

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA



DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA



Apuntes de ANÁLISIS Y DISEÑO DE CIMENTACIONES Tomo I

Agustín Deméneghi Colina
Armando Rafael Hermosillo Arteaga
Margarita Puebla Cadena
Héctor Sanginés García





Apuntes de
**ANÁLISIS Y DISEÑO
DE CIMENTACIONES**
Tomo I

Agustín Deméneghi Colina
Armando Rafael Hermosillo Arteaga
Margarita Puebla Cadena
Héctor Sanginés García

División de Ingenierías Civil y Geomática
Departamento de Geotecnia

Acrobat Reader
Haz Click

DEMÉNEGHI COLINA, Agustín
HERMOSILLO ARTEAGA, Armando Rafael
PUEBLA CADENA, Margarita
SANGINÉS GARCÍA, Héctor
*Apuntes de análisis y diseño
de cimentaciones. Tomo I*
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2023, 325 p.

*Apuntes de análisis y diseño
de cimentaciones. Tomo I*

Segunda edición impresa, 2018

Primera edición electrónica de un ejemplar (7 MB) Formato PDF
Publicado en línea en julio de 2023

D.R. © 2023, Universidad Nacional Autónoma de México,
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, CDMX.

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional
Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total
o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita
del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Cuidado de la edición: María Alicia Medina
Diseño y formación editorial: Nismet Díaz Ferro
Imagen de la portada: armado de zapata aislada
Fotografía: Agustín Deméneghi Colina

PRÓLOGO

La revisión de la seguridad de una cimentación comprende dos aspectos: por un lado, se debe verificar que no se exceda la capacidad de carga admisible del terreno de cimentación y que las deformaciones que este experimente sean de pequeña magnitud y no afecten el buen funcionamiento de la estructura; cabe aclarar que, estos temas pertenecen al ámbito de la mecánica de suelos. Por otra parte, se debe revisar la estabilidad del propio cimiento, lo cual se realiza con técnicas proporcionadas por la ingeniería estructural.

En general, la comprobación de la seguridad de una cimentación se lleva a cabo siguiendo el orden anterior, *de abajo hacia arriba*, es decir, se inicia con el terreno de cimentación para finalizar con el análisis y diseño estructural de la subestructura.

En estos apuntes, nosotros seguimos con la secuencia anterior: en el capítulo 1, iniciamos con la determinación de la capacidad de carga y continuamos con el cálculo de las deformaciones de los suelos en el capítulo 2; en el capítulo 3, tratamos el tema de la interacción suelo-estructura que es, fundamentalmente, un aspecto del análisis estructural; y en el capítulo 4, se trata la etapa final que corresponde al diseño estructural.

En esta obra, nosotros hemos tratado de buscar un equilibrio, en la medida de lo posible, entre la exposición formal de la teoría y las aplica-

ciones de esta a la práctica. En este sentido, cada capítulo inicia con esta secuencia: se exponen los conceptos teóricos —con ejemplos ilustrativos— y se termina el capítulo con un enfoque pragmático de lo estudiado en los incisos precedentes, con aplicaciones concretadas al análisis y diseño de las cimentaciones. Vale la pena señalar que, en nuestra opinión, si el alumno entiende el comportamiento del terreno de cimentación y conoce, adecuadamente, los métodos de análisis y diseño de los cimientos, él podrá elegir alguno de los variados procedimientos prácticos que existen para tal fin, con una alta probabilidad de que el proyecto final resultará satisfactorio.

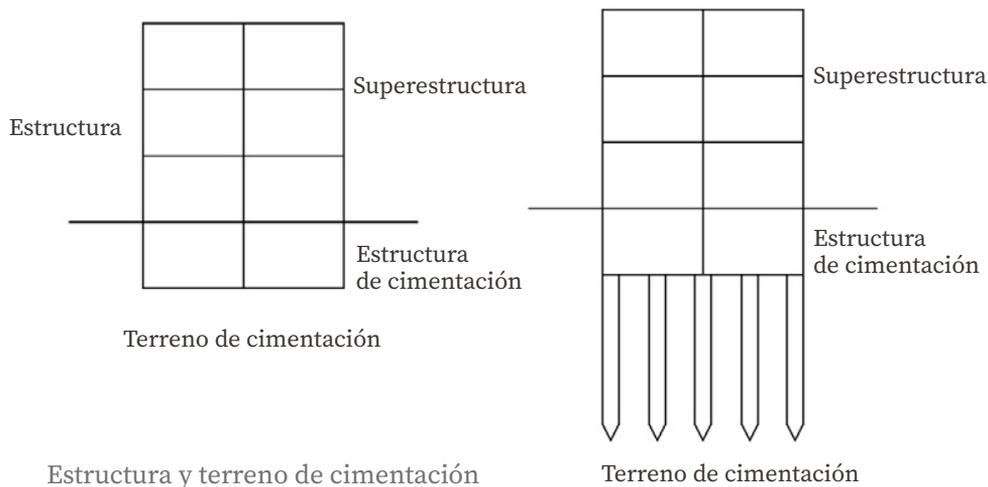
Finalmente, agradecemos al Departamento de Geotecnia, de la División de Ingenierías Civil y Geomática, de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad Nacional Autónoma de México, el apoyo y las facilidades otorgadas para la elaboración de estos apuntes.

Agustín Deméneghi Colina
Armando Rafael Hermosillo Arteaga
Margarita Puebla Cadena
Héctor Sanginés García

INTRODUCCIÓN

Según el diccionario, un cimiento es la obra enterrada que sirve de base y fundamento a los edificios y a otras construcciones.

Cuando se estudia una cimentación, nosotros debemos considerar dos medios: la estructura y el subsuelo. El cimiento o estructura de la cimentación es la parte de la estructura que transmite las cargas al subsuelo; también, se le conoce como estructura de fundación o de cimentación, subestructura o infraestructura. Por su parte, el terreno de cimentación es la parte del subsuelo que recibe las cargas de la estructura. Por lo tanto, al hablar de una cimentación, debemos considerar la estructura de cimentación y el terreno de cimentación.



Estructura y terreno de cimentación

Terreno de cimentación

En efecto, existen tantas clases de estructuras como obras construidas por el ser humano: las presas, terraplenes, edificios, etc. En este curso, nos abocaremos, principalmente, a la cimentación de edificios. El ingeniero de cimentaciones debe conocer, lo mejor posible, las características de la estructura: el proyecto arquitectónico, proyecto estructural, etc. Un factor importante que se debe conocer es el relativo a la magnitud y distribución del sistema de cargas que actuará sobre la subestructura.

Las cargas que obran sobre un cimiento son de diferentes clases; en general, se dividen en acciones permanentes, acciones variables y acciones accidentales; cada una de ellas actúa de manera diferente sobre un cimiento. En un edificio, la principal acción es la carga muerta que actúa en forma permanente y se emplea para revisiones a corto y a largo plazo, mientras que, la carga viva varía con el tiempo; por ello, se tienen que considerar diferentes magnitudes de carga viva para revisiones a corto plazo (carga viva máxima), a largo plazo (carga viva media) y para condiciones accidentales más conocidas son las debidas a efectos de sismo o de viento, aunque otras acciones pueden ser importantes: las inundaciones por huracanes en construcciones cercanas a la costa, fuerzas de erosión del subsuelo, etc.

En relación con el subsuelo, el medio de cimentación está formado por los materiales que constituyen la corteza terrestre que son los suelos y las rocas (comúnmente, al medio de cimentación se le conoce como terreno de cimentación). La mecánica de suelos estudia las propiedades de los primeros y la mecánica de rocas las propiedades de las segundas, ciencias que son de gran utilidad para ambas en la geología. Por consiguiente, los principales apoyos de la ingeniería de cimentaciones, en lo que respecta al subsuelo, lo constituyen la geología, la mecánica de suelos y la mecánica de rocas.

La geología es un gran auxiliar para una estimación preliminar de las características del terreno de cimentación; en realidad, las propiedades de este son en gran parte función de su origen geológico. Así, los suelos de origen aluvial, eólico, pie de monte o residuales tienen propiedades mecánicas diferentes entre sí. Un adecuado conocimiento de la geología permite tener una idea habitual de los problemas de cimentación que se pueden presentar y, en consecuencia, se puede hacer un programa racional de la exploración del subsuelo.

Otros aspectos importantes son el conocimiento de las condiciones ambientales que están, de hecho, relacionadas con la geología, las condiciones hidráulicas del subsuelo (posición del NAF [Nivel de Aguas Freáticas], los niveles piezométricos, entre otros), las características sísmicas (magnitud e intensidad de los sismos, propiedades dinámicas del subsuelo), etc.

Una vez que se conocen los datos de la estructura y las características geológicas, se procede a determinar las propiedades mecánicas del terreno de cimentación mediante pruebas de campo, ensayos de laboratorio, estos últimos realizados en muestras extraídas del subsuelo. Para lo anterior, se realiza un programa de exploración del terreno que depende de los dos factores ya mencionados (estructura y geología).

Con los datos del sistema de cargas sobre el cimiento y las propiedades mecánicas del terreno de cimentación, se procede a revisar la seguridad del terreno de cimentación, tanto de la capacidad de carga por resistencia al corte como por deformaciones del mismo. Esta revisión se debe hacer para condiciones a corto plazo y a largo plazo, bajo hechos accidentales u otras que pudieran provocar problemas de estabilidad del subsuelo.

El tiempo de estructura de la cimentación que se elige es aquella que cumple todos y cada uno de los requisitos de seguridad al menor costo.

Por lo general, este proceso se hace a base de iteraciones, pues no se conoce *a priori* la clase de infraestructura óptima para un edificio y subsuelo dados.

Una vez seleccionada la subestructura, se procede al análisis y diseño estructural de ella con métodos usuales del diseño estructural, tomando precauciones especiales como la protección contra cambios volumétricos, protección del acero de refuerzo, protección contra la erosión del subsuelo, etc. En este *ítem*, tanto, el análisis como el diseño estructural juegan un papel importante en la ingeniería de cimentaciones.

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

CONTENIDO

Prólogo	IV
Introducción	VI
Contenido	X
CAPÍTULO 1. Capacidad de carga	1
1.1. Capacidad de carga última de un suelo	2
1.2. Efecto de la forma de la cimentación	5
1.3. Capacidad de carga resistente. Factores de resistencia	6
1.4. Presión última sobre el terreno. Factores de carga	6
1.5. Cimiento sometido a carga vertical y momento	7
1.6. Revisión de la seguridad de una cimentación	9
1.7. Suelos friccionantes	10
1.7.1. Falla general y falla local	10
1.7.2. Efecto de la presencia del NAF (Nivel de Aguas Freáticas) ..	11
1.7.3. Revisión de la seguridad del terreno de cimentación	13
1.7.4. Zapata sometida a carga vertical	15
1.7.5. Zapata sometida a carga vertical y dos momentos	21
1.8. Suelos cohesivos totalmente saturados	24
1.8.1. Capacidad de carga de una zapata corrida en suelos totalmente saturados	26
1.9. Suelos cohesivos parcialmente saturados	28
1.9.1. Capacidad de carga de una zapata corrida en suelos parcialmente saturados	32

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

X

1.10.	Suelos cementados	33
1.11.	Otras clases de suelos	35
1.12.	Uso de correlaciones	36
1.12.1.	Suelos friccionantes	36
1.12.2.	Suelos cohesivos	39
1.13.	Experiencia local	41

CAPÍTULO 2. Cálculo de deformaciones en suelos 48

2.1.	El fenómeno de la deformación en los suelos	48
2.2.	Compresión por cambio de volumen	52
2.3.	Compresión por cambio de forma	54
2.4.	Efecto de la presión de confinamiento	55
2.5.	Efecto de la trayectoria de esfuerzos	59
2.6.	Incremento neto de carga	61
2.7.	Influencia de la clase de suelo	61
2.7.1.	Suelos friccionantes	62
2.8.	Efecto de la presencia del NAF	63
2.9.	Suelos plásticos totalmente saturados	65
2.10.	Suelos plásticos parcialmente saturados	70
2.11.	Suelos poco plásticos, cementados, parcialmente saturados .76	
2.12.	Empleo de fórmulas elásticas	79
2.13.	Uso de correlaciones	79
2.14.	Suelos friccionantes	80
2.15.	Arena normalmente cargada	81
2.16.	Arena precargada	81
2.17.	Suelos cohesivos totalmente saturados	83
2.18.	Suelos cohesivos parcialmente saturados	83
2.19.	Módulo de deformación según Bowles	84
2.20.	Experiencia local	85

CAPÍTULO 3. Interacción suelo-estructura 93

3.1.	Interacción estática suelo-estructura	93
------	---	----

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

3.2.	Interacción suelo-zapatas aisladas	94
3.2.1.	Definición de módulo de reacción	94
3.2.2.	Análisis de la interacción suelo-zapatas aisladas	95
3.2.3.	Determinación de los módulos de reacción del suelo	103
3.3.	Interacción suelo-cimiento continuo	107
3.4.	Resolución de la interacción suelo-estructura estática mediante un método iterativo	129
3.5.	Método aproximado para tomar en cuenta la rigidez angular de las columnas que llegan a la estructura de cimentación ..	134
3.6.	Determinación de elementos mecánicos	136
3.7.	Interacción suelo-losa de cimentación	140

CAPÍTULO 4. Diseño estructural de cimientos 147

4.1.	Diseño estructural de una zapata	147
4.1.1.	Determinación de elementos mecánicos	147
4.2.	Diseño estructural	150
4.2.1.	Tensión diagonal	150
4.2.2.	Flexión	152
4.2.3.	Penetración	155
4.2.4.	Temperatura	158

ANEXOS

A	Cálculo del asentamiento de un cimiento en arena	178
A.1.	Introducción	178
A.2.	Ecuación constitutiva	179
A.3.	Cálculo de la deformación de un elemento de suelo granular	184
A.4.	Cálculo del asentamiento inmediato de una zapata rectangular	188
A.5.	Conclusiones	191

B	Cálculo de asentamientos en suelos friccionantes.	
	Método de Schmertmann	193
B.1.	Cálculo del asentamiento diferido de una zapata rectangular	195
C	Método de Kondner	197
C.1.	Cálculo del asentamiento de una zapata rectangular por el método de Kondner	201
D	Método de Fredlund y Rahardjo	203
D.1.	Cálculo de la deformación por el método de Fredlund y Rahardjo	207
E	Cálculo de las deformaciones	209
E.1.	Carga uniformemente repartida en un rectángulo	210
E.2.	Carga uniformemente repartida en un círculo	211
E.3.	Carga triangular	212
E.4.	Cimientos sujetos a carga vertical y momento	213
E.5.	Fórmulas para deformaciones elásticas	218
E.6.	Rigidez lineal vertical	219
E.7.	Círculo cargado	221
F	Teoría de la consolidación primaria de Terzaghi	225
F.1.	Deformación vertical de un estrato de arcilla	226
F.2.	Ecuación diferencial de la consolidación primaria	228
F.3.	Solución de la ecuación diferencial de consolidación	233
F.4.	Grado de consolidación de un estrato de arcilla	234
F.5.	Cálculo del asentamiento de un edificio debido a la consolidación del suelo	236
G	Consolidación secundaria	239
G.1.	Teoría de consolidación secundaria	240
G.2.	Consolidación primaria y secundaria	248

H	Método de Rigideces.	
	Marcos planos con barras inclinadas	251
I	Dinámica de suelos.	
	Vibraciones de sistemas de un grado de libertad	275
I.1.	Vibraciones libres	275
I.2.	Vibraciones libres amortiguadas	280
I.3.	Vibración de un bloque vertical	290
I.4.	Vibraciones estacionarias	291
I.5.	Vibraciones forzadas	292
I.6.	Movimiento estacionario de la base	294
I.7.	Vibración debida a la rotación	299
I.8.	Amortiguamiento	301
I.9.	Propagación de una onda de cortante en un sólido viscoelástico	307
	Índice de figuras	309
	Índice de tablas	316
	Bibliohemerografía	319

En el análisis de una cimentación, se debe revisar la seguridad del terreno de apoyo, tanto en la capacidad de carga por resistencia al corte como por las deformaciones del mismo; esto se logra verificando que no se excedan los estados límite de falla y de servicio del suelo de cimentación.

En este capítulo, trataremos el estado límite de falla, el cual se entiende por cualquier situación que corresponda al agotamiento de la capacidad de carga del terreno de cimentación o al hecho de que ocurran daños irreversibles que afecten, significativamente, la resistencia del suelo ante nuevas aplicaciones de carga.

Los siguientes ejemplos son del estado límite de falla de una cimentación según el RCDF²⁸ (Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal) en el artículo 224:

- » Desplazamiento plástico local o general del suelo bajo la cimentación
- » Flotación
- » Falla de los elementos de la estructura de cimentación

²⁸ «Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, enero 29 de 2004.

1.1. Capacidad de carga última de un suelo

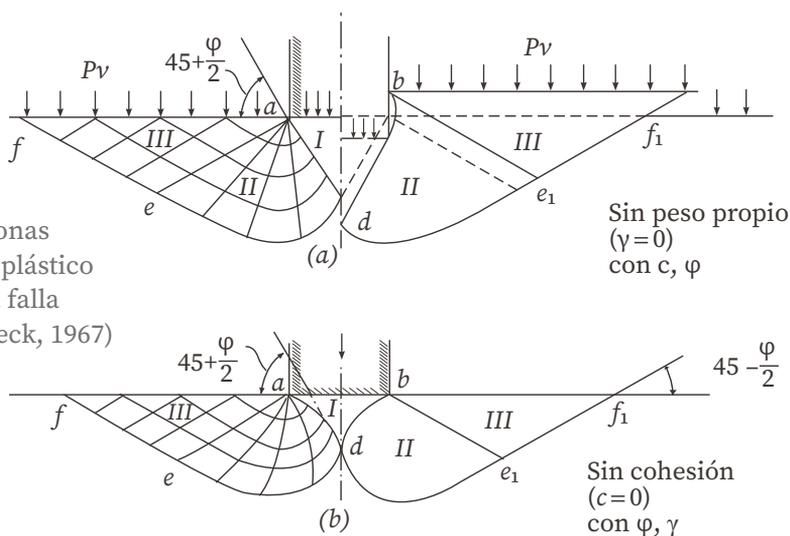
En relación con, el desplazamiento plástico local o general del suelo bajo la cimentación que es generado por la presión vertical conocida como capacidad de carga última por resistencia al corte del suelo, según los estudios de la teoría de la plasticidad respecto a dicha capacidad de carga, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

Según Terzaghi y Peck:

Si la base de una zapata continua descansa sobre la superficie de un suelo sin peso que posee cohesión y fricción, el terreno falla a través de cinco zonas (figura 1.1). Debido a la fricción y adhesión entre el suelo y la base de la zapata, la zona i permanece en estado elástico, actúa como si fuera parte de la zapata y penetra en el suelo como una cuña, sus fronteras forman un ángulo de $45^\circ + \varphi/2$ con la horizontal.

En las zonas II y III se genera un patrón de esfuerzos cortantes, los cuales en la zona III son iguales al estado pasivo de Rankine; las fronteras de la zona pasiva forman un ángulo de $45^\circ - \varphi/2$ con la horizontal.

Figura 1.1. Zonas de equilibrio plástico después de la falla (Terzaghi y Peck, 1967)



La zona II se conoce como zonas de esfuerzos radiales, porque las rectas de esta región plástica parten de las aristas de la zapata. La otra familia de curvas son espirales logarítmicas, cuyos centros se localizan en las aristas de la zapata.

La capacidad de carga última está dada por:

$$q_d = cN_c + p_v N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (1.1)$$

$$N_q = \tan^2 \left[45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right] e^{\pi \tan \varphi} \quad (1.2)$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \varphi \quad (1.3)$$

$$N_c = \frac{(N_q - 1)}{\tan \varphi} \quad (1.4)$$

Si el suelo no tiene cohesión pero, sí fricción y peso propio, el patrón de falla se muestra en la figura 1.1 b. Las fronteras de la zona elástica i son curvas; las dos ramas se intersecan en el punto *d*, formando un ángulo de $90^\circ - \varphi$. En la zona II, las líneas radiales son curvas. En la zona III, se presenta el estado pasivo de Rankine²⁹.

²⁹Terzaghi, K., & B. R. Peck, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 2a. ed., Wiley, 1967.

La ecuación de una espiral logarítmica se presenta en la siguiente figura:

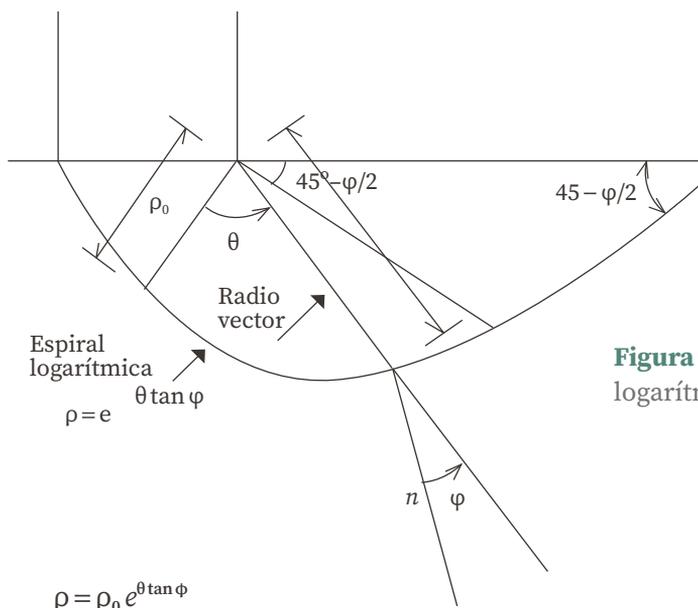


Figura 1.2. Espiral logarítmica

(1.5)

[$(\theta \tan \varphi)$ en radianes]

La espiral logarítmica tiene la propiedad de que el ángulo entre el radio vector y la normal a la curva vale φ (figura 1.2). En cimientos profundos, Zeevaert hace la hipótesis de que «...la superficie de falla se extiende hasta que esta se vuelve vertical...»³⁰ (figura 1.3); por lo tanto, el ángulo entre el radio vector y la horizontal vale φ :

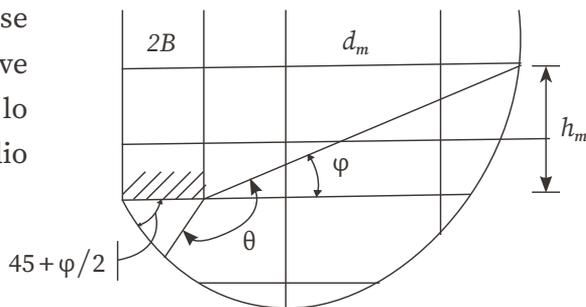


Figura 1.3. Espiral logarítmica en un cimiento profundo (Zeevaert, 1973)

³⁰ Zeevaert, L., *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973.

Cabe aclarar, que para la obtención de la ecuación de capacidad de carga, q_d (ecuación 1.1), se hicieron las siguientes hipótesis: el material es incompresible, su comportamiento es rígido-plástico y se trata de un estado de deformación plana.

Por lo demás, las limitaciones de las teorías sobre capacidad de carga no tienen una importancia práctica seria, porque la precisión de las soluciones, aún aproximadas, depende en mayor medida de nuestra habilidad para valuar las propiedades mecánicas de los suelos que entran en las ecuaciones, que los defectos de las propias teorías (Terzaghi y Peck, 1967).

1.2. Efecto de la forma de la cimentación

La expresión de capacidad de carga que proporciona la teoría de la plasticidad (ecuación 1.1) es válida para una zapata de longitud infinita. Para cimientos circulares, cuadrados y rectangulares se emplean factores de forma que son obtenidos experimentalmente. Así, la última capacidad de carga está dada por:

$$q_d = cN_c f_c + p_v N_q f_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma \quad (1.6)$$

$$f_c = 1 + 0.25 \frac{B}{L} \quad (1.7)$$

$$f_q = 1 + \frac{B}{L} \tan \varphi \quad (1.8)$$

$$f_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B}{L} \quad (1.9)$$

En un cimiento de planta circular, se toma $B = L = D$, siendo D el diámetro del cimiento. En todos los casos $B/L \leq 1$.

1.3. Capacidad de carga resistente. Factores de resistencia

Ahora, definamos la capacidad de carga resistente de un suelo con la siguiente expresión:

$$q_R = cN_c f_c F_{R1} + p_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma F_{R3} \quad (1.10)$$

donde:

F_{Ri} : son factores de resistencia (o factores de reducción de resistencia), los cuales miden el grado de incertidumbre que se tiene respecto a la variación de la resistencia del suelo.

En general: $F_{Ri} \leq 1$

1.4. Presión última sobre el terreno. Factores de carga

La presión de contacto media entre cimiento y terreno vale:

$$q = \sum \frac{Q}{A} \quad (1.11)$$

donde:

ΣQ : es la sumatoria de cargas al nivel de desplante del cimiento.

A : es el área del cimiento.

Además:
$$q = \frac{1}{A} (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n)$$

ahora, definamos la presión última sobre el terreno de la siguiente forma:

$$q_{ult} = \frac{1}{A} (Q_1 F_{c1} + Q_2 F_{c2} + Q_3 F_{c3} + \dots + Q_n F_{cn}) \quad (1.12)$$

donde:

F_{ci} : son factores de carga que miden la incertidumbre que se tiene respecto a la intensidad de las cargas.

Normalmente, $F_{ci} \geq 1$, aun cuando en algunos casos particulares, F_{ci} puede ser menor que uno.

La ecuación 1.12 se puede poner en forma simplificada:

$$q_{ult} = \sum \frac{QF_c}{A} \quad (1.13)$$

1.5. Cimiento sometido a carga vertical y momento

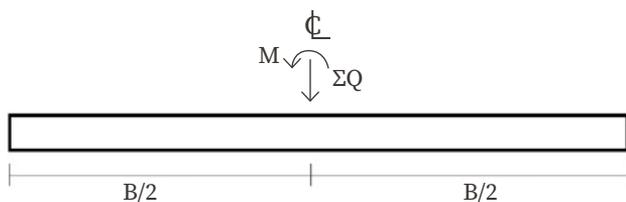
La determinación de la capacidad de carga, por resistencia al corte del suelo, de un cimiento sujeto a carga vertical y momento (figura 1.4 a) se puede llevar a cabo mediante un artificio teórico que consiste en considerar esta condición equivalente a la de un cimiento de ancho reducido sometido, únicamente, a carga vertical. Esta condición se obtiene de la siguiente forma: considérese un cimiento sometido a las acciones ΣQ y M (figura 1.4 a); desde el punto de vista de fuerzas externas, esta condi-

ción es equivalente en la figura 1.4 b donde se ha colocado la fuerza ΣQ , de tal forma, que ocasiona el mismo momento con respecto al centro de la línea. La excentricidad e vale:

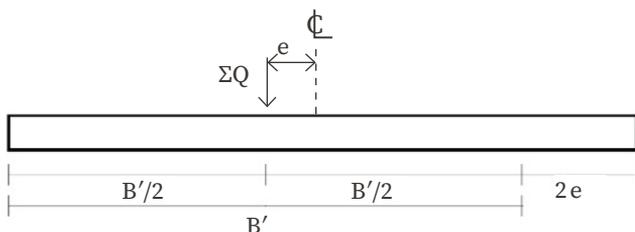
$$e = \frac{M}{\Sigma Q} \quad (1.14)$$

en la figura 1.4, se observa que se puede pensar en un cimiento de ancho B' sometido, únicamente, a la carga vertical ΣQ . De la figura 1.4 b, se tiene que:

$$\frac{B'}{2} = \frac{B}{2} - e \quad \therefore \quad B' = B - e \quad (1.15)$$



a) Cimiento sometido a carga vertical y momento



b) Cimiento con un sistema de cargas equivalentes

Figura 1.4. Cimiento sometido a carga vertical y momento

En consecuencia, la determinación de la capacidad de carga de un cimiento sujeto a carga vertical, ΣQ , y momento, M , se lleva a cabo tomando en cuenta un cimiento equivalente de ancho virtual, B' , que es dado por la ecuación 1.15 en donde la excentricidad, e , está dada por la ecuación 1.14.

La capacidad del suelo se obtiene sustituyendo en las expresiones correspondientes a la capacidad de carga por resistencia al corte, el ancho reducido virtual, B' , determinado con la ecuación 1.15. Asimismo, la presión de contacto en el cimiento virtual equivalente se halla considerando el ancho reducido, B' .

1.6. Revisión de la seguridad de una cimentación

Para que se cumpla con la seguridad de una cimentación, basta que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$q_{ult} < q_R \quad (1.16)$$

cuando se sustituyen las ecuaciones 1.13 y 1.10 en la expresión 1.16, se tiene:

$$\frac{QF_c}{A} \leq cN_c f_c F_{R1} + p_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma F_{R3} \quad (1.17)$$

la desigualdad de la ecuación 1.17 se emplea para revisar la seguridad del terreno de cimentación por la capacidad de carga.

1.7. Suelos friccionantes

En un suelo puramente friccionante:

$$c=0 \text{ y } s=\sigma \tan \varphi$$

de acuerdo con la ecuación 1.10, la capacidad de carga resistente vale:

$$q_R = p_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma F_{R3} \quad (1.18)$$

usualmente, $F_{R2} = F_{R3} = F_R$, por lo tanto:

$$q_R = \left[p_v N_q f_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma \right] F_R \quad (1.19)$$

1.7.1. Falla general y falla local

Como mencionamos antes, la ecuación 1.1 se obtuvo considerando un material incompresible, hipótesis que se cumple solo en suelos compactos a muy compactos. Para tomar en cuenta la compresibilidad del material, Terzaghi y Peck (1967) recomiendan que se emplee la siguiente expresión para suelos en estado suelto:

$$\tan \varphi = \frac{2}{3} \tan \varphi^* \quad (1.20)$$

donde:

φ^* : es el ángulo de fricción interno del suelo que es determinado mediante pruebas de laboratorio o de campo.

Por su parte, Sowers indica que «...para suelos friccionantes con D_r mayor que 70 % se debe emplear el criterio de Terzaghi para falla general y que para D_r menor que 20 % se debe usar dicho criterio para falla local, y que para valores intermedios de D_r se debe interpolar.»³¹

En consecuencia, podemos en forma conservadora usar la ecuación 1.20 de la siguiente manera:

$$\tan \varphi = \alpha \tan \varphi^* \quad (1.21)$$

$$\varphi = \text{ang tan}(\alpha \tan \varphi^*) \quad (1.22)$$

$$\alpha = 0.67 \quad \text{para} \quad D_r \leq 0.5$$

$$\alpha = 0.67 + 1.65 (D_r - 0.5) \quad \text{para} \quad 0.5 \leq D_r \leq 0.7 \quad (1.23)$$

$$\alpha = 1.0 \quad \text{para} \quad D_r \geq 0.7$$

1.7.2. Efecto de la presencia del NAF (Nivel de Aguas Freáticas)

Cuando el NAF queda por arriba del nivel de desplante de la subestructura, en el momento de la falla del terreno de cimentación, debido a la alta permeabilidad de los suelos friccionantes, la fracción sólida se mueve hacia cierta dirección, mientras que el agua permanece en condición prácticamente hidrostática; en consecuencia, se tienen que separar las contribuciones de las fases sólida y líquida del terreno. La contribución de la fase sólida está dada por la ecuación 1.18 con $p_v = p'_v$ y $\gamma = \gamma'$, es decir:

³¹ Sowers, G. F., «Shallow foundations», *Foundation Engineering*, New York, McGraw-Hill, 1962.

$$q'_R = p'_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma' B N_v f_v F_{R3} \quad (1.24)$$

$$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$$

la contribución de la fase líquida es igual a la presión del agua, u , al nivel del desplante de la subestructura. La capacidad resistente total será la suma de la que es debida a la fase sólida y de la que es debida al agua, es decir:

$$q_R = q'_R + u_R$$

$$q'_R = p'_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma' B N_v f_v F_{R3} + u_R$$

pero:

$$p_u = p'_v + u \quad u = p_u + p'_v \quad u_R = p_u F_{R4} - p'_v F_{R5}$$

$$q_R = p'_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma' B N_v f_v F_{R3} + p'_v F_{R4} + u F_{R5}$$

$$q_R = p'_v (N_q f_q F_{R2} - F_{R5}) + \frac{1}{2} \gamma' B N_v f_v F_{R3} + p'_v F_{R4} \quad (1.25)$$

Las NTCDC³² (Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones) del Distrito Federal hacen las siguientes consideraciones:

$F_{R2} = F_{R3} = F_{R5} = F_R$ y $F_{R4} = 1$, por lo que, la ecuación 1.25 queda así:

$$q_R \left[p'_v (N_q f_q - 1) + \frac{1}{2} \gamma' B N_v f_v \right] F_R + p_v \quad (1.26)$$

32 Gobierno del Distrito Federal, «Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, Décima cuarta época, t. II, núm. 103-bis, octubre 6 de 2004.

1.7.3. Revisión de la seguridad del terreno de cimentación

Se recomienda en la práctica que, en general, el factor $F_R \leq 0.45$; por ejemplo, las NTCDC (2004) recomiendan $F_R = 0.35$ para zapatas en la zona de lomas (zona I) de la Ciudad de México.

La profundidad de la zona de falla bajo el desplante del cimiento vale (figura 1.5):

$$h = \frac{B \cos \varphi \cdot e^{(\pi/4 + \varphi/2) \tan \varphi}}{2 \cos (\pi/4 + \varphi/2)} \quad (1.27)$$

(por ejemplo, para $\varphi = 36^\circ$, $h = 1.98 B$).

De acuerdo con lo tratado en los párrafos anteriores, la capacidad de carga resistente de un suelo puramente friccionante se puede obtener con la siguiente ecuación:

$$q_R = \left[p'_v (N_q f_q - 1) + \frac{1}{2} \gamma' B N_\gamma f_\gamma \right] F_R + p_v \quad (1.28)$$

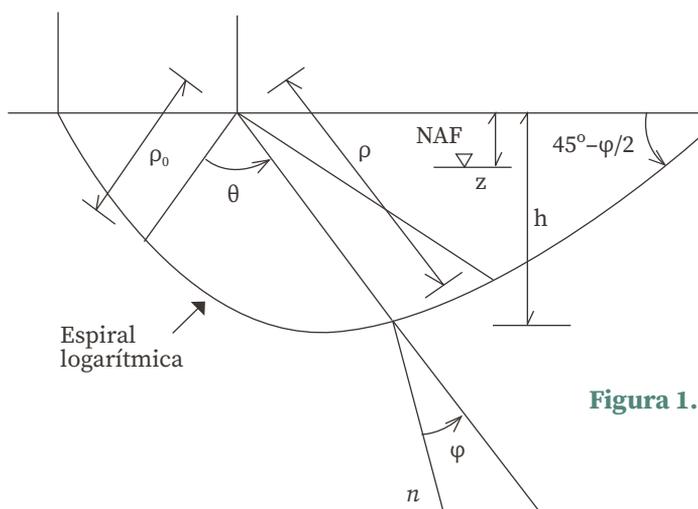


Figura 1.5. Espiral logarítmica

En la determinación de la capacidad de carga resistente de un suelo puramente friccionante se distinguen las siguientes condiciones:

- Cuando el NAF se encuentre a una profundidad mayor que el valor de h dado por la ecuación 1.27, se emplea la ecuación 1.28 con $\gamma = \gamma_m$, siendo $\gamma_m =$ peso volumétrico natural del suelo arriba del NAF.
- Cuando el NAF se encuentre por arriba del nivel de desplante, se emplea la ecuación 1.28 con $\gamma = \gamma'$.
- Cuando el NAF se encuentra en una posición intermedia z (figura 1.5), se emplea la ecuación 1.28 con:

$$\gamma = \gamma' + \frac{z}{h} (\gamma_m - \gamma') \quad (1.29)$$

siempre se debe cumplir con:

$$q_{ult} < q_R \quad (1.30)$$

$$q_{ult} = \sum \frac{QF_c}{A'} \quad (1.31)$$

por su parte, las NTCDDC establecen que:

...en caso de que el ancho B sea mayor que la profundidad z del manto freático bajo el nivel de desplante de la cimentación, el peso volumétrico a considerar será:

$$\gamma = \gamma' + \frac{z}{B} (\gamma_m - \gamma') \quad (\text{ecuación 4 de las NTCDDC})$$

donde:

γ' : es el peso volumétrico sumergido del suelo entre las profundidades z y $\frac{B}{2} \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$

γ_m : es el peso volumétrico total del suelo arriba del nivel freático.³³

1.7.4. Zapata sometida a carga vertical

Ejemplo 1.1

Se debe revisar la seguridad del terreno de cimentación por capacidad de carga de la zapata rectangular de concreto reforzado de la figura 1.E-1.

Se tiene una columna de 0.25 por 0.30 m. Zapata de 1.7 m de ancho por 2 m de largo en planta; espesor losa zapata = 0.30 m. Profundidad de desplante = 0.60 m.

$$\Sigma Q' = 260 \text{ kN} \approx 26 \text{ t}, F_c = 1.4$$

Terreno de cimentación:

$$\gamma_d = 16 \text{ kN/m}^3 \approx 1.6 \text{ t/m}^3, \varphi^* = 37^\circ, D_r = 58 \%, s_s = 2.6, F_c = 1.1, F_R = 0.45$$

se debe tener en cuenta lo siguiente:

- » NAF a 20 m de profundidad
- » NAF al nivel de la superficie del terreno
- » NAF a 2 m de profundidad bajo la superficie del terreno (1.4 m bajo el desplante del cimiento)

³³ *Ibíd.*

Solución

Cálculo de la capacidad de carga resistente del terreno.

Se emplea la ecuación 1.28:

$$q_R = \left[p'_v (N_q f_q - 1) + \frac{1}{2} \gamma' B N_\gamma f_\gamma \right] F_R + p_v$$

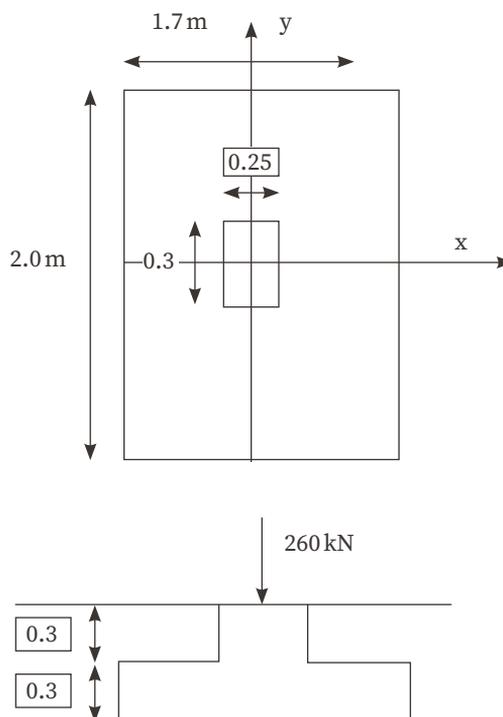
aplicando la ecuación 1.23, se tiene:

$$\alpha = 0.67 + 1.65 (D_r - 0.5) = 0.67 + 1.65 (0.58 - 0.5) = 0.802$$

empleando la ecuación 1.22, se obtiene:

$$\varphi = \text{ang tan} (\alpha \tan \varphi^*) = 31.15^\circ$$

Figura 1.E-1. Esquema de zapata (acotaciones en metros)



cuando se aplican las ecuaciones 1.2 y 1.3, se tiene:

$$N_q = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) e^{(\pi \tan(\varphi))} = 20.983$$

$$N_y = 2(N_q + 1) \tan(\varphi) = 26.571$$

usando las ecuaciones 1.8 y 1.9:

$$f_q = 1 + \frac{B}{L} \tan(\varphi) = 1 + (1.7/2) \tan(31.15^\circ) = 1.514$$

$$f_y = 1 - 0.4 \frac{B}{L} = 1 - 0.4(1.7/2) = 0.66$$

NAF a 20 m de profundidad.

Presión última sobre el terreno

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale:

$$\begin{aligned} \Sigma Q &= \\ &= 260 + 1.7(2)(0.3)24 + 0.25(0.3)(0.3)(24) + ((1.7)(2) - 0.25(0.3))(0.3)(16) \\ &= 260 + 24.48 + 0.54 + 15.96 = 300.98 \text{ kN} \approx 30.098 \text{ t} \end{aligned}$$

$$\Sigma QF_c = 260(1.4) + 24.48(1.4) + 0.54(1.4) + 15.96(1.1) = 416.58 \text{ kN} \approx 41.658 \text{ t}$$

$$q_{ult} = \frac{\Sigma QF_c}{A'} = 416.58 / 1.7(2) = 122.52 \text{ kPa} \approx 12.252 \text{ t/m}^2$$

Capacidad de carga resistente

Sustituyendo en la ecuación 1.27, se tiene:

$$h = 2.805 \text{ m} < 20 \text{ m}$$

y sustituyendo en la ecuación 1.28:

$$\begin{aligned} q_R &= \\ &= [16(0.6)((20.983)(1.514) - 1) + (1/2)(16)(1.7)(26.571)(0.66)] (0.45) + 16(0.6) \\ &= 249.84 \text{ kPa} \approx 24.984 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

se debe cumplir la desigualdad 1.30:

$$q_{ult} = 122.52 \text{ kPa} \leq q_R = 249.84 \text{ kPa}$$

∴ cumple

1) NAF al nivel de la superficie del terreno

a) Presión última sobre el terreno

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale:

$$\begin{aligned} \Sigma Q &= \\ &= 260 + 1.7(2)(0.3)24 + 0.25(0.3)(0.3)(24) + ((1.7)(2) - 0.25(0.3))(0.3)(19.85) \\ &= 260 + 24.48 + 0.54 + 19.8 = 304.82 \text{ kN} \approx 30.482 \text{ t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma Q F_c &= \\ &= 260(1.4) + 24.48(1.4) + 0.54(1.4) + 19.8(1.1) = 420.81 \text{ kN} \approx 42.081 \text{ t} \end{aligned}$$

$$q_{ult} = \sum \frac{Q F_c}{A'} = 420.81 / 1.7(2) = 123.77 \text{ kPa} \approx 12.377 \text{ t/m}^2$$

b) Capacidad de carga resistente

$$\gamma_{sat} = 19.85 \text{ kN/m}^3, \quad \gamma' = 9.85 \text{ kN/m}^3$$

$$p_v = 19.85 (0.6) = 11.91 \text{ kPa}$$

$$p'_v = 11.91 - 6 = 5.91 \text{ kPa}$$

Cuando se reemplaza en la ecuación 1.28, se tiene:

$$\begin{aligned} q_R &= \\ &= [5.91 ((20.983) (1.514) - 1) + (1/2) (9.85) (1.7) (26.571) (0.66)] (0.45) + 11.91 \\ &= 159.81 \text{ kPa} \approx 15.981 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

se debe cumplir la desigualdad 1.30:

$$q_{ult} = 123.77 \text{ kPa} \leq q_R = 159.81 \text{ kPa}$$

\therefore cumple

$$q_{ult} = 12.377 \text{ t/m}^2 \leq q_R = 15.981 \text{ t/m}^2$$

\therefore cumple

2) NAF a 2 m de profundidad bajo la superficie del terreno (1.4 m bajo el desplante del cimientto)

a) Presión última sobre el terreno

$$\Sigma Q = 300.98 \text{ kN}$$

$$\Sigma Q F_c = 416.58 \text{ kN}$$

$$q_{ult} = \sum \frac{Q F_c}{A'} = 416.58 / 1.7(2) = 122.52 \text{ kPa}$$

b) Capacidad de carga resistente

Sustituyendo en la ecuación 1.27, se tiene:

$$h = 2.805 \text{ m}$$

$$\gamma_{sat} = 19.85 \text{ kN/m}^3, \quad \gamma' = 9.85 \text{ kN/m}^3$$

cuando se reemplaza en la ecuación 1.29:

$$\gamma = 9.85 + (1.4)(16 - 9.85)/2.805 = 12.92 \text{ kN/m}^3$$

$$p_v = 16(0.6) = 9.6 \text{ kPa}$$

$$p'_v = p_v = 0.96 \text{ t/m}^2$$

y reemplazando en la ecuación 1.28, se obtiene:

$$\begin{aligned} q_R &= \\ &= [9.6((20.983)(1.514) - 1) + (1/2)(12.92)(1.7)(26.571)(0.66)](0.45) + 9.6 \\ &= 229.14 \text{ kPa} \end{aligned}$$

se debe cumplir la desigualdad 1.30:

$$q_{ult} = 122.52 \text{ kPa} \leq q_R = 229.14 \text{ kPa}$$

∴ cumple

1.7.5. Zapata sometida a carga vertical y dos momentos

Ejemplo 1.2

Se debe revisar la seguridad del terreno de cimentación por capacidad de carga de la zapata rectangular del concreto reforzado de la figura 1.E-2.

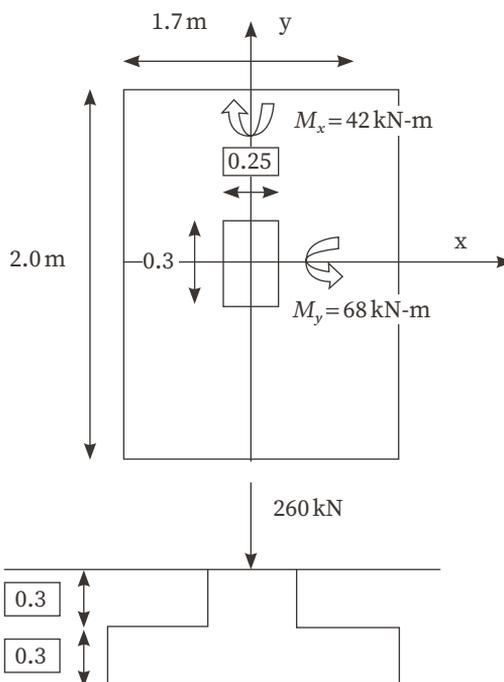
$$D_R = 58 \%$$

$$\varphi = 37^\circ$$

$$\gamma_d = 16 \text{ kN/m}^3$$

Suelo friccionante,
arena $S_s = 2.6$

Figura 1. E-2. Esquema de zapata



Se tiene una columna de 25 por 30 cm. Zapata de 1.7 por 2 m; espesor losa zapata = 30 cm. Profundidad de desplante = 60 cm.

$$\Sigma Q' = 260 \text{ kN}, M_y = 42 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_x = 68 \text{ kN} \cdot \text{m}, F_c = 1.4$$

Terreno de cimentación:

$$\gamma_d = 16 \text{ kN/m}^3, \varphi^* = 37^\circ, D_r = 58 \%, S_s = 2.6, F_c = 1.1, F_R = 0.45$$

Solución

Cálculo de la presión última sobre el terreno.

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale:

$$\begin{aligned}\Sigma Q &= \\ &= 260 + 1.7(2)(0.3) 24 + 0.25 (0.3)(0.3)(24) + ((1.7)(2) - 0.25(0.3)) (0.3)(16) \\ &= 260 + 24.48 + 0.54 + 15.96 = 300.98 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\Sigma QF_c = 260 (1.4) + 24.48 (1.4) + 0.54(1.4) + 15.96 (1.1) = 416.58 \text{ kN}$$

$$e_x = \frac{M_y}{\Sigma Q} = 42/300.98 = 0.1395 \text{ m}$$

$$e_y = \frac{M_x}{\Sigma Q} = 68/300.98 = 0.2259 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e_x = 1.42 \text{ m}, \quad L' = L - 2e_y = 1.5482 \text{ m}$$

$$\sum \frac{QF_c}{A'} = \sum \frac{QF_c}{B'L'} = 416.58/1.421(1.5482) = 189.36 \text{ kPa}$$

Cálculo de la capacidad de carga resistente del terreno

Se emplea la ecuación 1.28:

$$q_R = \left[p'_v (N_q f_q - 1) + \frac{1}{2} \gamma B' N_\gamma f_\gamma \right] F_R + p_v$$

cuando se aplica la ecuación 1.23, se obtiene:

$$\alpha = 0.67 + 1.65 (D_r - 0.5) = 0.67 + 1.65 (0.58 - 0.5) = 0.802$$

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

al utilizar la ecuación 1.22:

$$\varphi = \text{ang tan}(\alpha \tan \varphi^*) = 31.15^\circ$$

cuando se usan las ecuaciones 1.2 y 1.3, se tiene:

$$N_q = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) e^{(\pi \tan(\varphi))} = 20.983$$

$$N_y = 2(N_q + 1) \tan(\varphi) = 26.571$$

al usar las ecuaciones 1.8 y 1.9, se obtiene lo siguiente:

$$f_q = 1 + \frac{B}{L} \tan(\varphi) = 1 + (1.421/1.5482) \tan(31.15^\circ) = 1.5547$$

$$f_y = 1 - 0.4 \frac{B}{L} = 1 - 0.4(1.421/1.5482) = 0.6329$$

sustituyendo en la ecuación 1.28, se tiene:

$$\begin{aligned} q_R &= \\ &= [16(0.6)((20.983)(1.5547) - 1) + (1/2)(16)(1.421)(26.571)(0.6329)](0.45) + 16(0.6) \\ q_R &= 232.24 \text{ kPa} \end{aligned}$$

se debe cumplir la desigualdad 1.30:

$$q_{ult} = 189.36 \text{ kPa} \leq q_R = 232.24 \text{ kPa}$$

∴ cumple

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

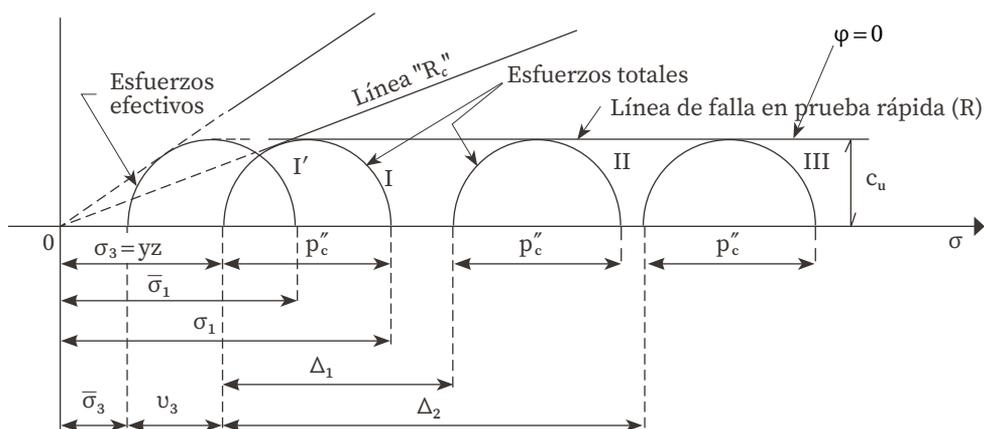
H

I

1.8. Suelos cohesivos totalmente saturados

En un cimiento somero que está apoyado sobre un suelo cohesivo totalmente saturado, la condición más desfavorable ocurre a corto plazo, ya que la resistencia tiende a aumentar al producirse el fenómeno de consolidación del suelo; por lo mismo, se recomienda la ejecución de pruebas triaxiales no consolidadas-no drenadas (tipo UU, pruebas rápidas) para la determinación de la resistencia al corte del terreno (figura 1.6).

Figura 1.6. Línea de falla en una prueba triaxial rápida



Ya que la extracción de una muestra inalterada de arcilla produce cierta alteración de la misma, algunos autores recomiendan la ejecución de pruebas consolidadas-no drenadas para la obtención de la cohesión aparente del material. Desde luego, la presión de confinamiento de laboratorio deberá ser lo más cercana posible a la presión de confinamiento de campo.

En una prueba rápida $c = c_u$ y $\phi = \phi_u = 0$ (figura 1.6), sustituyendo en las ecuaciones 1.2, 1.3 y 1.8, se tiene:

$$N_q = 1, \quad N_\gamma = 0, \quad f_q = 1$$

además, en la teoría de la plasticidad se demuestra que en un material puramente cohesivo:

$$N_c = 2 + \pi = 5.14$$

antes, habíamos señalado que la capacidad de carga resistente está dada por la ecuación 1.10:

$$q_R = cN_c f_c F_{R1} + p_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma F_{R3}$$

al sustituir los valores correspondientes a un suelo puramente cohesivo, obtenemos:

$$q_R = 5.14 c_u f_c F_{R1} + p_v F_{R2} \quad (1.32)$$

$$F_{R1} = F_R, F_{R2} = 1$$

por lo tanto:

$$q_R = 5.14 c_u f_c F_R + p_v \quad (1.33)$$

$$f_c = 1 + 0.25 \frac{B}{L}$$

Skempton encontró que «...la capacidad resistente del suelo aumenta con la profundidad de empotramiento del cimiento en el estrato de apoyo hasta un máximo, después del cual se mantiene constante...»³⁴, (figura 1.7); por esta razón, dentro del factor de forma, podemos agregar el efecto del empotramiento, entonces, el factor f_c queda así:

³⁴ Juárez, Badillo, E. y Rico, A., *Mecánica de Suelos*, t. i, 3a. ed., Limusa, 1976.

$$f_c = 1 + 0.25 \frac{B}{L} + 0.25 \frac{D}{B} \quad (1.34)$$

para $D/B < 2$ y $B/L < 1$.

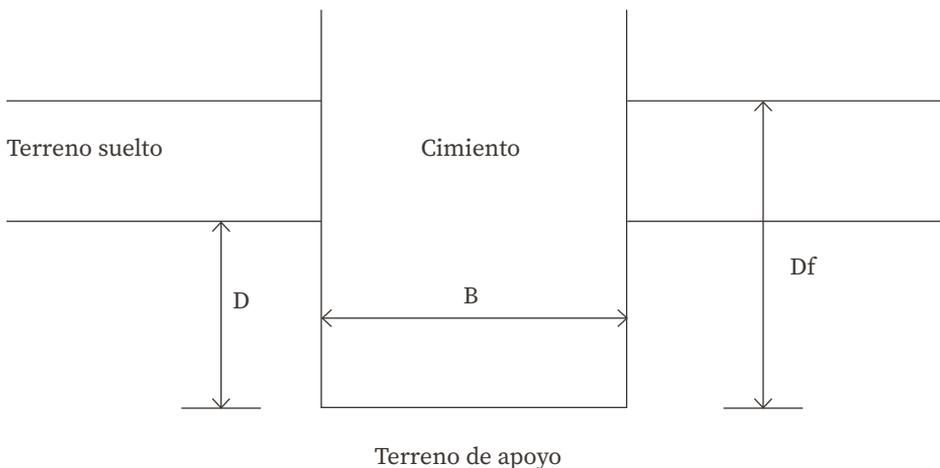


Figura 1.7. Profundidad de empotramiento D en el estrato de apoyo

En caso de que D/B y B/L no cumplan con las desigualdades anteriores, dichas relaciones se tomarán iguales a 2 y 1, respectivamente, según las NTCDCC (2004).

1.8.1. Capacidad de carga de una zapata corrida en suelos totalmente saturados

Ejemplo 1.3

Se debe revisar la seguridad del terreno de cimentación por la capacidad de carga de la zapata corrida de concreto reforzado de la figura 1.E-3.

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

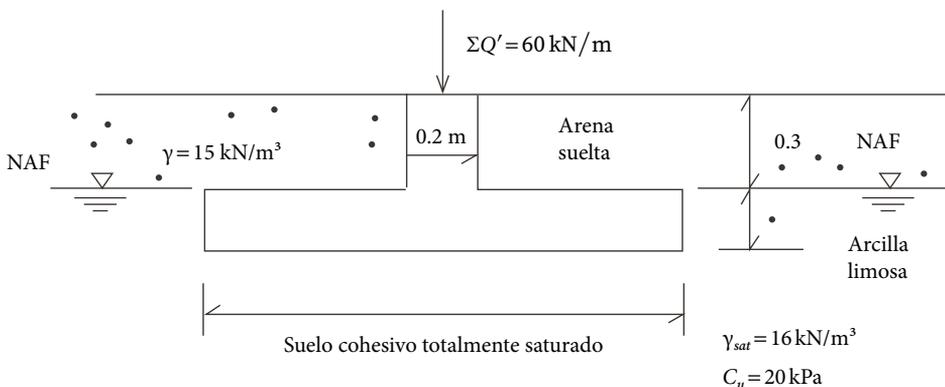


Figura 1.E-3. Esquema de zapata y terreno

Se tiene el espesor de un muro de concreto reforzado de 20 cm. Zapata de 1.3 m de ancho; espesor losa zapata = 20 cm. Profundidad de desplante = 50 cm.

$$\Sigma Q' = 60 \text{ kN/m}, \quad F_c = 1.4$$

Terreno de cimentación: arcilla limosa totalmente saturada,
 $\gamma_{sat} = 16 \text{ kN/m}^3$, $c_u = 25 \text{ kPa}$

$$F_c = 1.1$$

$$F_R = 0.7$$

Solución

Cálculo de la presión última sobre el terreno.

La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale:

$$\begin{aligned} \Sigma Q &= \\ &= 60 + 1.3(0.2)(24) + 0.2(0.3)(24) + (1.3 - 0.2)(0.3)(15) = 60 + 6.24 + 1.44 + 4.95 \\ &= 72.63 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

$$\Sigma QF_c = 60(1.4) + 6.24(1.4) + 1.44(1.4) + 4.95(1.1) = 100.20 \text{ kN/m}$$

Cálculo de la capacidad de carga resistente del terreno.

Se emplea la ecuación 1.33:

$$q_R = 5.14 c_u f_c F_R + p_v$$

$$f_c = 1 + 0.25 \frac{B}{L} + 0.25 \frac{D}{B}$$

para $D/B < 2$ y $B/L < 1$. En caso de que D/B y B/L no cumplan con las desigualdades anteriores, dichas relaciones se tomarán iguales a 2 y 1, respectivamente. Sustituyendo valores, se tiene:

$$f_c = 1 + 0.25 (0.2/1.3) + 0.25 (1.3/6) = 1.0926$$

$$q_R = 5.14 (20)(1.0926)(0.7) + (15)(0.3) + (16)(0.2) = 86.32 \text{ kPa}$$

se debe cumplir la desigualdad 1.30:

$$q_{ult} = 77.07 \text{ kPa} \leq q_R = 86.32 \text{ kPa}$$

∴ cumple

1.9. Suelos cohesivos parcialmente saturados

Si tenemos en cuenta un suelo plástico totalmente saturado y hacemos que este pierda humedad, durante este proceso se forman meniscos que producen esfuerzos de tensión en el agua del suelo, lo cual, a su vez, ocasiona esfuerzos intergranulares de compresión en la estructura sólida del terreno (Juárez Badillo y Rico, 1976). A la diferencia entre la presión en el aire y la presión en el agua se le denomina succión, la cual vale $(u_a - u_w)$, siendo u_a = presión en el aire y u_w = presión en el agua; en consecuencia,

en una arcilla parcialmente saturada, la succión produce un incremento de la presión intergranular y, por consiguiente, un aumento de la resistencia al corte, tal como, se muestra en la figura 1.8; en esta figura, vemos que al disminuir el grado de saturación (con el consecuente aumento de la succión) se incrementa la resistencia al corte del terreno.

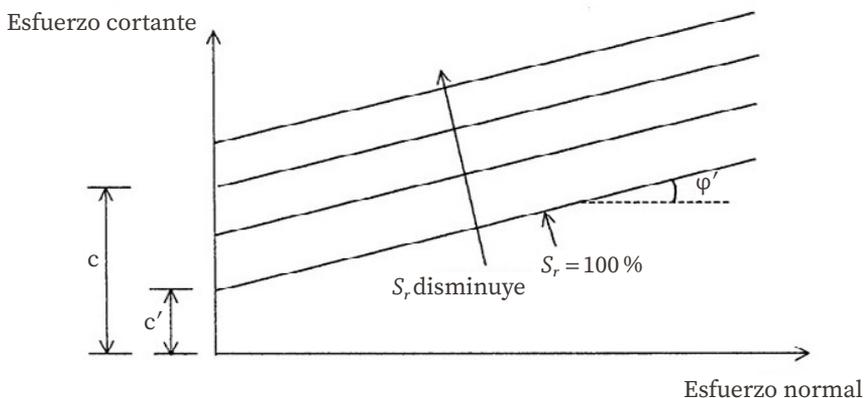


Figura 1.8. Variación de la resistencia al corte con el grado de saturación

Fredlund y Rahardjo opinan que «...la resistencia al corte de un suelo parcialmente saturado está dada por:

$$s = c' + (\sigma - u_a) \tan \phi' + (u_a - u_w) \tan \phi^b \quad (1.35)$$

siendo $(u_a - u_w) = \text{succión...}$.³⁵

En la tabla 1.1, se muestran los valores de c' , ϕ' y ϕ^b para diferentes suelos (modificada por Fredlund y Rahardjo, 1993).

³⁵ Fredlund, D. G. & H. Rahardjo, *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*, Wiley, 1993.

Tabla 1.1. Valores de c' , φ' y φ^b

Tipo de suelo	c' (kPa)	φ' (grados)	φ^b (grados)	Procedimiento de Prueba	Referencia
Pizarra compactada $w=18.6\%$	15.8	24.8	18.1	Triaxial, contenido de agua constante	Bishop, <i>et al.</i> , (1960)
Arcilla de Boulder $w=11.6\%$	9.6	27.3	21.7	Triaxial, contenido de agua constante	Bishop, <i>et al.</i> , (1960)
Arcilla de Dhanauri $w=22.2\%$ $\rho_d=1\ 580\ \text{kg/m}^3$	37.3	28.5	16.2	Triaxial, consolidada drenada	Satija, (1978)
Arcilla de Dhanauri $w=22.2\%$ $\rho_d=1\ 478\ \text{kg/m}^3$	20.3	29.0	12.6	Triaxial, drenaje constante	Satija, (1978)
Arcilla de Dhanauri $w=22.2\%$ $\rho_d=1\ 580\ \text{kg/m}^3$	15.5	28.5	22.6	Triaxial, consolidada	Satija, (1978)
Arcilla de Dhanauri $w=22.2\%$ $\rho_d=1\ 478\ \text{kg/m}^3$	11.3	29.0	16.5	Triaxial, contenido de agua constante	Satija, (1978)
Arcilla gris de Madrid $w=29\%$	23.7	22.5*	16.1	Corte directo, consolidada drenada	Escario, (1980)
Granito alterado de Hong Kong	28.9	33.4	15.3	Triaxial multietapas, consolidada drenada	Ho and Fredlund, (1982*)
Riolita alterada de Hong Kong	7.4	35.3	13.8	Triaxial multietapas, consolidada drenada	Ho and Fredlund, (1982*)
Limo de Tappen-Notch Hill $w=21.5\%$ $\rho_d=1\ 590\ \text{kg/m}^3$	0.0	25.3	7-25.5	Corte directo multietapas, consolidada drenada	Krahn, <i>et al.</i> , (1989)
Glacial compacto $w=12.2\%$ $\rho_d=1\ 810\ \text{kg/m}^3$	10	25.3	7-25.5	Triaxial multietapas, consolidada drenada	Gan, <i>et al.</i> , (1988)

* Valores promedio

Cabe aclarar que, en un suelo cohesivo parcialmente saturado, al aumentar la presión de confinamiento, σ_3 , se incrementan tanto la presión en el aire, u_a , como la presión en el agua, u_w , si en los poros del suelo se presenta un estado abierto (vacíos del aire interconectados entre sí, (Marshall, 1979), la presión u_a se disipa rápidamente y el suelo se comprime; en consecuencia, aumenta el grado de saturación del suelo. Para valores altos del grado de saturación, S_r , los poros pasan del estado abierto al estado ocluido (vacíos de aire no conectados entre sí); en este momento, la presión del aire se aproxima a la del agua, $u_a \cong u_w$. Este fenómeno se presenta para valores del grado de saturación cercanos al 100 %. Para $S_r = 100 \%$, $u_a = u_w$. La ecuación 1.35 se transforma en:

$$s = c' + (\sigma - u_w) \tan \varphi' \quad (1.36)$$

que es la ley de resistencia de un suelo totalmente saturado.

Para calcular la capacidad de carga, se estima el valor más desfavorable de la succión en el campo y se sustituye en la ecuación 1.35. Para un valor fijo de la succión, la cohesión del suelo vale:

$$c = c' + (u_a - u_w) \tan \varphi^b \quad (1.37)$$

y la ecuación 1.35 queda así:

$$s = c + (\sigma - u_a) \tan \varphi' \quad (1.38)$$

en la ecuación 1.38, podemos observar que para una cierta succión, el suelo se puede tomar en cuenta como un material cohesivo-friccionante, por lo que, podemos aplicar la ecuación 1.10 para determinar su capacidad de carga:

$$q_R = cN_c f_c F_{R1} + p_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma BN_v f_v F_{R3} \quad (1.39)$$

o bien, si hacemos: $F_{Ri} = F_R$

$$q_R = \left[cN_c f_c + p_v N_q f_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma \right] F_R \quad (1.40)$$

1.9.1. Capacidad de carga de una zapata corrida en suelos parcialmente saturados

Ejemplo 1.4

Se debe determinar la capacidad de carga resistente de un suelo cohesivo parcialmente saturado que tiene las siguientes propiedades:

$$c' = 25 \text{ kPa}, \varphi' = 22.5^\circ, \varphi^b = 16.1^\circ, \gamma = 15 \text{ kN/m}^3$$

zapata corrida: $B = 1.5 \text{ m}, L = 4 \text{ m}, D_f = 0.8 \text{ m}$

y se debe estimar una succión en el campo: $(u_a - u_w) = 100 \text{ kPa}$, con $F_R = 0.45$

Solución

Al aplicar la ecuación 1.37 con $(u_a - u_w) = 100 \text{ kPa} \approx 10 \text{ t/m}^2$, se obtiene $c = 53.86 \text{ kPa}$ y la resistencia al corte vale (ecuación 1.38):

$$s = 53.86 + (\sigma - u_a) \tan 22.5^\circ$$

el material se puede considerar como cohesivo-friccionante con $c = 53.86 \text{ kPa}$ y $\varphi = \varphi' = 22.5^\circ$. Sustituyendo en las ecuaciones 1.2 a 1.9, se tiene:

$$N_q = 8.228, N_\gamma = 7.644, N_c = 17.451, f_c = 1.094, f_q = 1.155, f_\gamma = 0.85$$

al utilizar la ecuación 1.40, obtenemos:

$$q_R =$$

$$= \left[53.86(17.451)(1.094) + (15)(0.8)(8.228)(1.155) + (1/2)(15)(1.5)(7.644)(0.85) \right] (0.45)$$

$$q_R = 546.93 \text{ kPa}$$

1.10. Suelos cementados

En la naturaleza, es frecuente encontrar suelos en los cuales sus partículas se encuentran unidas por algún tipo de cementante. La cementación de los granos es muy variable: puede ser tan fuerte que el suelo se clasifica como roca; por ejemplo, algunas tobas de consistencia dura que son conocidas como piedra de cantera o puede ser tan débil que un pequeño aumento de humedad puede producir la pérdida completa de la cementación. Ejemplos de terrenos cementados son los suelos colapsables, las tobas y los suelos residuales.

Uno de los problemas que se presentan en los suelos cementados consiste en que al aumentar su humedad ocurre una disminución de la resistencia al corte, lo cual afecta, obviamente, la seguridad del terreno de cimentación.

Por lo anterior, en suelos cementados parcialmente saturados, conviene realizar pruebas de resistencia al corte variando el grado de saturación del terreno. El cambio de la resistencia en suelos cementados es similar al que ocurre en arcillas parcialmente saturadas, pues en ambos materiales la resistencia aumenta al disminuir el grado de saturación (figura 1.8). Es interesante notar que la mayor variación ocurre en la cohesión aparente c del suelo, mientras que el ángulo de fricción interna φ cambia muy poco. Se puede, inclusive, trazar la variación de c en suelos cementados en función de S_r , (figura 1.9 a).

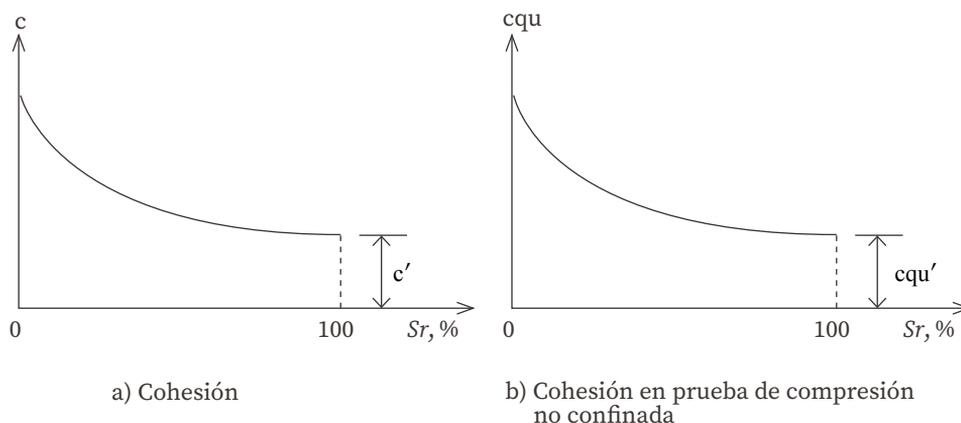


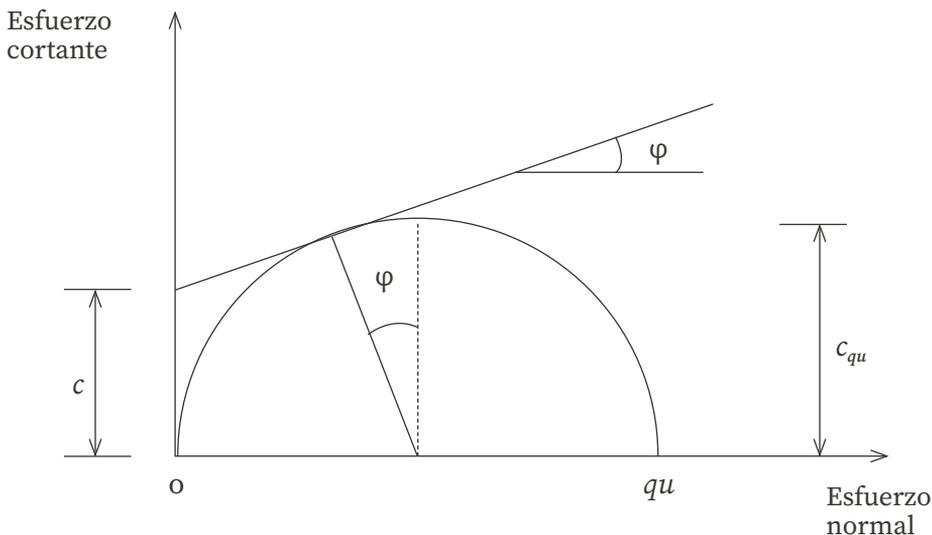
Figura 1.9. Variación de la cohesión con el grado de saturación

Una forma aproximada de obtener los parámetros de resistencia en un suelo cementado consiste en realizar pruebas triaxiales drenadas en el material totalmente saturado, con las cuales se obtienen c' y φ' del suelo. La variación de la cohesión con el grado de saturación se puede determinar a partir de pruebas de compresión simple con las cuales se obtiene una curva como la de la figura 1.9 b. A partir de esta gráfica, el ingeniero selecciona un valor desfavorable de c_{qu} , primordialmente, en función de las condiciones del drenaje del suelo. Con esta magnitud de c_{qu} , se obtiene el valor de la cohesión c del suelo (figura 1.10).

$$c = c_{qu} [\cos \varphi - \tan \varphi (1 - \text{sen} \phi)] \quad (1.41)$$

La capacidad de carga se calcula utilizando las expresiones 1.39 o 1.40 con c dado por la ecuación 1.41 y con φ' determinado por los ensayos drenados de compresión triaxial.

Figura 1.10. Obtención de la cohesión de suelo



1.11. Otras clases de suelos

Los incisos 2.7 a 2.10 cubren una amplia gama de suelos en la práctica, pero se pueden encontrar suelos con características intermedias entre ellos; por ejemplo, una mezcla de arena con arcilla puede presentar, bajo ciertas condiciones, el comportamiento de un material cohesivo-friccionante; en estos casos, se deben determinar las propiedades de resistencia para las condiciones más desfavorables durante la vida útil de la cimentación, y aplicar la expresión 2.10:

$$q_R = cN_c f_c F_{R1} + p_v N_q f_q F_{R2} + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma F_{R3}$$

o bien, si hacemos: $F_{Ri} = F_R$

$$q_R = \left[cN_c f_c + p_v N_q f_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma f_\gamma \right] F_R \quad (1.42)$$

1.12. Uso de correlaciones

El cálculo de la capacidad de carga de un suelo requiere de la determinación previa de sus propiedades mecánicas. Es siempre recomendable obtener estas propiedades a partir de pruebas directas de campo como una prueba de placa o de ensayos de laboratorio.

Sin embargo, en ocasiones no es posible obtener estas propiedades, porque el costo de las pruebas de placa es alto o, porque no se pueden extraer muestras inalteradas del suelo —como es el caso de los suelos puramente friccionantes, como las arenas limpias—. Para resolver el problema, desde el punto de vista práctico, se recurre a correlaciones entre propiedades mecánicas y propiedades índice o ensayos de campo. En general, la dispersión de valores de las correlaciones es alta, por lo que el ingeniero debe usarlas con precaución. En los siguientes párrafos, presentamos algunas correlaciones que se usan con cierta frecuencia en la práctica.

1.12.1. Suelos friccionantes

La figura 1.11 contiene la variación del ángulo de fricción interna en función del número de golpes, N , de la prueba de penetración estándar.

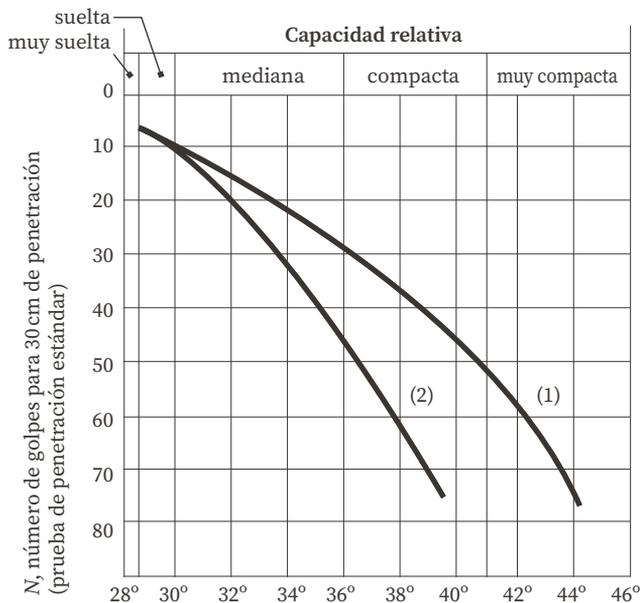
Figura 1.11.

Correlación entre el número de golpes para 30 cm de penetración estándar y el ángulo de fricción de las arenas (Juárez Badillo y Rico, 1976)

Ángulo de fricción interna φ

(1) Relación para arenas de grano anguloso o redondeado de mediano a grueso

(2) Relación para arenas de grano anguloso o redondeado de mediano a grueso



La tabla 1.2 muestra los valores del ángulo de fricción interna en función de la compactación del suelo.

Tabla 1.2. Ángulo de fricción interna para arenas (Meyerhof, 1956)

Estado	Compactación relativa D_r	N	q_c	Ángulo de fricción interna φ
			kg/cm ²	Grados
Muy suelto	< 0.2	< 4	< 20	< 30
Suelto	0.2 - 0.4	4 - 10	20 - 40	30 - 35
Semicompacto	0.4 - 0.6	10 - 30	40 - 120	35 - 40
Compacto	0.6 - 0.8	30 - 50	120 - 200	40 - 45
Muy compacto	> 0.8	> 50	> 200	> 45

Donde:

N : es el número de golpes en la prueba de penetración estándar.

q_c : es la resistencia en la punta del cono.

La relación entre N y q_c (q_c = resistencia en la punta del cono holandés en kg/cm^2) está dada por Schmertmann (1970).

Tabla 1.3. Relación entre N y q_c para distintos tipos de suelo

Suelo	q_c / N
Limo Limo arenoso	2
Arena de fina a media Arena poco limosa	3.5
Arena gruesa Arena con poca grava	5
Arena con grava Grava	6

Para fines prácticos, en cimientos profundos, la resistencia, q_c , se puede tomar como la capacidad de carga última del suelo.

Las figuras 1.12 y 1.13 contienen correlaciones entre q_c y el ángulo de fricción interna para las arenas.

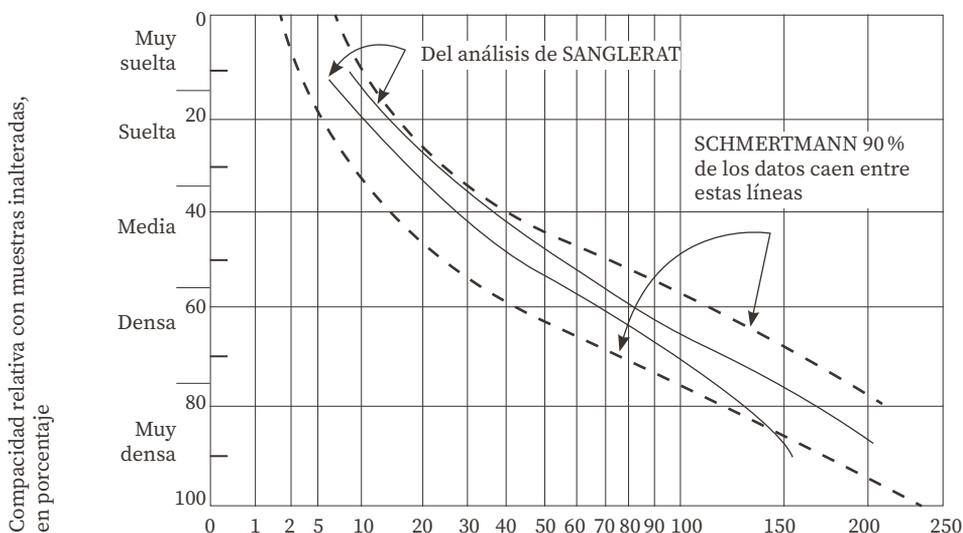
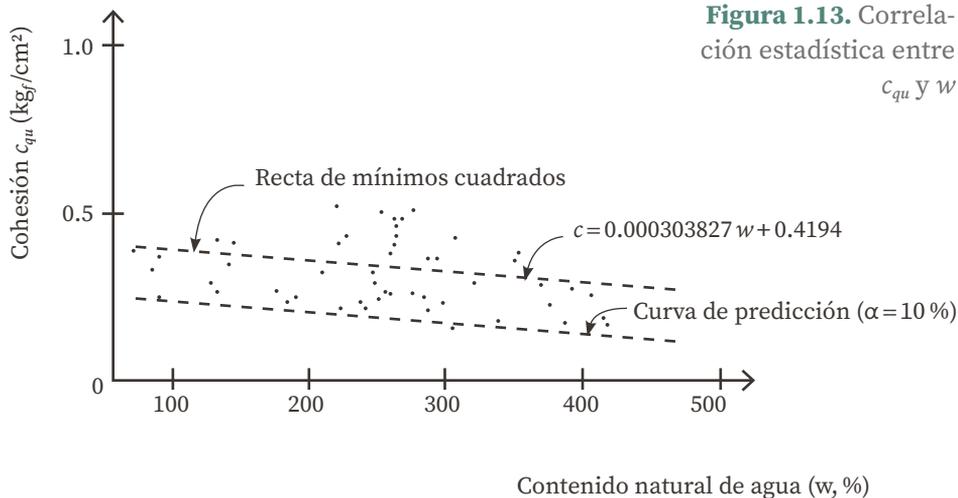


Figura 1.12. Correlación entre la resistencia de punta y la compacidad relativa de las arenas finas (Tamez, *et al.*, 1978)



1.12.2. Suelos cohesivos

En la tabla 1.4, se exhibe la variación de la resistencia a la compresión simple, q_w , de un suelo cohesivo en función de su consistencia y del número de golpes de la prueba de penetración estándar.

Tabla 1.4. Resistencia a la compresión simple en arcillas (Terzaghi y Peck, 1967)

Consistencia	N	Resistencia a la compresión simple, q_w kg/cm ²
Muy blanda	< 2	< 0.25
Blanda	2 - 4	0.25 - 0.50
Media	4 - 8	0.50 - 1.0
Firme	8 - 15	1.0 - 2.0
Muy firme	15 - 30	2.0 - 4.0
Dura	> 30	> 4.0

Donde:

N : es el número de golpes en la prueba de penetración estándar.

Cuando se emplea el cono holandés, la resistencia al corte en condiciones no drenadas está dada por:

$$c = \frac{q_c}{N_k} \quad (1.43)$$

La tabla 1.5 muestra valores típicos del coeficiente N_k :

Tabla 1.5. Valores típicos del coeficiente N_k (Santoyo, *et al.*, 1989)

Tipo de suelo	N_k
Arcilla normalmente consolidada ($q_c < 20 \text{ kg/cm}^2$)	15 - 18
Arcilla suave con falla local	10 - 14
Arcilla preconsolidada ($q_c > 25 \text{ kg/cm}^2$)	22 - 26
Suelos arcillosos abajo del nivel freático	14
Suelos arcillosos blandos	20

También, existe una cierta correlación entre la resistencia, c_u , y la presión vertical efectiva, p'_v . Así, el cociente c_u/p'_v varía de 0.2 a 0.3 en arcillas normalmente consolidadas (datos de cinco suelos, 21 % < índice plástico < 75 %. Ladd, *et al.*, 1977). Para arcillas preconsolidadas, la relación es la siguiente:

$$\left(\frac{c_u}{p'_v} \right)_{pc} = \left(\frac{c_u}{p'_v} \right)_{nc} (\text{OCR})^m \quad (1.44)$$

siendo OCR (Overconsolidation Ratio, Coeficiente de Preconsolidación). El exponente $m \cong 0.8$ (Ladd, *et al.*, 1977).

1.13. Experiencia local

Cada localidad, se asienta sobre una o varias formaciones geológicas, las cuales exhiben una estratigrafía y propiedades típicas de cada una de ellas.

Una formación geológica presenta problemas de ingeniería propios de la misma; por consiguiente, el ingeniero debe estar familiarizado con la estratigrafía y propiedades de dicha formación y observar el comportamiento de las obras construidas en ella, lo cual permite una adecuada calibración entre el uso de las propiedades mecánicas y la conducta de las cimentaciones.

En los siguientes párrafos, presentamos magnitudes de propiedades mecánicas para el subsuelo de la Ciudad de México que fueron obtenidas a partir de estadísticas. Cabe aclarar que, el ingeniero debe emplear estas propiedades con las reservas del caso, pues generalmente, la dispersión de los datos es alta. Desde luego, presentan una mayor confiabilidad aquellas correlaciones en las que se proporcionan magnitudes de la dispersión de los datos (desviación estándar o variancia).

La resistencia al corte de suelos cohesivos en condiciones no drenadas se puede obtener aproximadamente con la siguiente expresión:

$$c_u = \frac{q_c}{N_k} \quad (1.45)$$

En la tabla 1.6, se presentan los valores de c_u para el subsuelo de la zona del lago de la Ciudad de México, en función de la resistencia en la punta del cono, q_c , (Santoyo, 1980).

Tabla 1.6. Valores de la resistencia al corte en prueba rápida (Santoyo, 1980)

Tipo de suelo	q_c kg/cm ²	Prueba		Torcómetro		Penetrómetro de bolsillo
		Triaxial UU	Compresión simple	Laboratorio	Campo	
Costra seca	$5 < q_c < 10$	$q_c/14$	$q_c/20$	-	-	-
Arcillas blandas	$q_c > 5$	$q_c/13$	$q_c/16$	$q_c/12$	$q_c/14$	-
Limos arcillosos duros	$q_c > 10$	$q_c/24$	$q_c/54$	-	-	$q_c/29$

La arcilla de la Ciudad de México que constituye la llamada formación arcillosa superior (Marsal y Mazari, 1959), formación Tacubaya (Zeevaert, 1973) o serie arcillosa superior (Tamez, *et al.*, 1987) exhibe el siguiente valor de la resistencia al corte:

$$c_{qu} = q_u / 2$$

(q_u = resistencia a la compresión simple) en función del contenido natural de agua w (Deméneghi, 1982).

$$c_{qu} = 0.4194 - 0.0003038 w - 0.11203 t_\alpha \sqrt{\frac{\sqrt{1.01449 + (w - 252.8)^2}}{620434}} \quad (1.46)$$

(en kg/cm² y w en por ciento del peso seco, $75 < w < 400$ %).

La ecuación 1.46 se obtuvo con $N=69$ pares de valores (w , c_{qu}); t_α es una variable aleatoria con distribución t de Student, la cual se obtiene para $N-2$ grados de libertad.

En la tabla 1.7, se proporcionan valores de t_α para diferentes niveles de confianza α . Consideremos que un estrato de la formación Tacubaya (o formación arcillosa superior o serie arcillosa superior) tiene un contenido natural de agua $w=250\%$; tomando un $\alpha=10\%$ de la tabla 1.5: $t_\alpha=1.2944$. Aplicando la ecuación 1.46 se obtiene $c_{qu}=0.1974\text{ kg/cm}^2$. Esto indica que existe una probabilidad del 10% de que el valor de la cohesión en dicho estrato sea menor que 0.1974 kg/cm^2 . La figura 1.14 muestra la variación de c_{qu} con w , para $\alpha=10\%$ (Deméneghi, 1982).

Tabla 1.7. Valores de la variable aleatoria t_α (*t* de Student) para $N-2=67$ grados de libertad

Nivel de confianza α , %	2.5	5	10	15	20	25
t_α	1.9961	1.6680	1.2944	1.0446	0.8471	0.6782
Nivel de confianza α , %	30	35	40	45	50	
t_α	0.5270	0.3870	0.2544	0.1261	0	

La tabla 1.8 contiene datos de resistencia al corte de suelos de la zona poniente de la Ciudad de México (Deméneghi y Sanginés, 2000). Las tobas están formadas por limos arenosos y arenas limosas; en ocasiones, estos suelos contienen cierto porcentaje de arcilla (León, 1976). Las arenas de pómez proceden de materiales pumíticos gris claro (León, 1976) y de una laterita de pómez (Ellstein, 1992). c' es la cohesión del suelo saturado previamente en condiciones drenadas; c_{nat} es la cohesión en estado natural (sin variar su humedad natural) y φ es el ángulo de fricción interna.

Tabla 1.8. Parámetros de resistencia al corte. Muestras estadísticas de tobas y de arenas pumíticas (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Propiedad mecánica	Tobas			Arenas pumíticas	
	c' t/m ²	c_{nat} t/m ²	φ grados	c_{nat} t/m ²	φ grados
Número de valores, N	7	13	20	18	18
Media	6.357	26.169	37.65	4.63	31.367
Variancia, s^2	19.560	355.986	167.818	4.463	76.364
Desviación estándar, s	4.423	18.868	12.954	2.113	8.739
Coefficiente de variación	0.696	0.721	0.344	0.456	0.279

En la tabla 1.9, la media de la población se toma igual que la media de la muestra. La variancia de la población se estima con la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha_1}} \quad (1.47)$$

donde $\chi^2_{1-\alpha_1}$ se obtiene para $N-1$ grados de libertad; para fines prácticos, α_1 se puede tomar igual al 40 %. Esto quiere decir que la probabilidad de que la variancia de la población sea mayor que α_2 (calculada con la ecuación 1.46) es del 40 %. En la tabla 1.9, se presentan los parámetros de resistencia de las poblaciones estadísticas de las tobas y de las arenas pumíticas, usando datos de la tabla 1.7.

Con los valores de la tabla 1.9, se pueden hacer inferencias estadísticas de las propiedades mecánicas. En efecto, aceptando que una población estadística tiene una distribución normal de probabilidad, un valor desfavorable (poco probable) se calcula así:

$$\text{valor desfavorable} = \mu - \sigma Z\alpha_2 \geq 0 \quad (1.48)$$

Tabla 1.9. Parámetros de resistencia al corte. Poblaciones estadísticas de tobas y de arenas pumíticas (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Propiedad mecánica	Tobas			Arenas pumíticas	
	c' t/m ²	c_{nat} t/m ²	Propiedad mecánica	c' t/m ²	c_{nat} t/m ²
Número de valores, N	7	13	20	18	18
χ cuadrada	4.57	10.182	16.85	14.937	14.937
Media, μ	6.357	26.139	37.65	4.63	31.367
Variación, σ^2	25.680	419.547	189.231	5.080	86.910
Desviación estándar, σ	5.068	20.483	13.756	2.254	9.323

La probabilidad de que la magnitud de una propiedad mecánica sea menor que el valor desfavorable calculado con la ecuación 1.47 es α_2 :

Si aplicamos la ecuación 1.47 en la tabla 1.10, se presentan valores desfavorables de los parámetros de resistencia para las tobas y para las arenas pumíticas para los distintos niveles de confianza, α_2 . El ingeniero puede elegir un cierto nivel de confianza, de acuerdo con su criterio y experiencia y estimar la probabilidad de ocurrencia de una propiedad mecánica (Deméneghi y Sanginés, 2000).

El uso de la tabla 1.10 es como sigue: tomando, por ejemplo, un nivel de confianza $\alpha_2 = 20\%$, en la toba existe una probabilidad del 20% de que c' resulte menor que 2.092 t/m², que c_{nat} resulte menor que 8.931 t/m² y que φ resulte menor que 26.073°.

Tabla 1.10. Valores desfavorables estimados de propiedades de resistencia al corte (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Nivel de confianza α_2 , %	$Z\alpha_2$	Tobas			Arenas pumíticas	
		c' t/m ²	c_{nat} t/m ²	φ grados	c_{nat} t/m ²	φ grados
5	1.6449	0	0	15.023	0.923	16.032
10	1.2816	0	0	20.020	1.741	19.419

Tabla 1.10. Valores desfavorables estimados de propiedades de resistencia al corte (Deméneghi y Sanginés, 2000) (continuación)

Nivel de confianza α_2 , %	$Z\alpha_2$	Tobas			Arenas pumíticas	
		c' t/m ²	c_{nat} t/m ²	φ grados	c_{nat} t/m ²	φ grados
15	1.0364	1.105	4.941	23.393	2.294	21.705
20	0.8416	2.092	8.931	26.073	2.733	23.521
25	0.6745	2.939	12.354	28.371	3.110	25.079
30	0.5244	3.700	15.428	30.436	3.448	26.478
40	0.2533	5.074	20.981	34.166	4.059	29.005
50	0	6.357	26.169	37.650	4.630	31.367

Cabe aclarar, que los parámetros de resistencia dependen del grado de saturación del suelo. El valor de una propiedad mecánica b en función de la variación de la humedad del terreno se puede calcular con la siguiente expresión:

$$b = b' + a(b_{nat} - b') \quad (1.49)$$

donde, a es un parámetro que depende de las condiciones de drenaje del sitio. Sus valores tentativos se muestran en la tabla 1.11; por ejemplo, cuando existe una baja probabilidad de que cambie la humedad del terreno, se considera que las condiciones de drenaje son buenas; mientras que, cuando existe una alta probabilidad de que se sature completamente el suelo, se estima que las condiciones de drenaje son malas (Deméneghi y Sanginés, 2000).

Tabla 1.11. Valores aproximados del parámetro a (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Condiciones de drenaje	a
Buenas	0.6
Regulares	0.3
Malas	0

En la práctica, conviene utilizar un nivel de confianza α_2 suficientemente alejado del 50 %, para tomar en cuenta la dispersión de los datos estadísticos. En este sentido, podemos tomar $\alpha_2 = 20\%$. Para $\alpha_2 = 20\%$, obtenemos las siguientes propiedades mecánicas de las tobas (tabla 2.10):

$$c' = 2.092 \text{ t/m}^2, c_{nat} = 8.931 \text{ t/m}^2, \varphi = 26.073^\circ$$

Para el cálculo de la capacidad de carga, ya que las propiedades mecánicas obtenidas con este valor son conservadoras, conviene emplear un factor de resistencia relativamente alto; por ello, se recomienda un $F_R = 0.7$ en la fórmula de capacidad de carga.

Como ejemplo, consideremos una zapata corrida con $D_f = 0.3 \text{ m}$, $B = 0.8 \text{ m}$, $L = 5 \text{ m}$, $\gamma = 1.5 \text{ t/m}^3$ y en condiciones regulares de drenaje:

$$a = 0.3 \text{ (tabla 1.11)}$$

al sustituir en la ecuación 1.48 con $c = b$:

$$c = 4.144 \text{ t/m}^2$$

cuando se reemplaza la ecuación 2.40 con $F_R = 0.7$, hallamos una capacidad de carga resistente $q_R = 76.5 \text{ t/m}^2$. Tomando un factor de carga $F_c = 1.4$, la presión media de contacto para no exceder el estado límite de falla es $q = 54.7 \text{ t/m}^2 \cong 55 \text{ t/m}^2$.

Por otra parte, en una arcilla saturada en su totalidad, ligeramente preconsolidada, de un sitio cercano a la ciudad de San Francisco (*Young Bay Mud*), con un índice plástico $\cong 45\%$, la relación c_u/p'_v varía de 0.35 a 0.4 (Benoit y Clough, 1986).

2.1. El fenómeno de la deformación en los suelos

«La compresión de un suelo se debe a dos causas: (1) por una parte a un reacomodo de sus partículas, que produce una disminución de su relación de vacíos y (2) una deformación de los propios granos bajo la acción de las fuerzas que se ejercen en los puntos de contacto.»³⁶ Consideremos un suelo seco contenido en un recipiente cilíndrico (figura 2.1 a) y observemos las fuerzas de contacto que actúan entre las partículas (figura 2.1 b), las cuales se han dividido en una componente normal, N , y una componente tangencial, T , a las superficies de contacto. Las fuerzas de contacto producen deformaciones elásticas y plásticas en la vecindad de los puntos de contacto, las cuales ocasionan un aumento del área de contacto entre los granos (figura 2.2 a). Si existen partículas de forma laminar, estas sufrirán una flexión como se indica en la figura 2.2 b. Además, una vez que la fuerza cortante excede la resistencia al corte, ocurrirá un deslizamiento entre los granos (figura 2.2 c). La deformación de la masa de suelo se deberá, en parte, al resultado de la deformación de las partículas individuales y en parte al deslizamiento entre las partículas.

³⁶ Schlosser, F., *Elements de Mecanique de Sols*, Paris, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1988.

Se ha observado experimentalmente que el movimiento de los granos, con el subsecuente reacomodo de los mismos, es el causante de la mayor deformación de los suelos. Debido a que el deslizamiento es una deformación no lineal e irreversible, es de esperarse que la relación esfuerzo-deformación unitaria de un suelo sea fuertemente no lineal e irreversible (lo cual indica que la curva esfuerzo-deformación unitaria no es una línea recta y no es única para ciclos de carga-descarga).

a) Sección de un recipiente lleno de suelo

b) Ampliación de una parte de la sección que muestra las fuerzas transmitidas por dos puntos de contacto

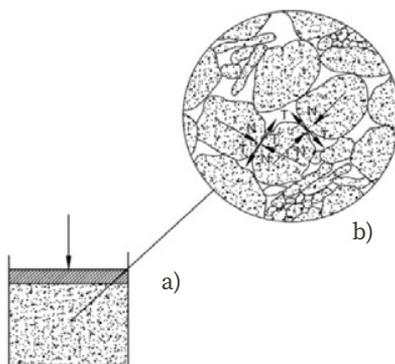


Figura 2.1. Representación de la transmisión de fuerzas a través del suelo (Lambe y Whitman, 1969)

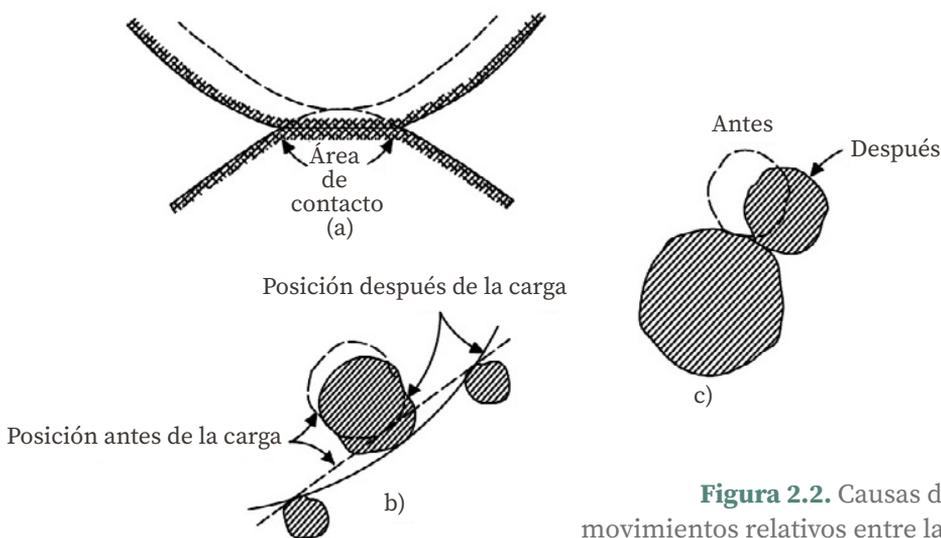
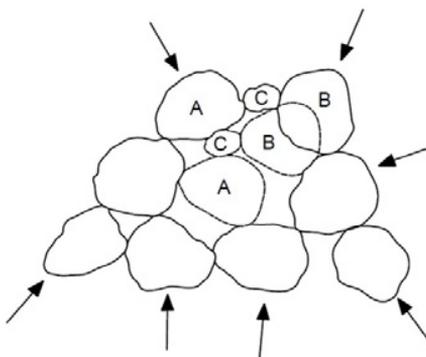


Figura 2.2. Causas de movimientos relativos entre las partículas de suelo (Lambe y Whitman, 1969)

Como ya lo indicamos, «...las deformaciones que sufre un elemento de suelo son el resultado de deformaciones dentro de las partículas y de movimientos relativos entre las propias partículas que forman dicho elemento...»³⁷ En cada uno de los contactos pueden ocurrir deformaciones unitarias de gran magnitud. Existen, fundamentalmente, dos mecanismos de deformación en los suelos granulares: distorsión (y rotura) de partículas individuales y movimiento relativo entre granos como resultado de un deslizamiento o un giro. Estos dos fenómenos rara vez son independientes entre sí; por ejemplo, el conjunto de partículas de la figura 2.3 sería estable bajo el sistema de fuerzas mostrado, si los granos fueran rígidos y no se deslizaran entre sí; dado que las partículas no son rígidas, su deformación causaría pequeños movimientos, produciendo el colapso del conjunto. Mientras que «...los movimientos entre granos son los causantes de las grandes deformaciones de los suelos, estos desplazamientos no serían posibles, si no hubiera distorsiones de las partículas...»³⁸

Figura 2.3. Colapso de un arreglo inestable de partículas (Lambe y Whitman, 1969)



En suelos cohesivos hay que tomar en cuenta, además, la interacción entre las partículas del suelo y el agua que las rodea (figura 2.4). Otro fenómeno que ocurre consiste en la influencia de los iones de las sales del agua sobre la superficie de las partículas (figura 2.5). Estos efectos producen diversas clases de estructura en las arcillas como se indica en la figura 2.6.

³⁷ Lambe, T. W. & V. R. Whitman, *Soil Mechanics*, Wiley, 1969.

³⁸ *Ibíd.*

Figura 2.4. Películas de fluido que están envolviendo a pequeñas partículas de suelo (Lambe y Whitman, 1969)

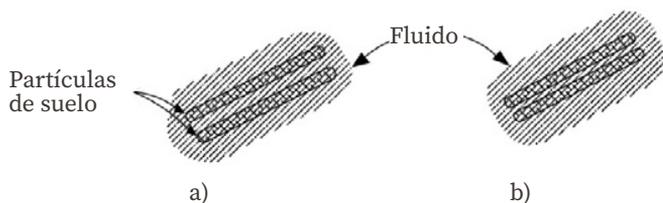
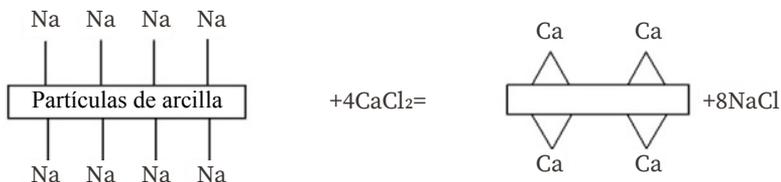
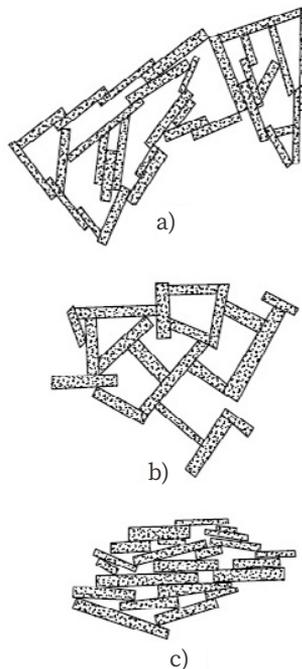


Figura 2.5. Reacción de intercambio de iones (Lambe y Whitman, 1969)



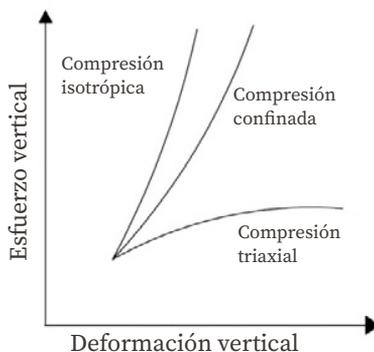
a) Floculación de sales, b) Floculación no salina, c) Dispersión

Figura 2.6. Estructuras de sedimentos (Lambe y Whitman, 1969)



La forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria de un suelo depende de la relación entre el esfuerzo vertical y los esfuerzos horizontales, es decir, es función del tipo de prueba. En la figura 2.7, se muestran las curvas esfuerzo-deformación unitaria para pruebas de compresión isotrópica de compresión confinada y de compresión triaxial.

Figura 2.7. Comparación de curvas esfuerzo-deformación para tres tipos de compresión (Lambe y Whitman, 1969)



No es usual que en el terreno se presente una compresión isotrópica, mientras que la compresión confinada es básicamente un fenómeno de cambio de volumen. En la compresión triaxial ocurren deformaciones unitarias laterales, pudiendo considerarse esta como un fenómeno de cambio de forma; por lo tanto, para el estudio de la deformación de un suelo, esta se puede dividir en dos componentes: (1) una compresión por cambio de volumen y (2) una compresión por cambio de forma.

2.2. Compresión por cambio de volumen

Si sometemos una muestra de suelo granular a un ensaye de compresión sin deformación lateral (compresión confinada), obtenemos una curva de compresibilidad como la de la figura 2.8. Al inicio de la carga, las deformaciones son grandes, las cuales se deben a movimientos y al acomodamiento de los granos. Cuando el esfuerzo vertical aumenta, los movimientos disminuyen y las deformaciones son el resultado de la compresión aproximadamente elástica de los propios granos. El ciclo de descarga y de recarga ABCA (figura 2.9a) que no coincide con la curva inicial muestra que el comportamiento del esqueleto sólido no es reversible.

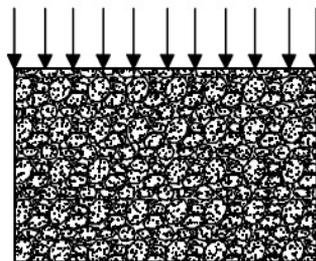


Figura 2.8. Compresión confinada (Schlosser, 1988)

Bajo esfuerzos altos se presenta rotura de los granos que se traduce en un cambio de pendiente de la curva de la figura 2.9b.

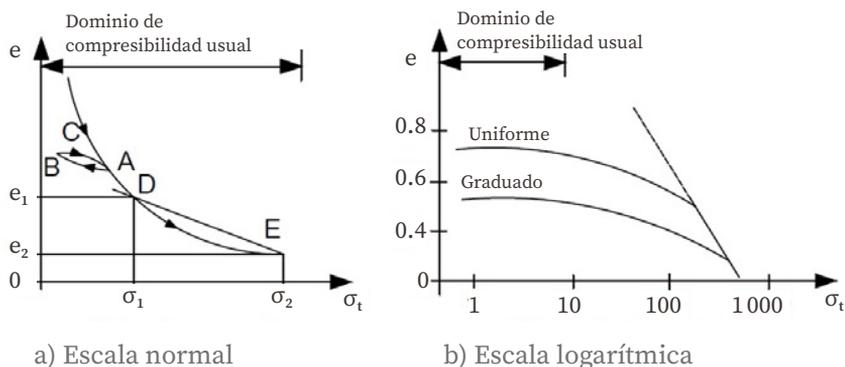
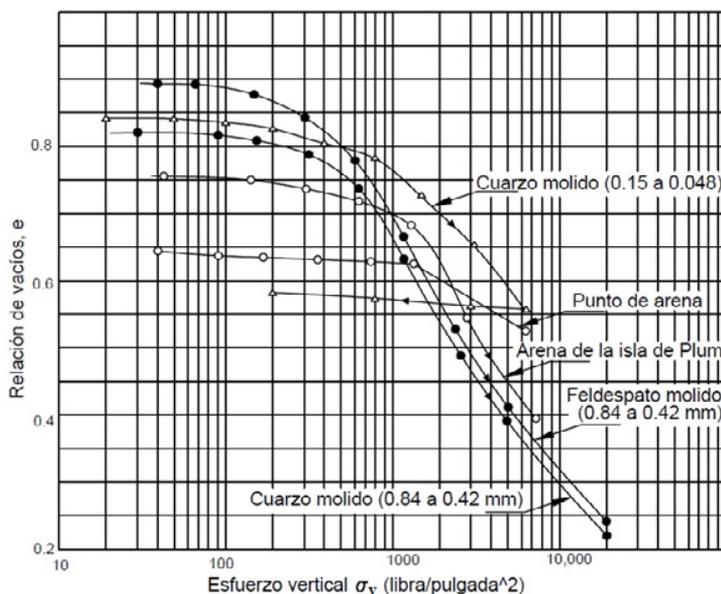


Figura 2.9. Curvas de compresibilidad (Lambe y Whitman, 1969)

En la figura 2.10, se muestran los resultados de las pruebas de compresión confinada, en escala semilogarítmica para varias clases de arenas. La rotura de granos ocurre cuando cambia la pendiente de la curva de compresibilidad. Para la arena formada por feldespato, la rotura se presenta a un esfuerzo ligeramente superior a 100 lb/plg^2 (7.03 kg/cm^2), mientras que para la arena de Sandy Point, la rotura ocurre a un esfuerzo más de diez veces superior ($1400 \text{ lb/plg}^2 = 98.4 \text{ kg/cm}^2 \approx 9840 \text{ kPa}$).

Figura 2.10. Resultados en pruebas de compresión confinada para esfuerzos altos en varias muestras de arena (modificada por Lambe y Whitman, 1969)

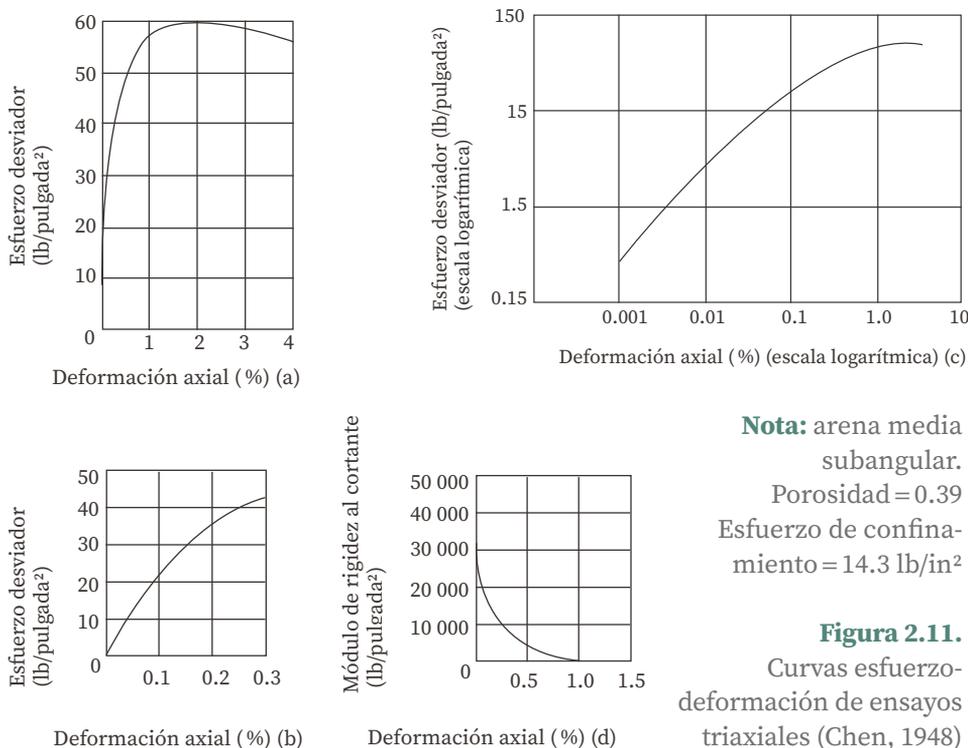


En arcillas totalmente saturadas, la compresión por cambio de volumen ocurre a largo plazo debido a la baja permeabilidad del suelo.

2.3. Compresión por cambio de forma

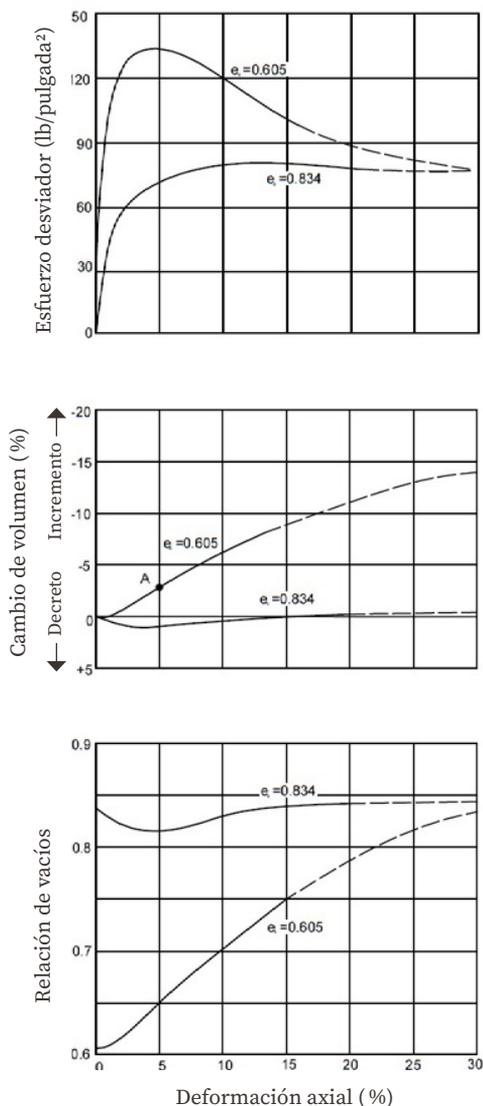
La figura 2.11 exhibe los resultados de una prueba de compresión triaxial en una arena. La relación esfuerzo-deformación unitaria se curva a pequeñas deformaciones y alcanza un máximo para una deformación unitaria del orden del 2%. Nótese que aún en pequeñas deformaciones, la curva esfuerzo-deformación unitaria es no lineal.

En una prueba triaxial es interesante observar que, tanto una arena compacta como una arena suelta tienden a la misma relación de vacíos (y a la misma resistencia) para grandes deformaciones (figura 2.12).



Si se aplica una carga relativamente rápida a un suelo cohesivo que esté en su totalidad saturado, este sufre una deformación prácticamente a volumen constante, pues el agua no alcanza a salir por la baja permeabilidad de la arcilla.

Figura 2.12. Curvas esfuerzo-deformación para especímenes de arena densa y suelta fina, mediana-fina



2.4. Efecto de la presión de confinamiento

Ahora, estudiemos una muestra de suelo sometido a una presión de confinamiento, p_c , y apliquemos un esfuerzo desviador, σ_z ; en la figura 2.13, se muestra una curva típica esfuerzo desviador-deformación unitaria de

un suelo en compresión triaxial. Observemos que el tramo inicial es una línea recta y que, después de cierto nivel de esfuerzo, se convierte en una curva de concavidad hacia abajo. A la pendiente de la recta inicial se le conoce como módulo tangente inicial, E_i , del suelo. Algunos ingenieros utilizan el módulo de deformación correspondiente al 50 % de la falla, el cual se denomina, E_{50} .

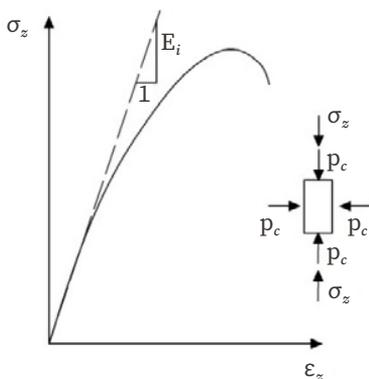


Figura 2.13. Curva esfuerzo-deformación unitaria de un suelo

En términos generales, al aumentar la presión de confinamiento se incrementa la rigidez de un suelo, siendo este fenómeno el más acusado en suelos friccionantes. En la figura 2.14, se muestra la variación del módulo tangente inicial (o del E_{50}) con la presión de confinamiento en un suelo.

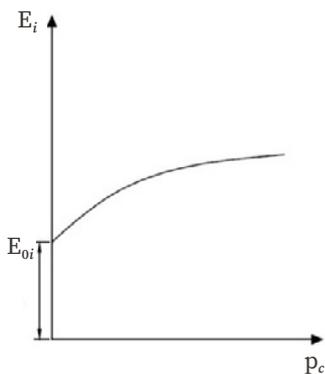


Figura 2.14. Variación del módulo tangente inicial con la presión de confinamiento

Una forma aproximada de tomar en cuenta el fenómeno del incremento de rigidez con el confinamiento consiste en el empleo del criterio de Janbu (1963) que establece:

«...que el módulo tangente inicial de deformación está dado por:

$$E_i = E_{i0} + kp_a \left(\frac{p_c}{p_a} \right)^n \quad (2.1)$$

donde:

E_i : es el módulo tangente inicial de deformación.

E_{i0} : es el módulo tangente inicial de deformación para un confinamiento efectivo igual a cero.

K : es el coeficiente que depende de la rigidez del material.

p_a : es la presión atmosférica = 101 kPa = 10.3 t/m².

p_c : es la presión de confinamiento.

n : es el exponente que depende de la clase de suelo». ³⁹

En el campo, los esfuerzos horizontales por peso propio del suelo, en general, son diferentes del esfuerzo vertical (figura 2.15 a).

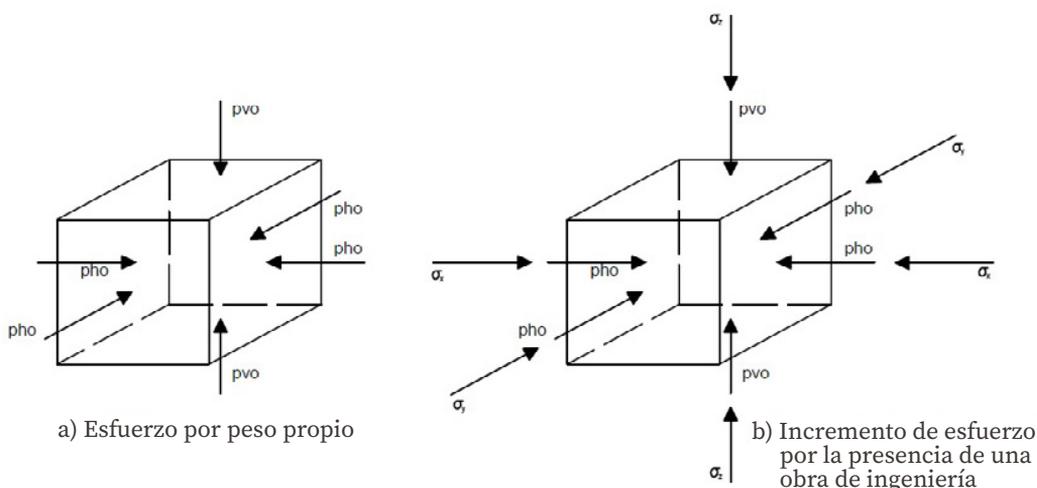


Figura 2.15. Esfuerzo en un elemento de suelo

³⁹ Duncan, J. M. & Y. C. Chang, «Nonlinear analysis of stress and strain in soils», *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, no. SM5, 1970.

Además, es usual tomar una presión de confinamiento de campo dada por:

$$p_{co} = \frac{p_{vo} + p_{ho} + p_{ho}}{3} = \frac{p_{vo} + 2p_{ho}}{3} \quad (2.2)$$

entonces, la presión horizontal vale:

$$p_{ho} = K_o p_{vo} \quad (2.3)$$

donde:

K_o : es el coeficiente de presión en reposo y está dado por (Mitchell, 1993):

$$K_o = (1 - \text{sen } \varphi')(\text{OCR}) \text{sen } \varphi' \quad (2.4)$$

donde:

φ' : es el ángulo de fricción interna del suelo.

OCR: (Coeficiente de Preconsolidación) del suelo.

Cuando se reemplaza la ecuación 2.3 en la ecuación 2.2, se tiene:

$$p_{co} = \frac{(1 + 2K_o)p_{vo}}{3} \quad (2.5)$$

Si se construye una obra de ingeniería, esta produce incrementos de esfuerzo σ_z , σ_x y σ_y (figura 2.15 b). La presión de confinamiento se incrementa en la cantidad:

$$p_{cf} = p_{co} + \Delta p_c$$

$$\Delta p_c = \frac{1}{3} (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

por lo tanto:

$$p_{cf} = p_{co} \frac{1}{3} (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (2.6)$$

Por otra parte, el módulo de Poisson se puede obtener de manera aproximada de la siguiente forma: consideremos un estrato de suelo cubierto por otros estratos en proceso de sedimentación, en el cual por simetría, la deformación horizontal vale cero: $\varepsilon_h = 0$.

Cuando se aplica la ley de Hooke, se tiene:

$$\varepsilon_h = \frac{1}{E} [p_{ho} - \nu (p_{vo} + p_{ho})] = 0$$

$$p_{ho} = \left[\frac{\nu}{(1 - \nu)} \right] p_{vo} \quad (2.7)$$

pero: $p_{ho} = K_o p_{vo}$

por consiguiente:

$$\nu = \frac{K_o}{1 + K_o} \quad (2.8)$$

2.5. Efecto de la trayectoria de esfuerzos

El ejemplo más claro de que la deformación de un suelo depende de la trayectoria de esfuerzos consiste en la diferencia de rigidez entre un suelo normalmente cargado y un suelo precargado; en este último, su rigidez puede ser de tres a cuatro veces mayor que la del material nor-

malmente cargado; las deformaciones del suelo serán, por esta razón, muy diferentes en cada caso (Décourt, 1989).

El efecto de la precarga en las arenas es muy significativo, así, puede haber arenas *precargadas* o *normalmente cargadas con similar*, D_r , pero con un comportamiento muy diferente (Ladd, *et al.*, 1977); en consecuencia, resulta inadecuada la utilización de la compacidad relativa, D_r , como un índice único del comportamiento de una arena; por el mismo motivo, la poca sensibilidad de la SPT (Standard Penetration Test, Prueba de Penetración Estándar) para detectar el decremento de compresibilidad en arenas causado por la precarga (o preconsolidación) es la razón principal de la gran dispersión hallada en la predicción de asentamientos de zapatas en arenas. Los métodos que no separan las arenas normalmente cargadas de las precargadas están condenadas al fracaso (Décourt, 1989). De acuerdo con Burland y Burbridge: «...el asentamiento de una zapata en una arena precargada es aproximadamente igual a un tercio de la misma zapata sobre una arena normalmente cargada, independientemente, de la magnitud del OCR (Coeficiente de Preconsolidación)». ⁴⁰

«Mediante la ejecución de pruebas de placa helicoidal (*screw plate tests*), se puede estimar la máxima presión de precarga en arenas (Dahlberg, 1974)». ⁴¹

En una arcilla totalmente saturada, la compresibilidad en el tramo de recompresión es bastante menor que la compresibilidad en el tramo virgen (figura 2.16).

⁴⁰ Burland, J. B. & M. C. Burbidge, «Settlement of foundations on sand and gravel», *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1985.

⁴¹ Mitchell, J. K., *Characterization and Exploration*, ASCE, 1978.

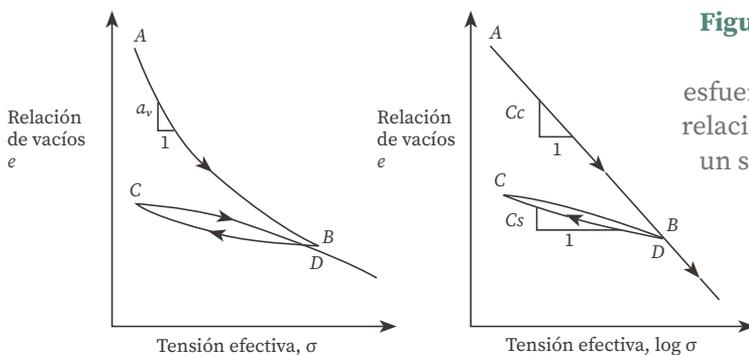


Figura 2.16. Relación idealizada entre esfuerzos efectivos y la relación de vacíos para un suelo compresible (Mitchell, 1993)

AB = Compresión inicial o virgen

BC = Descarga zona de expansión

CD = Recompresión

a_v = Coeficiente de compresión = $-de/d\sigma = -0.434 Cc/\sigma$

m_v = Compresibilidad = $-a_v/(1+e)$

Cc = Índice de compresión = $-de/d\log\sigma$ en compresión

Cs = Índice de expansión = $-de/d\log\sigma$ en expansión

2.6. Incremento neto de carga

El incremento neto de carga o presión neta se define de la siguiente forma:

$$q_n = q - p_{vo} \quad (2.9)$$

donde:

q : es la presión media de contacto entre el suelo y cimiento.

p_{vo} : es la presión total previamente existente al nivel de desplante, debida al peso propio del suelo.

2.7. Influencia de la clase de suelo

La magnitud y la evolución de las deformaciones de un suelo dependen fundamentalmente del tipo de material y de la presencia del NAF.

Se pueden distinguir cuatro clases de suelos:

- 1) Suelos friccionantes
- 2) Suelos cohesivos totalmente saturados
- 3) Suelos cohesivos parcialmente saturados
- 4) Suelos cementados parcialmente saturados

Las deformaciones en estos suelos se pueden calcular como se indica en los siguientes incisos. (Debido a lo extenso del tema, y aun cuando son de gran importancia, se omiten los aspectos dinámicos).

2.7.1. Suelos friccionantes

Como se mencionó antes, en suelos friccionantes es muy importante tomar en cuenta el incremento de la rigidez del terreno con la presión de confinamiento. Por lo anterior, se puede emplear en forma aproximada la fórmula de Janbu (1963) que está dada por la ecuación 2.1.

En la tabla 2.1, se presentan valores estadísticos de los módulos de deformación, los cuales deben emplearse, únicamente, para fines preliminares de análisis.

Tabla 2.1. Valores aproximados de propiedades de deformación en suelos friccionantes (Janbu, 1963)

Estado	D_r	N	q_c , kg/cm ²	n	Normalmente cargado	Precargado
					K	
Muy suelto	< 0.2	< 4	< 20	0.65	< 140	< 420
Suelto	0.2-0.4	4-10	20-40	0.65-0.62	140-290	420-870
Medianamente compacto	0.4-0.6	10-30	40-120	0.62-0.58	290-800	870-2400
Compacto	0.6-0.8	30-50	120-400	0.58-0.55	800-1 300	2400-3900
Muy compacto	> 0.8	> 50	> 400	0.55	> 1 300	> 3900

Donde:

D_r : es la compacidad relativa.

N : es el número de golpes en la prueba de penetración estándar.

q_c : es la resistencia en la punta del cono holandés.

El asentamiento se calcula empleando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\delta_z = \frac{H}{E_s} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.10)$$

La presión de confinamiento, p_c , que debe utilizarse en la ecuación 1 debe ser la presión efectiva, la cual está dada por:

$$p_c = p_{co} + \left(\frac{1}{2}\right) \Delta p_c$$

pero:

$$\Delta p_c = \left(\frac{1}{3}\right) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

por esta razón:

$$p_c = p_{co} + \left(\frac{1}{6}\right) (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (2.11)$$

2.8. Efecto de la presencia del NAF

Si el suelo se encuentra abajo del NAF, en las ecuaciones 2.1 y 2.11, se debe emplear la presión efectiva en vez de la presión total, pues la rigidez de una arena está en función de esta presión efectiva.

Por otra parte, en relación con el cálculo de asentamientos de zapatas en arenas, analizando la mayoría de los datos publicados por Burland y Burbridge (1985) concluyeron que:

«...el asentamiento δ (en milímetros) de zapatas en arenas normalmente cargadas está dado por:

$$\delta = qB^{0.7}l_c \quad (2.12)$$

mientras que para arenas precargadas está dado por:

$$\delta = \frac{qB^{0.7}l_c}{3} \quad (2.13)$$

$$l_c = \frac{1.17}{N^{1.4}} \quad (2.14)$$

donde:

q : es la presión de contacto en kN/m².

B : es el ancho de la cimentación en metros».⁴²

Para calcular las deformaciones de los suelos friccionantes existen varios métodos cuando se toman en cuenta los efectos de la presión de confinamiento y la no linealidad de la curva esfuerzo-deformación unitaria. En el anexo A, se presenta el procedimiento de Deméneghi (1999); en el anexo B, el de Schmertmann (1970); y en el anexo C, el de Kondner (Duncan y Chang, 1970).

⁴² Dècourt, L., «The standard penetration test, state-of-the-art report», XII Congreso Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones, Río de Janeiro, 1989.

2.9. Suelos plásticos totalmente saturados

En los suelos plásticos totalmente saturados, se presentan expansiones inmediatas producidas por excavaciones, asentamientos inmediatos a volumen constante (por recompresión y por compresión) y asentamientos diferidos con cambio de volumen (por recompresión y por compresión). También, ocurren deformaciones transitorias y permanentes a volumen constante que son producidas por un sismo.

Las NTCDCC establecen que en cimentaciones compensadas se calcularán:

- i) Los movimientos instantáneos debidos a la carga total transmitida al suelo por la cimentación (asentamientos inmediatos a volumen constante).
- ii) Las deformaciones transitorias y permanentes del suelo de cimentación bajo cargas sísmicas.
- iii) Los movimientos diferidos debidos al incremento neto de carga en el contacto cimentación-suelo.⁴³

En una excavación pueden ocurrir fuertes expansiones inmediatas debidas a deformaciones del suelo a volumen constante; por ejemplo, en una excavación de 6 m de profundidad, de 18 m de ancho por 124.8 m de longitud, se observó una expansión al centro de 50 cm y de 20 en las orillas. En otra excavación de 6 m de profundidad, de 10 m de ancho por 48 m de longitud, se midió una expansión inmediata de 40 cm al centro y de 10 cm en las orillas. Estos datos fueron registrados por Marsal y Mazari (1959) que, además, señalan que tales movimientos del subsuelo son causa de asentamientos en un edificio, aunque se le haya compensado totalmente. Por su parte, Tamez señala que:

⁴³ Gobierno del Distrito Federal, *óp.cit.*

...en la ejecución de excavaciones hasta de 120 m de longitud, 16 m de ancho y 6 a 7 m de profundidad, en aras del cumplimiento del programa de construcción (que debió llevarse a cabo con gran premura) hubo que admitir el desarrollo de expansiones del fondo, que llegaron hasta 60 cm, en algunos casos, por lo que, se requirió la instalación de pilotes de control para reducir y controlar los asentamientos generados por la recuperación de las expansiones. Debe agregarse que solamente se empleó bombeo de achique para el control de filtraciones a la excavación, durante todo el tiempo que tomó la construcción de las cimentaciones. Esta contradicción, de diseñar una cimentación compensada que, en teoría, no debiera sufrir asentamientos, y la triste realidad de no poder controlar las expansiones inducidas por el proceso de excavación, que se traducirían más tarde en grandes asentamientos, me resultó muy inquietante, y la llamé, para mi propio uso, ‘la paradoja de las cimentaciones compensadas’, que me mantuvo inquieto durante varios años.⁴⁴

Para ejemplificar las deformaciones que experimenta un suelo cohesivo totalmente saturado, analicemos un edificio apoyado en una cimentación parcialmente compensada a base de un cajón de concreto reforzado en un suelo de este tipo. Para alojar el cajón es necesario efectuar un corte, lo que produce expansiones inmediatas del fondo de la excavación. Al construir el edificio, las expansiones se recuperan mediante hundimientos que se denominan asentamientos por recompresión. Debido al incremento neto de carga, se presentan hundimientos inmediatos adicionales que se denominan asentamientos por compresión. Finalmente, debido al incremento neto de carga ocurren hundimientos diferidos causados por el fenómeno de consolidación de la arcilla.

⁴⁴ Tamez, E., «Cincuenta años de geotecnia en ICA», *Memoria de la reunión conmemorativa: 40 años de investigación y práctica en geotecnia*, t. II, Fundación ICA, 1996.

El cálculo de las deformaciones anteriores se puede llevar a cabo de la siguiente forma:

Expansiones inmediatas. Se ha observado que las expansiones inmediatas son de tipo elástico, por lo que con frecuencia se calculan empleando la teoría de la elasticidad. Sin embargo, es conveniente considerar que el módulo elástico del suelo es no lineal y, además, aumenta con la presión de confinamiento. El módulo elástico no lineal se suele obtener mediante pruebas de compresión triaxial (de preferencia del tipo consolidadas-no drenadas), aplicando para cada presión de confinamiento ciclos de carga y descarga en el suelo. Las expansiones inmediatas se pueden calcular utilizando un módulo elástico lineal, ϵ_e , pero según lo comentado en el cuerpo de este capítulo, el cómputo será solo aproximado por el marcado comportamiento no lineal de los suelos. Cabe aclarar que, en algunos sitios de la Ciudad de México, la arcilla exhibe un módulo elástico no drenado del orden de 50 kg/cm² (Alberto, 1970).

Asentamientos inmediatos por recompresión. Los asentamientos inmediatos por recompresión se calculan con la teoría de la elasticidad, pero conviene estimar que el módulo de deformación en recompresión es no lineal y que se acrecienta con la presión de confinamiento. El cálculo se efectúa en forma similar al de las expansiones, pues el módulo de recompresión es muy parecido al de expansión; el signo de los esfuerzos es ahora de compresión.

Asentamientos inmediatos por compresión. Los asentamientos inmediatos por compresión se calculan con la teoría de la elasticidad, pero conviene observar que el módulo de deformación es no lineal y que aumenta con la presión de confinamiento.

Asentamientos diferidos por recompresión y compresión. Las cargas por recompresión y por compresión producen asentamientos diferidos oca-

sionados por cambio de volumen al ser expulsada el agua; estos se calculan con los resultados de las pruebas de consolidación unidimensional.

Al aplicar una carga sostenida en un suelo cohesivo totalmente saturado, se presenta una deformación a largo plazo debida al fenómeno de consolidación del suelo. En general, se acepta que la consolidación conste de dos procesos: (1) la consolidación primaria que es causada por el fenómeno de expulsión de agua del suelo y (2) la consolidación secundaria que es ocasionada por una deformación de tipo viscoplastico de las partículas del suelo.

La deformación por consolidación primaria se puede calcular con la teoría de Terzaghi (Juárez Badillo y Rico, 1976) (anexo F) y la deformación por consolidación secundaria se puede calcular empleando la teoría de Zeevaert (1973) (anexo G).

En la práctica, la deformación diferida se conoce a partir de una prueba de consolidación que consiste en aplicar varias cargas sostenidas durante lapsos, más o menos, definidos (que usualmente duran un día). En general, se aplican del orden de siete a nueve cargas, por lo que, un ensaye de consolidación dura de siete a nueve días. Los resultados de una prueba de consolidación se grafican en una curva de compresibilidad, en la cual se traza en el eje de las ordenadas, la relación de vacíos, y en el eje de las abscisas, la presión aplicada (es usual graficar esta en escala logarítmica).

Cuando se conoce la curva de compresibilidad de un estrato de suelo, el asentamiento se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\Delta H = \left[\frac{\Delta e}{(1 + e_0)} \right] H \quad (2.15)$$

También, la deformación diferida se puede calcular en forma aproximada en función del índice de recompresión en el tramo de recompresión (figura 2.17). El asentamiento a largo plazo de un estrato de espesor H se obtiene de la siguiente forma:

$$\Delta e = C_{rc} \log \left(\frac{p_{vo'} + \Delta p'}{p_{vo'}} \right) \quad (2.16)$$

por ello:

$$\Delta H = \frac{C_{rc} H}{1 + e_o} \log \left(\frac{p_{vo'} + \Delta p'}{p_{vo'}} \right) \quad (2.17)$$

en el tramo virgen, la deformación diferida se calcula:

$$\Delta e = C_c \log \left(\frac{p_{vo'} + \Delta p'}{p_{vo'}} \right) \quad (2.18)$$

en consecuencia:

$$\Delta H = \frac{C_c H}{1 + e_o} \log \left(\frac{p_{vo'} + \Delta p'}{p_{vo'}} \right) \quad (2.19)$$

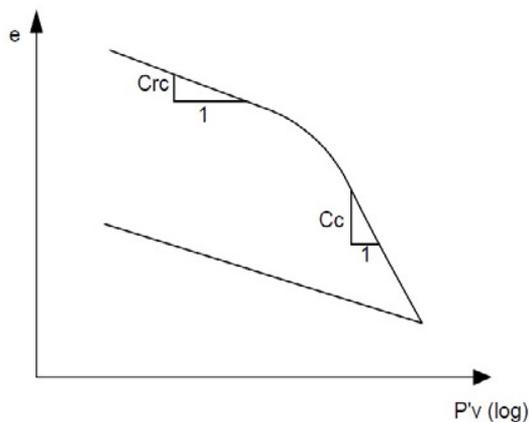


Figura 2.17. Suelo cohesivo totalmente saturado

En los anexos F y G, se presenta un procedimiento para el cálculo de las compresiones a largo plazo en suelos cohesivos totalmente saturados.

2.10. Suelos plásticos parcialmente saturados

La problemática de los suelos plásticos parcialmente saturados es diferente a la de los suelos totalmente saturados; en estos, la presión hidráulica U_w es mayor que cero, mientras que en aquellos la presión U_w es menor que cero.

Si, consideramos un suelo plástico totalmente saturado y hacemos que este pierda humedad, durante este proceso se forman meniscos que producen esfuerzos de tensión en el agua del suelo lo que, a su vez, ocasiona esfuerzos efectivos de compresión en la estructura sólida del suelo (Juárez Badillo y Rico, 1976), a la tensión en el agua se le denomina succión; por lo tanto, en una arcilla parcialmente saturada, la succión produce un incremento de la presión efectiva y un proceso de contracción del material. Por el contrario, una disminución de la succión ocasionará un aumento del volumen del suelo. La succión total de un suelo consiste en dos componentes: la succión osmótica y la succión mátrica (Nelson y Miller, 1992).

La succión osmótica en una arcilla se debe a las fuerzas ejercidas sobre las moléculas de agua como resultado de la diferencia de concentración de iones en el agua en la zona cercana a la doble capa eléctrica. En efecto, cerca de la partícula existe una mayor concentración de iones por la atracción de la carga negativa de una partícula sobre los cationes del agua, mientras que, lejos de esta región, la atracción disminuye y con ello la concentración de iones; esta diferencia de concentración produce un fenómeno osmótico que tiene como consecuencia la aparición de la succión osmótica en el agua del suelo.

Para describir la succión mátrica, valoremos el suelo parcialmente saturado de la figura 2.18 a. La altura hasta la cual el suelo permanece totalmente saturado por arriba del NAF depende del tamaño de los poros del

suelo y de la diferencia entre las presiones del aire y del agua; en la figura 2.18 a, esta altura corresponde a la parte inferior del canal de aire, el cual se muestra amplificado en la figura 2.18 b. Fredlund indica que "...para propósitos prácticos, la frontera entre aire y agua se puede considerar como una membrana que representa una fase distinta del suelo..."⁴⁵ El equilibrio del diagrama de cuerpo libre de esta membrana conduce a la siguiente expresión (Nelson y Miller, 1992):

$$(u_a - u_w) = \frac{2T_s}{r} \quad (2.20)$$

donde:

u_a : es la presión en el aire.

u_w : es la presión en el agua.

T_s : es la tensión superficial de la membrana.

r : es la radio de la esfera (idealizada).

La cantidad $(u_a - u_w)$ es, justamente, la succión mátrica del suelo.

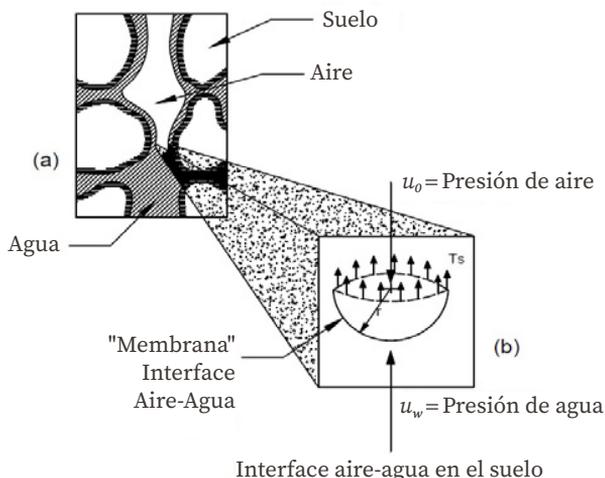


Figura 2.18. Interface aire-agua en el suelo (Nelson y Miller, 1992)

⁴⁵ Fredlund, D. G., "Appropriate concepts and technology for unsaturated soils", *Geotech Journal*, vol. 16, no. 1, 1979.

La succión total es una función de las succiones mátrica y osmótica. Para la mayoría de las aplicaciones prácticas, el rango de variación del contenido de agua de un suelo es tal que los cationes adsorbidos están generalmente hidratados en su totalidad y las fuerzas osmóticas se mantienen constantes. En consecuencia, no ocurren cambios significativos en la presión osmótica (Krahn y Fredlund, 1972) y los cambios en la succión total se deben fundamentalmente a variaciones en la succión mátrica (Nelson y Miller, 1992). En ocasiones, la succión se expresa como el potencial de succión, P_F , que es igual al logaritmo en base 10 de la succión medida en centímetros de columna de agua.

Por otra parte, la plasticidad de los suelos da lugar a que, además, de la deformación causada por un cambio de esfuerzos (por carga externa, peso propio o succión), se presente una expansión producida por la absorción de moléculas de agua dentro de las moléculas de las partículas sólidas del suelo o por una hidratación de la doble capa eléctrica que rodea a las partículas. Esta absorción de agua e hidratación de la doble capa eléctrica depende de la mineralogía de las partículas de arcilla; por ejemplo, es mayor cuando el mineral es montmorillonita.

Ahora bien, tengamos en cuenta una arcilla en estado natural con baja humedad y hagamos pruebas de compresión triaxial consolidadas-drenadas (pruebas lentas) para diferentes valores de la presión de confinamiento, p_c , (figura 2.19). Si se permite un aumento de humedad a la arcilla, esta sufrirá una expansión por absorción de agua; después de que ocurra la expansión, repetimos las pruebas de compresión triaxial; la variación de E_i es como se muestra en la figura 2.19. Aquí, vemos que la rigidez disminuye con el aumento del grado de saturación S_r .

También, la familia de curvas de la figura 2.19 se puede visualizar en función de la succión como se indica en la figura 2.20:

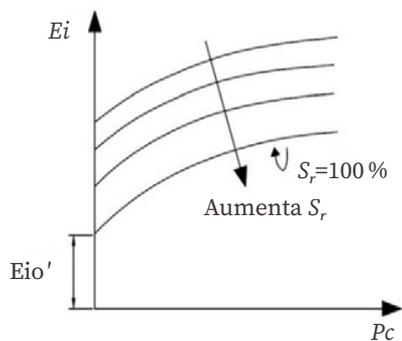


Figura 2.19. Variación de E_i con S_r

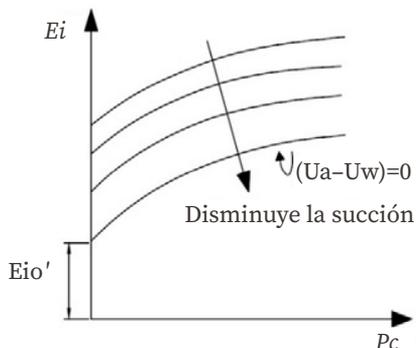


Figura 2.20. Variación de E_i con la succión

En efecto, es importante destacar que la deformación de la arcilla es la suma algebraica de la deformación por absorción de moléculas de agua, más la compresión por el incremento de la carga externa.

Un ejemplo de suelos cohesivos parcialmente saturados lo constituyen las arcillas expansivas, las cuales en temporada de lluvia pueden sufrir fuertes expansiones y en temporada de estiaje pueden experimentar contracciones por una disminución de su humedad.

Los movimientos anteriores pueden producir daños sobre todo en estructuras ligeras como casas habitación y pavimentos. Estos daños se presentan en lugares de clima semiárido o árido donde el NAF se encuentra a gran profundidad.

En la figura 2.21, se muestra un perfil de succión medido en Adelaide, Australia. La figura 2.22 exhibe cambios de la relación de vacíos de un suelo cuando se somete a cambios de succión y de carga externa en el consolidómetro. En la figura 2.23, se muestran las variaciones de la deformación cuando cambia la succión con una carga constante.

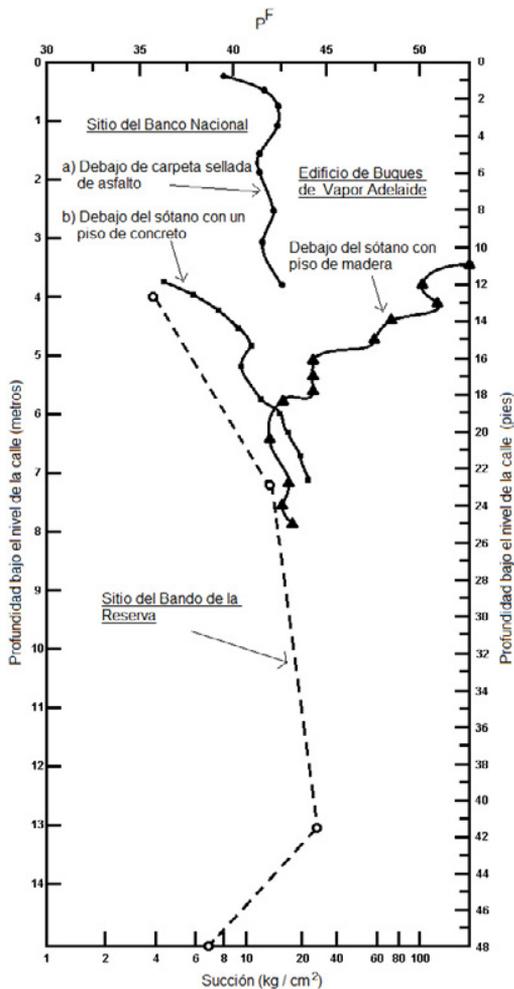
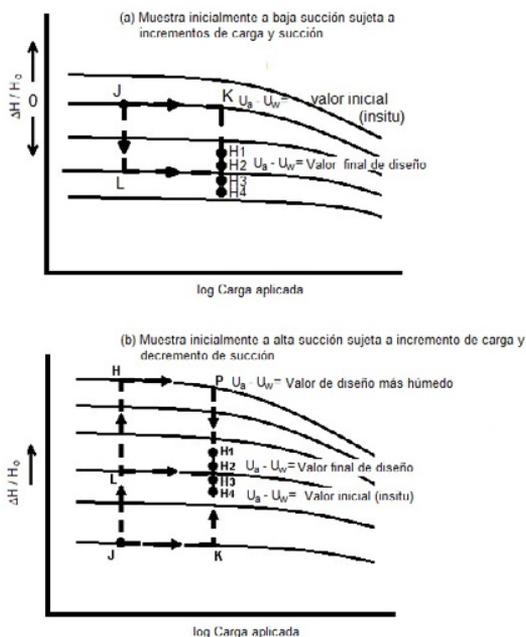


Figura 2.21. Perfiles de succión en arcilla debajo de edificios grandes en Adelaide, Australia (Aitchison y Woodburn, 1969)

Figura 2.22. Trayectorias típicas de esfuerzos para combinaciones de carga aplicada y succión (Aitchison y Woodburn, 1969)



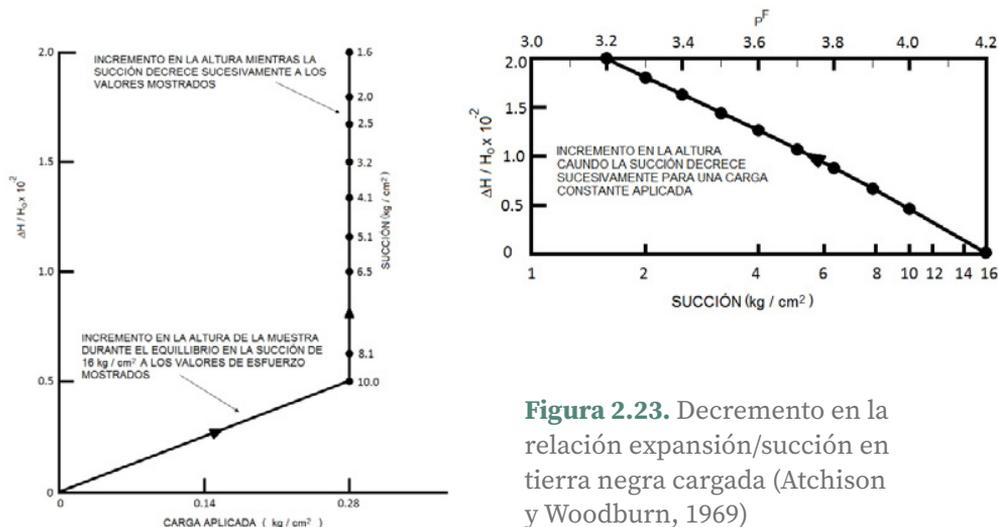


Figura 2.23. Decremento en la relación expansión/succión en tierra negra cargada (Atchison y Woodburn, 1969)

En ocasiones, se requiere conocer la presión vertical, p_{vso} , que es debida al peso propio y a la succión en un suelo. La valuación de p_{vso} se puede llevar a cabo con la realización de una prueba de *volumen constante* que consiste en aplicar una carga dada al suelo para luego sumergir este en agua; la arcilla tiende a expandirse, por lo que se incrementa la carga para evitar dicha expansión; el proceso se continúa hasta que el espécimen no muestra ya tendencia a expandirse. A partir de esta presión, la prueba se continúa en forma normal, cargando y descargando el suelo. La presión de expansión, p_s , se obtiene como se indica en la figura 2.24; se estima que $p_{vso} \cong p_s$. Esta corrección se hace a causa de los efectos de alteración del suelo al pasar del campo al laboratorio (Fredlund y Rahardjo, 1993).

En el anexo A, se presenta un procedimiento no lineal (Deméneghi, 1999) y en el anexo D, se presenta el criterio de Fredlund y Rahardjo (1993) para la valuación de la deformación de un estrato de arcilla por aumento o disminución de humedad.

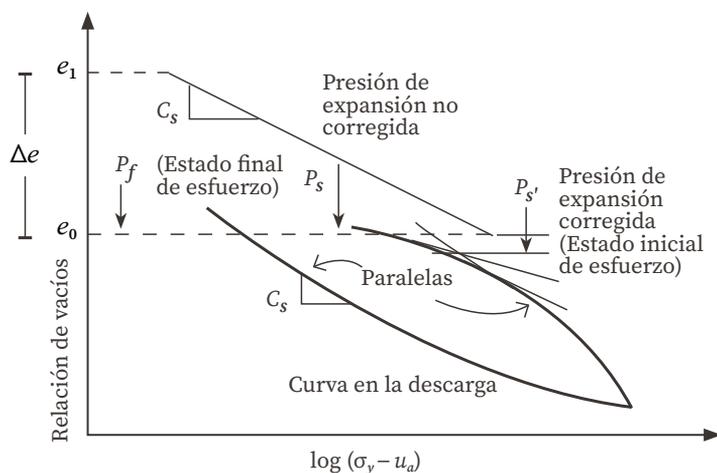


Figura 2.24.
Prueba de volumen constante (Fredlund y Rahardjo, 1993)

2.11. Suelos poco plásticos, cementados, parcialmente saturados

En la naturaleza es frecuente encontrar suelos de baja o nula plasticidad en los que sus partículas se encuentran unidas por algún tipo de cementante. La cementación de los granos es muy variable y puede ser tan fuerte que el suelo se clasifica como roca. Por ejemplo, algunas tobas de consistencia dura que son conocidas como piedra de cantera, también, pueden ser tan débiles que un pequeño aumento de humedad puede producir la pérdida completa de la cementación. Ejemplos de terrenos cementados poco plásticos son los suelos colapsables, algunas tobas y algunos suelos residuales.

Uno de los problemas que se presenta en los suelos cementados consiste en que al aumentar su humedad, ocurre una disminución de la rigidez del material, lo cual afecta, obviamente, la seguridad del terreno de cimentación.

Por lo anterior, en suelos poco plásticos cementados parcialmente saturados conviene realizar pruebas de deformabilidad, variando el grado de saturación del terreno. En la figura 2.19, se exhibe la variación del módulo tangente inicial, E_i , con el grado de saturación y apreciamos que la rigidez del suelo disminuye con el aumento del grado de saturación.

En la figura 2.25, se muestra la fuerte disminución de la relación de vacíos de un suelo colapsable cuando se incrementa la humedad. Otro factor importante a considerar es el grado de alteración de las muestras extraídas del subsuelo. En la figura 2.26, se exhibe la influencia del grado de alteración en la deformabilidad del terreno; la curva AB corresponde a una muestra con muy poca o nula alteración, mientras que las curvas AC , AD y AE se obtienen para grados cada vez mayores de perturbación. Analicemos un suelo que al cargarlo en estado natural pasa de A a B (figura 2.26); al humedecerlo pasaría de B a F y el asentamiento estaría dado por la distancia vertical entre los puntos A y F . Si la muestra de suelo se alterara, obtendríamos, por ejemplo, la curva AD y el asentamiento por humedecimiento estaría dado por la distancia de D a F . Sin embargo, en el campo, el asentamiento por hidratación, en realidad, estaría dado por la distancia vertical entre B y F . Por otra parte, el hundimiento por carga en un suelo cementado, en general, es pequeño (distancia vertical AB , figura 2.26). Por lo anterior, para el cálculo del asentamiento por humedecimiento se recomienda utilizar la distancia vertical entre los puntos A y F de la figura 2.26.

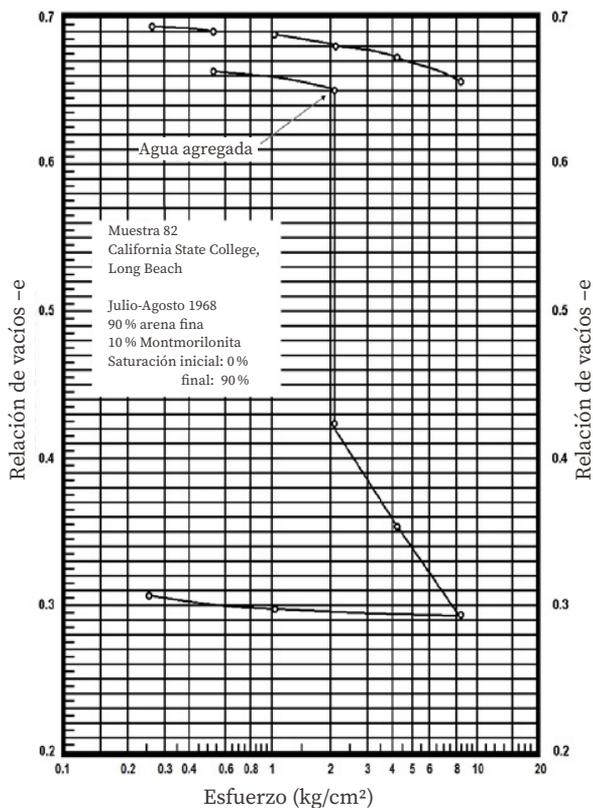


Figura 2.25. Colapso en una prueba de consolidación (Dudley, 1970)

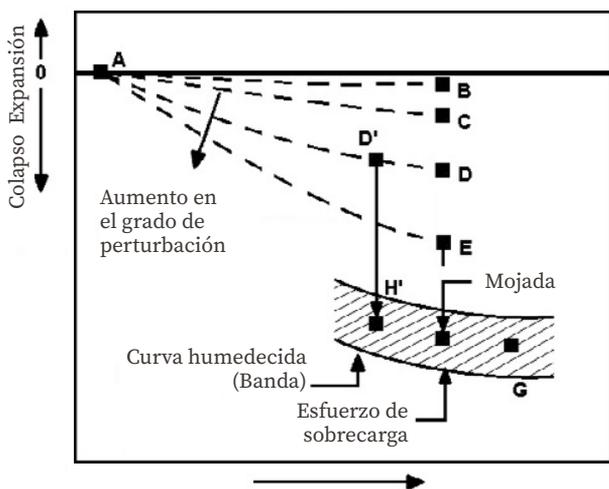


Figura 2.26. Esquema de la respuesta por humedecimiento en suelos colapsables (Houston y Houston, 1997)

2.12. Empleo de fórmulas elásticas

La teoría de la elasticidad proporciona un buen número de soluciones para diferentes condiciones geométricas y de carga sobre el terreno. Por lo tratado en los incisos anteriores, es evidente que el empleo de fórmulas elásticas solo proporciona una solución aproximada, pues no se toma en cuenta el efecto de la no linealidad en la relación esfuerzo-deformación del suelo ni de la variación de la rigidez del material con la profundidad. Sin embargo, las fórmulas elásticas se usan con frecuencia en la práctica por su sencillez; el ingeniero debe estar consciente que su empleo solo da una aproximación gruesa al cálculo de las deformaciones.

En el anexo E, se proporcionan fórmulas elásticas para varios casos prácticos. El lector puede consultar el libro de Poulos y Davis (1974), el cual contiene numerosas soluciones elásticas de interés para la ingeniería de cimentaciones.

2.13. Uso de correlaciones

El cálculo de las deformaciones de un suelo requiere de la determinación previa de sus propiedades mecánicas. Siempre, es recomendable obtener estas propiedades a partir de pruebas directas de campo como una prueba de placa o ensayos de laboratorio.

No obstante, en ocasiones, no es posible obtener estas propiedades, porque el costo de las pruebas de placa es alto o, porque no se pueden extraer muestras inalteradas del suelo como es el caso de suelos puramente friccionantes como las arenas limpias. Para resolver el problema, desde el punto de vista práctico, se recurre a correlaciones entre propiedades mecánicas entre estas y pruebas índice o ensayos de campo. Por lo

estudiado en los incisos anteriores, estas correlaciones solo pueden dar valores muy aproximados de las propiedades mecánicas, por lo que la dispersión de dichas correlaciones es alta, razón por la cual el ingeniero debe usarlas con precaución. En los siguientes párrafos, presentamos algunas correlaciones que se usan con cierta frecuencia en la práctica.

2.14. Suelos friccionantes

De acuerdo con Schmertmann «...la relación entre el módulo de deformación, E_s , del suelo y la resistencia en la punta del cono holandés, q_c , vale:

$E_s = 2.5 q_c$ para una zapata cuadrada.

$E_s = 3.5 q_c$ para una zapata corrida».⁴⁶

Por su parte, Denver «...propone la siguiente expresión:

$$E_s = F \sqrt{\frac{q_c}{q_0}} \quad (2.21)$$

$F = 8 \text{ MPa}$

$q_0 = 1 \text{ MPa}$ »⁴⁷

La relación entre E_s y el número de golpes N de la SPT es según Denver:

$$E_s = C \sqrt{N} \quad (2.22)$$

⁴⁶ Schmertmann, J. H., *et al.*, «Improved Strain Influence Factor Diagrams», *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, no. GT8, 1978.

⁴⁷ Denver, H., «Settlement calculation for footings on sand», *Proceedings of the XI International Conference Soil Mechanics Found Engineering*, vol. 4, San Francisco, 1985.

donde:

$$C = 7 \text{ MPa}$$

La relación entre N y q_c (q_c en kg/cm^2) está dada por Schmertmann (1970):

Suelo	q_c / N
Limo, limo arenoso	2
Arena de fina a media Arena poco limosa	3.5
Arena gruesa Arena con poca grava	5
Arena con grava. Grava	6

Como vimos en el inciso de suelos friccionantes, el asentamiento en milímetros de una zapata está dado por (Burland y Burbridge, 1985).

2.15. Arena normalmente cargada

$$\delta = qB^{0.7} l_c \quad (2.23)$$

2.16. Arena precargada

$$\delta = \frac{qB^{0.7} l_c}{3} \quad (2.24)$$

$$l_c = \frac{1.17}{N^{1.4}} \quad (2.25)$$

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

donde:

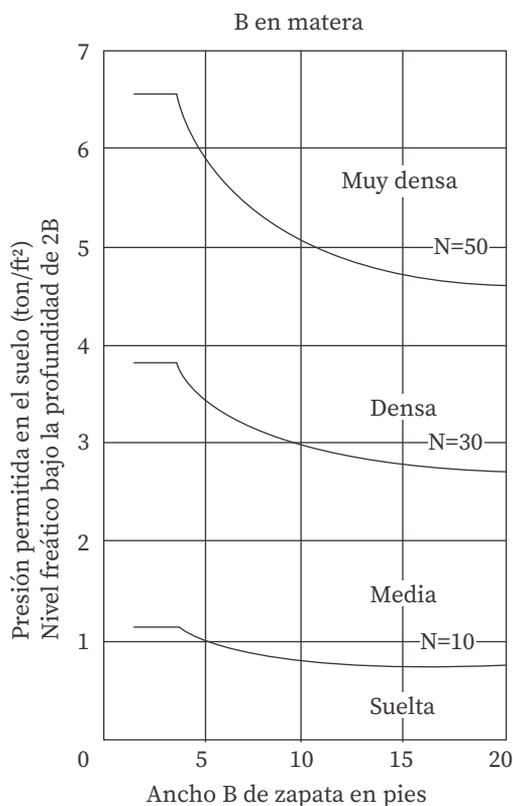
q : es la presión de contacto en kN/m^2 .

B : es el ancho de la cimentación en metros.

Terzaghi y Peck expresan «...la presión de contacto en un cimiento, para que el asentamiento no sea mayor que 2.5 cm, en función del número de golpes de la prueba de penetración estándar y del ancho de la zapata...»⁴⁸, (figura 2.27).

$$\frac{1 \text{ ton}}{\text{ft}^2} = \frac{1 \text{ kg}}{\text{cm}^2}$$

Figura 2.27. Carta para la estimación de la presión permitida del suelo para los cimientos sobre la arena en función de los resultados del ensayo de la SPT (Terzaghi y Peck, 1967)

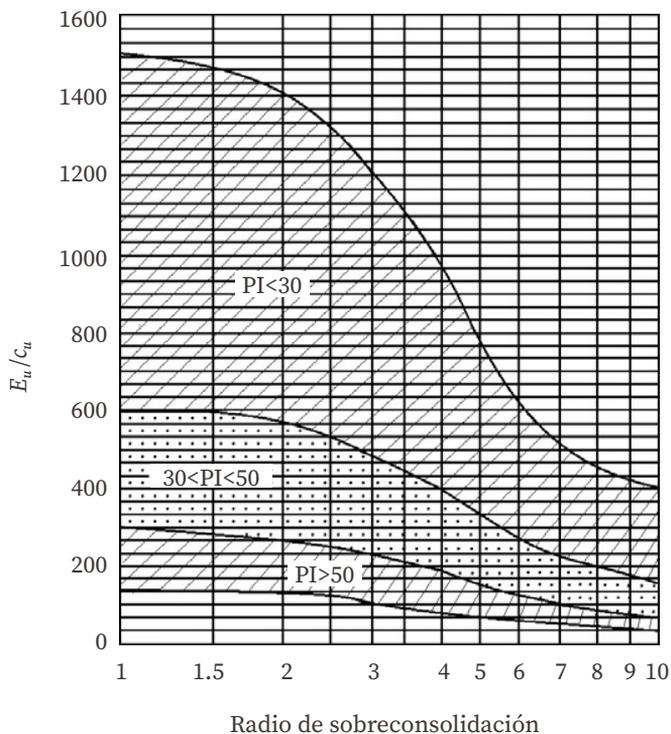


⁴⁸ Terzaghi, K. & B. R. Peck, *óp.cit.*

2.17. Suelos cohesivos totalmente saturados

Se ha observado que existe cierta correlación entre el módulo, E_u , y la resistencia al corte no drenada, C_u , en un suelo cohesivo totalmente saturado, pero que esta relación depende de la plasticidad del material. En la figura 2.28, se muestra la variación de E_u/C_u de la relación de preconsolidación de Duncan y Buchignani (Tavenas y Leroueil, 1987).

Figura 2.28. Carta para estimar el módulo no drenado (Duncan y Buchignani, 1976)



2.18. Suelos cohesivos parcialmente saturados

La tabla 2.2 contiene el probable grado de expansibilidad de un suelo cohesivo, al pasar de seco a saturado, en función de su plasticidad.

Tabla 2.2. Grado de expansibilidad de una arcilla (Holtz y Gibbs, 1956)

Porcentaje de partículas menor que 0.001 mm	Índice plástico	Límite de contracción	Grado de expansibilidad	Expansión probable: de seco a saturado
	%	%		%
> 28	> 35	< 11	muy alto	> 30
20 - 31	25 - 41	7 - 12	alto	20 - 30
13 - 23	15 - 28	10 - 16	medio	10 - 20
< 15	< 18	> 15	bajo	< 10

La expansión probable se mide en una arcilla secada al aire y puesta a saturar en un consolidómetro estándar, bajo una presión de 0.07 kg/cm².

2.19. Módulo de deformación según Bowles

En la tabla 2.3, se muestran los rangos de valores del módulo de deformación, E_s , de los suelos.

Tabla 2.3. Rango de valores del módulo de deformación, E_s , del suelo (Bowles, 1968)

Clase de suelo	Módulo de deformación, E_s
	t/m ²
Arcilla muy blanda	35 - 280
Arcilla blanda	175 - 420
Arcilla media	420 - 845
Arcilla dura	700 - 1 755
Arcilla arenosa	2 810 - 4 220
Arena limosa	700 - 2 110
Arena suelta	1 055 - 2 460
Arena compacta	4 920 - 8 435
Arena y grava compactas	9 840 - 19 685
Loess	9 840 - 12 655

2.20. Experiencia local

Cada localidad se asienta sobre una o varias formaciones geológicas, las cuales exhiben una estratigrafía y propiedades típicas de cada una de ellas.

Una formación geológica presenta problemas de ingeniería propios de la misma. Por consiguiente, el ingeniero debe estar familiarizado con la estratigrafía y propiedades de dicha formación y observar el comportamiento de las obras construidas en ella, lo cual permite una adecuada calibración entre el uso de las propiedades mecánicas y conducta de las cimentaciones.

En los siguientes párrafos, presentamos magnitudes de propiedades mecánicas para el subsuelo de la Ciudad de México que fueron obtenidas a partir de las estadísticas. Cabe aclarar que estas propiedades, el ingeniero las debe emplear con las reservas del caso, pues generalmente, la dispersión de los datos es alta. Desde luego, presentan una mayor confiabilidad aquellas correlaciones en las que se proporcionan magnitudes de la dispersión de los datos (desviación estándar o varianza).

En la tabla 2.4, se presentan datos obtenidos de curvas de compresibilidad de la arcilla de la Ciudad de México donde de acuerdo con las ecuaciones 2.17 y 2.19, se tiene:

$$C'_{rc} = \frac{C_{rc}}{(1 + e_o)} \quad (2.26)$$

$$C'_c = \frac{C_c}{(1 + e_o)} \quad (2.27)$$

Tabla 2.4. Parámetros de deformabilidad. Muestras estadísticas de la arcilla de la Ciudad de México

Propiedad mecánica	C'_{rc}	C'_c
Número de valores, N	51	40
Media	0.045504	0.57118
Varianza, s^2	0.0003166	0.020959
Desviación estándar, s	0.017794	0.14477
Coficiente de variación	0.391	0.253

Los parámetros de la población estadística de la tabla 2.5 se obtienen de la siguiente manera: la media de la población se toma igual a la media de la muestra estadística. La variancia de la población se estima así:

$$\sigma^2 = \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha_1}} \quad (2.28)$$

donde, $\chi^2_{1-\alpha_1}$ se obtiene para $N-1$ grados de libertad; para fines prácticos, α_1 se puede tomar igual al 50 %.

Con los valores de la tabla 2.5, se pueden hacer inferencias estadísticas de las propiedades mecánicas. En efecto, aceptando que una población estadística tiene una distribución normal de probabilidad, un valor desfavorable (poco probable) se calcula así:

$$\text{valor desfavorable: } \mu - \sigma z_{\alpha_2} \geq 0 \quad (2.29)$$

Tabla 2.5. Parámetros de deformabilidad. Poblaciones estadísticas de la arcilla de la Ciudad de México

Propiedad mecánica	C'_{rc}	C'_c
Número de valores, N	51	40
χ cuadrada	46.864	36.163
Media, μ	0.045504	0.57118
Varianza, σ^2	0.00033781	0.022603
Desviación estándar, σ	0.018380	0.15034

La probabilidad de que la magnitud de una propiedad mecánica sea menor que el valor desfavorable calculado con la ecuación 2.29 es α_2 .

Al aplicar la ecuación 2.29, en la tabla 2.6, se presentan valores desfavorables de los parámetros de deformabilidad para los distintos niveles de confianza, α_2 . Enseguida, se presenta el uso de la tabla 2.6; por ejemplo, cuando se toma un nivel de confianza $\alpha_2 = 20\%$, existe una probabilidad del 20% de que C'_{rc} resulte menor que 0.060972 y que C'_c resulte menor que 0.69771.

La comparación de los resultados de hundimientos de estructuras (manteniéndose la arcilla en el tramo de recompresión) con asentamientos calculados con los valores de C'_c de la tabla 2.6 arroja, normalmente, buenos resultados, pues los segundos son muy parecidos a los primeros.

Tabla 2.6. Valores desfavorables estimados de propiedades de deformabilidad

Nivel de confianza α_2	Z_{α_2}	C'_{rc}	C'_c
%			
5	1.6449	0.075736	0.81848
10	1.2816	0.069059	0.76386
15	1.0364	0.064552	0.72699
20	0.8416	0.060972	0.69771
25	0.6745	0.057901	0.67258
30	0.5244	0.055142	0.65002
40	0.2533	0.050159	0.60926
50	0	0.045503	0.57118

La arcilla de la Ciudad de México, aunque se encuentre normalmente consolidada, exhibe una cierta *preconsolidación* que es debida fundamentalmente a fuerzas de tipo fisicoquímico que se desarrollan en los con-

tactos entre las partículas. Esta *preconsolidación*, que se puede denominar *rigidez fisicoquímica*, varía en la arcilla de la Ciudad de México entre 1.8 y 2.6 t/m² (Deméneghi, 1982). Este incremento de presión se puede agregar a la presión vertical efectiva y, todavía, el suelo se mantiene en el tramo de recompresión. En la práctica, cuando se toma un factor de seguridad de 1.5, se puede usar una rigidez fisicoquímica del orden de 1.2 t/m². Desde luego, si mediante pruebas de laboratorio o mediciones de campo se estima un valor mayor de la presión de preconsolidación, el valor anterior se podrá aumentar en consecuencia.

Por otra parte, en la figura 2.29, según Cuevas se muestran: «...las curvas de correlación entre la resistencia en la punta del cono y los coeficientes de deformabilidad volumétrica (rama virgen) y (rama de recompresión), obtenidos de datos de laboratorio, para arcillas con un ligero grado de preconsolidación...»⁴⁹. El coeficiente, m_v , se obtuvo en el rango de esfuerzos p'_{vo} y $[p'_{vo} + (2/3)(p'_{vc} - p'_{vo})]$ donde p'_{vo} es la presión de preconsolidación.

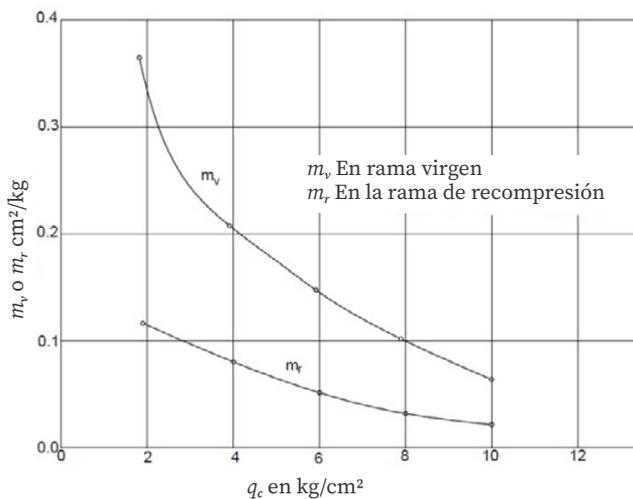
La tabla 2.7 contiene los datos de deformabilidad de suelos de la zona poniente de la Ciudad de México. Las tobas están formadas por limos arenosos y los conglomerados están formados por boleos y gravas empacados en una matriz arenosa o por boleos y gravas empacados en una matriz arenoarcillosa (Gutiérrez y Cuevas, 1992). Se observa que los módulos obtenidos con el odómetro son pequeños comparados con los módulos determinados con pruebas de cono en campo; ya que es usual saturar la probeta de suelo en una prueba de consolidación, es probable que los módulos del odómetro se hayan obtenido en muestras saturadas; por esta razón, se hace la hipótesis de que los módulos del odómetro corresponden a muestras saturadas, totalmente.

⁴⁹ Santoyo, E., et al., *El cono en la exploración geotécnica*, México, TGC Geotecnia, 1989.

Tabla 2.7. Parámetros de deformabilidad. Muestras estadísticas de tobas y de conglomerados (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Propiedad mecánica	Tobas		Conglomerados
	E' Odómetro	E_{nat} Pruebas de cono en campo	E_{nat} Pruebas de cono en campo
	t/m ²	t/m ²	t/m ²
Número de valores, N	6	12	13
Media	1 368.889	6 211.667	7 570.769
Varianza, s^2	1 126 863.54	3 760 051.52	2 816 957.69
Desviación estándar, s	1 061.538	1 939.085	1 678.379
Coefficiente de variación	0.775	0.312	0.222

Figura 2.29.
Curvas de correlación de la compresibilidad (Cuevas, 1988)



Respecto a las arenas pumíticas, en una prueba de placa se obtuvo $E_{nat} = 2\,400 \text{ t/m}^2$, mientras que, de dos ensayos de odómetro se determinaron magnitudes de E' de 640 y de 1 000 t/m^2 (León, 1976).

En la tabla 2.8, se presentan los parámetros de deformabilidad de las poblaciones estadísticas de las tobas y de los conglomerados usando los datos de la tabla 2.7.

Tabla 2.8. Parámetros de deformabilidad. Poblaciones estadísticas de tobas y de conglomerados (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Propiedad mecánica	Tobas		Conglomerados
	E'	E_{nat}	E_{nat}
	t/m ²	t/m ²	t/m ²
Número de valores, N	6	12	13
χ cuadrada	3.655	9.237	10.182
Media, μ	1368.889	6211.667	7570.769
Varianza, σ^2	1541536.99	4477705.61	3319926.56
Desviación estándar, σ	1241.586	2116.059	1822.066

Con la ecuación 2.29, se obtienen los valores desfavorables de las propiedades mecánicas, los cuales se presentan en la tabla 2.9 para los distintos niveles de confianza, α_2 . Para usar la tabla 2.9, el ingeniero elige un cierto nivel de confianza de acuerdo con su criterio y obtiene la probabilidad de ocurrencia de la propiedad mecánica de interés. Por ejemplo, $\alpha_2 = 20\%$ en la tabla 2.9: en la toba existe una probabilidad del 20% de que E' resulte menor que 323.970 t/m² y de que E_{nat} resulte menor que 4 430.791 t/m².

Tabla 2.9. Valores desfavorables estimados de propiedades de deformabilidad (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Nivel de confianza α_2	Z_{α_2}	Tobas		Conglomerados
		E'	E_{nat}	E_{nat}
%		t/m ²	t/m ²	t/m ²
5	1.6449	0	2 730.961	4 573.652
10	1.2816	0	3 499.726	5 235.609
15	1.0364	82.109	4 018.583	5 682.379
20	0.8416	323.970	4 430.791	6 037.318
25	0.6745	531.439	4 784.385	6 341.785
30	0.5244	717.801	5 102.005	6 615.277
40	0.2533	1 054.395	5 675.669	7 109.240
50	0	1 368.889	6 211.667	7 570.769

Cabe aclarar que, los parámetros de resistencia dependen del grado de saturación del suelo. El valor de una propiedad mecánica, b , en función de la variación de la humedad del terreno, se puede calcular con la siguiente expresión:

$$b = b' + a(b_{nat} - b') \quad (2.30)$$

donde:

a : es un parámetro que depende de las condiciones de drenaje del sitio. Sus valores tentativos se muestran en la tabla 2.10.

Por ejemplo, cuando existe una baja probabilidad de que cambie la humedad del terreno, se considera que las condiciones de drenaje son buenas; mientras que, cuando existe una alta probabilidad de que se sature completamente el suelo, se entiende que las condiciones de drenaje son malas (Deméneghi y Sanginés, 2000).

Tabla 2.10. Valores aproximados del parámetro a (Deméneghi y Sanginés, 2000)

Condiciones de drenaje	a
Buenas	0.8
Regulares	0.5
Malas	0

En la práctica, conviene utilizar un nivel de confianza, α_2 , alejado del 50 %, para tomar en cuenta la dispersión de los datos estadísticos. En este sentido, podemos tomar un valor de α_2 comprendido entre el 20 y 30 %.

Por ejemplo, para $\alpha_2 = 20\%$ las propiedades mecánicas de las tobas son (tabla 2.9):

$$E' = 323.97 \text{ t/m}^2, \quad E_{nat} = 4430.79 \text{ t/m}^2$$

Para ilustrar el cálculo del asentamiento, consideremos una zapata corrida con $B=2$ m, $L=5$ m y condiciones regulares de drenaje ($a=0.5$, tabla 2.10). Sustituyendo en la ecuación 2.31, con $b=E$, obtenemos:

$$E = 2\,377.4 \text{ t/m}^2$$

Cuando se emplea la fórmula de Schleicher con $\nu=0.25$, se determinan los asentamientos mostrados en la tabla 2.11:

Tabla 2.11. Incremento neto de presión para no exceder el asentamiento tolerable de la zapata corrida

Incremento neto de presión	Asentamiento tolerable	Clase de estructura
t/m ²	cm	
38	5	Marcos estructurales de concreto o acero
19	2.5	Muros de mampostería

En términos generales, en la zona poniente de la Ciudad de México, los hundimientos de las estructuras son bajos. Por ejemplo, una losa de cimentación de 42 por 50 m en planta, que transmite al terreno un incremento de carga de 60 t/m², tuvo un asentamiento máximo de 2.1 cm (Girault, 1992). El módulo de deformación del suelo para alcanzar este asentamiento es varias veces mayor que las magnitudes de E mostradas en la tabla 2.9. Se observa que, en este caso particular, los datos estadísticos proporcionan resultados del lado de la seguridad.

Por otra parte, en una arcilla totalmente saturada, de un sitio cercano a la ciudad de San Francisco (*Young Bay Mud*), el coeficiente de presión en reposo, K_0 , es del orden de 1 donde la arcilla está fuertemente preconsolidada, mientras que, donde el suelo está ligeramente preconsolidado, K_0 , se reduce a un valor medio de 0.7. La relación E_s/C_u es este depósito y varía entre 500 y 800 (Benoit y Clough, 1986).

La interacción suelo-estructura es aquella parte de la ingeniería que estudia las deformaciones del terreno de cimentación cuando estas se ven afectadas por la presencia y rigidez de la propia estructura. La influencia de la estructura puede ser en condiciones estáticas, lo cual es tratado por la interacción estática suelo-estructura o puede ser en condiciones dinámicas, lo cual cae en el campo de la interacción dinámica suelo-estructura.

3.1. Interacción estática suelo-estructura

Se conocen como métodos de interacción estática suelo-estructura aquellos procedimientos que para el cálculo de las deformaciones del terreno de cimentación toman en cuenta la rigidez de la estructura. Todos estos métodos están basados en el principio de que en el contacto cimiento-terreno, los desplazamientos tanto de la subestructura como los del terreno son iguales, es decir, existe compatibilidad de deformaciones entre la estructura y suelo.

En términos generales, el procedimiento de cálculo para la interacción suelo-estructura consiste en tres pasos: (1) se calculan los desplazamientos de la subestructura, (2) se calculan los desplazamientos del terreno de cimentación y (3) se establece la compatibilidad de las deformaciones entre la estructura y suelo.

Se pueden distinguir dos clases de situaciones en relación con la interacción: (1) cuando los cimientos están suficientemente separados, de tal forma que, la carga sobre un apoyo no ejerce influencia sobre los desplazamientos de los apoyos vecinos (este fenómeno se presenta, usualmente, en zapatas aisladas) y (2) cuando se trata de un cimiento continuo, donde el desplazamiento de un punto de dicho cimiento está afectado por la carga repartida en toda la subestructura (es el caso de zapatas corridas o losas de cimentación).

3.2. Interacción suelo-zapatas aisladas

3.2.1. Definición de módulo de reacción

Para llevar a cabo la interacción suelo-zapatas aisladas, se hace uso del concepto de módulo de reacción o módulo de rigidez del terreno de cimentación, el cual se presenta en los siguientes párrafos.

Definamos el módulo de reacción o rigidez lineal vertical de un cimiento de la siguiente forma:

$$K_v = \frac{Q_v}{\delta_v} \quad (3.1)$$

donde:

Q_v : es la fuerza vertical aplicada al cimiento.

δ_v : es el asentamiento vertical ocasionado por Q_v .

La rigidez lineal horizontal de un cimiento se define así:

$$K_h = \frac{Q_h}{\delta_h} \quad (3.2)$$

donde:

Q_h : es la fuerza horizontal aplicada al cimiento.

δ_h : es el desplazamiento horizontal producido por Q_h .

La rigidez a la rotación de un cimiento se define así:

$$K_r = \frac{M}{\theta} \quad (3.2)$$

donde:

M : es el momento aplicado al cimiento.

θ : es el ángulo (en radianes) producido por dicho momento.

3.2.2. Análisis de la interacción suelo-zapatas aisladas

Ejemplo 3.1

Se deben determinar las fuerzas y momentos actuantes en el marco de la figura 3.1. La solución de la interacción suelo-zapatas aisladas con el marco de la figura 3.1, se realiza a través de las rigideces vertical, horizontal y de rotación.

La rigidez vertical del terreno de cimentación vale $K_v = 2331.96$ t/m, la rigidez horizontal $K_h = 1901.38$ t/m y la rigidez a la rotación $K_r = 1102.81$ t-m/rad.

El primer paso de la interacción es hacer el análisis estructural con el método de las rigideces (véase el anexo H), en el cual se debe cumplir con:

$$K\delta + P^e + P^c = 0 \quad (3.4)$$

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

donde:

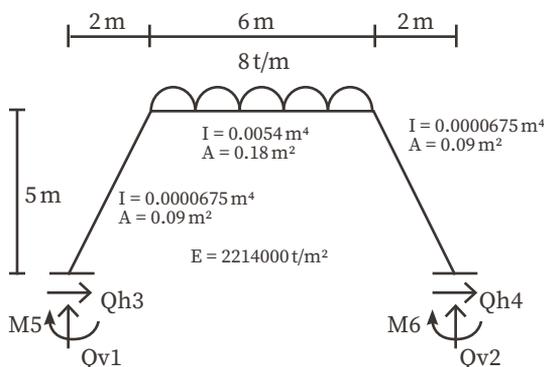
K : es la matriz de rigidez de la estructura.

δ : es el vector de desplazamientos.

P^e : es el vector de cargas de empotramiento.

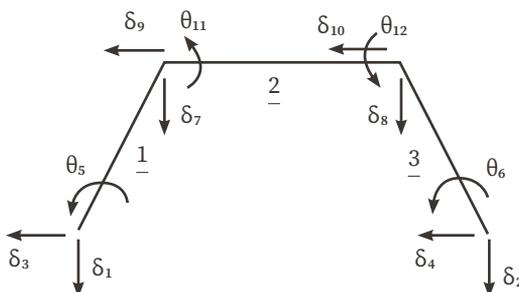
P^c : es el vector de cargas concentradas.

Figura 3.1. Geometría y cargas sobre la estructura de barras inclinadas



La formación de la matriz, K , y de los vectores δ , P^e y P^c para el marco de la figura 3.1, viene descrito en el anexo H; como resultado de esto, en la figura 3.2, se exhiben los grados de libertad de la estructura y en las tablas 1, 2 y 3, la matriz de rigidez, K , el vector de cargas de empotramiento, P^e , y el vector de cargas concentradas, P^c , de toda la estructura, respectivamente. (En la tabla 3.1, solo incluimos los renglones de δ_1 , δ_3 , θ_5 , δ_7 , δ_9 y θ_{11} , porque por simetría $\delta_2 = \delta_1$, $\delta_4 = -\delta_3$, $\theta_6 = -\theta_5$, $\delta_8 = \delta_7$, $\delta_{10} = -\delta_9$, $\theta_{12} = -\theta_{11}$).

Figura 3.2. Numeración de barras y grados de libertad



La rigidez del terreno de cimentación se puede incluir en el vector de cargas concentradas, P^c , de la siguiente forma: las fuerzas Q_v , Q_h y M se pueden obtener con las ecuaciones 3.1 a 3.3:

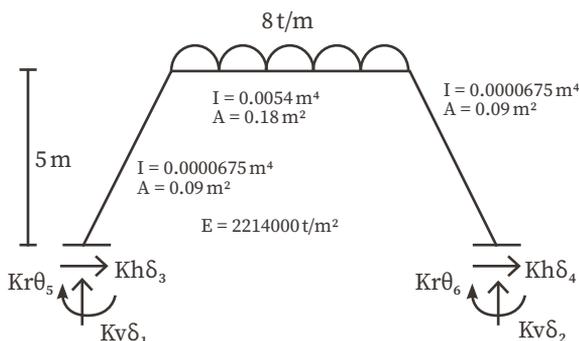
$$Q_v = K_v \delta_v \tag{3.5}$$

$$Q_h = K_h \delta_h \tag{3.6}$$

$$M = K_r \theta \tag{3.7}$$

En la figura 3.3, se muestran las reacciones del terreno en función de las rigideces del mismo y de los desplazamientos:

Figura 3.3.
Reacciones del terreno de cimentación



Al usar las ecuaciones 3.5 a 3.7, se calculan las fuerzas Q_{v1} , Q_{v2} , Q_{h3} , Q_{h4} , M_5 y M_6 :

$$\begin{aligned} Q_{v1} &= 2\,231.96 \delta_1 & , & & Q_{v2} &= 2\,231.96 \delta_2 \\ Q_{h3} &= 1\,901.38 \delta_3 & , & & Q_{h4} &= 1\,901.38 \delta_4 \\ M_5 &= 1\,102.81 \theta_5 & , & & M_6 &= 1\,102.81 \theta_6 \end{aligned}$$

$$\bar{P}_c = \begin{bmatrix} 2\,231.96 & \delta_1 \\ 2\,231.96 & \delta_2 \\ 1\,901.38 & \delta_3 \\ 1\,901.38 & \delta_4 \\ 1\,102.81 & \theta_5 \\ 1\,102.81 & \theta_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

El vector de cargas concentradas queda así:

Cuando se reemplaza en la ecuación 3.4, los valores de k (tabla 3.1), P^e (tabla 3.2) y P^c (ecuación 3.8) resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.010291 \text{ m} & , & & \delta_3 &= 0.0055104 \text{ m} \\ \theta_5 &= 0.00049148 & , & & \delta_7 &= 0.013289 \text{ m} \\ \delta_9 &= -0.000078886 \text{ m} & , & & \theta_{11} &= -0.0054707 \end{aligned}$$

Los elementos mecánicos en las barras de la estructura se calculan siguiendo el procedimiento indicado en el anexo H. (Se deja como ejercicio para el lector.)

Las fuerzas en los apoyos se determinan con las ecuaciones 3.5 a 3.7:

$$\begin{aligned} Q_{v1} &= Q_{v2} = 2 \cdot 331.96 (0.010291) & = & 23.998 \text{ t} \\ Q_{h3} &= 1 \cdot 901.38 (0.0055104) & = & 10.477 \text{ t} \\ Q_{h4} &= 1 \cdot 901.38 (-0.0055104) & = & -10.477 \text{ t} \\ M_5 &= 1 \cdot 102.81 (0.00049148) & = & 0.542 \text{ t}\cdot\text{m} \\ M_6 &= 1 \cdot 102.81 (-0.00049148) & = & -0.542 \text{ t}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2

Se deben determinar las fuerzas y momentos actuantes en el marco de la figura 3.4. a, despreciando los efectos de acortamiento de barras. En la figura 3.4. b y en la tabla 3.4, se exhiben la numeración de barras y grados de libertad. Las matrices de rigidez y los vectores de cargas de empotramiento se hallan con los valores del anexo H (marcos planos con barras ortogonales, sin considerar el acortamiento de barras).

Figura 3.4. a.
Geometría y cargas sobre la estructura

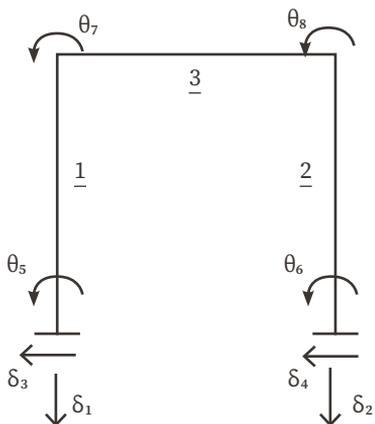
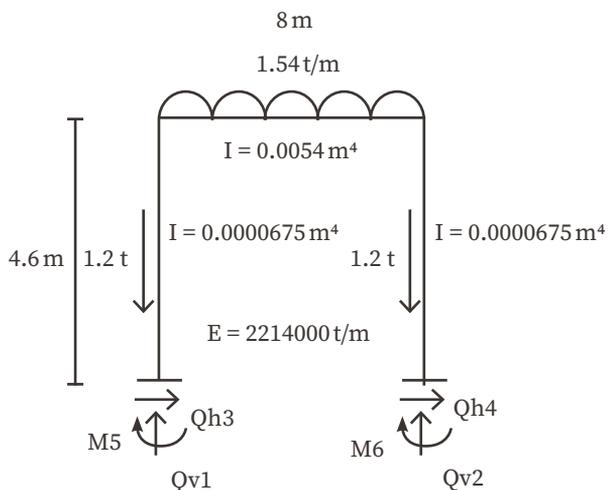


Figura 3.4. b. Numeración de barras y grados de libertad

Tabla 3.1. Barra 1. Matriz de rigidez

θ_5	θ_7	δ_3	
1 299.52	649.76	423.76	θ_5
649.76	1 299.52	423.76	θ_7
423.76	423.76	184.24	δ_3

$$\bar{P}^{e1} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_5 \\ 0 & \theta_7 \\ 0 & \delta_3 \end{bmatrix}$$

Tabla 3.2. Barra 2. Matriz de rigidez

θ_6	θ_8	δ_4		
1 299.52	649.76	423.76		θ_6
649.76	1 299.52	423.76		θ_8
423.76	423.76	184.24		δ_4

$$\bar{P}^{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_6 \\ 0 & \theta_8 \\ 0 & \delta_4 \end{bmatrix}$$

Tabla 3.3. Barra 3. Matriz de rigidez

θ_7	θ_8	δ_1	δ_2	
7 970.4	3 985.2	-1 992.6	1 992.6	θ_7
3 985.2	7 970.4	-1 992.6	1 992.6	θ_8
-1 992.6	-1 992.6	664.2	-664.2	δ_1
1 992.6	1 992.6	-664.2	664.2	δ_2

$$\bar{P}^{e_3} = \begin{bmatrix} -\frac{wL}{2} \\ -\frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.62 \\ -4.62 \\ 4.62 \\ -4.62 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de toda la estructura se exhiben en las tablas 3.5 y 3.6. (En la tabla 3.5, solo incluimos los renglones de δ_1 , δ_3 , θ_5 y θ_7 , porque por simetría $\delta_2 = \delta_1$, $\delta_4 = -\delta_3$, $\theta_6 = -\theta_5$, $\theta_8 = -\theta_7$).

El vector δ es: $\bar{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}$

El vector de cargas concentradas vale (figura 3.4): $\bar{P}^c = \begin{bmatrix} Q_{v1} - 1.2 \\ Q_{v2} - 1.2 \\ Q_{h3} \\ Q_{h4} \\ M_5 \\ M_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

La rigidez del terreno de cimentación la incluimos con las ecuaciones 3.5 a 3.7 (obtenidas de las ecuaciones 3.1 a 3.3):

$$Q_v = K_v \delta_v \quad (3.9)$$

$$Q_h = K_h \delta_h \quad (3.10)$$

$$M = K_r \theta \quad (3.11)$$

En la figura 3.5, se indican las reacciones del suelo en función de las rigideces y los desplazamientos:

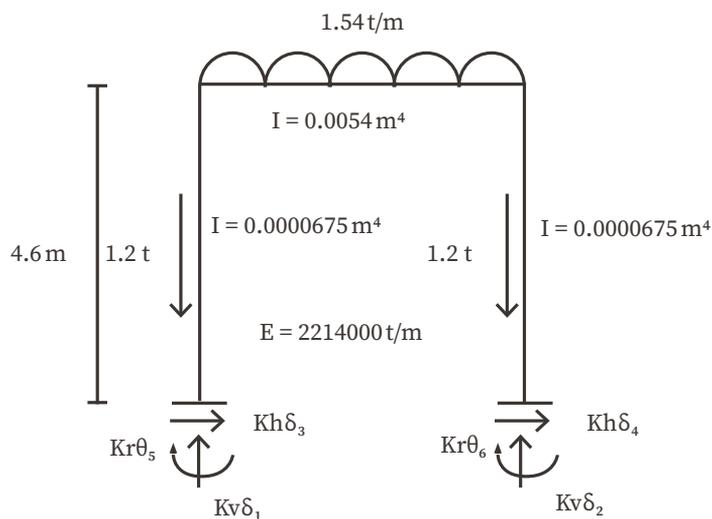


Figura 3.5.
Reacciones
del terreno

Sustituyendo valores, se tiene:

$$Q_{v1} = 2\,331.96 \delta_1 \quad , \quad Q_{v2} = 2\,331.96 \delta_2$$

$$Q_{h3} = 1\,901.38 \delta_3 \quad , \quad Q_{h4} = 1\,901.38 \delta_4$$

$$M_5 = 1\,102.81 \theta_5 \quad , \quad M_6 = 1\,102.81 \theta_6$$

El vector de cargas concentradas queda así:

$$\bar{P}^c = \begin{bmatrix} 2331.96 \delta_1 - 1.2 \\ 2331.96 \delta_2 - 1.2 \\ 1901.38 \delta_3 \\ 1901.38 \delta_4 \\ 1102.81 \theta_5 \\ 1102.81 \theta_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuando se reemplaza en la ecuación 3.4, se tiene:

$$-4.62 - 1.2 + 2 \ 331.96 \ \delta_1 = 0 \quad \text{(a)}$$

$$184.24 \ \delta_3 + 423.76 \ \delta_5 + 423.76 \ \theta_7 + 1 \ 901.38 \ \delta_3 = 0 \quad \text{(b)}$$

$$423.76 \ \theta_3 + 1 \ 299.52 \ \theta_5 + 649.76 \ \theta_7 + 1 \ 102.81 \ \delta_5 = 0 \quad \text{(c)}$$

$$426.76 \ \theta_3 + 649.76 \ \theta_5 + 5 \ 284.72 \ \theta_7 + 4.62 = 0 \quad \text{(d)}$$

La ecuación (a) correspondiente al grado de libertad (δ_1).

La ecuación (b) correspondiente al grado de libertad (δ_3).

La ecuación (c) correspondiente al grado de libertad (θ_5).

La ecuación (d) correspondiente al grado de libertad (θ_7).

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$\delta_1 = 0.0024958 \text{ m} \quad , \quad \delta_3 = 0.00014033 \text{ m}$$

$$\delta_5 = 0.00022213 \quad , \quad \theta_7 = -0.00091278$$

Para hallar los elementos mecánicos, se utiliza el procedimiento indicado en el anexo H. (Se deja como ejercicio para el lector).

Las fuerzas en los apoyos se determinan con las ecuaciones 3.5 a 3.7:

$$Q_{v1} = Q_{v2} = 2 \ 331.96 (0.0024958) = 5.82 \text{ t}$$

$$Q_{h3} = 1 \ 901.38 (0.00014033) = 0.267 \text{ t}$$

$$Q_{h4} = 1 \ 901.38 (-0.00014033) = -0.267 \text{ t}$$

$$M_5 = 1 \ 102.81 (0.00022213) = 0.245 \text{ t-m}$$

$$M_6 = 1 \ 102.81 (-0.00022213) = -0.245 \text{ t-m}$$

3.2.3. Determinación de los módulos de reacción del suelo

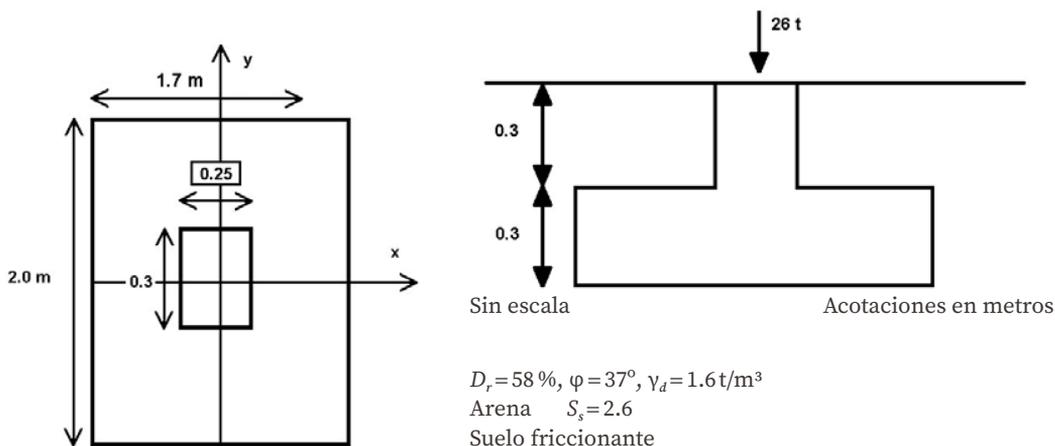
La determinación de las rigideces k_v , k_h y k_r se lleva a cabo usando su definición que está dada por las ecuaciones 3.1 a 3.3; por ejemplo, el módulo k_v se obtiene aplicando a la zapata una carga vertical, Q_v , y calculando el asentamiento que produce dicha carga.

También, dado el carácter no lineal de los suelos, es necesario que tanto la carga sobre el cimiento como sus dimensiones sean lo más cercano posible a sus magnitudes definitivas en la estructura, pues de otro modo, la determinación de las rigideces será solo aproximada.

Ejemplo 3.3

Se debe determinar la rigidez lineal vertical, K_v , de la zapata de la figura 3.6, utilizando para ello la fórmula de Burland y Burbridge. El subsuelo está formado por una arena normalmente cargada, $N=15$ golpes.

Figura 3.6. Zapata



El asentamiento en milímetros de la zapata está dado por Burland y Burbridge (1985):

$$\delta = q_n B^{0.7} I_c$$

$$I_c = \frac{1.17}{N^{1.4}}$$

donde:

q_n : es el incremento neto de presión en kPa.

B : es el ancho de la cimentación en metros.

Sustituyendo valores:

$$q_n = 26/1.7 (2) = 7.647 \text{ t/m}^2 = 74.995 \text{ kPa}$$

$$I_c = 0.0264$$

$$B = 1.7 \text{ m}$$

$$\delta = 2.870 \text{ mm} = 0.00287 \text{ m.}$$

El módulo K_v vale (ecuación 3.1):

$$K_v = 26/0.00287 = 9\ 059.2 \text{ t/m.}$$

La teoría de la elasticidad proporciona los siguientes valores de los módulos de reacción para un cimiento somero de planta circular:

$$K_v = \frac{2 ER}{(1 - \nu^2)} \quad (3.12)$$

$$K_h = \frac{32(1 - \nu) GR}{(7 - 8\nu)} \quad (3.13)$$

$$K_r = \frac{8 GR^3}{3(1 - \nu)} \quad (3.14)$$

Estas fórmulas se pueden usar en zapatas rectangulares cuando $B < L < 2.5B$, mediante el siguiente artificio.

Sea $A = BL$ el área del cimiento rectangular:

$$R = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (3.15)$$

Para calcular K_v y K_h , usamos las ecuaciones 3.12 y 3.13 con R obtenida de la ecuación 3.15.

Sea I : el momento de inercia del cimiento alrededor del eje que se desea calcular, K_r .

$$R = \sqrt[4]{\frac{4I}{\pi}} \quad (3.15)$$

K_r se computa con la ecuación 3.14, con R obtenida de la ecuación 3.16.

Por lo antes señalado, los cálculos de los módulos de reacción con las ecuaciones 3.12 a 3.14 son solo aproximados, pues el comportamiento real de los suelos es no lineal.

Otra forma aproximada de obtener los módulos de reacción es mediante la realización de pruebas de placa (Zeevaert, 1973). El módulo de rigidez unitario, K_v , es definido como:

$$k_v = \frac{Q_v}{\delta_v A} \quad (3.17)$$

donde:

A : es el área del cimiento.

Si, k_{s1} , es el módulo de rigidez vertical determinado con una prueba de placa de un pie de lado, se puede emplear la siguiente fórmula (Terzaghi, 1955):

$$k_v = k_{s1} \left[\frac{(B + 0.3)}{2B} \right]^2 \quad (3.18)$$

donde:

B : es el ancho de la zapata en metros.

En el caso de arcillas:

$$k_v = k_{s1} \left[\frac{(n + 0.5)}{1.5n} \right] \quad (3.19)$$

donde:

$n = L/B$, siendo L la longitud del cimiento.

La tabla 3.4 contiene valores propuestos por Terzaghi (1955) para k_{s1} . Cabe destacar que, las ecuaciones 3.18 y 3.19 se deben usar con precaución, pues solo son aproximadamente válidas cuando el suelo es isotrópico, hasta una profundidad bajo el desplante del cimiento igual al ancho del mismo (Zeevaert, 1973); por lo mismo, dichas ecuaciones no son aplicables a suelos estratificados.

Tabla 3.4. Valores promedio propuestos para, k_{s1} , (módulo de rigidez vertical) para una placa cuadrada de 1 ft y con espesor de 1 ft (modificada por Terzaghi, 1955)

Material	Compacidad o Consistencia	Valores promedio de k_{s1}		Rango de valores de k_{s1}	
		t/ft ³	kg/cm ³	t/ft ³	kg/cm ³
Arena	Suelta	40	1.29	20 - 60	0.64 - 1.92
	Medianamente compacta	130	4.17	60 - 300	1.92 - 9.62
	Compacta	500	16.1	300 - 100	9.62 - 32.1

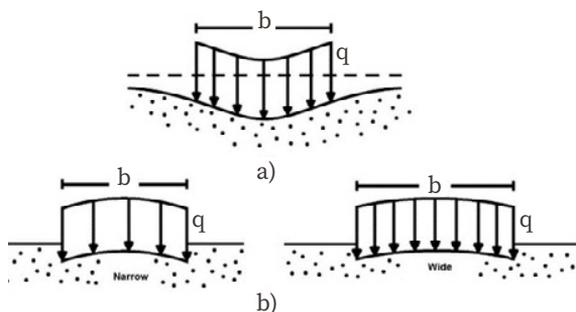
Tabla 3.4. Valores promedio propuestos para, k_{s1} , (módulo de rigidez vertical) para una placa cuadrada de 1 ft y con espesor de 1 ft (modificada por Terzaghi, 1955) (continuación)

Material	Compacidad o Consistencia	Valores promedio de k_{s1}		Rango de valores de k_{s1}	
		t/ft ³	kg/cm ³	t/ft ³	kg/cm ³
Arcilla	Rígida	75	2.41	50 - 100	1.6 - 3.21
	Muy rígida	150	4.82	100 - 200	3.21 - 6.42
	Dura	300	9.64	300	9.6

Para arenas secas multiplicar por 1.5 y para arenas sumergidas multiplicar por 0.6
Aquí, 1 t = 2 000 lb.

3.3. Interacción suelo-cimiento continuo

Se tiene un cimiento totalmente flexible con carga uniforme apoyado en un suelo cohesivo totalmente saturado. El asentamiento a largo plazo toma la forma indicada en la figura 3.7 a, el diagrama de reacción del terreno, en este caso, es igual al de la carga, es decir, la reacción es uniforme. Si dicho cimiento se apoya sobre un suelo friccionante, el asentamiento se distribuye como se indica en la figura 3.7 b; por ser el cimiento totalmente flexible, también, la reacción del suelo es uniforme.



a) Material elástico, isótropo y homogéneo, por ejemplo, una arcilla saturada.

b) Material elástico y homogéneo cuya rigidez aumenta con el confinamiento, tal como una grava o arena sin cohesión

Figura 3.7. Diagrama de reacción del terreno. Perfil de distorsión de asentamientos debidos a una carga uniforme sobre la superficie de una masa suelo (Sowers, 1962)

Ahora, se tiene una placa de una rigidez infinita que está apoyada en una arcilla totalmente saturada (figura 3.8 a). El hundimiento es uniforme, pero el diagrama de reacción a largo plazo toma la forma indicada en la figura 3.8 a. Si la placa se apoya sobre un suelo friccionante, el diagrama de reacción toma la forma de la figura 3.8 b.

Entonces, observamos que los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno dependen de la clase de suelo y de la rigidez de la estructura. Un cimiento real puede quedar entre los dos casos extremos señalados, pues su rigidez no necesariamente es nula o infinita. En los siguientes incisos, veremos cómo se realiza la interacción suelo-estructura para las estructuras de cimentación de rigidez finita.

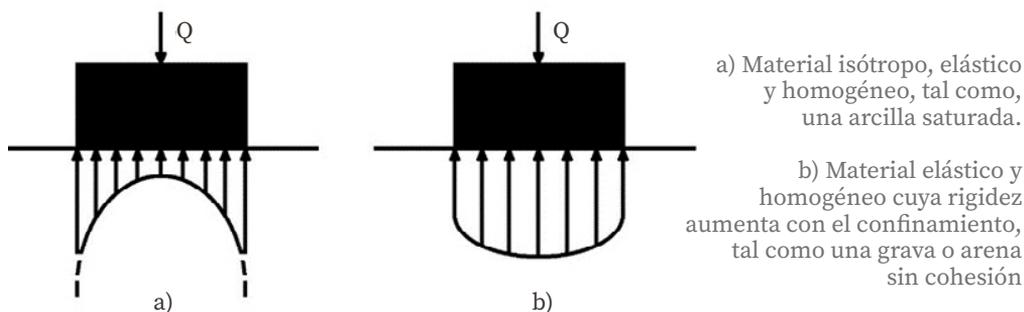
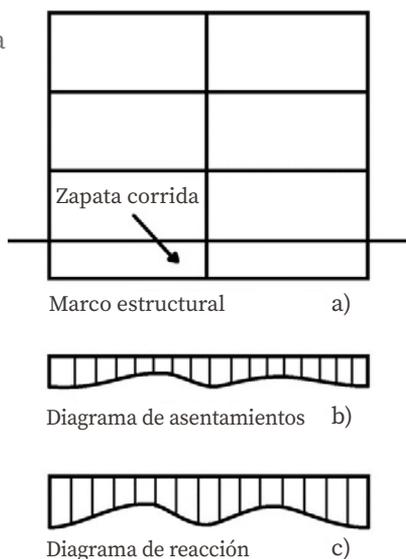


Figura 3.8. Presión de contacto en la base de una cimentación rígida sobre la superficie de una masa de suelo (Sowers, 1962)

También, analicemos un marco estructural con una cimentación a base de una zapata corrida (figura 3.9 a), en el cual se trata de obtener los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno de cimentación (figura 3.9 b y c).

Figura 3.9. Marco estructural con cimentación a base de una zapata corrida



Para empezar, iniciemos con el diagrama de reacciones. En el caso general, la forma del diagrama es diferente de una reacción uniforme (figura 3.9b). Sustituymos la curva de reacción del terreno por una serie de reacciones uniformes r_1, r_2, \dots, r_n (figura 3.10a). La interacción suelo-estructura estática, como ya se comentó, consiste en tres fases: (1) El análisis estructural, lo llevamos a cabo utilizando el método de rigideces, considerando las reacciones r_i como incógnitas; a continuación, aplicando la tercera ley de Newton, aplicamos las cargas r_i sobre el terreno (figura 3.10b). (2) Obtenemos los hundimientos de este en función de las r_i , empleando el método de Chamecki (1956). (3) El problema de la interacción se resuelve estableciendo la compatibilidad de deformaciones entre la estructura y suelo, es decir, si el suelo está en contacto con la estructura de cimentación, las deformaciones de ambos medios deben ser iguales.

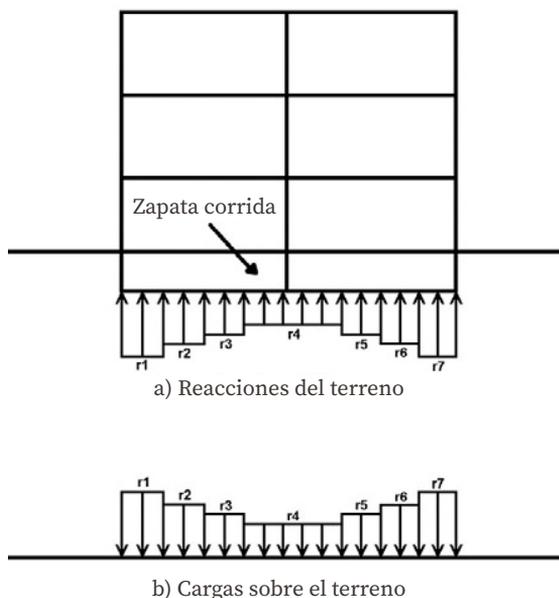


Figura 3.10. Cargas sobre la estructura y el suelo

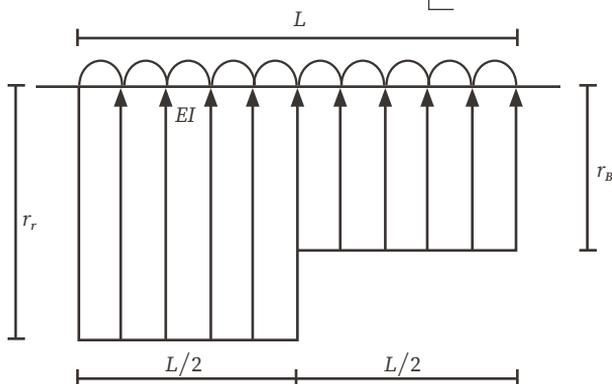
1) Análisis estructural

El análisis estructural lo realizamos empleando el método de rigideces. La matriz de rigidez, el vector de cargas de empotramiento y el vector de cargas concentradas se obtienen como se indica en el anexo H.

En una barra de cimentación (figura 3.11), el vector de cargas de empotramiento para el sistema local vale:

$$\begin{pmatrix} p_m^e \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{wL^2}{12} - \left(\frac{11}{192}\right) L^2 r_r - \left(\frac{5}{192}\right) L^2 r_s & \theta'_p \\ -\frac{wL^2}{12} + \left(\frac{5}{192}\right) L^2 r_r + \left(\frac{11}{192}\right) L^2 r_s & \theta'_q \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{13}{32}\right) L r_r + \left(\frac{3}{32}\right) L r_s & \delta'_r \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{3}{32}\right) L r_r + \left(\frac{13}{32}\right) L r_s & \delta'_s \\ 0 & \delta'_u \\ 0 & \delta'_v \\ 0 & \delta'_a \\ 0 & \delta'_b \end{bmatrix}$$

Figura 3.11.
Geometría y cargas en la barra de cimentación



En el sistema global cuando $\alpha = \beta = 0$, el vector de cargas de empotramiento queda así (anexo H):

$$(3.20) \quad p_m^e = \begin{bmatrix} \frac{wL^2}{12} - \left(\frac{11}{192}\right)L^2r_r - \left(\frac{5}{192}\right)L^2r_s & \theta'_p \\ -\frac{wL^2}{12} + \left(\frac{5}{192}\right)L^2r_r + \left(\frac{11}{192}\right)L^2r_s & \theta'_q \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{13}{32}\right)Lr_r + \left(\frac{3}{32}\right)Lr_s & \delta'_r \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{3}{32}\right)Lr_r + \left(\frac{13}{32}\right)Lr_s & \delta'_s \\ 0 & \delta'_u \\ 0 & \delta'_v \\ 0 & \delta'_a \\ 0 & \delta'_b \end{bmatrix}$$

2) Cálculo de deformaciones del suelo

Las cargas que transmite la estructura al terreno de cimentación son iguales en magnitud y en sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura por la tercera ley de Newton (Deméneghi, 1996). Calculemos los asentamientos del terreno en función de estas cargas: estimemos una reacción, r_k , actuando en la superficie (figura 3.12); la presión vertical vale $r_k d_k / a_k$ donde d_k y a_k son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente. La deformación del estrato de espesor, H_j , debida a la carga, r_k , vale:

$$\delta_{ijk} = \left(\frac{1}{E_{zij}} \right) H_j \sigma_{zjik}$$

pero:

$$\sigma_{zjik} = \frac{I_{zjik} r_k d_k}{a_k} \quad (3.21)$$

donde:

I_{zjik} : es el valor de influencia vertical, el cual es igual al esfuerzo normal vertical en el punto ij que es producido por una presión unitaria cuando está actuando en el área a_k (Zeevaert, 1973).

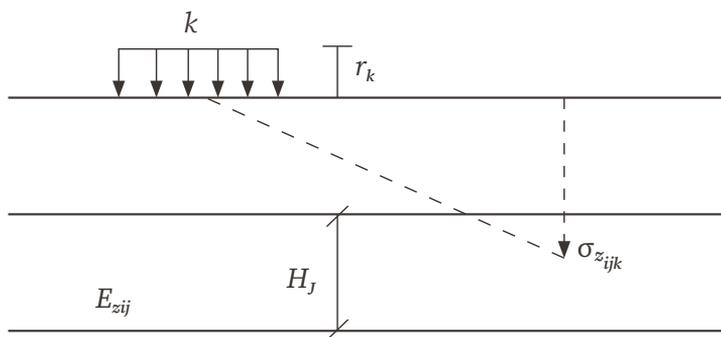


Figura 3.12.
Cálculo de los
asentamientos
del terreno

E_{zji} es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente del esfuerzo normal vertical entre la deformación unitaria vertical que se presenta en el punto ij .

$$\delta_{ijk} = \frac{1}{E_{zij}} \frac{H_j I_{zjik} r_k d_k}{a_k}$$

La deformación del estrato, j , que es debida a todas las cargas vale:

$$\delta_{ijk} = \left(\frac{1}{E_{zij}} \right) H_j \sum_{k=1}^{nr} \frac{I_{zijk} r_k d_k}{a_k}$$

donde:

n_r : es el número total de cargas, r_k .

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{j=1}^{ne} \left(\frac{1}{E_{zij}} \right) H_j \sum_{k=1}^{nr} \frac{I_{zijk} r_k d_k}{a_k} \quad (3.22)$$

donde:

n_e : es el número total de estratos.

En la ecuación 3.22, los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas r_k .

Cabe aclarar que, aunque el procedimiento es unidimensional aparentemente, en la práctica se pueden tomar en cuenta, en la estimación de E_{zij} , tanto los incrementos del esfuerzo horizontal como el efecto de la presión de confinamiento en la rigidez del suelo, así como, el hecho de que la curva esfuerzo-deformación unitaria es no lineal. En efecto, E_{zji} está dado por:

$$E_{zij} = \frac{\sigma_{zij}}{\epsilon_{zij}} \quad (3.23)$$

Si, σ_{zij} es el esfuerzo normal vertical en el punto, ij , (a la mitad del estrato j) y, ϵ_{zij} es la deformación lineal unitaria vertical del estrato, j . ϵ_{zij} , se puede calcular usando una teoría no lineal o una teoría lineal.

Los esfuerzos normales verticales y horizontales se obtienen aplicando la ecuación 3.21 para todas las cargas r_k , es decir:

$$\sigma_{zij} = \sum_{k=1}^{nr} \frac{I_{zijk} r_k d_k}{a_k} \quad (3.24)$$

$$\sigma_{xij} = \sum_{k=1}^{nr} \frac{I_{xijk} r_k d_k}{a_k} \quad (3.25)$$

$$\sigma_{yij} = \sum_{k=1}^{nr} \frac{I_{yijk} r_k d_k}{a_k} \quad (3.26)$$

3) Compatibilidad de deformaciones

En esta fase, se establece la compatibilidad de deformaciones entre la estructura y suelo de cimentación, lo cual equivale a considerar que, tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despega de la estructura (Deméneghi, 1996).

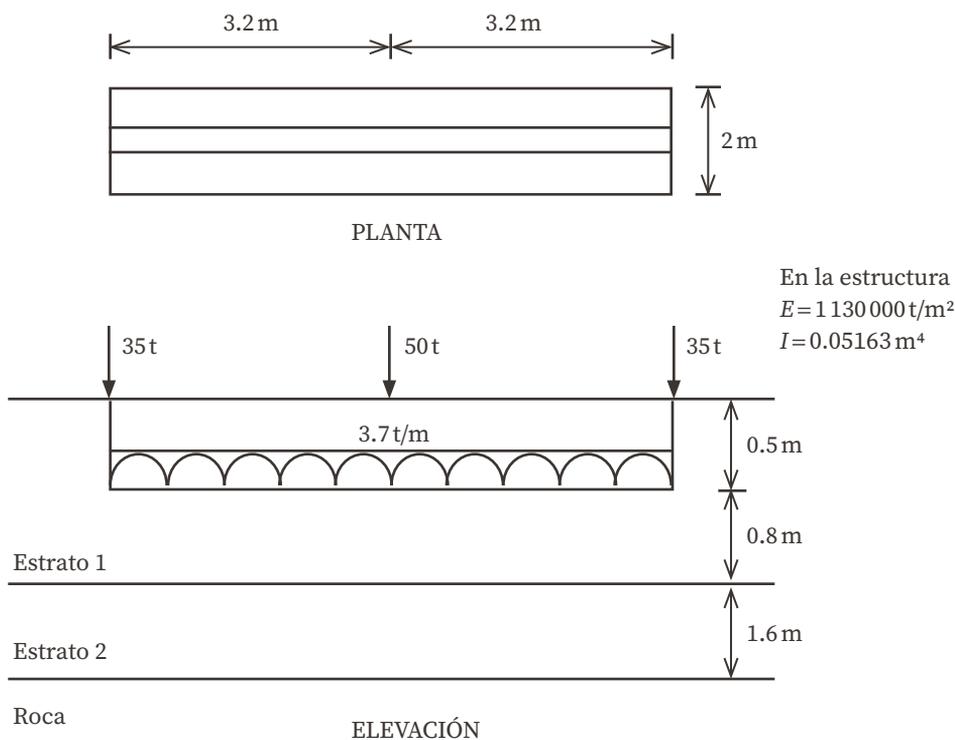
Para ilustrar el análisis de la interacción suelo-estructura, se realizarán ejemplos. En el primer ejemplo, se utilizará una ecuación constitutiva no lineal para la determinación de la deformación del suelo. En el segundo ejemplo, se utilizará la teoría de la elasticidad lineal para la determinación de la deformación. Y en el tercer ejemplo, se presenta un método iterativo para determinar la deformación del suelo.

Ejemplo 3.4

Se debe ilustrar la forma de realizar el análisis de interacción no lineal suelo-zapata corrida con el cimiento de la figura 3.13. Las propiedades del suelo se presentan en la tabla 3.5. El método no-lineal se presenta en el anexo A.

Tabla 3.5. Propiedades de deformación del suelo

Estrato	A_{cf}	s_{cf}	A_{cv}	s_{cv}	ν	K_o	γ t/m ³
1	360	1.69	733	0.705	0.295	0.418	1.8
2	480	1.67	879	0.715	0.295	0.418	1.8

Figura 3.13. Características de la estructura y del terreno de cimentación

El análisis estructural se lleva a cabo empleando el método de rigideces descrito en el anexo H. En la figura 3.14, se muestran los grados de libertad y en la figura 3.15, el sistema de cargas sobre la estructura. Las matrices de rigidez se obtienen con los valores del anexo H, ya que se trata de barras horizontales. Los vectores de cargas de empotramiento se calculan con la ecuación 3.20.

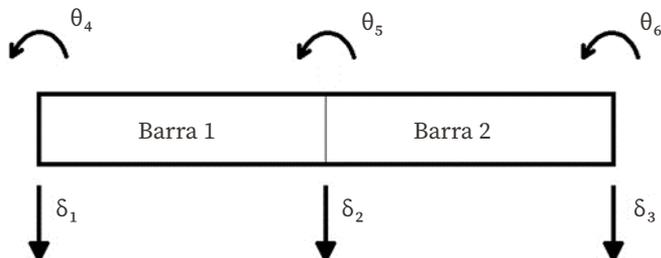
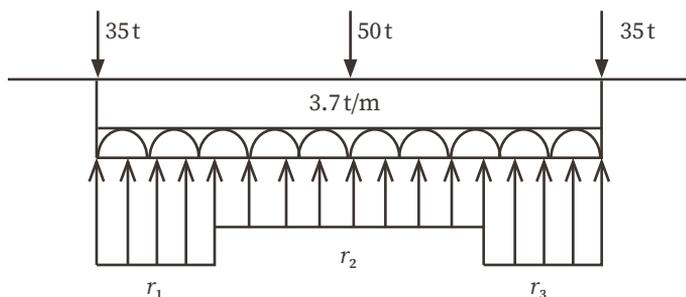
Figura 3.14. Numeración de barras y grados de libertad

Figura 3.15. Sistema de cargas sobre la estructura



Matriz de rigidez. Barra 1

θ_4	θ_5	δ_1	δ_2	
72 927.375	36 463.688	- 34 184.707	34 184.707	θ_4
36 463.688	72 927.375	- 34 184.707	34 184.707	θ_5
- 34 184.707	- 34 184.707	21 365.442	- 21 365.442	δ_1
34 184.707	34 184.707	- 21 365.442	21 365.442	δ_2

Matriz de rigidez. Barra 2

θ_5	θ_6	δ_2	δ_3	
72 927.375	36 463.688	- 34 184.707	34 184.707	θ_5
36 463.688	72 927.375	- 34 184.707	34 184.707	θ_6
- 34 184.707	- 34 184.707	21 365.442	- 21 365.442	δ_2
34 184.707	34 184.707	- 21 365.442	21 365.442	δ_3

Vector de cargas de empotramiento. Barra 1

$$\bar{P}_1^e = \begin{bmatrix} 3.15733 - 0.58667 r_1 - 0.26667 r_2 \\ - 3.15733 + 0.26667 r_1 + 0.58667 r_2 \\ - 5.92 + 1.3 r_1 + 0.3 r_2 \\ - 5.92 + 0.3 r_1 + 1.3 r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Vector de cargas de empotramiento. Barra 2

$$\bar{P}_2^e = \begin{bmatrix} 3.15733 - 0.58667 r_2 - 0.26667 r_3 \\ - 3.15733 + 0.26667 r_2 + 0.58667 r_3 \\ - 5.92 + 1.3 r_2 + 0.3 r_3 \\ - 5.92 + 0.3 r_2 + 1.3 r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de cada una de las barras. Teniendo en cuenta que debido a la simetría donde $\delta_3 = \delta_1$, $\theta_6 = -\theta_4$ y $\theta_5 = 0$ se tiene una matriz de rigidez de 3×3 :

δ_1	δ_2	θ_4	
21 365.442	-21 365.442	-34 164.707	δ_1
-21 365.442	42 730.884	34 164.707	δ_2
-34 164.707	34 164.707	72 927.375	θ_4

El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es la suma de los vectores de carga de empotramiento de cada una de las barras, el cual vale:

$$\bar{P}^e = \begin{bmatrix} - 5.92 + 1.3 r_1 + 0.3 r_2 \\ - 11.84 + 0.6 r_1 + 2.6 r_2 \\ 3.15733 - 0.58667 r_1 - 0.26667 r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

El vector de cargas concentradas es:

$$\bar{P}^e = \begin{bmatrix} - 35 \\ - 50 \\ 35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

Sustituyendo valores en la ecuación 3.4, se tiene:

$$K\delta + P^e + P^c = 0$$

$$(\delta_1) : 21\,365.442\delta_1 - 21\,365.442\delta_2 - 34\,184.707\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 - 5.92 - 35 = 0 \tag{3.27}$$

$$(\delta_2) : -42\,730.884\delta_1 + 42\,730.884\delta_2 + 68\,369.414\theta_4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 - 11.84 - 50 = 0 \tag{3.28}$$

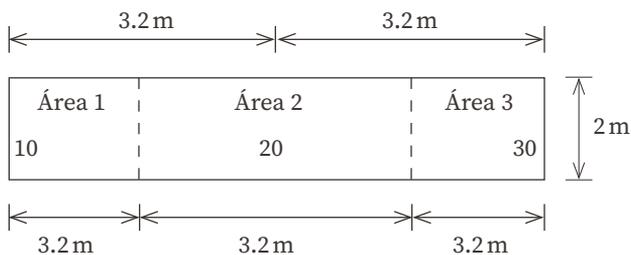
$$(\theta_4) : -34\,184.707\delta_1 + 34\,184.707\delta_2 + 72\,927.375\theta_4 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 + 3.15733 = 0 \tag{3.29}$$

En este punto, se hace notar que se tiene un sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas. Para complementar el sistema, se calculan las deformaciones.

Cálculo de asentamientos

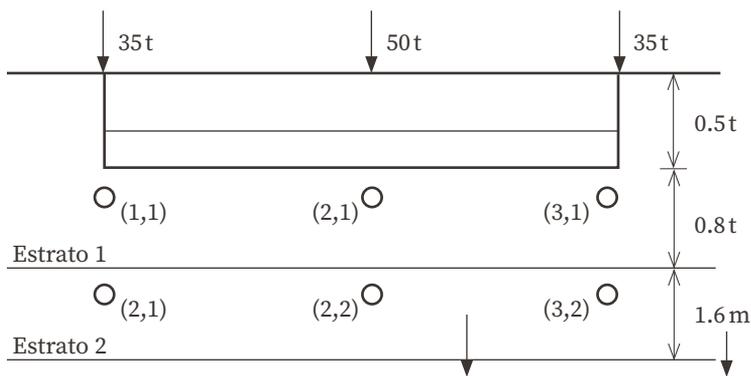
Se debe hallar el asentamiento bajo el punto 1 (figura 3.16 a).

Haciendo $i=1$ en la ecuación 3.21.



a) PLANTA

Figura 3.16. Cálculo de los valores de influencia



b) ELEVACIÓN

$$\delta_1 = \left(\frac{H_1}{E_{z11}} \right) \left(\frac{I_{z111} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{z112} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{z113} r_3 d_3}{a_3} \right) + \left(\frac{H_2}{E_{z12}} \right) \left(\frac{I_{z121} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{z122} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{z123} r_3 d_3}{a_3} \right) \quad (3.30)$$

Los módulos de deformación E_{z11} y E_{z12} están dados por la ecuación 3.23:

$$E_{z11} = \frac{\sigma_{z11}}{\varepsilon_{z11}} \quad (3.31)$$

$$E_{z12} = \frac{\sigma_{z12}}{\varepsilon_{z12}} \quad (3.32)$$

Las deformaciones unitarias ε_{z11} y ε_{z12} las obtenemos usando el procedimiento no lineal expuesto en el anexo A, con las siguientes expresiones:

Deformación por cambio de forma

$$\varepsilon_{cf} = 1 - \exp \left[\frac{P_a^{s-2}}{A_{cf}} \left[\frac{f}{c} \right]^2 \left\{ -\frac{1}{(s-2)(p_{ce} + c\sigma_z)^{s-2}} + \frac{p_{ce}}{(s-1)(p_{ce} + c\sigma_z)^{s-1}} + \frac{1}{(s-2)(s-1)P_{ce}^{s-2}} \right\} \right] \quad (3.33)$$

$$p_{ce} = b_3 p_t + p'_{co} \quad (3.34)$$

$$f = 1 - v \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{\sigma_z} \right] \quad (3.35)$$

$$c = b_1 + b_2 \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{\sigma_z} \right] \quad (3.36)$$

$$b_1 = b_2 = 1/3$$

Deformación por cambio de volumen

$$\varepsilon_{cv} = 1 - \exp \left[- \frac{f(p_{ve} + \sigma_z)^{1-s} - p_{ve}^{1-s}}{A_{cv} P_a^{1-s} (1-s)} \right] \quad (3.37)$$

$$p_{ve} = b_3 p_t + p'_{vo} \quad (3.38)$$

Ahora, ilustremos la aplicación del procedimiento, calculando el módulo E_{z11} . Los esfuerzos σ_{z11} , σ_{x11} y σ_{y11} se obtienen con las ecuaciones 3.24 a 3.26:

$$\sigma_{z11} = \frac{I_{z111} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{z112} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{z113} r_3 d_3}{a_3} \quad (3.30)$$

$$\sigma_{x11} = \frac{I_{x111} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{x112} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{x113} r_3 d_3}{a_3} \quad (3.30)$$

$$\sigma_{y11} = \frac{I_{y111} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{y112} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{y113} r_3 d_3}{a_3} \quad (3.30)$$

Como ejemplo, obtengamos los valores de influencia I_{z111} , I_{x111} e I_{y111} . Se coloca una presión unitaria $q = 1 \text{ t/m}^2$ en el área a_1 (figura 3.16) y se computan los esfuerzos normales σ_z , σ_x y σ_y debidos a esta carga a la mitad del estrato 1; así, obtenemos:

$$\sigma_z = I_{z111} = 0.4868711 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_x = I_{x111} = 0.227869 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_y = I_{y111} = 0.2098534 \text{ t/m}^2$$

los demás valores de influencia se determinan en forma similar y se presentan en la tabla 3.6.

Tabla 3.6. Valores de influencia

Punto	Estrato	Reacción	I_x	I_y	I_z
1	1	1	0.2278684	0.2098527	0.4868721
1	1	2	0.0133068	0.0346145	0.0017432
1	1	3	0	0.005662	0.0000189
1	2	1	0.0305764	0.0069832	0.2791376
1	2	2	0.0682321	0.0091878	0.0402185
1	2	3	0.0067291	0.0031684	0.000992
2	1	1	0.0152252	0.0242974	0.001636
2	1	2	0.4557368	0.4197054	0.9737442
2	1	3	0.0152252	0.0242974	0.001636
2	2	1	0.049969	0.0049217	0.0355776
2	2	2	0.0611528	0.0139663	0.5582751
2	2	3	0.049969	0.0049217	0.0355777
3	1	1	0	0.005662	0.0000189
3	1	2	0.0133068	0.0346145	0.0017432
3	1	3	0.2278684	0.2098527	0.4868721
3	2	1	0.0067291	0.0031684	0.000992
3	2	2	0.0682321	0.0091878	0.0402186
3	2	3	0.0305764	0.0069832	0.2791376

Sustituyendo en la ecuación 3.39, se tiene:

$$\sigma_{z11} = \frac{0.4868711 r_1(1.6)}{1.6(2)} + \frac{0.001743138 r_2(3.2)}{3.2(2)} + \frac{0.00001886487 r_3(1.6)}{1.6(2)}$$

$$\sigma_{z11} = 0.24343555 r_1 + 0.000871569 r_2 + 0.002810045 r_3 \quad (3.42)$$

en forma análoga se obtienen: σ_{x11} y σ_{y11} :

$$\sigma_{x11} = 0.24343555 r_1 + 0.000871569 r_2 + 0.002810045 r_3 \quad (3.43)$$

$$\sigma_{y11} = 0.24343555 r_1 + 0.000871569 r_2 + 0.002810045 r_3 \quad (3.44)$$

para el inicio de los cálculos, se considera una reacción uniforme:

$$r_1 = r_2 = r_3 = [35(2) + 50] / 6.4 + 3.7 = 22.45 \text{ t/m}$$

reemplazando en las ecuaciones 3.42 a 3.44, obtenemos lo siguiente:

$$\sigma_{z11} = 5.4849 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_{x11} = 2.7367 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_{y11} = 2.8072 \text{ t/m}^2$$

A continuación, calculamos las deformaciones por cambio de forma y por cambio de volumen.

Cambio de forma: ecuaciones 3.33 a 3.36.

$$P_{ce} = 0.9914 \text{ t/m}^2$$

$$v = 0.5 \text{ (se estima que la deformación por cambio de forma ocurre a volumen constante)}$$

$$f = 0.4946$$

$$c = 0.6703$$

$$\varepsilon_{cf} = 0.00075907$$

Cambio de volumen: ecuaciones 3.37 y 3.38.

$$P_{ve} = 1.62 \text{ t/m}^2$$

$$\varepsilon_{cv} = 0.001028$$

$$\varepsilon_{z11} = \varepsilon_{cf} + \varepsilon_{cv} = 0.00178703$$

Sustituyendo valores en la ecuación 3.31:

$$E_{z11} = 5.4849 / 0.00178703 = 3\,069.334 \text{ t/m}^2$$

En forma similar se obtiene:

$$E_{z12} = 3293.065 \text{ t/m}^2.$$

Reemplazando en la ecuación 3.30 y estimando que por simetría $r_1 = r_3$:

$$\delta_1 = 0.00013151 r_1 + 0.0000099976 r_2 \quad (3.45)$$

de manera similar, obtenemos:

$$\delta_2 = 0.000021166 r_1 + 0.00027335 r_2 \quad (3.46)$$

Compatibilidad de deformaciones

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y suelo equivale a resolver el sistema que está formado por las ecuaciones 3.27, 3.28, 3.29, 3.45 y 3.46, así, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0044939 \text{ m} \quad , \quad \delta_2 = 0.0038785 \text{ m} \\ \theta_4 &= 0.00055543 \\ r_1 &= 33.289 \text{ t/m} \quad , \quad r_2 = 11.611 \text{ t/m} \end{aligned}$$

Con los nuevos valores de $r_1 = r_3$ (por simetría) y r_2 , se repite el proceso hasta que estos ya no cambien en dos iteraciones sucesivas; esto se logra en la iteración seis, en la cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0046612 \text{ m} \quad , \quad \delta_2 = 0.0037665 \text{ m} \\ \theta_4 &= 0.00067864 \\ r_1 &= 31.534 \text{ t/m} \quad , \quad r_2 = 13.366 \text{ t/m} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5

Se debe ilustrar el desarrollo de la interacción suelo-estructura estática, utilizando la teoría de la elasticidad lineal para el cálculo de la deformación de la zapata mostrada en la figura 3.17.

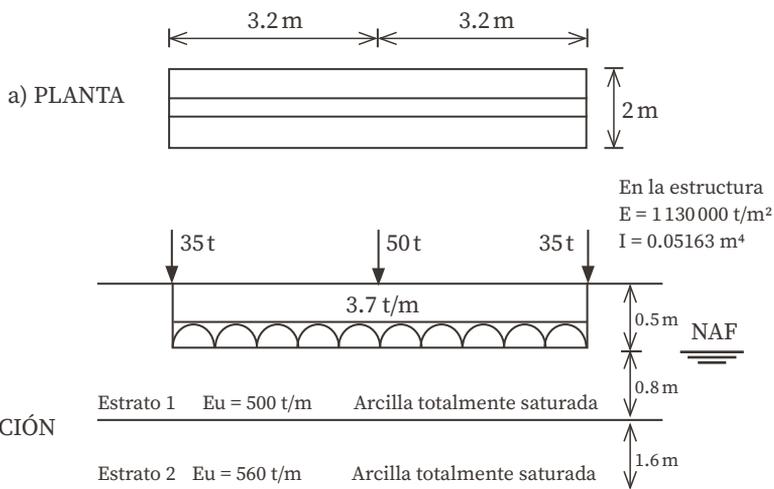


Figura 3.17. Características de la estructura y del terreno de cimentación

El cálculo de la deformación con la teoría de la elasticidad se puede resolver en forma aproximada, considerando que la deformación bajo el punto, i , de un estrato de suelo de espesor, H_j , está dada por:

$$\delta_{ij} = \left(\frac{H_i}{E_{ij}} \right) \left[\sigma_{zij} - \nu (\sigma_{xij} + \sigma_{yij}) \right] \tag{3.47}$$

donde:

E_{ij} : es el módulo de deformación del suelo.

ν : es su relación de Poisson.

Sustituyendo las ecuaciones 3.24 a 3.26 en la ecuación 3.47, se tiene:

$$\delta_{ij} = \left(\frac{H_i}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} \left[I_{zijk} - \nu (I_{xijk} + I_{yijk}) \right] \frac{r_k d_k}{a_k}$$

sea:

$$I_{ijk} + I_{zijk} - \nu (I_{xijk} + I_{yijk})$$

$$\delta_{ij} = \left(\frac{H_i}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} \left(\frac{I_{ijk} r_k d_k}{a_k} \right) \quad (3.48)$$

si se toman en cuenta todos los estratos del subsuelo y una posible deformación previa, δ_{oi} , la deformación del punto i es:

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{j=1}^{ne} \left(\frac{H_i}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} \left(\frac{I_{ijk} r_k d_k}{a_k} \right) \quad (3.49)$$

el análisis estructural es similar al del ejemplo 3.4 del método no lineal.

en el suelo, desarrollamos la ecuación 3.49 para $i=1$:

$$\delta_1 = \left(\frac{H_1}{E_{11}} \right) \left(\frac{I_{111} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{112} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{113} r_3 d_3}{a_3} \right) = \left(\frac{H_{12}}{E_{12}} \right) \left(\frac{I_{121} r_1 d_1}{a_1} + \frac{I_{122} r_2 d_2}{a_2} + \frac{I_{123} r_3 d_3}{a_3} \right)$$

En la tabla 3.7, se muestran los valores de influencia para este problema.

Tabla 3.7. Valores de influencia

Punto	Estrato	Reacción	I_x	I_y	I_z
1	1	1	0.3181538	0.2659315	0.4868721
1	1	2	0.0526525	0.0031307	0.0017432
1	1	3	0.0034809	0.0000384	0.0000189
1	2	1	0.0579423	0.0297508	0.2791376
1	2	2	0.0912396	0.0048027	0.0402185
1	2	3	0.0114948	0.0001265	0.0000992
2	1	1	0.0431202	0.0029178	0.001636
2	1	2	0.6363077	0.5318629	0.9737442
2	1	3	0.0431202	0.0029178	0.001636

Tabla 3.7. Valores de influencia (continuación)

Punto	Estrato	Reacción	I_x	I_y	I_z
2	2	1	0.06499	0.004222	0.0355776
2	2	2	0.1158847	0.0595016	0.5582751
2	2	3	0.06499	0.004222	0.0355777
3	1	1	0.0034809	0.0000384	0.0000189
3	1	2	0.0526525	0.0031307	0.0017432
3	1	3	0.3181538	0.2659315	0.4868721
3	2	1	0.0114948	0.0001265	0.000992
3	2	2	0.0912396	0.0048027	0.0402186
3	2	3	0.0579423	0.0297508	0.2791376

Cuando se sustituyen valores, se tiene:

$$\delta_1 = (0.8/500) \left[(0.194828/2) r_1 - (0.02614844/2) r_2 - (0.00174077/2) r_3 \right] + (1.6/560) \left[(0.23528931/2) r_1 - (0.00780255/2) r_2 - (0.00481864/2) r_3 \right]$$

tomando en cuenta que $r_1 = r_3$:

$$\delta_1 = 0.000483712 r_1 - 0.00003206525 r_2 \quad (3.50)$$

en forma análoga se obtiene:

$$\delta_2 = -0.000031436 r_1 + 0.00098398 r_2 \quad (3.51)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.27, 3.28, 3.29, 3.50 y 3.51:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.014285 \text{ m} \quad , \quad \delta_2 = 0.013224 \text{ m} \\ \theta_4 &= 0.00075212 \\ r_1 &= 30.487 \text{ t/m} \quad , \quad r_2 = 14.413 \text{ t/m} \end{aligned}$$

Nota: es importante que los módulos de deformación, E_{ij} , se determinen considerando el efecto de la presión de confinamiento en el terreno, el

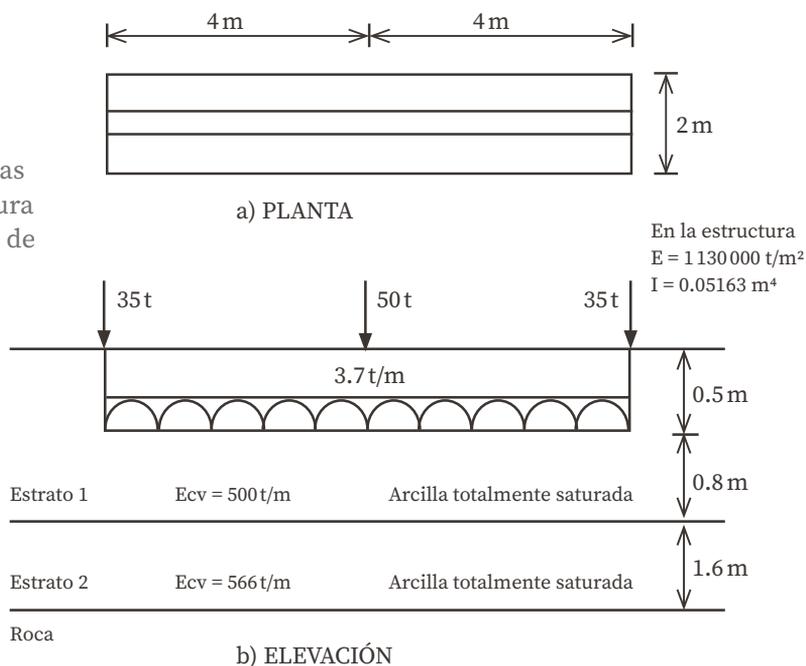
hecho de que la curva esfuerzo-deformación unitaria de los suelos es no lineal, así como la posible variación con el tiempo de las propiedades mecánicas.

Ejemplo 3.6

En este ejemplo, se desarrolla la interacción estática suelo-estructura de un suelo plástico parcialmente saturado.

En un suelo plástico parcialmente saturado, además de los asentamientos producidos por las cargas de una estructura, se presentan deformaciones debidas a cambios de la humedad en el suelo. Un ejemplo de esta clase de fenómeno lo constituyen las arcillas expansivas que sufren fuertes cambios volumétricos al variar su humedad natural. Consideremos el cimiento de la figura 3.18.

Figura 3.18.
Características de la estructura y del terreno de cimentación



E_{cv} : Módulo de deformación por cambio de volumen

Para el análisis estructural, aplicamos la ecuación 3.4:

$$K\delta + P^e + P^c = 0$$

Si realizamos cálculos semejantes a los ejemplos anteriores, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\delta_1) = 10\,939.1\delta_1 - 10\,939.1\delta_2 - 21\,878.12\theta_4 + 1.625r_1 + 0.375r_2 - 7.4 - 35 = 0 \quad (3.52)$$

$$(\delta_2) = -21\,878.2\delta_1 + 21\,878.2\delta_2 + 43\,756.4\theta_4 + 0.75r_1 + 3.25r_2 - 14.8 - 50 = 0 \quad (3.53)$$

$$(\theta_4) = -21\,878.2\delta_1 + 21\,878.2\delta_2 + 58\,341.9\theta_4 - 0.91667r_1 - 0.41667r_2 + 4.9333 = 0 \quad (3.54)$$

Para el planteamiento de las deformaciones en el suelo, se puede seguir el procedimiento tanto lineal como no lineal que fueron presentados en los ejemplos 3.4 y 3.5. Tomando en cuenta el cambio volumétrico y cambio de forma, se hallan las siguientes deformaciones del suelo en función de las cargas (matriz de flexibilidades del suelo):

$$\delta_1 = 0.000817668r_1 + 0.0000349723r_2 \quad (3.55)$$

$$\delta_2 = 0.0000634471r_1 + 0.00163405r_2 \quad (3.56)$$

Al realizar la compatibilidad de las deformaciones, se resuelve el sistema de ecuaciones 3.52 a 3.56 y se obtiene lo siguiente:

$$\delta_1 = 0.021759 \text{ m} \quad , \quad \delta_2 = 0.020075 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0010381$$

$$r_1 = 26.129 \text{ t/m} \quad , \quad r_2 = 11.27 \text{ t/m}$$

Asimismo, supongamos que por un aumento de humedad en el suelo en campo libre, la arcilla sufre una expansión de 3 cm en los puntos 1 y 3 y

de 5 cm en el punto 2 (figura 3.18). Al aplicar la ecuación 3.49 en las ecuaciones 3.55 y 3.56, obtenemos:

$$\delta_1 = -0.03 + 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (3.57)$$

$$\delta_2 = -0.05 + 0.0000634471 r_1 + 0.00163405 r_2 \quad (3.58)$$

al resolver el sistema de ecuaciones 3.52, 3.53, 3.54, 3.57 y 3.58, se tiene:

$$\delta_1 = -0.013950 \text{ m}, \quad \delta_2 = -0.018469 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0020384$$

$$r_1 = 18.835 \text{ t/m}, \quad r_2 = 18.565 \text{ t/m}$$

Se debe notar el cambio notable en las reacciones del suelo por las expansiones de la arcilla.

3.4. Resolución de la interacción suelo-estructura estática mediante un método iterativo

La interacción suelo-estructura se puede resolver mediante un método iterativo; esto tiene aplicación en la práctica cuando se dispone de un paquete o un programa de computadora que sustituye al terreno de cimentación por resortes, los cuales representan al módulo de reacción de dicho terreno. Dado que no se conoce *a priori* la *constante del resorte*, pues depende del diagrama de reacción del suelo, que es lo que justamente se está buscando, se tiene que recurrir a un procedimiento iterativo (Chamecki, 1956) que consiste en suponer valores iniciales de las *constantes de los resortes* y con ellas computar, por una parte, las deformaciones de la estructura y, por la otra, las deformaciones del suelo. La diferencia entre deformaciones de estructura y suelo permite ajustar la

constante del resorte; el proceso se repite hasta que coinciden las deformaciones de la estructura y terreno.

El método iterativo se usa de la siguiente forma:

En el terreno se entra con las cargas, r_i , y se determinan las deformaciones, δ_i , con la matriz de flexibilidades del suelo (se puede iniciar con la reacción uniforme); los módulos de reacción (o constantes de los resortes) se obtienen así:

$$K_{vi} = \frac{r_i d_i}{\delta_i} \quad (3.59)$$

En la estructura se entra con las, K_{vi} , y se calculan las deformaciones; las reacciones, r_i , por unidad de longitud (en t/m) se obtienen de la siguiente forma:

$$r_i = \frac{K_{vi} \delta_i}{d_i} \quad (3.60)$$

donde:

d_i : es la longitud en que actúa r_i .

Con estos valores de r_i , se entra nuevamente al suelo (inciso a) y el proceso se repite hasta que coinciden las deformaciones de la estructura y suelo.

Ejemplo 3.7

Se debe ilustrar el proceso anterior con la zapata de la figura 3.19. Los datos de la estructura y el suelo son los mismos del ejemplo 3.4 (figura 3.13). De acuerdo con la ecuación 3.4, se tiene:

$$K\delta + P^e + P^c = 0$$

Las reacciones del terreno se pueden incorporar en el vector de cargas concentradas, P^c , (figura 3.19 b).

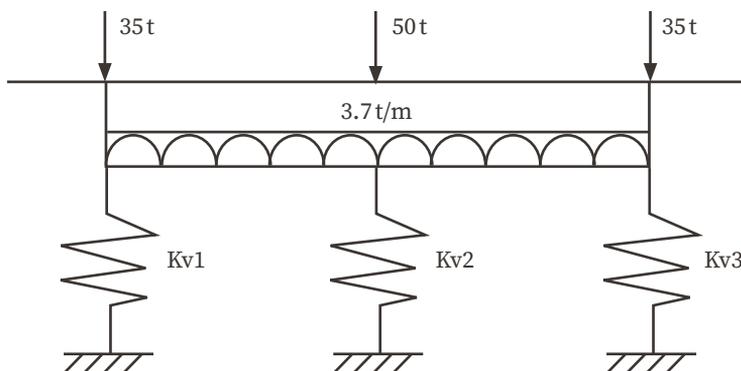
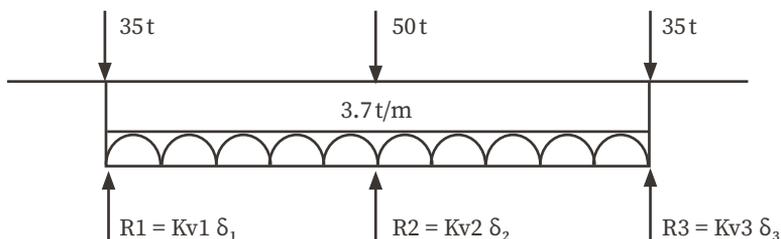


Figura 3.19.

Método iterativo

a) MÓDULOS DE REACCIÓN



a) REACCIONES DE TERRENO

De esta forma, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\delta_1) = (21\,365.442 + K_{v1})\delta_1 - 21\,365.442\delta_2 - 34\,184.707\theta_4 - 5.92 - 35 = 0 \quad (3.61)$$

$$(\delta_2) = -42\,730.8841 + (42\,730.884 + K_{v2})\delta_2 + 68\,369.414\theta_4 - 11.84 - 50 = 0 \quad (3.62)$$

$$(\theta_4) = -34\,184.707\delta_1 + 34\,184.707\delta_2 + 72\,927.375\theta_4 + 3.15733 = 0 \quad (3.63)$$

En el terreno de cimentación, habíamos obtenido la siguiente matriz de flexibilidades (ecuaciones 3.50 y 3.51):

$$\delta_1 = 0.000483712 r_1 - 0.00003206525 r_2 \quad (3.64)$$

$$\delta_2 = -0.000031436 r_1 + 0.00098398 r_2 \quad (3.65)$$

Las iteraciones se realizan de la siguiente forma:

Primera iteración

El proceso se inicia considerando una reacción uniforme $r_1 = r_2 = r_3 = 22.45 \text{ t/m}$.

Terreno de cimentación: aplicando las ecuaciones 3.64, 3.65 y 3.59

δ_1	δ_2	K_{v1}	K_{v2}
m	m	t/m	t/m
0.010139	0.021385	3 542.592	3 359.425

Estructura: con los K_{vi} anteriores y aplicando las ecuaciones 3.61, 3.62, 3.63 y 3.60

δ_1	δ_2	r_1	r_2
m	m	t/m	t/m
0.013295	0.014729	29.437	15.463

Segunda iteración

Terreno de cimentación: con los r_i anteriores y aplicando las ecuaciones 3.64, 3.65 y 3.59

δ_1	δ_2	K_{v1}	K_{v2}
m	m	t/m	t/m
0.013743	0.014290	3 427.089	3 462.699

Estructura: con los K_{vi} anteriores y aplicando las ecuaciones 3.61, 3.62, 3.63 y 3.60

δ_1	δ_2	r_1	r_2
m	m	t/m	t/m
0.013498	0.014775	28.912	15.988

Tercera iteración

Terreno de cimentación: con los r_i anteriores y aplicando las ecuaciones 3.64, 3.65 y 3.59

δ_1	δ_2	K_{v1}	K_{v2}
m	m	t/m	t/m
0.013473	0.014823	3 433.619	3 451.506

Estructura: con los K_{vi} anteriores y aplicando las ecuaciones 3.61, 3.62, 3.63 y 3.60

δ_1	δ_2	r_1	r_2
m	m	t/m	t/m
0.013493	0.014783	28.956	15.944

Cuarta iteración

Terreno de cimentación: con los r_i anteriores y aplicando las ecuaciones 3.64, 3.65 y 3.59

δ_1	δ_2	K_{v1}	K_{v2}
m	m	t/m	t/m
0.013495	0.014779	3 433.069	3 452.402

Estructura: con los K_{vi} anteriores y aplicando las ecuaciones 3.61, 3.62, 3.63 y 3.60

δ_1	δ_2	r_1	r_2
m	m	t/m	t/m
0.013493	0.014782	28.952	15.948

En la cuarta iteración, se aprecia que las deformaciones del suelo y estructura prácticamente coinciden.

3.5. Método aproximado para tomar en cuenta la rigidez angular de las columnas que llegan a la estructura de cimentación

Los procedimientos de interacción vistos en los incisos anteriores, permiten tomar en cuenta todos los pisos de la estructura. Con el propósito de presentar ejemplos que se puedan resolver a *mano*, sin el auxilio de la computadora, hemos presentado modelos muy sencillos, en los cuales, y solo para fines didácticos, se considera únicamente la estructura de la cimentación.

Enseguida, se desea hacer el análisis preliminar de una subestructura, sin tomar en cuenta los niveles superiores. En este caso, las columnas transmiten las cargas a la cimentación, pero como están unidas a la infraestructura, también, imponen una condición de continuidad estructural en los nudos correspondientes. La presencia de una columna provoca que en el nudo se presente un momento flexionante que vale, $K_e\theta$.

Donde:

K_e : es la rigidez a la rotación de la columna (rigidez angular).

θ : es el ángulo donde gira el nudo en cuestión.

Este momento flexionante se agrega en el vector de cargas concentradas, P^c , de la ecuación 3.4:

$$K\delta + P^e + P^c = 0$$

Ejemplo 3.8

Se toman los datos del ejemplo 3.7 y estimando la rigidez angular de las columnas, $K_r = 6215.222 \text{ t-m/rad}$, calcúlense las deformaciones en la cimentación.

El vector, P^c , es:

$$P^c = \begin{bmatrix} -35 \\ -50 \\ -35 \\ 6215.222\theta_4 \\ 6215.222\theta_5 \\ 6215.222\theta_6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{l} \text{Grado} \\ \text{de libertad} \end{array}$$

Cuando se aplica la ecuación 3.4, el sistema de ecuaciones 3.27 a 3.29 queda modificado de la siguiente forma:

$$(\delta_1) = 21365.442\delta_1 - 21365.442\delta_2 - 34184.707\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 - 5.92 - 35 = 0 \quad (3.66)$$

$$(\delta_2) = -42730.884\delta_1 + 42730.884\delta_2 - 68369.414\theta_4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 - 11.84 - 50 = 0 \quad (3.67)$$

$$(\theta_4) = -34184.707\delta_1 + 34184.707\delta_2 + 72927.375\theta_4 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 + 3.15733 + 6215.222\theta_4 = 0 \quad (3.68)$$

en el terreno, habíamos obtenido (ecuaciones 3.50 y 3.51) lo siguiente:

$$\delta_1 = 0.000483712 r_1 - 0.00003206525 r_2 \quad (3.69)$$

$$\delta_2 = -0.000031436 r_1 + 0.00098398 r_2 \quad (3.70)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones 3.66 a 3.70, se tiene:

$$\delta_1 = 0.014190 \text{ m}, \quad \delta_2 = 0.013411 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.00057055$$

$$r_1 = 30.303 \text{ t/m}, \quad r_2 = 14.597 \text{ t/m}$$

3.6. Determinación de elementos mecánicos

Los elementos mecánicos se obtienen como se indica en el anexo H. Para una barra horizontal de cimentación, despreciando el acortamiento de la misma, los elementos mecánicos son los siguientes (sistema global, figura 3.20).

Dirección x (sistema global):

$$M_p = \frac{wL^2}{12} - (11/192)L^2 r_r - (5/192)L^2 r_s + (4EI/L)\theta_p + (2EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (3.71)$$

$$M_q = \frac{wL^2}{12} - (5/192)L^2 r_r - (11/192)L^2 r_s + (2EI/L)\theta_p + (4EI/L)\theta_q - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (3.72)$$

$$V_r = \frac{-wL}{2} + (13/32)Lr_r + (13/32)Lr_s - (6EI/L^2)\theta_p - (6EI/L^2)\theta_q + (12EI/L^3)\delta_r - (12EI/L^3)\delta_s \quad (3.73)$$

$$V_s = \frac{-wL}{2} + (3/32)Lr_r + (3/32)Lr_s + (6EI/L^2)\theta_p + (6EI/L^2)\theta_q - (12EI/L^3)\delta_r + (12EI/L^3)\delta_s \quad (3.74)$$

$$M_a = (GI_t IL)\theta_a - (GI_t IL)\theta_b \quad (3.75)$$

$$M_b = -(GI_t IL)\theta_a + (GI_t IL)\theta_b \quad (3.76)$$

Dirección y (sistema global):

$$M_a = \frac{wL^2}{12} + (11/192)L^2r_r + (5/192)L^2r_s - (4EI/L)\theta_a - (2EI/L)\theta_b - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (3.77)$$

$$M_b = \frac{wL^2}{12} - (5/192)L^2r_r - (11/192)L^2r_s - (2EI/L)\theta_a - (4EI/L)\theta_b - (6EI/L^2)\delta_r + (6EI/L^2)\delta_s \quad (3.78)$$

$$V_r = \frac{-wL}{2} + (13/32)Lr_r + (13/32)Lr_s + (6EI/L^2)\theta_a + (6EI/L^2)\theta_b + (12EI/L^3)\delta_r - (12EI/L^3)\delta_s \quad (3.79)$$

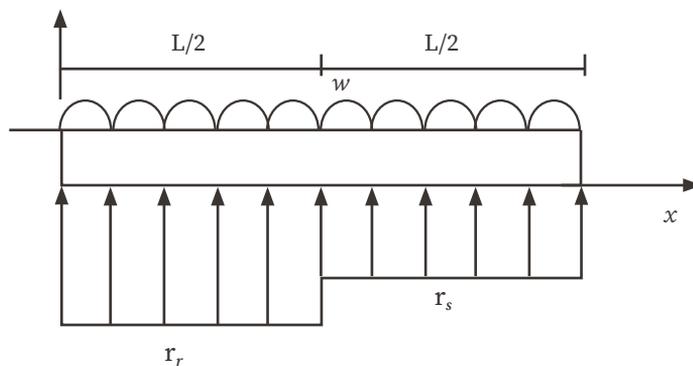
$$V_s = \frac{-wL}{2} + (3/32)Lr_r + (13/32)Lr_s - (6EI/L^2)\theta_a - (6EI/L^2)\theta_b - (12EI/L^3)\delta_r + (12EI/L^3)\delta_s \quad (3.80)$$

$$M_p = -(GI_t/L)\theta_p + (GI_t/L)\theta_q \quad (3.81)$$

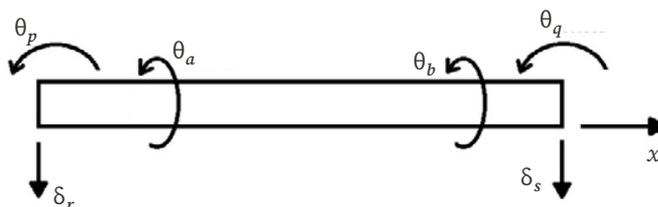
$$M_q = (GI_t/L)\theta_p - (GI_t/L)\theta_q \quad (3.82)$$

Los diagramas de fuerza cortante y del momento flexionante en una barra de la cimentación (figura 3.20) se obtienen con las siguientes expresiones (dirección x):

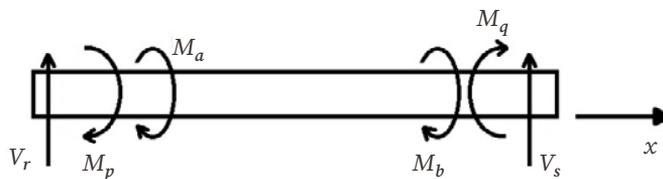
Figura 3.20.
Elementos mecánicos sobre una barra de cimentación en un sistema global



a) Cargas sobre la barra



b) Grados de libertad



c) Elementos mecánicos (barra sobre nudo)

$$x \leq \frac{L}{2} : V = -V_r + (r_r - w)x \quad (3.83)$$

$$M = -M_p - V_r x + (r_r - w) \frac{x^2}{2} \quad (3.84)$$

$$M_{max} \text{ para } x = \frac{V_r}{(r_r - w)} \quad (3.85)$$

$$x \geq \frac{L}{2} : V = -V_r - wx + r_r \frac{L}{2} + r_s \left(x - \frac{L}{2} \right) \quad (3.86)$$

$$M = -M_p - V_r x - w \frac{x^2}{2} + \left(r_r \frac{L}{2} \right) \left(x - \frac{L}{4} \right) + \left(\frac{r_s}{2} \right) \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 \quad (3.87)$$

$$M_{max} \text{ para } x = \frac{\left[V_r + (r_s - r_r) \frac{L}{2} \right]}{(r_s - w)} \quad (3.88)$$

En las ecuaciones 3.83 a 3.88, el cortante es positivo, si va hacia arriba a la izquierda de la barra; mientras que, el momento es positivo, si produce compresión en las fibras superiores de la barra.

Ejemplo 3.9

Se deben calcular los elementos mecánicos en los nudos de la estructura del ejemplo 3.5 (figura 3.17) con $K_r = 6\,215.222 \text{ t-m/rad}$ en las columnas.

Anteriormente, se obtuvo:

$$\delta_1 = 0.014190 \text{ m}, \quad \delta_2 = 0.013411 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.00057055$$

$$r_1 = 30.303 \text{ t/m}, \quad r_2 = 14.597 \text{ t/m}$$

Aplicando las ecuaciones 3.71 a 3.74, se tiene:

$$\begin{aligned} M_p = & \frac{3.7(3.2)^2}{12} - \left(\frac{11}{192} \right) (3.2)^2 (30.303) - \left(\frac{5}{192} \right) (3.2)^2 (14.597) + \\ & + \left[\frac{(4)(1\,130\,000)(.05163)}{3.2} \right] (0.00057055) + \left[\frac{(2)(1\,130\,000)(.05163)}{3.2} \right] (0) - \\ & - \frac{(6)(1\,130\,000)(.05163)}{(3.2)^2} (0.01419) - \frac{(6)(1\,130\,000)(.05163)}{(3.2)^2} (0.013411) \end{aligned}$$

$$M_p = - 3.534 \text{ t-m}$$

$$M_q = 7.662 \text{ t-m}$$

$$V_r = 35 \text{ t}$$

$$V_s = 25 \text{ t}$$

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante se hallan con las ecuaciones 3.83 a 3.88; sin embargo, en la práctica, conviene modelar la estructura de la cimentación con cuatro o más barras para obtener mayor precisión. En el siguiente capítulo, se presenta un ejemplo de análisis y diseño de una zapata corrida, empleando ocho barras en la estructura de cimentación; en este modelo, se expone la forma de obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

3.7. Interacción suelo-losa de cimentación

Una losa de cimentación se puede modelar como una retícula de barras ortogonales entre sí. La solución es más precisa a medida que se incrementa el número de estas. Para una retícula de barras horizontales, se puede despreciar el acortamiento de barras; además, $\alpha=0$. La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra quedan como se muestra en el anexo H.

Ejemplo 3.10

Se debe realizar el análisis de una losa con la retícula de la figura 3.21 (Deméneghi, 1996). La estratigrafía y propiedades se muestran en la figura 3.22. Se desprecian los efectos de acortamiento de barras. La numeración de barras y de grados de libertad se exhiben en la figura 3.23. Como ilustración, presentamos los grados de libertad de las barras 1 y 7 para el sistema global:

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s	θ_a	θ_b
1	θ_{10}	θ_{12}	δ_1	δ_2	θ_{11}	θ_{13}
7	θ_{10}	θ_{16}	δ_1	δ_4	θ_{11}	θ_{17}

Figura 3.21. Geometría y sistema de cargas sobre la estructura

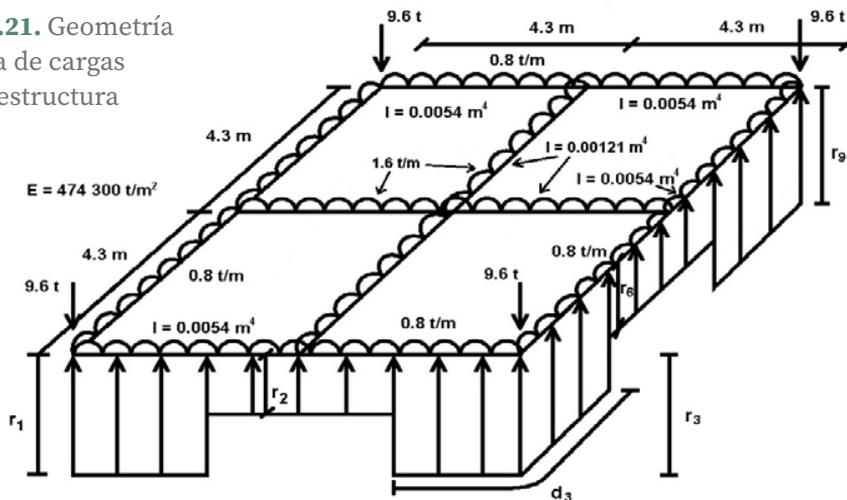


Figura 3.22. Estratigrafía y propiedades

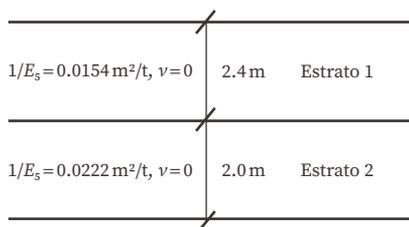
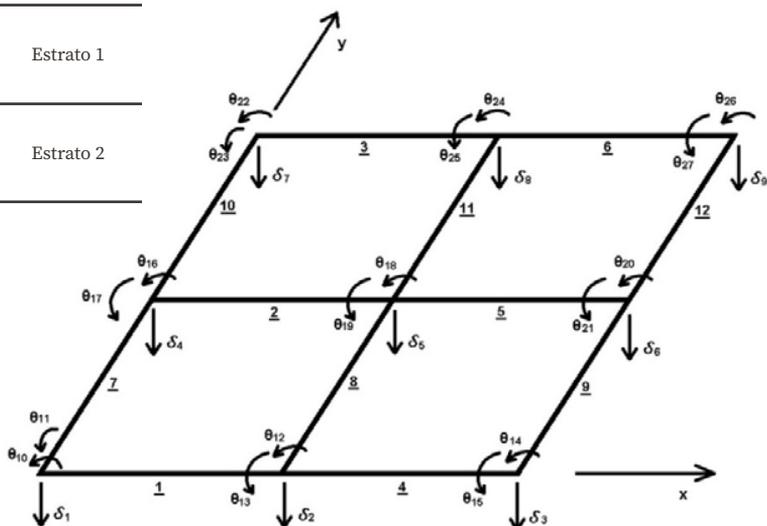


Figura 3.23. Numeración de barras y grados de libertad



Enseguida, hallaremos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento de las barras 1 y 7. Utilizando los valores del anexo H, se obtienen las matrices K_1 y K_7 , que se muestran en las tablas 3.8 y 3.9, respectivamente. La matriz de rigidez de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura (el rango de cada matriz se toma de 27 por 27). A manera de ejemplo, en la tabla 3.10, se presenta la matriz de rigidez de la estructura para los primeros cinco grados de libertad.

Tabla 3.8. Barra 1. Matriz de rigidez

θ_{10}	θ_{12}	δ_1	δ_2	θ_{11}	θ_{13}	
2 382.530	1 191 265	- 831.115	831.115	0	0	θ_{10}
1 191.265	2 382 530	- 831.115	831.115	0	0	θ_{12}
- 831.115	- 831.115	386.565	- 386.565	0	0	δ_1
831.115	831.115	- 386.565	386.565	0	0	δ_2
0	0	0	0	310.08	- 310.08	θ_{11}
0	0	0	0	- 310.08	310.08	θ_{13}

Tabla 3.9. Barra 7. Matriz de rigidez

θ_{10}	θ_{16}	δ_1	δ_4	θ_{11}	θ_{17}	
310.08	- 310.08	0	0	0	0	θ_{10}
- 310.08	310.08	0	0	0	0	θ_{16}
0	0	386.565	- 386.565	831.115	831.115	δ_1
0	0	- 386.565	386.565	- 831.115	- 831.115	δ_4
0	0	831.115	- 831.115	2 382.530	2 382.530	θ_{11}
0	0	831.115	- 831.115	1 191.265	1 191.265	θ_{17}

Tabla 3.10. Matriz de rigidez global de la estructura para los primeros cinco grados de libertad

θ_{16}	δ_1	δ_4	θ_{11}	θ_{17}	
773.130	- 386.565	0	- 386.565	0	θ_{10}
- 386.565	859.750	- 386.565	0	- 86.619	θ_{16}
0	- 386.565	773.130	0	0	δ_1
- 386.565	0	0	859.750	- 86.619	δ_4
0	- 86.619	0	- 86.619	346.770	θ_{11}

Para continuar, determinemos los vectores de empotramiento de las barras 1 y 7.

Cuando se aplica la ecuación 3.20, se tiene:

$$\bar{P}_1^e = \begin{bmatrix} 1.233 - 1.9593r_1 - 0.4815r_2 & 10 & GL \\ - 1.233 + 0.4815r_1 + 1.0593r_2 & 12 \\ - 1.72 + 1.747r_1 + 0.4031r_2 & 1 \\ - 1.72 + 0.4031r_1 + 1.747r_2 & 2 \\ 0 & 11 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_7^e = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 16 \\ - 1.72 + 1.747r_1 + 0.4031r_4 & 1 \\ - 1.72 + 0.4031r_1 + 1.747r_4 & 4 \\ 1.233 - 1.0593r_1 - 0.4815r_4 & 11 \\ - 1.233 + 0.4815r_1 + 1.0593r_4 & 17 \end{bmatrix}$$

GL= es el grado de libertad.

A continuación, como ejemplo, presentamos el vector de cargas de empostramiento de la estructura para los primeros cinco grados de libertad:

$$P^e = \begin{bmatrix} -3.44 + 3.494r_1 + 0.4031r_2 + 0.4031r_4 \\ -6.88 + 0.4031r_1 + 5.241r_2 + 0.4031r_3 + 0.4031r_5 \\ -3.44 + 0.4031r_2 + 3.494r_3 + 0.4031r_6 \\ -6.88 + 0.4031r_1 + 5.241r_4 + 0.4031r_5 + 0.4031r_7 \\ -13.76 + 0.4031r_2 + 0.4031r_4 + 6.988r_5 + 0.4031r_6 \\ 0.4031r_8 \end{bmatrix}$$

el vector de cargas concentradas para los primeros cinco grados de libertad vale:

$$P^c = \begin{bmatrix} -9.6 \\ 0 \\ -9.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & GL \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

sustituyendo valores en la ecuación 3.4 y tomando en cuenta que por simetría:

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \qquad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

$$\theta_{10} = \theta_{11} = -\theta_{14} = \theta_{15} = \theta_{22} = -\theta_{23} = -\theta_{26} = -\theta_{27}$$

$$\theta_{13} = \theta_{16} = -\theta_{20} = -\theta_{25}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (que representa el equilibrio de cortantes o de momentos en el grado de libertad correspondiente).

Grado de libertad 1:

$$773.14\delta_1 - 773.14\delta_2 - 1662.24\theta_{10} + 3.494r_1 + 0.8062r_2 - 3.44 - 9.6 = 0 \quad (\text{a})$$

Grado de libertad 2:

$$-773.14\delta_1 + 859.767\delta_2 - 86.62\delta_5 + 1662.24\theta_{10} - 186.23\theta_{13} + 0.8062r_1 + 5.24r_2 + 0.403r_5 - 6.88 = 0 \quad (\text{b})$$

Grado de libertad 5:

$$-346.48\delta_2 + 346.48\delta_5 + 744.92\theta_{13} + 1.6124r_2 - 6.988r_5 - 13.76 = 0 \quad (\text{c})$$

Grado de libertad 10:

$$-831.12\delta_1 + 831.12\delta_2 + 2692.76\theta_{10} - 310.23\theta_{13} - 1.0593r_1 - 0.4815r_2 + 1.233 = 0 \quad (\text{d})$$

Grado de libertad 13:

$$-186.23\delta_2 + 186.23\delta_5 - 620.46\theta_{10} + 1154.32\theta_{13} - 1.0593r_2 - 0.4815r_5 + 2.465 = 0 \quad (\text{e})$$

Las deformaciones del terreno de cimentación se determinan con el procedimiento de la teoría de la elasticidad lineal. Para continuar, como ejemplo, presentamos la obtención de δ_1 :

$$\begin{aligned} \delta_1 = & 0.0154(2.4) \left[0.2271(4.3r_1)/4.6225 + \right. \\ & 0.009375(6.45r_2)/9.245 + 0.0001528(4.3r_3)/4.6225 + \\ & 0.009375(6.45r_4)/9.245 + 0.002988(8.6r_5)/18.49 + \\ & 0.0001625(6.45r_6)/9.245 + 0.0001528(4.3r_7)/4.6225 + \\ & \left. 0.0001625(6.45r_8)/9.245 + 0.00002824(4.3r_9)/4.6225 \right] + \\ & 0.0222(2.0) \left[0.1139(4.3r_1)/4.6225 + \right. \\ & 0.04407(6.45r_2)/9.245 + 0.002284(4.3r_3)/4.6225 + \\ & 0.04407(6.45r_4)/9.245 + 0.028026(8.6r_5)/18.49 + \\ & 0.002638(6.45r_6)/9.245 + 0.0022836(4.3r_7)/4.6225 + \\ & \left. 0.002638(6.45r_8)/9.245 + 0.0005157(4.3r_9)/4.6225 \right] \end{aligned}$$

Si aprovechamos la simetría de la estructura, se tiene (Deméneghi, 1996):

$$\delta_1 = 0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5 \quad (\text{f})$$

$$\delta_2 = 0.0036877 r_1 + 0.020326 r_2 + 0.0021424 r_5 \quad (\text{g})$$

$$\delta_3 = 0.0028714 r_1 + 0.010629 r_2 + 0.025023 r_5 \quad (\text{h})$$

La compatibilidad de las deformaciones entre la estructura y terreno de cimentación se logra reemplazando las ecuaciones *f*, *g* y *h* en las ecuaciones *a*, *b*, *c*, *d* y *e* o resolviendo el sistema de ecuaciones de la *a* a la *h*:

$$\begin{aligned} r_1 &= 3.235 \text{ t/m}, & r_2 &= 1.082 \text{ t/m}, & r_5 &= 1.149 \text{ t/m} \\ \theta_{10} &= 0.003760, & \theta_{13} &= -0.0007646 \\ \delta_1 &= 0.04558 \text{ m}, & \delta_2 &= 0.03638 \text{ m}, & \delta_5 &= 0.04953 \text{ m} \end{aligned}$$

Como ilustración, hallaremos los elementos mecánicos en las barras 1 y 7 (sistema local) para lo cual se aplican las ecuaciones 3.71 a 3.82.

Barra 1 (dirección *x*):

$$\begin{aligned} M_{10} &= -1.403 \text{ t-m}, & M_{12} &= -1.697 \text{ t-m} \\ V_1 &= 4.8 \text{ t}, & V_2 &= 1.042 \text{ t} \\ M_{11} &= -1.404 \text{ t-m}, & M_{13} &= 1.404 \text{ t-m} \end{aligned}$$

Barra 7 (dirección *y*):

$$\begin{aligned} M_{11} &= -1.403 \text{ t-m}, & M_{17} &= -1.697 \text{ t-m} \\ V_1 &= 4.8 \text{ t}, & V_4 &= 1.042 \text{ t} \\ M_{10} &= 1.404 \text{ t-m}, & M_{16} &= -1.404 \text{ t-m} \end{aligned}$$

En el anexo I, se presenta el análisis sísmico de cimentaciones.

4.1. Diseño estructural de una zapata

4.1.1. Determinación de elementos mecánicos

Se debe considerar una zapata sometida a carga vertical y momento. El diagrama de reacción del terreno es de forma aproximadamente trapezoidal, tal como, se indica en la figura 4.1 a. En la práctica, con el propósito de simplificar los cálculos, es usual sustituir la reacción trapezoidal por una reacción rectangular (figura 4.1 b); el ancho B' de esta reacción está dado por:

$$B' = B - 2e \quad (4.1)$$

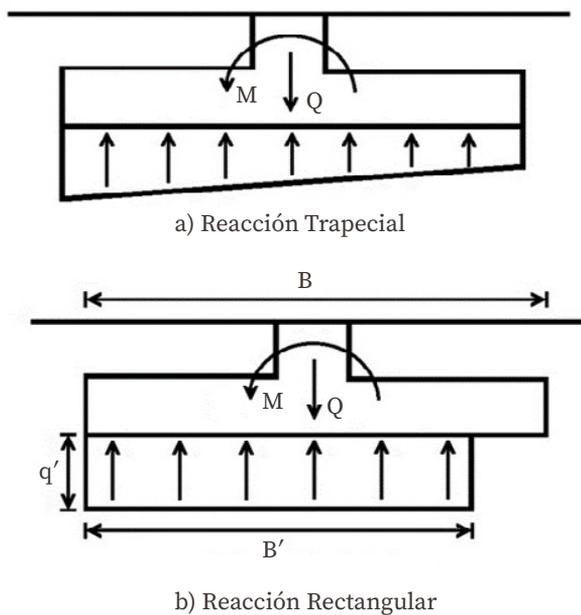
donde:

e : es la excentricidad.

Y vale:

$$e = \frac{M}{\Sigma Q} \quad (4.2)$$

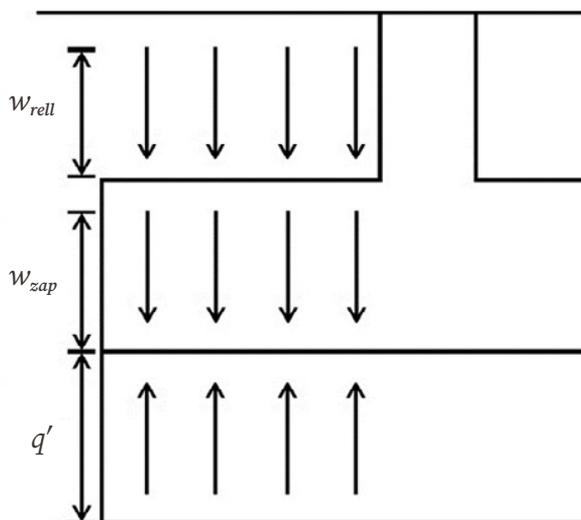
Figura 4.1. Cargas sobre una zapata



Las cargas que obran sobre el ala de la zapata se muestran en la figura 4.2. La carga uniforme para el cálculo estructural, q_e , vale:

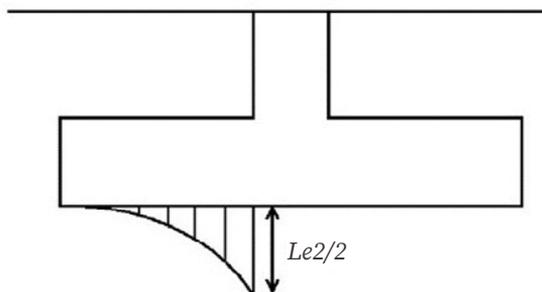
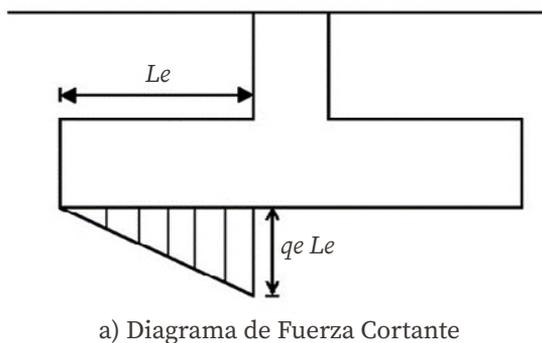
$$q_e = q' - w_{rell} - w_{zap} \quad (4.3)$$

Figura 4.2. Cargas que actúan sobre el ala de la zapata



El ala de la zapata se puede entender como un *cantilever* sometido a una carga uniforme, q_e , de abajo hacia arriba. Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante sobre el ala de la zapata se exhiben en la figura 4.3. La fuerza cortante última y el momento último se obtienen multiplicando estos diagramas por el factor de carga, F_c , correspondiente:

Figura 4.3. Elementos mecánicos sobre el ala izquierda de la zapata



En el caso de una zapata sometida a carga vertical y dos momentos, el diagrama de reacción se muestra en la figura 4.4 a. Para fines de cálculo, este diagrama se sustituye por el de la figura 4.4 b, en el cual las dimensiones reducidas B' y L' valen:

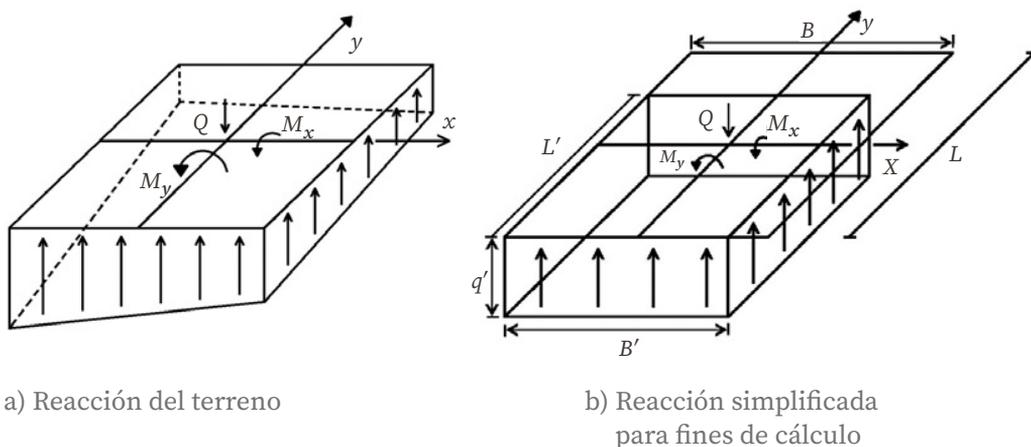
$$B' = B - 2e_x, \quad e_x = \frac{M_y}{\Sigma Q} \quad (4.4)$$

$$L' = L - 2e_y, \quad e_y = \frac{M_x}{\Sigma Q} \quad (4.5)$$

El diseño por tensión diagonal y por flexión se lleva a cabo haciendo uso de la reacción uniforme del terreno obtenida con las dimensiones reducidas B' y L' de las ecuaciones 4.4 y 4.5, es decir:

$$q' = \frac{\Sigma Q}{(B' L')} \quad (4.4)$$

Figura 4.4. Diagramas de reacción del terreno de cimentación (Meli, 1985)

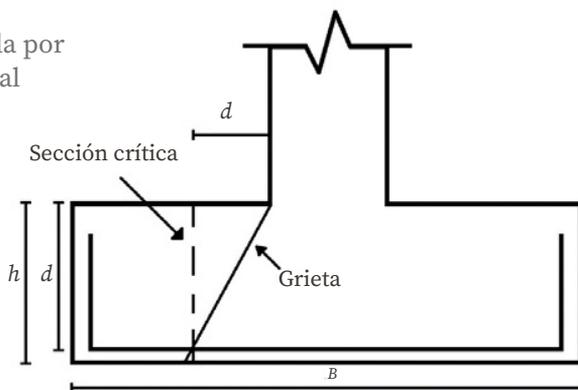


4.2. Diseño estructural

4.2.1. Tensión diagonal

En una zona cercana al paño de la columna o muro que llega a la zapata, se puede presentar una falla por tensión diagonal que es ocasionada, esta a su vez, por el esfuerzo cortante (figura 4.5). Esta revisión se lleva a cabo verificando que la fuerza cortante última a una distancia, d , del paño de la columna o muro sea menor que la fuerza cortante resistente.

Figura 4.5. Falla por tensión diagonal



Para valuar la fuerza cortante resistente, las NTCDC⁵⁰ (Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto) contienen las siguientes expresiones:

$$\text{Si } p < 0.01, \quad V_{CR} = F_R b d (0.2 + 30p) \sqrt{f_c^*}$$

$$\text{Si } p \geq 0.01, \quad V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*} \quad (4.7)$$

donde:

b : es el ancho de cálculo del elemento estructural.

d : es el peralte efectivo del elemento estructural.

p : es la cuantía de acero.

$$f_c^* = 0.8 f_c' \quad (4.8)$$

F_R : es el factor de resistencia.

⁵⁰ Gobierno del Distrito Federal, «Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, Décima cuarta época, t. i, núm. 103-bis, octubre 6 de 2004.

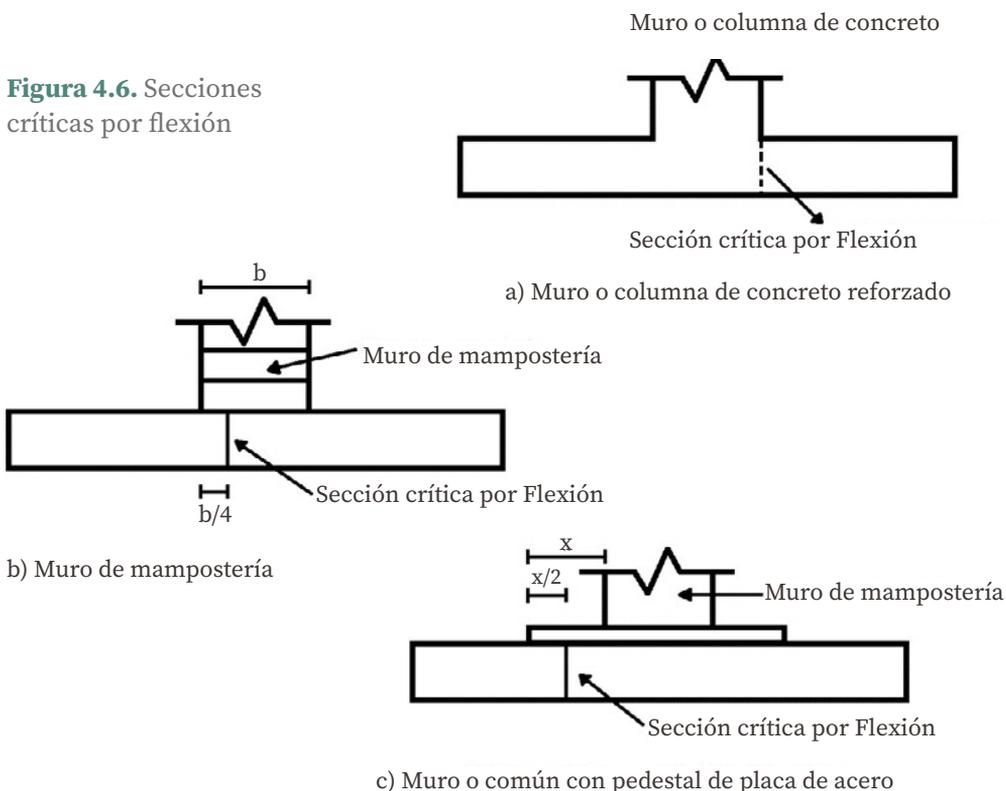
En elementos anchos, como puede ser el ala de una zapata, en los que el ancho, B , no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo, d , ($B \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación M/V_d no exceda de 2, la fuerza resistente, V_{cr} , puede tomarse igual a $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$, independientemente, de la cuantía de refuerzo:

$$V_{cr} > V_u$$

4.2.2. Flexión

La sección crítica por flexión en el ala de la zapata depende del material que forma la columna o muro que llega a la zapata. En la figura 4.6, se presenta la sección crítica por flexión para tres diferentes clases de material.

Figura 4.6. Secciones críticas por flexión



La revisión por flexión se realiza verificando que el momento último en la sección crítica sea menor que el momento resistente en dicha sección. Inmediatamente, se presenta un resumen de las expresiones de las NTC-DCEC (2004) para la revisión por flexión.

El momento resistente en una sección sobreforzada está dado por:

$$M_R = F_R b d^2 f_c'' q (1 - 0.5 q) \quad (4.9)$$

$$q = p \frac{f_y}{f_c''}$$

el acero mínimo por flexión vale:

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{\frac{f_c'}{f_y}} \quad (4.10)$$

mientras que, el máximo es $0.75 p_b$, donde, p_b , es el porcentaje balanceado que vale:

$$p_b = \left(\frac{f_c'}{f_y} \right) \left[\frac{4800}{(f_y + 6000)} \right] \quad (4.11)$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^*, \quad \text{si} \quad f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (4.12 a)$$

$$f_c'', \left(1.05 - \frac{f_c^*}{250} \right), \quad \text{si} \quad f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (4.12 b)$$

la cuantía de acero necesaria para resistir un momento último, M_u , se obtiene haciendo $M_u = M_R$ en la ecuación 4.9 y despejando, q :

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{F_R b d^2 f_c''}} \quad (4.13)$$

pero:

$$q = p \frac{f_y}{f_c''} \quad (4.14)$$

$$A_s = p b d \quad (4.15)$$

la separación de las varillas se obtiene de la siguiente forma:

$$s = \frac{a_s g}{A_s}$$

donde:

- s : es la separación entre varillas.
- a_s : es el área de la varilla que se emplea.
- g : es la distancia para la que se requiere el área A_s .
- A_s : es el área de acero requerida.

Por otra parte, en la dirección del lado corto de una zapata rectangular se concentran los momentos flexionantes cerca de la columna, por lo que el refuerzo paralelo al lado corto deber ser mayor en la parte central (Meli, 1985). En la figura 4.7, se muestra la forma como debe colocarse el refuerzo; en la franja central de ancho B , se coloca una fracción igual a $2B/(L+B)$ de la cantidad total de refuerzo para el largo L , mientras que, el resto se reparte en las franjas laterales. Así, A_s es el área de acero por metro de longitud de la zapata, la cantidad total de refuerzo $A_s' = A_s L / 100$ y las separaciones del refuerzo en las franjas están dadas por.

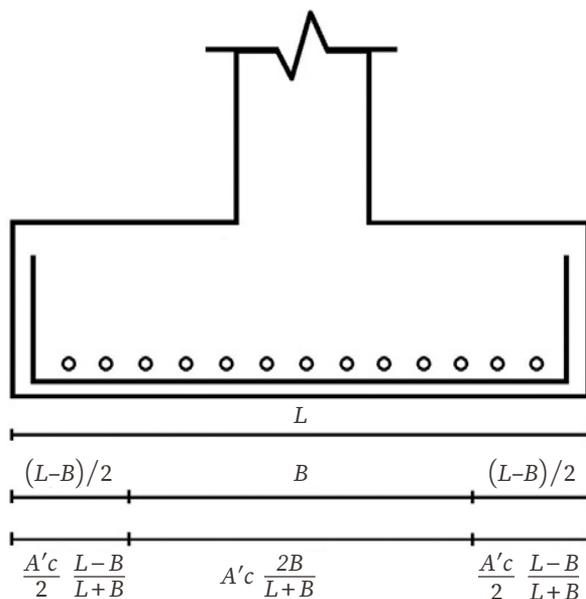
En la franja central de ancho B :

$$s = \frac{a_s (B+L)}{2 A_s'} = \frac{100 a_s (B+L)}{(2 A_s L)} \quad (4.16 a)$$

en las franjas laterales:

$$s = \frac{a_s(B+L)}{A_s'} = \frac{100 a_s(B+L)}{(A_s L)} \quad (4.16 b)$$

Figura 4.7. Distribución del acero de esfuerzo en el lado largo (Meli, 1985)



Áreas de acero en cada franja

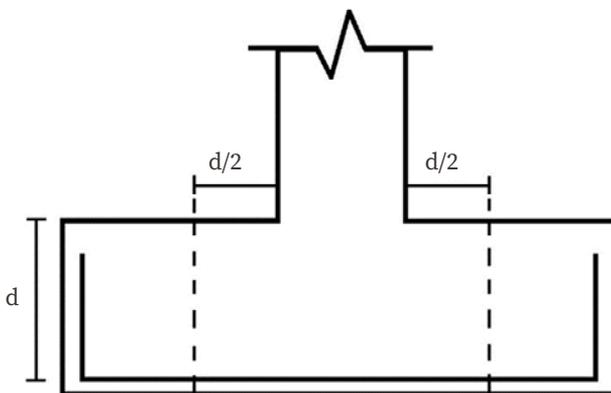
4.2.3. Penetración

De acuerdo con las NTCDCCEC: «...la sección crítica forma una figura semejante a la definida por la periferia del área cargada, a una distancia de esta, igual a $d/2$, siendo d el peralte efectivo de la losa...»⁵¹, (figura 4.8).

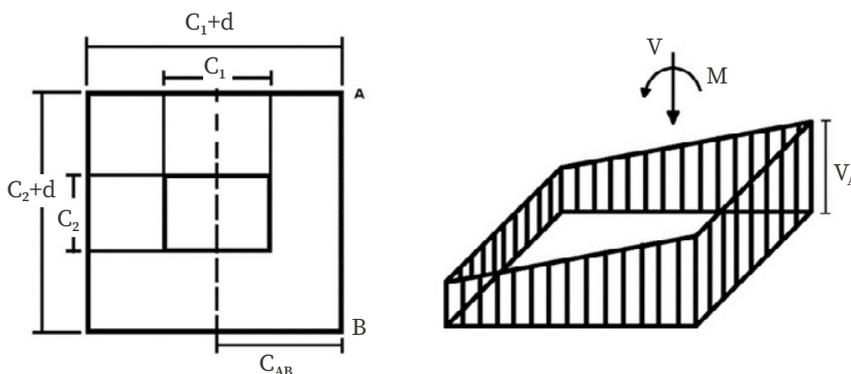
⁵¹ *Ibíd.*

Figura 4.8. Obtención del esfuerzo cortante máximo de diseño, v_u .

NTCDCEC
(Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto) 2004



Sección crítica por penetración



Transmisión del momento entre una columna y zapata

Cuando haya transferencia de momento, se supondrá que una fracción de momento está dada por:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{\frac{c_1 + d}{c_2 + d}}} \quad (4.17)$$

la cual se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total, con respecto al centroide de la sección crítica definida antes. El esfuerzo cortante máximo de diseño, v_u , se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente (figura 4.8), es decir:

$$V_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha M_{CAB}}{J_c} \quad (4.18)$$

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d) \quad (4.19)$$

$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)d^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2} \quad (4.20)$$

En columnas rectangulares, c_1 es la dimensión paralela al momento transmitido y c_2 es la dimensión perpendicular a c_1 .

En las expresiones anteriores, V es la fuerza cortante que actúa en toda el área de la sección crítica, la cual la obtenemos a partir de la reacción neta, q_v , restando a la reacción del terreno las presiones debidas al peso propio de la zapata y relleno.

El esfuerzo cortante de diseño, v_{Abu} , (esfuerzo cortante último) obtenido con los criterios anteriores, no debe exceder ninguno de los dos siguientes valores:

$$V_{cR1} = F_R(0.5 + \gamma) \sqrt{f_c^*} \quad (4.21)$$

$$V_{cR2} = F_R \sqrt{f_c^*} \quad (4.22)$$

$$f_c^* = 0.8f_c' \quad (4.23)$$

a menos que, se suministre refuerzo. γ es la relación del lado corto al lado largo del área donde actúa la carga o reacción.

4.2.4. Temperatura

Cuando el espesor de la zapata es mayor que 15 cm, se requiere colocar acero por temperatura en la porción sometida a compresión (donde no se requiere acero por motivos estructurales). Para lo anterior, se emplea la siguiente ecuación:

$$A_s = \frac{66\,000 (h/2)}{f_y (h/2 + 100)} \quad (4.24)$$

donde:

A_s = es el área de acero requerida por temperatura para un espesor $h/2$ de la losa de la zapata en cm^2/m .

$h/2$ = es el semiespesor de la losa de la zapata en cm.

Cuando el elemento estructural está en contacto con el suelo, se recomienda emplear por temperatura un área de acero igual a $1.5 A_s$; si empleamos $1.5 A_s$ en vez de A_s en la ecuación 4.24, porque los cimientos están siempre en contacto con el terreno, obtenemos la siguiente expresión:

$$A_s = \frac{99\,000 (h/2)}{f_y (h/2 + 100)} \quad (4.25)$$

Diseño estructural de una zapata rectangular

Ejemplo 4.1

Se debe hacer el diseño estructural de la zapata rectangular de concreto reforzado de la figura 4.9.

Columna de 25 por 30 cm.

Zapata de 1.7 por 2 m; espesor losa zapata = 30 cm.

Profundidad de desplante = 60 cm.

Estimar en el concreto reforzado $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$.

$$\Sigma Q' = 26 \text{ t}, M_y = 4.2 \text{ t-m}, M_x = 6.8 \text{ t-m}$$

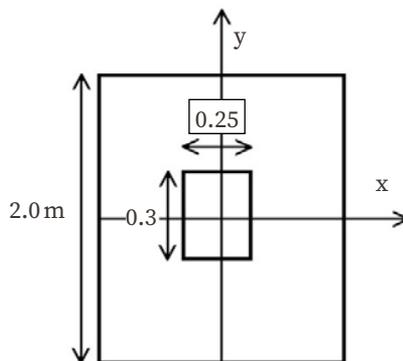
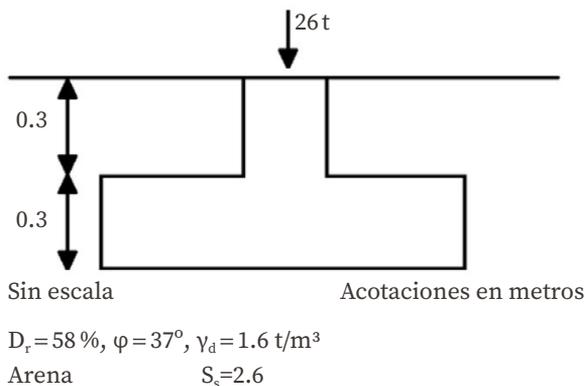


Figura 4.9.

Suelo friccionante



La sumatoria de cargas al nivel de desplante vale:

$$\begin{aligned} \Sigma Q &= 26 + 1.7(2)(0.3) 2.4 + 0.25(0.3)(0.3)(2.4) + [(1.7(2) - 0.25(0.3))] (0.3)(1.6) = \\ &= 30.098 \text{ t} \end{aligned}$$

$$e_x = \frac{M_y}{\Sigma Q} = 4.2 / 30.098 = 0.1395 \text{ m}$$

$$e_y = \frac{M_x}{\Sigma Q} = 6.8 / 30.098 = 0.2259 \text{ m}$$

$$B' = B - 2e_x = 1.421 \text{ m}, \quad L' = L - 2e_y = 1.5482 \text{ m}$$

La presión de contacto media entre el cemento y terreno vale:

$$q = 30.098 / 1.7(2) = 8.852 \text{ t/m}^2$$

a) Penetración

De acuerdo con las NTCDCEC: «...la sección crítica forma una figura semejante a la definida por la periferia del área cargada, a una distancia de esta igual a $d/2$, siendo d el peralte efectivo de la losa...»⁵², (figura 4.8).

Ahora, revisaremos la penetración de la columna en la dirección del eje y . Cuando haya transferencia de momento, se supondrá que una fracción de momento dada (ecuación 4.17) es:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{\frac{c_1 + d}{c_2 + d}}}$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 0.67 \sqrt{\frac{0.3 + 0.264}{0.25 + 0.264}}} = 0.412$$

la cual se transmite por la excentricidad de la fuerza cortante total, con respecto al centroide de la sección crítica antes definida. El esfuerzo cortante máximo de diseño, v_u , se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente (figura 4.8), es decir:

$$V_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha M_{CAB}}{J_c} \quad (\text{ecuación 4.18})$$

⁵² *Ibíd.*

$$A_c = 2d(c_1 + c_2 + 2d) \quad (\text{ecuación 4.19})$$

$$A_c = 0.5692 \text{ m}^2$$

$$J_c = \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{d(c_1 + d)^3}{6} + \frac{d(c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2} \quad (\text{ecuación 4.20})$$

$$J_c = 0.031206 \text{ m}^4$$

En columnas rectangulares, $c_1 = 0.3 \text{ m}$ es la dimensión paralela al momento transmitido y $c_2 = 0.25 \text{ m}$ es la dimensión perpendicular a c_1 .

En las expresiones anteriores, V es la fuerza cortante que actúa en toda el área de la sección crítica, la cual la obtenemos a partir de la reacción neta, q_v , restando a la reacción del terreno las presiones debidas al peso propio de la zapata y relleno.

$$\begin{aligned} q_v &= 8.852 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 7.652 \text{ t/m}^2 \\ V &= 7.652 [1.7(2) - (0.25 + 0.264)(0.3 + 0.264)] = 23.799 \text{ t} \\ c_{AB} &= (0.3 + 0.264)/2 = 0.282 \text{ m} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación 4.2, se tiene:

$$\begin{aligned} v_{AB} &= 23.799 / 0.5692 + 0.412(6.8)(0.282) / 0.031206 = 67.13 \text{ t/m}^2 \\ v_{ABu} &= F_c v_{AB} = 1.4(67.13) = 93.98 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

el esfuerzo cortante de diseño, v_{ABu} , (esfuerzo cortante último) que fue obtenido con los criterios anteriores no debe exceder ninguno de los dos siguientes valores:

$$V_{cRI} = F_R(0.5 + \gamma)\sqrt{f_c^*} \quad (\text{ecuación 4.21})$$

$$V_{cR1} = 0.8(0.5 + 1.7/2)\sqrt{160} = 13.66 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{cR2} = F_R \sqrt{f_c^*} \quad (\text{ecuación 4.22})$$

$$V_{cR2} = 0.8 \sqrt{160} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^* = 0.8f_c' \quad (\text{ecuación 4.23})$$

a menos que, se suministre refuerzo. $\gamma = 1.7/2 = 0.85$ es la relación del lado corto al lado largo del área donde actúa la carga o reacción.

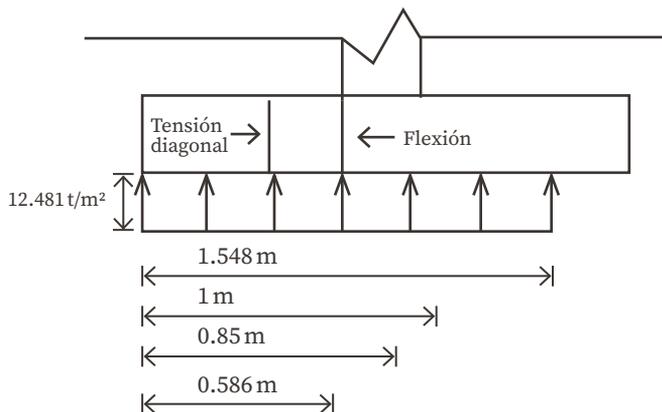
se observa que:

$$V_{ABu} = 9.40 \text{ kg/cm}^2 < V_{cR2} = 10.12 \text{ kg/cm}^2 \quad \therefore \text{cumple}$$

b) Tensión diagonal

La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia, d , del paño de la columna. Haremos la revisión en la dirección del eje y . Para lo anterior, se calcula el cortante último en esta sección y se compara con el cortante resistente del concreto (figura 4.10).

Figura 4.10.
Secciones críticas por tensión diagonal y por flexión



Cálculo del cortante último:

Las fuerzas se calculan con la reacción neta del terreno (tomando en cuenta el efecto de los dos momentos M_x y M_y). La reacción vale (ecuación A):

$$q' = \frac{\Sigma Q}{B' L'} = 30.098 / 1.421(1.5482) = 13.681 \text{ t/m}^2$$

la reacción neta para fines estructural es $q'_n = 13.681 - 0.3(2.4) - 0.3(1.6) = 12.48 \text{ t/m}^2$

Ahora, hallemos el cortante y el momento en la sección crítica por tensión diagonal (en un ancho unitario de zapata, $b = 1 \text{ m}$), si tenemos:

$$\begin{aligned} V &= 12.48 (0.586) &= 7.31 \text{ t} \\ M &= 12.48 (0.586)^2 / 2 &= 2.14 \text{ t-m} \\ V_u &= 1.4 (7.31) &= 10.24 \text{ t} \end{aligned}$$

Según las NTCDCEC: «...en elementos anchos como son las zapatas, en los que el ancho B no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($B \geq 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación $M/(Vd)$ no exceda de 2.0, la fuerza resistente V_{cr} puede tomarse igual a $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$, independientemente, de la cuantía de refuerzo».⁵³

Ya que trabajamos por metro de ancho de zapata, $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ y como se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm y puesto que el diámetro de la varilla del núm. 4 es de 1.27 cm, el peralte efectivo del acero de la zapata es $d = 30 - 3.6 \text{ cm} = 26.4 \text{ cm}$.

⁵³ *Ibíd.*

En este caso, se cumple que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo:

$$B > 4d, B = 170 \text{ cm} > 4d = 105.6 \text{ cm}$$

$$\frac{M}{Vd} = 0.011 < 2$$

∴ cumple como elemento ancho

$$V_{CR} = 0.5F_R (bd) \sqrt{f_c^*} = 0.5(0.8)(100)(26.4)\sqrt{160} = 13\,357 \text{ kg}$$

$$V_{CR} = 13\,357 \text{ kg} > V_u = 10\,440 \text{ kg}$$

∴ cumple

c) Acero por flexión

Posteriormente, haremos el diseño por flexión en la dirección del eje y . El momento flexionante en la sección crítica vale (figura 4.10):

$$M = 12.48 (0.85)^2 / 2 = 4.51 \text{ t-m}$$

$$M_u = 1.4 (4.51) = 6.312 \text{ t-m}$$

el acero mínimo por flexión es el siguiente:

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{\frac{f_c'}{f_y}} \quad (\text{ecuación 4.10})$$

$$p_{min} = 0.7 \sqrt{\frac{200}{4200}} = 0.00236$$

mientras que la cuantía máxima es $0.75 p_b$, donde, p_b es el porcentaje balanceado.

$$p_b = \left(\frac{f_c''}{f_y} \right) \left[\frac{4800}{(f_y + 6000)} \right] \quad (\text{ecuación 4.11})$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^*, \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ecuación 4.12 a})$$

$$f_c'' = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1250} \right), \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{ecuación 4.12 b})$$

$$p_{m\acute{a}x} = 0.01143$$

La fracci3n de acero necesaria para soportar un momento 3ltimo, M_u , est3 dada por la siguiente expresi3n:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{F_R b d^2 f_c''}} \quad (\text{ecuaci3n 4.13})$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(6.312 \times 10^5)}{0.9(100)(26.4^2)136}} = 0.07695$$

$$p = q \frac{f_c''}{f_y} \quad (\text{ecuaci3n 4.14})$$

$$p = 0.002492$$

$$A_s = p b d \quad (\text{ecuaci3n 4.15})$$

$$A_s = 6.578 \text{ cm}^2$$

la separaci3n de las varillas es:

$$s = \frac{a_s g}{A_s} \quad (\text{ecuaci3n 4.16})$$

donde:

a_s : es el área de la varilla que se emplea = 1.27 cm^2 (núm. 4).

g : es la distancia para la cual se requiere el área de acero A_s ,
 $g = 100 \text{ cm}$.

A_s : es el área de acero requerida = 6.578 cm^2 .

Al sustituir valores, $s = 19 \text{ cm}$; en consecuencia, se necesitan varillas del núm. 4 a cada 19 cm en el lecho inferior (figura 4.11).

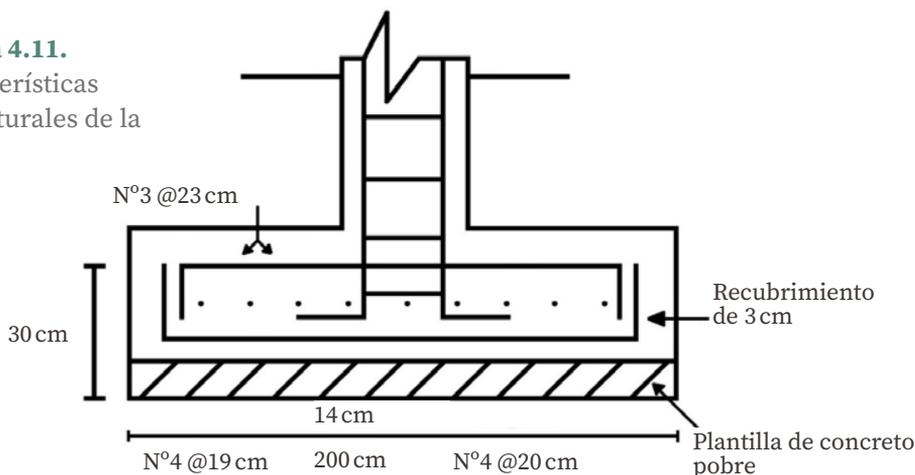
Si procedemos en forma similar, se requiere $A_s = 4.403 \text{ cm}^2$ en la dirección del lado largo de la zapata (eje x); en esta dirección, debemos concentrar el refuerzo en la franja central de la zapata. Aplicando las ecuaciones 4.16 a y 4.16 b, se tiene lo siguiente.

Franja central: $s = 26 \text{ cm}$

Franjas laterales: $s = 53 \text{ cm}$

La separación mínima por flexión cuando se aplica la ecuación 4.10 resulta de 20 cm , por lo que usaremos $s = 20 \text{ cm}$ en la franja central y 30 cm en las franjas laterales (figura 4.11).

Figura 4.11.
Características estructurales de la zapata



d) Acero por temperatura

El acero del lecho superior se proporciona por temperatura para lo cual, se emplea la siguiente expresión de las NTCDCCEC (2004):

$$A_s = \frac{66\,000 (h/2)}{f_y (h/2 + 100)} \quad (\text{ecuación 4.24})$$

donde:

A_s = es el área de acero necesaria por temperatura en cm^2/m para el semiespesor de losa $h/2$.

$h/2$ = es el semiespesor de la losa de la zapata = $30/2 = 15$ cm.

Sustituyendo valores, $A_s = 3.075 \text{ cm}^2$.

Cuando se aplica la ecuación 4.16 con varillas del núm. 3 ($a_s = 0.712 \text{ cm}^2$), $s = 23$ cm; por lo tanto, se necesitan por la temperatura varillas del núm. 3 a cada 23 cm en el lecho superior.

En la figura 4.11, se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

Diseño estructural de una zapata corrida

Ejemplo 4.2

El diseño de una zapata corrida es similar al de una zapata aislada con la diferencia que en aquella se debe dimensionar, además, la contratrabe de cimentación y en la zapata corrida no se hace la revisión por penetración.

Para ilustrar el proceso, hagamos el diseño estructural de la zapata corrida de concreto reforzado de la figura 4.12.

Primero, determinamos el momento de inercia de la zapata. El centro de gravedad queda a 26.09 cm de la base del cimiento (figura 4.12 a) y el momento de inercia con respecto a dicho centro de gravedad vale 0.02982 m^4 .

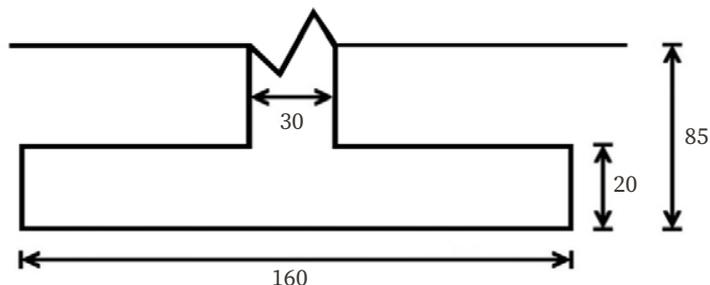
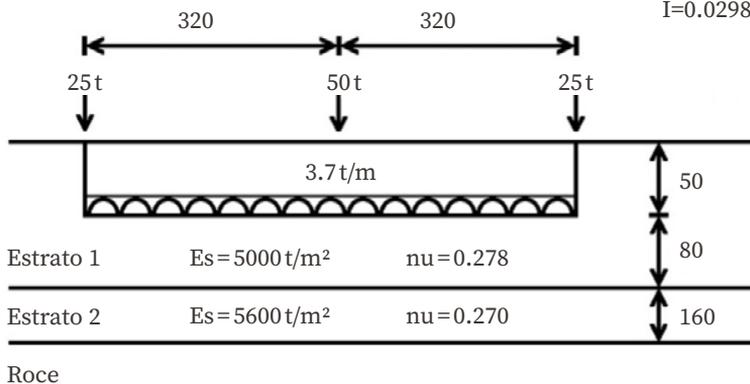


Figura 4.12.
Zapata corrida
de concreto
reforzado

a) Corte Transversal Distancias en centímetros
Croquis sin escala

En la estructura:
 $E=1,130.00 \text{ t/m}^2$
 $I=0.02982$



b) Corte Longitudinal

Para el análisis de interacción, dividimos cada contratrabe de 3.2 m de longitud en cuatro barras, lo cual da un total de ocho barras para las dos contratraves. Utilizando el procedimiento indicado en el capítulo anterior (interacción suelo-estructura), se obtienen los diagramas de reacción y de asentamientos mostrados en la figura 4.13.

Cuando se emplean las ecuaciones 3.71 a 3.74 del capítulo anterior, hallamos las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en los nudos de

las barras; con las ecuaciones 3.79 a 3.84, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante indicados en la figura 4.14.

Figura 4.13.
Diagramas de asentamientos y reacciones

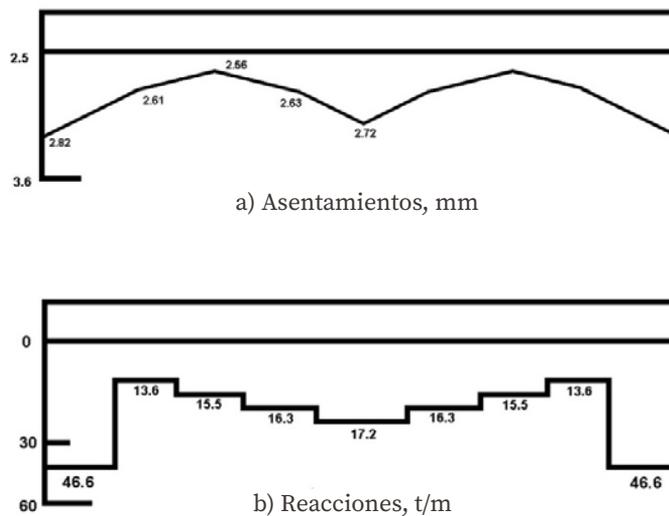
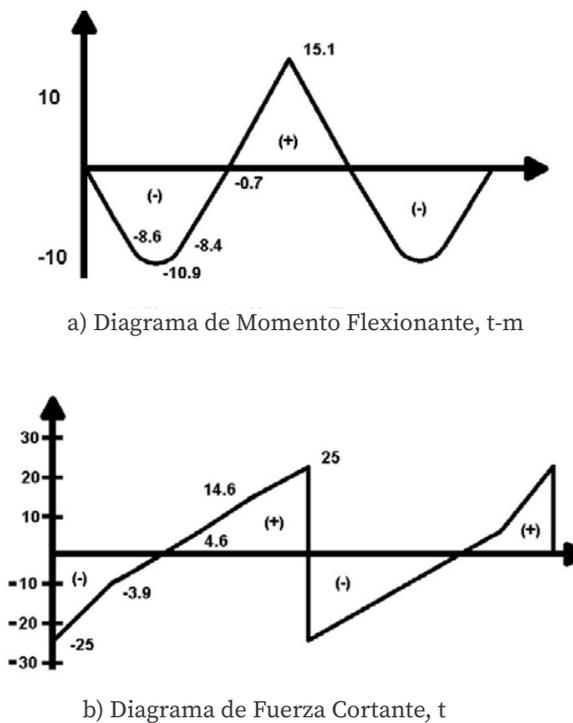


Figura 4.14.
Elementos mecánicos



Diseño estructural de contratrabe

Ejemplo 4.3

a) Acero por flexión

La fracción de acero necesaria para soportar un momento último, M_u , está dada por la siguiente expresión:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{F_R b d^2 f_c''}} \quad (\text{ecuación 4.13})$$

$$p = q \frac{f_c''}{f_y} \quad (\text{ecuación 4.14})$$

$$A_s = p b d \quad (\text{ecuación 4.15})$$

El cálculo del acero positivo (lecho inferior de la contratrabe) es el siguiente:

$$M_u = 15.2 + 10^5(1.4) = 21.28 \times 10^5 \text{ kg/cm}$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(21.28 \times 10^5)}{0.9(30)(81)^2 136}}$$

$$p = 0.003$$

$$A_s = 7.288 \text{ cm}^2$$

Usamos tres varillas del núm. 6.

El cálculo del acero negativo (lecho superior de la contratrabe) es el siguiente:

$$M_u = 10.5 \times 10^5 (1.4) = 14.7 \times 10^5 \text{ kg/cm}$$

$$p = 0.00204$$

$$A_s = 4.957 \text{ cm}^2$$

Usamos dos varillas del núm. 6.

Revisión por fuerza cortante.

La separación de los estribos verticales está dada por las NTCDCEC (2004):

$$s = F_R \frac{A_v f_y d}{(V_u - V_{cR})} \leq F_R \frac{A_v f_y}{3.5 b} \quad (4.26)$$

A_v es el área transversal del refuerzo por tensión diagonal comprendido en una distancia s . V_{cR} , se obtiene con las ecuación 4.6 o con la ecuación 4.7.

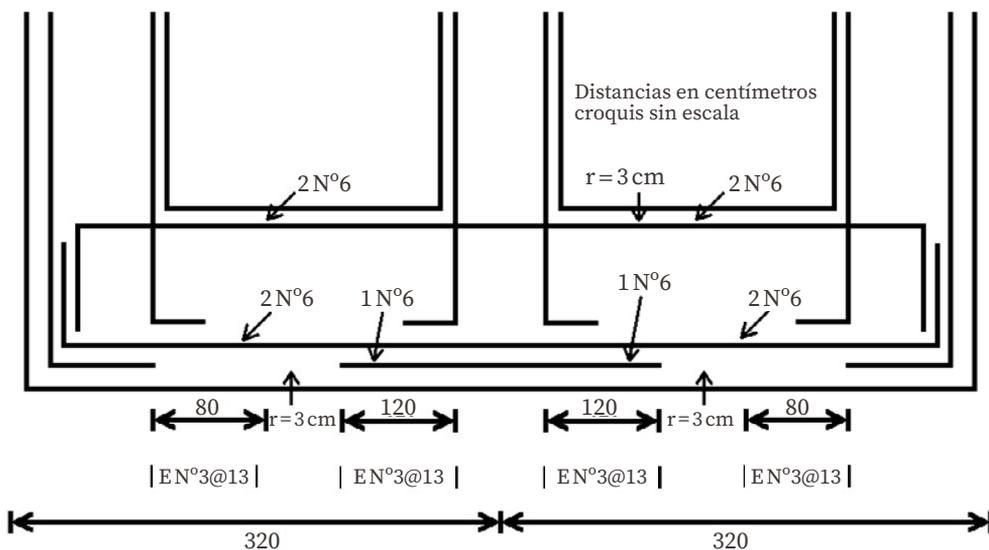
Se utilizarán como estribos varillas del núm. 3. Sustituyendo en la ecuación 4.26, se tiene:

$$s = 0.8(2)(0.712)(4\ 200)(81)/(35\ 000 - 7\ 115)$$

$$s = 13.9\text{ cm}$$

En la figura 4.15, se muestra el armado de la contratrabe.

Figura 4.15. Armado de la contratrabe de la zapata corrida



r: Recubrimiento Libre

Diseño estructural de la losa de la zapata

Ejemplo 4.4

a) Tensión diagonal

En la figura 4.13b, se muestran la variación de la reacción del terreno a lo largo de la zapata corrida. El valor de 46.6 t/m en los extremos de la estructura no lo tomamos para el diseño estructural de la zapata, porque se concentra bajo la carga de la columna y no se transmite a la zapata (de hecho, si utilizamos un mayor número de reacciones, los altos valores de estas, en los extremos, quedan exclusivamente bajo las columnas). Ahora, haremos el diseño estructural para la reacción de 17.2 t/m (figura 4.13).

La reacción del terreno en unidades de esfuerzo vale:

$$q = 17.2 / 1.6 = 10.75 \text{ t/m}^2$$

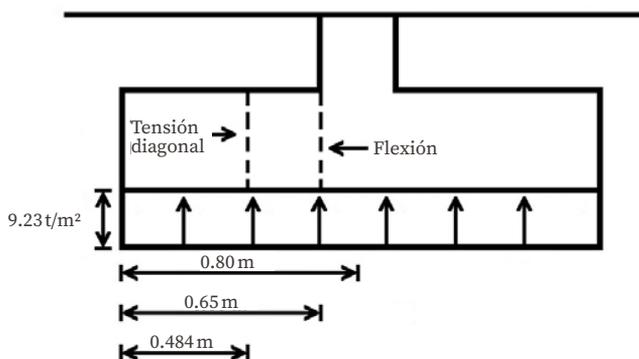
La reacción neta para fines estructurales es:

$$q_n = 10.75 - 0.2(2.4) - 0.65(1.6) = 10.75 - 1.52 = 9.23 \text{ t/m}^2$$

La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia, d , del paño de la columna y como trabajamos por metro de ancho de zapata, $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$. Ya que se cuela una plantilla de concreto pobre sobre el terreno, el recubrimiento del acero puede ser de 3 cm y puesto que el diámetro de la varilla del núm. 3 es de 0.712 cm, el peralte efectivo del acero de la zapata es $d = 20 - 3.4 \text{ cm} = 16.6 \text{ cm}$.

Enseguida, halleemos el cortante y el momento en la sección crítica por tensión diagonal (en un ancho unitario de zapata, $b = 1 \text{ m}$, figura 4.16).

Figura 4.16.
Secciones críticas
por tensión diagonal
y por flexión



$$\begin{aligned}
 V &= 9.23 (0.484) &= 4.467 \text{ t} \\
 M &= 9.23 (0.484)^2 / 2 &= 1.081 \text{ t-m} \\
 V_u &= 1.4 (4.467) &= 6.254 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Según las NTCDEEC: «...en elementos anchos, como son las zapatas, en los que el ancho B no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo d ($B > 4d$), con espesor hasta de 60 cm y donde la relación $M/(Vd)$ no exceda de 2.0, la fuerza resistente, V_{cr} , puede tomarse igual a $0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$, independientemente, de la cuantía de refuerzo...».⁵⁴

En este caso, se cumple que el ancho es mayor que cuatro veces el peralte efectivo:

$$B > 4d, \quad B = 320 \text{ cm} > 4d = 105.6 \text{ cm}$$

$$M/(Vd) = 1.458 < 2$$

∴ cumple como elemento ancho

$$V_{cr} = 0.5 F_R b d \sqrt{f_c^*}$$

$$V_{cr} = 0.5(0.8)(100)(16.6) \sqrt{160} = 8399 \text{ kg}$$

$$V_{cr} = 8399 \text{ kg} > V_u = 6254 \text{ kg}$$

∴ cumple

54 *Ibíd.*

b) Acero por flexión

El momento flexionante en la sección crítica vale (figura 4.16):

$$M = 9.23 (0.65)^2 / 2 = 1.9498 \text{ t-m}$$

$$M_u = 1.4 (1.9498) = 2.7298 \text{ t}$$

el acero mínimo por flexión es:

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{\frac{f_c'}{f_y}} \quad (\text{ecuación 4.10})$$

$$p_{\min} = 0.7 \sqrt{\frac{200}{4200}} = 0.00236$$

mientras que, la cuantía máxima es $0.75 p_b$ donde, p_b es el porcentaje balanceado:

$$p_b = \left(\frac{f_c''}{f_y} \right) \left[\frac{4800}{(f_y + 6000)} \right] \quad (\text{ecuación 4.11})$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^*, \quad \text{si } f_c^* \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = \left(1.05 - \frac{f_c^*}{1250} \right) f_c^*, \quad \text{si } f_c^* > 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{\max} = 0.01143$$

La fracción de acero necesaria para soportar un momento, M_u , está dada por la siguiente expresión:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{F_R b d^2 f_c''}} \quad (\text{ecuación 4.13})$$

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(2.798 \times 10^5)}{0.9(100)(16.6)^2(136)}} = 0.08450$$

$$p = q \frac{f_c''}{f_y} \quad (\text{ecuación 4.14})$$

$$p = 0.002736$$

$$A_s = p b d \quad (\text{ecuación 4.15})$$

$$A_s = 4.5423 \text{ cm}^2$$

la separación de las varillas es la siguiente:

$$s = \frac{a_s g}{A_s} \quad (\text{ecuación 4.16})$$

donde:

a_s : es el área de la varilla que se emplea = 0.712 cm^2 (núm. 3).

g : es la distancia para la que se requiere el área de acero A_s ,
 $g = 100 \text{ cm}$.

A_s : es el área de acero requerida = 4.542 cm^2 .

Sustituyendo valores $s = 15 \text{ cm}$; en consecuencia, se necesitan varillas del núm. 3 a cada 15 cm en el lecho inferior.

c) Acero por temperatura

El acero en dirección longitudinal de la zapata y el del lecho superior se proporcionan por la temperatura para lo cual, se emplea la siguiente expresión NTCDCEC (2004):

$$A_s = \frac{66\,000 (h/2)}{f_y (h/2 + 100)} \quad (\text{ecuación 4.25})$$

donde:

A_s : es el área de acero necesaria por temperatura en cm^2/m para el semiespesor de losa $h/2$.

$h/2$: es el semiespesor de la losa de la zapata $= 20/2 = 10 \text{ cm}$.

Sustituyendo valores $A_s = 2.143 \text{ cm}^2$

Cuando se aplica la ecuación 4.15 con varillas del núm. 3 ($a_s = 0.712 \text{ cm}^2$), $s = 33 \text{ cm}$; por lo tanto, usaremos varillas del núm. 3 a cada 30 cm por la temperatura.

En la figura 4.17 se muestra un croquis con las características estructurales de la zapata.

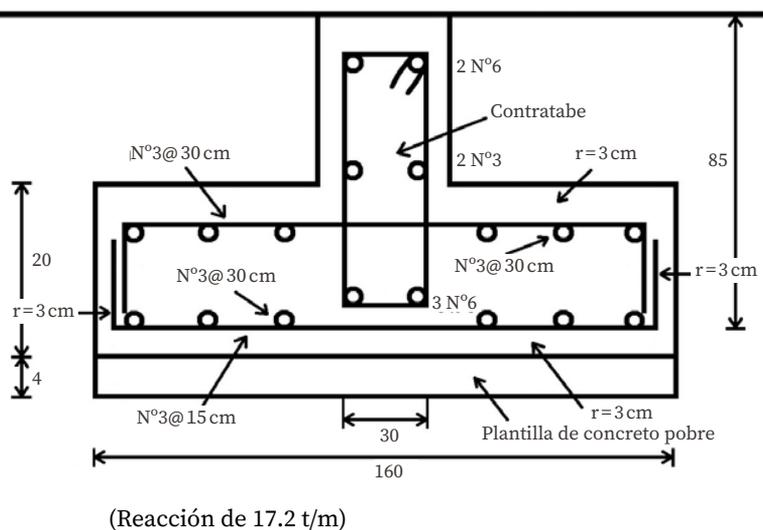


Figura 4.17
Armado de zapata
corrida

ANEXOS

CÁLCULO DEL ASENTAMIENTO DE UN CIMIENTO EN ARENA

Resumen

Para el cálculo del asentamiento de un cimiento apoyado en un depósito de arena, se presenta el siguiente procedimiento. Se utiliza una ecuación constitutiva no lineal que toma en cuenta el efecto de la presión de confinamiento con la magnitud de la rigidez del terreno. La ventaja de esta técnica es que al considerar la no linealidad del suelo, se hace uso de muy pocas propiedades mecánicas que, además, no cambian con la presión de confinamiento. El procedimiento se aplica al cómputo del asentamiento de un cimiento que puede estar apoyado sobre varios estratos de arena. Se incluye un ejemplo ilustrativo de este cálculo.

A.1. Introducción

Cada disciplina de la ingeniería civil tiene que desarrollar técnicas apropiadas a su propia especificidad. Tal es el caso de la mecánica de suelos, en la cual se tienen que encontrar las leyes que rigen el comportamiento de los medios granulares.

Un medio granular tiene la característica de que su rigidez (como medio) aumenta con la presión de confinamiento; además, en estos materiales la relación esfuerzo-deformación unitaria es, en general, no lineal. Por

lo tanto, debemos buscar procedimientos que tomen en cuenta estas características específicas de un medio granular.

Se presentará un procedimiento que trata de contemplar los factores citados en el párrafo anterior para el cálculo del asentamiento de un cimiento apoyado sobre un suelo friccionante. La ventaja de esta técnica es que permite computar dichas deformaciones con un número muy reducido de propiedades mecánicas.

A.2. Ecuación constitutiva

Confinamiento inicial

Para empezar, consideremos un elemento del suelo sometido al estado de esfuerzo por peso propio que se muestra en la figura A.1. La presión de confinamiento promedio inicial por peso propio del terreno vale:

$$p_{co} = \frac{p_{vo} + p_{ho} + p_{ho}}{3}$$

si

$$p_{ho} = K_o + p_{vo}$$

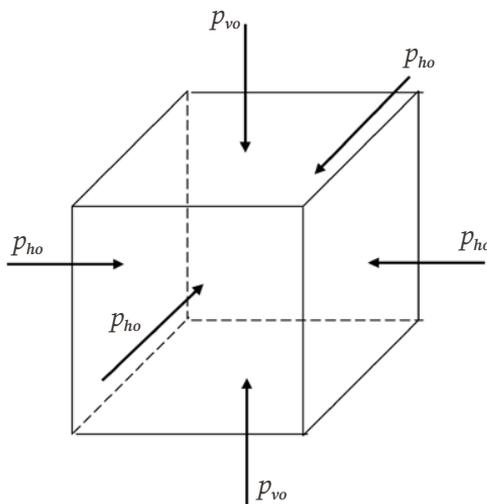
donde:

K_o : es el coeficiente de presión en reposo del suelo.

Entonces:

$$p_{co} = \frac{(1 + 2K_o)}{3} p_{vo} \quad (\text{A.1})$$

FIGURA A.1. Estado de esfuerzo por peso propio



Por otra parte, si el suelo tiene una cierta cohesión o cementación, nosotros podemos considerar que esta se debe a una presión de confinamiento interna intrínseca, la cual denominaremos P_{cie} . La presión de confinamiento inicial, P_{beo} , será la suma de la presión de confinamiento intrínseca, P_{cie} , más la presión externa por peso propio, P_{co} , es decir:

$$P_{beo} = P_{cie} + P_{co} \quad (\text{A.2})$$

Ecuación constitutiva para la estimación de la deformación de un elemento de suelo ocasionada por incrementos externos de esfuerzo

Juárez Badillo (1965) utiliza la siguiente expresión para el cálculo de la deformación volumétrica de los materiales:

$$\frac{dV}{V} = -\gamma \left(\frac{d\sigma}{\sigma} \right) \quad (\text{A.3})$$

donde:

V : es el volumen de un elemento de suelo.

σ : es el esfuerzo isotrópico sobre el elemento de suelo.

γ : es el parámetro que mide la compresibilidad volumétrica del material.

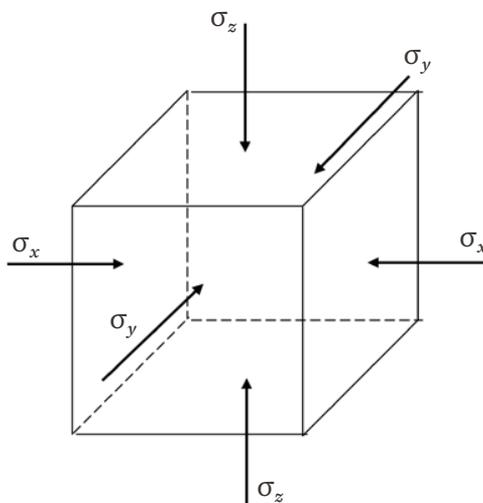
Ahora, en la expresión anterior vemos que tanto la deformación como el esfuerzo se *normalizan*.

A continuación, extenderemos el concepto de normalización para aplicarlo al cálculo de la deformación de un suelo friccionante.

Por otra parte, al construir una obra de ingeniería, se incrementan los esfuerzos sobre un elemento de suelo (figura A.2), donde σ_z , σ_x y σ_y son los incrementos del esfuerzo normal ocasionados por la presencia de la obra de ingeniería.

FIGURA A.2.

Incrementos de esfuerzo por una obra de ingeniería



Por un momento, supongamos que el confinamiento inicial, p_{be0} , (ecuación A.2) se mantiene constante. Demos incrementos de esfuerzo σ_z , σ_x y σ_y (figura A.2); entonces, podemos usar una variante de la ley de Hooke para el cálculo de la deformación unitaria:

$$\varepsilon \cong \frac{1}{A} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] r \quad (\text{A.4})$$

donde:

$(1/A)$: es el coeficiente de proporcionalidad entre el esfuerzo desviador y la deformación unitaria.

ν : es la relación de Poisson.

r : es un exponente que depende de la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria del suelo.

Al considerar que el espesor, Δz_0 , del elemento es suficientemente pequeño para que la relación entre el incremento del esfuerzo horizontal y el incremento del esfuerzo vertical sea constante, tenemos que:

$$a_1 = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \quad a_2 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_z} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_x = a_1 \sigma_z \quad \sigma_y = a_2 \sigma_z \quad (\text{A.6})$$

sustituyendo las ecuaciones A.5 y A.6 en la ecuación A.4, obtenemos:

$$\varepsilon \cong \frac{1}{A} \left\{ \sigma_z [1 - \nu (a_1 + a_2)] \right\} r \quad (\text{A.7})$$

$$\varepsilon \cong \frac{1}{A} (f \sigma_z) r \quad (\text{A.8})$$

$$f = 1 - \nu (a_1 + a_2) \quad (\text{A.9})$$

Por otra parte, como mencionamos antes, la deformación es la función inversa del esfuerzo de confinamiento; posteriormente, veamos cómo tomar en cuenta este efecto. Consideremos un elemento de suelo some-

tido a una presión de confinamiento inicial, p_{beo} , demos incrementos de esfuerzo σ_z , σ_x y σ_y , sobre el cuerpo, tal como, se ilustra en la figura A.2. Estos incrementos de esfuerzo ocasionan que la presión de confinamiento, p_{beo} , aumente en una cantidad, ΔP_{be} , dando lugar a un nuevo valor de p_{be} que es:

$$P_{be} = p_{beo} + \Delta P_{be} \quad (\text{A.10})$$

En términos generales, en mecánica de suelos se acepta que Δp_{be} sea igual al incremento del esfuerzo normal en el plano octaédrico, o sea, que es igual al promedio de los incrementos de esfuerzo:

$$\Delta P_{be} = \frac{1}{3} (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)$$

Para fines prácticos, podemos sustituir la cantidad de (1/3) por coeficientes, es decir:

$$\Delta P_{be} = b_1 \sigma_z + b_2 (\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{A.11})$$

donde, la experiencia actual es: $b_1 = 1/3$ y $b_2 = 1/3$

reemplazando las ecuaciones A.6 en la ecuación A.11, se tiene:

$$\Delta P_{be} = c \sigma_z \quad (\text{A.12})$$

en el cual:

$$c = b_1 + b_2 (a_1 + a_2) \quad (\text{A.13})$$

sustituyendo en la ecuación A.10:

$$P_{be} = P_{beo} + c \sigma_z \quad (\text{A.14})$$

Ahora, demos incrementos diferenciales de esfuerzo al elemento. Con los resultados anteriores, podemos plantear una ecuación constitutiva general, en la cual la deformación unitaria sea directamente proporcional a la variante de la ley de Hooke dada por la ecuación A.4 e inversamente proporcional a la presión de confinamiento dada por la ecuación A.14 (figura A.3). (Deméneghi, 1984).

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{A} \frac{\left(f \frac{\sigma_z}{Pa} \right)^r \times d \left(f \frac{\sigma_z}{Pa} \right)}{\left[\frac{(P_{beo} + c\sigma_z)}{Pa} \right]^s} \quad (\text{A.15})$$

donde:

A : es el módulo de rigidez del suelo.

r y s : son exponentes que dependen del tipo de suelo.

p_a : es la presión atmosférica = 101.3 kPa que se introduce con el fin de que el módulo A sea adimensional (Janbu, 1963).

La ecuación A.15 es una ecuación constitutiva diferencial general que podemos usar para calcular la deformación de un suelo para diferentes condiciones de carga.

A.3. Cálculo de la deformación de un elemento de suelo granular

Para el cálculo de la deformación vertical de un elemento de suelo de espesor Δz_0 (figura A.3), se puede usar la ecuación A.15 que corresponde a una ecuación constitutiva diferencial en un medio granular.

En suelos friccionantes, el exponente r varía entre 0 y 0.2. Para fines prácticos, podemos tomar $r=0$. La ecuación A.15 queda así:

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{A} \frac{d\left(f \frac{\sigma_z}{Pa}\right)}{\left[\frac{(P_{beo} + c\sigma_z)}{Pa}\right]^s} \quad (\text{A.16})$$

Integrar la ecuación A.16: al aumentar el esfuerzo normal vertical de 0 a σ_z , la altura del elemento cambia de la altura inicial Δz_o a la altura final Δz_f (figura A.3); por lo tanto, debemos integrar la ecuación A.16 de Δz_o a Δz_f en el primer miembro y de 0 a σ_z en el segundo miembro:

$$\int_{\Delta z_o}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\int_0^{\sigma_z} \frac{1}{A} \frac{d\left(f \frac{\sigma_z}{Pa}\right)}{\left[\frac{(P_{beo} + c\sigma_z)}{Pa}\right]^s} \quad (\text{A.17})$$

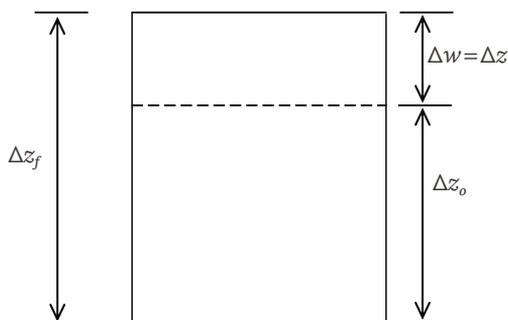
$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = e^{-\frac{f[(P_{beo} + c\sigma_z)^{1-s} - (P_{beo})^{1-s}]}{(1-s)c \times A \times Pa^{1-s}}} \quad (\text{A.18})$$

pero (figura A.3):

$$\Delta z_f = \Delta z_o + \Delta w \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_o} = 1 + \frac{\Delta w}{\Delta z_o}$$

Figura A.3. Deformación de un elemento de suelo de espesor inicial Δz_0



$$\frac{\Delta w}{\Delta z_0} = \frac{\Delta z_f}{\Delta z_0} - 1 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z_0} = e^{-\frac{f[(P_{beo} + c\sigma_z)^{1-s} - (P_{beo})^{1-s}]}{(1-s)c \times A \times Pa^{1-s}}} - 1 \quad (\text{A.21})$$

El desplazamiento Δw se mide hacia arriba. Para que el desplazamiento hacia abajo sea positivo, como es usual en mecánica de suelos, hagamos $\delta_z = -\Delta w$. La ecuación A.21 queda así:

$$\delta_z = \left\{ 1 - e^{-\frac{f[(P_{beo} + c\sigma_z)^{1-s} - (P_{beo})^{1-s}]}{(1-s)c \times A \times Pa^{1-s}}} \right\} \Delta z_0 \quad (\text{A.22})$$

La ecuación A.22 permite calcular la deformación vertical de un elemento de suelo friccionante de espesor Dz_0 que está sujeto a incrementos de esfuerzo σ_z , σ_x y σ_y . Cabe aclarar que, en suelos friccionantes el exponente s es del orden de 0.5.

Para fines prácticos, para el cómputo de la deformación de un suelo friccionante conviene emplear la ecuación A.22 con $s=0.5$ con el procedimiento que se indica enseguida.

El coeficiente K_0 se calcula con la siguiente expresión (Mayne y Kulhawy, 1982):

$$K_o = (1 - \text{sen } \varphi)(\text{OCR}) \text{sen } \varphi \quad (\text{A.23})$$

donde:

φ : es el ángulo de fricción interna.

OCR : es el (Overconsolidation Ratio, Coeficiente de Preconsolidación) del suelo en el campo.

La relación de Poisson, ν , se obtiene así:

$$\nu = \frac{K_o}{1 + K_o} \quad (\text{A.24})$$

El módulo de rigidez promedio, A_m , del suelo se determina a partir del número de golpes de la SPT (Standard Penetration Test, Prueba de Penetración Estándar) con la siguiente expresión aproximada:

$$A_m = 26.25 N^{1.125} \quad (\text{A.25})$$

el módulo desfavorable se calcula en función del nivel de confianza α con:

$$A = A_m C \quad (\text{A.26})$$

$$C = e^{-0.784 t_\alpha \sqrt{1.00758 + 0.0152(1 \text{ nN} - 2.976)^2}} \quad (\text{A.27})$$

donde:

t_α : es una variable t de *Student*, cuyos valores en función de α se muestran en la tabla A.1.

Cabe aclarar que, existe una probabilidad α de que el módulo A del suelo sea menor que el valor dado por la ecuación A.26.

Finalmente, la deformación δ_z de un estrato de suelo friccionante de espesor Δz , se obtiene usando la ecuación A.22.

Tabla A.1. Variable aleatoria t de Student

α (%)	2.5	5	10	15	20	25	30	40	50
$T\alpha$	1.978	1.657	1.288	1.041	0.844	0.676	0.526	0.254	0

A.4. Cálculo del asentamiento inmediato de una zapata rectangular

Ejemplo A.1

Se debe calcular el asentamiento de la zapata rectangular de concreto reforzado de la figura A.E-1.

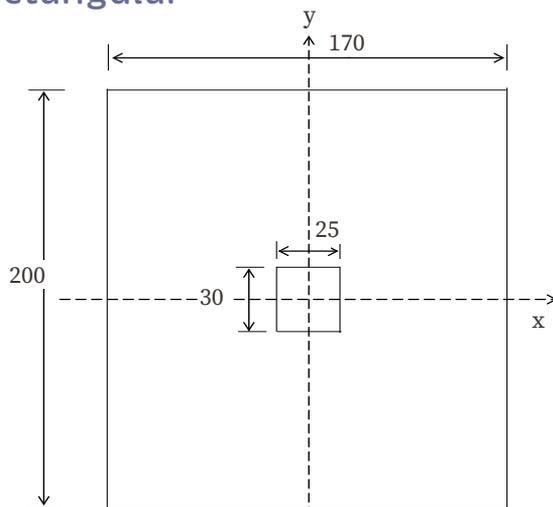
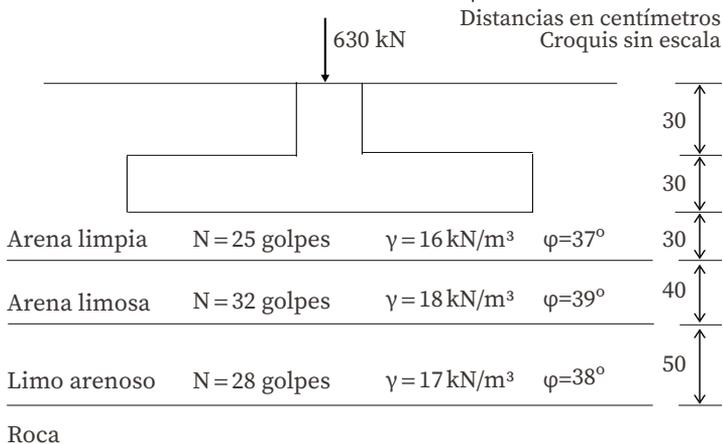


FIGURA A.E-1.

Ejemplo



Solución

La determinación de los incrementos de esfuerzo se lleva a cabo usando la presión de contacto entre el suelo y cimiento que en este caso vale $q = 197.35$ kPa.

En la tabla A.E-1, se exhibe el cómputo de las deformaciones de los tres estratos del suelo. Las presiones por peso propio y los incrementos de esfuerzo se obtienen a la mitad de cada estrato. Se usaron las ecuaciones A.22 a A.27.

Tabla A.E-1. $\alpha = 20\%$

Estrato	A	p_{vo}	K_o	ν	p_{beo}	σ_z	σ_x	σ_y	c	f	δz
		kPa			kPa	kPa	kPa	kPa			mm
1	504.92	12	0.398	0.285	7.185	196.71	117.05	119.40	0.734	0.658	1.02
2	665.95	18	0.371	0.270	10.448	180.11	53.09	47.82	0.520	0.848	1.36
3	573.39	25.85	0.384	0.278	15.240	134.84	15.81	11.33	0.400	0.944	1.80
										Suma	4.18

Ahora, ilustremos la aplicación del método no lineal con el cómputo de la deformación del estrato 1.

La presión vertical inicial a la mitad del estrato 1 es:

$$p_{vo} = 0.75(16) = 12 \text{ kPa}$$

$$K_o = 1 - \tan^2 37^\circ = 0.398$$

La relación de Poisson es: $\nu = \frac{K_o}{1 + K_o} = 0.398 / (1 + 0.398) = 0.285$

$$p_{co} = [(1 + 2(0.398)) / 3] (12) = 7.185 \text{ kPa}$$

Los incrementos de esfuerzo normal a la mitad del estrato valen:

$$\sigma_z = 96.71 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = 117.05 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = 119.40 \text{ kPa}$$

$$f = 1 - \nu (a_1 + a_2) = 1 - \nu \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{\sigma_z} \right]$$

$$f = 1 - 0.285 \left[\frac{(117.05 + 119.40)}{196.71} \right] = 0.657$$

$$c = b_1 + b_2 (a_1 + a_2) = b_1 + b_2 \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{\sigma_z}$$

$$c = 1/3 + (1/3) \left[\frac{(117.05 + 119.40)}{196.71} \right] = 0.734$$

$$A_m = 26.25 N^{1.125}$$

(ecuación A.25)

$$A_m = 26.25 (25)^{1.125} = 981.32$$

Para:

$$a = 20 \%$$

$$t\alpha = 0.844$$

(tabla A.1)

Reemplazando en la ecuación A.27, se tiene:

$$C = e^{-0.784(0.844)} \sqrt{1.00758 + 0.0152(1n\ 25 - 2.976)^2}$$

$$C = 0.515$$

$$A = C A_m = 0.515 (981.32) = 504.92$$

Sustituyendo valores en la ecuación A.22, se tiene:

$$\delta_z = \left\{ 1 - e^{-\frac{0.657 [(7.185 + 0.734(196.71)^{1-0.5} - (7.185)^{1-0.5}]}{(1-0.5)(0.734)(504.92)(101.3)^{1-0.5}}]} \right\} (0.3)$$

$$\delta_z = 0.001017 \text{ m} = 0.102 \text{ cm}$$

Para obtener la deformación de los estratos 2 y 3, se procede en forma similar. De acuerdo con la tabla A.E-1, sumando las deformaciones de los tres estratos con $\alpha = 20\%$, se encuentra un asentamiento total de $\delta z_T = 4.18 \text{ mm}$. Para $\alpha = 50\%$ (hundimiento promedio), se usa un procedimiento análogo y se halla $\delta z_T = 2.15 \text{ mm}$.

Finalmente, es interesante comparar estos asentamientos con el obtenido según las fórmulas de Steinbrenner (Terzaghi, 1943) y (Denver, 1985), el cual resulta de 4.4 mm muy similar a:

$$\delta z_T = 4.18 \text{ mm con } \alpha = 20\%$$

A.5. Conclusiones

Ya que la presión de confinamiento varía durante la construcción de una obra de ingeniería debido a un elemento del suelo, se plantea una ecuación diferencial constitutiva para el cálculo de la compresión del elemento, en la cual la deformación unitaria es, inversamente, proporcional a la presión de confinamiento (ecuación A.15).

La ecuación diferencial constitutiva se integra para el intervalo de variación de los incrementos de esfuerzo ocasionados por la obra de ingeniería, lo cual permite encontrar una expresión para el cómputo de la deformación de un estrato de arena (ecuación A.22).

Se presentó un ejemplo para el cálculo del asentamiento de una zapata aislada que está apoyada sobre tres estratos de suelo arenoso.

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

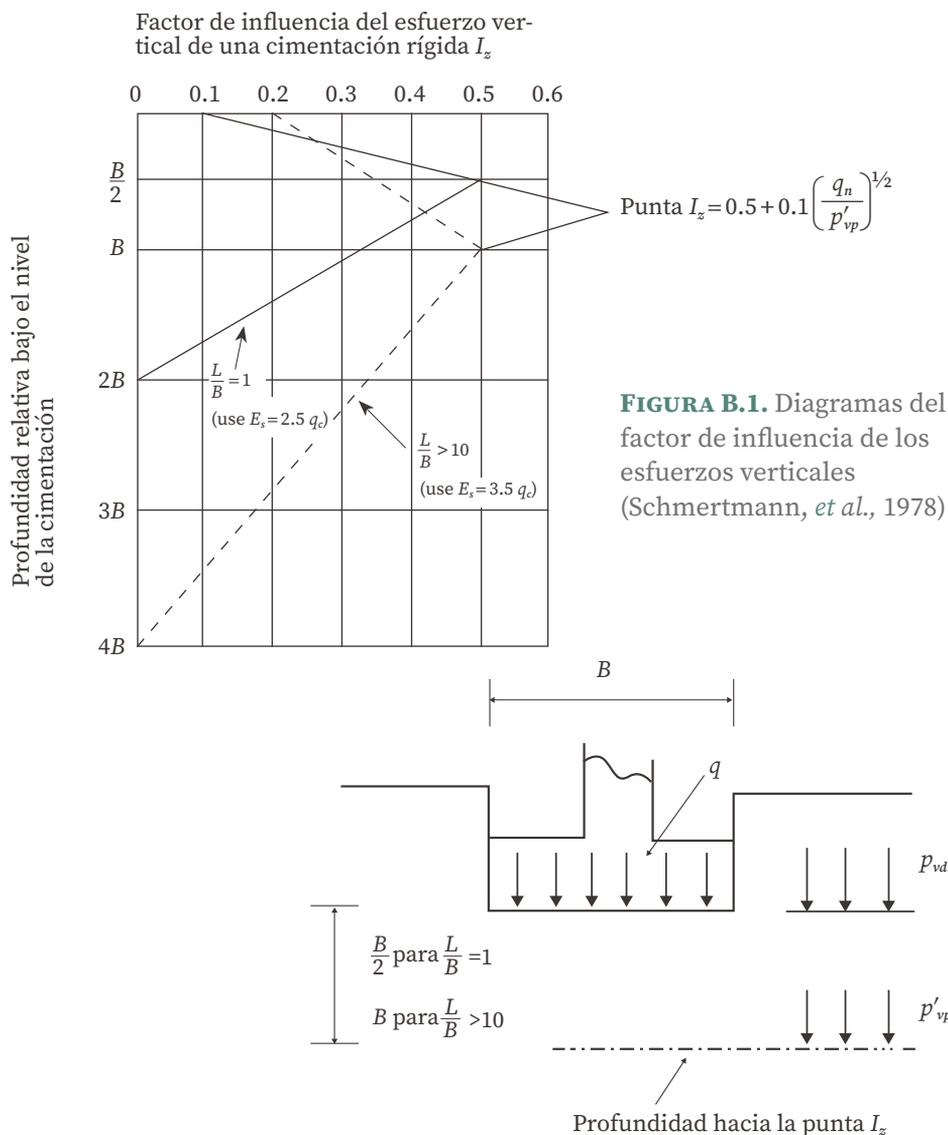
B. Cálculo de asentamientos en suelos friccionantes. Método de Schmertmann

El asentamiento de una zapata se calcula con la siguiente expresión (Schmertmann, 1970):

$$\delta = C_1 C_2 q_n \sum \left(\frac{I_z}{E_s} \right) \Delta z \quad (\text{B.1})$$

donde:

- q_n : es el incremento neto de carga = $q - p_{vd}$.
- q : es la presión de contacto entre el cimientto y terreno.
- p_{vd} : es la presión total inicial en el suelo, al nivel de desplante del cimientto.
- C_1 : es el coeficiente que toma en cuenta la profundidad de desplante.
 $= 1 - 0.5(p_{vd}/q_n) \geq 0.5$
- C_2 : es el coeficiente que toma en cuenta el flujo viscoso (*creep*) del suelo = $1 + 0.2 \log_{10}(t \text{ años}/0.1)$
- I_z : es el factor de influencia de la deformación unitaria vertical, cuyo valor se muestra en la figura B.1.



La máxima magnitud de I_z vale:

$$I_{zp} = 0.5 + 0.1 \left(\frac{q_n}{p'_{vp}} \right)^{1/2}$$

E_s = es el módulo de deformación del suelo.

$E_s = 2.5 q_c$ (zapata cuadrada, $L/B = 1$).

$E_s = 3.5 q_c$ (zapata corrida, $L/B > 10$).

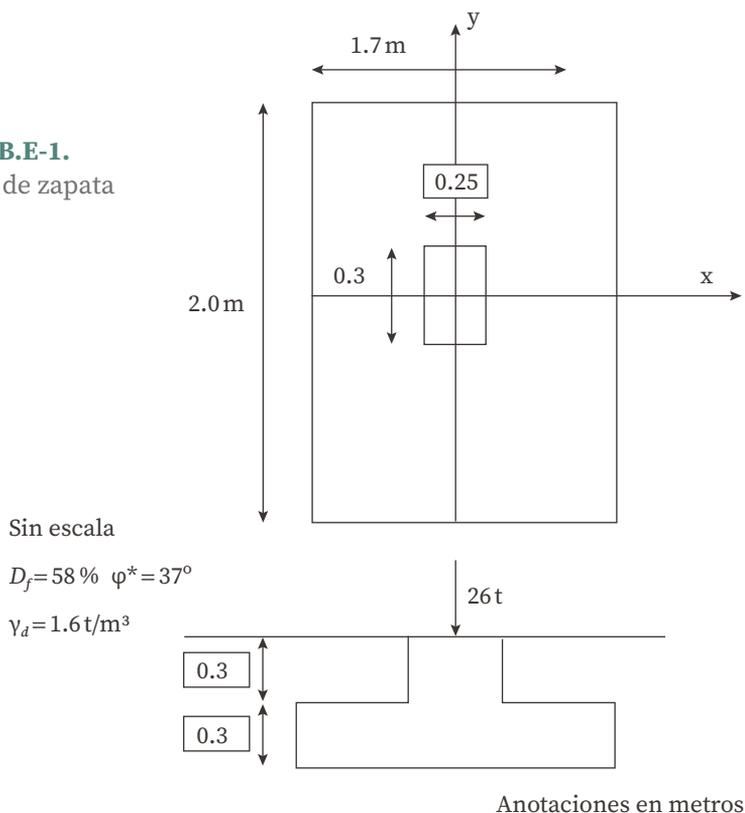
q_c = es la resistencia en la punta del cono.

B.1. Cálculo del asentamiento diferido de una zapata rectangular

Ejemplo B.1

En la figura B.E-1, calcular el asentamiento de la zapata de concreto reforzado para un tiempo de 5 años, si el número de golpes de la SPT fue de 15.

FIGURA B.E-1.
Ejemplo de zapata aislada



Solución

El subsuelo se dividió en estratos de 20 cm de espesor. En la tabla B.E-1, se presenta el cómputo del asentamiento para los tres primeros *estratos*. Para el cómputo del factor I_z , se utilizó la gráfica para una zapata cuadrada, ya que el cimiento de este ejemplo es muy cercano a ella.

Al tomar en cuenta las deformaciones de 17 estratos de 20 cm de espesor, hasta una profundidad de $2B = 3.4$ m bajo el nivel de desplante, se obtuvo un asentamiento total de 0.924 cm.

Tabla B.E-1. Cálculo del asentamiento

Estrato	z	I_z	$I_z \Delta z / Es$	δ
	m			m
1	0.1	0.1688	2.572×10^{-5}	0.0002554
2	0.3	0.3063	4.667×10^{-5}	0.0004635
3	0.5	0.4438	6.763×10^{-5}	0.0006716

$$q_n = 7.892 \text{ t/m}^2, q_c = 3.5 \text{ N} = 3.5 (15) = 52.5 \text{ kg/cm}^2, Es = 2.5 q_c = 1312.5 \text{ t/m}^2$$

$$C_1 = 1 - 0.5 (0.96 / 7.892) = 0.9392$$

$$C_2 = 1 + 0.2 \log_{10} (5 / 0.1) = 1.34$$

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Para empezar, consideremos una muestra de suelo sometido a una prueba de compresión triaxial; la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria es parecida a la de una hipérbola como se indica en la figura C.1. Kondner propone la siguiente expresión para el cómputo de la deformación (Duncan y Chang, 1970).

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{a + b\varepsilon} \quad (\text{C.1})$$

Enseguida, obtener los valores de a y b , derivando la ecuación C.1 con respecto a ε :

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{(a + b\varepsilon)^2}$$

el módulo tangente inicial es la pendiente de la curva esfuerzo-deformación unitaria cuando esta tiende a cero, es decir:

$$E_i = \left[\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \frac{1}{a}$$

la ecuación C.1 se puede poner en la forma:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{\frac{a}{\varepsilon} + b}$$

$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ se obtiene cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$ (figura C.1), es decir:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \frac{1}{b}$$

de lo anterior:

$$a = \frac{1}{E_i}$$

$$b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$$

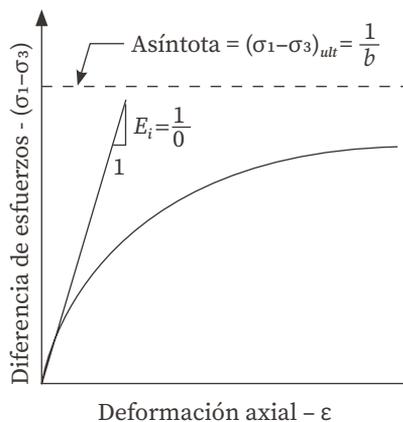


FIGURA C.1. Curva esfuerzo-deformación hiperbólica (Duncan y Chang, 1970)

La asíntota $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ es mayor que la resistencia a compresión $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ en una pequeña cantidad. La asíntota se puede relacionar con la resistencia mediante el factor R_f de la siguiente forma:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (C.2)$$

donde:

R_f : es un factor que varía entre 0.75 y 1.0

La ecuación C.1 se puede escribir así:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}} \quad (\text{C.3})$$

la deformación unitaria vale:

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{E_i \left[1 - R_f \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]} \quad (\text{C.4})$$

Estudios experimentales de Janbu (1963) han mostrado que la relación entre el módulo tangente inicial y la presión de confinamiento se puede expresar así:

$$E_i = E_{io} + K \cdot P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (\text{C.5})$$

donde:

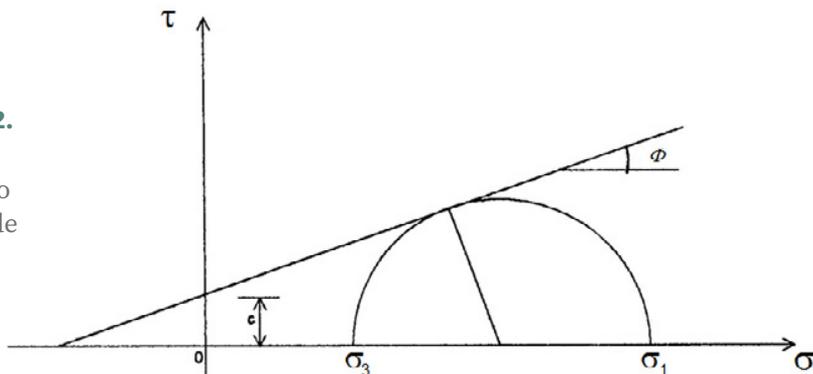
p_a : es la presión atmosférica = 10.3 t/m².

Si se considera que cuando la falla ocurre no se presenta cambio en σ_3 , la relación entre la resistencia a compresión y la presión de confinamiento, en función de la ley de resistencia de Mohr-Coulomb, se obtiene de la siguiente forma (figura C.2):

$$\text{sen } \varphi = \frac{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2}}{\frac{c}{\tan \varphi} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{2} + \sigma_3}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2(c \cdot \cos \varphi + \sigma_3 \text{ sen } \varphi)}{1 - \text{sen } \varphi} \quad (\text{C.6})$$

FIGURA C.2.
Obtención
del esfuerzo
desviador de
falla



El método de Kondner se puede aplicar al cálculo del asentamiento de un cimiento de la siguiente forma: en un elemento de suelo consideremos que el esfuerzo σ_3 es igual a la presión media de confinamiento:

$$\sigma_3 = p_3 = p_{co} + \frac{1}{6} (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{C.7})$$

con $\sigma_3 = p_3$, se obtiene el módulo tangente inicial E_i (ecuación C.5). El esfuerzo principal mayor es $\sigma_1 = p_{co} = \sigma_z$, por lo tanto:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_z - \frac{1}{6} (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{C.8})$$

la deformación unitaria ε se halla sustituyendo a $(\sigma_1 - \sigma_3)$ en la ecuación C.4. El módulo del suelo para este nuevo nivel de esfuerzo desviador es:

$$E_s = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\varepsilon} \quad (\text{C.9})$$

la deformación de un estrato de espesor h se calcula con la ley de Hooke:

$$\delta = \frac{h}{E_s} [(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))] \quad (\text{C.10})$$

En la tabla C.1, se muestran propiedades aproximadas del suelo que se pueden utilizar en la fórmula de Janbu (ecuación C.5) cuando se aplica el método de Kondner.

Tabla C.1. Valores aproximados de K y N de la fórmula de Janbu en suelos friccionantes cuando se aplica el método de Kondner

Estado	D_r	N	q_c	n	Normalmente cargado	Precargado
					K	
			kg/cm ²			
Muy suelto	< 0.2	< 4	< 20	0.65	< 220	< 670
Suelto	0.2-0.4	4-10	20-40	0.65-0.62	220-460	670-1 390
Medianamente compacto	0.4-0.6	10-30	40-120	0.62-0.58	460-1 280	1 390-3 840
Compacto	0.6-0.8	30-50	120-400	0.58-0.55	1 280-2 080	3 840-6 240
Muy compacto	> 0.8	> 50	> 400	0.55	> 2 080	> 6 240

D_r : es la compacidad relativa.

N : es el número de golpes en la SPT.

q_c : es la resistencia en la punta del cono holandés.

C.1. Cálculo del asentamiento de una zapata rectangular por el método de Kondner

Ejemplo C.1

En la figura C.E-1, calcular el asentamiento de la zapata utilizando el método de Kondner con las siguientes propiedades del suelo:

$K=665, n=0.61, R_f=0.9, f=37^\circ,$
 $K_o=0.398, \nu=0.285, \gamma=1.6 \text{ t/m}^3,$
 $N=15 \text{ golpes}$

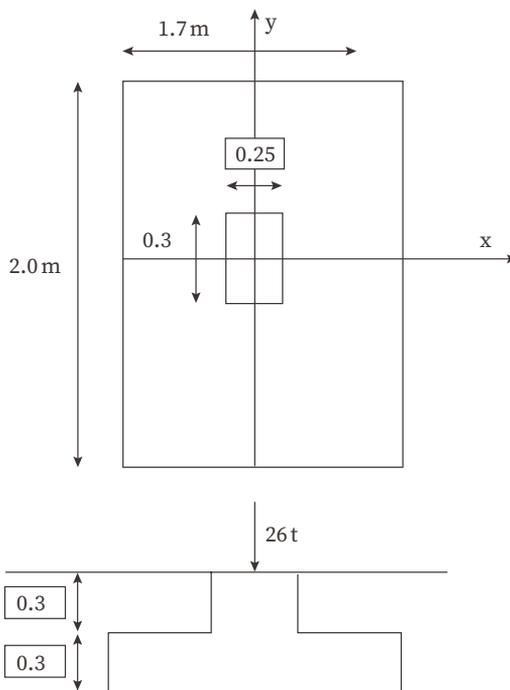
FIGURA C.E-1. Suelo friccionante

Sin escala

$D_f=58\%$ Arena

$\varphi^*=37^\circ$ Ss=2.6

$\gamma_d=1.6 \text{ t/m}^3$ Suelo friccionante



Anotaciones en metros

Solución

El subsuelo se dividió en *estratos* de 20 cm de espesor. En la tabla C.E-1, se presenta el cómputo del asentamiento para los tres primeros *estratos*.

Al tomar en cuenta las deformaciones de 17 estratos de 20 cm de espesor, hasta la profundidad de 3.4 m bajo el nivel de desplante, se obtuvo un asentamiento total de 0.60 cm.

Tabla C.E-1. Método de Kondner. Ejemplo

Estrato	Espesor	ρ_{vo}'	ρ_{co}'	σ_2	σ_x	σ_y	ρ_c	$(\sigma_1-\sigma_3)$	E_i	$(\sigma_1-\sigma_3)_f$	ϵ	E_s	δ
	m	t/m ²	t/m ²	t/m ²		t/m ²	m						
1	0.2	1.12	0.671	7.884	5.118	5.293	3.720	4.835	3680.098	11.245	0.002143	2255.914	0.000436
2	0.2	1.44	0.862	7.708	3.471	3.373	3.288	5.282	2142.714	9.938	0.002967	1780.287	0.000647
3	0.2	1.76	1.054	7.203	2.191	1.971	2.948	5.308	2004.824	8.911	0.003584	1481.301	0.000812

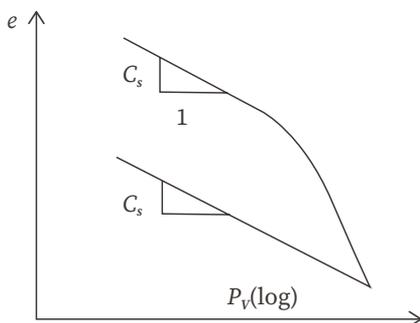
Una arcilla parcialmente saturada se encuentra sometida a dos clases de esfuerzos: (a) un esfuerzo total ($p_v - u_a$) que es debido a la presión externa sobre el suelo y (b) una succión ($u_a - u_w$) que es debida a un esfuerzo interno por efectos capilares. La variación de alguno de estos esfuerzos ocasiona una deformación del suelo o una reducción de su relación de vacíos.

Así, denominemos presión total-succión, p_{vs} , a la suma de los dos esfuerzos anteriores.

$$p_{vs} = (p_v - u_a) + (u_a - u_w)$$

En la figura D.1, se muestra una curva de compresibilidad, en la cual en el eje de las abscisas hemos trazado la presión p_{vs} .

El decremento de relación de vacíos del suelo es (figura D.1):



$$\Delta e = C_s \log \left(\frac{P_{vsf}}{P_{vso}} \right) \quad (D.1)$$

FIGURA D.1. Suelo cohesivo parcialmente saturado

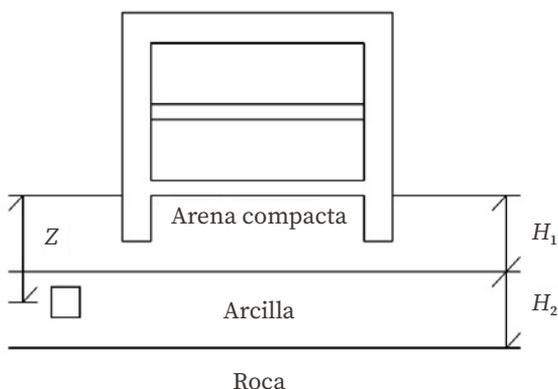
La deformación de un estrato de espesor H vale:

$$\Delta H = \left(\frac{\Delta e H}{1 + e_o} \right) \quad (\text{D.2})$$

Ahora, supongamos que deseamos valuar la deformación que sufre una estructura al variar la succión de la temporada de estiaje a la temporada de lluvias (figura D.2). Antes de la construcción de la estructura, la presión total vertical a la profundidad z vale $(p_{vo} - u_a)$; además, el suelo está sometido a una succión que vale $(u_a - u_{wo})$, por lo tanto, la presión total-succión inicial, p_{vso} , está dada por:

$$p_{vs} = (p_v - u_a) + (u_a - u_{wo}) \quad (\text{D.3})$$

FIGURA D.2.
Expansión de un estrato de arcilla



La construcción de la estructura produce un incremento vertical de carga $\Delta p = \sigma_z$. Si posteriormente la succión cambia a otro valor u_{wf} , la presión total-succión final será:

$$p_{vsf} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wf}) \quad (\text{D.3})$$

la expansión del estrato de arcilla la obtenemos con las ecuaciones D.1 y D.2:

$$\Delta e = C_s \log \left(\frac{p_{vsf}}{p_{vso}} \right)$$

$$\Delta e = C_s \log \left(\frac{(p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wff})}{(p_{vo} - u_a) + (u_a - u_{wo})} \right) \quad (D.5)$$

$$\Delta H = \left(\frac{\Delta e H}{1 + e_o} \right)$$

La valuación de p_{vso} se puede llevar a cabo con la realización de una prueba de *volumen constante* que consiste en aplicar una carga dada al suelo, para luego sumergir este en agua; la arcilla tiende a expandirse, por lo que, se incrementa la carga para evitar dicha expansión; el proceso se continúa hasta que el espécimen no muestra ya tendencia a expandirse. A partir de esta presión, la prueba se continúa en forma normal, cargando y descargando el suelo (figura D.3).

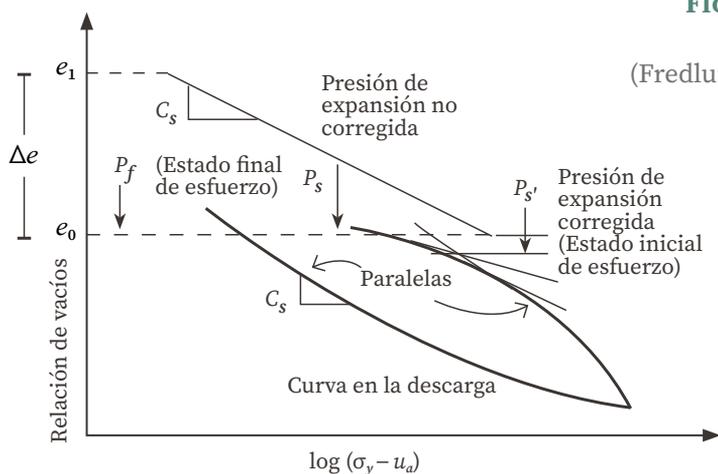


FIGURA D.3. Prueba de volumen constante (Fredlund y Rahardjo, 1993)

La presión *corregida* p_s' se logra de la siguiente forma (Fredlund y Rahardjo, 1993): se obtiene el punto de máxima curvatura donde la curva se acerca al tramo de recompresión (figura D.3). Trácese en este punto una recta horizontal y una recta tangente; la presión *corregida* se obtiene como la intersección de la bisectriz a las dos rectas anteriores y una recta paralela al tramo de descarga que fue trazada tangente a la curva de recompresión. En la práctica, se considera que $p_{vso} \cong p_s'$. Esta corrección se hace debido a efectos de la alteración del suelo al pasar del campo al laboratorio (Fredlund y Rahardjo, 1993).

La magnitud de u_{wf} se tiene que estimar para la condición más desfavorable en el campo. Un extremo puede ser, $u_{wf} \geq 0$, lo que implica que la presión en el agua puede ser igual o mayor que la presión atmosférica. Sin embargo, no necesariamente se presenta esta condición extrema, pues en sitios áridos con buen drenaje nunca se presenta una saturación completa del suelo. En este sentido, es conveniente realizar mediciones de campo durante varios años para tener valores estadísticos de las variaciones de la succión en cada localidad.

Se puede emplear el mismo criterio para valuar la contracción de la arcilla al pasar de la temporada de lluvias a la de estiaje. Considerando el mismo ejemplo, en la temporada de lluvias vale:

$$p_{vso} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wo})$$

en la época de estiaje, la succión vale $(u_a - u_{wf})$ y la presión final:

$$p_{vsf} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wf})$$

la contracción se obtiene aplicando las ecuaciones D.1 y D.2.

D.1. Cálculo de la deformación por el método de Fredlund y Rahardjo

Ejemplo D.1

La estructura de una planta es de 8 por 16 m, con $q=3 \text{ t/m}^2$. En el suelo (figura D.2): $C_s=0.09$, $e_o=1.9$. En una prueba de *volumen constante*: $p_s'=45 \text{ kg/cm}^2$ (en temporada de estiaje).

Al pasar a la temporada de lluvias, la succión se reduce a 5 kg/cm^2 . En temporada de estiaje, la succión aumenta de 5 a 44.8 kg/cm^2 .

Ahora, calcular los movimientos de la arcilla al pasar de la época de estiaje a la de lluvias y de esta a la de estiaje.

Solución

$$p_{vo} = 1.8 (0.6) + 1.5 (0.3) = 1.53 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma_z = 2.986 \text{ t/m}^2$$

Enseguida, calcular la expansión de la arcilla al pasar de la temporada de estiaje a la temporada de lluvias:

$$p_{vso} \cong p_s' = 45 \text{ kg/cm}^2$$

en la temporada de lluvias: $p_{vsf} = 0.153 + 0.299 + 5 = 5.452 \text{ kg/cm}^2$ y cuando se aplican las ecuaciones D.1 y D.2, se obtiene:

$$\Delta e = 0.09 \log (5.452/45) = -0.0825$$

$$\Delta H = \left(\frac{\Delta e H}{1 + e_o} \right) = -0.0825 (0.6) / (1 + 1.9) = -0.0171 \text{ m}$$

la arcilla se expande 1.7 cm.

Por último, calcular la contracción al pasar de la temporada de lluvias a la de estiaje:

$$p_{vso} = 5.452 \text{ kg/cm}^2$$

$$p_{vsf} = (p_{vo} - u_a) + \sigma_z + (u_a - u_{wf}) = 0.153 + 0.299 + 44.8 = 45.252 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Delta e = 0.0827$$

$$\Delta H = 0.0171 \text{ m}$$

la arcilla se contrae 1.7 cm.

Para el cálculo de las deformaciones, se pueden utilizar fórmulas obtenidas con la teoría de la elasticidad:

$$\delta_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) H \quad (\text{E.1})$$

donde:

σ_z : es el incremento del esfuerzo normal en dirección vertical a la mitad del estrato.

σ_x y σ_y : son los incrementos de esfuerzos normales en las direcciones horizontales a la mitad del estrato.

H : es el espesor del estrato.

δ_z : es la deformación en el estrato.

Por tanto, se requieren conocer los esfuerzos actuantes en el estrato. A continuación, se presentan algunos casos concretos en donde a partir de la distribución de la carga aplicada en la superficie del terreno, los esfuerzos pueden estimarse.

E.1. Carga uniformemente repartida en un rectángulo

La expresión para determinar los esfuerzos normales verticales, bajo la esquina de un rectángulo que es sometido a una carga uniforme q que es aplicada en la superficie, se observa enseguida (figura E.1):

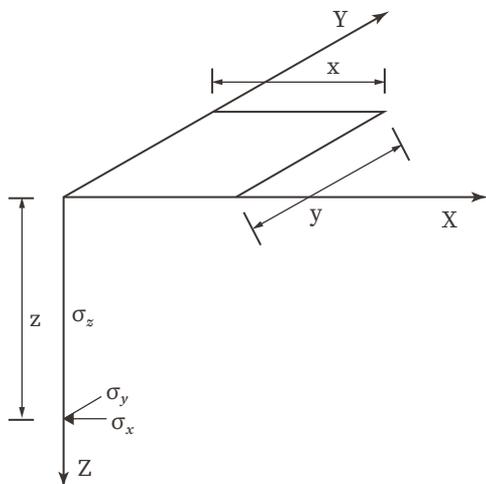


FIGURA E.1. Incrementos de esfuerzos normales, bajo la esquina de un rectángulo, que están sometidos a carga uniforme en un medio semiinfinito

Para σ_z (Damy, 1985):

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{A} + \tan^{-1} \frac{xy}{zA} \right] \quad (\text{E.2})$$

para σ_x y σ_y (Dashkó y Kagán, 1980):

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)A} - \tan^{-1} \frac{zA}{xy} + (1 - 2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yA}{xz} \right) \right] \quad (\text{E.3})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)A} - \tan^{-1} \frac{zA}{xy} + (1 - 2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{xA}{yz} \right) \right] \quad (\text{E.4})$$

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{E.5})$$

E.2. Carga uniformemente repartida en un círculo

Los esfuerzos normales bajo el centro de un círculo cargado están dados por (Yoder, 1967):

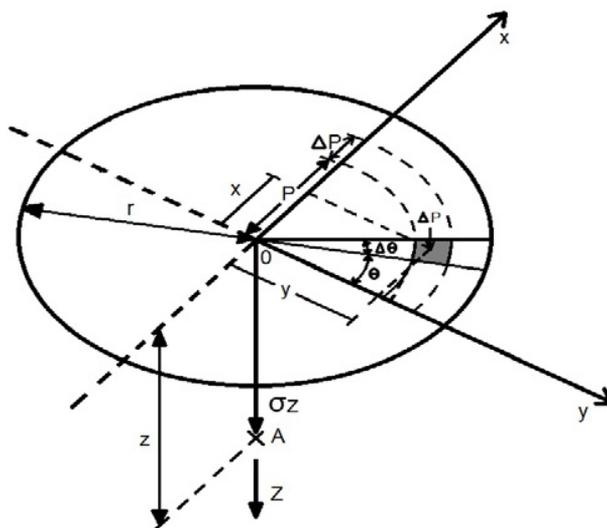
$$\sigma_z = q \left[\frac{1 - z^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (\text{E.6})$$

$$\sigma_r = \left(\frac{q}{2} \right) \left[\frac{1 + 2\nu - 2z(1 + \nu)}{(R^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (\text{E.7})$$

donde:

R : es del radio del círculo.

FIGURA E.2. Incrementos de esfuerzos normales, bajo el centro de un círculo, que están sometidos a carga uniforme en un medio semiinfinito



E.3. Carga triangular

Cuando la carga que se aplica en la superficie es de tipo triangular (figura E.3), se pueden utilizar las fórmulas de Hamilton Gray (Juárez Badillo y Rico, 1980).

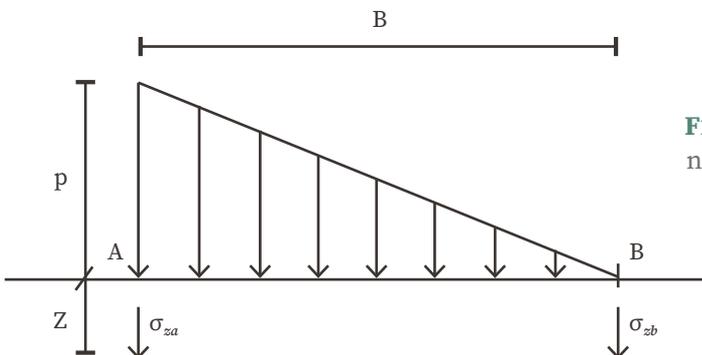


FIGURA E.3. Esfuerzos normales ocasionados por una carga triangular

Bajo el punto A:

$$\sigma_{zA} = \left[\frac{pL}{2\pi B} \right] \left[\frac{z(L^2 + B^2 + z^2)^{1/2}}{L^2 + z^2} - \frac{z}{(L^2 + z^2)^{1/2}} + \left(\frac{B}{L} \right) \left(\sin^{-1} \frac{BL}{(B^2 L^2 + B^2 z^2 + L^2 z^2 + z^4)^{1/2}} \right) \right] \quad (\text{E.8})$$

bajo el punto B:

$$\sigma_{zB} = \left(\frac{pL}{2\pi B} \right) \left(\frac{z}{(L^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{z^3}{(B^2 + z^2)(B^2 + L^2 + z^2)^{1/2}} \right) \quad (\text{E.9})$$

donde:

L : es la longitud de la carga triangular.

E.4. Cimientos sujetos a carga vertical y momento

Reacción del terreno trapecial

En numerosas ocasiones en la práctica, un cimiento se ve sometido a carga vertical y momento. Por ejemplo, una columna le trasmite, usualmente, a una zapata aislada, carga vertical y momento. El efecto de un sismo se traduce en fuerzas cortantes y momentos al nivel de cimentación; así, un edificio alto desplantado sobre una losa de apoyo o un cajón de cimentación, en una región sísmica, trasmite al terreno de cimentación un fuerte momento de volteo, el cual ocasiona deformaciones en dicho terreno que pueden llegar a ser muy importantes; por lo tanto, se hace necesario determinar las deformaciones del suelo ocasionadas por una fuerza vertical y un momento de volteo, tema que trataremos en este inciso.

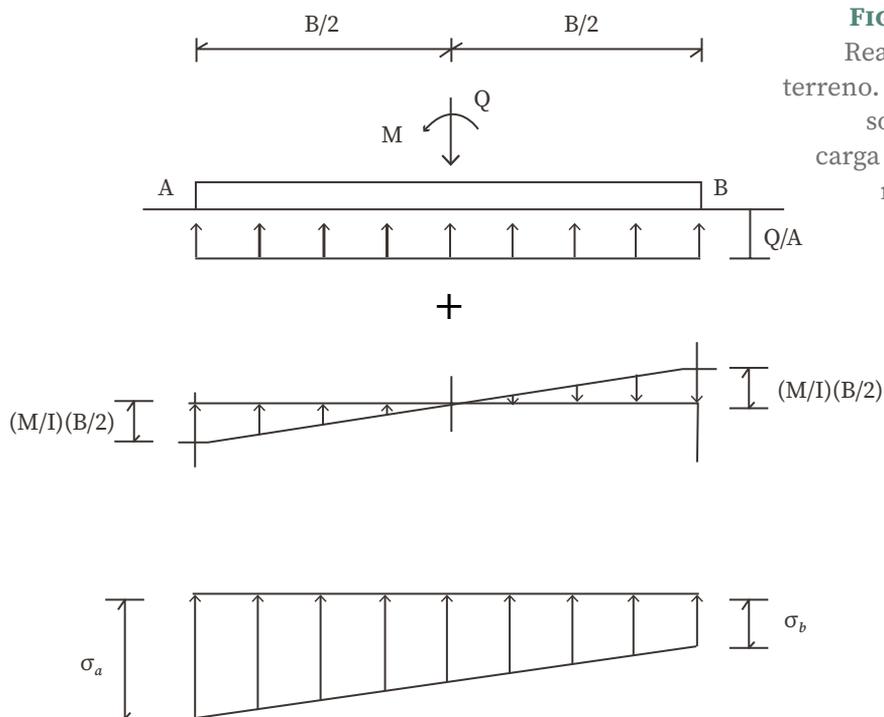
Ahora, consideremos un cimiento sometido al sistema de cargas de la figura E.4 y supongamos que la reacción del terreno es la suma de una reacción uniforme debida a la carga Q y a una reacción debida al momento M . La reacción uniforme se obtiene del cociente Q/A , siendo A el área del cimiento, mientras que la reacción provocada por el momento se obtiene en forma aproximada utilizando la fórmula de la escuadría: $\Delta\sigma = (M/I)y$. Entonces, observamos que la reacción del suelo se calcula con la siguiente expresión:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \pm \frac{M}{I} y \quad (\text{E.10})$$

donde:

- I : es el momento de inercia de la planta de la cimentación.
- y : es la distancia del centroide del área de la cimentación a la fibra donde se esté calculando el esfuerzo.

FIGURA E.4.
Reacción del terreno. Cimiento sometido a carga vertical y momento



En los puntos extremos A y B del cimiento, los esfuerzos se calculan así:

$$\sigma_a = \frac{Q}{A} \pm \left(\frac{M}{I} \right) \left(\frac{b}{2} \right)$$

$$\sigma_b = \frac{Q}{A} \pm \left(\frac{M}{I} \right) \left(\frac{b}{2} \right)$$

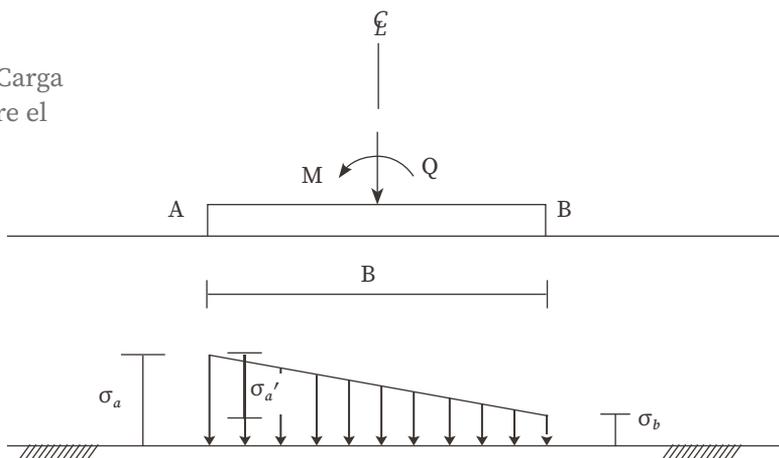
si el cimiento es rectangular de ancho B y longitud L :

$$\sigma_a = \frac{Q}{BL} - \frac{6M}{LB^2} \quad (\text{E.11})$$

$$\sigma_b = \frac{Q}{BL} + \frac{6M}{LB^2} \quad (\text{E.11})$$

por la tercera ley de Newton, la carga sobre el terreno es la figura E.4, pero con sentido de arriba hacia abajo es la (figura E.5):

FIGURA E.5. Carga trapecial sobre el terreno

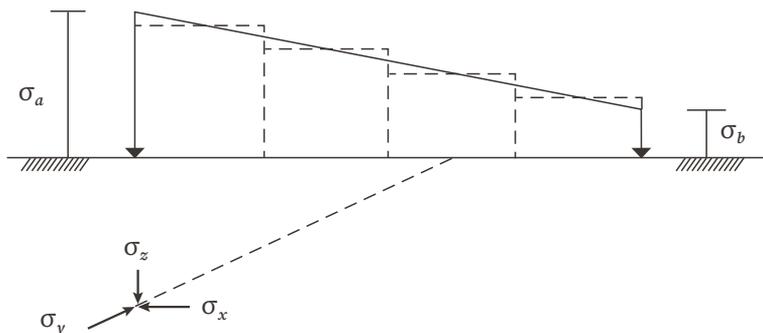


Por lo tanto, para determinar las deformaciones del suelo provocadas por un cimiento con carga vertical y momento es necesario determinar el estado de esfuerzo dentro de la masa de suelo que es ocasionado por la carga de tipo trapecial de la figura E.5.

Cuando solo se desea determinar el esfuerzo normal vertical en la masa de suelo, el problema se puede dividir en una carga rectangular σ_b y en una carga triangular σ'_a , (figura E.5). El esfuerzo normal ocasionado por la primera se calcula con la fórmula de Damy (ecuación E.2), mientras que para la carga triangular se pueden emplear las fórmulas de Hamilton Gray (figura E.4, ecuaciones E.8 y E.9).

Además, cuando se requiere conocer sobre el esfuerzo normal vertical σ_z y los esfuerzos normales horizontales σ_x y σ_y , el problema se puede resolver dividiendo la carga trapecial en un número n de cargas uniformes como se ilustra en la figura E.6. Los esfuerzos buscados se obtienen aplicando las ecuaciones E.2 a E.5 para cada una de las cargas uniformes en las que se dividió la carga trapecial.

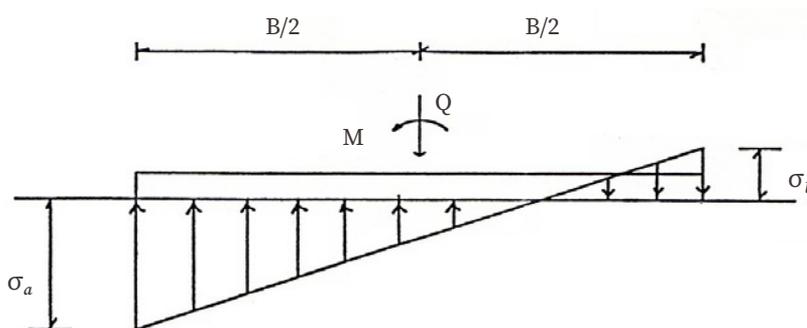
FIGURA E.6. Carga trapezoidal dividida en un número n de cargas uniformes



Reacción triangular

Cuando el momento de volteo es alto, puede ocurrir que se presenten en un extremo esfuerzos teóricos de tensión entre el cimiento y terreno (figura E.7). En la realidad, la resistencia a la tensión entre estos dos materiales es prácticamente nula, por lo que, no existe dicha zona de tensión; por lo anterior, se requiere determinar la reacción del terreno ignorando esta zona de tensión.

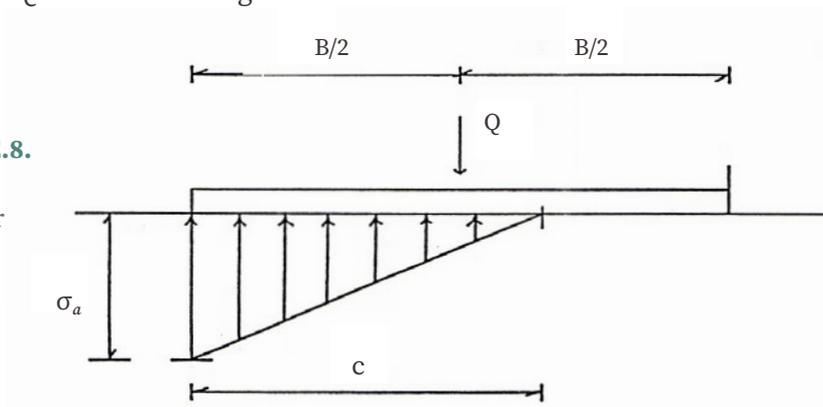
FIGURA E.7. Esfuerzos teóricos de tensión en el contacto cimiento-suelo



Ahora, supongamos una reacción triangular como la indicada en la figura E.8. Por equilibrio de fuerzas verticales, tenemos:

$$\frac{\sigma_a C}{2} = Q = \text{área del triángulo}$$

FIGURA E.8.
Reacción
triangular



Los momentos con respecto a un eje que pasa por el punto A son:

$$\Sigma M_a = \frac{QC}{3} + \frac{QB}{2} - M = 0 \quad (\text{E.13})$$

$$\therefore C = 1.5B - \frac{3M}{Q} \quad (\text{E.14})$$

de la ecuación 3.16:

$$\sigma_a = \frac{2Q}{C} \quad (\text{E.14})$$

En consecuencia, dado un cimiento en el que las cargas Q y M ocasionan esfuerzos teóricos de tensión en el contacto entre el terreno y suelo, la reacción de este, suponiéndola triangular (figura E.8), se obtiene utilizando la ecuación E.16 para determinar la distancia C y la ecuación E.17 para obtener el esfuerzo σ_a .

Los esfuerzos en el interior del medio elástico que son ocasionados por la carga triangular se hallan empleando las ecuaciones E.8 y E.9 del inciso anterior.

E.5. Fórmulas para deformaciones elásticas

Las deformaciones instantáneas en los suelos se pueden calcular, de manera aproximada, utilizando las expresiones que proporciona la teoría de la elasticidad.

El asentamiento de la superficie de un medio semiinfinito homogéneo e isótropo, bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniformemente repartida q , está dado por la fórmula de Schleicher (Terzaghi, 1943):

$$\delta = \left[\frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \right] \left(L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{B^2 + L^2}}{B} \right) \quad (\text{E.16})$$

donde:

- B : es el ancho del rectángulo.
- L : es la longitud del rectángulo.
- E : es el módulo de elasticidad del medio.
- ν : es la relación de Poisson del medio.

Si el cimiento es cuadrado, la ecuación E.16 se convierte en:

$$\delta = \frac{2qB(1-\nu^2) \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi E} \quad (\text{E.17})$$

$$\delta = \frac{1.763qB(1-\nu^2)}{\pi E} \quad (\text{E.18})$$

E.6. Rigidez lineal vertical

La rigidez lineal vertical se define como el cociente de la carga vertical concentrada, Q_v , entre el asentamiento vertical que produce dicha carga. En un cimiento de planta cuadrada de ancho B , la rigidez lineal vertical está dada por:

$$K_v = \frac{0.891 EB}{1 - \nu^2} \quad (\text{E.19})$$

Si el medio elástico tiene un espesor, H , el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme, q , está dado por la fórmula de Steinbrenner (Juárez Badillo y Rico, 1980):

$$\delta = \left[\frac{q(1 - \nu^2)}{\pi E} \right] \left(L \ln \frac{(B + \sqrt{L^2 + B^2})\sqrt{L^2 + H^2}}{L(B + A)} + B \ln \frac{(L + \sqrt{L^2 + B^2})\sqrt{B^2 + H^2}}{B(L + A)} \right) + \left(\frac{q}{2\pi E} \right) (1 - \nu - 2\nu^2) H \tan^{-1} \frac{LB}{HA} \quad (\text{E.20})$$

$$A = \sqrt{L^2 + B^2 + H^2} \quad (\text{E.21})$$

Cuando existe un medio estratificado como el de la figura E.9, formado por n estratos de propiedades elásticas E y ν , el asentamiento de la superficie se puede calcular utilizando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (\text{E.22})$$

donde:

σ_z , σ_x y σ_y : son los esfuerzos normales vertical y horizontal ocasionados por la carga aplicada en la superficie del medio.

ϵ_z : es la deformación unitaria del estrato.

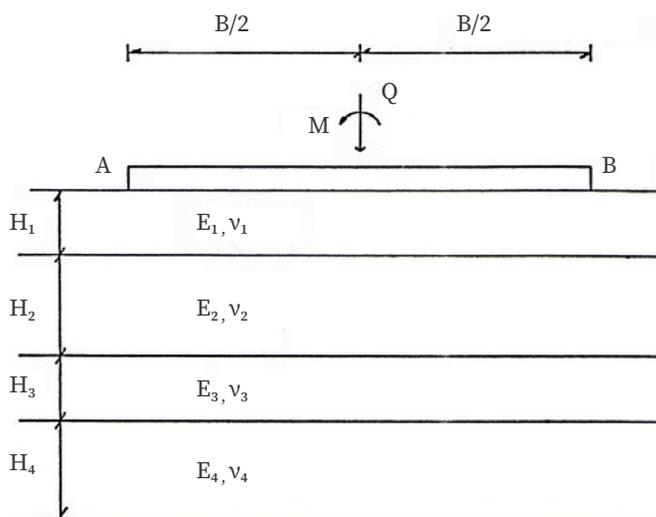
La deformación del estrato está dada en unidades de longitud por:

$$\delta = \epsilon_z H \quad (\text{E.23})$$

donde:

H : es el espesor del estrato.

FIGURA E.9. Medio estratificado



La deformación de la superficie será la suma de las deformaciones de cada estrato.

E.7. Círculo cargado

En un círculo con radio, R , que es sometido a una carga uniforme, q , en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por (Zeevaert, 1973).

$$\delta_v = \frac{\pi(1-\nu^2)Rq}{2E} \quad (\text{E.24})$$

el desplazamiento horizontal de un círculo sometido a una carga horizontal, Q_h , está dado por (Richart, *et al.*, 1970):

$$\delta_h = \frac{(7-8\nu)Q_h}{32(1-\nu)GR} \quad (\text{E.25})$$

el giro ocasionado por un momento, M , vale (Richart, *et al.*, 1970):

$$\varphi = \frac{3(1-\nu)M}{8GR^2} \quad (\text{E.26})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{E.27})$$

con las expresiones anteriores, se pueden obtener las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular. La rigidez lineal vertical se define como la carga vertical entre el asentamiento que produce:

$$K_v = \frac{Q_v}{\delta_v} = \frac{2ER}{1-\nu^2} \quad (\text{E.19})$$

la rigidez lineal horizontal se define como la carga horizontal entre el desplazamiento horizontal que produce:

$$K_h = \frac{Q_h}{\sigma_h} = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu} \quad (\text{E.29})$$

la rigidez angular o rigidez de rotación se define como el cociente del momento entre el giro que produce:

$$K_r = \frac{M}{\varphi} = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \quad (\text{E.29})$$

Giro de un rectángulo sometido a un momento

El giro de un rectángulo sujeto a un momento, M , (figura E.10) se puede calcular determinando la carga de tipo trapecial (ecuaciones E.13 y E.14) o triangular (ecuaciones E.16 y E.17) cuando actúa sobre el terreno. Posteriormente, se divide la carga en un número n de cargas uniformes (figura E.6) y se determinan los esfuerzos normales σ_z , σ_x y σ_y con las ecuaciones E.2 a E.4 a la mitad de cada uno de los estratos del subsuelo. La deformación unitaria de cada estrato se obtiene aplicando la ley de Hooke (ecuación E.25) y la deformación en unidades de longitud, utilizando la ecuación E.25. Esta operación se realiza bajo los puntos A y B de la figura E.6 con lo que se determina, mediante la suma de las deformaciones de cada estrato, la deformación en la superficie, con estos resultados se puede calcular el giro del rectángulo sometido a momento.

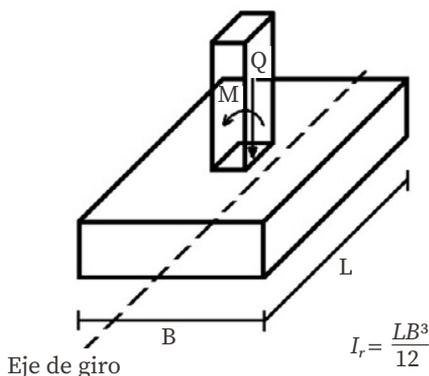


FIGURA E.10. Giro de un rectángulo

Según las NTCDS (Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo): «...en forma simplificada, se puede usar el siguiente artificio: se obtiene el momento de inercia del rectángulo I en el sentido como se está analizando y se determina el radio equivalente a un círculo que tenga el mismo momento de inercia del rectángulo».²⁸

$$R = \left(\frac{4I}{\pi} \right)^{1/4} \quad (\text{E.31})$$

Con el radio equivalente, R , se emplea la ecuación E.27 para determinar el giro de la cimentación de la planta rectangular.

El criterio anterior es válido cuando la longitud del cimiento es similar al ancho del mismo. Para valores de longitud mayores que tres veces el ancho del cimiento es conveniente usar la fórmula de Fröhlich, para una cimiento continuo (de longitud infinita) de ancho B (Zeevaert, 1973):

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{16(1-\nu^2)\overline{M}}{\pi EB^2} \right) \quad (\text{E.32})$$

donde:

\overline{M} : es el momento por unidad de longitud del cimiento (t·m/m).

Para las deformaciones permanentes acumuladas por la repetición de cargas, en forma aproximada y únicamente para fines de anteproyecto, se pueden emplear las siguientes expresiones:

$$\delta_{pN} = \delta_p (1 + a \log N) \quad (\text{E.33})$$

²⁸ Gobierno del Distrito Federal, «Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, t. II, núm. 103-bis, 6 de octubre de 2004.

donde:

δpN : es la deformación permanente debida a N repeticiones de carga.

δp : es la deformación permanente correspondiente a la primera aplicación de carga.

N : es el número de repeticiones de carga.

a : es el coeficiente que depende del tipo de suelo. Para suelos granulares $a \approx 0.25$.

\log : es el logaritmo decimal (base 10).

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Asentamiento diferido a causa del incremento neto de carga

Según el RCDF (Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal):

Al considerar que la presión efectiva en una arcilla saturada no cambia en forma importante por una excavación, entonces, el asentamiento a largo plazo se calcula empleando el incremento neto de carga, el cual es el resultado de sustraer de la presión o carga total transmitida al suelo por una subestructura o un elemento de ella, la presión o carga total previamente existente en el suelo al nivel de desplante.²⁹

Además, si el terreno de cimentación consiste en arcilla, el asentamiento debido a la cedencia lateral del suelo es, usualmente, pequeño en comparación con el asentamiento total; por esta razón, aun el asentamiento de cimentaciones en estratos de gran espesor de arcilla puede ser evaluado por métodos basados en la deformación unidimensional (Terzaghi y Peck, 1967). Es decir, para calcular los asentamientos diferidos, únicamente, hay que utilizar el esfuerzo normal vertical σ_z .

²⁹ Gobierno del Distrito Federal, «Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, enero 29 de 2004.

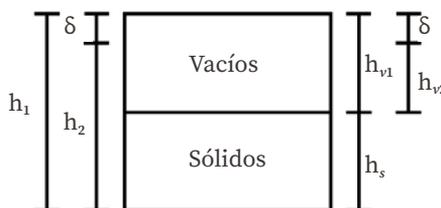
En el anexo G, se presenta la valuación del asentamiento a largo plazo en una cimentación compensada. Cabe aclarar que, si se desea obtener, adicionalmente, la evolución del hundimiento, se puede emplear la teoría de consolidación de Terzaghi-Zeevaert que considera, adicionalmente, la componente de deformación por viscosidad intergranular (consolidación secundaria) (Zeevaert, 1985).

F.1. Deformación vertical de un estrato de arcilla

Ahora, consideremos un estrato de arcilla de espesor inicial, h_1 , el cual al ser sometido a un incremento de carga sufre una deformación vertical, δ , (figura F.1), quedando con un espesor final, h_2 :

$$\delta = h_1 - h_2 \quad (\text{F.1})$$

FIGURA F.1. Estrato de arcilla



Sus relaciones de vacíos inicial y final son (figura F.1):

$$e_1 = \frac{h_{v1}}{h_s} \quad (\text{F.2})$$

$$e_2 = \frac{h_{v2}}{h_s} \quad (\text{F.3})$$

supongamos que la compresión vertical se debe, únicamente, a una reducción de los vacíos del suelo, entonces, (figura F.1):

$$h_1 = h_{v1} + h_s \quad (\text{F.4})$$

$$h_2 = h_{v2} + h_s \quad (\text{F.5})$$

al reemplazar las ecuaciones F.4 y F.5 en la ecuación F.1, tenemos:

$$\delta = h_{v1} - h_{v2} \quad (\text{F.6})$$

cuando se sustituyen las ecuaciones F.2 y F.3 en la ecuación F.6, se da:

$$\delta = e_1 h_s - e_2 h_s = h_s (e_1 - e_2)$$

al dividir ambos miembros entre h_1 , se tiene:

$$\frac{\delta}{h_1} = \frac{h_s}{h_2} (e_1 - e_2)$$

si se toman en cuenta las ecuaciones F.4 y F.2:

$$\frac{\delta}{h_1} = \left[\frac{h_s}{h_{v1} + h_s} \right] (e_1 - e_2)$$

$$\frac{\delta}{h_1} = \left[\frac{h_s}{e_1 h_s + h_s} \right] (e_1 - e_2)$$

$$\frac{\delta}{h_1} = \left[\frac{1}{1 + e_1} \right] (e_1 - e_2)$$

$$\Delta e = e_1 - e_2 \quad (\text{F.7})$$

$$\delta = \left[\frac{\Delta e}{1 + e_1} \right] h_1 \quad (\text{F.8})$$

la ecuación F.8 permite calcular la deformación vertical de un estrato de suelo de espesor inicial, h_1 , en función de su decremento en relación con vacíos y en su relación de vacío inicial.

F.2. Ecuación diferencial de la consolidación primaria

Este es un estrato de arcilla de espesor H con el NAF (Nivel de Aguas Freáticas) en la superficie del terreno (figura F.2 a); los diagramas de presión total, hidráulica y efectiva se muestran en la figura F.2 a. Consideremos que aplicamos una carga unitaria vertical, q , en un área suficientemente grande para que el incremento de la presión vertical sea constante con la profundidad; además, estimemos que se permite el drenaje en la frontera superior del estrato de arcilla. Los diagramas de presión en el suelo quedan como se indica en la figura F.2 b.

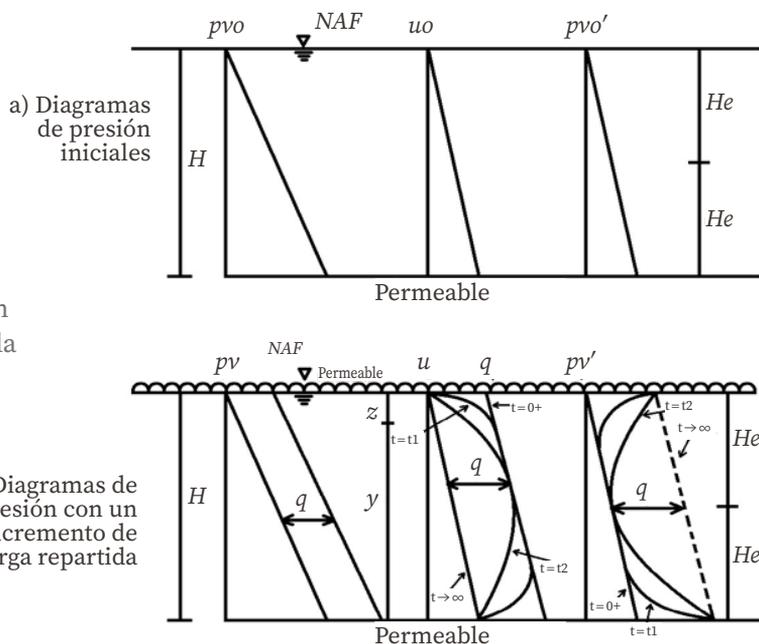
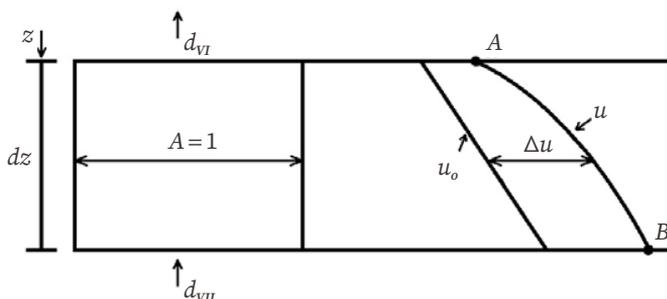


FIGURA F.2.
Diagramas de presiones en un estrato de arcilla con NAF

Ante todo, calculemos el volumen de salida dV_I y de entrada dV_{II} de un elemento del suelo de espesor, dz , que está situado a la profundidad z , (figura F.3). La curva de variación de la presión hidráulica en un tiempo, t , se indica en la figura F.3:

FIGURA F.3.
Variación de la presión hidráulica en el tiempo en un estrato de arcilla



Ahora, obtengamos el gradiente hidráulico a la profundidad z (figura F.3, punto A). La altura piezométrica vale (figura F.2 b):

$$h = \frac{u}{\gamma_w} + y = \left(\frac{u_o + \Delta u}{\gamma_w} \right) + y$$

$$h = \frac{u_o}{\gamma_w} + \frac{\Delta u}{\gamma_w} + y$$

$$u_o = \gamma_w (H - y)$$

pero:

$$h = H - y \frac{\Delta u}{\gamma_w} + y$$

$$h = H + \frac{\Delta u}{\gamma_w} \tag{F.9}$$

designemos, Δu , al incremento de la presión hidráulica en el punto A (figura F.3):

$$(\Delta u)_A = (\Delta u)$$

el incremento de la presión hidráulica en el punto B vale (figura F.3):

$$(\Delta u)_B = (\Delta u) + \left[\frac{\partial (\Delta u)}{\partial z} \right] dz$$

el gradiente hidráulico en el punto A (flujo vertical) es:

$$i_A = \frac{\partial h}{\partial z}$$

tomando en cuenta la ecuación F.9:

$$i_A = \left(\frac{1}{\gamma_w} \right) \frac{\partial (\Delta u)}{\partial z}$$

el gradiente hidráulico en el punto B es:

$$i_B = \left(\frac{1}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\Delta u) + \frac{\partial (\Delta u)}{\partial z} dz \right\}$$

el gasto de salida del elemento (cara I) para un área unitaria en dirección vertical, utilizando la ley de Darcy vale:

$$\frac{dV_I}{dt} = k \left(\frac{1}{\gamma_w} \right) \frac{\partial (\Delta u)}{\partial z}$$

$$dV_I = k \left(\frac{1}{\gamma_w} \right) \frac{\partial (\Delta u)}{\partial z} dt \quad \text{(F.10)}$$

en forma análoga, el gasto de entrada al elemento (cara II) es:

$$\frac{dV_{II}}{dt} = k \left(\frac{1}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\Delta u) + \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z} dz \right\}$$

$$dV_{II} = k \left(\frac{1}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\Delta u) + \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z} dz \right\} dt \quad (\text{F.11})$$

la diferencia entre el volumen de salida y el de entrada se da, restando la ecuación F.11 a la ecuación F.10:

$$\Delta dV = dV_I - dV_{II}$$

$$\Delta dV = - \left(\frac{k}{\gamma_w} \right) \left[\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial z^2} \right] dz dt \quad (\text{F.12})$$

por otra parte, la deformación vertical del elemento de espesor, dz , vale, aplicando la ecuación F.8:

$$\Delta d\delta = \left[\frac{de}{1+e} \right] dz$$

y el decremento de volumen para un área unitaria en dirección vertical:

$$\Delta dV = \left[\frac{de}{1+e} \right] dz \quad (\text{F.13})$$

el coeficiente de compresibilidad se define como:

$$a_v = \frac{de}{dp_v'} \quad , \quad de = a_v dp_v'$$

reemplazando en la ecuación F.13, tenemos:

$$\Delta dV = \left[\frac{a_v dp_v'}{1+e} \right] dz \quad (\text{F.14})$$

por otro lado, en un suelo totalmente saturado se cumple:

$$p_v = p_v' + u = p_v' + u_o + \Delta u$$

$$dp_v = 0 = dp_v' + du_o + d(\Delta u)$$

$$dp_v' = -d(\Delta u)$$

$$d(\Delta u) = \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} \right] dt$$

$$dp_v' = - \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} \right] dt$$

sustituyendo en la ecuación F.14, tenemos:

$$\Delta dV = - \left[\frac{a_v}{1+e} \right] \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} \right] dt dz \quad (\text{F.15})$$

$$m_v = \frac{a_v}{1+e} \quad (\text{F.16})$$

m_v se conoce como coeficiente de compresibilidad volumétrica del suelo:

$$\Delta dV = -m_v \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} \right] dt dz \quad (\text{F.17})$$

el volumen de agua expulsada del elemento (figura F.3) debe ser igual al cambio de volumen del mismo, por lo tanto, las ecuaciones F.12 y F.17 miden la misma cantidad y deben ser iguales:

$$-\left(\frac{k}{\gamma_w}\right)\left[\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial z^2}\right]dz dt = -m_v\left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t}\right]dt dz$$

$$\left(\frac{k}{m_v\gamma_w}\right)\left[\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial z^2}\right] = \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t}\right] \quad (\text{F.18})$$

sea:

$$C_v = \frac{k}{m_v\gamma_w} \quad (\text{F.19})$$

a C_v se le conoce como coeficiente de consolidación del suelo:

$$C_v\left[\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial z^2}\right] = \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t}\right] \quad (\text{F.20})$$

la ecuación F.20 mide la variación del incremento de presión hidráulica en función de la profundidad y del tiempo, y se conoce como la ecuación diferencial del fenómeno de consolidación primaria para el flujo vertical.

F.3. Solución de la ecuación diferencial de consolidación

Para la solución de la ecuación diferencial de la consolidación:

$$C_v\left[\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial z^2}\right] = \left[\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t}\right] \quad (\text{F.20})$$

se contemplan las siguientes condiciones de frontera (figura F.2 b):

$$\Delta u = 0 \quad \text{para } z = 0^+ \quad \text{y} \quad z = 2H_e \quad \text{para todo } t > 0$$

con la siguiente condición inicial:

$$\Delta u = q \quad \text{para } t = 0^+ \quad \text{y} \quad 0 < z < 2H_e$$

para estas condiciones, la solución de la ecuación 0.20 es (Juárez Badillo y Rico, 1976):

$$\Delta u = q \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[\frac{(2i+1)\pi z}{2H_e} \right] e^{-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4}} \right\} \quad (\text{F.21})$$

$$T = \frac{C_v t}{H_e^2} \quad (\text{F.22})$$

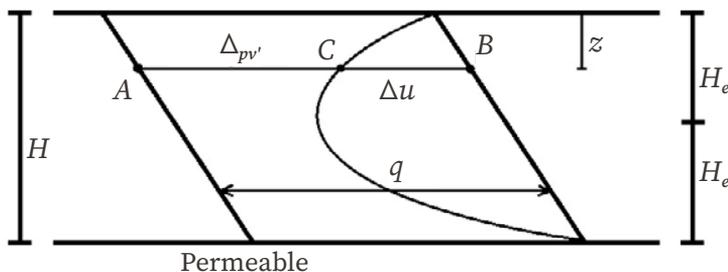
a T se le denomina factor tiempo.

F.4. Grado de consolidación de un estrato de arcilla

El grado o porcentaje de consolidación a la profundidad z se define de la siguiente forma (figura F.4):

$$U_z(\%) = \left(\frac{AC}{AB} \right) (100) = \left[\frac{q - \Delta u}{q} \right] (100)$$

$$U_z(\%) = \left[1 - \frac{\Delta u}{q} \right] (100) \quad (\text{F.23})$$

FIGURA F.4. Grado de consolidación en un estrato de arcilla

Se define el grado o porcentaje de consolidación de un estrato de arcilla de espesor $H=2H_e$ de la siguiente manera (figura F.4):

$$U(\%) = \frac{\int_0^{2H_e} (q - \Delta u) dz}{q(2H_e)} \quad (\text{F.24})$$

$$U(\%) = (100) \left\{ 1 - \left[\frac{1}{q(2H_e)} \right] \int_0^{2H_e} (\Delta u) dz \right\} \quad (\text{F.25})$$

al considerar la ecuación F.21:

$$\int_0^{2H_e} (\Delta u) dz = q \int_0^{2H_e} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} \operatorname{sen} \left[\frac{(2i+1)\pi z}{2H_e} \right] e^{-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4}} \right\}$$

$$\int_0^{2H_e} (\Delta u) dz = q \int_0^{2H_e} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2i+1)\pi} e^{-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4}} \left[-\frac{2H_e}{(2i+1)\pi} \cos \left[\frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{z}{H_e} \right] \right] \right\}$$

$$-\cos \left[\frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{z}{H_e} \right] = [\cos(2i+1)\pi - \cos(0)] = -(-1 - 1) = 2$$

$$\int_0^{2H_e} (\Delta u) dz = q(2H_e) \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4}} \right\}$$

al sustituir en la ecuación F.25, tenemos:

$$U(\%) = (100) \left\{ 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{8}{(2i+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2i+1)^2 \pi^2 T}{4}} \right\} \right\} \quad (\text{F.26})$$

En la ecuación F.26, observamos que el porcentaje de consolidación de un estrato depende, únicamente, del factor tiempo: $U=f(T)$. En la tabla F.1, se muestran los valores de U en función de T :

Tabla F.1. Relación teórica $U(\%) - T$ (Juárez Badillo y Rico, 1976)

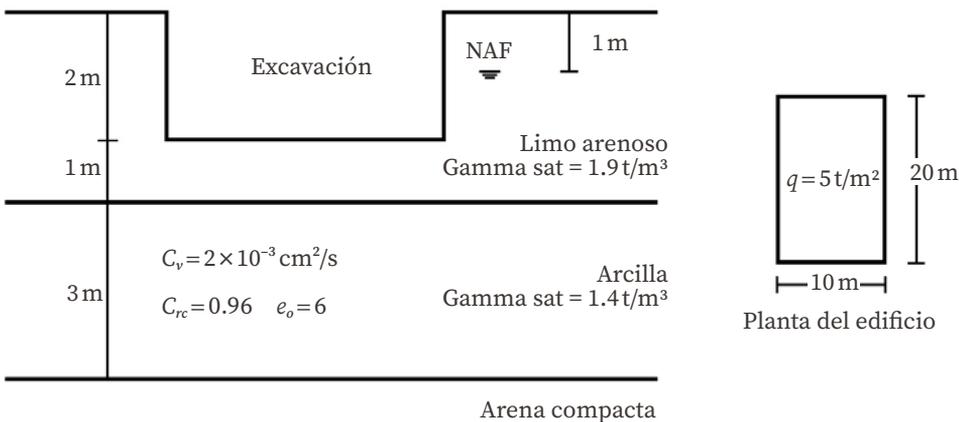
$U(\%)$	T	$U(\%)$	T
0	0	55	0.238
10	0.008	60	0.287
15	0.018	65	0.342
20	0.031	70	0.405
25	0.049	75	0.477
30	0.071	80	0.565
35	0.096	85	0.684
40	0.126	90	0.848
45	0.159	95	1.127
50	0.197	100	∞

F.5. Cálculo del asentamiento de un edificio debido a la consolidación del suelo

Ejemplo F.1

Se debe calcular el asentamiento por consolidación del estrato de arcilla, bajo el centro del área en la planta de un edificio, 102 días después de terminada la construcción, estimando que la carga, q , se aplica en forma instantánea para la estratigrafía y propiedades del subsuelo mostradas en la figura F.E-1. Suponga que el estrato de limo arenoso está saturado por capilaridad hasta la superficie del terreno.

FIGURA F.E-1. Ejemplo de asentamiento debido a la consolidación de una arcilla



Solución

Para el cálculo del asentamiento total por consolidación, se aplica la ecuación F.17:

$$\delta = \frac{C_{rc} H}{1 + e_o} \log \left(\frac{P_{vo'} + \sigma_z}{P_{vo'}} \right)$$

$$p_{vo'} = 1.9(1) + 2(0.9) + 1.5(0.4) = 4.3 \text{ t/m}^2$$

$$q_n = q - p_{vd} = 5 - 2(1.9) = 1.2 \text{ t/m}^2$$

El incremento del esfuerzo vertical a la mitad del estrato, aplicando la fórmula de Boussinesq vale $\sigma_z = 1.148 \text{ t/m}^2$. Sustituyendo valores, se tiene:

$$\delta = \frac{0.96(3)}{1 + 6} \log \left(\frac{4.3 + 1.148}{4.3} \right) = 0.04228 \text{ m}$$

el factor tiempo vale (ecuación F.22):

$$T = \frac{C_v t}{H_e^2} = \frac{2 \times 10^{-3} (102)(86\,400)}{150^2} = 0.7834$$

de la tabla F.1: $U = 88.03\%$

el asentamiento a 102 días valdrá: $4.228 (0.8803) = 3.72 \text{ cm}$

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Cuando se retoma lo visto en el tema de consolidación unidimensional, podemos distinguir en una curva de consolidación dos partes: la primaria que es la estudiada bajo el título de consolidación unidimensional y la secundaria, la cual será tratada a continuación.

Se puede definir que la consolidación primaria es un fenómeno de tipo hidrodinámico que implica expulsión de agua. Si lo expresamos mediante una analogía física, esta sería la analogía mecánica de Terzaghi.

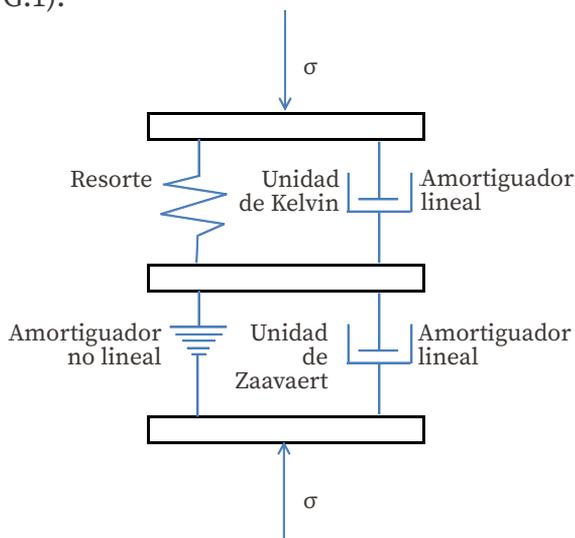
La consolidación secundaria, por su parte, es un fenómeno de tipo viscoso que se atribuye al agua que rodea a las partículas de arcilla. Se considera que, en un cierto momento, las partículas *resbalan* unas sobre otras (como si patinaran), debido a lo anterior, sucede que el suelo se sigue deformando, aunque la mayor parte del agua ya haya salido de él. Cabe recalcar que, si bien es cierto que disminuye el volumen del agua del suelo, la cantidad de agua que sale durante este fenómeno es muy poca, en comparación con la que se expulsa durante la consolidación primaria.

Actualmente, existen diferentes teorías para el cálculo de la consolidación secundaria como son la de Buisman y Zeevaert. En el presente trabajo trataremos esta última.

G.1. Teoría de consolidación secundaria

El siguiente modelo físico está formado por una unidad de Kelvin y una unidad de Zeevaert (figura G.1):

FIGURA G.1. Modelo físico formado por una unidad de Kelvin y una unidad de Zeevaert



Si observamos la unidad de Kelvin, vemos que está compuesta por un resorte y un amortiguador lineal, estando el resorte sujeto a la ley de Hooke y el amortiguador a la ley de Newton.

$$\text{Ley de Hooke} \quad \varepsilon_1 = \alpha_1 \sigma$$

Donde:

ε_1 : es la deformación unitaria.

α_1 : es el coeficiente de proporcionalidad.

σ : es el esfuerzo.

$$\text{Ley de Newton} \quad \dot{\varepsilon} = d\varepsilon_1 / dt = \varphi_1 \sigma$$

Donde

$\dot{\varepsilon}$: es la velocidad de deformación.

La unidad de Kelvin en realidad es el modelo del émbolo que representa a la condición lineal de Terzaghi, siendo los sólidos del suelo representativos por el resorte y el agua representada por el amortiguador lineal.

La unidad de Zeevaert está constituida por un amortiguador lineal y por otro amortiguador no lineal. El amortiguador lineal está gobernado por la ley de Newton y el no lineal por la ley de Zeevaert (Zeevaert, 1986).

$$\text{Ley de Zeevaert} \quad \dot{\epsilon}_z = \left[\frac{a}{(b+t)} \right] \sigma_z$$

Donde:

$\dot{\epsilon}_z$: es la velocidad de deformación.

a y b : son coeficientes.

t : es el tiempo transcurrido desde el instante en que se aplica la carga al instante en que se mide la deformación.

σ_z : es el esfuerzo normal vertical.

Así como, la unidad de Kelvin representa a la consolidación primaria, la unidad de Zeevaert representa a la consolidación.

Ahora, consideremos detalladamente el modelo siguiente (figura G.2):

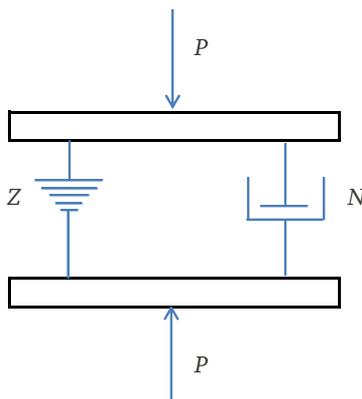


FIGURA G.2. Unidad Z

Al someter a la unidad de Zeevaert al efecto de una carga P , se considera que dicha carga se distribuye entre el amortiguador lineal y el no lineal:

$$P = P_z + P_n$$

así, se tiene que:
$$P/A = (P_z/A) + (P_n/A)$$

y por ello:
$$\sigma = \sigma_z + \sigma_n$$

por otra parte, estimando que la deformación unitaria en la unidad de Zeevaert es la misma en ambos amortiguadores, cumple que $\varepsilon = \varepsilon_z + \varepsilon_n$ pues bien, considerando las velocidades de deformación, tenemos que:

$$\dot{\varepsilon}_n = \varphi_2 \sigma_n$$

donde:

φ_2 : es la fluidez del agua viscosa del suelo.

σ_n : es el esfuerzo normal.

$\dot{\varepsilon}_n$: es la velocidad de deformación en el amortiguador lineal.

La velocidad de deformación es el amortiguador no lineal, por su parte, está gobernada por la ley de Zeevaert:

$$\dot{\varepsilon} = \left[\frac{a}{(b+t)} \right] \sigma_z$$

donde:

$\dot{\varepsilon}$: es la velocidad de deformación del amortiguador no lineal.

σ_z : es el esfuerzo normal.

a y b : son coeficientes.

t : es el tiempo transcurrido desde el instante en que se aplica la carga, al instante en que se mide la deformación.

Si despejamos los valores de σ_n y σ_z de las expresiones anteriores, tenemos que:

$$\sigma_n = \left[\frac{1}{\varphi_2} \right] \dot{\varepsilon}_n$$

$$\sigma_n = \left\{ \frac{1}{\left[\frac{a}{(b+t)} \right]} \right\} \dot{\varepsilon}_n$$

se debe recordar que el esfuerzo en la unidad de Zeevaert se reparte entre el amortiguador lineal y el amortiguador no lineal, de modo que:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_n$$

sustituyendo:

$$\left\{ \left[\frac{(b+t)}{a} \right] \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) \right\} + \left[\left(\frac{1}{\varphi_2} \right) \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) \right] = \sigma$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) \left\{ \left[\frac{(b+t)}{a} \right] + \left(\frac{1}{\varphi_2} \right) \right\} = \sigma$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma / \left\{ \left[\frac{(b+t)}{a} \right] + \left(\frac{1}{\varphi_2} \right) \right\}$$

si se integra y se considera que σ es constante, se tiene que:

$$\varepsilon = a \sigma \ln \left\{ \left[b + (a/\varphi_2) + t \right] / \left[b + (a/\varphi_2) \right] \right\} + C$$

estimando las condiciones iniciales que indican que para un tiempo igual a cero la deformación es igual a cero:

$$0 = a\sigma \ln \left\{ \frac{[b + (a/\varphi_2)]}{[b + (a/\varphi_2)]} \right\} + C \quad \gg \quad C = 0$$

por lo tanto:

$$\varepsilon = a\sigma \ln \left\{ \frac{[b + (a/\varphi_2) + t]}{[b + (a/\varphi_2)]} \right\}$$

enseguida, demostraremos que $b=0$. Lo que toma el amortiguador lineal es (ecuación G.1):

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{\varphi_2} \right) \dot{\varepsilon}_n$$

pero: $\varepsilon = \varepsilon_z + \varepsilon_n$

por lo tanto, derivando la ecuación G.2, tenemos:

$$\dot{\varepsilon}_n = a\sigma [b + (a/\varphi_2) + t]$$

sustituyendo la ecuación G.4 en la ecuación G.3:

$$\sigma_n = a\sigma/\varphi_2 [b + (a/\varphi_2) + t]$$

para un tiempo igual a cero, todo el esfuerzo normal lo toma el amortiguador lineal, es decir, para: $t=0$, $\sigma_n=0$

$$\sigma_n = a\sigma/\varphi_2 [b + (a/\varphi_2) + t] \quad \gg \quad b = 0$$

la ecuación G.2 queda, finalmente, así:

$$\varepsilon = a\sigma \ln \left\{ \frac{[(a/\varphi_2) + t]}{[(a/\varphi_2)]} \right\}$$

$$\varepsilon = a\sigma \ln [1 + (\varphi_2/a)t]$$

ahora bien, ya que:

$$\ln x = 2.31 \log_{10} x = 2.31 \log_x$$

$$\varepsilon = a \sigma (2.31) \log \left[1 + (\varphi_2/a) t \right]$$

la expresión anterior es válida para una sola unidad de Zeevaert, pero en el suelo se tiene un número muy grande de unidades Z , por esa razón, se trabaja con la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \bar{a} \sigma (2.31) \log \left[1 + (\bar{\varphi}_2/\bar{a}) t \right]$$

donde:

\bar{a} : es el promedio de todas las a del suelo.

La expresión anterior se puede presentar de la siguiente manera:

$$\varepsilon = 2.31 \bar{a} \sigma \log \left[1 + (\bar{\varphi}_2/\bar{a}) \left(H_e^2/C_v \right) \left(C_v/H_e^2 \right) t \right]$$

si hacemos que: $2.31 \bar{a} = m_t$

y también: $(\bar{\varphi}_2/\bar{a}) \left(\frac{H_e^2}{C_v} \right) = \xi$

la ecuación queda así: $\varepsilon_{vp} = m_t \sigma \log (1 + \xi T)$ ecuación de Zeevaert para la consolidación secundaria

donde:

ε_{vp} : es la deformación viscoplástica, la cual corresponde a la consolidación secundaria.

m_t y ξ : son las funciones de las curvas de consolidación y se obtienen en el laboratorio.

Los valores típicos para la arcilla de la Ciudad de México aproximadamente son:

m_t varía de 0.003 a 0.004 [cm²/kg]

ξ varía de 0.3 a 0.4

finalmente, la consolidación total (deformación total es ε) es la suma de la deformación elasto-plástica, ε_{ep} (consolidación primaria) y la deformación viscoplástica, ε_{vp} (consolidación secundaria): $\varepsilon = \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{vp}$ pues bien, para trabajar en forma integral las consolidaciones primarias y secundarias se usará la expresión anterior.

Así, en la teoría de Terzaghi para la consolidación primaria se tiene que: $\Delta H = m_v \Delta p H$ corresponde al asentamiento total, ε_{ep} .

$S_t = \Delta H U = m_v \Delta p H U$ siendo, S_t el asentamiento (la deformación) para un tiempo t .

U : es el porcentaje de consolidación que depende del factor tiempo T .

Relación teórica U (%) -T			
U (%)	T	U (%)	T
0	0.000	55	0.238
10	0.008	60	0.287
15	0.018	65	0.342
20	0.031	70	0.405
25	0.049	75	0.477
30	0.071	80	0.565
35	0.096	85	0.684
40	0.126	90	0.848
45	0.159	95	1.127
50	0.197	100	∞

Tabla G.1.
Relación entre el porcentaje de consolidación y el factor tiempo (Juárez Badillo y Rico, 1976)

Esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$\delta_{ep} = m_v \Delta p H U$$

por otra parte, se sabe que: $\varepsilon_{vp} = m_t \sigma \log(1 + \xi T)$ que corresponde a la deformación viscoplástica según Zeevaert.

Sin embargo, ya que por definición: $\varepsilon_{vp} = \delta_{vp} / H$, entonces:

$$\delta_{vp} = [m_t \Delta p \log(1 + \xi T) H]$$

donde:

$\sigma : \Delta p$: corresponde a un incremento de esfuerzo, o sea, que es el σ_z de Boussinesq.

Sumando los efectos elastoplásticos y viscoplásticos tenemos que:

$$\delta_{total} = \delta_t = \delta_{ep} + \delta_{vp} = m_v \Delta p H U + [m_t \Delta p \log(1 + \xi T) H]$$

y llegamos a:

$$\delta_{ep} = m_v \Delta p H U$$

$$\delta_{vp} = m_t \Delta p H \log(1 + \xi T)$$

$$\delta_t = \Delta p H \{ (m_v U) + [m_t \log(1 + \xi T)] \}$$

donde:

$T = (C_v t) / H_{ef}^2$ y, también, U se encuentra en función del tiempo t .

Las ecuaciones G.8, G.9 y G.10 son las que se emplean para el cálculo de asentamiento por consolidación primaria y secundaria.

G.2. Consolidación primaria y secundaria

Ejemplo G.1

Se debe determinar el asentamiento a 2, 5 y 10 años del edificio de la figura, debido a que la consolidación primaria y secundaria del estrato de arcilla es de consistencia blanda.

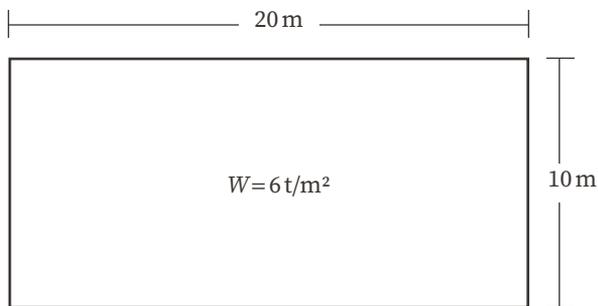
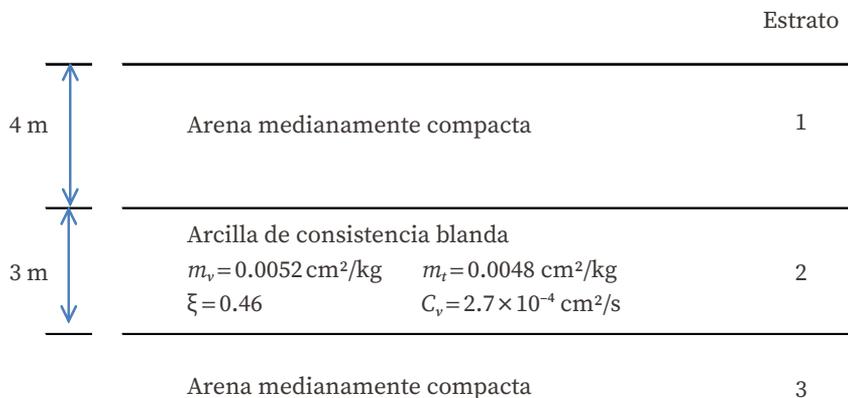


FIGURA G.3. Planta de la estructura

La estratigrafía del subsuelo es la siguiente:

FIGURA G.4. Estratigrafía



Solución

Según la teoría de Boussinesq, el esfuerzo normal se obtiene a la mitad del estrato de arcilla:

$$\sigma_z = 4.58 \left[T / m^2 \right] = \Delta p$$

si el tiempo es de 2 años, este se debe convertir a segundos para hacerlo compatible con los coeficientes obtenidos en el laboratorio:

$$t = 2 \text{ años}$$

$$t = 2 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 6.3072 \times 10^7 \text{ [seg]}$$

obteniendo el factor tiempo:

$$T = (C_v t) / H_{ef}^2 = [(2.7 \times 10^{-4})(6.3072 \times 10^7)] / [150^2]$$

$$T = 0.757$$

nota: H_{ef} es en centímetros.

De la tabla G.1, se tiene que para: $T = 0.757$, $U = 0.872$

$$\text{además: } 4.58 \text{ [ton/m}^2\text{]} \times 1000 \text{ [kg/ton]} \times 1 \text{ [m}^2\text{]} / 1000 \text{ [cm}^2\text{]} = 0.458 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

sustituyendo en las ecuaciones G.8, G.9 y G.1, se tiene:

$$\delta_{ep} = m_v \Delta p H U = (0.0052)(300)(0.872) = 0.623 \text{ [cm]}$$

$$\delta_{vp} = m_t \Delta p H \log(1 + \xi T) = (0.0048)(300) \log[1 + 0.46(0.757)] = 0.086 \text{ [cm]}$$

$$\delta_t = \Delta p H \{ (m_v U) + [m_t \log(1 + \xi T)] \}$$

$$\delta_t = (0.458)(300) \{ (0.0052)(0.872) + 0.0048 \log[1 + 1.46(0.757)] \} = 0.709 \text{ [cm]}$$

Procediendo de manera análoga, se obtienen los hundimientos para 5 y 10 años:

t	t	T	U	δ_{ep}	δ_{vp}	δ_t
[años]	[s]			[cm]	[cm]	[cm]
2	6.307×10^7	0.757	0.872	0.623	0.086	0.709
5	1.6×10^8	1.892	1.0	0.714	0.179	0.893
10	3.2×10^8	3.784	1.0	0.714	0.289	1.003

MÉTODO DE RIGIDECES. MARCOS PLANOS CON BARRAS INCLINADAS

El método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait, *et al.*, 1970):

- a) Se empotra la estructura y se determinan los elementos mecánicos cuando la estructura ya está empotrada.
- b) Se liberan los nudos de la estructura y se hallan los elementos mecánicos que son debidos a desplazamientos lineales y angulares.
- c) Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos donde haya desplazamientos diferentes de cero.
- d) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura.
- e) Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

La ecuación general de equilibrio de la estructura es la siguiente:

$$K\delta + P_e + P_c = 0 \quad (\text{H.1})$$

donde:

- K : es la matriz de rigidez de la estructura.
 δ : es el vector de desplazamientos (grados de libertad).
 P_e : es el vector de cargas de empotramiento.
 P_c : es el vector de cargas concentradas.

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura.

A continuación, obtendremos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos que es sometida a una carga uniformemente repartida, w , (figura H.1). Utilizaremos la siguiente convención de signos para una barra horizontal (figura H.2). Los giros se consideran positivos en sentido antihorario: los desplazamientos verticales son positivos, si van hacia abajo y los desplazamientos horizontales son positivos, si van hacia la izquierda (figura H.2 a). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario: las fuerzas cortantes verticales son positivas, si van hacia arriba y las fuerzas cortantes horizontales son positivas, si van hacia la derecha (figura H.2 b).

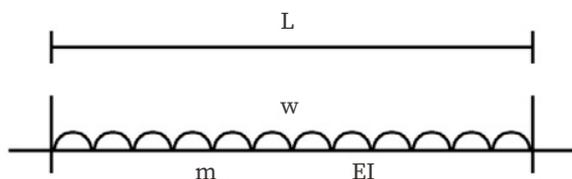
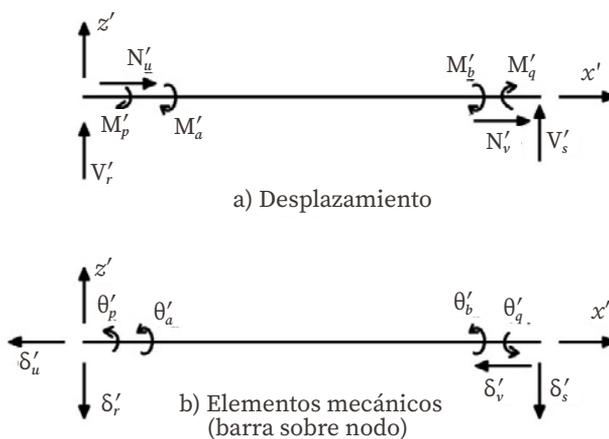


FIGURA H.1. Barra m

FIGURA H.2. Grados de libertad y elementos mecánicos. Convención de signos

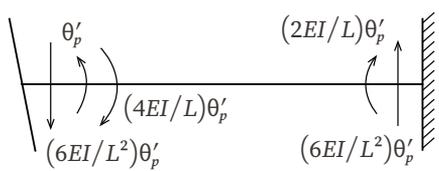


En el extremo izquierdo de la barra, demos un giro θ'_p ; en la figura H.3a, se muestran los elementos mecánicos ocasionados por este giro. En la figura H.3b, se muestran los elementos mecánicos producidos por un giro θ'_q en el extremo derecho. Las figuras H.3c y H.3d exhiben los elementos mecánicos provocados por un desplazamiento vertical, δ'_r , en el nudo izquierdo y un desplazamiento vertical, δ'_s , en el nudo derecho respectivamente. Las figuras H.3e y H.3f muestran los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento horizontal, δ'_u , en el nudo izquierdo y un desplazamiento horizontal, δ'_v , en el nudo derecho. Las figuras H.3g y H.3h contienen los momentos producidos por un giro de torsión, θ'_a , en el nudo izquierdo y un giro de torsión, θ'_b , en el nudo derecho. Los elementos mecánicos que aparecen en la barra m valen:

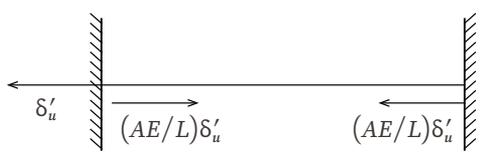
$$M'_p = \frac{wL^2}{12} + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta'_p + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta'_q - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\delta'_r + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\delta'_s \quad (\text{H.2})$$

$$M'_q = -\frac{wL^2}{12} + \left(\frac{2EI}{L}\right)\theta'_p + \left(\frac{4EI}{L}\right)\theta'_q - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\delta'_r + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\delta'_s \quad (\text{H.3})$$

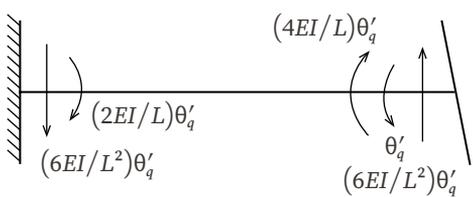
Figura H.3. Elementos mecánicos ocasionados por desplazamientos lineales y angulares



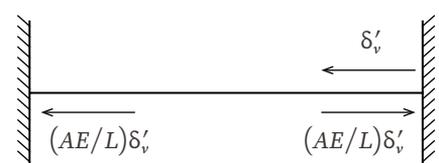
a) Giro θ'_p



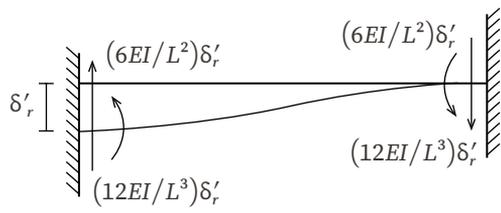
e) Desplazamiento δ'_u



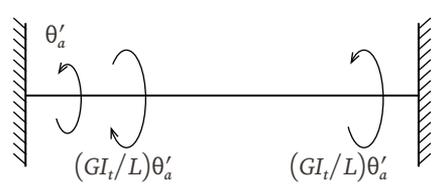
b) Giro θ'_q



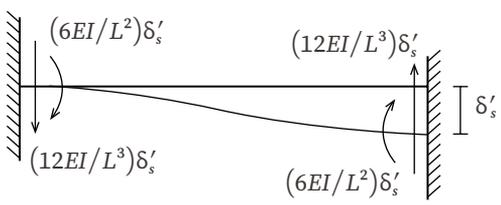
f) Desplazamiento δ'_u



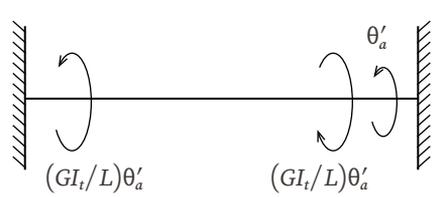
c) Desplazamiento δ'_r



g) Giro θ'_a



d) Desplazamiento δ'_s



h) Giro θ'_b

$$V_r' = -\frac{wL}{2} - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_p' - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_q' + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)\delta_r' - \left(\frac{12EI}{L^3}\right)\delta_s' \quad (\text{H.4})$$

$$V_s' = -\frac{wL}{2} + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_p' + \left(\frac{6EI}{L^2}\right)\theta_q' - \left(\frac{12EI}{L^3}\right)\delta_r' - \left(\frac{12EI}{L^3}\right)\delta_s' \quad (\text{H.5})$$

$$N_u' = \frac{AE}{L}\delta_u' - \frac{AE}{L}\delta_v' \quad (\text{H.6})$$

$$N_v' = \frac{AE}{L}\delta_u' + \frac{AE}{L}\delta_v' \quad (\text{H.7})$$

$$M_a' = \frac{GI_t}{L}\theta_a' - \frac{GI_t}{L}\theta_b' \quad (\text{H.8})$$

$$M_b' = \frac{GI_t}{L}\theta_a' - \frac{GI_t}{L}\theta_b' \quad (\text{H.9})$$

En una viga de sección rectangular de dimensiones b por h , el momento polar de inercia debido a la torsión se puede valorar en forma aproximada así (Deaufait, *et. al.*, 1970):

$$I_t \cong \frac{hb^3}{3} \left[1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left(\frac{b}{h} \right)^5 \right] \quad (\text{H.10})$$

$$h \geq b$$

los elementos mecánicos que transmite la barra al nudo están dados por:

$$\bar{p}_m = \bar{K}_m \bar{\delta}_m + \bar{P}_m^e \quad (\text{H.11})$$

en el cual:

$$\bar{K}_m = \begin{bmatrix} \theta'_p & \theta'_q & \delta'_r & \delta'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_a & \theta'_b \\ \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI}{L^2} & \frac{4EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & -\frac{GI_t}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & \frac{GI_t}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{matrix}$$

$$\bar{\delta}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad P_m^e = \begin{Bmatrix} wL^2/12 \\ -wL^2/12 \\ -wL^2/12 \\ -wL^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(H.12)}$$

(H.13)

(H.14)

donde:

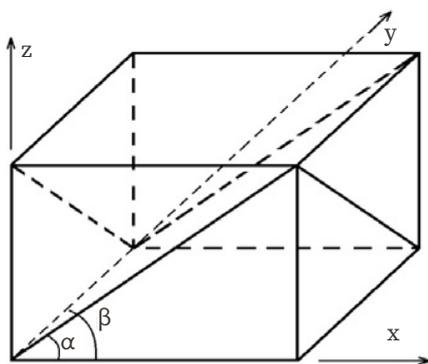
\bar{K}_m : es la matriz de rigidez de la barra m .

$\bar{\delta}'_m$: es el vector de desplazamientos de la barra m .

P_m^e : es el vector de cargas de empotramiento de la barra m .

Enseguida, veamos la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional que está formada por marcos planos ortogonales entre sí, especificando que en cada marco pueden existir barras inclinadas (figura H.4).

FIGURA H.4. Marcos planos ortogonales entre sí



$$\theta'_p = \theta_p$$

$$\theta'_q = \theta_q$$

$$\delta'_r = \delta_r \cos(\alpha) - \delta_u \sin(\alpha)$$

$$\delta'_s = \delta_s \cos(\alpha) - \delta_v \sin(\alpha)$$

$$\delta'_v = \delta_s \cos(\alpha) + \delta_v \sin(\alpha)$$

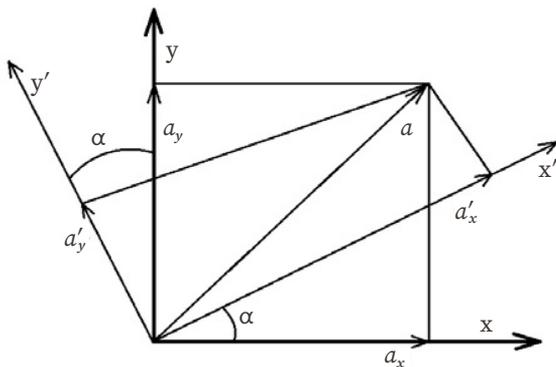
$$\delta'_v = \delta_s \cos(\alpha) + \delta_v \sin(\alpha)$$

$$\theta'_a = \theta''_a \cos(\alpha)$$

$$\theta'_b = \theta''_b \cos(\alpha)$$

En la figura H.5, se presenta la transformación de un vector del sistema global $x-y$ al sistema local $x'-y'$ cuando se aplican las ecuaciones de la figura H.5 a la barra inclinada de la figura H.6 (despreciando el efecto de torsión con el eje de giro vertical):

FIGURA H.5. Transformación de un vector del sistema global $x-y$ al sistema local $x'-y'$



$$a'_x = a_x \cos(\alpha) - a_y \sin(\alpha)$$

$$a'_y = a_x \sin(\alpha) + a_y \cos(\alpha)$$

Cuando se aplican las expresiones de la figura H.5 a la barra de la figura H.7, se tiene:

FIGURA H.6. Desplazamientos de la barra inclinada

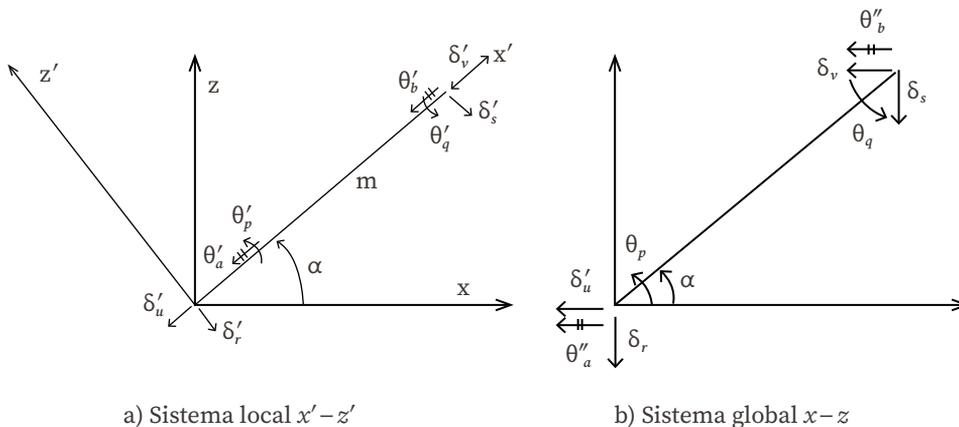
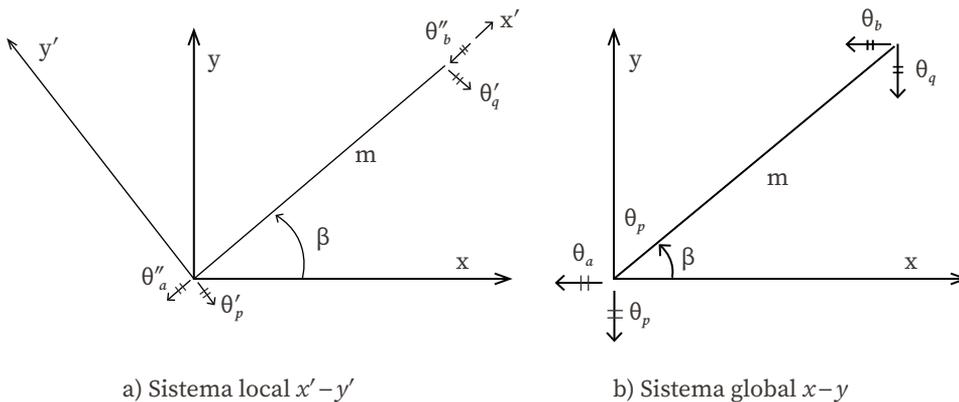


FIGURA H.7. Giros de la barra paralelos al plano $x-y$



sean:

$$\bar{\delta}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad \bar{\delta}_m = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad \text{(H.15)}$$

$$\text{(H.16)}$$

es decir:

$$\bar{\delta}'_m = \bar{T}_m \bar{\delta}_m \quad \text{(H.17)}$$

donde:

(H.18)

$$\bar{T}_m = \begin{bmatrix} \theta'_p & \theta'_q & \delta'_r & \delta'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_a & \theta'_b \\ \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\beta) & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\beta) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & -\text{sen}(\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & -\text{sen}(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) \\ & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{matrix}$$

Los desplazamientos de los sistemas local y global están relacionados mediante las expresiones:

$$\theta'_p = \theta_p \cos(\beta) - \theta_a \text{sen}(\beta) \quad (\text{H.19})$$

$$\theta'_q = \theta_q \cos(\beta) - \theta_b \text{sen}(\beta) \quad (\text{H.20})$$

$$\delta'_r = \delta_r \cos(\alpha) - \delta_u \text{sen}(\alpha) \quad (\text{H.21})$$

$$\delta'_s = \delta_s \cos(\alpha) - \delta_v \text{sen}(\alpha) \quad (\text{H.22})$$

$$\delta'_u = \delta_r \text{sen}(\alpha) + \delta_u \text{cos}(\alpha) \quad (\text{H.23})$$

$$\delta'_v = \delta_s \text{sen}(\alpha) + \delta_v \text{cos}(\alpha) \quad (\text{H.24})$$

$$\theta'_a = \theta_p \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta) + \theta_a \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) \quad (\text{H.25})$$

$$\theta'_b = \theta_q \text{cos}(\alpha) \text{sen}(\beta) + \theta_b \text{cos}(\alpha) \text{cos}(\beta) \quad (\text{H.26})$$

En el sistema local $x' - z'$ (figura H.6):

$$\bar{P}_m = \bar{K}_m \bar{\delta}_m + \bar{P}_m^e \quad (\text{H.27})$$

pero:

$$\bar{P}_m^e = \bar{T}_m \bar{P}_m^e \quad (\text{H.28})$$

y

$$\bar{P}'_m = \bar{T}_m \bar{P}_m \quad (\text{H.29})$$

al sustituir la ecuación H.29 en la ecuación H.27, se tiene:

$$\bar{T}_m \bar{P}_m = \bar{K}_m \bar{\delta}_m + \bar{P}_m^e \quad (\text{H.30})$$

cuando las ecuaciones H.17 y H.28 son sustituidas en la ecuación H.30:

$$\bar{T}_m \bar{P}_m = \bar{K}'_m \bar{T}_m \bar{\delta}_m + \bar{T}_m \bar{P}_m^e$$

premultiplicando por: \bar{T}_m^{-1}

$$\bar{P}_m = \bar{T}_m^{-1} \bar{K}'_m \bar{T}_m \bar{\delta}_m + \bar{P}_m^e$$

en el cual:

(H.31)

$$\bar{T}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)} & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)} \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & \text{sen}(\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & \text{sen}(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix}$$

en el sistema global:

$$\bar{P}_m = \bar{K}_m \bar{\delta}_m + \bar{P}_m^e \quad (\text{H.32})$$

en donde:

$$\bar{K}_m = \bar{T}_m^{-1} \bar{K}'_m \bar{T}_m \quad (\text{H.33})$$

sustituyendo las ecuaciones H.12, H.18 y H.31 en la ecuación H.33, se obtiene la matriz K_m , la cual se muestra en la tabla H.1:

para el vector de cargas de empotramiento:

$$\bar{P}_m^e = \bar{T}^{-1} \bar{P}_m^o \quad (\text{H.34})$$

para una barra sometida a carga uniforme, w , en el sistema local $x' - z'$, el vector \bar{P}_m^e vale:

$$P_m^e = \begin{pmatrix} wL^2/12 \cos \beta \\ -wL^2/12 \cos \beta \\ -wL/2 \cos \alpha \\ -wL/2 \cos \alpha \\ wL/2 \sin \alpha \\ wL/2 \sin \alpha \\ -wL^2/12 \sin \beta \\ -wL^2/12 \sin \beta \end{pmatrix} \quad (\text{H.35})$$

La ecuación H.33 proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada m para el sistema coordenado general x y z . Las ecuaciones H.34 o H.35 proporcionan el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada m para el sistema coordenado general x y z .

En resumen, primero se utiliza la tabla H.1 y las ecuaciones H.34 o H.35 para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de las barras de la estructura. La matriz de rigideces de la estructura completa se obtiene mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura; el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura. Sustituyendo en la ecuación H.1, se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura; por tanto, resolviendo el sistema de ecuaciones

se obtienen los desplazamientos correspondientes al sistema global x y z (vector δ). Los elementos mecánicos en las barras se obtienen de la siguiente forma: se determinan los desplazamientos en el sistema local con el empleo de la ecuación H.17 o las ecuaciones H.19 a H.26:

$$\bar{\delta}'_m = \bar{T}_m \bar{\delta}_m \quad \text{(ecuación H.17)}$$

Tabla H.1. Matriz de rigidez, barra inclinada

θ_p	θ_q	δ_r	δ_s	δ_u	δ_v	θ_a	θ_b	
$(4EI/L)\cos^2\beta + (GI_t/L)\text{sen}^2\beta$	$(2EI/L)\cos^2\beta - (GI_t/L)\text{sen}^2\beta$	$-(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$(6EI/L^2)\cos\beta^* \text{sen}\alpha$	$-(6EI/L^2)^* \cos\beta \text{sen}\alpha$	$(-4EI/L + GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	$(-2EI/L - GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	θ_p
$(2EI/L)\cos^2\beta - (GI_t/L)\text{sen}^2\beta$	$(4EI/L)\cos^2\beta + (GI_t/L)\text{sen}^2\beta$	$-(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$(6EI/L^2)\cos\beta^* \text{sen}\alpha$	$-(6EI/L^2)^* \cos\beta \text{sen}\alpha$	$(-2EI/L - GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	$(4EI/L + GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	θ_q
$-(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$-(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$(12EI/L^3)\cos^2\alpha + (AE/L)\text{sen}^2\alpha$	$-(12EI/L^3)\cos^2\alpha - (AE/L)\text{sen}^2\alpha$	$(AE/L - 12EI/L^3)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$(12EI/L^3 - AE/L)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$(6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	$6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	δ_r
$(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$(6EI/L^2)\cos\beta^* \cos\alpha$	$-(12EI/L^3)\cos^2\alpha - (AE/L)\text{sen}^2\alpha$	$(12EI/L^3)\cos^2\alpha + (AE/L)\text{sen}^2\alpha$	$(12EI/L^3 - AE/L)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$(AE/L - 12EI/L^3)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$-(6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	$-(6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	δ_s
$(6EI/L^2)\cos\beta^* \text{sen}\alpha$	$(6EI/L^2)\cos\beta^* \text{sen}\alpha$	$(AE/L - 12EI/L^3)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$(12EI/L^3 - AE/L)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$(12EI/L^3)\text{sen}^2\alpha + (AE/L)\cos^2\alpha$	$-(12EI/L^3)\text{sen}^2\alpha - (AE/L)\cos^2\alpha$	$-(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	$-(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	δ_u
$-(6EI/L^2)^* \cos\beta \text{sen}\alpha$	$-(6EI/L^2)^* \cos\beta \text{sen}\alpha$	$(12EI/L^3 - AE/L)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$(AE/L - 12EI/L^3)^* \cos\alpha \text{sen}\alpha$	$-(12EI/L^3)\text{sen}^2\alpha - (AE/L)\cos^2\alpha$	$(12EI/L^3)\text{sen}^2\alpha + (AE/L)\cos^2\alpha$	$(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	$(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	δ_v
$(-4EI/L + GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	$(-2EI/L - GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	$(6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	$-(6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	$-(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	$(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	$(4EI/L)\text{sen}2\beta + (GI_t/L)\cos^2\beta$	$(2EI/L)\text{sen}^2\beta - (GI_t/L)\cos^2\beta$	θ_a
$(-2EI/L - GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	$(-4EI/L + GI_t/L)^* \cos\beta \text{sen}\beta$	$6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	$-(6EI/L^2)^* \cos\alpha \text{sen}\beta$	$-(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	$(6EI/L^2)^* \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$	$(2EI/L)\text{sen}2\beta - (GI_t/L)\cos^2\beta$	$(4EI/L)\text{sen}^2\beta + (GI_t/L)\cos^2\beta$	θ_b

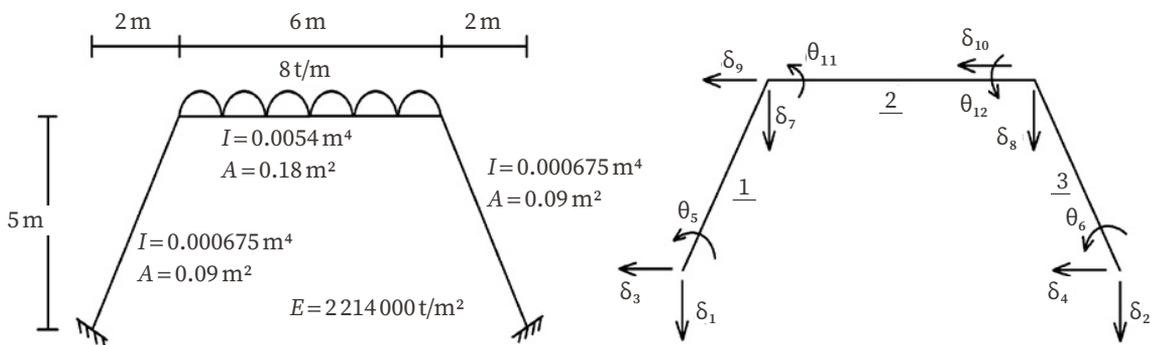
Los elementos mecánicos en la barra m se determinan con la ecuación H.11 o con las ecuaciones H.2 a H.9:

$$\bar{p}_m = \bar{K}_m \bar{\delta}_m + \bar{P}_m^e \quad \text{(ecuación H.11)}$$

Ejemplo H.1

Se deben determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la figura H.8 a.

FIGURA H.8. Grados de libertad para marco inclinado



a) Geometría y cargas en la estructura

b) Numeración de barras y grados de libertad

Solución

Para empezar, numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (figura H.8 b). En este ejemplo, no se toman en cuenta los efectos de torsión ($\beta = 0$).

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s	δ_u	δ_v	α grados
1	θ_5	θ_{11}	δ_1	δ_7	δ_3	δ_9	68.2
2	θ_{11}	θ_{12}	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	0
3	θ_6	θ_{12}	δ_2	δ_8	δ_4	δ_{10}	111.8

Al emplear la tabla H.1, se obtienen las matrices de rigidez de las barras 1, 2 y 3, las cuales se muestran en las tablas H.2.1, H.2.2 y H.2.3. La matriz de rigidez de la estructura completa en el sistema global es la suma de las matrices de todas y cada una de las barras.

Tabla H.2.1. Cálculo de la matriz de rigidez de la barra inclinada 1

BARRA 1									
5		1	7	3	9				
τ_p	τ_q	δ_r	δ_s	δ_u	δ_v	τ_a	τ_b		
1110.0490	555.0247	-114.8326	114.8326	287.0818	-287.0818	0	0	τ_p	
555.0247	1110.0490	-114.8326	114.8326	287.0818	-287.0818	0	0	τ_q	5
-114.8326	-114.8326	31913.8200	-31913.8200	12719.5800	-12719.5800	0	0	δ_r	
114.8326	114.8326	-31913.8200	31913.8200	-12719.5800	12719.5800	0	0	δ_s	1
287.0818	287.0818	12719.5800	-12719.5800	5202.6650	-5202.6650	0	0	δ_u	7
-287.0818	-287.0818	-12719.5800	12719.5800	-5202.6650	5202.6650	0	0	δ_v	3
0	0	0	0	0	0	0	0	τ_a	9
0	0	0	0	0	0	0	0	τ_b	

Tabla H.2.2. Cálculo de la matriz de rigidez de la barra horizontal 2

BARRA 2									
11	12	7	8	9	10				
τ_p	τ_q	δ_r	δ_s	δ_u	δ_v	τ_a	τ_b		
7970.4000	3985.2000	-1992.6000	1992.6000	0	0	0	0	τ_p	
3985.2000	7970.4000	-1992.6000	1992.6000	0	0	0	0	τ_q	11
-1992.6000	-1992.6000	664.2000	-664.2000	0	0	0	0	δ_r	12
1992.6000	1992.6000	-664.2000	664.2000	0	0	0	0	δ_s	7
0	0	0	0	66420.0000	-66420.0000	0	0	δ_u	8
0	0	0	0	-66420.0000	66420.0000	0	0	δ_v	9
0	0	0	0	0	0	0	0	τ_a	10
0	0	0	0	0	0	0	0	τ_b	

Tabla H.2.3. Cálculo de la matriz de rigidez de la barra inclinada 3

BARRA 3									
6	12	2	8	4	10				
τ_p	τ_q	δ_r	δ_s	δ_u	δ_v	τ_a	τ_b		
1110.0490	555.0247	114.8326	-114.8326	287.0818	-287.0818	0	0	τ_p	
555.0247	1110.0490	114.8326	-114.8326	287.0818	-287.0818	0	0	τ_q	6
114.8326	114.8326	31913.8200	-31913.8200	-12719.5800	12719.5800	0	0	δ_r	12
-114.8326	-114.8326	-31913.8200	31913.8200	12719.5800	-12719.5800	0	0	δ_s	2
287.0818	287.0818	-12719.5800	12719.5800	5202.6650	-5202.6650	0	0	δ_u	8
-287.0818	-287.0818	12719.5800	-12719.5800	-5202.6650	5202.6650	0	0	δ_v	4
0	0	0	0	0	0	0	0	τ_a	10
0	0	0	0	0	0	0	0	τ_b	

Con la suma de las matrices de las barras 1, 2 y 3 (tablas H.2.1, H.2.2 y H.2.3), obtenemos:

$$\bar{K}_m = \begin{bmatrix} \theta_7 & \theta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12} \\ 32578.02 & -664.2 & 12719.58 & 0 & -1877.77 & -1992.6 \\ -664.2 & 32578.02 & 0 & -12719.58 & 1992.6 & -1877.77 \\ 12719.58 & 0 & 71622.66 & -66420 & -287.08 & 0 \\ 0 & -12719.58 & -66420 & 71622.66 & 0 & -287.08 \\ -1877.77 & 1992.6 & -287.08 & 0 & 9080.45 & 3985.2 \\ -1992.6 & 1877.77 & 0 & -287.08 & 3985.2 & 3985.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \end{matrix}$$

$$P_e = \begin{matrix} \text{GL} \\ \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \\ -24 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \quad P_c = \begin{matrix} \text{GL} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

enseguida, planteamos la ecuación matricial:

$$\bar{K} \cdot \bar{\delta} + \bar{P}_e + \bar{P}_c = 0$$

al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\delta_7 = 0.00080245 \text{ m} \qquad \delta_8 = 0.00080245 \text{ m}$$

$$\delta_9 = -0.00008378 \text{ m} \qquad \delta_{10} = 0.00008378 \text{ m}$$

$$\theta_{11} = -0.00473308 \text{ rad} \qquad \theta_{12} = 0.00473308 \text{ rad}$$

además, los elementos mecánicos en cada barra se hallan con el empleo de la ecuación H.11:

$$\bar{P}'_1 = \bar{K}'_1 \bar{\delta}'_1 + \bar{P}'_1{}^e$$

las matrices de cada barra en el sistema local (\bar{K}'_m) se obtienen con la ecuación H.12. En las tablas H.3.1, H.3.2 y H.3.3, se exhiben estas matrices para las tres barras de la estructura.

Tabla H.3.1. Cálculo de la matriz de rigidez de la barra 1

BARRA 1									
5	11	1	7	3	9				
τ'_p	τ'_q	δ'_r	δ'_s	δ'_u	δ'_v	τ'_a	τ'_b		
1110.0490	555.0247	-309.1960	309.1960	0	0	0	0	τ'_p	5
555.0247	1110.0490	-309.1960	309.1960	0	0	0	0	τ'_q	11
-309.1960	-309.1960	114.8327	-114.8327	0	0	0	0	δ'_r	1
309.1960	309.1960	-114.8327	114.8327	0	0	0	0	δ'_s	7
0	0	0	0	37001.6500	-37001.6500	0	0	δ'_u	3
0	0	0	0	-37001.6500	37001.6500	0	0	δ'_v	9
0	0	0	0	0	0	0	0	τ'_a	
0	0	0	0	0	0	0	0	τ'_b	

Tabla H.3.2. Cálculo de la matriz de rigidez de la barra 2

BARRA 2									
11	12	7	8	9	10	τ'_a	τ'_b		
τ'_p	τ'_q	δ'_r	δ'_s	δ'_u	δ'_v			τ'_p	11
7970.4000	3985.2000	-1992.6000	1992.6000	0	0	0	0	τ'_q	12
3985.2000	7970.4000	-1992.6000	1992.6000	0	0	0	0	δ'_r	7
-1992.6000	-1992.6000	664.2000	-664.2000	0	0	0	0	δ'_s	8
1992.6000	1992.6000	-664.2000	664.2000	0	0	0	0	δ'_u	9
0	0	0	0	66420.0000	-66420.0000	0	0	δ'_v	10
0	0	0	0	-66420.0000	66420.0000	0	0	τ'_a	
0	0	0	0	0	0	0	0	τ'_b	
0	0	0	0	0	0	0	0		

Tabla H.3.3. Cálculo de la matriz de rigidez de la barra 3

BARRA 3									
6	12	2	8	4	10	τ'_a	τ'_b		
τ'_p	τ'_q	δ'_r	δ'_s	δ'_u	δ'_v			τ'_p	6
1110.0490	555.0247	-309.1960	309.1960	0	0	0	0	τ'_q	12
555.0247	1110.0490	-309.1960	309.1960	0	0	0	0	δ'_r	2
-309.1960	-309.1960	114.8327	-114.8327	0	0	0	0	δ'_s	8
309.1960	309.1960	-114.8327	-114.8327	0	0	0	0	δ'_u	4
0	0	0	0	37001.6500	-37001.6500	0	0	δ'_v	10
0	0	0	0	-37001.6500	37001.6500	0	0	τ'_a	
0	0	0	0	0	0	0	0	τ'_b	
0	0	0	0	0	0	0	0		

El vector de desplazamientos $\bar{\delta}'_m$ se halla con el uso de las ecuaciones H.19 a H.26, mientras que, los elementos mecánicos en cada barra (sistema local) se determinan con el empleo de las ecuaciones H.2 a H.9. Las tablas H.4.1, H.4.2 y H.4.3 contienen el cómputo de desplazamientos y elementos mecánicos para las barras 1, 2 y 3.

TABLA H.4.1. Cálculo de desplazamientos y elementos mecánicos, barra 1

BARRA 1								
5	11	1	7	3	9			
τ'_p	τ'_q	δ'_r	δ'_s	δ'_u	δ'_v	τ'_a	τ'_b	
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_p = -2.51077$
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_q = -5.13775$
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_r = 1.420296$
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_s = -1.420296$
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_u = -26.41699$
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_v = 26.41699$
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_a = 0.0000$
0	-0.00473	0	0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_b = 0.0000$

Tabla H.4.2. Cálculo de desplazamientos y elementos mecánicos, barra 2

BARRA 2								
5	11	1	7	3	9			
τ'_p	τ'_q	δ'_r	δ'_s	δ'_u	δ'_v	τ'_a	τ'_b	
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$M'_p = 5.137729$
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$M'_q = -5.137729$
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$V'_r = 24.00000$
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$V'_s = 24.00000$
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$V'_u = -11.12933$
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$V'_v = 11.12933$
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$M'_a = 0.0000$
-0.00473	0.00473	0.000802	0.000802	-0.000083	0.000083	0	0	$M'_b = 0.0000$

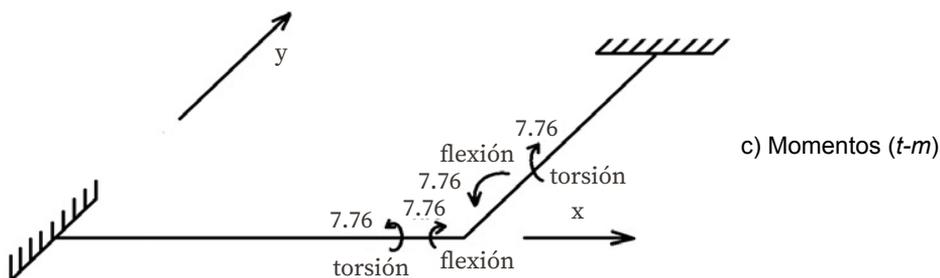
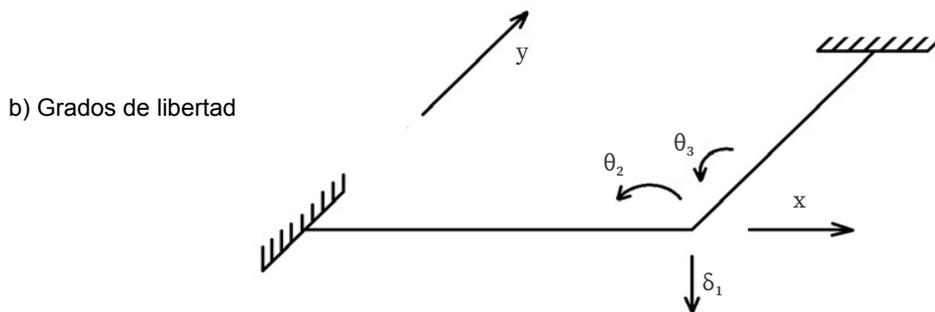
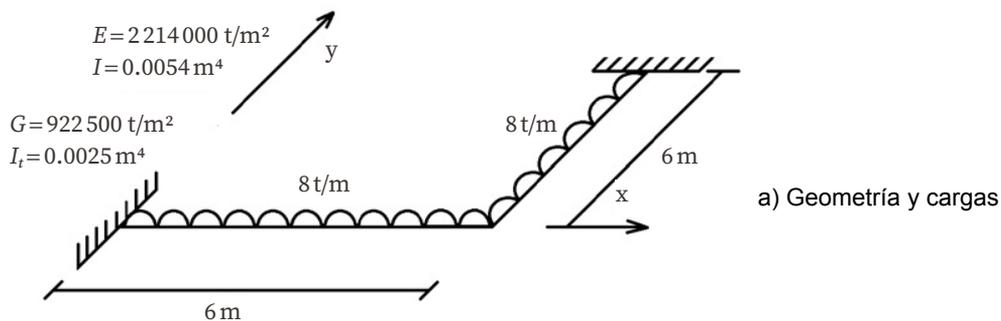
TABLA H.4.3. Cálculo de desplazamientos y elementos mecánicos, barra 3

BARRA 3								
5	11	1	7	3	9			
τ'_p	τ'_q	δ'_r	δ'_s	δ'_u	δ'_v	τ'_a	τ'_b	
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_p = 2.51077$
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_q = 5.13775$
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_r = -1.420296$
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_s = 1.420296$
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_u = -26.41699$
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$V'_v = 26.41699$
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_a = 0.0000$
0	0.00473	0	-0.000375	0	0.000713	0	0	$M'_b = 0.0000$

Ejemplo H.2

Se deben determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la figura H.9 a. Despreciar el fenómeno de acortamiento de barras.

FIGURA H.9. Grados de libertad y momentos en marco horizontal



Solución

Para iniciar, numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (figura H.9 b).

Sistema global $x-y$:

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s	θ_a	θ_b
1	-	θ_2	-	δ_1	-	θ_3
2	θ_2	-	δ_1	-	θ_3	-

Sistema local $x'-y'$:

Barra	θ'_p	θ'_q	δ'_r	δ'_s	θ'_a	θ'_b
1	-	θ'_2	-	δ'_1	-	θ'_3
2	θ'_3	-	δ'_1	-	θ'_2	-

Los desplazamientos están relacionados entre sí de acuerdo con las ecuaciones H.19 a H.26:

$$\text{barra 1:} \quad \delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = \theta_3,$$

$$\text{barra 2:} \quad \delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = -\theta_3,$$

Las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento en el sistema global se hallan con los valores de la tabla H.1 y las ecuaciones H.34 o H.35:

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_1 & \theta_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.2 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_1 & \theta_3 \\ 384.3 & 0 & 0 \\ 0 & 664.2 & 1992.60 \\ 0 & 1992.60 & 7970.40 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez global es la suma de las matrices de cada una de las barras, es decir:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 1328.40 & 1992.60 & 1992.60 \\ 1992.60 & 8354.78 & 0 \\ 1992.60 & 0 & 8354.78 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P^e = \begin{bmatrix} -48 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix} ; \quad P^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix} ;$$

enseguida, planteamos la ecuación matricial:

$$\bar{K} \cdot \bar{\delta} + \bar{P}_e + \bar{P}_c = 0$$

cuando se resuelve el sistema de ecuaciones, se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\delta_1 = 0.09671 \text{ m}, \quad \theta_2 = -0.020194, \quad \theta_3 = -0.020194$$

Para obtener los elementos mecánicos en las barras, trabajamos con el sistema local, en el cual las matrices \bar{K}_m valen (ecuación H.12):

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 & \delta'_1 & \theta'_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.2 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{matrix} ; \quad \delta'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 & \delta'_1 & \theta'_2 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.2 & 0 \\ 0 & 0 & 384.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{matrix} ; \quad \delta'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{bmatrix}$$

si aplicamos la ecuación H.11, tenemos:

$$\text{barra 1:} \quad M'_2 = 7.75 \text{ t-m} \quad V'_1 = 0.0 \quad M'_3 = -7.76 \text{ t-m}$$

$$\text{barra 2:} \quad M'_3 = -7.75 \text{ t-m} \quad V'_1 = 0.0 \quad M'_2 = -7.76 \text{ t-m}$$

I.1. Vibraciones libres

Ante todo, consideremos un sistema de un grado de libertad como el que se muestra en la figura I.1. Se trata de un cuerpo de masa, M , unido a una base firme mediante una barra de cierta rigidez lateral. La rigidez, K , se define como el cociente de la fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad del cuerpo, dividido entre el desplazamiento horizontal, u , que produce dicha fuerza, es decir:

$$K = \frac{P}{U} \quad (I.1)$$

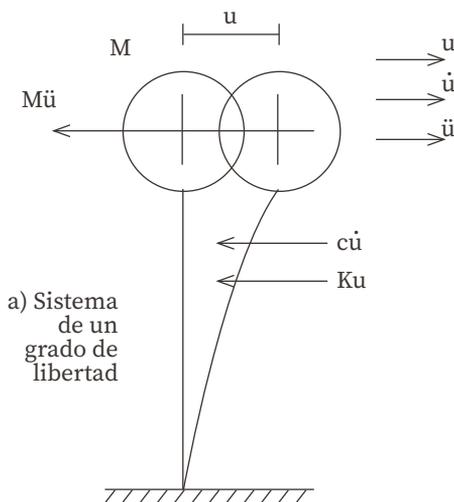
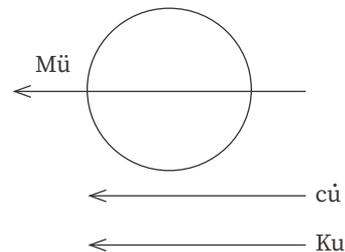


FIGURA I.1. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad



El amortiguamiento, C , toma en cuenta la disipación de la energía que se produce durante el movimiento (fundamentalmente por fricción interna en el sistema). Se ha observado que la disipación de la energía se puede representar mediante una fuerza que se opone al movimiento, la cual es proporcional a la velocidad del cuerpo, esta fuerza vale Cu .

Por el principio de D'Alembert, la fuerza de la inercia es igual al producto, $M\ddot{u}$, pero tiene sentido contrario a la aceleración. Esta fuerza de inercia se agrega al equilibrio dinámico del cuerpo.

El fenómeno físico que estamos estudiando consiste en dar, inicialmente, un desplazamiento horizontal, δ_0 , al cuerpo para, después, soltarlo y dejarlo vibrar libremente.

La ecuación de movimiento (equilibrio dinámico, figura I.1 b) da lugar a la siguiente expresión:

$$M\ddot{u} + Cu + Ku = 0 \quad (\text{I.2})$$

ahora, supongamos que inicialmente no hubiera amortiguamiento, $C=0$ en la ecuación I.1:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (\text{I.3})$$

La ecuación I.2 es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Su ecuación característica es:

$$M\lambda^2 + K\lambda^0 = 0; \quad M\lambda^2 + K = 0 \quad (\text{I.4})$$

la solución de la ecuación característica es:

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{K}{M}} i$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{-\frac{K}{M}} = -\sqrt{\frac{K}{M}} i$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{I.5})$$

en donde:

ω : es la frecuencia circular natural del sistema.

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por:

$$u = C_1 e^{at} \cos(bt) + C_2 e^{at} \sin(bt)$$

donde:

a : es la parte real.

b : es la parte imaginaria del número complejo.

Por lo tanto:

$$u = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (\text{I.6})$$

$$u' = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) \quad (\text{I.7})$$

según las condiciones iniciales $t=0$ y $u=0$. Se reemplaza en la ecuación I.6, $C_2=0$. Para $t=0$, $u=\delta_o$. Sustituyendo en la ecuación I.5, $\delta_o=C_1$ y

$$u = \delta_o \cos(\omega t) \quad (\text{I.8})$$

La frecuencia natural del sistema se define como el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{I.11})$$

$$f = \frac{\sqrt{\frac{M}{K}}}{2\pi} \quad (\text{I.12})$$

la frecuencia mide el número de ciclos de movimiento por unidad de tiempo.

La velocidad de la masa se halla derivando la ecuación I.7 con respecto al tiempo.

$$\dot{u} = \omega \delta_o \text{sen}(\omega t) \quad (\text{I.13})$$

La aceleración se obtiene derivando la ecuación I.12 en relación con el tiempo:

$$\ddot{u} = -\omega^2 \delta_o \cos(\omega t) = -\omega^2 u \quad (\text{I.14})$$

y vemos que la aceleración es igual al desplazamiento multiplicado por el cuadrado de ω con signo contrario.

Ejemplo I.1

Una masa se mueve en vibración libre con una amplitud de 4 cm y un periodo de 0.75 s. Hallar la máxima velocidad y la máxima aceleración, estimando un amortiguamiento nulo.

Solución

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 8.378 \text{ s}^{-1}$$

$$\dot{u} = -8.738 (4) = -33.51 \text{ cm/s}$$

$$\ddot{u} = -280.735 \text{ cm/s}^2$$

Ejemplo I.2

En un sistema de un grado de libertad se da un desplazamiento inicial $u_0 = 5.08 \text{ cm}$ a una masa de 3.63 kg de peso ($\text{kg} = \text{kg}_f$). La constante del resorte es $K = 0.7143 \text{ kg/cm}$. Calcular la frecuencia del sistema en ciclos por segundo, considerando un amortiguamiento nulo.

Solución

$$M = 3.63/9.81 = 0.37 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

$$K = 71.43 \text{ kg/m}$$

$$\omega = (K/M)^{1/2} = 13.894 \text{ s}^{-1}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.211 \text{ ciclos/s} = 2.211 \text{ Hz}$$

I.2. Vibraciones libres amortiguadas

Ahora, consideremos que sí hay disipación de energía en el sistema (figura I.1), es decir, existe amortiguamiento: $C \neq 0$. El movimiento queda representado por la ecuación I.1.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \tag{I.15}$$

La ecuación característica es:

$$M\lambda^2 + C\lambda + K = 0; \quad M\lambda^2 + C\lambda + K = 0 \quad (\text{I.16})$$

las raíces de la ecuación I.14 son:

$$\lambda_1 = -\frac{C}{2M} + \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

$$\lambda_2 = +\frac{C}{2M} - \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

las raíces λ_1 y λ_2 pueden ser reales o complejas, dependiendo del valor de

radical, $\sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$ es decir, es función del signo de la cantidad: $\left(\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}\right)$

Se distinguen tres casos:

1) Dos raíces reales diferentes.

Si las raíces son reales $\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} > 0$. La solución de la ecuación I.1 está dada por:

$$U = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{I.17})$$

en estas condiciones, el sistema no vibra, sino que la masa después de ser desplazada a una distancia, δ_o , regresa a su posición inicial. Este fenómeno ocurre cuando el amortiguamiento, C , es alto.

2) Una raíz real.

Se presenta cuando: $\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} = 0$

solo existe una raíz real que vale:

$$\lambda = -\frac{C}{2M}$$

la solución de la ecuación I.1 es:

$$U = C_1 \lambda e^{\lambda t} + C_2 \lambda e^{\lambda t}$$

$$U = C_1 \lambda e^{\lambda t} + C_2 (t \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t})$$

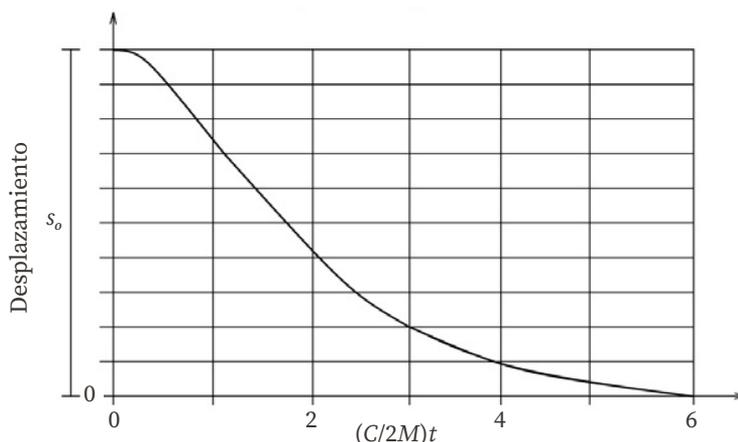
de acuerdo a las condiciones iniciales, para $t=0$, $u = \delta_o$, por lo tanto, $C_1 = \delta_o$. Para $t=0$, $u = 0$ y $C_2 = -\lambda \delta_o$. En consecuencia, la solución de la ecuación I.1 es:

$$U = \delta_o e^{\lambda t} (1 - \lambda t)$$

$$U = \delta_o e^{-\left(\frac{C}{2M}\right)t} \left(1 - \frac{C}{2M} t\right) \quad (\text{I.18})$$

En la figura I.3, se muestra la variación de u en función del tiempo.

FIGURA I.3.
Movimiento para amortiguamiento crítico



El amortiguamiento para esta condición se denomina amortiguamiento crítico y vale:

$$\left(\frac{C_{crit}}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} = 0$$

$$C_{crit} = 2\sqrt{MK} \quad (\text{I.19})$$

3) Dos raíces complejas.

$$\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M} < 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{C}{2M} + \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} i$$

$$\lambda_2 = -\frac{C}{2M} - \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} i$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por:

$$U = C_1 e^{at} \cos(bt) + C_2 e^{at} \sin(bt) \quad (\text{I.20})$$

donde:

a : es la parte real.

b : es la parte imaginaria del número complejo.

Por lo tanto:

$$a = -\frac{C}{2M} \quad (\text{I.21})$$

$$b = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} \quad (\text{I.22})$$

derivando la ecuación I.18:

$$u = e^{at}(-C_1 b \operatorname{sen}(bt) + C_2 b \cos(bt)) \quad (\text{I.23})$$

para $t=0$, $u = \delta_o$. De la ecuación I.18: $C_1 = \delta_o$

para $t=0$, $u=0$. Reemplazando en la ecuación I.21: $C_2 = -a\delta_o/b$

sustituyendo en la ecuación I.18:

$$u = \delta_o e^{at} \left(\cos(bt) - \frac{a}{b} \operatorname{sen}(bt) \right) \quad (\text{I.24})$$

derivando con respecto al tiempo, se obtienen la velocidad y la aceleración:

$$\dot{u} = -\left[\frac{a^2 + b^2}{b}\right] \delta_o e^{at} (\operatorname{sen}(bt)) \quad (\text{I.25})$$

$$u = -\left[\frac{a^2 + b^2}{b}\right] \delta_o e^{at} (a \cdot \operatorname{sen}(bt) + b \cos(bt)) \quad (\text{I.26})$$

sea:

$$\zeta = \frac{C}{C_{crit}} = \frac{C}{2\sqrt{MK}} \quad (\text{I.27})$$

a ζ se le denomina fracción del amortiguamiento crítico:

$$\zeta\omega = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{C}{2M}$$

reemplazando en las ecuaciones I.19 e I.20, tenemos:

$$a = -\zeta\omega \quad (\text{I.28})$$

$$b = \sqrt{\frac{K}{M}} \sqrt{1 - \left(\frac{C}{2\sqrt{MK}}\right)^2}$$

$$b = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{I.29})$$

cuando se reemplaza en la ecuación I.22, se tiene:

$$u = \delta_0 e^{-\zeta\omega t} \left[\cos(\omega\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot t) \right] \quad (\text{I.30})$$

Se debe obtener el periodo en una vibración libre amortiguada. Los máximos y mínimos de u se presentan cuando su derivada con respecto al tiempo vale cero, es decir, cuando la velocidad, \dot{u} , es nula. De la ecuación I.23, los valores extremos ocurren para $bt = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Para conocer, si se trata de un máximo o un mínimo, utilizamos el criterio de la segunda derivada: cuando esta es negativa, se trata de un máximo y cuando esta es positiva, se trata de un mínimo. En la ecuación I.24, vemos que para $bt = n\pi$, $n = 0, 2, 4, \dots$, \ddot{u} es negativa, por lo tanto, ocurren los máximos de u . Para $n = 1, 3, 5, \dots$, \ddot{u} es positiva y ocurren los mínimos. Al tomar el primer ciclo: $bt = 2\pi$, en consecuencia, el periodo T de una vibración libre amortiguada vale:

$$T' = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{I.31})$$

$$T' = \frac{2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{I.32})$$

pero: $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$ (ecuación I.9)

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{I.33})$$

la frecuencia es:

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \omega \sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{I.34})$$

Para valores pequeños de amortiguamiento, vemos que el periodo de una vibración amortiguada es ligeramente mayor que el de una vibración sin amortiguamiento y que su frecuencia circular es ligeramente menor que la de una vibración sin amortiguamiento.

La figura I.4 muestra la variación de u en función del tiempo.

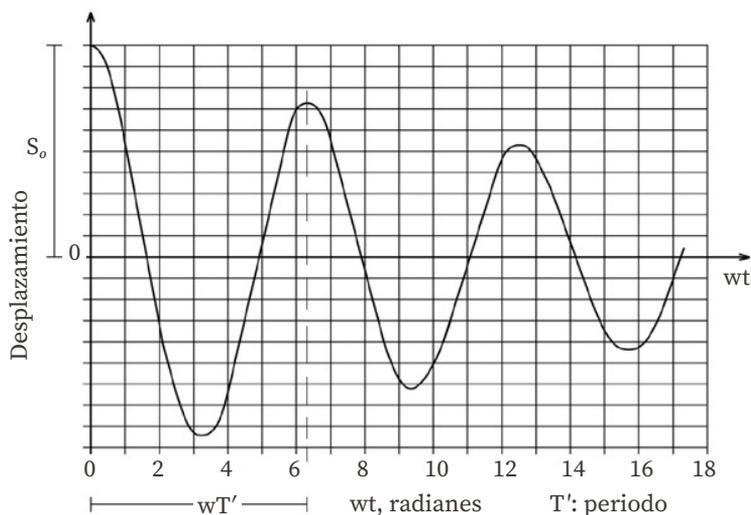


FIGURA I.4.
Vibración libre
con amortiguamiento

Se deben obtener otras expresiones para el cálculo de u . El desplazamiento está dado por:

$$u = e^{at} (C_1 b \cos(bt) + C_2 \operatorname{sen}(bt)) = e^{at} u'$$

$$u' = C_1 b \cos(bt) + C_2 \operatorname{sen}(bt)$$

sea (figura I.5): $u' = u_m \operatorname{sen}(bt + \varphi)$

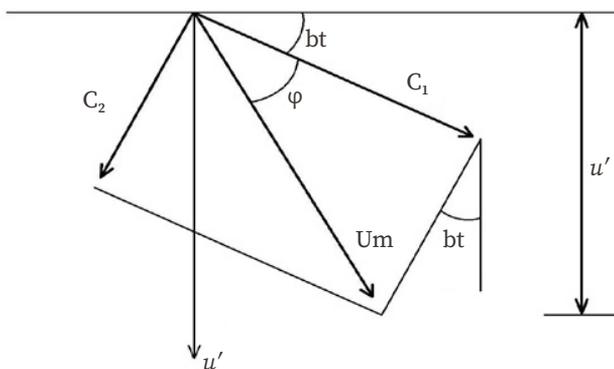


FIGURA I.5. Desplazamiento en función del ángulo de fase

$$u = e^{at} u_m \operatorname{sen}(bt + \varphi) \quad (\text{I.35})$$

$$u' = u_m e^{at} [b \cos(bt + \varphi) + a \operatorname{sen}(bt + \varphi)] \quad (\text{I.36})$$

Condiciones iniciales: para $t=0$: $u = \delta_o$ y $u=0$

sustituyendo en las ecuaciones I.33 e I.34:

$$u_m = \frac{\delta_o}{\operatorname{sen}(\varphi)}$$

$$a \operatorname{sen}(\varphi) = -b \cos(\varphi)$$

$$\tan(\varphi) = -\frac{b}{a} \quad (\text{I.37})$$

por lo anterior:

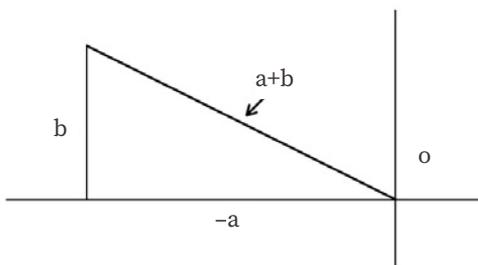
$$u = \frac{\delta_o}{\text{sen } \varphi} e^{at} \text{sen}(bt + \varphi) \quad (\text{I.38})$$

$$u' = \frac{\delta_o}{\text{sen } \varphi} e^{at} [b \cos(bt + \varphi) + a \text{sen}(bt + \varphi)] \quad (\text{I.39})$$

$$\ddot{u} = \frac{\delta_o}{\text{sen } \varphi} e^{at} [2ab \cos(bt + \varphi) + (a^2 - b^2) \text{sen}(bt + \varphi)] \quad (\text{I.40})$$

así (figura I.6):

FIGURA I.6.
Determinación
del ángulo de fase



$$\text{sen } \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{I.41})$$

sustituyendo las ecuaciones I.26 e I.27 en la ecuación I.39:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \omega$$

$$\text{sen } \varphi = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad (\text{I.42})$$

Ejemplo I.3

A una masa de 8 kg ($\text{kg} = \text{kg}_f$) se le da un desplazamiento inicial de 3 cm y se deja vibrar libremente. La rigidez de la barra es de 2 kg/cm. Considerando un porcentaje de amortiguamiento crítico $\zeta = 5\%$, calcular el tiempo que tarda en alcanzar la posición de desplazamiento nulo, así como, la velocidad y la aceleración para ese instante.

Solución

$$M = 8/9.81 = 0.8155 \text{ kg s}^2/\text{m}$$

$$\zeta = \frac{C}{2\sqrt{MK}}, \quad C = 2\zeta\sqrt{MK} = 1.2771 \text{ kg s/m}$$

Aplicando las ecuaciones I.19 e I.20:

$$a = -0.783020, \quad b = 15.64082$$

usando la ecuación I.35:

$$\tan \varphi = -15.64082 / (-0.78302) = 19.97499$$

$$\varphi = 1.5207755 \text{ rad}$$

aplicando la ecuación I.36 con $u = 0$

$$\text{sen}(15.64082t + 1.5207755) = 0$$

$$t = 0.103627 \text{ s}$$

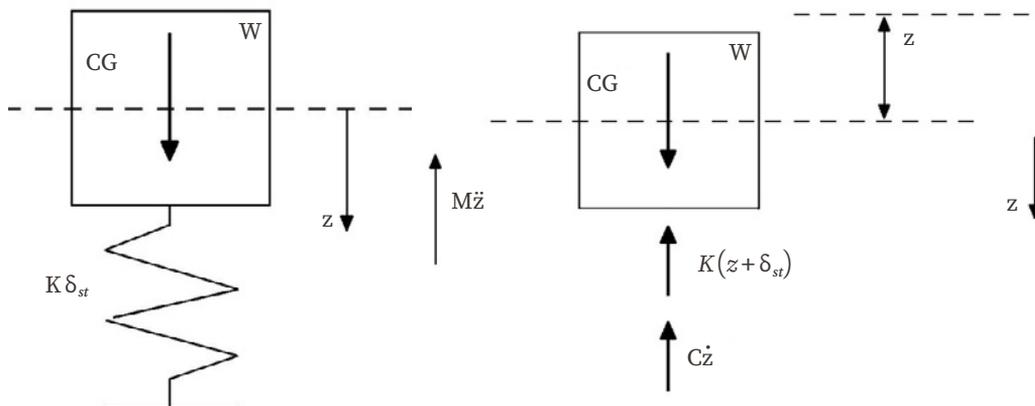
usando las ecuación I.37 e I.38:

$$u = -0.4332 \text{ m/s}$$

$$\ddot{u} = 0.67839 \text{ m/s}^2$$

I.3. Vibración de un bloque vertical

A causa de su propio peso, la fuerza en el resorte vale (figura I.7):



a) Bloque apoyado sobre un resorte

b) Diagrama de cuerpo libre

Figura I.7. Vibración de un bloque vertical

$$W = K \delta_{st}$$

Ahora, supongamos que damos un desplazamiento vertical, δ_o , y dejamos vibrar, libremente, al sistema (figura I.7b).

La ecuación de movimiento es:

$$Mz'' + Cz' + Kz + K\delta_{st} - W = 0$$

$$Mz'' + Cz' + Kz = 0$$

(I.43)

Ejemplo I.4

Una masa de 3.63 kg de peso se apoya sobre un resorte de constante $K=0.3572 \text{ kg/cm}$. La masa se desplaza hacia abajo 5.08 cm y se le permite vibrar libremente. Hallar: (a) el tiempo requerido por la masa para moverse 2.54 cm hacia arriba, después de haberse soltado y (b) la velocidad y aceleración de la masa para esa posición.

Solución

$$\text{a) } M = 0.37 \text{ kg s/m}^2$$

$$K = 35.72 \text{ kg/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = 9.826 \frac{1}{\text{s}}$$

$$z = \delta_o \cos(\omega t) = 5.08 \cos 9.826 t = 2.54$$

$$9.826 t = \text{ang} \cos 0.5, \quad t = 0.1066 \text{ s}$$

$$\text{b) } z = -\delta_o \omega \cos(\omega t) = 43.23 \text{ cm/s}$$

$$\ddot{z} = -\delta_o \omega^2 \cos(\omega t) = 245.13 \text{ cm/s}^2$$

I.4. Vibraciones estacionarias

Se denominan vibraciones estacionarias aquellos movimientos en que la acción sobre el sistema es de tipo armónico.

I.5. Vibraciones forzadas

Si consideramos un cuerpo como el de la figura I.8, el cual se somete a una fuerza estacionaria que está dada por:

$$P = P_0 \text{sen}(\Omega t)$$

la ecuación de movimiento es:

$$Mu'' + Cu' + Ku = P_0 \text{sen}(\Omega t) \quad (\text{I.44})$$

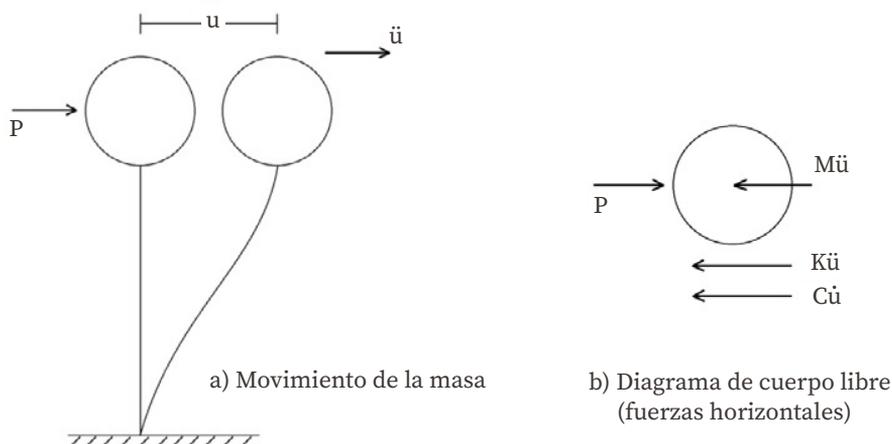


FIGURA I.8. Sistema de un grado de libertad

la respuesta de la masa, después de un lapso inicial cuando se disipa un movimiento por vibración libre amortiguada, está dada por (Newmark y Rosenblueth, 1976):

$$u = \frac{P_0}{K} \frac{\text{sen}(\Omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (\text{I.45})$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\frac{2\zeta\Omega}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (\text{I.46})$$

frecuencia circular: $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Ejemplo I.5

Un motor que pesa 160 kg está apoyado en cuatro resortes que tienen una rigidez de 133.9 kg/cm cada uno. El motor tiene una masa desbalanceada que pesa 28.4 g que está localizada a 15 cm de distancia del eje de rotación. Se conoce que el motor está restringido a moverse verticalmente, determinar:

- La velocidad en rpm a la cual ocurre la resonancia.
- La amplitud de la vibración del motor para una velocidad de 1 200 rpm.

Solución

$$\text{a) } \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

la velocidad de resonancia es = 547 rpm

$$\text{b) } \Omega = 1\,200 \text{ rpm} = 125.6 \text{ rad/s}$$

la magnitud de la fuerza centrífuga es:

$$Pm = M a_n = M r \Omega^2 = M (0.15)(125.6)^2 = 6.94 \text{ kg}$$

$$u = 0.00343 \text{ cm}$$

I.6. Movimiento estacionario de la base

Ahora, consideremos un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la figura I.9, en el cual la base se somete a un movimiento que está dado por:

$$u_b = A \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (\text{I.47})$$

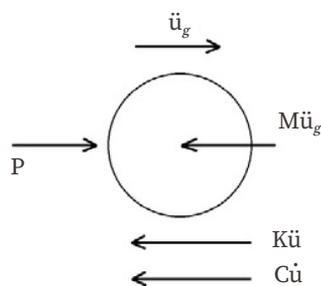
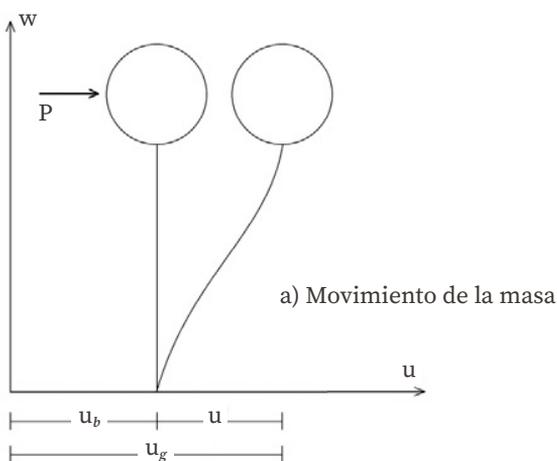


FIGURA I.9. Sistema de un grado de libertad

la velocidad y la aceleración de la base son:

$$u'_b = A \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (\text{I.48})$$

$$u''_b = A \Omega^2 \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (\text{I.49})$$

la ecuación de movimiento está dada por:

$$Mu''_g + Cu' + Ku = 0 \quad (\text{I.50})$$

pero, de la figura I.8: $u''_g = u''_b + u''$ (I.51)

$$M(u''_b + u'') + Cu' + Ku = 0$$

$$Mu'' + Cu' + Ku = -Mu''_b \quad (I.52)$$

$$Mu'' + Cu' + Ku = A\Omega^2 M \text{sen}(\Omega t) \quad (I.53)$$

aquí, vemos que la ecuación I.51 es similar a la ecuación I.42. En consecuencia, podemos emplear la misma solución de esta ecuación con:

$$P_0 \text{sen}(\Omega t) = A\Omega^2 M \text{sen}(\Omega t)$$

con este cambio de variable, la respuesta de la masa está dada por los siguientes movimientos relativos:

$$u = AB_d \text{sen}(\Omega t - \varphi) \quad (I.54)$$

$$u' = A\Omega B_d \cos(\Omega t - \varphi) \quad (I.55)$$

$$u'' = A\Omega^2 B_d \text{sen}(\Omega t - \varphi) \quad (I.55)$$

en las expresiones anteriores:

$$Bd = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\Omega}\right)^2}} \quad (I.57)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\zeta\Omega}{\omega}}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)} \right) \quad (I.58)$$

frecuencia circular del sistema: $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Los movimientos absolutos (movimientos generales) están dados por (figura I.8):

desplazamiento: $u_g = u_b + u$ (I.59)

velocidad: $u'_g = u'_b + u'$ (I.60)

aceleración: $u''_g = u''_b + u''$ (I.61)

El factor de amplificación de la aceleración se define como el cociente del valor absoluto de la máxima aceleración general, entre el valor absoluto de la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \frac{m \cdot x |u''_g|}{m \cdot x |u''_b|} \quad (\text{I.62})$$

$$f_a = m \cdot x |\text{sen}(\Omega t) + B_d \text{sen}(\Omega t - \varphi)|$$

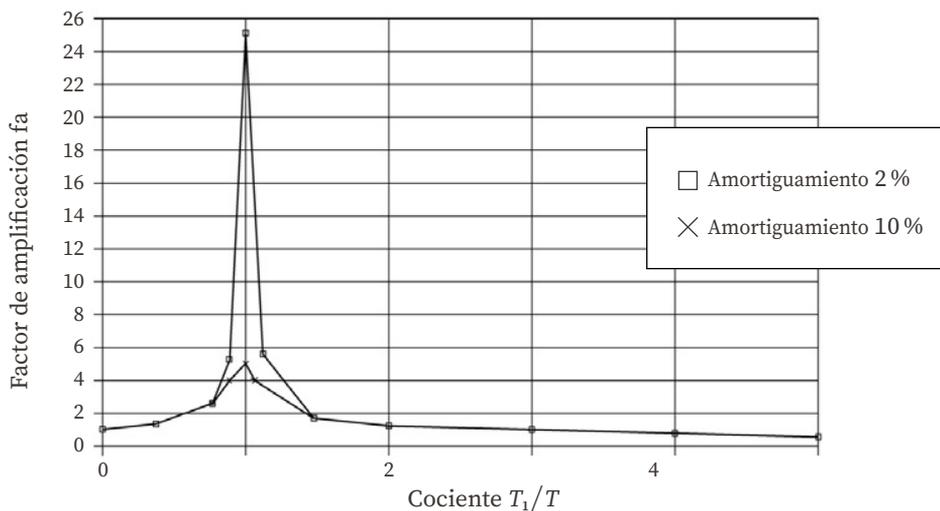
En la figura I.10, se exhibe la variación de f_a con el cociente T_1/T para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico.

En la expresión anterior:

$$T_1 = 2\pi / \omega \text{ (masa que vibra)}$$

$$T = 2\pi / \Omega \text{ (base)}$$

En la figura I.10, se observa que la amplificación de la aceleración depende del cociente T_1/T y del amortiguamiento. La máxima amplificación ocurre cuando $T_1/T = 1$; al aumentar el amortiguamiento, decrece el factor, f_a . Para $T_1/T \rightarrow \infty$ la amplificación de la aceleración es nula.

FIGURA I.10. Variación del factor de amplificación**Ejemplo I.6**

Se debe hallar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración (movimientos relativos) de la masa de la figura I.E-1, para $t=25$ s. Movimiento de la base $u_b=5 \text{ sen}, 3t$ (u_b en cm, t en s). Considerar $\zeta=5\%$.

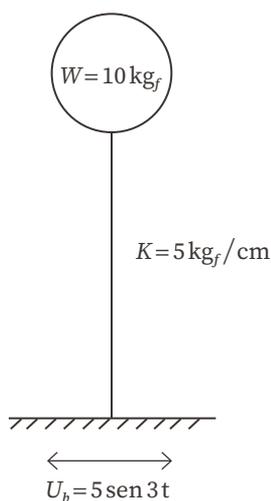


FIGURA I.E-1.
Elemento sujeto a movimiento en la base

Solución

$$\Omega = 3 \text{ s}^{-1} - 1, M = 10/981 = 0.010194 \text{ kg s}^2/\text{cm}$$

$$\omega = \sqrt{5/0.010194} = 22.174 \text{ s}^{-1}$$

Sustituyendo valores en la ecuaciones I.55 e I.56: $B_d = 0.01869$, $\varphi = 0.01380$

$$Bd = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\Omega}\right)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\zeta\Omega}{\omega}}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)} \right)$$

reemplazando en las ecuaciones I.52 a I.54, tenemos:

$$u = 5(0.01869) \text{ sen}(3t - 0.0138)$$

$$u = 0.09345 \text{ sen}(3t - 0.0138)$$

$$u = 0.2804 \text{ cos}(3t - 0.0138)$$

$$\ddot{u} = -0.8410 \text{ sen}(3t - 0.0138)$$

para $t = 25 \text{ s}$: $u = -0.03742 \text{ cm}$

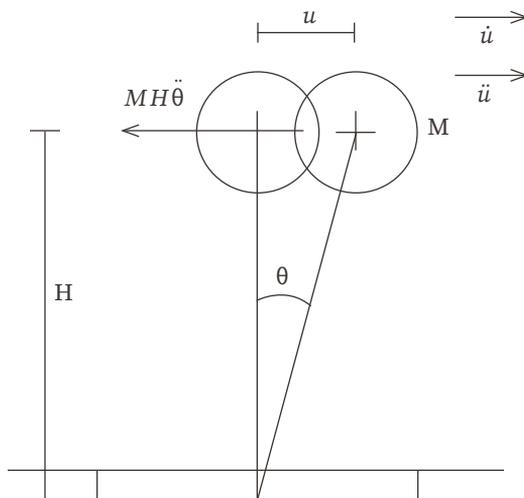
$$u = 0.2569 \text{ cm/s}, \ddot{u} = 0.3368 \text{ cm/s}^2$$

I.7. Vibración debida a la rotación

Se debe considerar una masa que está vibrando libremente como la que se indica en la figura I.11. La fuerza de inercia vale $F = Mu$. De la figura $u = \theta H$, $\dot{u} = \theta \dot{H}$, por lo tanto:

$$F = M\theta \ddot{H}.$$

FIGURA I.11. Rotación de una masa de un grado de libertad



El momento de volteo al nivel de cimentación debido a la inercia de la masa es (Zeevaert, 1980):

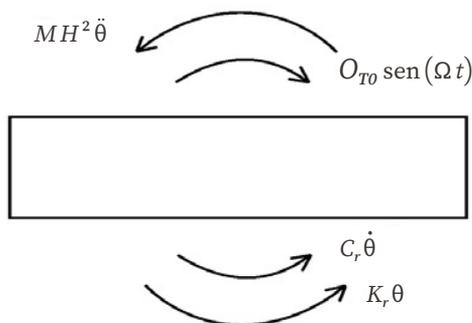
$$O_T = FH = M\theta'' H^2 = MH^2\theta''$$

Ahora, supongamos que la cimentación está sometida a un momento estacionario dado por $O_T = O_{T0} \sin(\Omega t)$. En el diagrama de cuerpo libre de la cimentación (figura I.12), se muestran los momentos que actúan sobre ella. El equilibrio de los momentos conduce a:

$$MH^2\theta'' + C_r\theta' + K_r\theta = O_{T0} \sin(\Omega t) \quad (\text{I.64})$$

FIGURA I.12.

Diagrama de cuerpo libre de la cimentación



Para un sistema de un grado de libertad sujeto a una fuerza vertical estacionaria, habíamos obtenido la siguiente ecuación de equilibrio dinámico (ecuación I.42):

$$Mu'' + Cu' + Ku = F_0 \text{sen}(\Omega t) \quad (\text{I.65})$$

Las ecuaciones I.62 e I.42 son similares, por lo que, para hallar la solución de la ecuación I.62, podemos emplear la ecuación I.42, cambiando M por MH^2 y P_0 por O_{T_0} , por lo tanto, la solución de la ecuación I.62 es:

$$\theta = \frac{O_{T_0}}{K_r} \frac{\text{sen}(\Omega t - \alpha)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (\text{I.66})$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\omega\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)} \right) \quad (\text{I.67})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K_r}{MH^2}} = \frac{\sqrt{\frac{K_r}{M}}}{H} \quad (\text{I.68})$$

$$\zeta = \frac{C_r}{C_{\text{crit}}} = \frac{C_r}{2\sqrt{K_r MH^2}} = \frac{C_r}{2H\sqrt{K_r M}} \quad (\text{I.69})$$

según lo anterior, el periodo natural de vibración por rotación de una masa está dado por:

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{MH^2}{K_r}} = 2\pi H \sqrt{\frac{M}{K_r}} \quad (I.70)$$

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{WH^2}{gK_r}} \quad (I.71)$$

donde:

W : es el peso de la masa.

g : es la aceleración de la gravedad.

I.8. Amortiguamiento

Durante la vibración de un sólido, se produce cierta pérdida de energía por calor, lo cual se conoce en términos generales como fricción interna en el sistema.

La forma más directa de definir la fricción interna es determinando el cociente de la energía disipada durante un ciclo de esfuerzo, ΔW , entre la energía elástica, W , almacenada cuando la deformación unitaria es máxima. A este valor se le denomina *amortiguamiento específico* o *pérdida específica de energía* y se ha observado que depende de la amplitud y de la velocidad del esfuerzo en el ciclo y, a menudo, de la historia de carga del espécimen (Kolsky, 1963).

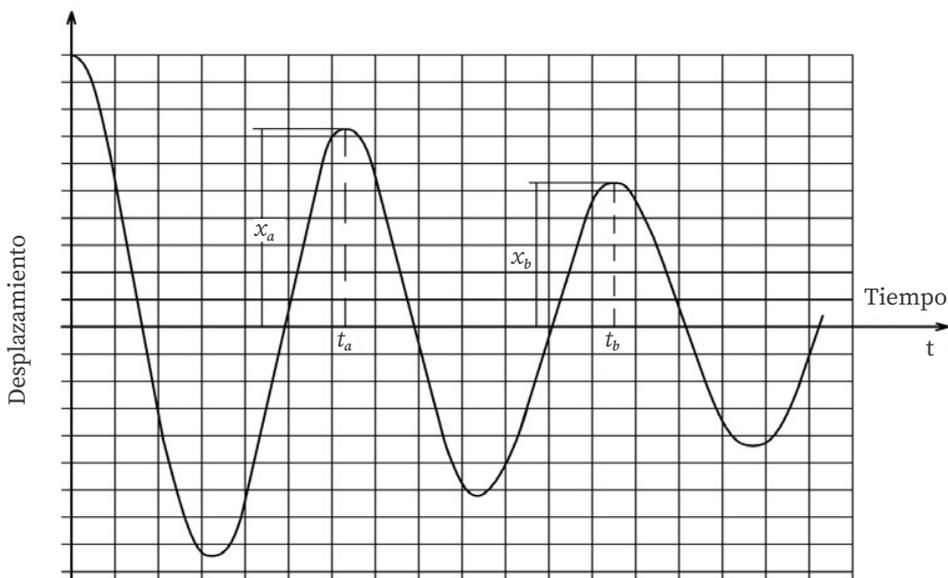
En general, se acepta que las fuerzas de restitución sean proporcionales a la amplitud de la vibración y que las fuerzas disipativas de la energía sean proporcionales a la velocidad. Cuando esto se cumple, la relación

de amplitudes positivas entre dos ciclos consecutivos es constante y el logaritmo natural de esta relación, Δ' , se toma como una medida de la fricción interna.

Enseguida, demostremos que Δ' es igual a la mitad de la energía de la pérdida específica de energía cuando el amortiguamiento es bajo. De la figura I.13:

$$\Delta' = \ln \left(\frac{x_a}{x_b} \right)$$

FIGURA I.13. Vibración libre con amortiguamiento



El desplazamiento está dado por la ecuación:

$$x = \delta_o e^{-\xi \omega t} \left(\cos \omega \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \text{sen } \omega \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t \right) \quad (I.72)$$

para: $t = t_a \quad x_a = \delta_o e^{-\xi \omega t_a}$

$$t = t_b \quad x_b = \delta_o e^{-\xi \omega (t_a + 2\pi/\omega)}$$

$$\frac{x_a}{x_b} = e^{2\pi\xi}$$

pero: $\xi = \frac{c}{\sqrt{M \times k}} \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$

en consecuencia:

$$\frac{x_a}{x_b} = e^{\left(\frac{\pi \cdot c}{M \cdot \omega}\right)}$$

$$\Delta' = \ln\left(\frac{x_a}{x_b}\right) = \frac{\pi \cdot c}{M \cdot \omega} = \frac{\pi \cdot c \cdot \omega}{k}$$

por otra parte:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{x_a^2 - x_b^2}{x_a^2} = \frac{(x_a - x_b)(x_a + x_b)}{x_a^2}$$

sin embargo: $x_b \cong x_a$

$$x_a x_b + x_b^2 \cong x_a^2 + x_a^2 = 2x_a^2; \quad x_b(x_a + x_b) \cong 2x_a^2$$

$$\frac{x_a^2 - x_b^2}{x_a^2} \cong \frac{2}{x_b}$$

sustituyendo, tenemos:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{(x_a - x_b)(x_a + x_b)}{x_b} \cong 2 \ln\left(\frac{x_a}{x_b}\right) = 2\Delta'$$

Por lo tanto, en vibraciones libres con amortiguamiento pequeño, el amortiguamiento específico $\frac{\Delta W}{W}$ es igual al doble del decremento logarítmico Δ' .

Por otro lado, en una vibración forzada para amortiguamiento pequeño, la forma de la curva desplazamiento-frecuencia es muy aguda, mientras que para amortiguamiento grande la curva es mucho más tendida. Si denominamos, ΔN , a la diferencia entre la frecuencia correspondiente a la mitad del pico del lado derecho de la curva, menos la frecuencia correspondiente a la mitad del pico del lado izquierdo y N a la frecuencia de resonancia, el cociente $\frac{\Delta N}{N}$ es una medida de la fricción interna y se puede demostrar que:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \Delta'$$

en efecto, en una vibración forzada, el desplazamiento está dado por:

$$\theta = \frac{F_o}{k} \frac{\text{sen}(\Omega \cdot t - \varphi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}} \quad (\text{I.73})$$

$$\varphi = \text{ang tan} \frac{2\xi \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (\text{I.74})$$

ω_1 es la frecuencia circular del sistema: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

el máximo valor de x ocurre para $\omega_1 = \Omega$ es decir:

$$m \cdot x \cdot x = \frac{F_o}{k} = \frac{1}{2\xi}, \quad \text{pero} \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{Mk}}$$

$$m \cdot x \cdot x = \frac{F_o}{c \omega_1}$$

la mitad del máximo de x vale $\frac{F_o}{2c\omega_1}$, por lo tanto, haciendo $x = \frac{F_o}{2c\omega_1}$ en la ecuación I.73, obtenemos:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} = \frac{2c\omega_1}{k} \quad (\text{I.73})$$

$$\sqrt{\left(k - k \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\xi k \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} = 4c^2 \omega_1^2 \quad (\text{I.73})$$

pero: $\omega_1^2 = \frac{k}{M}$

$$(k - M\Omega^2)^2 + (c\Omega^2)^2 = 4c^2 \omega_1^2$$

despejemos los valores Ω^2 de esta ecuación:

$$(M\Omega^2)^2 + (c^2 - 2Mk)\Omega^2 + k^2 - 4c^2 \omega_1^2 = 0$$

$$\Omega^2 = \frac{-(c^2 - 2Mk) \pm \sqrt{(c^2 - 2Mk)^2 - 4M^2(k^2 - 4c^2 \omega_1^2)}}{2M^2}$$

$$\Omega^2 = \frac{k}{M} - \frac{c^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{c^2}{4M_1^2} - \frac{k}{M} - \frac{k}{2M}\right)(c^2 - 2kM) - k^2 + 4c^2 \omega_1^2}}{M}$$

para valores pequeños de amortiguamiento:

$$\omega_1^2 \cong \frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}$$

$$\Omega^2 = \frac{k}{M} - \frac{c^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{c^2}{4M_1^2} - \frac{k}{M} - \frac{k}{2M}\right)(c^2 - 2kM) - k^2 + 4c^2\omega_1^2}}{M}$$

$$\Omega^2 = \frac{k}{M} - \frac{c^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\frac{kc^2}{2M} + 3c^2\omega_1^2 - 2k^2 + 2kM\left(\frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2}\right)}}{M}$$

$$\Omega^2 = \frac{k}{M} - \frac{c^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{3} \cdot c\omega_1}{M}$$

$$\Omega_2^2 - \Omega_3^2 = \frac{2\sqrt{3} \cdot c\omega_1}{M}$$

como se afirmó antes, $\Delta N = \Omega_2 - \Omega_3$ y $N = \omega_1$, por lo tanto:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Omega_2 - \Omega_3}{\omega_1} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_3)(\Omega_2 + \Omega_3)}{\omega_1(\Omega_2 + \Omega_3)}$$

para valores bajos de amortiguamiento:

$$\omega_1 \cong \frac{(\Omega_2 + \Omega_3)}{2}$$

además: $\Delta' = In \left(\frac{x_a}{x_b} \right) = \pi \frac{c\omega}{K}$

$$\frac{\Delta N}{N} \cong \frac{\Omega_2^2 - \Omega_3^2}{2\omega_1^2} = \frac{\sqrt{3}C}{M\omega_1} = \frac{\sqrt{3}\Delta'}{\pi}$$

(I.75)

I.9. Propagación de una onda de cortante en un sólido viscoelástico

Modelo de Voigt:

Voigt consideró que «...las componentes de esfuerzo en un sólido son la suma de dos términos: el primero es proporcional a la deformación unitaria y el segundo es proporcional a la velocidad de la deformación unitaria.»³⁰

En un material isotrópico y elástico, las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y las deformaciones serán ahora:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \Delta + 2G \varepsilon_x + \lambda' \left(\frac{\partial \Delta}{\partial t} \right) + 2\eta \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right) \\ &\vdots \\ T_{yz} &= G \gamma_{yz} + \eta \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} \right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

estas ecuaciones conducen a relaciones similares como aquellas obtenidas para un sólido elástico, pero el operador $\lambda + \lambda'(\partial \varepsilon_x / \partial t)$ toma el lugar de λ y el operador $G + \eta(\partial / \partial t)$ toma el lugar de G . La ecuación para los desplazamientos horizontales es la siguiente:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad (\text{I.76})$$

realizando las sustituciones anteriores, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[(\lambda + G) + (\lambda' + \eta) \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u \quad (\text{I.77})$$

³⁰ Kolsky, H., *Stress Waves in Solids*, Dover, 1963.

en una onda de cortante exclusivamente, tenemos:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \nabla^2 u + \eta \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{I.76})$$

si consideramos una onda de cortante que se propague en dirección vertical con movimiento de partículas en dirección horizontal, se tiene (Kolsky, 1963):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \quad (\text{I.79})$$

ÍNDICE DE FIGURAS

		1
		2
		3
		4
Figura 1.1.	Zonas de equilibrio plástico después de la falla (Terzaghi y Peck, 1967)	2
Figura 1.2.	Espiral logarítmica	4
Figura 1.3.	Espiral logarítmica en un cimiento profundo (Zeevaert, 1973)	4
Figura 1.4.	Cimiento sometido a carga vertical y momento	8
Figura 1.5.	Espiral logarítmica	13
Figura 1.E-1.	Esquema de zapata (acotaciones en metros)	16
Figura 1.E-2.	Esquema de zapata	21
Figura 1.6.	Línea de falla en una prueba triaxial rápida	24
Figura 1.7.	Profundidad de empotramiento D en el estrato de apoyo	26
Figura 1.E-3.	Esquema de zapata y terreno	27
Figura 1.8.	Variación de la resistencia al corte con el grado de saturación	29
Figura 1.9.	Variación de la cohesión con el grado de saturación . . .	34
Figura 1.10.	Obtención de la cohesión de suelo	35
Figura 1.11.	Correlación entre el número de golpes para 30 cm de penetración estándar y el ángulo de fricción de las arenas (Juárez Badillo y Rico, 1976)	37
Figura 1.12.	Correlación entre la resistencia de punta y la compacidad relativa de las arenas finas (Tamez, <i>et al.</i> , 1978)	38

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Figura 1.13.	Correlación estadística entre C_{qu} y W	39
Figura 2.1.	Representación de la transmisión de fuerzas a través del suelo (Lambe y Whitman, 1969)	49
Figura 2.2.	Causas de movimientos relativos entre las partículas de suelo (Lambe y Whitman, 1969)	49
Figura 2.3.	Colapso de un arreglo inestable de partículas (Lambe y Whitman, 1969)	50
Figura 2.4.	Películas de fluido que están envolviendo a pequeñas partículas de suelo (Lambe y Whitman, 1969)	51
Figura 2.5.	Reacción de intercambio de iones (Lambe y Whitman, 1969)	51
Figura 2.6.	Estructuras de sedimentos (Lambe y Whitman, 1969) . .	51
Figura 2.7.	Comparación de curvas esfuerzo-deformación para tres tipos de compresión (Lambe y Whitman, 1969) . . .	52
Figura 2.8.	Compresión confinada (Schlosser, 1988)	52
Figura 2.9.	Curvas de compresibilidad (Schlosser, 1988)	53
Figura 2.10.	Resultados en pruebas de compresión confinada para esfuerzos altos en varias muestras de arena (modificada por Lambe y Whitman, 1969)	53
Figura 2.11.	Curvas esfuerzo-deformación de ensayos triaxiales (Chen, 1948)	54
Figura 2.12.	Curvas esfuerzo-deformación para especímenes de arena densa y suelta fina, mediana-fina	55
Figura 2.13.	Curva esfuerzo-deformación unitaria de un suelo	56
Figura 2.14.	Variación del módulo tangente inicial con la presión de confinamiento	56
Figura 2.15.	Esfuerzo en un elemento de suelo	57
Figura 2.16.	Relación idealizada entre esfuerzos efectivos y la relación de vacíos para un suelo compresible (Mitchell, 1993)	61
Figura 2.17.	Suelo cohesivo totalmente saturado	69
Figura 2.18.	Interface aire-agua en el suelo (Nelson y Miller, 1992) .	71

Figura 2.19.	Variación de E_i con S_r	73
Figura 2.20.	Variación de E_i con la succión	73
Figura 2.21.	Perfiles de succión en arcilla debajo de edificios grandes en Adelaide, Australia (Aitchison y Woodburn, 1969)	74
Figura 2.22.	Trayectorias típicas de esfuerzos para combinaciones de carga aplicada y succión (Aitchison y Woodburn, 1969)	74
Figura 2.23.	Decremento en la relación expansión/succión en tierra negra cargada (Aitchison y Woodburn, 1969)	75
Figura 2.24.	Prueba de volumen constante (Fredlund y Raharjo, 1993)	76
Figura 2.25.	Colapso en una prueba de consolidación (Dudley, 1970)	78
Figura 2.26.	Esquema de la respuesta por humedecimiento en suelos colapsables (Houston y Houston, 1997)	78
Figura 2.27.	Carta para la estimación de la presión permitida del suelo para los cimientos sobre la arena en función de los resultados del ensayo de la SPT (Terzaghi y Peck, 1967)	82
Figura 2.28.	Carta para estimar el módulo no drenado (Duncan y Buchignani, 1976)	83
Figura 2.29.	Curvas de correlación de la compresibilidad (Cuevas, 1988)	89
Figura 3.1.	Geometría y cargas sobre la estructura de barras inclinadas	96
Figura 3.2.	Numeración de barras y grados de libertad	96
Figura 3.3.	Reacciones del terreno de cimentación	97
Figura 3.4.a.	Geometría y cargas sobre la estructura	99
Figura 3.4.b.	Numeración de barras y grados de libertad	99
Figura 3.5.	Reacciones del terreno	101
Figura 3.6.	Zapata	103

Figura 3.7.	Diagrama de reacción del terreno. Perfil de distorsión de asentamientos debidos a una carga uniforme sobre la superficie de una masa suelo (Sowers, 1962)	107
Figura 3.8.	Presión de contacto en la base de una cimentación rígida sobre la superficie de una masa de suelo (Sowers, 1962)	108
Figura 3.9.	Marco estructural con cimentación a base de una zapata corrida	108
Figura 3.10.	Cargas sobre la estructura y el suelo	109
Figura 3.11.	Geometría y cargas en la barra de cimentación	110
Figura 3.12.	Cálculo de los asentamientos del terreno	112
Figura 3.13.	Características de la estructura y del terreno de cimentación	115
Figura 3.14.	Numeración de barras y grados de libertad	115
Figura 3.15.	Sistema de cargas sobre la estructura	116
Figura 3.16.	Cálculo de los valores de influencia	118
Figura 3.17.	Características de la estructura y del terreno de cimentación	124
Figura 3.18.	Características de la estructura y del terreno de cimentación	127
Figura 3.19.	Método iterativo	131
Figura 3.20.	Elementos mecánicos sobre una barra de cimentación en un sistema global	138
Figura 3.21.	Geometría y sistema de cargas sobre la estructura	141
Figura 3.22.	Estratigrafía y propiedades	141
Figura 3.23.	Numeración de barras y grados de libertad	141
Figura 4.1.	Cargas sobre una zapata	148
Figura 4.2.	Cargas que actúan sobre el ala de la zapata	148
Figura 4.3.	Elementos mecánicos sobre el ala izquierda de la zapata	149
Figura 4.4.	Diagramas de reacción del terreno de cimentación (Meli, 1985)	150

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Figura 4.5.	Falla por tensión diagonal	151
Figura 4.6.	Secciones críticas por flexión	152
Figura 4.7.	Distribución del acero de esfuerzo en el lado largo (Meli, 1985)	155
Figura 4.8.	Obtención del esfuerzo cortante máximo de diseño, v_u ,	156
Figura 4.9.	Suelo friccionante	159
Figura 4.10.	Secciones críticas por tensión diagonal y por flexión ..	162
Figura 4.11.	Características estructurales de la zapata	166
Figura 4.12.	Zapata corrida de concreto reforzado	168
Figura 4.13.	Diagramas de asentamientos y reacciones	169
Figura 4.14.	Elementos mecánicos	169
Figura 4.15.	Armado de la contratrabe de la zapata corrida	171
Figura 4.16.	Secciones críticas por tensión diagonal y por flexión ..	173
Figura 4.17.	Armado de zapata corrida	176

Anexos

Figura A.1.	Estado de esfuerzo por peso propio	180
Figura A.2.	Incrementos de esfuerzo por una obra de ingeniería ..	181
Figura A.3.	Deformación de un elemento de suelo de espesor inicial, Δz_0 ,	186
Figura A.E-1.	Ejemplo	188
Figura B.1.	Diagramas del factor de influencia de los esfuerzos verticales (Schmertmann, <i>et al.</i> , 1978)	194
Figura B.E-1.	Ejemplo de zapata aislada	195
Figura C.1.	Curva esfuerzo-deformación hiperbólica (Duncan y Chang, 1970)	198
Figura C.2.	Obtención del esfuerzo desviador de falla	200
Figura C.E-1.	Suelo friccionante	202
Figura D.1.	Suelo cohesivo parcialmente saturado	203

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Figura D.2.	Expansión de un estrato de arcilla	204
Figura D.3.	Prueba de volumen constante (Fredlund y Rahardjo, 1993)	205
Figura E.1.	Incrementos de esfuerzos normales, bajo la esquina de un rectángulo, que están sometidos a carga uniforme en un medio semiinfinito	210
Figura E.2.	Incrementos de esfuerzos normales, bajo el centro de un círculo, que están sometidos a carga uniforme en un medio semiinfinito	211
Figura E.3.	Esfuerzos normales ocasionados por una carga triangular	212
Figura E.4.	Reacción del terreno. Cimiento sometido a carga vertical y momento	214
Figura E.5.	Carga trapezoidal sobre el terreno	215
Figura E.6.	Carga trapezoidal dividida en un número n de cargas uniformes.	216
Figura E.7.	Esfuerzos teóricos de tensión en el contacto cimiento-suelo	216
Figura E.8.	Reacción triangular	217
Figura E.9.	Medio estratificado	220
Figura E.10.	Giro de un rectángulo	222
Figura F.1.	Estrato de arcilla	226
Figura F.2.	Diagramas de presiones en un estrato de arcilla con NAF	228
Figura F.3.	Variación de la presión hidráulica en el tiempo en un estrato de arcilla	229
Figura F.4.	Grado de consolidación en un estrato de arcilla	235
Figura F.E-1.	Ejemplo de asentamiento debido a la consolidación de una arcilla	237
Figura G.1.	Modelo físico formado por una unidad de Kelvin y una unidad de Zeevaert	240
Figura G.2.	Unidad Z.	241

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Figura G.3.	Planta de la estructura	248
Figura G.4.	Estratigrafía	248
Figura H.1.	Barra m	252
Figura H.2.	Grados de libertad y elementos mecánicos. Convención de signos	252
Figura H.3.	Elementos mecánicos ocasionados por desplazamientos lineales y angulares	254
Figura H.4.	Marcos planos ortogonales entre sí	257
Figura H.5.	Transformacion de un vector del sistema global $x - y$ al sistema local $x' - y'$	258
Figura H.6.	Desplazamientos de la barra inclinada	258
Figura H.7.	Giros de la barra paralelos al plano $x - y$	259
Figura H.8.	Grados de libertad para marco inclinado	265
Figura H.9.	Grados de libertad y momentos en marco horizontal.	271
Figura I.1.	Vibración libre de un sistema de un grado de libertad	275
Figura I.2.	Vibración libre sin amortiguamiento	278
Figura I.3.	Movimiento para amortiguamiento crítico	282
Figura I.4.	Vibración libre con amortiguamiento	286
Figura I.5.	Desplazamiento en función del ángulo de fase	287
Figura I.6.	Determinación del ángulo de fase	288
Figura I.7.	Vibración de un bloque vertical	290
Figura I.8.	Sistema de un grado de libertad	292
Figura I.9.	Sistema de un grado de libertad	294
Figura I.10.	Variación del factor de amplificación	297
Figura I.E-1.	Elemento sujeto a movimiento en la base	297
Figura I.11.	Rotación de una masa de un grado de libertad	299
Figura I.12.	Diagrama de cuerpo libre de la cimentación	300
Figura I.13.	Vibración libre con amortiguamiento	302

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

ÍNDICE DE TABLAS

		1
		2
		3
Tabla 1.1.	Valores de c' , φ' y φ^b	30
Tabla 1.2.	Ángulo de fricción interna para arenas (Meyerhof, 1956)	37
Tabla 1.3.	Relación entre N y q_c para distintos tipos de suelo	38
Tabla 1.4.	Resistencia a la compresión simple en arcillas (Terzaghi y Peck, 1967)	39
Tabla 1.5.	Valores típicos del coeficiente N_k (Santoyo, <i>et al.</i> , 1989)	40
Tabla 1.6.	Valores de la resistencia al corte en prueba rápida (Santoyo, 1980)	42
Tabla 1.7.	Valores de la variable aleatoria t_α (t de Student) para $n-2=67$ grados de libertad	43
Tabla 1.8.	Parámetros de resistencia al corte. Muestras estadísticas de tobas y de arenas pumíticas (Deméneghi y Sanginés, 2000)	44
Tabla 1.9.	Parámetros de resistencia al corte. Poblaciones estadísticas de tobas y de arenas pumíticas (Deméneghi y Sanginés, 2000)	45
Tabla 1.10.	Valores desfavorables estimados de propiedades de resistencia al corte (Deméneghi y Sanginés, 2000)	45
Tabla 1.11.	Valores aproximados del parámetro a (Deméneghi y Sanginés, 2000)	46
Tabla 2.1.	Valores aproximados de propiedades de deformación en suelos friccionantes (Janbu, 1963)	62

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Tabla 2.2.	Grado de expansibilidad de una arcilla (Holtz y Gibbs, 1956)	84
Tabla 2.3.	Rango de valores del módulo de deformación e_s del suelo (Bowles, 1968)	84
Tabla 2.4.	Parámetros de deformabilidad. Muestras estadísticas de la arcilla de la Ciudad de México	86
Tabla 2.5.	Parámetros de deformabilidad. Poblaciones estadísticas de la arcilla de la Ciudad de México	86
Tabla 2.6.	Valores desfavorables estimados de propiedades de deformabilidad	87
Tabla 2.7.	Parámetros de deformabilidad. Muestras estadísticas de tobas y de conglomerados (Deméneghi y Sanginés, 2000)	89
Tabla 2.8.	Parámetros de deformabilidad. Poblaciones estadísticas de tobas y de conglomerados (Deméneghi y Sanginés, 2000)	90
Tabla 2.9.	Valores desfavorables estimados de propiedades de deformabilidad (Deméneghi y Sanginés, 2000).	90
Tabla 2.10.	Valores aproximados del parámetro a (Deméneghi y Sanginés, 2000)	91
Tabla 2.11.	Incremento neto de presión para no exceder el asentamiento tolerable de la zapata corrida	92
Tabla 3.1.	Barra 1. Matriz de rigidez	99
Tabla 3.2.	Barra 2. Matriz de rigidez	100
Tabla 3.3.	Barra 3. Matriz de rigidez	100
Tabla 3.4.	Valores promedio propuestos de Ks_1 (módulo de rigidez vertical) para una placa cuadrada de 1 ft y con espesor de 1 ft (modificada por Terzaghi, 1955) . .	106
Tabla 3.5.	Propiedades de deformación del suelo.	114
Tabla 3.6.	Valores de influencia.	121
Tabla 3.7.	Valores de influencia.	125
Tabla 3.8.	Barra 1. Matriz de rigidez	142

Tabla 3.9.	Barra 7. Matriz de rigidez	142
Tabla 3.10.	Matriz de rigidez global de la estructura para los primeros cinco grados de libertad	143

Anexo

Tabla A.1.	Variable aleatoria <i>t</i> de <i>Student</i>	188
Tabla A.E-1.	$\alpha = 20\%$	189
Tabla B.E-1.	Cálculo del asentamiento	196
Tabla C.1.	Valores aproximados de <i>K</i> y <i>N</i> de la fórmula de Janbu, en suelos friccionantes, cuando se aplica el método de Kondner	201
Tabla C.E-1.	Método de Kondner. Ejemplo	202
Tabla F.1.	Relación teórica $U(\%) - T$ (Juárez Badillo y Rico, 1976)	236
Tabla G.1.	Relación entre el porcentaje de consolidación y el factor tiempo (Juárez Badillo y Rico 1976)	246
Tabla H.1.	Matriz de rigidez, barra inclinada	264
Tabla H.2.1.	Cálculo de la matriz de rigidez de la barra inclinada 1	266
Tabla H.2.2.	Cálculo de la matriz de rigidez de la barra horizontal 2	266
Tabla H.2.3.	Cálculo de la matriz de rigidez de la barra inclinada 3	267
Tabla H.3.1.	Cálculo de la matriz de rigidez de la barra 1	268
Tabla H.3.2.	Cálculo de la matriz de rigidez de la barra 2	269
Tabla H.3.3.	Cálculo de la matriz de rigidez de la barra 3	269
Tabla H.4.1.	Cálculo de desplazamientos y elementos mecánicos, barra 1	270
Tabla H.4.2.	Cálculo de desplazamientos y elementos mecánicos, barra 2	270
Tabla H.4.3.	Cálculo de desplazamientos y elementos mecánicos, barra 3	270

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

AITCHISON, G. D. & A. J. Woodburn, «Soil suction in foundation design», *Memorias del VII Congreso Internacional Mecánica de Suelos*, vol. 2, México, 1969.

ALBERTO, J., «Investigaciones sobre el metropolitano de la Ciudad de México. Mediciones efectuadas en las excavaciones», *Revista ingeniería*, México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 1970.

BEAUFAIT, F. W., *et al.*, *Computer Methods of Structural Analysis*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1970.

BENOIT, J. & G. W. Clough, «Self-Boring Pressuremeter Tests in Soft Clay», *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 112, no. 1, 1986, pp. 60-78.

BOWLES, J. E., *Foundation Analysis and Design*, New York, McGraw-Hill, 1968.

BURLAND, J. B. & M. C. Burbidge, «Settlement of foundations on sand and gravel», *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, pt. 1, 1985, pp. 1325-1381.

CHAMECKI, S., «Structural rigidity in calculating settlements», *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division: Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, vol. 88, no. SM1, 1956.

CHEN, L. S., «An investigation of stress-strain and strength characteristics of Cohesionless soils by triaxial compression test», *Proceedings II International Conference Soil Mech*, vol. 5. 1948.

- DAHLBERG**, R., «Penetration, Pressuremeter and Screw-Plate Tests in a Preloaded Natural Sand Deposit», *Proceedings of the European Symposium on Penetration Testing*, National Swedish Building Research, vol. 2.2, pp. 68-87, Stockholm, 1974.
- DAMY**, R. J., «Integración de las superficies de Boussinesq, Westergaard y Frölich, sobre superficies poligonales de cualquier forma, cargadas con fuerzas verticales uniformemente repartidas», *Revista ingeniería*, México, UNAM, Facultad de Ingeniería, núm. 1, 1985.
- DASHKÓ**, R. E. y A. A. Kagán, *Mecánica de suelos en la práctica de la geología aplicada a la ingeniería*, Moscú, MIR, 1980.
- DÈCOURT**, L., «The standard penetration test, state-of-the-art report», *XII Congreso Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones*, Río de Janeiro, 1989.
- DEMÉNEGHI**, C. A., «Análisis de deformaciones en suelos granulares», *Revista Ingeniería*, vol. LIV, núm. 3, pp. 34-38, México, 1984.
- , «Aplicaciones de la estadística a la arcilla de la formación Tacubaya del valle de México», *Revista ingeniería*, vol. LII, núm. 4, pp. 95-106, México, 1982.
- , *Apuntes de análisis y diseño de cimentaciones*, México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 1999.
- , «Interacción estática suelo-estructura, considerando efectos de torsión y acortamiento de barras», *Memorias de la XVIII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos*, vol 1, pp. 303-310, México, 1996.
- , «Sobre el empleo de correlaciones en mecánica de suels», *Revista ingeniería*, vol. LII, núm. 2, pp. 81-87, México, 1982.
- y H. Sanginés, «Análisis estadístico de propiedades de los suelos de la zona poniente de la Ciudad de México», *Memorias de la XX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos*, vol. 2, pp. 379-395, México, 2000.
- DENVER**, H., «Settlement calculation for footings on sand», *Proceedings of the XI International Conference Soil Mechanics Found Engineering*, vol. 4, San Francisco, 1985.

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

- DUDLEY**, J. H., «Review of collapsing soils», *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 96, ASCE, no. SM3, 1970, pp. 925-947.
- DUNCAN**, J. M. y L. A. Buchignani, *An engineering manual for settlement studies*, Berkeley, University of California, Department of Civil and Environmental Engineering, 1976.
- & Y. C. Chang, «Nonlinear analysis of stress and strain in soils», *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, no. SM5, 1970.
- ELLSTEIN**, A., «Medición de la capacidad de carga in situ mediante un cono dinámico especial», *Simposio sobre experiencias geotécnicas en la zona poniente del Valle de México*, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, 1992.
- FREDLUND**, D. G., «Appropriate concepts and technology for unsaturated soils», *Geotech Journal*, vol. 16, no. 1, 1979.
- & H. Rahardjo, *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*, Wiley, 1993.
- GIRAULT**, P., «Cimentación y excavación para la Torre Lomas», *Simposio sobre experiencias geotécnicas en la zona poniente del Valle de México*, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, 1992.
- GOBIERNO DEL DISTRITO FEDERAL**, «Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, t. II, núm. 103-bis, 6 de octubre de 2004.
- , «Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, Décima cuarta época, t. II, núm. 103-bis, octubre 6 de 2004.
- , «Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, Décima cuarta época, t. I, núm. 103-bis, octubre 6 de 2004.
- , «Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal», *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, enero 29 de 2004.
- GUTIÉRREZ**, C. y A. Cuevas, «Solución de cimentación sobre rellenos mediante una losa de suelo-cemento», *Simposio sobre experiencias*

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

geotécnicas en la zona poniente del Valle de México, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, 1992.

HOLTZ, W. G. & J. H. Gibbs, «Engineering properties of expansive clays», *Transactions*, ASCE, vol. 121, 1956, pp. 641-677.

HOUSTON, S. L. & N. W. Houston, «Collapsible soils engineering», *Unsaturated Soil Engineering Practice*, *Geotechnical Special Publication*, ASCE, no. 68, 1997, pp. 199-232.

JANBU, N., «Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests», *Proceedings of the European Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, vol 1, 1963, pp. 19-25.

JUÁREZ, Badillo, E., «Compressibility of soils», *5th Symposium of the Civil and Hydraulic Engineering Department*, Bangalore, Indian Institute of Science, 1965.

— y Rico, A., *Mecánica de Suelos*, t. I, 3a. ed., Limusa, 1976.

KOLSKY, H., *Stress Waves in Solids*, Dover, 1963.

KRAHN, J. & G. D. Fredlund, «On total, matric and osmotic suction», *Soil Science*, vol. 114, no. 5, 1972, pp. 339-345.

LADD, C. C., *et al.*, «Stress-deformation and strength characteristics», *Proceedings of the IX International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokio, vol. 2, 1977.

LAMBE, T. W. & V. R. Whitman, *Soil Mechanics*, Wiley, 1969.

LEÓN, J. L., «Propiedades del suelo», *Simposio sobre cimentaciones en zonas minadas de la Ciudad de México*, México, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, 1976.

MARSAL, R. J., «Propiedades de los suelos compactados», *VI Congreso Panamericano de Mecánica de Suelos*, Ing. Ciment, 1979.

— y M. Mazari, *El subsuelo de la Ciudad de México*, México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 1959.

MAYNE, P. W. & H. F. Kulhawy, «Ko-OCR relationships in soil», *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering Division*, ASCE, no. GT8, 1982.

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

- MELI, R.**, *Diseño estructural*, México, Limusa, 1985.
- MEYERHOF, G. G.**, «Penetration tests and bearing capacity of cohesionless soils», *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, no. SM-1, 1956.
- MITCHELL, J. K.**, *Fundamentals of Soil Behavior*, 2nd ed., Wiley, 1993.
- , «*In-situ* techniques for site characterization», *Proceedings Symposium on Site Characterization and Exploration*, ASCE, 1978.
- NELSON, J. D. & J. D. Miller**, *Expansive Soils: Problems and Practice in Foundation and Pavement Engineering*, Wiley, 1992.
- NEWMARK, N. M. y E. Rosenblueth**, *Fundamentos de ingeniería sísmica*, México, Diana, 1976.
- POULOS, H. G. & H. Davis**, *Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics*, Wiley, 1974.
- SANTOYO, E.**, «Empleo del cono estático en un túnel de la Ciudad de México», *X Reunión Nacional de Mecánica de Suelos*, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, 1980.
- , *et al.*, *El cono en la exploración geotécnica*, México, TGC Geotecnia, 1989.
- SCHLOSSER, F.**, *Elements de Mecanique de Sols*, Paris, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1988.
- SCHMERTMANN, J. H.**, «Static Cone to Compute Static Settlement over Sand», *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, vol. 96, no. SM3, 1970.
- , *et al.*, «Improved Strain Influence Factor Diagrams», *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, no. GT8, 1978.
- SOWERS, G. F.**, «Shallow foundations», *Foundation Engineering*, New York, McGraw-Hill, 1962.
- TAMEZ, E.**, «Cincuenta años de geotecnia en ICA», *Memoria de la reunión conmemorativa: 40 años de investigación y práctica en geotecnia*, t. II, Fundación ICA, 1996.
- , *et al.*, *Manual de diseño geotécnico*, vol 1, México, Departamento del Distrito Federal, COVITUR, 1987.

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I

TAVENAS, F. & S. Leroueil, «Laboratory and in situ stress-strain-time behavior of soft clays: a State-of-the-Art», *Memorias del simposio internacional de ingeniería geotécnica de suelos blandos*, vol. 2, 1987, pp. 3-48.

TERZAGHI, K., «Evaluation of coefficients of subgrade reaction», *Geotechnique*, vol. 5, 1955.

———, *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, 1943.

——— & B. R. Peck, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, 2a. ed., Wiley, 1967.

TOMLINSON, M. J., *Cimentaciones. Diseño y construcción*, Trillas, 1996.

ZEEVAERT, L., «Consolidation in the intergranular viscosity of highly compressible soils», *Consolidation of Soil: Testing and Evaluation*, American Society for Testing and Materials, 1986, pp. 257-281.

———, *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973.

———, *Interacción suelo-estructura de cimentación*, México, Limusa, 1980.

1

2

3

4

A

B

C

D

E

F

G

H

I



Apuntes de análisis y diseño de cimentaciones. Tomo I
Se publicó la primera edición electrónica de un ejemplar
(7 MB) en formato PDF en julio de 2023,
en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM,
Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial
de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas
utilizadas fueron Source Serif Pro y Sienna Math Pro para
texto y fórmulas matemáticas, y Brevia para títulos.