposición, proyección térmica y pulverización catódica. Basándose exclusivamente en la puntuación más alta, el electrodepósito es el método seleccionado para su análisis.

La electrodeposición es el proceso inverso del electropulido [26]. En este caso, en lugar de remover material de la pieza de trabajo el material se deposita por medio, también, de una reacción de oxido-reducción. Este proceso se utiliza para la adhesión de recubrimientos que tiene como objetivo lograr que la superficie del material tenga propiedades diferentes a las del volumen total.

Estos recubrimientos pueden lograr que el área superficial aumente la resistencia a la corrosión, o que tenga propiedades electromagnéticas; también es posible aumentar la dureza o disminuir la fragilidad del material en esta zona. Aunado a esto, la electrodeposición logra cambiar la apariencia física del material, por lo que también se considera un proceso de acabado superficial. Algunos ejemplos de su uso son: la electrodeposición de cobre en acero para prevenir el endurecimiento superficial, los recubrimientos de plata en vajillas para cambiar el acabado superficial, y el electrodepósito de zinc a elementos de acero para evitar la corrosión [23].

El proceso de electrodeposición también se constituye por medio de una celda eléctrica donde ahora el material de trabajo funciona como el cátodo, un ánodo de elección, soluble o inerte, y un electrolito, llamado baño.

En este caso se hace pasar la corriente eléctrica, que puede ser directa o pulsante, a través de la celda desde el ánodo hacia el cátodo, y, debido al proceso de electrólisis presente en el baño, los iones hidratados migran hacia el material base (cátodo) y se difunden en la superficie. Los iones difundidos en el material forman un recubrimiento con las propiedades superficiales deseadas [23].

En la actualidad se ha logrado hacer electrodepósito en polímeros (materiales generalmente no conductores de electricidad) que tiene una gran presencia en componentes electrónicos, en la composición de nanomateriales, y hasta en la industria farmacéutica. Es un proceso en constante evolución y con aplicaciones en varias áreas de la industria [23] [29].

En el caso de la rugosidad, esta depende, como lo es en el caso del electropulido, del recubrimiento deseado y de los elementos involucrados. Se sabe que existe una gran dependencia entre la rugosidad y factores como la densidad de corriente de la celda, las características del baño, el tipo de corriente que se utilice, entre otros parámetros. La electrodeposición se considera un método de bajo costo y de fácil implementación en los laboratorios de la facultad [30].

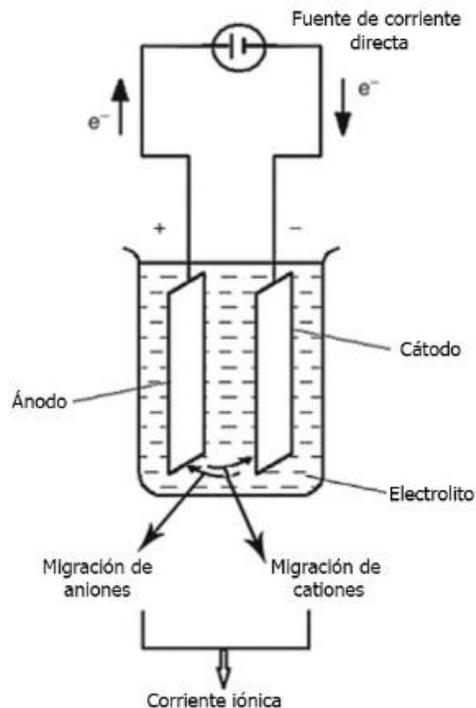


Fig. 2.11 Esquema de electrodeposición [28]

Cabe indicar que, durante la elaboración de la tesis, no fue posible seguir con el trabajo experimental. Por lo tanto, la matriz de decisiones se presenta aquí como una base de trabajos a futuro y la tesis se enfoca en los aspectos teóricos y de desarrollo de paquetería. En los trabajos futuros, se puede expandir la matriz de decisiones mediante la inclusión de otras técnicas de modificación superficial y criterios de evaluación adicionales. También se puede refinar el resultado con una evaluación crítica de los coeficientes de ponderación utilizados.

## Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se describirán los métodos de cálculo de la dimensión fractal, así como la naturaleza de las superficies generadas para su análisis. En la primera parte se especifica el método de simulación de las superficies de análisis, posteriormente se abordan los métodos de cálculo de la dimensión fractal de forma teórica. Al final del capítulo se explica detalladamente el programa desarrollado por la tesista, basado en los antecedentes previamente descritos.

### 3.1 Midpoint Displacement Algorithm

La simulación de superficies se realizó con el algoritmo *Random Midpoint Displacement*. Este algoritmo surgió como un método sencillo de generación de superficies fractales aleatorias. Se ha utilizado para la simulación de terrenos en videojuegos 3D, análisis orográficos y de la evolución y movimiento de las nubes. Fue desarrollado en la década de 1920 por N. Wiener para simular el movimiento fraccional Browniano [36] [37] [38].

El algoritmo se desarrolla de acuerdo con los siguientes pasos [37]:

1. Se genera un cuadrado de  $m * m$  en el plano XZ.
2. Se subdivide cada lado del cuadrado a la mitad para generar una cuadrícula con cuatro cuadrados iguales.
3. La subdivisión genera cinco nuevos vértices a los cuales se les debe asignar un desplazamiento aleatorio en dirección Y, lo que corresponde a una altura. El valor de la altura se obtiene de una distribución gaussiana cuya desviación estándar es proporcional a  $f^n$ , donde  $f=2^{D-3}$  y  $n$  el paso en la subdivisión del área, de tal manera que los incrementos de la altura disminuyen a medida que la superficie se refina, ya que  $0 < D-3 < 1$
4. Se subdivide nuevamente para generar cuadrados más pequeños, y se repite el proceso un determinado número de iteraciones.

A continuación, se muestra esquemáticamente el proceso antes descrito:

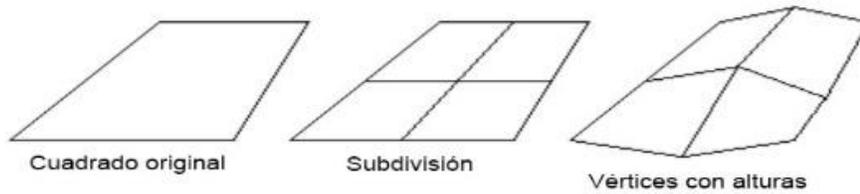


Fig. 3.1 Esquema de MidPoint [35]

Conforme aumenta el número de iteraciones, los nuevos vértices están más próximos a los otros y la superficie adquiere un carácter más real.

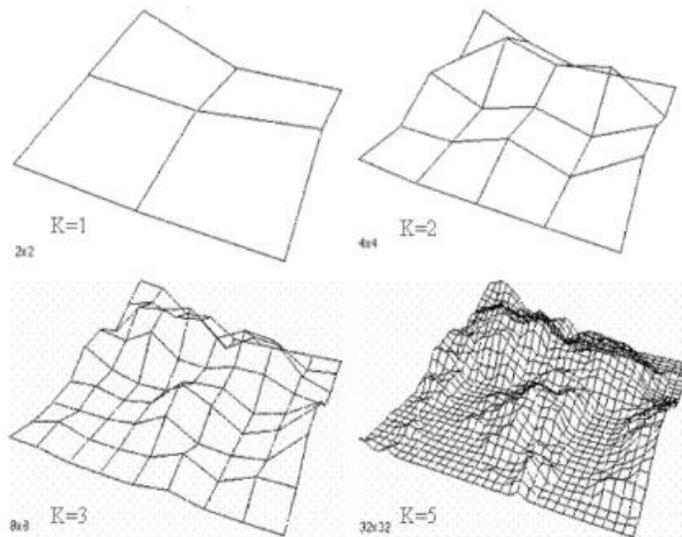


Fig. 3.2 Esquema de iteraciones Midpoint [35]

La superficie fractal depende de la aleatoriedad de las alturas, pues el número de cuadrados aumenta por medio de potencias de dos. La asignación de las alturas en el algoritmo se hace a partir de la siguiente ecuación [37] [38]:

$$y = \bar{y} + \text{escala}(\text{valor aleatorio})$$

Donde:

$y$ : valor de altura

$\bar{y}$ : promedio de altura de vértices vecinos

El algoritmo considera que la escala obedece la del movimiento fraccional Browniano (descrito en el segundo capítulo). El valor aleatorio debe de tener una distribución Gaussiana con media igual a cero y una varianza proporcional a  $|y_a + y_b|^{2H}$ , donde  $H$ : *exponente de Hurst* y,  $H = 3 - D$  con  $D$ : *la dimensión fractal*;  $D > 1$ . Para realizar la simulación de las superficies, se debe conocer el número de iteraciones y la dimensión fractal de ésta. La superficie generada es autosimilar y apta para el análisis [36].

### **3.2 Métodos de cálculo de la dimensión fractal**

Desde el descubrimiento de los fractales hasta la actualidad se han desarrollado diferentes métodos para calcular la dimensión fractal. Las características de la información experimental, la naturaleza de los fenómenos y la tecnología disponible han logrado que diversas técnicas se desarrollen y se implementen para numerosos fenómenos.

Ya se ha mencionado que el análisis fractal de las costas ha sido el precursor de la tendencia actual. Se inició a través de análisis topográficos realizados a partir de fotografías aéreas. Estas fotografías sirvieron como una primera herramienta para el desarrollo de los métodos de cálculo de la dimensión fractal, y es gracias a ellas que el análisis de imágenes es el principio fundamental para los métodos revisados en este estudio. Debido al desarrollo tecnológico de las últimas décadas, el estudio de la dimensión fractal en superficies de ingeniería por los métodos de análisis de imágenes es posible gracias a la microscopía y perfilometría [39].

La metodología experimental depende de los datos generados por los instrumentos de medición (perfilómetros, microscopios, entre otros). Si se obtiene la topografía superficial, los datos experimentales se pueden analizar de manera directa a través del valor numérico de la altura en cada punto. Si la información es una imagen, éste se transforma a una escala de grises y el valor numérico del nivel de gris en cada pixel se puede analizar mediante los cálculos pertinentes del estudio fractal [39].

Se debe recalcar que las imágenes requieren ciertas características para ser aptas para su uso. Las imágenes deben ser invariantes ante transformaciones de rotación

y traslación, refiriéndose a que las mediciones realizadas en las imágenes deben ser independientes de la posición que tengan en el plano. También, las mediciones deben ser independientes de algún escalamiento que se le realice a la imagen o un cambio en la escala de grises [20].

Se asume que las imágenes obtenidas en este estudio cumplen con las características antes mencionadas debido a que las superficies son simuladas y las imágenes son directamente obtenidas a partir de los resultados de la simulación, i.e. no interviene ningún equipo fotográfico o experimental.

En los métodos presentados a continuación, el análisis fractal se realiza a partir de gráficas logarítmicas en las que la pendiente está relacionada con el valor de la dimensión fractal. La relación de escalamiento de los fenómenos autosimilares permite hacer esta relación [40].

$$P(r) = Br^{\alpha(D)} \quad (18)$$

Donde  $P$  es la propiedad de análisis,  $B$  es un factor de la relación de potencia,  $r$  es la escala a la que se hace la medición y  $\alpha(D)$  es el exponente de escalamiento. El exponente mencionado está relacionado directamente con la dimensión euclidiana ( $E$ ) y la dimensión fractal ( $D$ ) del objeto de análisis, por lo que  $\alpha(D) = E - D$ .

Al hacer un análisis logarítmico, la ecuación anterior se simplifica a:

$$\log P(r) = \alpha(D) \log r + \log B \quad (19)$$

Se puede observar que la pendiente de la ecuación descrita está directamente relacionada con la dimensión fractal [40].

### 3.2.1 Método de Yardstick

Yardstick es uno de los métodos más antiguos para la estimación de la dimensión fractal; fue propuesto por Richardson [41] como procedimiento para medir la frontera entre países. Richardson observó, por ejemplo, que la longitud de la frontera entre España y Portugal variaba de acuerdo con la medición de cada país por 227 km, y en el caso de la costa de Inglaterra la diferencia era de aproximadamente 600 km. Dicho análisis llevó a Mandelbrot a realizar su estudio de la costa de Gran Bretaña y la dimensión fractal [41].

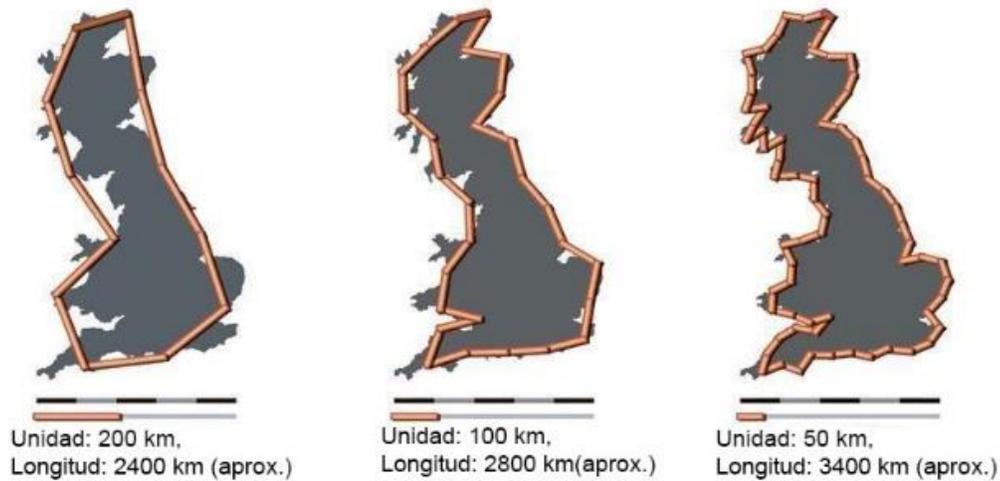


Fig. 3.1 Esquema del método de Yardstick [39]

El método consiste en medir la longitud de un contorno con una regla divisora de una determinada longitud,  $G$ , y contar cuántos pasos,  $N$ , se necesitan para recorrer la línea completa. La longitud total del contorno,  $L(G)$ , se obtiene a través de la relación:  $L(G) = NG$ . La longitud de la regla divisora se va modificando, obteniendo para cada valor la longitud del contorno. La dimensión fractal se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$L(G) = MG^{1-DF} \quad (20)$$

Donde  $M$  es una constante y  $D$  es el valor de la dimensión fractal. Se observa de esta ecuación que conforme el valor de  $G$  aumenta, la longitud del contorno disminuye, y que a un valor mayor de  $D$  la línea será más compleja.

Si se grafica logarítmicamente  $G$  y  $L(G)$  y se observa un comportamiento lineal, al hacer una regresión lineal por medio de mínimos cuadrados la dimensión fractal se obtiene por medio de:

$$DF = 1 - m \quad (20)$$

En este caso  $m$  es la pendiente de la línea. A esta gráfica se le denomina la gráfica de Richardson. Se ha observado que para obtener un cálculo confiable de la dimensión fractal es necesario obtener de cinco a ocho longitudes con diferentes reglas divisoras [42].

La linealidad de las gráficas es de vital importancia para poder usar este método. Se ha comprobado que el comportamiento de algunas mediciones es lineal solo en zonas determinadas. En el caso antes mencionado, se seleccionan las zonas lineales a las que corresponde una dimensión fractal constante, mientras que a las zonas no lineales se les conoce como zonas de transición, y tienen una dimensión variable [42].

Para minimizar el error de cálculo relacionado con la naturaleza del método, se deben tomar en cuenta tres elementos importantes:

#### **A. El último paso parcial (Last partial step)**

Las reglas divisoras son trasladadas a lo largo de todo el contorno de interés. Estas reglas varían su longitud y, por lo tanto, el último paso disponible en el contorno no necesariamente corresponde al último punto del contorno. Esto quiere decir que en el último paso no todos los puntos son tomados en cuenta, pasos fraccionarios son necesario para abarcar toda la longitud. Estos puntos que no son tomados en cuenta en el cálculo tienden a subestimar el valor de la dimensión fractal real [42].

Andrle [42] ha propuesto tres soluciones a este problema:

1. Omitir el último paso parcial.
2. Agregar un paso si este es mayor a la mitad de la longitud del paso.
3. Agregar un paso fraccionario de acuerdo con el número de puntos faltantes en el último paso.

Las primeras dos soluciones representan una subestimación y la tercera una sobrestimación. En este caso se prefiere agregar un paso extra, a no considerar los puntos faltantes. De las tres soluciones la que reduce considerablemente el error es la última. Se debe mencionar que el error producido por el último paso no se puede eliminar por completo, y conforme aumenta la longitud de la regla divisora también el error de este fenómeno [42].

### **B. El problema con el punto inicial**

Richardson observó que cuando se cambia el punto de inicio para recorrer la línea de análisis el valor de la longitud es distinta y, también, el de la dimensión fractal. La solución propuesta es escoger aleatoriamente el punto de inicio a lo largo de la línea, pero para el caso de líneas abiertas, que no forman un circuito, este método necesita una variación [42].

Si se analizan líneas abiertas, se propone que se escoja también un punto aleatorio pero que se recorra la línea desde ese punto hacia el inicio y hacia el final del contorno simultáneamente. Se recomienda realizar varias veces el cálculo de la dimensión fractal escogiendo diferentes puntos aleatorios y luego promediar los resultados [42].

### **C. No linealidad en las gráficas de Richardson**

Se mencionó al inicio de la sección que un error común es realizar la regresión lineal en la gráfica de Richardson en zonas que no son del todo lineales. Andrieu menciona que [42], en muchos casos, lo que pareciera una zona lineal es más bien una curvatura poco pronunciada. Se recomienda, entonces, realizar pruebas de no linealidad.

Si se tiene el caso de gráficas no lineales, la solución que se propone es

seccionar dicha curva y analizar por separado las zonas lineales y las no lineales, con los respectivos valores constantes y variables de la dimensión fractal. Para disminuir el error debido a este fenómeno, se recomienda usar diversos valores de reglas divisoras para el cálculo de la dimensión fractal [42].

### 3.2.2 Método de Box Count

En sus inicios, el método de Box Count fue utilizado para determinar el área de objetos cartográficos irregulares. Posteriormente, se le encontró utilidad en los fractales [43].

Box Count es uno de los métodos más usados y sencillos de implementar para el análisis fractal. En este caso se busca cubrir el plano de análisis con cuadrados de un mismo tamaño, y se cuenta la cantidad de cuadros que se necesitan para cubrir la superficie completa. Si en un cuadro hay por lo menos un píxel con valor diferente de cero, este se cuenta. Se disminuye el tamaño del cuadro consecutivamente y se repite el proceso antes descrito. Se realiza entonces una gráfica logarítmica con el tamaño de los cuadros y el número de cuadros contados para cada iteración. La dimensión fractal se calcula como sigue:

$$DF = -m \quad (21)$$

donde  $m$  es la pendiente de la gráfica [44].

Es importante mencionar que este método es útil tanto para análisis en 2D como en 3D. En el caso de tener la superficie topográfica en 3D, el análisis se hace con cubos que irán disminuyendo su volumen progresivamente; esto ya representa una ventaja sobre el método de Yardstick [44].

Al aplicar este método se deben considerar aspectos como: el tamaño inicial, las reducciones de tamaño y el tamaño mínimo de los cuadros. En este sentido, Zou,

Kästner y Reithmeier hacen algunas recomendaciones para la implementación del Box Count [44].

Los autores mencionan que como primera iteración se considera la imagen completa. La anchura inicial se denota como  $\varepsilon_0$  y la altura (del cuadrado) como:  $u_0 = z(x_{max}) - z(x_{min})$ , estos valores son iguales al tamaño inicial de la imagen. El cuadrado inicial entonces es de tamaño  $\varepsilon_0 * u_0$ . Si se analiza una imagen de  $1024 * 1024$  estos son los valores correspondientes a  $\varepsilon_0$  y  $u_0$ , respectivamente. Se recomienda que la reducción de tamaño se lleve a cabo de acuerdo con las siguientes ecuaciones [44]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= 2^{-i} \varepsilon_0 \\ u_i &= 2^{-i} u_0 \\ i &= 0, 1, 2, \dots, 10 \end{aligned} \quad (22)$$

El tamaño mínimo posible es la resolución de la imagen. A continuación, se muestra gráficamente el análisis antes mencionado.

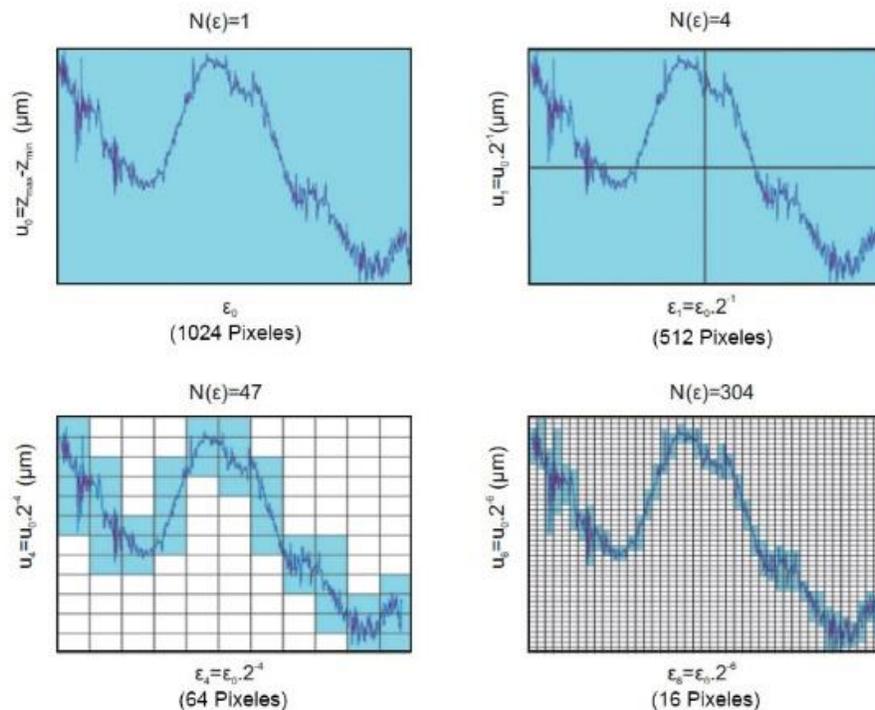


Fig. 3.2 Esquema del método de Box Count [44]

Es necesario mencionar que este método requiere una cantidad alta de datos para poder hacer la aproximación adecuada de la dimensión fractal, lo cual se ve reflejado en el tiempo de cálculo, así como la memoria necesaria [43].

Se recomienda que el área de análisis experimental y simulada sea cuadrada para evitar el problema de secciones sin considerar al disminuir progresivamente el tamaño del cuadro [43].

### **3.2.3 Consideraciones sobre los métodos**

Al momento de seleccionar un método es importante considerar el tipo de superficie que se analiza, pues los métodos varían si la superficie es autoafín o autosimilar. En algunos casos no es necesario hacer cambios en la implementación, pero en otros casos la selección del método depende de la característica de los datos. Dos aspectos importantes se deben examinar cuando se considera la naturaleza de los métodos:

1. Analizar si el método está siendo implementado correctamente.
2. Si los datos se analizan a través de gráficas por regresión lineal, se deben hacer consideraciones estadísticas como intervalos de confianza, coeficientes de correlación, y otros parámetros relevantes [43].

Una desventaja inherente al análisis fractal es la discretización de los datos, que provoca variaciones entre la dimensión fractal real o teórica y la calculada. Esto se debe a que, en el caso hipotético de un análisis en el rango continuo, se podría observar un detalle infinito en el fenómeno de estudio, lo cual correspondería exactamente con el planteamiento teórico del análisis fractal, mientras que al tratar con datos discretos existe pérdida de información y una estimación aproximada [43].

Otra desventaja observable en este análisis es que la dimensión fractal de una porción de la superficie no sea la misma que la de todo el conjunto. Matsushita, Ouchi y Honda en 1991 observaron que el conjunto de curvas de contornos tiene una dimensión fractal mayor que la dimensión de un solo contorno. Propusieron la siguiente ecuación para relacionar la diferencia entre los valores [43]:

$$Dsc = 2 - H \quad (23)$$

Donde:

*Dsc: Dimensión del conjunto de curvas (suite curves)*

*H: Exponente de Hurst*

En los casos de análisis por medio de gráficas, se recomienda que la disminución del tamaño del cuadrado (Box Count) y la longitud del paso (Yardstick) se lleve a cabo por medio de una progresión geométrica, en general base dos, para garantizar que al aplicar el logaritmo los valores en el eje de las abscisas estén equidistantes y la regresión lineal sea más efectiva [43]. Se recomienda también que el primer y último punto de análisis no se tome en cuenta para evitar errores en el cálculo [43].

En el estudio comparativo de métodos realizado por Zhong et al., se observó que para valores bajos de dimensión fractal, el método de Yardstick presentó errores considerables con respecto al valor teórico. En el caso de dimensiones más altas, el error de Yardstick disminuyó, pero el valor calculado siempre fue menor al esperado. Por otro lado, los valores obtenidos por Box Count tuvieron un error menor que Yardstick debido a que este método cuenta con un intervalo mayor de muestreo. Si este muestreo disminuye, entonces el error aumenta [45].

Por último, se enlistarán las sugerencias hechas por Klinkenberg para la selección del método adecuado [43]:

1. Considerar si la superficie es autoafín o autosimilar
2. El formato de los datos puede facilitar la implementación de algún método
3. El método que se adapte mejor a la metodología del investigador
4. Si existe multidimensionalidad en el objeto de estudio

### 3.3 Metodología de análisis.

En esta sección se detallará el procedimiento que lleva a cabo el programa para el análisis de la rugosidad fractal y una breve descripción de la lógica detrás de la programación de los métodos de cálculo.

El código desarrollado se apoya de un programa previamente realizado por el equipo de investigación para la simulación de superficies fractales por medio del Midpoint Displacement Algorithm. Para la simulación es necesario tener como datos de entrada: la dimensión fractal deseada para la superficie, la escala (debe ser concordante con la escala de rugosidad de las superficies de ingeniería), y el número de datos de la superficie a través de potencias de dos. Esta sección del código da como resultado una superficie como la que se presenta en la figura 3.3. Tiene dimensión fractal de 2.4, escala de 0.05 y  $2^6 * 2^6$  pixeles.

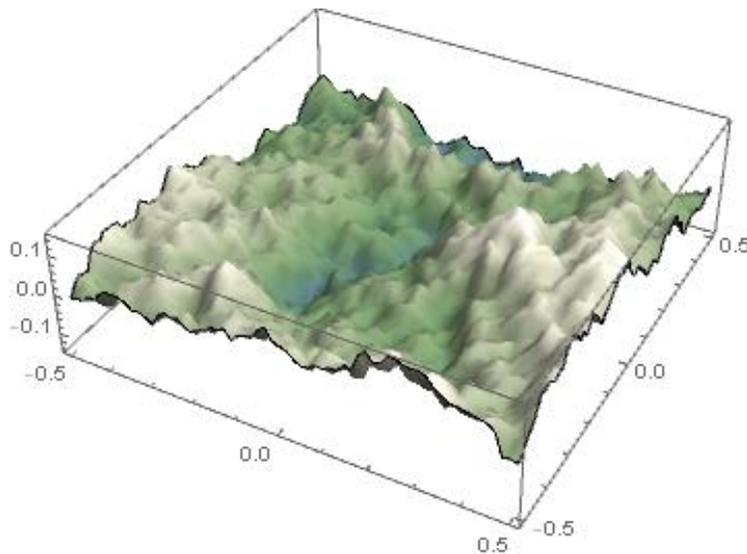


Fig. 3.3 Ejemplo de superficie fractal simulada

Posteriormente la superficie se divide en cuantiles con la finalidad de realizar en ellas una regresión con esta base al final del estudio. Este tipo de regresión se diseñó esencialmente para aquellos experimentos estocásticos con una distribución no Gaussiana y que no se pueden describir apropiadamente a través de la regresión

lineal comúnmente utilizada [46]. Tiene la finalidad de separar los datos en segmentos que tienen una relación, i.e. estar debajo o arriba de una proporción de la muestra para evitar que la asimetría de los datos afecte la estimación [47].

Para una variable aleatoria  $Y$  con esta distribución de probabilidad

$$F(y) = \Pr(Y \leq y) \quad (24)$$

El cuantil se observa como:

$$Q(\tau) = \inf\{y: F(y) \geq \tau\} \quad (25)$$

Dado que se utilizará la aproximación basada en cuantiles se selecciona un cuantil de los datos para hacer el análisis de un perfil.. En este caso se determinó que cada cuantil pertenece a cada 10% de los datos, i.e. cuantil 1 tiene hasta el 10% de los datos, 2 hasta el 20% y así sucesivamente. El programa calcula que todos los valores que sean mayores o pertenecientes al cuantil tienen un valor de uno, y el resto de cero. Se genera entonces una imagen binarizada que describe el perfil de análisis. Al hacer este procedimiento también se disminuye la dimensión fractal teórica de 2.4 a 1.4.



Fig. 3.4.1 Visualización de los primeros tres cuantiles de la superficie



Fig. 3.4.2 Visualización de los cuantiles 4, 5, 6 de la superficie



Fig. 3.4.3 Visualización de los cuantiles 7, 8, y 9 de la superficie

Las figuras 3.4 representan 9 perfiles de la superficie. Se puede observar en las figuras que conforme van aumentando los cuantiles, se observa una densidad de alturas mucho mayor (color negro). Esto simboliza que en el cuantil 9 tenemos cuantificadas el 90% de las alturas simuladas por el código.

Siguiendo con el esquema del ejemplo, se seleccionó el cuantil 5 para aplicarle el método de Yardstick y Box Count. Ambos métodos parten de un perfil como el anterior pero cada uno difiere en los siguientes pasos.

Es importante mencionar en este punto que, de aquí en adelante se trabaja con contornos, en vez de la superficie simulada. Esto es de relevancia porque se tratará de caracterizar la rugosidad de la superficie a través del análisis de sus contornos en diferentes cuantiles.

### 3.3.1 Yardstick

Una vez que se tiene el perfil es necesario analizar la imagen y seleccionar aquellos datos que corresponden exclusivamente a contornos. Esto se logró a partir de sumas y restas entre pixeles consecutivos en cada dirección (arriba, abajo y ambos lados) y una selección adecuada de aquellos pixeles que corresponden a los contornos. Por ejemplo, si se hace una resta de izquierda a derecha, un contorno en la dirección horizontal puede identificarse con una suma  $0 - 1 = -1$  o  $1 - 0 = 1$  donde se debe seleccionar el píxel equivalente uno en valor absoluto. En el caso de un océano la resta sería  $0 - 0 = 0$  o dentro del continente  $1 - 1 = 0$ , en cuyo caso ningún valor se selecciona. Se llevó a cabo un procedimiento parecido en sentido vertical y lateral.

Se decidió programar esta sección en lugar de usar las funciones preprogramadas de Mathematica debido a que los resultados arrojados no permitieron la implementación adecuada del método. El resultado al que se llegó, en el ejemplo que se está desarrollando, se muestra a continuación.

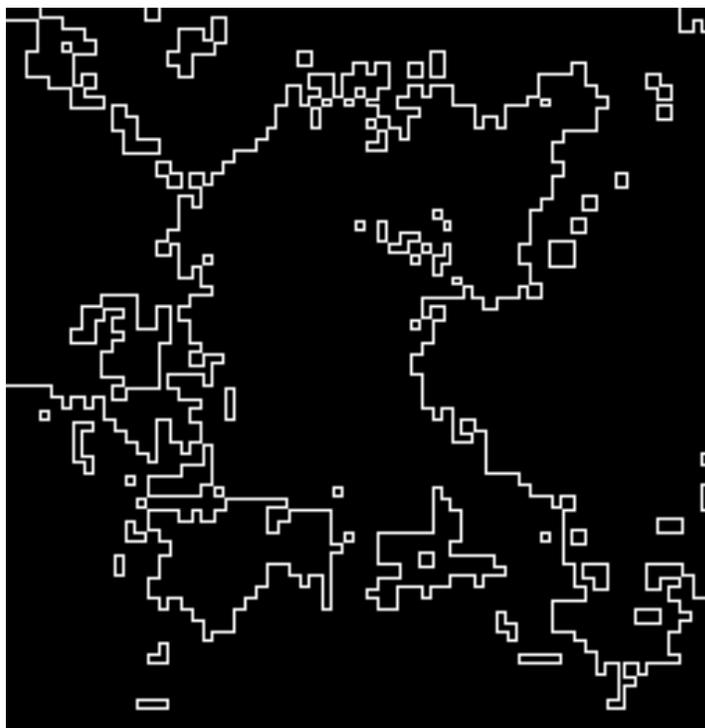


Fig. 3.5 Contornos seleccionados del perfil de la fig. 3.4

En la figura 3.5 se observa que los pixeles del contorno son iguales a uno, y el resto tienen un valor de cero. Gracias a la representación de estos dos valores, se pueden identificar las coordenadas de los pixeles en el contorno y ordenarlos consecutivamente. Las coordenadas se obtienen determinando cuál es la posición de todos los pixeles con valor de uno en la imagen.

Para ordenar los datos, el programa primero selecciona una coordenada que tenga solo un vecino cercano, i.e. que exista un solo punto a una distancia máxima de  $\sqrt{2}$ . Este valor representa la distancia máxima a la que se puede encontrar una coordenada consecutiva, y el inicio o fin de un contorno.

A partir de esa coordenada inicial encontrada, el programa busca aquellos puntos que están máximo a la misma distancia de  $\sqrt{2}$ . Si hay más de uno, selecciona el primero que encuentra. Realiza el mismo procedimiento con el siguiente punto seleccionado hasta recorrer todo el contorno. El final del contorno también se define con la última coordenada con solo un punto consecutivo o con la ausencia de un punto cercano.

Este proceso se lleva a cabo con cada contorno que encuentra. En el caso de las islas, debido a que no tienen principio o fin, el programa escoge cualquier punto de ésta, y recorre de la misma manera las coordenadas.

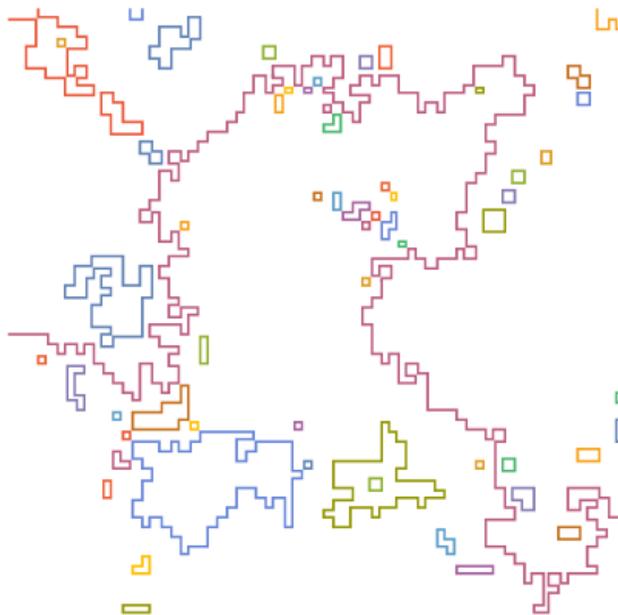


Fig. 3.6 Contornos ordenados

La figura 3.6 muestra los contornos ordenados del perfil y cada color representa un contorno diferente. Se observan las islas y los contornos completos de los continentes. Ya que quedaron las coordenadas ordenadas, se procede a aplicar el Yardstick.

Lo mencionado anteriormente solo corresponde a la disposición de la información, necesario para aplicar el método de Yardstick. A continuación, se detallará la implementación final a través de dos aproximaciones diferentes.

## 1. Aproximación por posición de coordenadas

De cada contorno se seleccionan las coordenadas que están cada dos posiciones, i.e. el primer valor, el tercer valor, el quinto valor y así sucesivamente hasta que se recorre todo el contorno. Se mide la distancia entre cada uno de los puntos, y se suma la distancia total de cada contorno. Esto es lo equivalente a la longitud total de todos los contornos cada dos puntos.

El siguiente paso es aumentar progresivamente por dos las posiciones. Por ejemplo, en la siguiente iteración se seleccionan el primer valor, el quinto valor, el noveno valor, etc. y se suman las distancias entre los puntos. Se realiza este procedimiento consecutivamente hasta que por lo menos se seleccionan tres puntos en cada contorno.

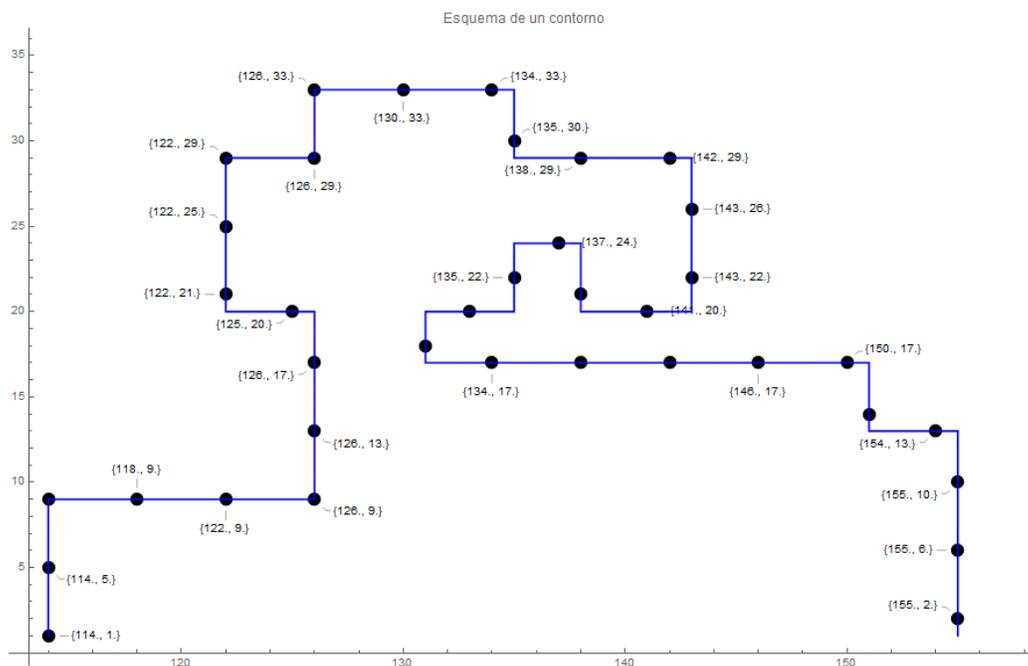


Fig. 3.7 Esquema de un contorno del perfil

En esta figura se representa uno de los contornos del perfil y se muestran las coordenadas cada cuatro posiciones. El método entonces mide la distancia euclidiana entre cada una de estas coordenadas, y así mide la longitud total del contorno.

Finalmente se realiza una gráfica logarítmica con el tamaño del paso (2, 4, 6, ..., n) y la longitud de todos los contornos como se muestra en la figura 3.7. Se obtiene la pendiente, y a la unidad se le resta este valor. Esta es la dimensión fractal calculada del perfil. En el caso de este perfil la dimensión fractal es igual a:

$$Df = 1.3402$$

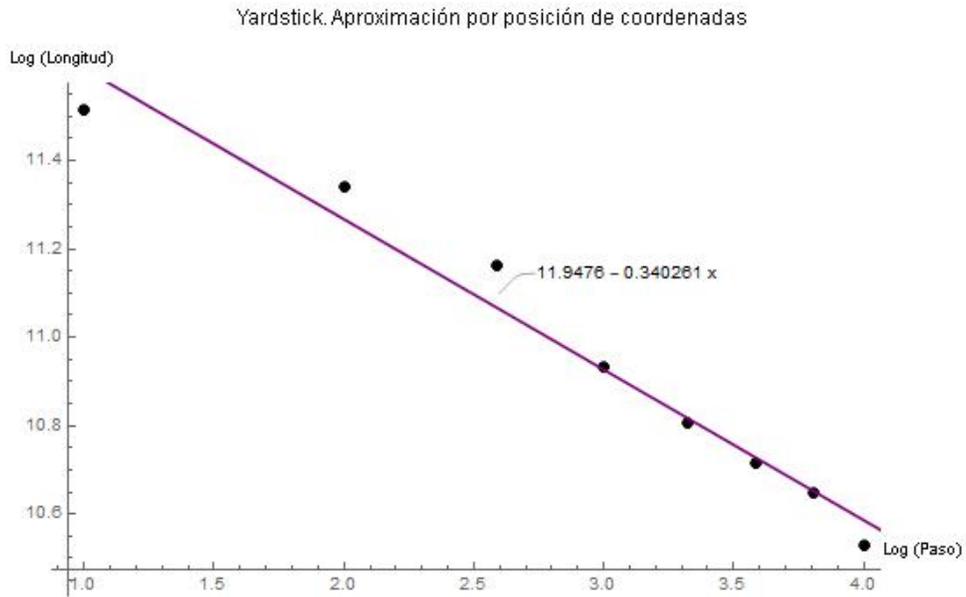


Fig. 3.7 Gráfica longitud de contornos vs. paso

## 2. Aproximación por distancia a una región

En esta aproximación se selecciona el primer punto de cada contorno. Se “dibuja” un círculo con un radio inicial de dos y centro en el primer punto. Se busca el siguiente punto más cercano a esta región y se selecciona. El siguiente círculo tiene centro en el último punto encontrado y de nuevo, con radio de dos, se selecciona el punto más cercano. Se recorre sucesivamente cada contorno. La longitud del contorno es igual al número de puntos por el radio del círculo. Se procede a aumentar el radio con un incremento de dos unidades (2, 4, 6...). De nuevo, el radio máximo es aquel que permite tener tres puntos por contorno.

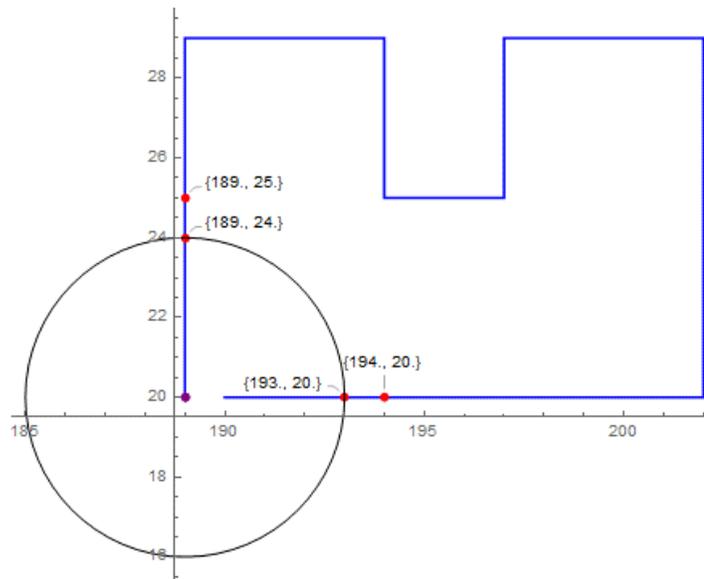


Fig. 3.8 Representación de la región en una isla

Se observa en la figura 3.8 una isla del contorno. El punto morado representa el primer punto y es el centro del círculo con radio igual a cuatro. En el caso de las islas dos o más puntos pueden estar a la misma distancia y cerrar la isla, el programa selecciona aquel el que se encuentra más arriba y a la izquierda para seguirla en sentido horario.

Se obtiene la longitud para cada iteración del radio y se realiza la gráfica logarítmica como en el caso anterior. La dimensión fractal se calcula con la misma ecuación

que en la primera aproximación. La figura 3.9 representa gráficamente el proceso antes descrito, y la dimensión fractal calculada para el mismo perfil es igual a

$$D_f = 1.3012$$

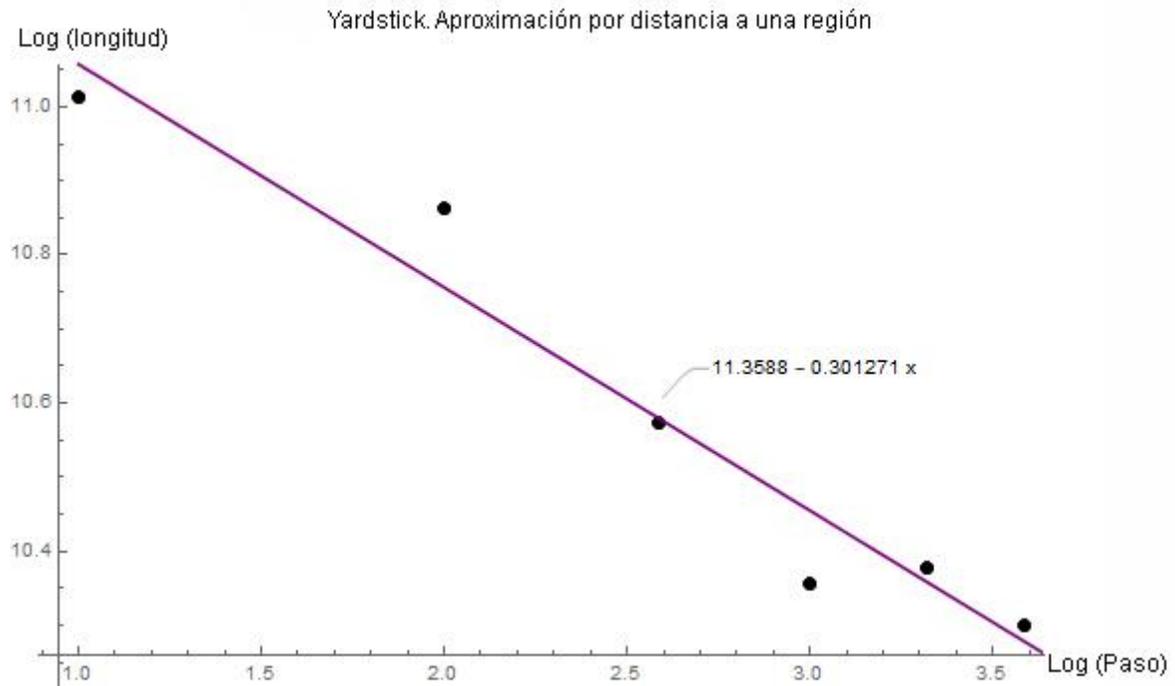


Fig. 3.9 Gráfica longitud de contornos vs. paso 2

### 3.3.2 Box Count

El método de Box Count no requiere una aproximación tan específica como Yardstick, pues requiere, en primera instancia, la imagen binarizada del perfil, i.e. la figura 3.4. Después se obtienen los datos de la imagen que para una imagen cualquiera es un acomodo matricial de pixeles. De nuevo cada punto negro corresponde a cero y cada punto con un valor dado es blanco.



Fig. 3.4 Ejemplo de un perfil de la superficie fractal

En el caso de este ejemplo, la matriz es del tamaño del número de datos simulados ( $2^6 * 2^6$  pixeles) con valores uno y cero. Se utilizará un ejemplo para explicar mejor el proceso que se lleva a cabo en el programa.

Si se considera una matriz como la que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

En la primera iteración se analiza una matriz de  $2 \times 2$ , lo que sería el equivalente en el ejemplo a separar la matriz en pequeñas cuadrículas como se muestra:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$$

Se lleva a cabo este proceso para cada renglón y cada columna. El siguiente paso es contar el número de cuadrículas, en este caso de  $2 \times 2$ , que tienen por lo menos un valor igual a uno, es decir un píxel que represente al perfil. Si se supone que las matrices del ejemplo tienen los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De esas tres cuadrículas solo se contarían dos, pues solo esas tienen por lo menos un valor diferente de cero.

Las iteraciones continúan analizando cuadrículas cada vez más grandes aumentando en potencias de dos,  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ , etc. Una vez que se realiza el conteo completo hasta que se cubre toda la superficie con una sola cuadrícula del tamaño de área superficial, se realiza la gráfica de número de cuadrículas ocupadas vs. tamaño de cuadrícula.

En el ejemplo de la superficie simulada y su perfil seleccionado la gráfica logarítmica se observa así:

En Box Count la dimensión fractal es igual al valor absoluto de la pendiente; por lo que, con el perfil seleccionado, la dimensión fractal es igual a  $D_f = 1.79$

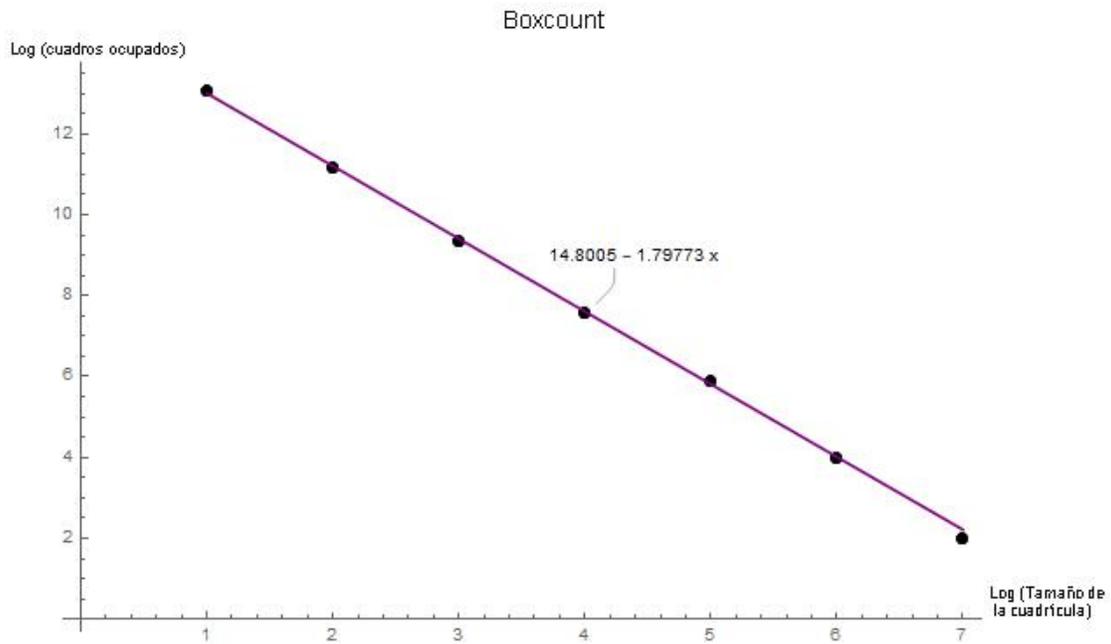


Fig. 3.10 Gráfica de número de cuadros vs. tamaño de cuadrícula

## Capítulo 4. Resultados

Una vez que se programaron ambos métodos y se comprobó que los resultados eran consistentes con los valores de dimensión fractal teóricos, se procedió a hacer la simulación.

El programa realizó 9 simulaciones con una superficie cuadrangular de  $2^7 * 2^7$  puntos, con una cantidad total de pixeles de 16,384 por dimensión fractal teórica. Se hicieron los cálculos pertinentes para datos de entrada de dimensión fractal teórica crecientes de 2.1 a 2.9 en pasos de 0.1, y dividiendo la superficie en cuantiles de 0.1 a 0.9, en pasos de 0.1, correspondientes a los contornos de análisis. A partir de esto se generaron 972 valores que se procesaron para su análisis. Para el manejo óptimo de los cálculos se obtuvieron listas de valores con la dimensión fractal teórica, el cuantil de análisis, los tres resultados de los métodos y el tiempo de cálculo para cada una de las operaciones.

El programa realizó todos los pasos descritos con anterioridad en un tiempo total de 4.68 horas. A continuación, se presentarán para el análisis de los resultados las gráficas de comparación entre los valores calculados por los métodos y el valor teórico de la simulación. Con la finalidad de hacer los datos más claros se les asignó una escala de colores a los cuantiles, café para los cuantiles más bajos, verde para los cuantiles medios y azul para los cuantiles superiores.



Fig. 4.1 Escala de colores por cuantil

## 4.1 Box Count

En esta subsección se revisará a detalle el análisis de resultados que se llevó a cabo para el método de Box Count. Se seguirá el mismo proceso con el resto de los métodos, por lo que la sección más descriptiva será la presente.

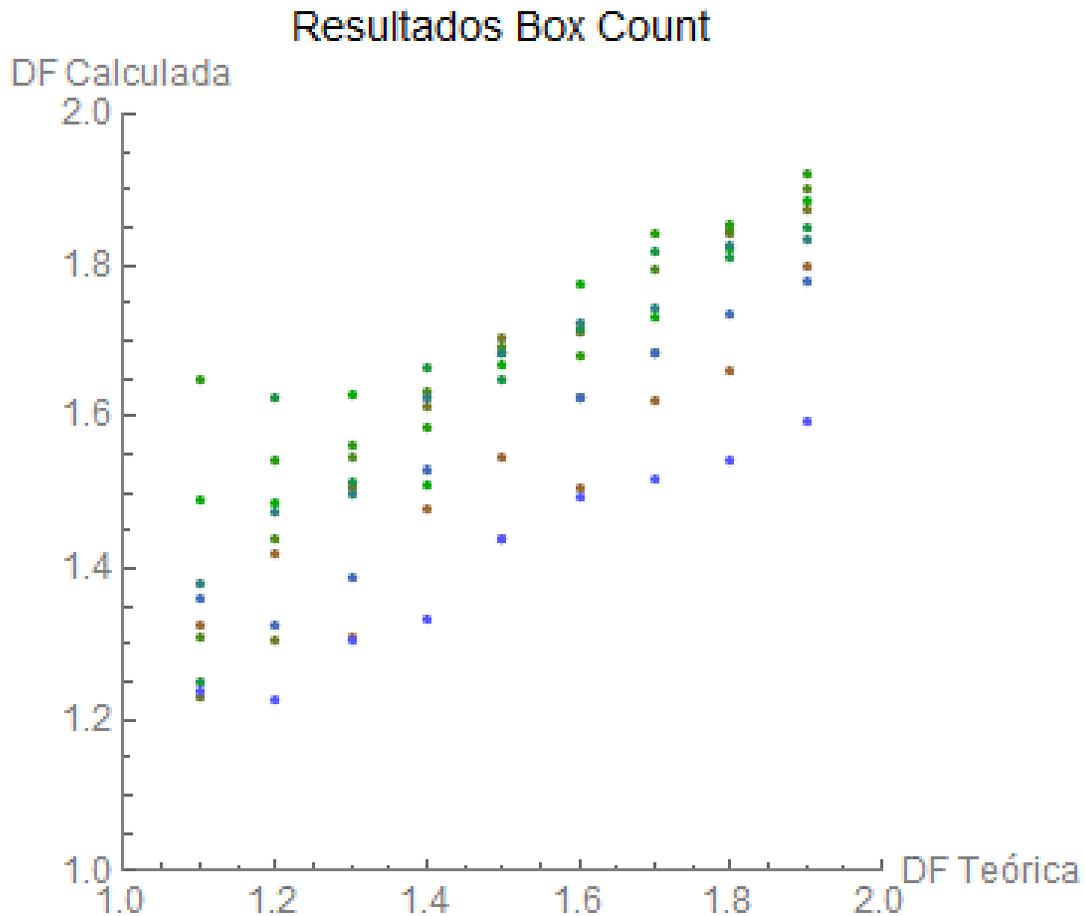


Fig. 4.2 Resultados de Box Count

Esta gráfica presenta los resultados de las simulaciones comparados con los datos de entrada teóricos. Cada punto es el resultado de la dimensión fractal calculada para cada superficie simulada y para cada cuantil.

Visualmente se puede observar que la dispersión de datos en algunas zonas es poca, sobre todo para valores de dimensión fractal teórica de 1.4, 1.5, 1.8 y 1.9. También es clara la tendencia de estimación para cuantiles altos: el azul naval

(correspondiente al cuantil 0.9) tiene una tendencia a subestimar el cálculo, mientras que el azul cielo (correspondiente al cuantil 0.8) siempre se encuentra en la media de los cálculos. Para el caso de los cuantiles medios y bajos la tendencia no es muy clara. La información que se observa en la gráfica, si bien tiene una tendencia, requiere observaciones más precisas en los contornos de las superficies.

Se procede a la visualización de los datos por cuantil y el análisis de sus respectivas regresiones lineales. De manera comparativa se puede observar en primera instancia que los valores calculados no sobrepasan el límite superior permitido; todos están por debajo de dos.

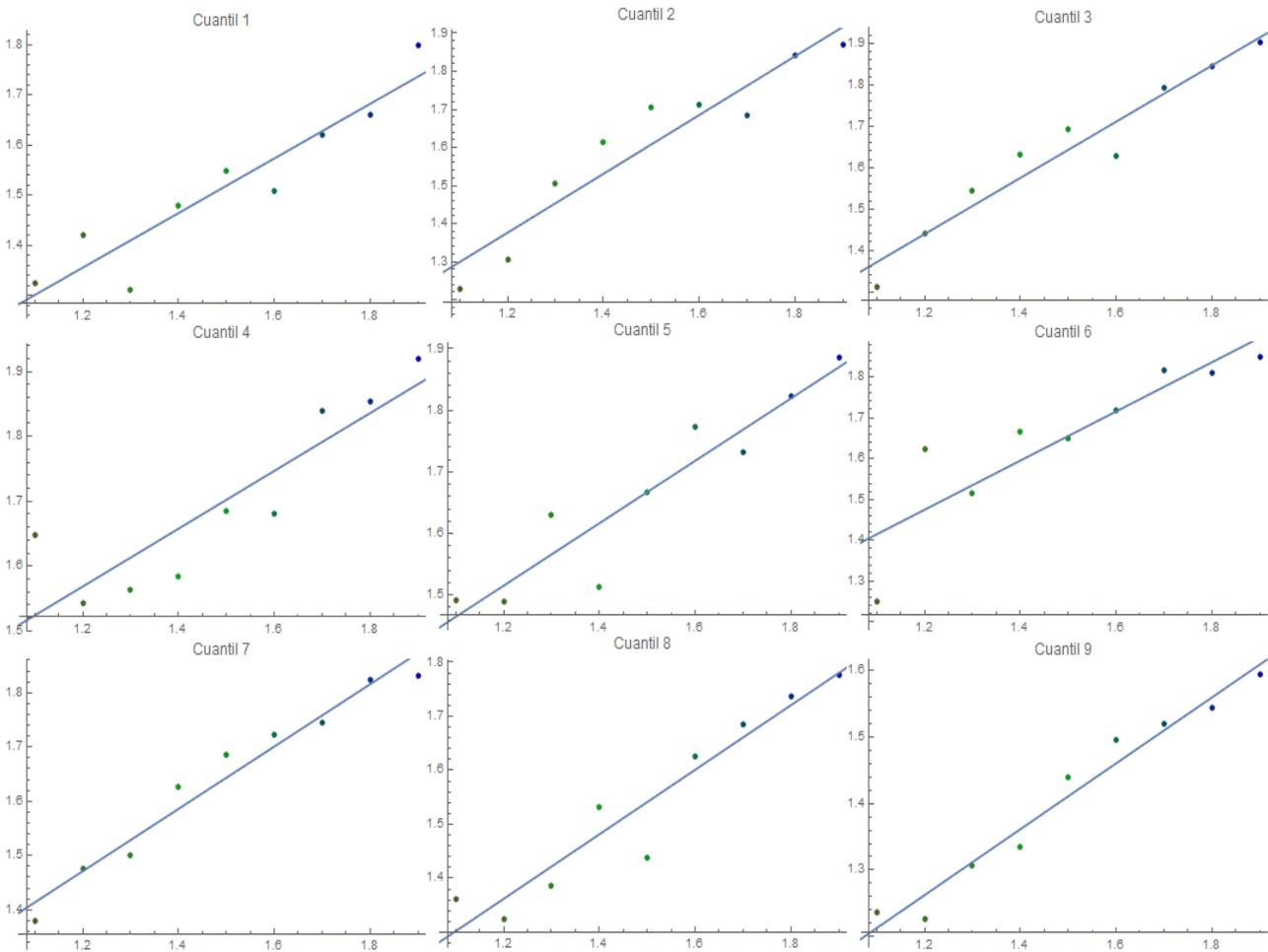


Fig. 4.3 Regresión lineal por cuantil de Box Count

En estos 9 casos, los valores calculados sí se encuentran en la vecindad de la regresión lineal. El ajuste por contorno es consistente con los datos, pero de todos modos variable y sin una tendencia en los cuantiles cercanos.

Para conocer mejor la naturaleza de las regresiones lineales y sus datos, se analizó la desviación estándar y  $R^2$  o coeficiente de determinación. Las gráficas pertinentes a este análisis son las siguientes:

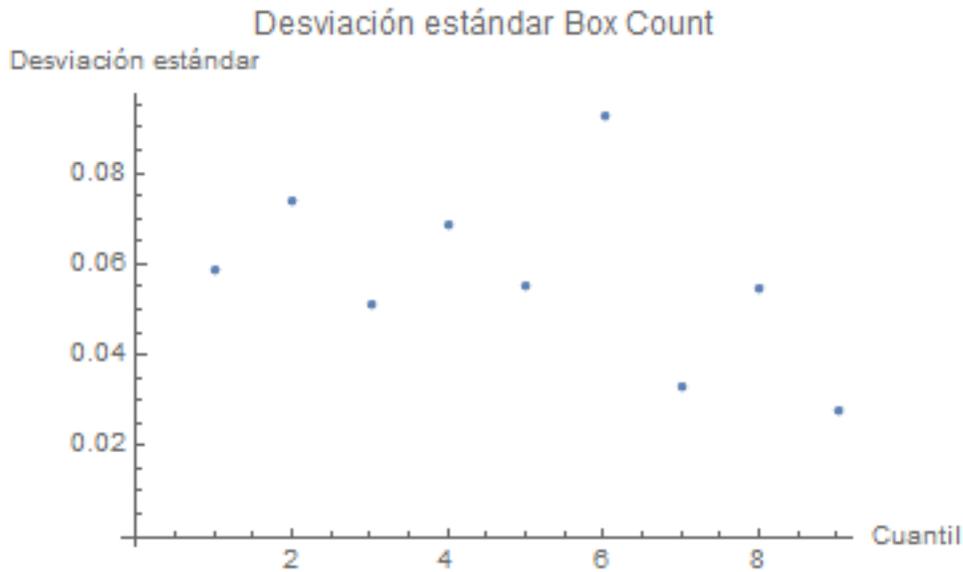


Fig. 4.4 Desviación estándar de las regresiones de Box Count

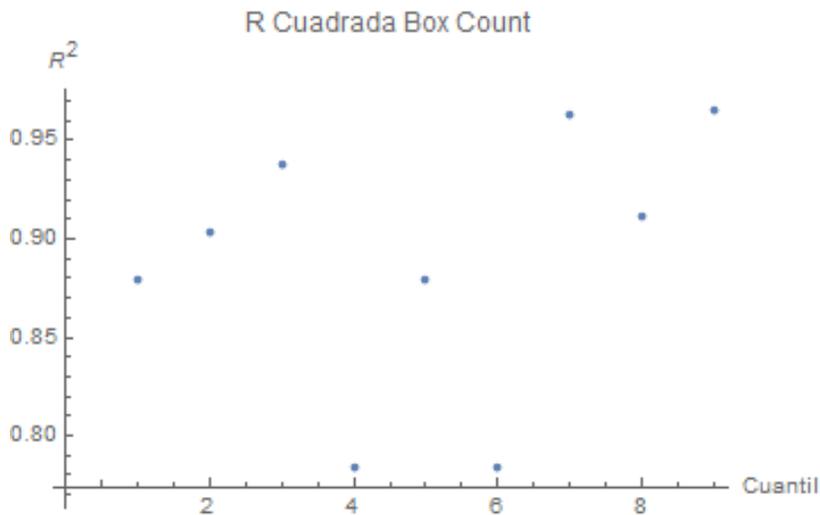


Fig. 4.5 Desviación estándar de las regresiones de Box Count

En estas gráficas es destacable que la desviación estándar con respecto a las regresiones es del orden de las centésimas. Los valores de  $R^2$  son cercanos a uno, lo que indica que la variación de los resultados que no puede explicarse por el modelo de regresión lineal se encuentra entre el 5 y el 25% [48]. Estas dos gráficas y valores son indicativos de que la aproximación lineal y el método pueden arrojar resultados concordantes con los esperados en la teoría.

Al observar esta relación de variables, se procedió a graficar los valores ordenados al origen de la regresión lineal por cuantil. Y se obtuvo la siguiente gráfica:

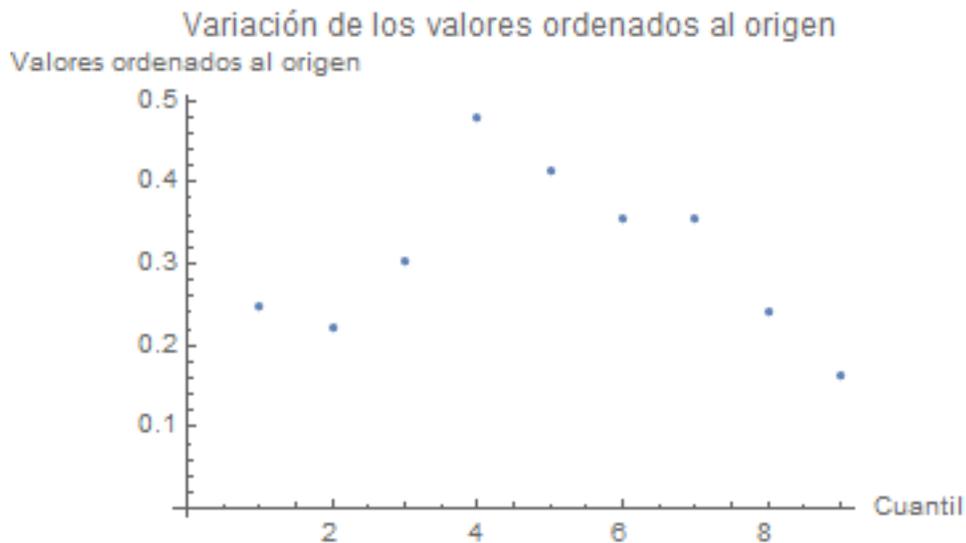


Fig. 4.6 Variación de los valores ordenados al origen de Box

En este punto también es observable que existe una tendencia en los cuantiles bajos entre 2 y 4 hacia el alza, y del 4 en adelante hacia la baja, de tal suerte que las regresiones lineales tienen un comportamiento parabólico. Se ajustó una parábola a estos datos y se obtuvo la distancia entre los puntos graficados con anterioridad y la intersección con la parábola.

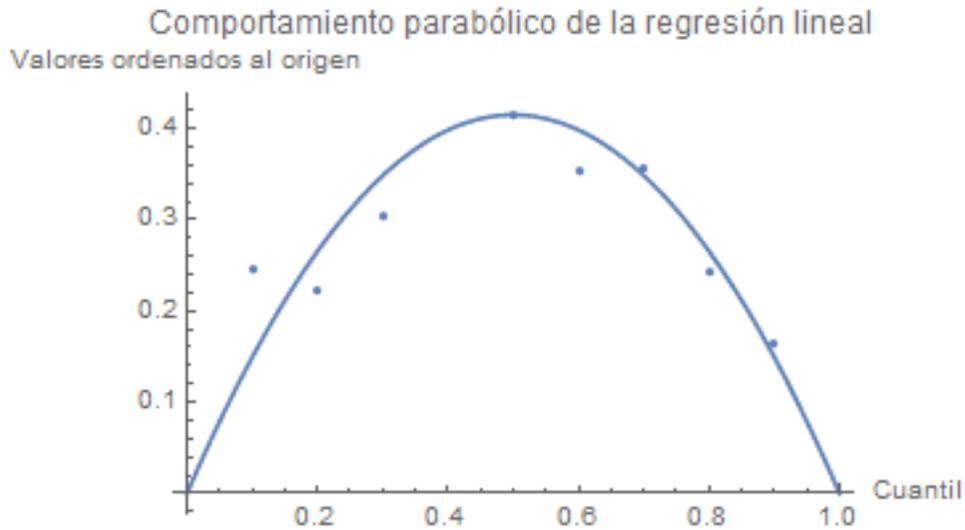


Fig. 4.7 Comportamiento parabólico de las regresiones lineales de Box Count

Se restaron a los datos simulados el valor de la distancia entre la regresión lineal y la parábola, con la finalidad de que funcione como un ajuste que ayude a que los datos tengan una desviación menor al modelo. Se muestra en la figura siguiente que las gráficas de los datos se observan así:

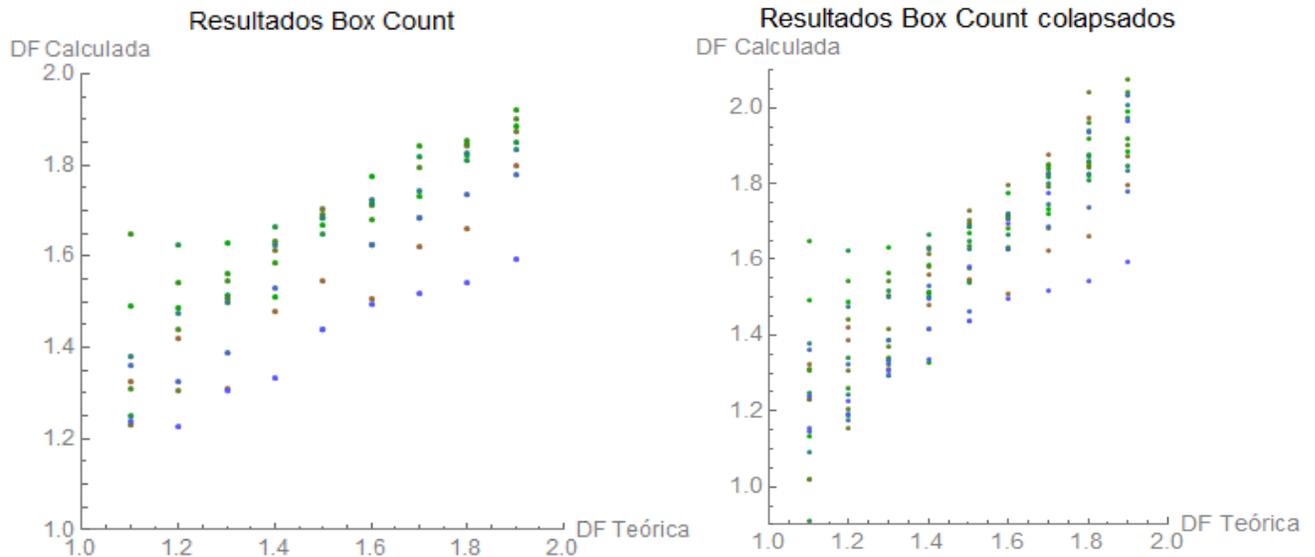


Fig. 4.8 Comparación de los resultados y los datos después de colapsar

Realizando la regresión lineal de los datos colapsados se obtuvo el siguiente modelo empírico para calcular la dimensión fractal teórica,  $DF_t$ , a partir de una dimensión fractal medida,  $DF_m$ .

$$DF_t = \frac{DF_m - 0.43}{0.56} \quad (26)$$

Es de esperarse que la desviación estándar de todos los datos con respecto a la regresión lineal sea mayor que la de las regresiones por cuantil. En este caso la desviación estándar del modelo y los datos colapsados es igual a:

$$\sigma = 0.07 \quad (27)$$

Antes de colapsar la curva el valor de la desviación estándar para los resultados de Box Count era  $\sigma = 0.11$ . El ajuste de los datos proporcionó un modelo más preciso.

## 4.2 Yardstick 1. Aproximación por posición de coordenadas

Los resultados obtenidos con el método de Yardstick 1 se presentan en la Fig. 4.1.

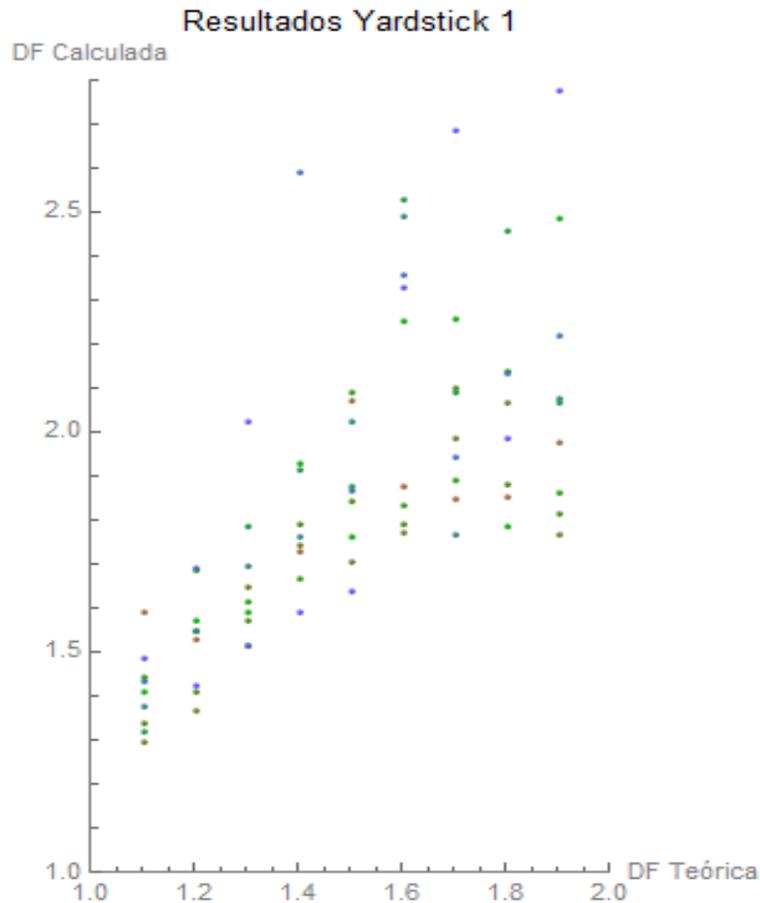


Fig. 4.9 Resultados de Yardstick 1

En primera instancia se puede observar que los valores calculados para la  $DF_T$  en un rango de 1.4 hasta 1.9 superan los valores permitidos pues tienen una dimensión fractal calculada superior a dos. A su vez, no es apreciable alguna tendencia entre cuantiles; es decir, no existe ninguna propensión hacia alguna estimación por cuantil. Se puede ver cómo los puntos tienen una tendencia errática en cada cuantil.

Posterior a estas observaciones cualitativas, se procedió a hacer una regresión lineal por cuantil con la finalidad de observar tendencias más claras. En la figura 4.3 se observan los valores de  $DF_m$  vs  $DF_t$  para cada cuantil, así como su regresión lineal correspondiente.

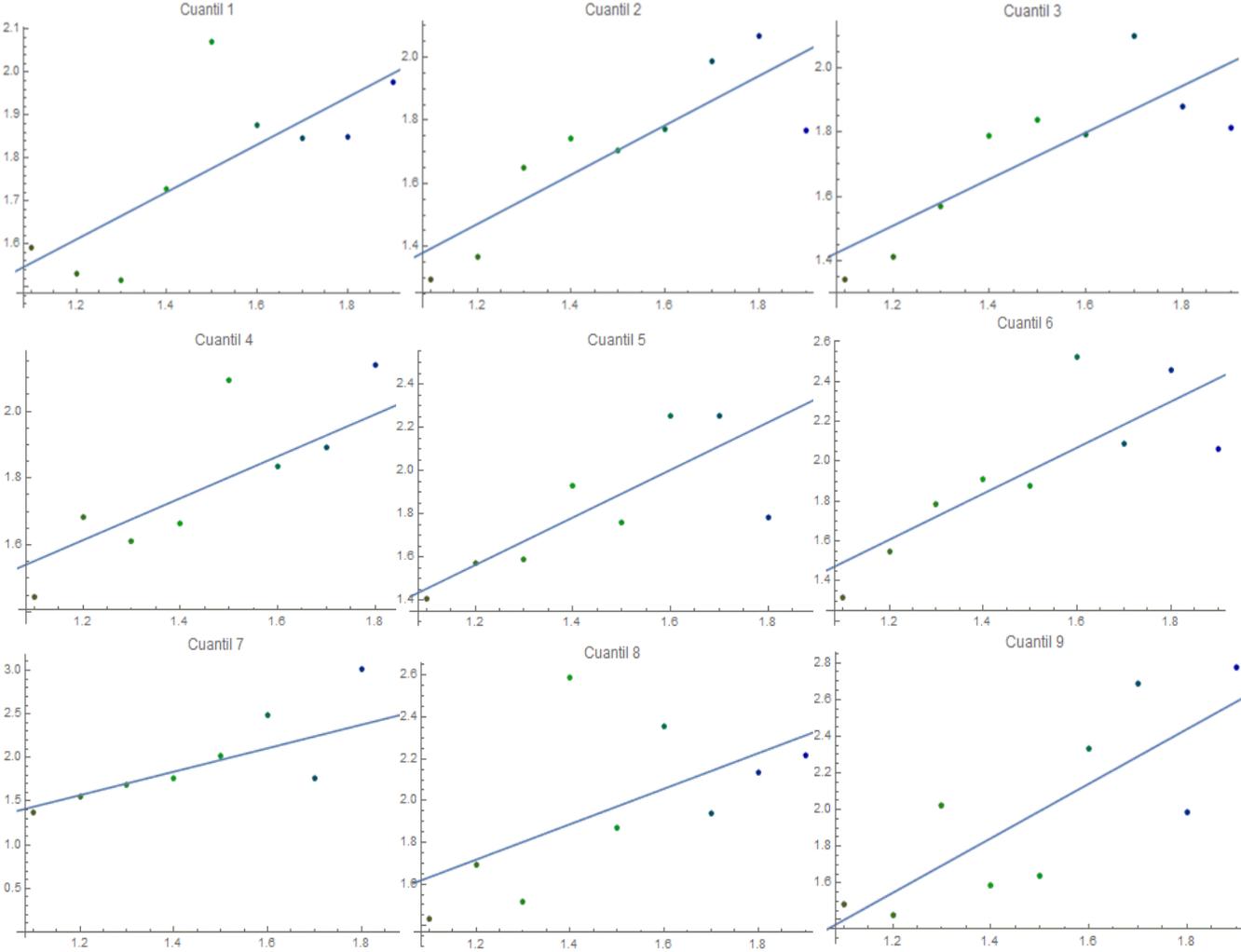


Fig. 4.10 Regresión lineal por cuantil de Yardstick 1

Es apreciable como los resultados tienen una dispersión mucho mayor a la que se presentó en Box Count. Si bien la tendencia lineal es acertada, los puntos se encuentran alejados de la recta.

Con la finalidad de encontrar qué tan dispersos están los datos entre los cuantiles y sus regresiones, se procedió a hacer un análisis de la desviación estándar y  $R^2$ .

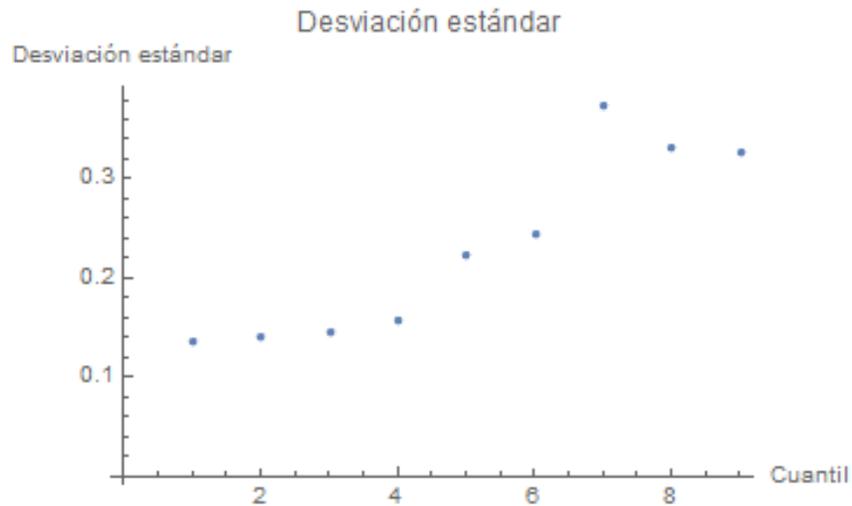


Fig. 4.11 Gráfica de los valores de desviación estándar para cada cuantil de Yardstick 1.

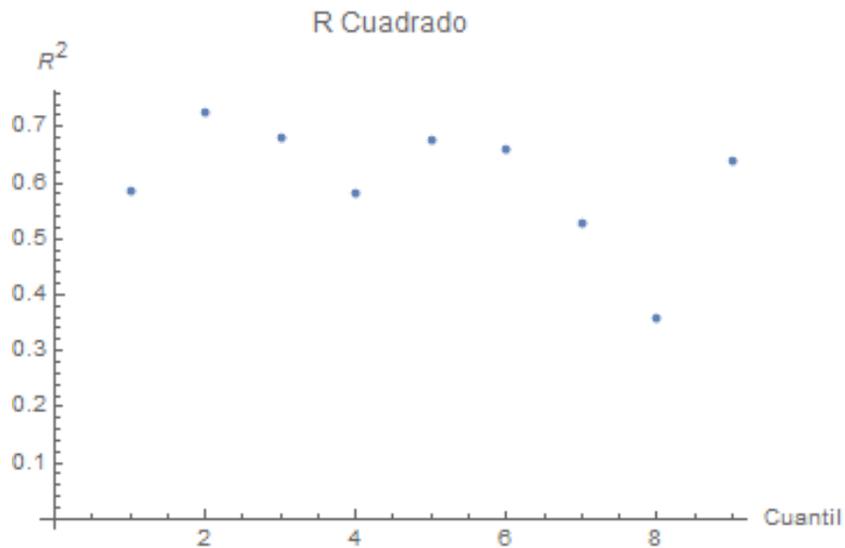


Fig. 4.12 Gráfica de  $R^2$  para cada cuantil de Yardstick 1.

En el caso de este método se puede observar que tanto la desviación estándar como el coeficiente de determinación tienen valores altos. La desviación estándar está en el orden de las décimas entre 0.1 y 0.5 y la variabilidad de los datos que no se puede explicar con las regresiones está entre 30% y 50%.

Dadas estas condiciones de resultados se descarta el análisis posterior que se realizó en Box Count. En este caso, se observa que, aunque se llegue a un modelo que más o menos se ajuste a los datos experimentales, éste tendrá una variación considerable que los hará poco confiables. El método que se programó y simuló se desecha como una opción para el cálculo de la dimensión fractal.

### 4.3 Yardstick 2. Aproximación por distancia a una región

Se revisará por último el segundo método que se programó para Yardstick. La figura 4.13 muestra los resultados obtenidos con este método.

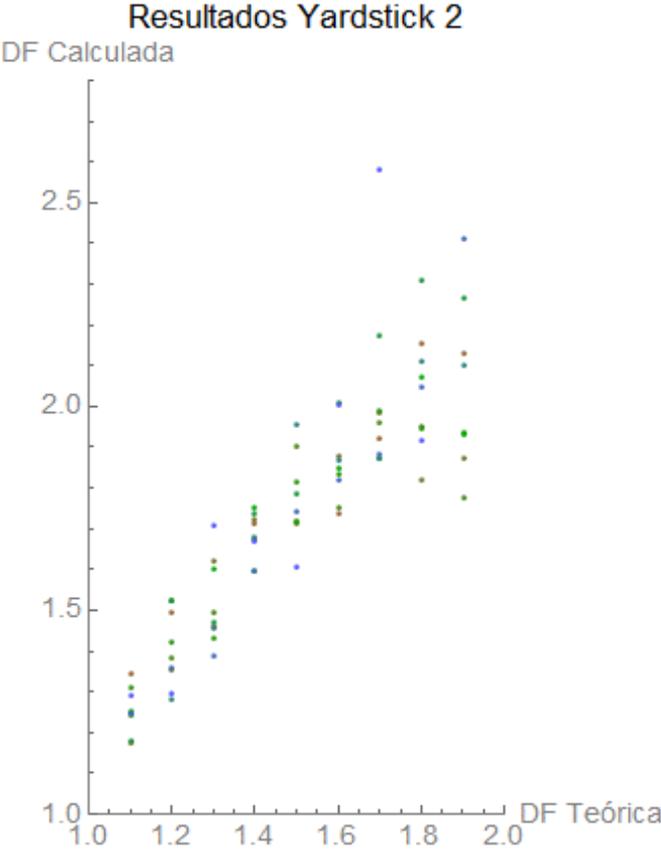


Fig. 4.13 Resultados de Yardstick 2.

Como en el caso de Yardstick 1, también se observan valores superiores a 2 para dimensiones fractales teóricas de 1.6 a 2. La dispersión es considerable en cada dimensión fractal dada, y no se ve una tendencia entre cuantiles. La dispersión es mucho mayor para la dimensión fractal 1.8 y 1.9.

Se procede entonces a analizar los datos por cuantil como en las gráficas ya observadas en los otros dos métodos.

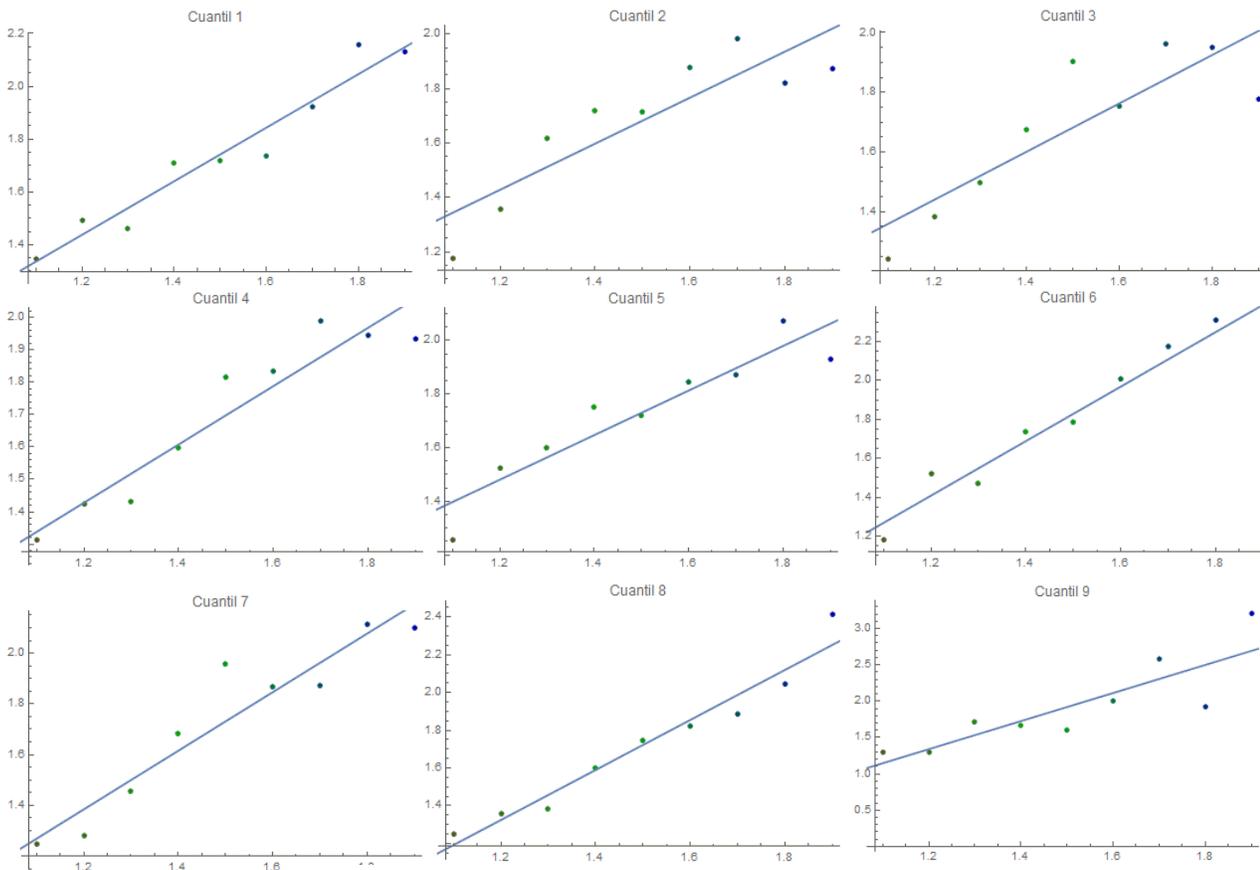


Fig. 4.14 Regresión lineal por cuantil de Yardstick 2

Analizando cualitativamente los resultados por cuantil, se observan algunas diferencias comparado con la fig. 4.10 de Yardstick 1. Si bien algunos valores son superiores a dos, la dispersión de los datos es mucho menor para varios cuantiles. En el caso de Yardstick 1, lo opuesto era lo observable. Esta aseveración es también evidente en las gráficas de desviación estándar y coeficiente de determinación que se muestran a continuación.



Fig. 4.15 Valores de desviación estándar por cuantil de Yardstick 2

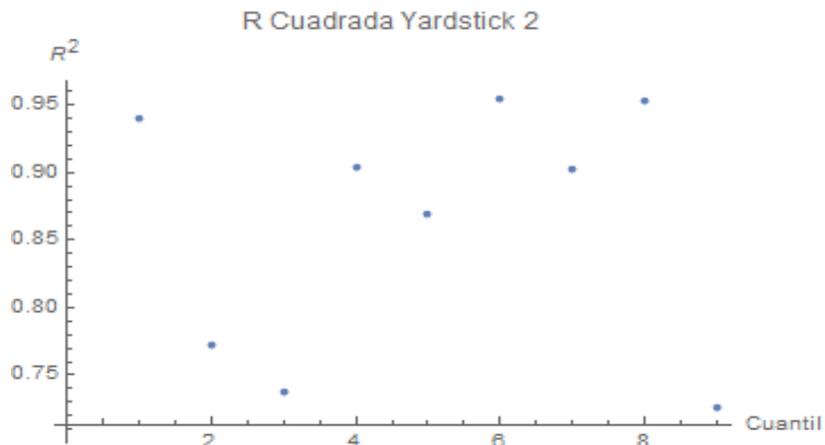


Fig. 4.16 Valores de R cuadrada por cuantil de Yardstick 2

Para este método observamos que la desviación estándar también es del orden de las décimas, pero menores a 0.15 y mayores a 0.05. La variación de los datos es mucho menor que la presente en Yardstick 1. Por otro lado, el coeficiente de determinación, o  $R^2$  se encuentra entre 0.75 y 0.95.

El porcentaje de variabilidad que no se puede explicar por la regresión lineal se encuentra entre 0.25 y 0.05. Dichos valores son muy parecidos a los que se obtuvieron en Box Count, por lo que se procede con el mismo análisis.

Se examinan y grafican los valores ordenados al origen de cada regresión lineal por cuantil en la figura 4.17.

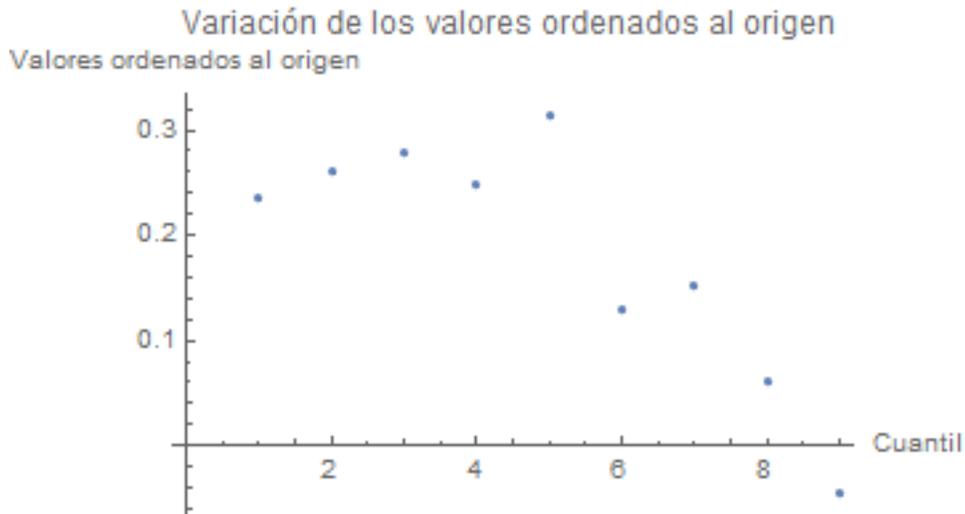


Fig. 4.16 Variación de los valores ordenados al origen por cuantil de Yardstick

En este caso el comportamiento parabólico no es claro, pero también se ajusta una curva para colapsar los datos posteriormente.

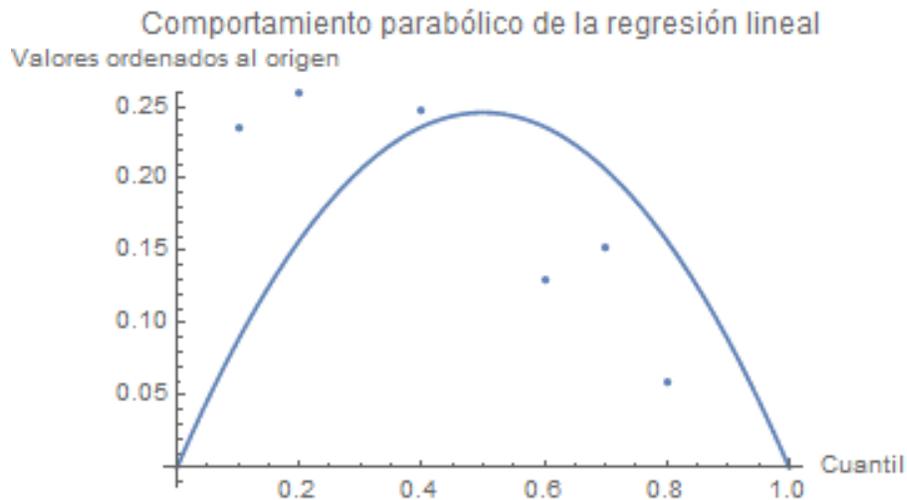


Fig. 4.19 Comportamiento parabólico de las regresiones lineales por cuantil de Yardstick 2

Del mismo modo que en Box Count, se colapsó la curva con la distancia entre el valor ordenado al origen y la parábola para cada valor calculado de Yardstick 2. Al colapsar los datos los valores para cada dimensión fractal teórica se observan así:

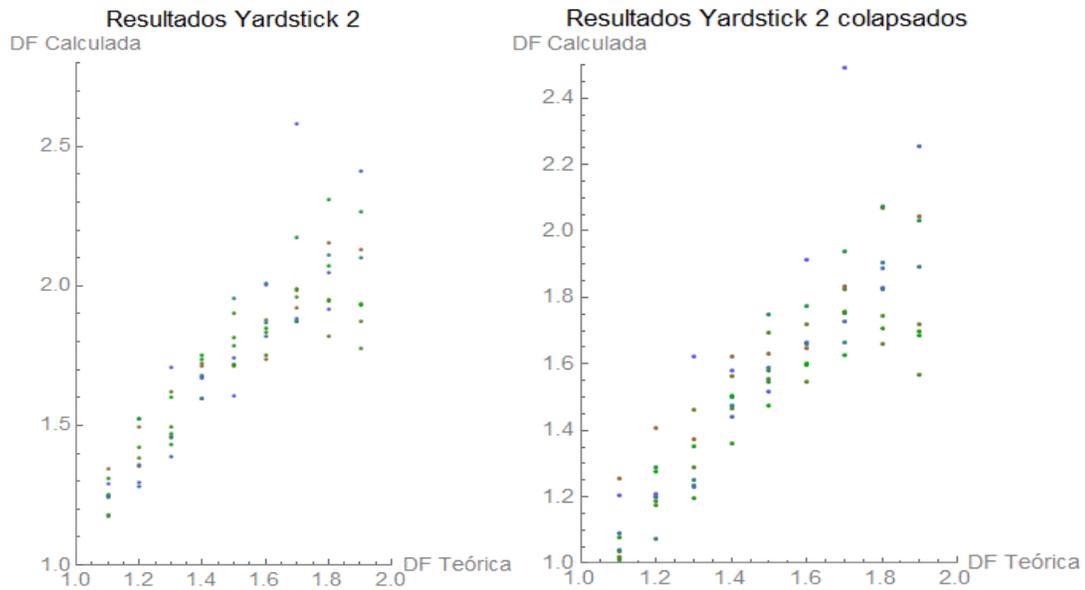


Fig. 4.20 Comparación de los resultados y los datos después de colapsar

Si bien los resultados siguen superando el límite superior, la mayoría de los datos sí se concentran en el rango permisible. Se puede, entonces, continuar con el modelo empírico para aproximar los valores de dimensión fractal.

$$DF_t = \frac{DF_m + 0.13}{1.1342} \quad (28)$$

La desviación estándar de los resultados colapsados fue igual a:

$$\sigma = 0.20 \quad (29)$$

Antes de colapsar la curva, Yardstick 2 presentaba una desviación estándar de  $\sigma = 0.18$ . Se observa que colapsar la curva no causó una mejora sustancial en la desviación estándar de los datos, si no que la aumentó. El método propuesto presenta una desviación estándar considerable y si se propone usarlo, el anterior es un factor que se debe tomar en cuenta.

## Capítulo 5. Discusión

En vista de los resultados obtenidos, se realizará en este capítulo una comparativa sencilla entre los métodos y las restricciones que presenta cada uno.

Para el caso de Yardstick 1 (aproximación por posición de coordenadas) es de importancia resaltar que el método programado fue una interpretación de la teoría de Yardstick por parte del grupo de trabajo. Se asumió que las posiciones de las coordenadas, cada dos, cada cuatro o cada ocho datos cumplían con los incrementos de distancias del planteamiento de Yardstick. Se observó con los resultados obtenidos que la aseveración resultó incorrecta.

Siguiendo con Yardstick 2 (aproximación por distancia a una región), se aseguró entonces que los datos seleccionados fueran en efecto los que estuvieran más cercanos a la distancia propuesta con un crecimiento en múltiplos de dos. Esta aproximación es la que más se apega al método original descrito en la literatura. Aun así, éste presentó datos fuera del límite superior permisible y con una alta desviación estándar. Se habló con anterioridad en la sección 3.2.3 que existe una alta variabilidad de los resultados obtenidos con este método, y este trabajo no es la excepción, se confirma lo que se reporta en la literatura.

Por último, queda revisar Box Count. Este método claramente da resultados mejores. Es de notar que la programación de este método fue muy sencilla, la cantidad de cálculos necesarios para llegar a la dimensión fractal es considerablemente menor a los de los métodos Yardstick y eso disminuye la incertidumbre generada por la manipulación de los datos.

Por otro lado, en la programación de Yardstick hay valores que se quedan fuera cuando se realiza la aproximación por distancia a una región, debido a que la regla no los alcanza a tocar por cercanía entre puntos o en su defecto lejanía. En Box Count esto no es un problema ya que todos los datos son considerados cuando se analizan las matrices de píxeles de la imagen en su totalidad, desde una matriz sencilla de  $2 * 2$  hasta la de la imagen completa de  $2^7 * 2^7$ .

Se observó en el análisis de los resultados que se realizaron ajustes a los datos en su particularidad para cada cuantil y a su vez para cada dimensión fractal simulada; con la finalidad disminuir en cierta medida la incertidumbre resultante de la naturaleza de los datos. Es por eso que, los ajustes arrojan un modelo más fidedigno para relacionar la dimensión fractal teórica y medida.

Para cerrar este trabajo se hablará como generalidad sobre el uso de la dimensión fractal para el cálculo de la rugosidad de una superficie de ingeniería.

Como primer punto, no se debe dejar de lado que se trata de un estudio estocástico donde la variación estadística es un elemento esencial del análisis. La dispersión de los datos, en gran medida, tiene su fundamento en esta variación inherente. Por otro lado, los métodos que se ocupan para su estudio pueden incrementar esta variación y pueden agregar un sesgo. La desviación estándar encontrada, en cada uno de los métodos, es el resultado de estos dos factores.

Asimismo, se tiene una pérdida de información considerable ya que se está tratando de calcular la dimensión fractal de una superficie rugosa aleatoria a través del análisis de sus contornos por cuantil. Si bien la teoría nos dice que la dimensión fractal no cambia si no solo pierde una dimensión, este cambio de dimensión sí representa una pérdida de información, porque como se sabe: "El todo es más que la suma de sus partes". Se espera también que la dispersión de los datos en los contornos sea mayor que en la superficie, y esto es comprobable en las gráficas por cuantil de cada uno de los métodos. Si la duda que surge aquí es: ¿Entonces por qué se estudia la dimensión fractal de los contornos para conocer la de la superficie? La respuesta se encuentra en que este estudio se puede extender a las superficies de contacto que una vez que son deformadas por otra superficie, se pueden estudiar a través de los contornos de contacto con un análisis parecido al que se realizó aquí.

Como tercer punto, en la realidad una superficie aleatoria es un continuo de ondas superpuestas con valles y crestas, tal como se revisó en el capítulo uno, pero todo análisis tanto simulado como medido realiza una discretización de esta información. Esto también se le añade al punto anterior donde tenemos pérdida de información

que influye en el comportamiento de los resultados y de la aplicación de los métodos para el cálculo de la dimensión fractal.

El uso de la dimensión fractal para muchos campos de la investigación todavía no está del todo extendido y aceptado por la comunidad científica, principalmente por las condiciones del análisis y la incertidumbre de los métodos de cálculo. La autora confía en que, promoviendo esta investigación, cuestionando los estándares actuales del estudio de la rugosidad, y entendiendo mejor la naturaleza de la información; este estudio será cada vez mejor recibido. Se espera que esta investigación ayude a este objetivo.

Por último, es clave mencionar que esta tesis es una aproximación teórica a los métodos de cálculo de dimensión fractal y superficies con rugosidad aleatoria (las superficies al final son una simulación a través del Midpoint Algorithm). Los siguientes pasos para este trabajo y para su validación experimental, sería a partir de la generación de superficies rugosas a través de los métodos mencionados en la sección 2.2 y la aplicación del programa en los datos de rugosidad de superficies reales.

## Capítulo 6. Conclusión

El uso de la dimensión fractal en el análisis de la rugosidad nos permite homogeneizar los parámetros que se utilizan para su cálculo, principalmente debido a que es independiente del área de análisis, la escala de la superficie y la resolución del instrumento de medición que se utilice.

La extensión de la dimensión fractal solo está limitada por las técnicas de cálculo y el procesamiento de los datos. Es de destacar que existen técnicas suficientes para que el usuario escoja la que le brinde más utilidad en su estudio, y aunque en este trabajo solo se mencionan dos, se invita al lector a que explore todo el universo de métodos para calcular la dimensión fractal.

Asimismo, se concluye que aun cuando los resultados de esta investigación presentan variaciones considerables, esto no lo hace razón de descarte para usar la dimensión fractal en estudios de rugosidad. Es de recordar que todos los cálculos son estimaciones con cierto rango de confianza y este no es la excepción. Queda como responsabilidad del usuario de la dimensión fractal estimar cuánta variación es permisible y refinar los métodos requeridos.

Hasta que no se haga una utilización más amplia del método por parte de la industria donde se determinen rangos de uso, estandarizaciones de los métodos y las interpretaciones de los resultados, el uso de la dimensión fractal estará confinada a discusiones científicas que solo los más familiarizados con el tema podrán entender.

## Capítulo 7. Bibliografía

- [1] B. Bhushan, «Surface roughness analysis and measurement techniques,» *Modern Tribology Handbook, Two Volume Set*, pp. 79-150, 2000.
- [2] E. Mainsah, J. A. Greenwood y D. G. Chetwynd, *Metrology and properties of engineering surfaces.*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] R. Suleiman, «Telescope mirrors,» 11 abril 1990. [En línea]. Available: <https://www.cfa.harvard.edu/uvcs/uvcspap/node6.html>.
- [4] S. Budhe, A. Ghumatkar, N. Birajdar y M. D. Banea, «Effect of surface roughness using different adherend materials on the adhesive bond strength,» *Applied adhesion science*, pp. 1-10, 2015.
- [5] A. Lloyd, «Engineering surfaces to enhance cell adhesion,» *Materials Today*, p. 19, 2003.
- [6] B. N. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino, A. I. Volokitin y E. Tosatti, «On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion,» *Journal of physics: Condensed matter*, 17(1), R1, 2004.
- [7] J. C. Vickerman, *Surface analysis: the principal techniques*, John Wiley & Sons, 2011.
- [8] B. Bhushan, *Introduction to Tribology*, John Wiley & Sons, 2013.
- [9] J. Robert L., G. Hamed, L. Hyeon, R. Amir y W. Xianzhang, «Chapter 3. Contact Mechanics,» de *Tribology for Scientists and Engineers*, New York, Springer, 2013, pp. 93-140.
- [10] E. Gadelmawla, M. Koura, T. Maksoud, I. Elewa y H. Soliman, «Roughness Parameters,» *Journal of materials processing technology*, pp. 133-145, 2002.
- [11] J. Raja, B. Muralikrishnan y F. Shengyu, «Recent advances in separation of roughness, waviness and form,» *Precision Engineering*, 26(2), pp. 222-235, 2002.
- [12] M. Wisniewska, «Surface roughness measurements: emerging importance of the uncertainty evaluation,» *PhD Interdisciplinary Journal*, pp. 243-250.
- [13] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1977.

- [14] B. Mandelbrot, «How long is the coast of Britain. Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension,» *Science*, vol. 156, nº 3775, pp. 636-638, 1967.
- [15] H. Zahouani, R. Vargiolu y J. L. Loubet, «Fractal models of surface topography and contact mechanics,» *Mathematical and Computer Modelling*, pp. 517-534, 1998.
- [16] A. Majumdar y C. Tien, «Fractal characterization and simulation of rough surfaces,» *Wear, Volume 136*, pp. 313-327, 1990.
- [17] B. B. Mandelbrot, «Self-Affine Fractals and Fractal Dimension,» *Physica Scripta*, pp. 257-260, 1985.
- [18] M. S. Rahman, «Fractal analysis,» *Handbook of Food and Bioprocess Modeling Techniques*, pp. 435-450, 2006.
- [19] F. Baudoin, «Stochastic Processes,» de *International Encyclopedia of Education*, West Lafayette, Elsevier, 2010, pp. 451-452.
- [20] S. Pierre y J.-F. Rivest, «On the Validity of Fractal Dimension Measurements in Image Analysis,» *Journal of Visual Communication and Image Representation*, pp. 217-229, 1996.
- [21] G. Shevchenko, «Fractional Brownian Motion in a Nutshell,» de *7th Jagna International Workshop*, Jagna, 2014.
- [22] M. Hinojosa y M. E. Reyes, «La rugosidad de las superficies: Topometría,» *Ingenierías Vol. IV, No. 11*, pp. 27-33, 2001.
- [23] A. Y. Nee, *Handbook of Manufacturing Engineering and Technology*, London: Springer-Verlag, 2015.
- [24] Applications Laboratory, «Lapping and Polishing Basics,» SBT, California.
- [26] G. Yang, B. Wang, K. Tawfiq, H. Wei, S. Zhou y G. Chen, «Electropolishing of surfaces: theory and applications,» *Surface Engineering*, pp. 1-18, 2016.
- [27] N. Doron, H. David y H. Baruch, «Electropolishing effect on roughness metrics of ground stainless steel: A length scale study,» *Surface topography: Metrology and properties*, 2018.
- [28] V. Y. Avanish Kumar Dubey, «Laser Beam Machining- A review,» *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, pp. 609-628, 2008.
- [29] D. S. Jayakrishnan, «Electrodeposition: The versatile technique for nanomaterials,» de *Corrosion Protection and Control Using Nanomaterials*, Woodhead Publishing, 2012, pp. 86-125.

- [30] B. Dale P., M. Rolf H. y T. Charles W., «Roughness Development in Metal Electrodeposition,» *The Electrochemical Society*, pp. 2199-2207, 1989.
- [31] L. Yiliang, Y. Chang y G. J. Cheng, «A review: Warm laser shock peening and related laser processing technique,» *Optics and Laser Technology*, 2015.
- [32] J. Munemasa y T. Kumakiri, «Effect of the surface roughness of substrates on the corrosion properties of films coated by physical vapour deposition,» *Surface and coatings technology*, pp. 496-499, 1991.
- [33] C. Schoenenberg, S. F. Alvarado y C. Ortiz, «Scanning tunneling microscopy as a tool to study surface roughness of sputtered thin films,» *Journal of Applied Physics*, pp. 4258-4261, 1989.
- [34] M. P. Kanouff, R. A. Neiser y T. J. Roemer, «Surface Roughness of Thermal Spray Coatings Made with Off-Normal Spray Angles,» *Journal of Thermal Spray Technology*, pp. 219-228, 1997.
- [35] M. Kunieda, «Electric Discharge Machining,» de *Handbook of Manufacturing Engineering and Technology*, Londres, Springer-Verlag, 2015, pp. 1551-1581.
- [36] S. Huang y X. Li, «Improved Random Midpoint-Displacement Method for Natural Terrain Simulation,» *IEE Computer Society*, pp. 255-258, 2010.
- [37] M.-F. G. Tsai, «Fractal Landscapes,» Mayo 2003. [En línea]. Available: <https://www.sfu.ca/~rpyke/335/projects/tsai/report1.htm?fbclid=IwAR0sJmTUQ QaIPMgIfF1AOdbRkjDC0O4M8hRMFwFvDJ2GYIGixNjtjZdak>.
- [38] S. Dietmar, «Chapter 2. Algorithms for random fractals,» de *The Science of Fractal Images*, New York, Springer-Verlag, 1988, pp. 71-136.
- [39] C. Q. Yuan, J. Li, X. P. Yan y Z. Peng, «The use of the fractal description to characterize engineering surfaces and wear particles,» *Wear*, pp. 315-326, 2003.
- [40] T. M. Neboja, N. E. Guy, K. Bojana y R. Nemanja, «Box-count analysis of two dimensional images: methodology, analysis and classification,» *International Conference on Control Systems and Computer Science*, pp. 306-312, 2013.
- [41] W. Simon, «The startup,» 8 enero 2020. [En línea]. Available: <https://medium.com/swlh/the-coastline-paradox-de3adee92b65>.
- [42] A. Robert, «Estimating fractal dimension with the divider method in geomorphology,» *Geomorphology*, pp. 131-141, 1992.

- [43] K. Brian, «A Review of the Methods Used to Determine the Fractal Dimension of Linear Features,» *Mathematical Geology*, pp. 23-46, 1994.
- [44] Y. Zou, M. Kästner y E. Reithmeier, «Fractal analysis of a new generation of HVOF sprayed coatings based on optical surface metrology,» *De Gruyter Oldenbourg*, pp. 365-373, 2016.
- [45] L. Zhong, F. Zeng y G. Xu, «Comparison of fractal dimension calculation methods for channel bed profiles,» *Procedia engineering*, vol. 28, pp. 252-257, 2012.
- [46] S. I. Buhai, «Quantile Regression: Overview and Selected Applications,» p. 29, 2004.
- [47] R. Koenker y K. F. Hallock, «Quantile Regression,» *Journal of Economic Perspectives*, vol. 15, nº 4, pp. 143-156, 2001.
- [48] J. L. Devore, Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias, Belmont: Cengage Learning, 2016.
- [49] M. S. Milan Paunovic, Fundamentals of electrochemical deposition, Hoboken: John Wiler & Sons, Inc., 2006.
- [50] S. Prasanta y G. Niloy, «Finite element contact analysis of fractal,» *Journal of Physics D: Applied Physics*, pp. 4245-4252, 2007.
- [51] G. Zangari, «Fundamentals of electrodeposition,» de *Theory and practice of metal electrodeposition*, Charlottesville, Elsevier, 2011, pp. 141-160.
- [52] M. S. Milan Paunovic, Fundamentals of electrochemical deposition, Hoboken: John Wiler & Sons, Inc., 2006.
- [53] G. Zangari, «Fundamentals of electrodeposition,» de *Theory and practice of metal electrodeposition*, Charlottesville, Elsevier, 2011, pp. 141-160.
- [54] C. A. D. Rodriguez y G. Tremiliosi-Filho, «Electrochemical deposition,» de *Encyclopedia of Tribology*, Boston, Springer, 2013.
- [55] C. A. D. Rodriguez y G. Tremiliosi-Filho, «Electrochemical deposition,» de *Encyclopedia of Tribology*, Boston, Springer, 2013.
- [56] D. S. Jayakrishnan, «Electrodeposition: The versatile technique for nanomaterials,» de *Corrosion Protection and Control Using Nanomaterials*, Woodhead Publishing, 2012, pp. 86-125.
- [57] M. Kunieda, «Electric Discharge Machining,» de *Handbook of Manufacturing Engineering and Technology*, Londres, Springer-Verlag, 2015, pp. 1551-1581.

- [58] V. Y. Avanish Kumar Dubey, «Laser Beam Machining- A review,» *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, pp. 609-628, 2008.
- [59] Applications Laboratory, «Lapping and Polishing Basics,» SBT, California.
- [60] J. Robert L., G. Hamed, L. Hyeon, R. Amir y X. Wang, «Contact Mechanics,» de *Tribology for Scientists and Engineers: From Basics to Advanced Concepts*, Nueva York, Springer Science+Business Media, 2013, pp. 93-140.
- [62] P. J. Kelly y R. D. Arnell, «Magnetron sputtering: A review of recent developments and applications,» *Surface engineering, surface instrumentation and vacuum technology*, pp. 159-172, 2000.
- [63] P. J. Kelly y R. D. Arnell, «Magnetron sputtering: A review of recent developments and applications,» *Surface engineering, surface instrumentation and vacuum technology*, pp. 159-172, 2000.
- [64] D. V. Hutton, «Basic Concepts of the Finite Element Method,» de *Fundamentals of finite element analysis*, New York, McGraw-Hill, 2004, pp. 1-16.
- [65] Y. Liao, Y. Chang y G. Cheng, «A review: Warm laser shock peening and related laser processing technique,» *Optics and Laser Technology*, 2015.
- [66] M. P. Kanouff, R. A. Neiser y T. J. Roemer, «Surface Roughness of Thermal Spray Coatings Made with Off-Normal Spray Angles,» *Journal of Thermal Spray Technology*, pp. 219-228, 1997.
- [67] A. K. Ruprecht, K. Klaus, T. Weisendanger, H. J. Tiziani y O. Wolfgang, «Chromatic confocal detection for high-speed micro-topography measurements,» de *Three Dimensional Image Capture and Applications IV*, Stuttgart, SPIE, 2004, pp. 53-60.
- [68] W. Yang, B. Wang, K. Tawfiq, H. Wei, S. Zhou y G. Chen, «Electropolishing of surfaces: theory and applications,» *Surface Engineering*, pp. 1-18, 2016.
- [69] R. Schouwenaars, V. H. Jacobo y A. Ortiz, «The effect of vertical scaling on the estimation of the fractal dimension of randomly rough surfaces,» *Applied Surface Science*, pp. 838-846, 2017.
- [70] J. Jennings, «The Interesting Fact of the Day Blog,» 3 septiembre 2020. [En línea]. Available: <https://www.theifod.com/why-knowing-the-true-length-of-a-coastline-or-border-is-impossible/>.

