



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA MATRIZ –
FRACTURA PARA FLUJO TRANSITORIO Y
PSEUDOESTACIONARIO PARA TAMAÑO
MÚLTIPLE DE BLOQUE**

T E S I S
**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERA PETROLERA**

**PRESENTA:
Gabriela Morales Germán**

**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Edgar R. Rangel Germán**

**DIRECTOR ADJUNTO:
Dr. Fernando Samaniego Verduzco**

MÉXICO, D. F., JUNIO DE 2009



DEDICATORIA

Este trabajo quiero dedicárselo en primer lugar a mi madre, por haber sembrado un ambicioso objetivo en mi mente y en mi corazón; por su amor, apoyo, diligencia y ternura. **Mamita, este es tu regalo...**

A mis hermanos, Blanca y Leo, por ser un apoyo fundamental en mi vida y una de las motivaciones más grandes para seguir siempre adelante.

A mi padre, que a través de los años me ha enseñado a ser fuerte, no tener miedo y nunca mirar atrás.

Quiero dedicarlo muy especialmente a la memoria de mi abuelita Chagua, que buscaba formas tan diversas de hacernos saber cuanto nos quería y lo mucho que significábamos para ella. Abuelita, siempre imaginé compartir este momento tan importante contigo, nunca me fallaste y sé que no lo harás ahora.

A mi familia, por estar siempre ahí, por sus palabras de apoyo, por su amor y por toda la confianza que han depositado en mí.

También lo dedico muy cariñosamente a Ulises Neri Flores, por su compañía y paciencia, por su amor y su apoyo, por enseñarme a disfrutar las cosas más sencillas de la vida, por las palabras de aliento y por confiar en mí. Sabes que te admiro y te quiero mucho.

Lo dedico a aquellas personas que compartieron durante este largo trayecto momentos de estrés, de alegría, de tristeza, de diversión y de aburrimiento; Moni, Jely, Raz y Lupita. Gracias amigos por darle sabor a mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de manera muy especial y sincera al Dr. Edgar Rangel Germán y al Dr. Fernando Samaniego Verduzco por apoyarme en este proyecto y por su disposición a ayudarme amable y pacientemente. Gracias por compartir sus conocimientos conmigo y por ser guías y ejemplos para mi vida profesional.

Agradezco también al Dr. Rafael Rodríguez Nieto, al Ing. Israel Castro Herrera, a la Ing. Guadalupe Galicia Muñoz y al MI. Héctor Pulido Bello, por permitirme compartir mi trabajo con ellos y por su contribución tan valiosa.

Le doy las gracias al Dr. Rodolfo Camacho, al M. en C. Miguel Lara y al Ing. Orlando Fabela por ayudarme a despejar dudas y permitirme aprender de ellos.

Finalmente le agradezco a la empresa Schlumberger por el apoyo que me brindaron durante la elaboración de este trabajo, especialmente al Dr. José Ferrer González y al Ing. Paul Herrera Escobar.

ÍNDICE

Introducción	1
Capítulo I: Antecedentes de la Caracterización Dinámica de Yacimientos Naturalmente Fracturados	3
Capítulo II: Desarrollo y Solución del Modelo Matemático para Tamaño de Bloque con Distribución Uniforme	11
Ecuación de difusión para flujo pseudoestacionario y distribución uniforme de tamaño de bloque	
Ecuación de difusión para flujo transitorio y distribución uniforme de tamaño de bloque	
Solución a la ecuación de difusión	
Capítulo III: Validación del Modelo Matemático	38
Modelo de Warren y Root	
Formulación del modelo	
Desarrollo de la validación	
Resultado de la validación	
Capítulo IV: Correlaciones Empíricas Óptimas para la Aproximación Rápida de Parámetros.	50
Elaboración y descripción de las gráficas	
Procedimiento para la construcción de las correlaciones empíricas	
Ejemplo de aplicación 1: Caso hipotético con el modelo analítico	
Ejemplo de aplicación 2: Caso hipotético con el modelo analítico	
Conclusiones y Recomendaciones	91
Nomenclatura	92
Bibliografía	95
Apéndice A: Determinación de la Función Derivada de la Presión	97
Función derivada de la presión en el dominio del tiempo	
Función derivada de la presión en el dominio de Laplace	
Apéndice B: Algoritmo de Stehfest	100

INTRODUCCIÓN

Dentro de las tareas más importantes de la ingeniería petrolera se encuentra describir y predecir el comportamiento de los yacimientos y así planear la manera más adecuada para su explotación; sin embargo, esta tarea puede resultar muy complicada considerando las heterogeneidades que los conforman y que provocan que su comportamiento sea muy particular. Tal es el caso de los yacimientos naturalmente fracturados, que debido a la complejidad de su estructura resulta muy difícil predecir su comportamiento dificultando así su explotación.

La relevancia de estudiar este tipo de yacimientos y de tratar de describir su conducta lo más cercanamente posible a la realidad, estriba en que un gran porcentaje de los yacimientos de nuestro país y del mundo se encuentran en esta condición y el hecho de no poder explicar su constitución implica una explotación poco racional y desaprovechar un potencial que podría redituarse en ganancias.

Para poder caracterizar más acertadamente estos yacimientos, también conocidos como de doble porosidad, se han desarrollado modelos matemáticos con los cuales se intenta explicar la manera en la que se comporta el yacimiento considerando sus implicaciones físicas representadas con expresiones matemáticas; así se tienen modelos como la ecuación de difusión de Darcy recurrente al realizar simulación matemática de yacimientos en búsqueda de la mejor predicción, obteniendo como consecuencia un mayor beneficio económico.

De manera general, estos yacimientos compuestos por un sistema matriz y por un sistema fractura, donde el primero tiene una mayor capacidad de almacenamiento pero una menor transmisibilidad con respecto del segundo, se representan como bloques de matriz de diversas geometrías dependiendo del modelo, con un espaciamiento de cierto ancho entre ellos que hace el papel de los canales de transmisión. Uno de los modelos pioneros en este tipo de representación es el modelo de Warren y Root, en el cual los bloques de matriz presentan una forma cúbica con fracturas continuas, ortogonales y uniformes; es decir, un modelo ideal.

En un intento por aproximar estas idealizaciones a la realidad, se han introducido en los modelos matemáticos funciones de distribución de probabilidad las cuales permitan considerar que existe más de un solo tamaño de bloques. Asimismo se ha introducido el concepto de factor de forma que refleja la geometría de la matriz (en flujo pseudoestacionario y en una sola fase en todo el tiempo) con el propósito de cambiar el concepto de la forma perfectamente cúbica de los bloques de matriz.

Por lo descrito anteriormente y con la intención de contribuir a la labor de la caracterización de los yacimientos naturalmente fracturados, esta tesis tiene como objetivo general el desarrollo y la solución de las ecuaciones que describen el flujo de fluidos en los yacimientos naturalmente fracturados, para una función de distribución uniforme de tamaño

múltiple de bloques, para regímenes de flujo transitorio y pseudoestacionario. La función de distribución uniforme o rectangular, tiene la característica de que todos los tamaños de bloques (de h_{\min} a h_{\max}) tienen la misma oportunidad de ocurrencia y debe ser utilizada cuando la distribución de tamaño de bloques no es conocida. Así, se muestra el desarrollo de un modelo matemático para el flujo de fluidos y su solución a través de la transformada de Laplace (en el dominio de la frecuencia) y del algoritmo de Stehfest (en el dominio del tiempo).

Por medio de las soluciones generales, se propone un método empírico a través del cual es posible obtener las propiedades de un yacimiento naturalmente fracturado real utilizando datos obtenidos de una prueba de presión comparando el modelo matemático con el modelo real, el yacimiento, lo que permite obtener los parámetros λ_{\max} , λ_{\min} , ω_m , ω_f y la distribución de tamaño de bloques entre h_{\min} y h_{\max} .

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES DE LA CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

El modelo de yacimientos fracturados se hace a través de diferentes formulaciones dependiendo del grado de heterogeneidad; en general, éstas se dividen en tres grupos^{1*}:

- El primero utiliza métodos de “porosidad múltiple” basado en “cubos perfectos” o paralelepípedos, en donde la matriz y la fractura se comunican por medio de una ecuación de transferencia. Estos modelos se caracterizan por ser muy demandantes en cuanto a recursos computacionales y requieren de resolver ecuaciones para cada uno de los fluidos contenidos en el sistema matriz – fractura. Warren y Root (1963) presentaron estos modelos que más tarde fueron modificados por Kazemi y cols. (1989).
- El segundo tipo se basa en el volumen elemental representativo (REV) el cual fue presentado por De Swaan (1978) y consta de una formulación íntegrodiferencial de la formulación de desplazamiento de Buckley - Leverett. Sin embargo, la aplicación de este modelo requiere de una función de transferencia matriz – fractura que en ocasiones puede ser muy complicada de obtener.
- El tercer tipo es planteado a través de mediciones de laboratorio o modelos experimentales. Este método cuenta con la ventaja de permitir información real; sin embargo, resulta muy difícil generalizar los resultados experimentales a la escala de campo.

El concepto de doble permeabilidad o del continuo dual fue introducido en 1960 por Barenblatt y cols., el cual asume la existencia de dos medios con diferente porosidad y permeabilidad para una sola fase dentro de la formación; de esta manera representa el flujo en un medio fracturado a través de la superposición de los dos medios: un sistema fracturado continuo y un sistema matriz discontinuo. El sistema matriz se caracteriza por tener una permeabilidad muy baja pero almacenar la mayor cantidad de fluido del yacimiento en su porosidad intergranular; por otro lado, el sistema fracturado tiene una porosidad extremadamente baja, pero una permeabilidad extremadamente alta.

Para el sistema fractura se tiene que:

$$\Delta [T_{pf} (\Delta p_{pf} - \rho_{pf} \Delta D_{pf})] - Q_m + q_{pf} = \frac{V}{\Delta t} \Delta_t \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{pf},$$

* Referencias al final

en donde:

T_{pf} es la transmisibilidad de la fase p en el sistema fracturado.

Δp_{pf} es la diferencia de presión de la fase p entre los bloques del sistema fracturado.

ρ_{pf} es la densidad de la fase p en el sistema fracturado.

ΔD_f es la diferencia de alturas entre bloques el sistema fracturado.

Q_m es la transferencia matriz - fractura de la fase p .

q_{pf} es la fuente (o sumidero) de la fase p en el sistema fracturado.

V es el volumen del bloque en estudio.

Δt es el paso del tiempo para la simulación.

$\Delta_t \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{pf}$ es el cambio de porosidad, saturación y factor de volumen de la fase p en el paso del tiempo Δt ; en el sistema fracturado.

Para el sistema matriz

$$\Delta [T_{pm} (\Delta p_{pm} - \rho_{pm} \Delta D_{pm})] + Q_m + q_{pm} = \frac{V}{\Delta t} \Delta_t \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{pm}$$

T_{pm} es la transmisibilidad de la fase p en el sistema matriz.

Δp_{pm} es la diferencia de presión de la fase p entre los bloques del sistema matriz.

ρ_{pm} es la densidad de la fase p en el sistema matriz.

ΔD_m es la diferencia de alturas entre bloques el sistema matriz.

Q_m es la transferencia matriz - fractura de la fase p .

q_{pm} es la fuente (o sumidero) de la fase p en el sistema matriz.

V es el volumen del bloque en estudio.

Δt es el paso del tiempo para la simulación.

$\Delta_t \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{pm}$ es el cambio de porosidad, saturación y factor de volumen de la fase p en el paso del tiempo Δt ; en el sistema matriz.

La transmisibilidad se define como sigue:

$$T_{pf} = \frac{A\phi}{L} k_f \left(\frac{k_r}{\mu B} \right)_{pf},$$

$$T_{pm} = \frac{A\phi}{L} k_m \left(\frac{k_r}{\mu B} \right)_{pm},$$

donde:

A es el área del bloque abierta al flujo.

L es la longitud del bloque.

k_f es la permeabilidad absoluta de la fractura.

k_m es la permeabilidad absoluta de la matriz.

k_r son las funciones de permeabilidad relativa.

μ es la viscosidad de la fase p .

El término *transferencia matriz-fractura* es modelado con una función:

$$Q_m = \sigma V k_m \left(\frac{k_r}{\mu B} \right)_{P_{mf}} [p_{pf} - p_{Pm} - \rho_p (D_f - D_m)],$$

en donde σ es el factor de forma con las dimensiones $[1/L^2]$, V es el volumen del bloque D_f y D_m son las alturas de los bloques matriz y fractura, respectivamente. La transferencia matriz – fractura es determinada por el término σ , el cual, a su vez es una relación área/volumen (distancia característica), con una suposición (burda) de que existe flujo pseudoestacionario. El factor de forma σ refleja la geometría de la matriz en flujo pseudoestacionario, en una sola fase en todo el tiempo.

En 1963 Warren y Root² complementaron el modelo de Barenblatt idealizando la geometría del yacimiento como un sistema de fracturas ortogonales, continuas y uniformes; cada una paralela al eje principal de permeabilidad. Introdujeron el concepto de doble porosidad en la ingeniería petrolera y definieron dos parámetros para caracterizar el comportamiento de esta doble porosidad:

- El coeficiente de flujo interporoso que es una relación de la capacidad de flujo entre ambos medios y su geometría; se define como:

$$\lambda = \frac{\sigma k_m r_w^2}{k_f},$$

donde:

σ es el factor de forma.

k_f es la permeabilidad absoluta de la fractura.

k_m es la permeabilidad absoluta de la matriz.

r_w es el radio del pozo.

- La relación de almacenamiento la cual especifica la distribución relativa del fluido; es definida como:

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{\phi_f c_f + \phi_m c_m},$$

donde:

ϕ_f es la porosidad de la fractura.

ϕ_m es la porosidad de la matriz.

c_f es la compresibilidad de la fractura.

c_m es la compresibilidad de la matriz.

Posteriormente, en 1969 Kazemi y cols.³ extendieron el modelo de Warren y Root para predecir las variaciones de presión con respecto al tiempo en pozos de observación adyacentes considerando flujo multifásico y visualizando el yacimiento como capas con fracturas horizontales entre ellas, es decir, horizontal e infinitamente largo. En contraste con el sistema de una dimensión de Warren y Root, Kazemi y cols. hacen referencia a un modelo de dos dimensiones en el cual desprecian la contribución de la matriz a la producción y concluyen que los resultados obtenidos con este supuesto no son muy alejados de la realidad. Es decir:

$$\Delta [T_{pf} (\Delta p_{pf} - \rho_{pf} \Delta D_{pf})] - \tau_{mf} + q_{pf} = \frac{V}{\Delta t} \Delta t \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{pf}$$

En la ecuación del sistema matriz para este modelo se considera que $T_{pm} = 0$, entonces la ecuación para el sistema matriz es

$$Q_m + q_{pm} = \frac{V}{\Delta t} \Delta t \left(\frac{\phi S}{B} \right)_{pm}$$

Es importante notar que el modelo de doble permeabilidad es más preciso pero implica más ecuaciones de transmisibilidad; así, se puede usar el método de doble porosidad ya que es el más eficiente y el más popular porque permite capturar físicamente la transferencia de los fluidos (es mucho más rápido e igual de eficiente, basado en la experiencia).

En el modelo de De Swaan⁴, expuesto en 1979, se descarta la suposición del estado pseudoestacionario y resuelve numéricamente el problema del flujo matriz – fractura en estado transitorio; además, se hace referencia a la necesidad de un factor de forma, es decir, toma en cuenta la dimensión característica de los bloques de matriz. Se muestra una solución para el caso en que los bloques se consideren como grandes capas horizontales y otra para el caso en el que sean considerados como esferas; cuál de estas dos soluciones deba ser aplicada dependerá totalmente de la información geológica con la que se disponga. Este modelo caracteriza al yacimiento fracturado exclusivamente por medio de los parámetros de flujo del fluido contenido en el yacimiento, que pueden ser obtenidos por medio de registros y núcleos.

$$\Delta p_f = \frac{q_w \mu}{4\pi h_f k_f} \ln \left(\frac{4\eta}{e^\gamma r_w^2} t \right),$$

donde:

q_w es el gasto.

μ es la viscosidad del fluido.

h_f es el espesor de la fractura.

k_f es la permeabilidad absoluta de la fractura.

r_w es el radio del pozo.

t es el tiempo.

γ es la constante de Euler cuyo valor aproximado es 0.5772

η es la constante de difusividad hidráulica, que de acuerdo con la solución dada por De Swaan:

$$\eta_{sl} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\eta_f} + \frac{k_m h_m}{k_f h_f} \frac{1}{\eta_{ma}} \right)},$$

es utilizada cuando se tienen bloques horizontales e infinitos, separados por fracturas;

$$\eta_{sp} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\eta_f} + \frac{2k_m r_m}{3k_f h_f} \frac{1}{\eta_{ma}} \right)},$$

es utilizada en el caso de que el comportamiento de la presión en los bloques de matriz pueda ser representado como si éstos fueran bloque esféricos y

$$\eta_{sl} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\eta_f} + \frac{\mu c}{k_f h_f} \overline{x_m \phi_m} \right)},$$

es usada para una distribución de bloques cuya forma varia ya sea en la dimensión o en las porosidades.

En las ecuaciones anteriores:

k_m es la permeabilidad absoluta de la matriz.

h_m es el espesor de la matriz

η_f es la constante de difusividad hidráulica en la fractura.

η_m es la constante de difusividad hidráulica en la matriz.

r_m es el radio del bloque de matriz.

$\overline{x_m \phi_m}$ es el resultado promedio del producto entre la dimensión característica x_m y la porosidad correspondiente.

Bourdet y Gringarten⁵ en 1980 introdujeron las curvas tipo en yacimientos con doble porosidad para analizar pozos con factor de almacenamiento y daño; afirmaron que aún en ausencia de la primera línea recta en la gráfica semi – log, el análisis de la curva tipo log – log puede dar como resultado todos los parámetros del yacimiento.

Bourdet y cols.⁶, en 1983, complementaron esta última contribución, al introducir la gráfica de la derivada de la presión como una herramienta para analizar los datos de una prueba de presión; de esta manera la región de flujo interporoso fue identificada claramente y pudo ser caracterizada por medio de los parámetros λ y ω .

Por otro lado, Streltsova⁷, en el mismo año, afirmó que el efecto de las suposiciones hechas con respecto a la naturaleza de la interacción matriz – fractura se ve reflejado durante el periodo de transición de la transferencia de flujo entre estos dos sistemas. Señala que en la interfase matriz – fractura, la contribución de flujo de la matriz a la fractura puede ser considerada proporcional a la diferencia de presión entre la presión de la matriz y la presión de la fractura o al gradiente de presión promedio a través del bloque de matriz.

Esta última suposición, a pesar de complicar ligeramente el análisis matemático del problema, proporciona la ventaja de describir de forma más acertada el proceso de equilibrio en la presión, el cual ocurre durante el periodo de transición. Adicionalmente, este modelo predice la presión durante la transición, que al ser graficada contra el logaritmo del tiempo no produce punto de inflexión, resultando una línea recta cuya pendiente, en una

gráfica de Horner, es un medio de la pendiente de la línea recta resultante para las presiones a tiempos temprano y tardío (early – time y late – time). Este modelo se permite la aplicación de un análisis semilog convencional, en una gráfica de Horner, que es más sencillo que el uso de curvas tipo o la técnica de regresión no lineal. Este modelo y su respectiva función de transferencia se describen a continuación:

$$\Delta p_m(z') = \Delta P \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} z' \right) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \alpha t \right] \right\},$$

$$Q_m = \frac{k_m}{\mu} \frac{2\Delta P_m}{\partial z} = \frac{2\Delta p_m k_m}{H} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \alpha t \right]$$

En las ecuaciones anteriores:

H es igual a un medio del espesor de un bloque de matriz

$n = \frac{h_t}{2H}$; es decir, es el resultado de dividir el número total de bloque de matriz entre el espesor de la formación.

z' es la coordenada vertical adimensional.

α es definida como $\frac{\eta_m}{H^2}$

Los modelos presentados hasta este momento asumían el sistema ortogonal de fracturas continuas y uniformes propuesto por Warren y Root; sin embargo, es claro que los bloques de matriz no son del mismo tamaño ni forma, por lo cual se requerían de modelos en los que se representara, de alguna manera, la heterogeneidad de las propiedades de la matriz.

De esta manera, Cinco y cols.⁸, en 1985 presentaron un modelo analítico que tiene como objetivo el estudio del comportamiento de la presión en un yacimiento naturalmente fracturado, con diferente tamaño de bloques de matriz, utilizando para esto una función de distribución que representa la fracción de volumen poroso contenido en determinado tamaño de bloques de matriz.

Posteriormente, en 1988, Jalali – Yazdi y Belani^{9,10} muestran los efectos que significativamente causan bloques de múltiple tamaño en la respuesta de la presión. La sensibilidad de dicha respuesta es estudiada para distribución tanto uniforme como bimodal y se concluye que es menos pronunciada con un incremento en la varianza de la distribución de tamaño de bloque; además se analiza la curva de la derivada de la presión para la distribución uniforme con el propósito de estimar los parámetros del yacimiento.

Vale la pena mencionar algunos otros trabajos que han contribuido con el mejoramiento de la caracterización dinámica de los yacimientos naturalmente fracturados¹, tal como es el modelo de Abdassah y Ershaghi (1986) con el cual introdujeron el concepto de triple porosidad para el análisis de pruebas de presión en un yacimiento naturalmente fracturado y el de Pruess y Narasimhan (1985) en el que propusieron el modelo MINC (Multiple – Interacting Continua), para modelar el flujo de calor en fluidos en un medio fracturado multidimensional.

CAPÍTULO II: DESARROLLO Y SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA TAMAÑO DE BLOQUE CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME

❖ Ecuación de difusión para flujo pseudoestacionario y distribución uniforme de tamaño de bloque

Basado en el trabajo de Belani y Jalali^{9,10}, el desarrollo clásico de la ecuación de difusión para el balance de materia en el sistema fracturado es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} Q_m, \quad (\text{II.1})$$

donde p_f es la presión en la fractura y Q_m es una función de flujo interporoso. Esta ecuación asume que:

- En la fractura ocurre el flujo de manera cilíndrica, radial,
- El fluido en el yacimiento es ligeramente compresible y tiene propiedades constantes,
- Los efectos inerciales y gravitacionales pueden ser ignorados y la ley de Darcy es aplicable y
- Las propiedades de la roca son constantes.

En un yacimiento fracturado de manera no uniforme con una distribución de tamaño de bloques de matriz aleatorio, la contribución de la matriz es:

$$Q_m = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh, \quad (\text{II.2})$$

donde $Q(h)$ es la contribución de flujo de un bloque de tamaño h y $f(h)$ es la probabilidad de ocurrencia de un bloque de tamaño h que para el caso de la distribución uniforme se define como:

$$f(h) = \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}}.$$

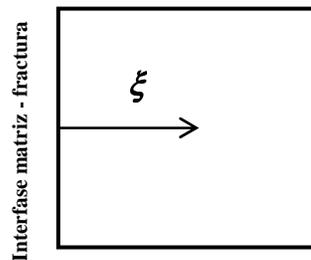
Sustituyendo la ecuación II.2 en II.1 se tiene:

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh.} \quad (\text{II.1}')$$

Considerando la dirección del flujo normal a la interfase matriz – fractura, la ecuación de difusión para flujo anisótropo en una dimensión entre la matriz y la fractura se expresa como sigue:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} = C(t), \quad (\text{II.3})$$

donde ξ representa la coordenada normal a la interfase matriz fractura, que esquemáticamente se representa como sigue:



Integrando dos veces con respecto a ξ

$$\begin{aligned} \partial^2 p &= C(t) \partial \xi^2 \\ \int \partial^2 p &= \int C(t) \partial \xi^2 \\ \partial p &= C(t) \xi \partial \xi + A' \\ \frac{\partial p}{\partial \xi} &= C(t) \xi + A; \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

y

$$\begin{aligned} \int \partial p &= \int [C(t) \xi + A] \partial \xi \\ p_m &= C(t) \frac{\xi^2}{2} + A \xi + B, \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

donde A y B son constantes de integración. A continuación se definirán condiciones de frontera en ξ para poder encontrar así los valores de A y B:

- $p_{Dm} = p_{Df}$ cuando $\xi_D = 0$

Como $\xi_D = \frac{\xi}{h}$, entonces $\xi_D = 0$ implica $\xi = 0$.

- $\frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} = 0$ cuando $\xi_D = 1$

Utilizando nuevamente la definición $\xi_D = \frac{\xi}{h}$, $\xi_D = 1$ implica que $\xi = h$.

Sustituyendo la primera condición de frontera en la ecuación II.5 se tiene:

$$\begin{aligned} p_m &= C(t) \frac{(0)^2}{2} + A(0) + B, \\ p_f &= B. \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Sustituyendo la segunda condición de frontera en la ecuación II.4:

$$\begin{aligned} 0 &= C(t)h + A, \\ A &= -C(t)h. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

De la ley de Darcy en la interfase matriz – fractura:

$$Q(h) = -\frac{k_m}{\mu h} \frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{\text{interfase}}. \quad (\text{II.8})$$

Combinando las ecuaciones II.4 y II.7:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = C(t)\xi - hC(t) = C(t)(\xi - h);$$

en la interfase matriz – fractura $\xi = 0$; entonces:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{\text{interfase}} = -hC(t);$$

que, de acuerdo con la ecuación II.3 puede escribirse como:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{\text{interfase}} = -\frac{\phi_m c_m \mu h}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (\text{II.8}') \quad (\text{II.8'})$$

Sustituyendo la ecuación II.8' en la II.8:

$$Q(h) = -\frac{k_m}{\mu h} \left(-\frac{\phi_m c_m \mu h}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} \right),$$

$$\boxed{Q(h) = \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t}}. \quad (\text{II.9})$$

Ecuación de la función de contribución de un bloque de tamaño h cuando $\xi = 0$.

Con la finalidad de encontrar un valor promedio de p_m , se aplicará el teorema del valor medio para las integrales, utilizando para ello la ecuación II.5 y como límites de 0 a h :

$$p_m = \frac{1}{h-0} \int_0^h \left[C(t) \frac{\xi^2}{2} + A\xi + B \right] d\xi;$$

$$p_m = \frac{1}{h-0} \left[C(t) \frac{\xi^3}{6} + A \frac{\xi^2}{2} + B\xi \right]_0^h;$$

$$p_m = \frac{1}{h} \left[C(t) \frac{h^3}{6} + A \frac{h^2}{2} + Bh \right];$$

$$p_m = C(t) \frac{h^2}{6} + A \frac{h}{2} + B.$$

Como $A = -hC(t)$ y $B = p_f$ entonces:

$$p_m = C(t) \frac{h^2}{6} - C(t) \frac{h^2}{2} + p_f.$$

Como $C(t) = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t}$ entonces:

$$(p_f - p_m) = C(t) \frac{h^2}{2} - C(t) \frac{h^2}{6};$$

$$(p_f - p_m) = C(t) h^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right];$$

$$(p_f - p_m) = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} h^2 \left(\frac{2}{6} \right);$$

$$(p_f - p_m) = \frac{1}{3} \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} h^2.$$

Despejando $\frac{\partial p_m}{\partial t}$ se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} (p_f - p_m).} \quad (\text{II.10})$$

Ecuación que representa la variación de p_m con respecto a t considerando un valor de p_m promedio.

Se procederá a sustituir los parámetros adimensionales en la ecuación de difusión desarrollándola como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) &= \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh; \\ \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) &= \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh; \\ \frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} &= \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} Q(h) f(h) dh. \end{aligned} \quad (\text{II.1'')}$$

Para la sustitución de variables adimensionales, éstas se definirán como sigue:

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} (p_i - p_f); \quad (\text{II.a})$$

$$p_{Dm} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} (p_i - p_m); \quad (\text{II.b})$$

$$t_D = \frac{k_f t}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2}; \quad (\text{II.c})$$

$$\omega_m = \frac{\phi_m c_m}{(\phi_m c_m + \phi_f c_f)}; \quad (\text{II.d})$$

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{(\phi_m c_m + \phi_f c_f)}; \quad (\text{II.e})$$

$$\lambda = \frac{k_m r_w^2}{k_f h^2}; \quad (\text{II.f})$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad (\text{II.g})$$

$$\xi_D = \frac{\xi}{h}; \quad (\text{II.h})$$

$$h_D = \frac{h}{h_{\max}}. \quad (\text{II.i})$$

En seguida se hará una serie de despejes y arreglos con la finalidad de obtener expresiones en variables adimensionales que puedan ser posteriormente sustituidas en la ecuación II.1''.

Despejando p_f de II.a:

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} p_i - \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} p_f$$

$$\frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} p_f = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} p_i - p_{Df}$$

$$p_f = p_i - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} p_{Df}$$

Derivando p_f con respecto a r :

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\partial p_i}{\partial r} - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r}, \text{ donde } \frac{\partial p_i}{\partial r} = 0$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_D} = - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_D}$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_D} = - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \frac{\partial r}{\partial r}$$

Tomando en cuenta que $r = r_w r_D$ y que $\frac{\partial r}{\partial r_D} = r_w$, entonces:

$$\frac{\partial p_f}{\partial r}(r_w) = - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D}.$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{\partial p_f}{\partial r} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D}}; \quad (\text{II.11})$$

Ecuación que representa la variación de p_f con respecto a r en variables adimensionales

entonces, derivando por segunda vez con respecto a r :

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial r_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \frac{\partial r}{\partial r_D};$$

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial r_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \frac{\partial r}{\partial r};$$

como $\frac{\partial r}{\partial r_D} = r_w$, sustituyendo:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} (r_w) = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2};$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2}}. \quad (\text{II.12})$$

Segunda derivada de p_f con respecto a r en variables adimensionales

Ahora, derivando p_f con respecto a t :

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t}, \text{ donde } \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0$$

Usando nuevamente la regla de la cadena:

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_D};$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \frac{\partial t}{\partial t};$$

como $t = \frac{t_D (\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2}{k_f}$ y $\frac{\partial t}{\partial t_D} = \frac{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2}{k_f}$, entonces:

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} \left[\frac{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2}{k_f} \right] = - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D};$$

despejando $\frac{\partial p_f}{\partial t}$,

$$\boxed{\frac{\partial p_f}{\partial t} = - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2} \right]} \quad (\text{II.13})$$

Ecuación que representa la variación de p_f con respecto a t en variables adimensionales.

Despejando p_m de II.b:

$$p_{Dm} = \frac{2 \pi k_f h_f}{q \mu B} p_i - \frac{2 \pi k_f h_f}{q \mu B} p_m;$$

$$\frac{2 \pi k_f h_f}{q \mu B} p_m = \frac{2 \pi k_f h_f}{q \mu B} p_i - p_{Dm};$$

$$p_m = p_i - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} p_{Dm}.$$

Derivando p_m con respecto a t :

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t}, \text{ donde } \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0.$$

Haciendo uso de la regla de la cadena nuevamente:

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_D} = - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_D};$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_D} = - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \frac{\partial t}{\partial t}.$$

Tomando en cuenta que $t = \frac{t_D (\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2}{k_f}$ y $\frac{\partial t}{\partial t_D} = \frac{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2}{k_f}$, entonces:

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} \left[\frac{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2}{k_f} \right] = - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D};$$

por último, despejando $\frac{\partial p_m}{\partial t}$,

$$\boxed{\frac{\partial p_m}{\partial t} = - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2} \right]} \quad (\text{II.14})$$

Ecuación que representa la variación de p_m con respecto a t en variables adimensionales.

Sustituyendo $\frac{\partial p_m}{\partial t}$ en la ecuación II.9:

$$Q(h_D) = \phi_m c_m \left\{ - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2} \right] \right\}$$

Simplificando y acomodando:

$$Q(h_D) = - \frac{q \mu B}{2 \pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \frac{k_f}{\mu r^2} \left[\frac{\phi_m c_m}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m)} \right].$$

Sustituyendo II.d en la expresión anterior:

$$Q(h_D) = - \frac{q \mu B \omega_m}{2 \pi k_f h_f} \frac{k_f}{\mu r^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D}.$$

Finalmente, para obtener la ecuación de difusión en variables adimensionales, se sustituirán todas las expresiones resultantes anteriores en la ecuación II.1'' como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D r_w} \left(-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \left\{ -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right] \right\} \\
 & + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \left(-\frac{q\mu B \omega_m}{2\pi k_f h_f \mu r_w^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \right) f(h_D) d(h_D)
 \end{aligned}$$

Factorizando el término $-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f}$ y simplificando se tiene:

$$-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \left[\frac{1}{r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D r_w^2} \left(\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \right] = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \left\{ \frac{1}{r_w^2} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \left[\frac{\phi_f c_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m)} \right] + \frac{1}{r_w^2} \omega_m \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \left(\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \right) f(h_D) d(h_D) \right\}$$

Simplificando y sustituyendo II.e en la expresión anterior:

$$\frac{1}{r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D r_w^2} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \frac{1}{r_w^2} \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + \frac{1}{r_w^2} \omega_m \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \left(\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \right) f(h_D) d(h_D)$$

Factorizando el término $\frac{1}{r_w^2}$ y simplificando:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + \omega_m \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \left(\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \right) f(h_D) d(h_D)}. \quad (\text{II.15})$$

Ecuación de difusión para el sistema fracturado en variables adimensionales.

Para la matriz, utilizando la ecuación II.10 y sustituyendo en ella a $\frac{\partial p_m}{\partial t}$, p_f y p_m :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right] = \left(\frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} \right) \left[\left(p_i - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} p_{Df} \right) - \left(p_i - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} p_{Dm} \right) \right] \\
 & -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right] = \left(\frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} \right) \left(-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \right) (p_{Df} - p_{Dm});
 \end{aligned}$$

despejando $\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D}$:

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \left(\frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} \right) \left[\frac{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2}{k_f} \right] (p_{Df} - p_{Dm});$$

reacomodando se tiene:

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \frac{3k_m r_w^2}{k_f h^2} \left[\frac{(\phi_f c_f + \phi_m c_m)}{\phi_m c_m} \right] (p_{Df} - p_{Dm});$$

sustituyendo II.d y II.f en la expresión anterior resulta:

$$\boxed{\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \frac{3\lambda}{\omega_m} (p_{Df} - p_{Dm})}. \quad (\text{II.16})$$

Ecuación de flujo para la matriz en variables adimensionales

Para resolver las ecuaciones II.15 y II.16, se establecerán las condiciones iniciales y de frontera siguientes:

$$p_{Df} = p_{Dm} = 0 \quad \text{para} \quad t_D = 0;$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df} = 0;$$

$$r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1;$$

$$C_D \frac{\partial p_{Dw}}{\partial t_D} - \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1;$$

$$p_{Dw} = \left[p_{Df} - S \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1}.$$

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones II.15 y II.16:

- Transformada de la ecuación II.15:

$$\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - \omega_f \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial t_D} - \omega_m \int_{h_{\min}}^1 \left(\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} \right) f(h_D) d(h_D) = 0,$$

de donde transformada de Laplace de $\frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial t_D}$ es:

$$\frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial t_D} = s_D \overline{p_{Df}} + p_{Df}(r_D, 0);$$

como de acuerdo a la condición inicial $p_{Df}(r_D, 0) = 0$, entonces:

$$\frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial t_D} = s_D \overline{p_{Df}};$$

sustituyendo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - \omega_f s_D \overline{p_{Df}} - \omega_m \int_{h_{\min}}^1 \left(\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} \right) f(h_D) d(h_D) = 0.} \quad (\text{II.15}')$$

Ecuación de difusión para el sistema fracturado en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

- Transformada de la ecuación II.16

$$\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} = \frac{3\lambda}{\omega_m} (\overline{p_{Df}} - \overline{p_{Dm}}),$$

de donde transformada de Laplace de $\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D}$ es:

$$\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} = s_D \overline{p_{Dm}} + p_{Dm}(r_D, 0);$$

considerando la condición inicial $p_{Dm}(r_D, 0) = 0$, entonces:

$$\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} = s_D \overline{p_{Dm}};$$

despejando de esta expresión a $\overline{p_{Dm}}$ y sustituyéndola en $\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} = \frac{3\lambda}{\omega_m} (\overline{p_{Df}} - \overline{p_{Dm}})$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} &= \frac{3\lambda}{\omega_m} \left[\overline{p_{Df}} - \left(\frac{1}{s_D} \right) \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} \right]; \\ \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} &= \frac{3\lambda}{\omega_m} \overline{p_{Df}} - \frac{3\lambda}{\omega_m s_D} \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D}; \\ \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} + \frac{3\lambda}{\omega_m s_D} \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} &= \frac{3\lambda}{\omega_m} \overline{p_{Df}}; \\ \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} \left(1 + \frac{3\lambda}{\omega_m s_D} \right) &= \frac{3\lambda}{\omega_m} \overline{p_{Df}}; \\ \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} &= \frac{3\lambda}{\omega_m} \overline{p_{Df}} \left(1 + \frac{3\lambda}{\omega_m s_D} \right)^{-1}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} = \frac{(3\lambda \overline{p_{Df}})(\omega_m s_D)}{(\omega_m)(\omega_m s_D + 3\lambda)};$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} = \frac{3\lambda}{\omega_m s_D + 3\lambda} s_D \overline{p_{Df}}}. \quad (\text{II.16}')$$

Ecuación de flujo para la matriz en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

Sustituyendo II.16' en II.15' y reacomodando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - \omega_f s_D \overline{p_{Df}} - \omega_m \int_{h_{\max}}^1 \left(\frac{3\lambda}{\omega_m s_D + 3\lambda} s_D \overline{p_{Df}} \right) f(h_D) d(h_D) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - \omega_f s_D \overline{p_{Df}} - \omega_m s_D \overline{p_{Df}} \int_{h_{\max}}^1 \left(\frac{3\lambda}{\omega_m s_D + 3\lambda} \right) f(h_D) d(h_D) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - s_D \overline{p_{Df}} \left[\omega_f + \omega_m \int_{h_{\max}}^1 \left(\frac{3\lambda}{\omega_m s_D + 3\lambda} \right) f(h_D) d(h_D) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Si se establece, para este caso, una función $g(s_D)$ de la siguiente manera:

$$g(s_D) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \left(\frac{3\lambda}{\omega_m s_D + 3\lambda} \right) f(h_D) d(h_D), \quad (\text{II.17})$$

se puede observar, que ésta además de simplificar la expresión anterior a ella, proporciona información importante de las características del yacimiento y de la distribución y variabilidad de tamaño de los bloques las cuales influyen de manera notable en la respuesta de la presión (Yalali – Jazdi y Belani, 1988) y que, como se mostrará más adelante, diferenciará determinantemente la ecuación de difusión correspondiente al régimen de flujo pseudoestacionario de aquella para el régimen transitorio. Así, sustituyendo $g(s_D)$ en la expresión anterior resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - s_D g(s_D) \overline{p_{Df}} = 0}. \quad (\text{II.18})$$

Ecuación de difusión para régimen de flujo pseudoestacionario y distribución uniforme de tamaño de bloques expresada en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

❖ Ecuación de difusión para flujo transitorio y distribución uniforme de tamaño de bloque

Puede seguirse un procedimiento similar al realizado para el régimen de flujo pseudoestacionario, usando la ecuación de flujo para la matriz dada por la ecuación II.8 previa:

$$Q(h) = - \frac{k_m}{\mu h} \frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{\text{interfase}} \quad (\text{II.8})$$

y la ecuación de balance de materia:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t}, \quad (\text{II.19})$$

donde las condiciones iniciales y de frontera son exactamente las mismas que para el caso pseudoestacionario.

Para sustituir los parámetros adimensionales, se utilizarán algunas de las expresiones desarrolladas para el caso anterior:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2};$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial r} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D};$$

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right] \text{ y}$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right].$$

Para $\frac{\partial p_m}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2}$:

Se despeja p_m de la ecuación II.10 resultando (como ya se había visto anteriormente):

$$p_m = p_i - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} p_{Dm}.$$

Derivando p_m con respecto a ξ :

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi} - \frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi}, \text{ donde } \frac{\partial p_i}{\partial \xi} = 0.$$

Aplicando la regla de la cadena con la finalidad de obtener $\frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D}$:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_D};$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D}.$$

Tomando en cuenta que $\xi = \xi_D h$ y por lo tanto $\frac{\partial \xi}{\partial \xi_D} = h$, sustituyendo:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(h) = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D}.$$

Finalmente se obtiene que:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D};$$

y entonces derivando nuevamente con respecto a ξ se tiene:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} \right),$$

es importante notar que h_f y h se refieren a características diferentes, ya que mientras que h_f corresponde al ancho de la fractura, h corresponde al tamaño variable de bloque.

Aplicando nuevamente la regla de la cadena buscando obtener $\frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2}$:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \xi_D},$$

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_D} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h} \frac{\partial}{\partial \xi_D} \left(\frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \xi_D},$$

considerando que $\frac{\partial \xi}{\partial \xi_D} = h$, entonces sustituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2}(h) = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h} \frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2};$$

despejando $\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2}$ resulta finalmente:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} = -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h^2} \frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2}} \quad (\text{II.20})$$

Ecuación que expresa la segunda derivada de p_m con respecto a ξ en variables adimensionales

Sustituyendo la ecuación II.8 y las expresiones anteriores en la ecuación II.1'' con el objetivo de obtener una ecuación en variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} &= \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \left(-\frac{k_m}{\mu h} \frac{\partial p_m}{\partial \xi} \right) f(h) dh, \\ -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D r_w} \left(-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f r_w} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) &= \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \left\{ -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right] \right\} \\ + \frac{\mu}{k_f} \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^{\frac{h_{\max}}{h_{\min}}} \left[-\frac{k_m}{\mu h} \left(-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} \right) \right] &f(h_D) d(h_D). \end{aligned}$$

Factorizando el término $-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f}$ y simplificando resulta:

$$\frac{1}{r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D r_w^2} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right] - \frac{\mu}{k_f} \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{k_m}{\mu h^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) d(h_D)$$

Reacomodando y simplificando:

$$\frac{1}{r_w^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D r_w^2} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \frac{1}{r_w^2} \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \left[\frac{\phi_f c_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m)} \right] - \frac{\mu}{k_f} \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{k_m}{\mu h^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) d(h_D)$$

Sustituyendo II.e y multiplicando la expresión por r_w^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} &= \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \frac{\mu}{k_f} r_w^2 \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \frac{k_m}{\mu h^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) d(h_D); \\ \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} &= \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \frac{\mu}{k_f} r_w^2 \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \left(\frac{k_f}{k_f} \right) \frac{k_m}{\mu h^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) d(h_D). \end{aligned}$$

Reacomodando:

$$\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{\max}}^1 \left(\frac{k_f}{\mu} \right) \frac{k_m r_w^2}{k_f h^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) d(h_D).$$

Sustituyendo II.f en esta última expresión y simplificando resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \int_{h_{\max}}^1 \lambda \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) d(h_D)}. \quad (\text{II.21})$$

Ecuación de difusión para el sistema fracturado en variables adimensionales.

Para la ecuación de balance de materia II.19, sustituyendo de igual manera los parámetros adimensionales, se tiene:

$$-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f h^2} \frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \left\{ -\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right] \right\}.$$

Factorizando el término $-\frac{q\mu B}{2\pi k_f h_f}$ y simplificando resulta:

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r_w^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2} = \frac{k_f h^2}{k_m r_w^2} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} \left[\frac{\phi_m c_m}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m)} \right].$$

Sustituyendo II.d y II.f en la expresión anterior se tiene finalmente que:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\omega_m}{\lambda} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D}}. \quad (\text{II.22})$$

Ecuación de balance de materia para sistema matriz en variables adimensionales.

A continuación, se muestra la transformación al espacio de Laplace de las ecuaciones anteriormente obtenidas:

- Para $\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \int_{h_{\max}}^1 \lambda \frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} f(h_D) d(h_D);$

$$\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial t_D} - \int_{h_{\min}}^1 \lambda \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} f(h_D) d(h_D),$$

donde,

$$\frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial t_D} = s_D \overline{p_{Df}} + p_{Df}(r_D, 0) \text{ y } p_{Df}(r_D, 0) = 0;$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} = \omega_f s_D \overline{p_{Df}} - \int_{h_{\min}}^1 \lambda \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} f(h_D) d(h_D)} \quad (\text{II.23})$$

Ecuación de difusión para el sistema fracturado en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

- Para $\frac{\partial^2 p_{Dm}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\omega_m}{\lambda} \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D};$

$$\frac{\partial^2 \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\omega_m}{\lambda} \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D},$$

donde,

$$\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial t_D} = s_D \overline{p_{Dm}} + p_{Dm}(0, t_D) \text{ y } p_{Dm}(0, t_D) = 0;$$

entonces:

$$\frac{\partial^2 \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\omega_m s_D}{\lambda} \overline{p_{Dm}}. \quad (\text{II.24})$$

Resolviendo esta última ecuación diferencial, para posteriormente encontrar $\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0}$, utilizando las condiciones de frontera para ξ_D :

$$\overline{p_{Dm}} = \overline{p_{Df}} \text{ cuando } \xi_D = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} = 0 \text{ cuando } \xi_D = 1;$$

se obtiene el siguiente resultado:

$$\overline{p_{Dm}} = \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D} \left(e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D} + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D} \right) \overline{p_{Df}}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D}}$$

Obteniendo la derivada de esta función y evaluándola para $\xi_D = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} &= \frac{2e^{\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D} \overline{p_{Df}}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D}} \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} - \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D} \left(e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D} + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D} \right) \overline{p_{Df}}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \xi_D}} \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \\ \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} &= \frac{2\overline{p_{Df}}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}}} \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} - \frac{\left(e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}} + 1 \right) \overline{p_{Df}}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}}} \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \\ \frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} &= \overline{p_{Df}} \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \left[\frac{2}{1 + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Reacomodando:

$$\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} = -\overline{p_{Df}} \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \left[1 - \frac{2}{1 + e^{2\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}}} \right].$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} = -\overline{p_{Df}} \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}\right)}. \quad (\text{II.25})$$

Ecuación de flujo para el sistema matriz en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

Sustituyendo $\frac{\partial \overline{p_{Dm}}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0}$ en la ecuación II.23:

$$\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} = \omega_f s_D \overline{p_{Df}} + \overline{p_{Df}} \int_{h_{\max}}^1 \lambda \sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}\right) f(h_D) d(h_D).$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} &= \omega_f s_D \overline{p_{Df}} + \overline{p_{Df}} \int_{h_{\max}}^1 \lambda \sqrt{\frac{\omega_m s_D^2}{\lambda s_D}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}\right) f(h_D) d(h_D); \\ \frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} &= \omega_f s_D \overline{p_{Df}} + s_D \overline{p_{Df}} \int_{h_{\max}}^1 \sqrt{\frac{\omega_m \lambda}{s_D}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}\right) f(h_D) d(h_D); \\ \frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} &= s_D \overline{p_{Df}} \left[\omega_f + \int_{h_{\max}}^1 \sqrt{\frac{\omega_m \lambda}{s_D}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}\right) f(h_D) d(h_D) \right]. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta, en este caso, una función $g(s_D)$ que se definirá como sigue:

$$g(s_D) = \omega_f + \int_{h_{\max}}^1 \sqrt{\frac{\omega_m \lambda}{s_D}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s_D}{\lambda}}\right) f(h_D) d(h_D). \quad (\text{II.26})$$

debe notarse que en esta función se consideran los parámetros característicos del yacimiento (λ , ω_m y ω_f), además de la distribución y la variabilidad del tamaño de los bloques; sin embargo, vale la pena resaltar que es diferente a la función $g(s_D)$ definida para el caso pseudoestacionario, ecuación II.17, y que la principal razón para la definición de esta función es establecer una ecuación semejante para ambos casos (transitorio y pseudoestacionario) tal como se mostrará a continuación (esta definición de $g(s_D)$ no tiene solución analítica, por lo que requiere de integración numérica).

Sustituyendo la ecuación II.26 e igualando a cero la ecuación diferencial en el espacio de Laplace puede expresarse:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - s_D g(s_D) \overline{p_{Df}} = 0.} \quad (\text{II.27})$$

Ecuación de difusión para régimen de flujo transitorio y distribución uniforme de tamaño de bloques expresada en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

Retomando la explicación anterior, es importante notar que la ecuación obtenida es semejante a la ecuación para el caso de transferencia matriz – fractura pseudoestacionaria, pero debe tenerse presente que tanto en la ecuación de transferencia como en su solución, se define, como se comentó previamente, una función $g(s_D)$ representativa para cada caso.

❖ Solución a la ecuación de difusión¹¹

La ecuación de difusión y por lo tanto la solución de la misma es semejante para ambos regímenes de flujo, pseudoestacionario y transitorio, pero con la función $g(s_D)$, que en la solución formará parte del parámetro en las funciones de Bessel, diferente. Es decir, las ecuaciones obtenidas para cada uno de los regímenes de flujo serán tratadas como si fueran una sola debido a dicha similitud, obteniéndose así una sola solución que será, por lo tanto, la misma para ambos casos.

Entonces, considerando la ecuación II.18:

$$\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} - s_D g(s_D) \overline{p_{Df}} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \overline{p_{Df}}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} = s_D g(s_D) \overline{p_{Df}}.$$

Factorizando las derivadas y considerando que $x = \sqrt{s_D g(s_D)}$ se obtiene:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} \right) = x^2 \overline{p_{Df}}. \quad (\text{II.18}')$$

Se tiene la condición inicial siguiente:

$$p_{Df} = p_{Dm} = 0 \quad \text{para} \quad t_D = 0,$$

la condición de frontera externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df} = 0$$

y la condición de frontera interna que considera un gasto de producción constante, con almacenamiento en el pozo y daño en la formación.

La condición de frontera para el almacenamiento en el pozo es ^{8,9,10}:

$$C_D \frac{\partial p_{Dw}}{\partial t_D} - \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1,$$

donde $C_D = \frac{C}{2\pi h r_w^2 (\phi_m c_m + \phi_f c_f)}$

y la condición de frontera para el daño en la formación es ^{8,9,10}:

$$p_{Dw} = \left[p_{Df} - S \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1},$$

donde $S = 1.151 \left[\frac{P_i - P_{1hr}}{m} - \log \left(\frac{k_f}{(\phi_m c_m + \phi_f c_f) \mu r_w^2} \right) + 3.23 \right]$.

La ecuación II.18' tiene la forma de la Ecuación de Bessel Modificada, por lo cual la solución general para $\overline{p_{Df}}$ es:

$$\overline{p_{Df}} = A I_0(xr_D) + B K_0(xr_D), \quad (\text{II.28})$$

donde,

I_0 es la Función de Bessel Modificada de primer tipo, orden cero.

K_0 es la Función de Bessel Modificada de segundo tipo, orden cero.

A y B son constantes arbitrarias que serán determinadas por medio de las condiciones de frontera.

Tomando la transformada de Laplace de la condición de frontera externa resulta:

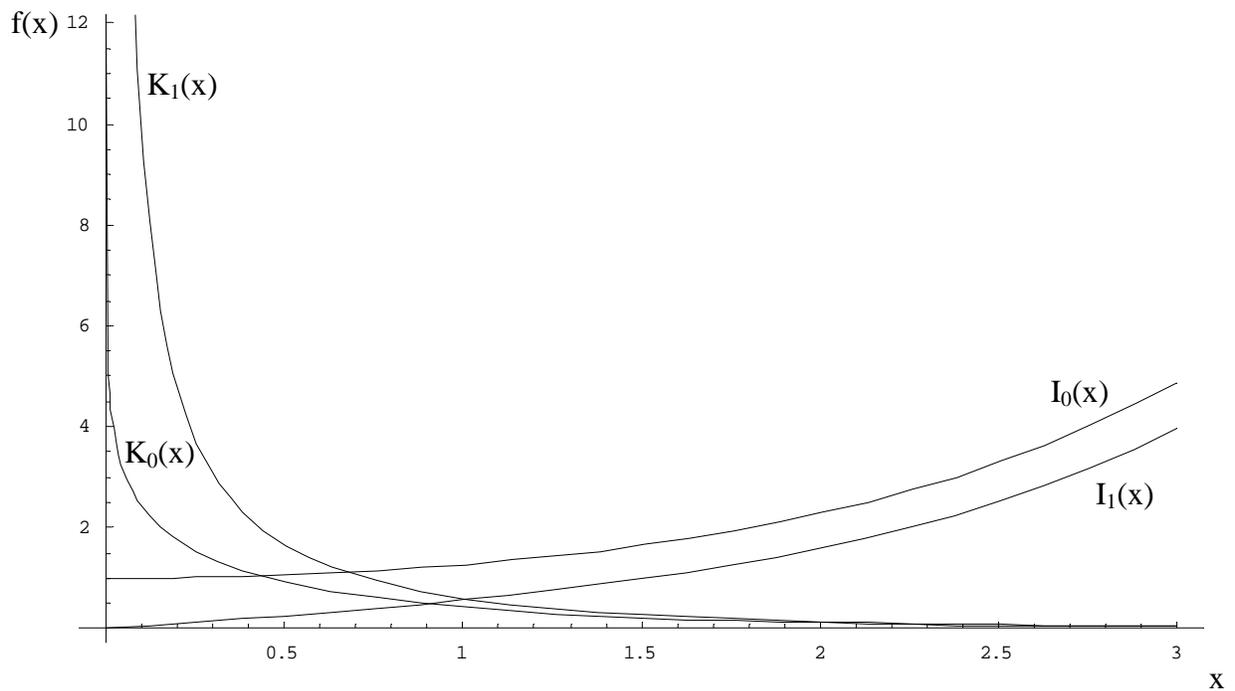
$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \overline{p_{Df}} = 0 ;$$

combinando ésta última expresión con la ecuación II.28 resulta:

$$0 = AI_0[x(\infty)] + BK_0[x(\infty)];$$

$$0 = AI_0(\infty) + BK_0(\infty) .$$

En la gráfica siguiente se muestra el comportamiento de las funciones de Bessel modificadas de cero y primer orden, en la cual se puede observar que $K_0(\infty) \rightarrow 0$ y $I_0(\infty) \rightarrow \infty$.



De acuerdo con la discusión anterior:

$$0 = A(\infty) + B(0) ;$$

$$A = 0 ,$$

de donde la ecuación II.28 queda como:

$$\overline{p_{Df}} = BK_0(xr_D). \quad (\text{II.29})$$

Ahora, transformando al espacio de Laplace las condiciones de frontera interna:

- Para la condición de almacenamiento en el pozo:

$$C_D [s_D \overline{p_{Dw}} + p_{Dw}(r_D, 0)] - \left(r_D \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{s_D};$$

$$C_D s_D \overline{p_{Dw}} + C_D p_{Dw}(r_D, 0) - \left(r_D \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{s_D};$$

De la condición inicial se sabe que $p_{Dw}(r_D, 0) = 0$, por lo tanto:

$$C_D s_D \overline{p_{Dw}} - \left(r_D \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{s_D}. \quad (\text{II.30})$$

- Para la condición de daño a la formación:

$$\overline{p_{Dw}} = \left[\overline{p_{Df}} - S \left(r_D \frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1};$$

para que esta última expresión pueda utilizarse se debe derivar la ecuación (II.29) con respecto a r_D :

$$\frac{\partial \overline{p_{Df}}}{\partial r_D} = -BxK_1(xr_D), \quad (\text{II.31})$$

donde $\frac{d}{dr_D} K_0(xr_D) = -xK_1(xr_D)$.

Sustituyendo las ecuaciones II.29 y II.31 en la transformada de la condición de frontera interna para el daño a la formación se obtiene:

$$\overline{p_{Dw}} = [BK_0(xr_D) + SBxr_D K_1(xr_D)]_{r_D=1};$$

$$\overline{p_{Dw}} = BK_0(x) + SBxK_1(x);$$

$$\overline{p_{Dw}} = B[K_0(x) + S xK_1(x)].$$

Despejando B de esta expresión:

$$B = \frac{\overline{p_{Dw}}}{K_0(x) + S xK_1(x)}. \quad (\text{II.32})$$

Usando la condición para el almacenamiento en el pozo, sustituyendo la ecuación II.31 en la ecuación II.30:

$$\begin{aligned} C_D s_D \overline{p_{Dw}} - (-B x r_D K_1(x r_D))_{r_D=1} &= \frac{1}{s_D}; \\ C_D s_D \overline{p_{Dw}} + B x K_1(x) &= \frac{1}{s_D}. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Sustituyendo la ecuación II.32 en II.33:

$$\begin{aligned} C_D s_D \overline{p_{Dw}} + \frac{\overline{p_{Dw}} x K_1(x)}{K_0(x) + S x K_1(x)} &= \frac{1}{s_D}; \\ \overline{p_{Dw}} \left[C_D s_D + \frac{x K_1(x)}{K_0(x) + S x K_1(x)} \right] &= \frac{1}{s_D}; \end{aligned}$$

dividiendo entre s_D resulta:

$$\begin{aligned} \overline{p_{Dw}} \left[C_D + \frac{x K_1(x)}{s_D [K_0(x) + S x K_1(x)]} \right] &= \frac{1}{s_D^2}; \\ \overline{p_{Dw}} \left[\frac{C_D s_D [K_0(x) + S x K_1(x)] + x K_1(x)}{s_D [K_0(x) + S x K_1(x)]} \right] &= \frac{1}{s_D^2}; \end{aligned}$$

despejando $\overline{p_{Dw}}$:

$$\begin{aligned} \overline{p_{Dw}} &= \frac{1}{s_D^2} \left[\frac{s_D [K_0(x) + S x K_1(x)]}{C_D s_D [K_0(x) + S x K_1(x)] + x K_1(x)} \right]; \\ \boxed{\overline{p_{Dw}} = \frac{K_0(x) + S x K_1(x)}{s_D [C_D s_D [K_0(x) + S x K_1(x)] + x K_1(x)]}} & \quad (\text{II.34}) \end{aligned}$$

Solución a la ecuación de difusión (para flujos pseudoestacionario y transitorio) expresada en variables adimensionales y en el espacio de Laplace, considerando daño a la formación y factor de almacenamiento.

La expresión anterior es la solución de la ecuación de difusión en el dominio de Laplace considerando el almacenamiento en el pozo y daño en la formación. Como un caso particular de la ecuación II.34, si no se considerara el almacenamiento en el pozo ni el daño a la formación (es decir, $S = 0$ y $C_D = 0$), la ecuación quedaría como sigue:

$$\boxed{\overline{p}_{Dw} = \frac{K_0(x)}{s_D x K_1(x)}} \quad (\text{II.35})$$

Solución a la ecuación de difusión (para flujos pseudoestacionario y transitorio) expresada en variables adimensionales y en el espacio de Laplace, sin considerar daño a la formación y factor de almacenamiento.

Las ecuaciones obtenidas anteriormente no pueden invertirse directamente; por esta razón deben utilizarse métodos numéricos tales como el algoritmo de Stehfest¹² (el cual se presenta en el Apéndice B) o una aproximación tal como la que se presenta en el trabajo de Lee y Wattenbarger¹¹.

CAPÍTULO III: VALIDACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

❖ Modelo de Warren y Root

Uno de los modelos matemáticos clásicos utilizados para describir el comportamiento de un yacimiento naturalmente fracturado es aquel propuesto por Warren y Root² (1963), el cual es una idealización física que incorpora las características significativas comunes de la formación y que se basa en las siguientes consideraciones generales:

1. El sistema matriz es homogéneo e isótropo y es representado por un arreglo sistemático de paralelepípedos rectangulares idénticos.
2. El sistema fractura está constituido por un conjunto de fracturas continuas y uniformes que están orientadas de tal manera que cada fractura es paralela a aquella del eje principal de permeabilidad; las fracturas normales a cada eje principal están uniformemente espaciadas y son de espesor constante, sin embargo, una fractura de diferente espaciamiento o diferente espesor podría existir en cada uno de los ejes para simular el propio grado de anisotropía.
3. El conjunto de porosidades primaria y secundaria es homogéneo aunque anisótropo; el flujo puede darse entre un elemento con porosidad primaria y un elemento con porosidad secundaria, pero no entre elementos con porosidad primaria.

Si bien este modelo implica heterogeneidad a escala macroscópica, puede considerarse homogéneo si las dimensiones de los bloques homogéneos son pequeñas en comparación con las dimensiones del yacimiento.

Con relación al cálculo de parámetros que describen al yacimiento, debido a la naturaleza discreta de los elementos de porosidad primaria y datos que indican que las distribuciones normal y log – normal de porosidad y permeabilidad son típicas, la porosidad media aritmética y la permeabilidad media geométrica se utilizan para obtener el modelo más probable y por medio de las pruebas de interferencia se determinan los componentes y la orientación de la permeabilidad direccional. Sin embargo, existen dos parámetros que no pueden determinarse por estos métodos: la porosidad secundaria y el factor de forma; de los cuales este último describe la comunicación entre el sistema matriz y el sistema fractura. Para dichos parámetros, en el artículo de Warren y Root se desarrollan métodos con los que pueden obtenerse sus valores aproximados.

❖ Formulación del modelo

Considerando que el yacimiento puede ser homogéneo, se definen dos presiones en cada punto (x, y, z, t) :

$$p_m(x, y, z, t) = \frac{\int_V p(x, y, z, t) g_m(V) dV}{\int_V g_m(V) dV} \quad (\text{III.1})$$

$$p_f(x, y, z, t) = \frac{\int_V p(x, y, z, t) g_f(V) dV}{\int_V g_f(V) dV}, \quad (\text{III.2})$$

donde g_m y g_f son funciones de volumen en el sistema matriz y en el sistema fractura, respectivamente.

El volumen considerado debe ser pequeño en comparación con el volumen del yacimiento y debe ser grande en comparación con el tamaño de los elementos del sistema matriz, de esta manera, las siguientes condiciones deben cumplirse:

$$\int_V g_m(V) dV = \phi_m \quad (\text{III.3})$$

$$\int_V g_f(V) dV = \phi_f \quad (\text{III.4})$$

Si la saturación del agua congénita en el sistema fractura es despreciable, la porosidad intergranular medida, $\overline{\phi}_m$, puede relacionarse con ϕ_m y ϕ_f como sigue:

$$\phi_m = (1 - \phi_f) \overline{\phi}_m (1 - s_{wc})_m. \quad (\text{III.5})$$

El flujo monofásico de un líquido ligeramente compresible puede parcialmente describirse aplicando el teorema de Green al volumen V para un yacimiento de espesor uniforme que es horizontal, homogéneo y anisótropo; de esta manera, se obtiene la forma aplicable de la ecuación de continuidad siguiente:

$$\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{k_{fy}}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} - \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t}, \quad (\text{III.6})$$

donde los ejes x y y coinciden con los ejes principales de permeabilidad. En la expresión

anterior c_m y c_f son compresibilidades totales; sin embargo, si se asume que las fuerzas externas son constantes, que no hay interacción entre el sistema matriz y el sistema fractura; es decir, que ϕ_m es independiente de p_f y que ϕ_f es independiente de p_m ; y que la variación de ϕ_f con respecto a p_f es despreciable, es posible obtener las siguientes aproximaciones:

$$c_m \cong c_o + \frac{c_p + s_{wc}c_w}{1 - s_{wc}} \quad (\text{III.7})$$

$$c_f \cong c_o \quad (\text{III.8})$$

En los casos donde las condiciones establecidas lo permitan, el segundo término del miembro derecho de la ecuación III.7 será por lo menos tan grande como la compresibilidad del fluido.

Además de la ecuación III.6 es necesario definir una continuidad local. La siguiente ecuación siguiente puede satisfacerse para el volumen V si se hace la consideración de que existe flujo pseudoestacionario de los elementos de la matriz hacia las fracturas:

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\sigma k_m}{\mu} (p_f - p_m), \quad (\text{III.9})$$

donde el parámetro σ es el factor de forma, que como ya sea había mencionado anteriormente, refleja la geometría de los elementos de la matriz y controla el flujo entre las dos regiones porosas; tiene dimensiones recíprocas al área.

Las ecuaciones III.6 y III.9 pueden expresarse en variables adimensionales utilizando las transformaciones siguientes:

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} (p_i - p_f), \text{ presión en la fractura, adimensional.}$$

$$\xi_r = \sqrt{\frac{x^2}{Kr_w^2} + \frac{Ky^2}{r_w^2}}, \text{ coordenadas radiales, adimensionales.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Ky}{x}\right)$$

$$t_D = \frac{k_f t}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m)\mu r_w^2}, \text{ tiempo, adimensional.}$$

$$\bar{k}_f = \sqrt{k_{fx}k_{fy}}, \quad K = \sqrt{\frac{k_{fx}}{k_{fy}}} \text{ representa el grado de anisotropía, adimensional.}$$

$R = \frac{r_e}{r_w}$, es el radio de la frontera externa, adimensional.

$\lambda = \alpha \frac{k_m r_w^2}{k_f}$ es el coeficiente de flujo interposo

$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{(\phi_m c_m + \phi_f c_f)}$ es la relación de almacenamiento.

Para un yacimiento infinito con presión inicial uniforme, producido a gasto constante, las ecuaciones en variables adimensionales, la condición inicial y las condiciones de frontera quedan de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\xi_r} \frac{\partial}{\partial \xi_r} \left(\xi_r \frac{\partial p_{Df}}{\partial \xi_r} \right) + \frac{1}{\xi_r^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial \theta^2} - (1 - \omega_f) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} \quad (\text{III.10})$$

$$(1 - \omega_f) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \lambda (p_{Df} - p_{Dm}) \quad (\text{III.11})$$

$$p_{Dm} = p_{Df} = 0; \text{ para } t_D = 0, \text{ todo } \xi_r \text{ y } \theta$$

$$p_{Df} = 0; \text{ para } t_D > 0, \xi_r \rightarrow \infty, \text{ todo } \theta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{Df}}{\partial \xi_r} d\theta = -1; t_D = 0, R = \frac{1}{\sqrt{K \cos^2 \theta + \frac{1}{K} \text{sen}^2 \theta}}, \quad (\text{III.12})$$

Entonces, el pozo que se representa por medio de una elipse después de la transformación, causa una distribución de presión carente de simetría y con el propósito de evitar la necesidad de incluir K como un parámetro en la solución, se supone que la presión del pozo obtenida resolviendo las ecuaciones de la III.10 a la III.12 difiere por una cantidad constante de la presión del pozo obtenida resolviendo el problema simétrico ($K=1$). Después de un tiempo muy corto, la diferencia en estas presiones debido a la distorsión de la distribución de la presión en la región cercana al pozo será constante; de esta forma, considerando que los errores que se restringen a tiempos pequeños son reducidos, la expresión siguiente completa la descripción del problema:

$$p_{Dw}(t_D) = p_{Df}^*(1, t_D) - S^*, \quad (\text{III.13})$$

donde:

$S^* = \ln \left(\frac{K+1}{2\sqrt{K}} \right)$, es el daño a la formación debido a la anisotropía, adimensional.

$p_{Df}^*(1, t_D)$ es la solución para el problema simétrico, descrito por las ecuaciones III.10 a III.12 con $K = 1$, evaluada a $\xi_r = 1$.

Haciendo uso de la transformada de Laplace y resolviendo la ecuación resultante sujeta a las condiciones de frontera anteriormente planteadas, la solución al problema puede ser expresada como sigue:

$$p_{Df}^*(1, t_D) = L^{-1} \left[\frac{K_o(\sqrt{s_D f(s_D)})}{s_D \sqrt{s_D f(s_D)} K_1(\sqrt{s_D f(s_D)})} \right], \quad (\text{III.14})$$

donde $f(s_D) = \frac{\omega_f(1 - \omega_f)s_D + \lambda}{(1 - \omega_f)s_D + \lambda}$.

❖ Desarrollo de la validación

Para poder validar el modelo propuesto en esta tesis con el modelo de Warren y Root, es necesario hacer algunas consideraciones, debido a que aquel es un modelo que considera tamaño de bloques múltiple mientras que éste es un modelo que considera un tamaño constante de bloques.

Entonces:

- Se considerará, únicamente para cuestiones de la validación, $\frac{\partial p_m}{\partial t}$ como la propuesta por Warren y Root:

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\sigma k_m}{\mu} (p_f - p_m); \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\sigma k_m}{\phi_m c_m \mu} (p_f - p_m),$$

en lugar de:

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} (p_f - p_m), \quad (\text{II.10})$$

lo que implica considerar que $\sigma = \frac{3}{h^2}$.

- También para cuestiones de la validación, es necesario considerar que λ_{\max} y λ_{\min} son iguales.
- No se considerará daño en la formación ni factor de almacenamiento.

Tomando en cuenta la segunda de las consideraciones la ecuación II.12, la cual está en variables adimensionales, quedaría como:

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \frac{\lambda}{\omega_m} (p_{Df} - p_{Dm}),$$

debido a que Warren y Root definen el coeficiente de flujo interporoso como:

$$\lambda = \sigma \frac{k_m r_w^2}{k_f}.$$

Consecuentemente, después de aplicar la transformada de Laplace y realizar las simplificaciones correspondientes se obtiene la función $g(s_D)$ de la siguiente manera:

$$g(s_D) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{\min}}{h_{\max}}}^1 \left(\frac{\lambda}{\omega_m s_D + \lambda} \right) f(h_D) d(h_D);$$

resolviendo se este problema se obtiene:

$$g(s_D) = \omega_f + \omega_m \frac{\sqrt{\lambda_{\min}/\omega_m s_D}}{1 - \sqrt{\lambda_{\min}/\lambda_{\max}}} \left(\tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max}/\omega_m s_D} - \tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\min}/\omega_m s_D} \right) \quad (\text{III.15})$$

Debe notarse que al tomar en cuenta la segunda consideración se produce una indeterminación en la ecuación anterior $\left(\frac{0}{0} \right)$, por lo que se procederá a obtener el límite cuando λ_{\min} tiende a λ_{\max} haciendo uso de la regla de L'Hôpital de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}} \left[\omega_f + \omega_m \frac{\sqrt{\lambda_{\min}/\omega_m s_D}}{1 - \sqrt{\lambda_{\min}/\lambda_{\max}}} \left(\tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max}/\omega_m s_D} - \tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\min}/\omega_m s_D} \right) \right] \\ &= \lim_{\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}} \omega_f + \omega_m \lim_{\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}} \left[\frac{\sqrt{\lambda_{\min}/\omega_m s_D}}{1 - \sqrt{\lambda_{\min}/\lambda_{\max}}} \left(\tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max}/\omega_m s_D} - \tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\min}/\omega_m s_D} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital al segundo límite que es el que contiene la indeterminación y después de simplificar se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}} \left[\frac{\sqrt{\lambda_{\min} / \omega_m s_D}}{1 - \sqrt{\lambda_{\min} / \lambda_{\max}}} \left(\tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max} / \omega_m s_D} - \tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\min} / \omega_m s_D} \right) \right] \\
 &= -\lim_{\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}} \left[\sqrt{\lambda_{\max} / \omega_m s_D} \left(\tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max} / \omega_m s_D} - \tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\min} / \omega_m s_D} \right) - \frac{\sqrt{\lambda_{\min} \lambda_{\max}}}{\omega_m s_D + \lambda_{\max}} \right] \\
 &= -\left[\sqrt{\lambda_{\max} / \omega_m s_D} \left(\tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max} / \omega_m s_D} - \tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max} / \omega_m s_D} \right) - \frac{\sqrt{\lambda_{\max} \lambda_{\max}}}{\omega_m s_D + \lambda_{\max}} \right] \\
 &= -\left(-\frac{\lambda_{\max}}{\omega_m s_D + \lambda_{\max}} \right) = \frac{\lambda_{\max}}{\omega_m s_D + \lambda_{\max}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}} \omega_f + \omega_m \lim_{\lambda_{\min} \rightarrow \lambda_{\max}} \left[\frac{\sqrt{\lambda_{\min} / \omega_m s_D}}{1 - \sqrt{\lambda_{\min} / \lambda_{\max}}} \left(\tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\max} / \omega_m s_D} - \tan^{-1} \sqrt{\lambda_{\min} / \omega_m s_D} \right) \right] \\
 &= \omega_f + \omega_m \frac{\lambda_{\max}}{\omega_m s_D + \lambda_{\max}}
 \end{aligned}$$

Es decir, para el caso en el que se consideren λ_{\max} y λ_{\min} iguales:

$$g(s_D) = \omega_f + \omega_m \frac{\lambda}{\omega_m s_D + \lambda}, \quad (\text{III.16})$$

donde λ es el valor del coeficiente de flujo interporoso que se evalúa en ambos modelos.

❖ Resultado de la validación

Finalmente, para validar el modelo utilizado en esta tesis con el modelo de Warren y Root, tomando en cuenta las consideraciones anteriormente mencionadas, se utiliza la expresión resultante de sustituir la ecuación III.16 en la ecuación II.26:

$$\overline{p_{Dw}} = \frac{K_0(x) + S xK_1(x)}{s_D [C_D s_D [K_0(x) + S xK_1(x)] + xK_1(x)]},$$

además del modelo de Warren y Root:

$$\overline{p_{Dw}} = \frac{K_o(\sqrt{s_D f(s_D)})}{s_D \sqrt{s_D f(s_D)} K_1(\sqrt{s_D f(s_D)})}$$

con los cuales, una vez resueltos aplicándoles la transformada inversa de Laplace por medio del algoritmo de Stehfest¹², se generan las gráficas que se presentan a continuación.

Para todas las gráficas se tienen las siguientes condiciones:

$$\omega_m = 0.95$$

$$\omega_f = 0.05$$

$$\lambda = 1 \times 10^{-4}$$

$$t_{Dinicial} = 10$$

$$t_{Dfinal} = 1 \times 10^5$$

$$\Delta t_D = 100$$

Las figuras III.1, III.2 y III.3 son gráficas p_{Dw} vs t_D y $t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D}$ vs t_D , tanto para el modelo de Warren y Root como para el modelo de esta tesis, para $N=8$, $N=10$ y $N=12$, respectivamente (N es una variable de convergencia que funciona como contador en el algoritmo de Stehfest¹²).

Se elaboraron estas tres gráficas con la finalidad de encontrar en cual de ellas se obtenía el mejor ajuste entre los modelos, debido a que el algoritmo de Stehfest es sólo una aproximación; utilizando una regresión no lineal se determinó el error de ajuste de cada una de ellas con respecto a la curva de la derivada, que es de la cual se obtiene mayor información, arrojando los siguientes resultados:

$$E_{N=8} = 2.09202 \times 10^{-21}$$

$$E_{N=10} = 1.45447 \times 10^{-18}$$

$$E_{N=12} = 5.36666 \times 10^{-19}$$

Aunque estrictamente la curva generada con $N=8$ en el algoritmo de Stehfest produce un error menor en el ajuste, al ser los tres errores tan pequeños son prácticamente imperceptibles como se muestra en la figura III.4.

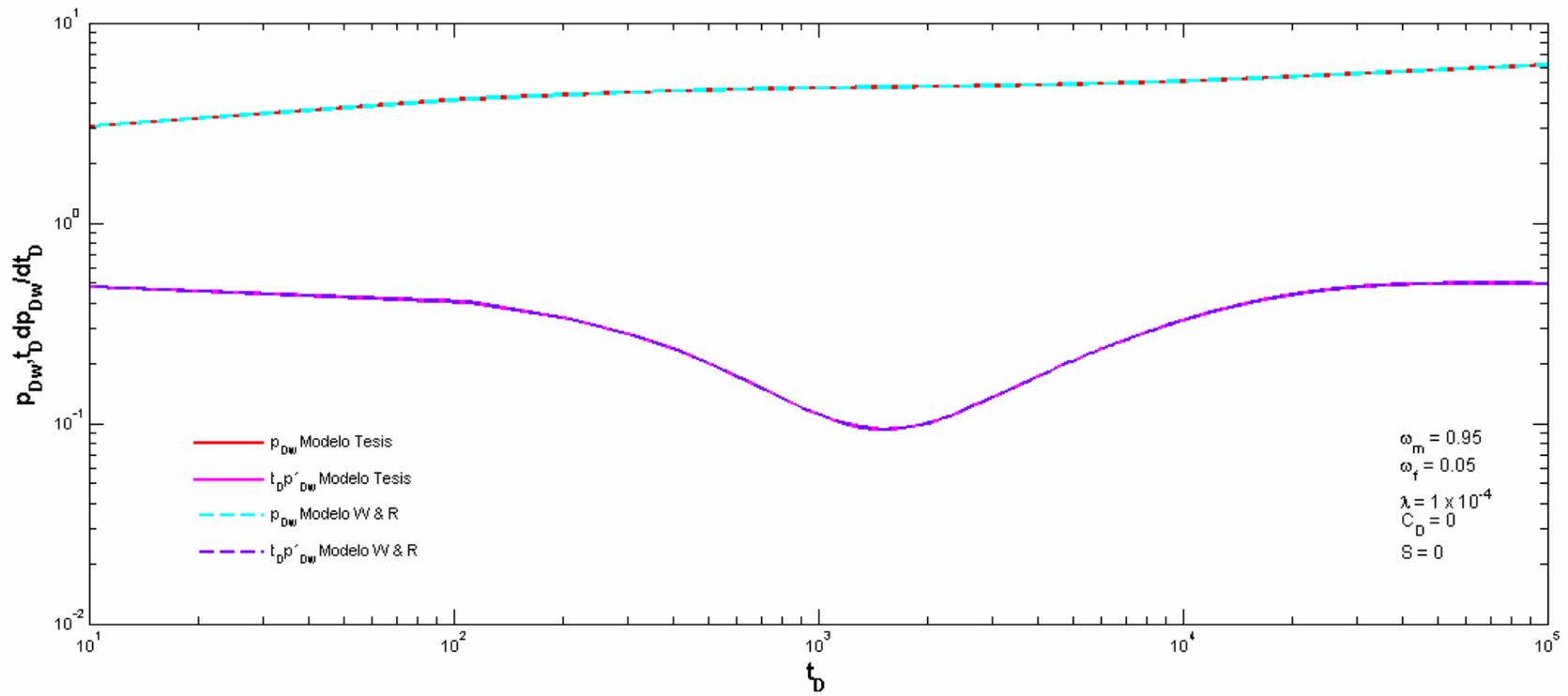


Figura III.1 Gráfica p_{Dw} , $t_D d(p_{Dw})/dt_D$ vs t_D , $N = 8$

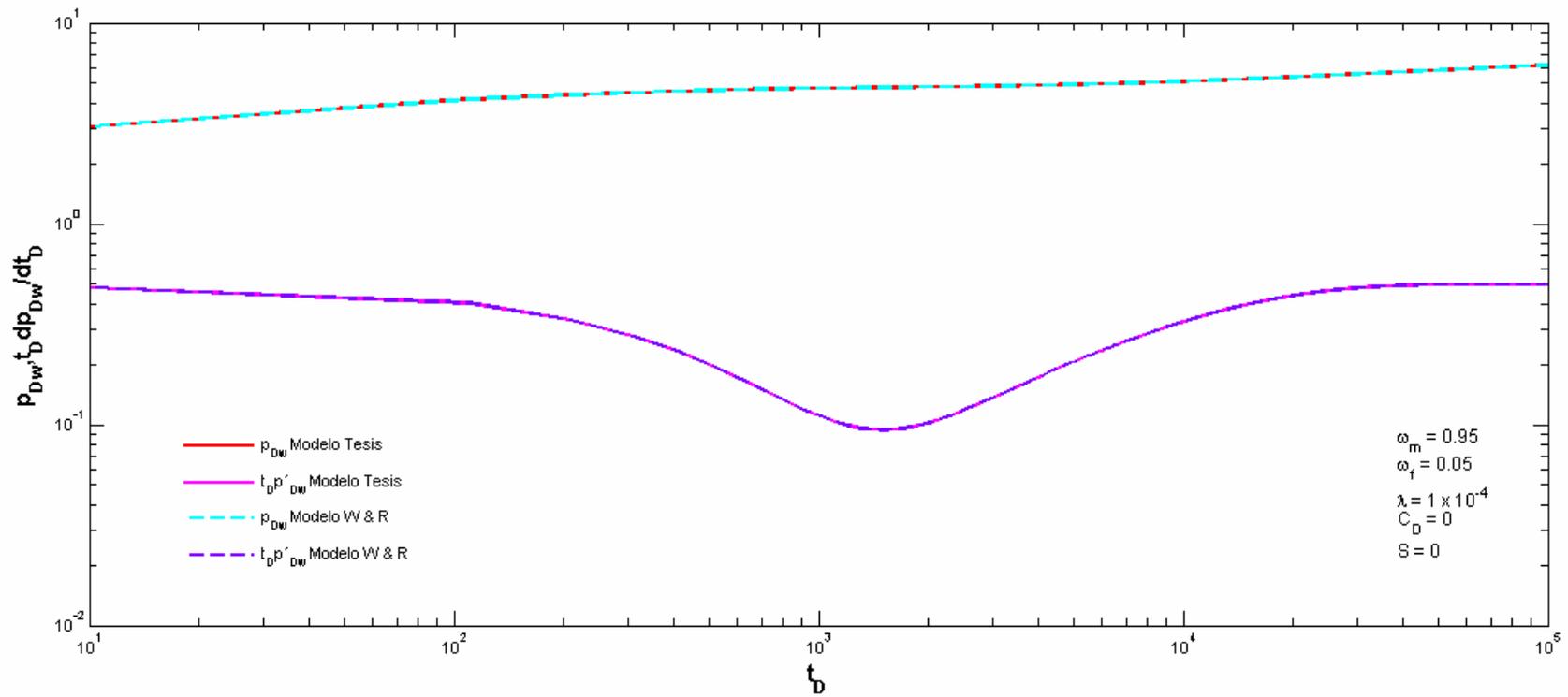


Figura III.2 Gráfica p_{Dw} , $t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D}$ vs t_D , $N = 10$

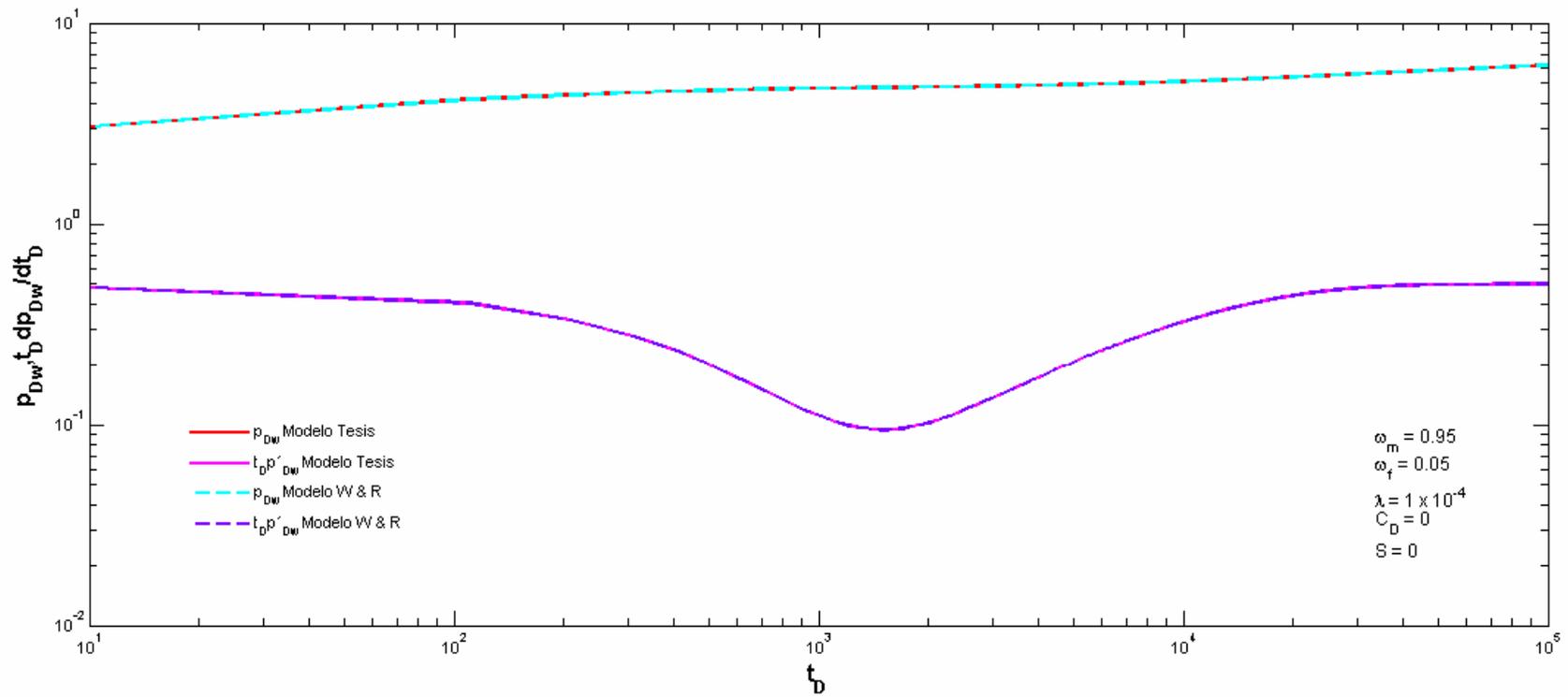


Figura III.3 Gráfica p_{Dw} , $t_D dp_{Dw}/dt_D$ vs t_D , $N = 12$

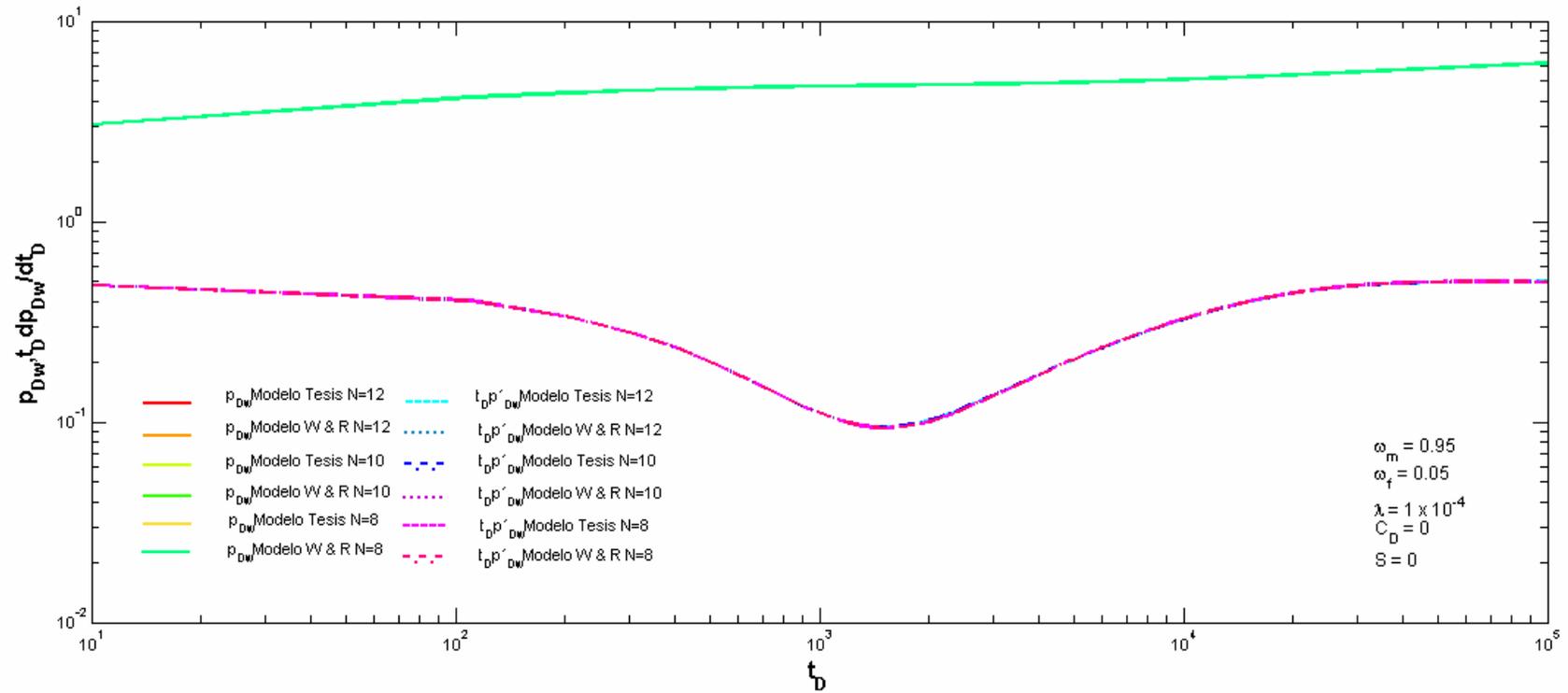


Figura III.4 Gráfica p_{Dw} , $t_D d(p_{Dw})/dt_D$ vs t_D , comparativa

CAPÍTULO IV: CORRELACIONES EMPÍRICAS ÓPTIMAS PARA LA APROXIMACIÓN RÁPIDA DE PARÁMETROS

En el Capítulo II de esta tesis se llegó a la expresión general siguiente:

$$\overline{p_{Dw}} = \frac{K_0(x) + S x K_1(x)}{s_D [C_D s_D [K_0(x) + S x K_1(x)] + x K_1(x)]},$$

que representa la solución a la ecuación de difusión en el dominio de Laplace, expresada en variables adimensionales. Sin embargo, en forma práctica es conveniente expresar esta solución en el dominio del tiempo, ya que esto resulta más común y útil.

Por otro lado, el tener la representación gráfica de la solución facilita reconocer ciertas características de la misma, a través de las cuales es posible calcular las propiedades del sistema matriz – fractura.

Por lo descrito anteriormente, en este capítulo se mostrará el procedimiento seguido con el propósito de encontrar un modelo empírico óptimo, por medio del cual sea posible calcular los parámetros característicos del yacimiento naturalmente fracturado (λ_{\max} , λ_{\min} , ω_m , ω_f , h_{\max} y h_{\min}), haciendo uso para ello de las gráficas $s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)$ vs $1/s_D$, $s_D d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/ds_D$ vs $1/s_D$, $p_{Dw}(t_D)$ vs t_D y $t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D$ vs t_D para el caso de flujo pseudoestacionario y para el de flujo transitorio, utilizando el algoritmo de Stehfest para realizar las antitransformadas correspondientes.

❖ Elaboración y descripción de las gráficas

Una vez obtenidas $p_{Dw}(t_D)$ y $t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D$ por medio del algoritmo de Stehfest, dado que ya se conoce $\overline{p_{Dw}}(s_D)$ y por lo tanto se conoce $s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)$ y $s_D d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/ds_D$, se elaboran tres tipos de gráficas diferentes para cada tipo de flujo, pseudoestacionario y transitorio, de los cuales en uno de ellos la variable es λ_{\max} , en la otro λ_{\min} y en el último ω_m ; de esta manera, en cada tipo de gráfica se generaran cinco curvas para $s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)$ vs $1/s_D$, cinco para $s_D d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/ds_D$ vs $1/s_D$, cinco para $p_{Dw}(t_D)$ vs t_D y cinco para $t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D$ vs t_D , debido a la variación de su parámetro respectivo como se mostrará a continuación.

Los valores de los parámetros utilizados para la elaboración de las gráficas en el dominio del tiempo; y después por analogía en el dominio de Laplace, fueron tomados para fines

comparativos del trabajo desarrollado por Belani⁹ (1988) .

Las figuras de la IV.1 a la IV.3 son gráficas para el caso del flujo pseudoestacionario en el dominio del tiempo y las figuras de la IV.4 a la IV.6 en el dominio de Laplace, de las cuales en las figuras IV.1 y IV.6 la variable es λ_{\max} , tomando valores de 1×10^{-5} a 1×10^{-9} , $\omega_m = 0.95$, $\omega_f = 0.05$, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-9}$, $C_D = 0$ y $S = 0$, en las figuras IV.2 y IV.5 la variable es λ_{\min} , tomando valores de 1×10^{-9} a 1×10^{-5} , $\omega_m = 0.95$, $\omega_f = 0.05$, $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-5}$, $C_D = 0$ y $S = 0$ y en las figuras IV.3 y IV.6 la variable es ω_m , tomando valores de 0.99 a 0.70, $\omega_f = 1 - \omega_m$, $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-5}$, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-7}$, $C_D = 0$ y $S = 0$.

De manera análoga, para el caso del flujo transitorio se tienen los casos en el dominio del tiempo de la figura IV.7 a la IV.9 y en dominio de Laplace de la figura IV.10 a la IV.12, donde en las figuras IV.7 y IV.10 la variable es λ_{\max} , tomando valores de 1×10^{-5} a 1×10^{-9} , $\omega_m = 0.95$, $\omega_f = 0.05$, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-9}$, $C_D = 0$ y $S = 0$; en las figuras IV.8 y IV.11 la variable es λ_{\min} , considerando valores de 1×10^{-9} a 1×10^{-5} , $\omega_m = 0.95$, $\omega_f = 0.05$, $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-5}$, $C_D = 0$ y $S = 0$ y de las figuras IV.9 a la IV.12 la variable es ω_m , tomando valores de 0.99 a 0.70, $\omega_f = 1 - \omega_m$, $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-5}$, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-7}$, $C_D = 0$ y $S = 0$.

En general, los puntos importantes a notar en estas gráficas son:

- Las curvas en el dominio de Laplace muestran un comportamiento similar a aquel en el dominio del tiempo y por lo tanto, es posible identificar también las características del yacimiento⁶.
- Como se esperaría, se obtiene una respuesta semejante a aquella para el modelo de bloque de un sólo tamaño cuando λ_{\min} se aproxima a λ_{\max} , o viceversa.
- La curva de la función derivada de la presión muestra diferentes formas debido al efecto que causa en el flujo interporoso la variación del tamaño de bloque, lo cual implica, que la contribución de cada tamaño de bloque afecta la variación de la presión con respecto al tiempo dependiendo del coeficiente del flujo interporoso, provocando de esta manera el cambio en la forma de la curva. Debido a su sensibilidad implícita, la curva de la derivada es la que proporcionan una mayor información acerca de las condiciones dinámicas del yacimiento.
- En esta misma curva, tanto para el régimen de flujo transitorio como pseudoestacionario, se observa un valle o “mínimo” que representa el tiempo de

transición en el que la presión en ambos sistemas alcanza un equilibrio; en dicho “mínimo” o valle, también puede notarse que la presión es más sensible a la variación de ω_m (u ω_f), parámetro que determina la profundidad del valle; mientras que el tiempo es más sensible a la variación de λ_{\min} ó λ_{\max} , parámetro que determina la duración del periodo de transición.

- La selección de la mejor solución entre los modelos de doble porosidad, flujo interporoso pseudoestacionario o transitorio, es generalmente sencilla; con el modelo pseudoestacionario, la caída de la derivada de la presión durante la transición (“el mínimo”) es función del tiempo de transición. Largos tiempos de transición, correspondientes a valores de ω_f pequeños (figuras IV.3, IV.6, IV.9 y IV.12), dan como resultado valores (niveles) para la función derivada de la presión más pequeños que el límite práctico de 0.25 de la solución transitoria. Por otro lado, puede resultar ambiguo cuando el tiempo de transición es corto, ya que en esos casos las curvas para flujo pseudoestacionario generadas con un valor grande de ω_f , pueden producir soluciones similares a las del flujo transitorio generadas con valores más pequeños de ω_f ²².

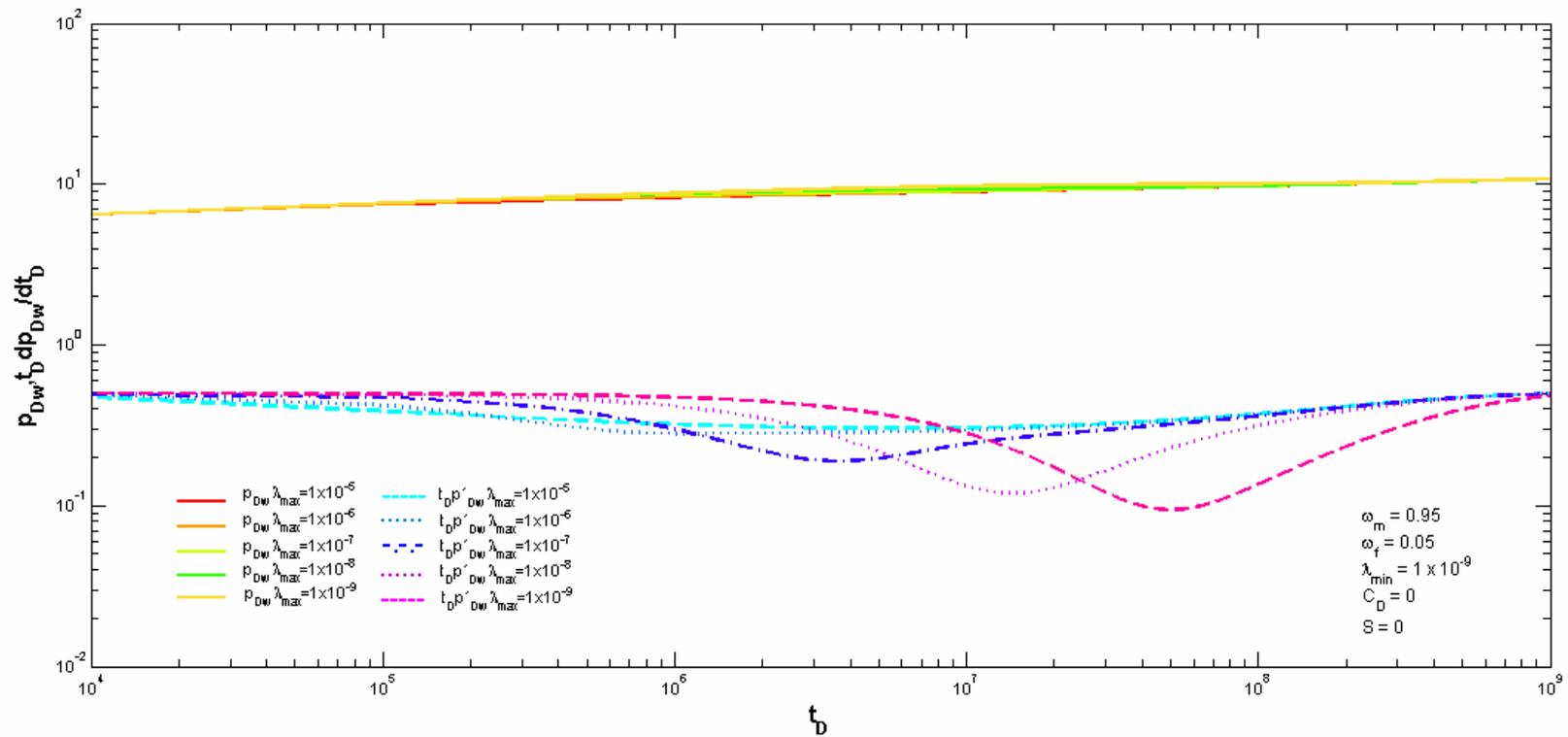


Figura IV.1 Gráfica de la presión adimensional $p_{Dw}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{Dw}(t_D)/dt_D$ contra t_D , para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura pseudoestacionaria** y λ_{max} variable.

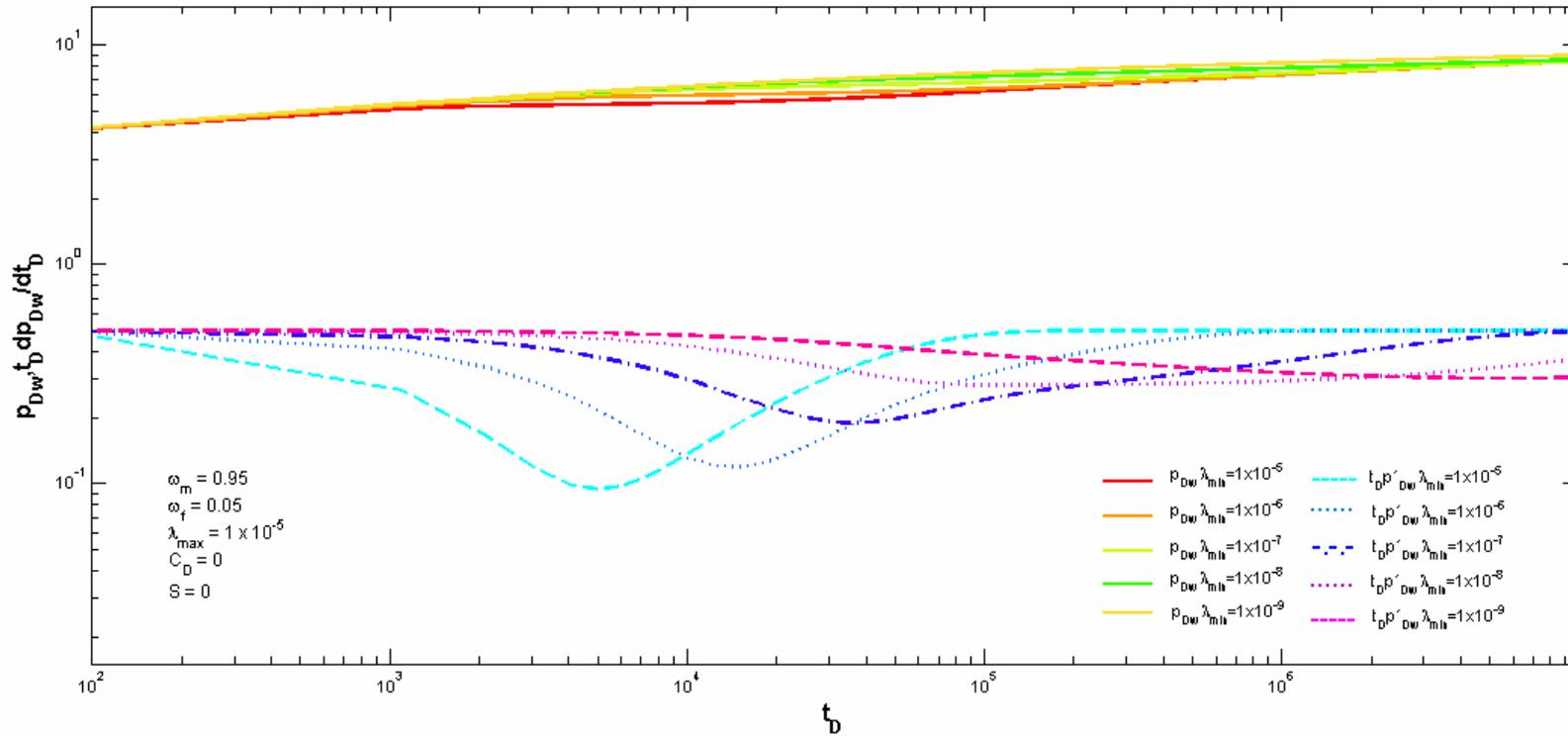


Figura IV.2 Gráfica de la presión adimensional $p_{Dw}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{Dw}(t_D)/dt_D$ contra t_D , para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura pseudoestacionaria** y λ_{min} variable.

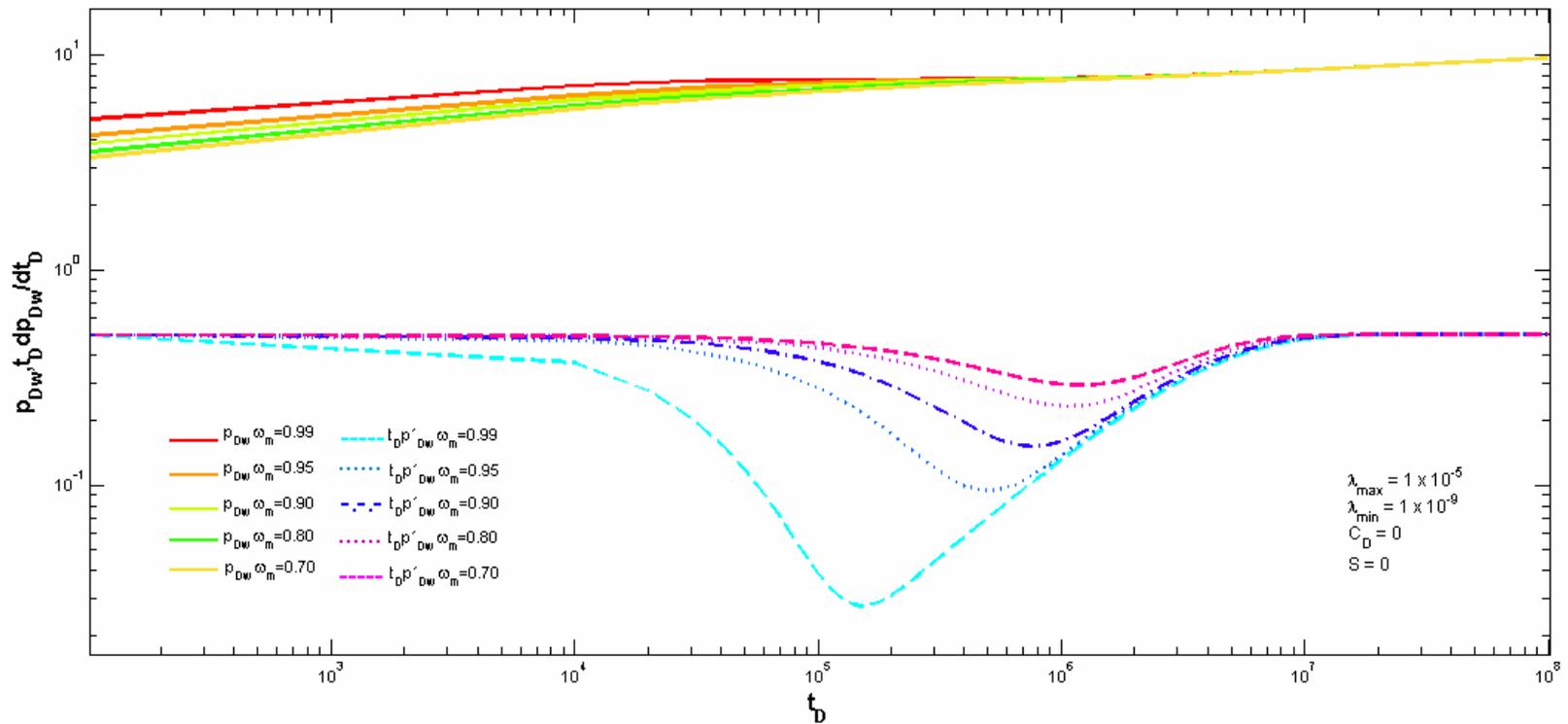


Figura IV.3 Gráfica de la presión adimensional $p_{Dw}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{Dw}(t_D)/dt_D$ contra t_D , para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura pseudoestacionaria** y ω_m variable.

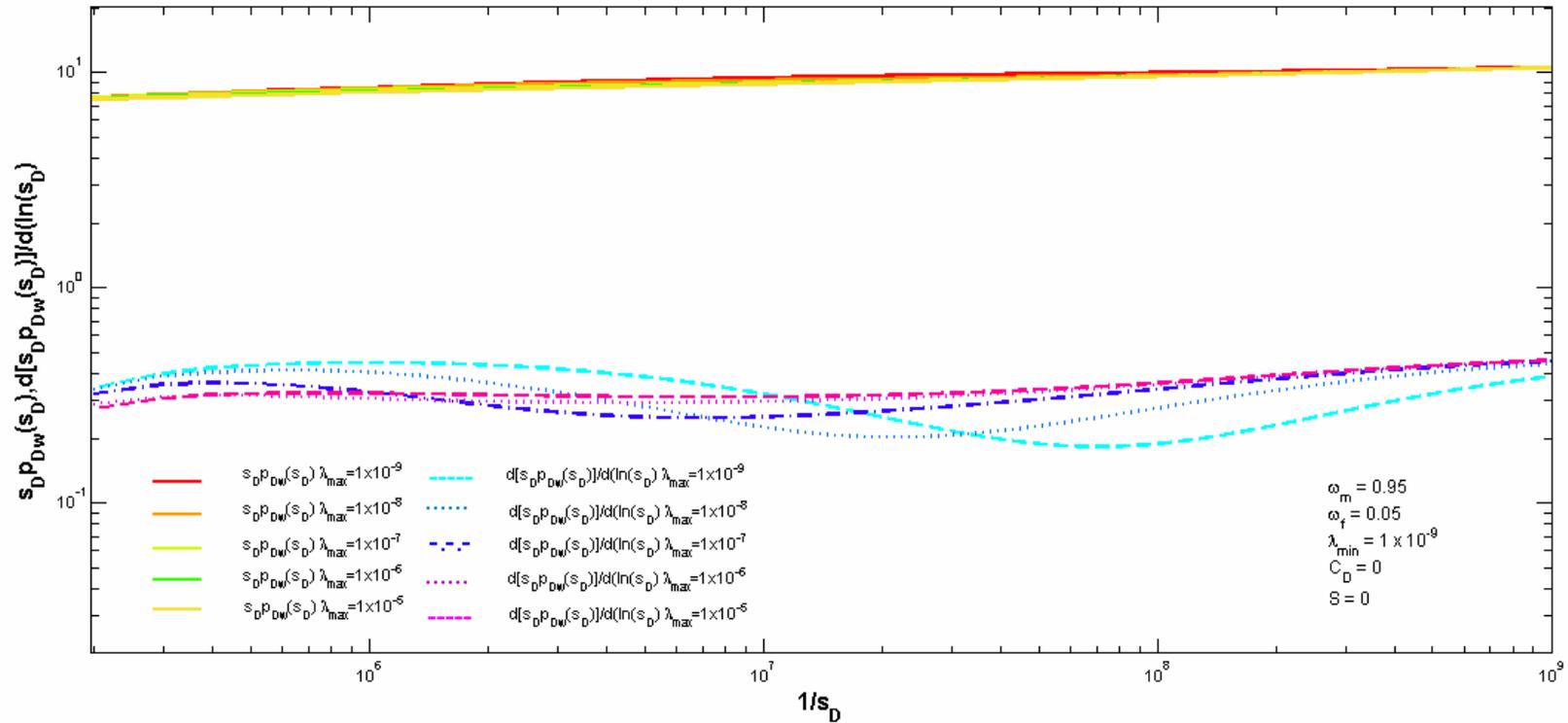


Figura IV.4 Gráfica de la presión $s_D p_{Dw}(s_D)$ y de la función derivada de la presión adimensionales en el dominio de Laplace¹⁷ $d[s_D p_{Dw}(s_D)]/d \ln(s_D)$ contra $1/s_D$, para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura pseudoestacionaria** y λ_{max} variable.

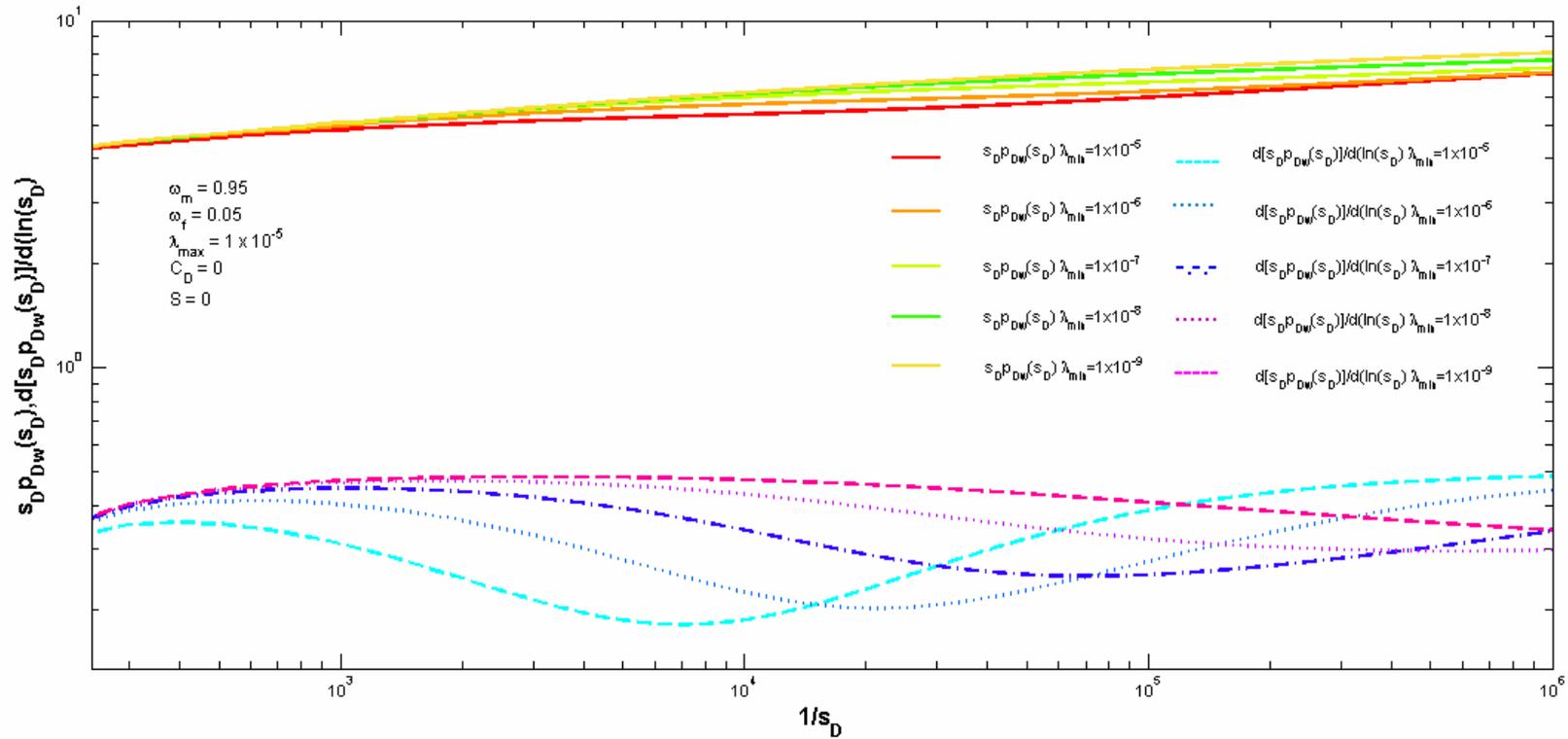


Figura IV.5 Gráfica de la presión $s_D p_{Dw}(s_D)$ y de la función derivada de la presión adimensionales en el dominio de Laplace¹⁷ $d[s_D p_{Dw}(s_D)]/d(\ln(s_D))$ contra $1/s_D$, para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura pseudoestacionaria** y λ_{min} variable.

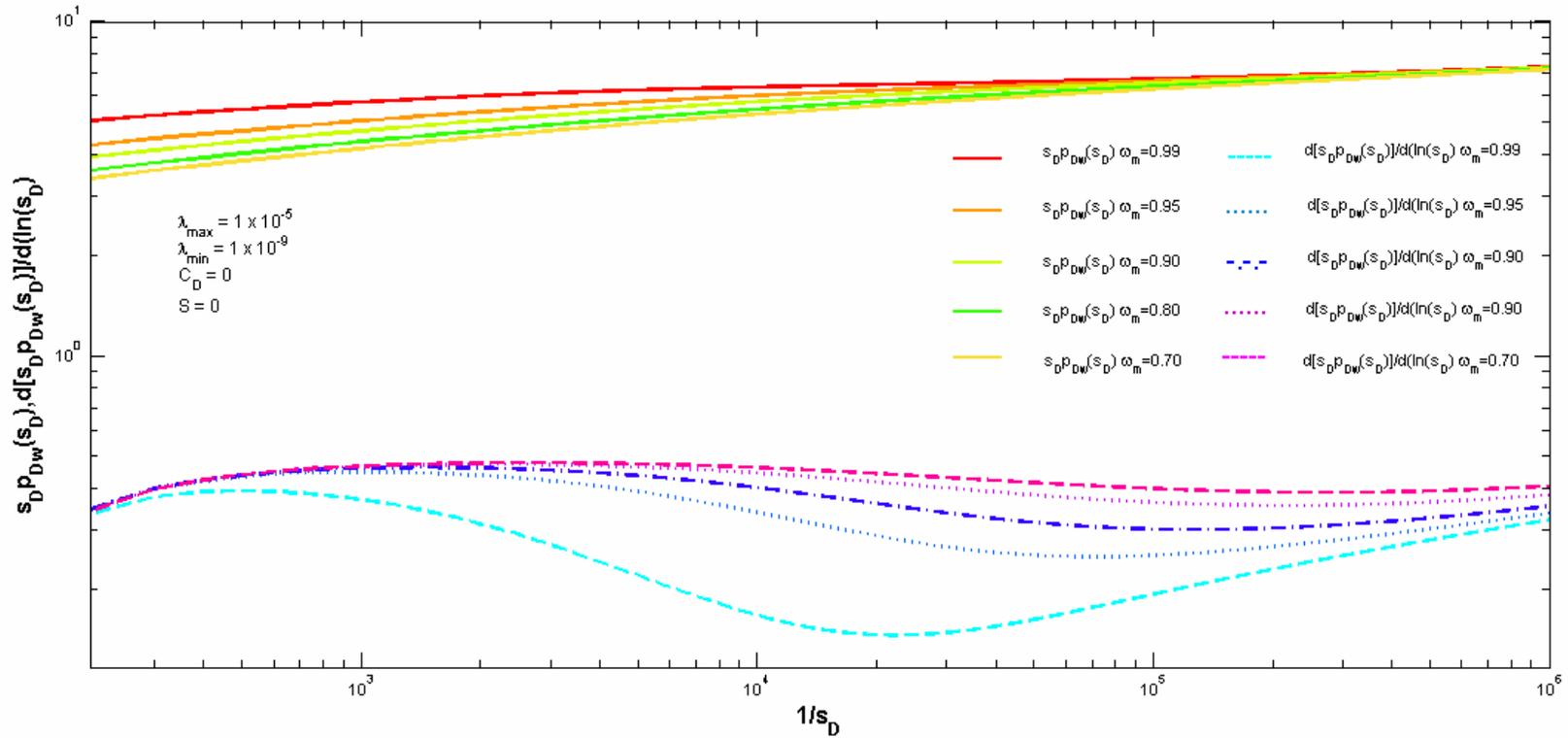


Figura IV.6 Gráfica de la presión $s_D p_{Dw}(s_D)$ y de la función derivada de la presión adimensionales en el dominio de Laplace¹⁷ $d[s_D p_{Dw}(s_D)]/d \ln(s_D)$ contra $1/s_D$, para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura pseudoestacionaria** y ω_m variable.

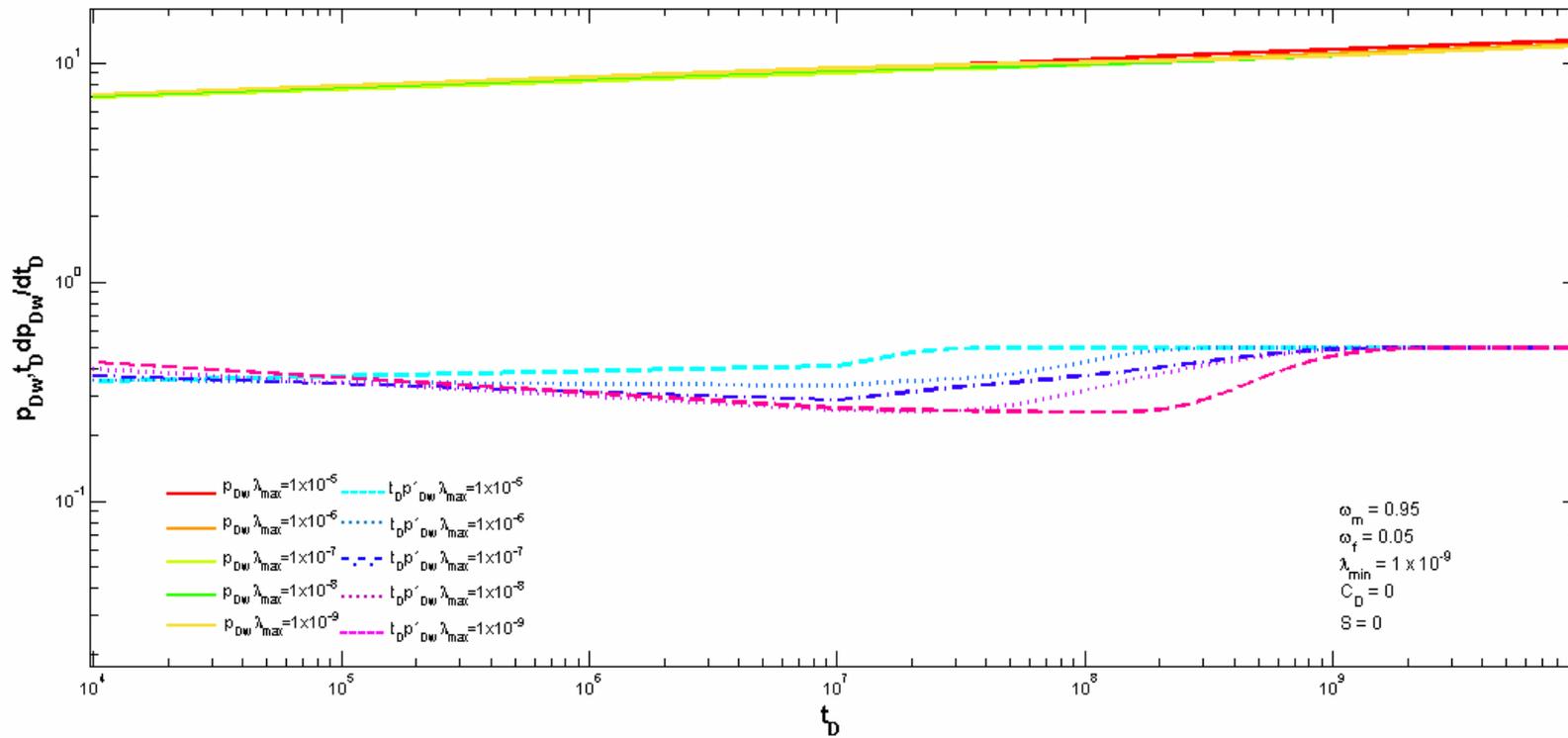


Figura IV.7 Gráfica de la presión adimensional $p_{Dw}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{Dw}(t_D)/dt_D$ contra t_D , para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura transitoria** y λ_{max} variable.

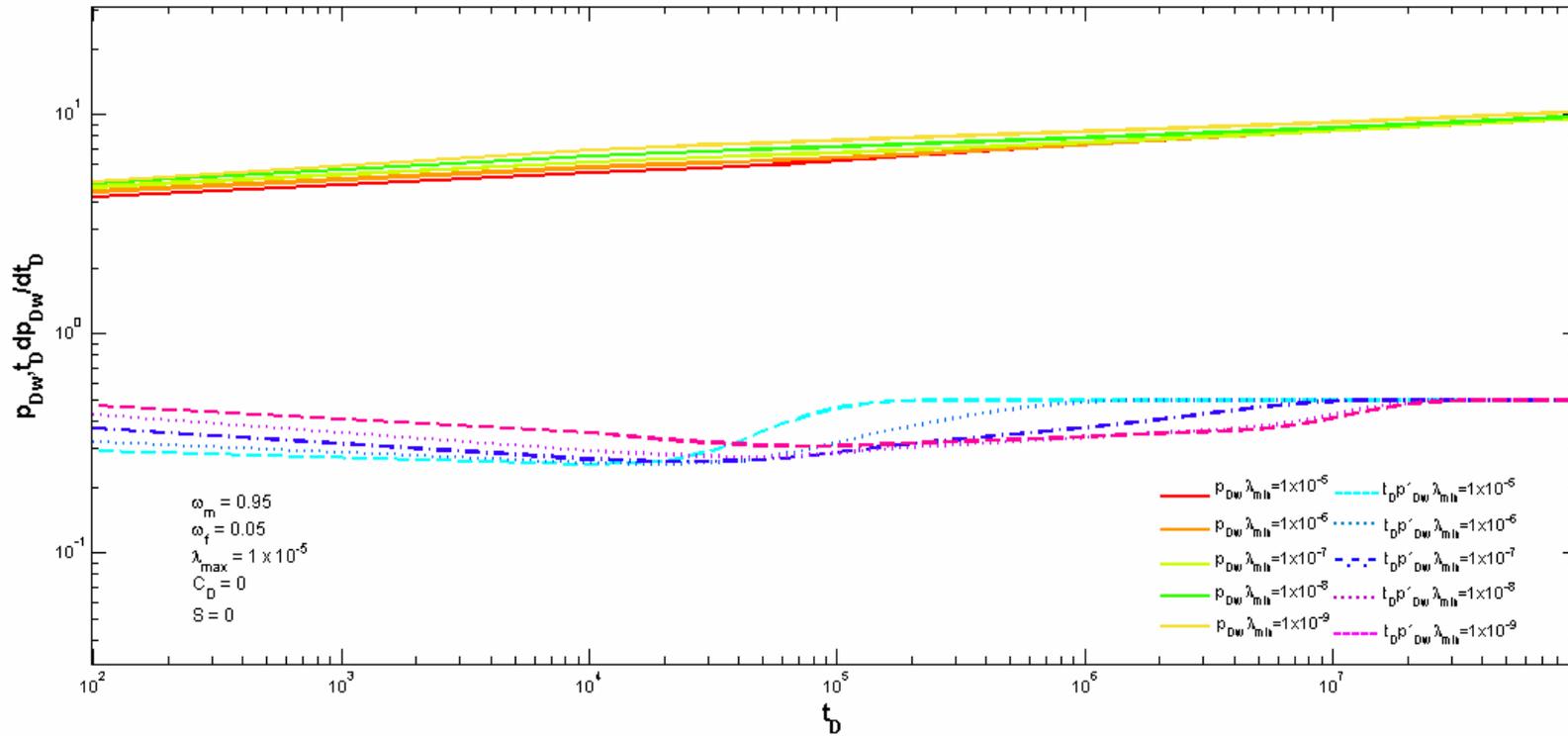


Figura IV.8 Gráfica de la presión adimensional $p_{Dw}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{Dw}(t_D)/dt_D$ contra t_D , para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura transitoria** y λ_{min} variable.

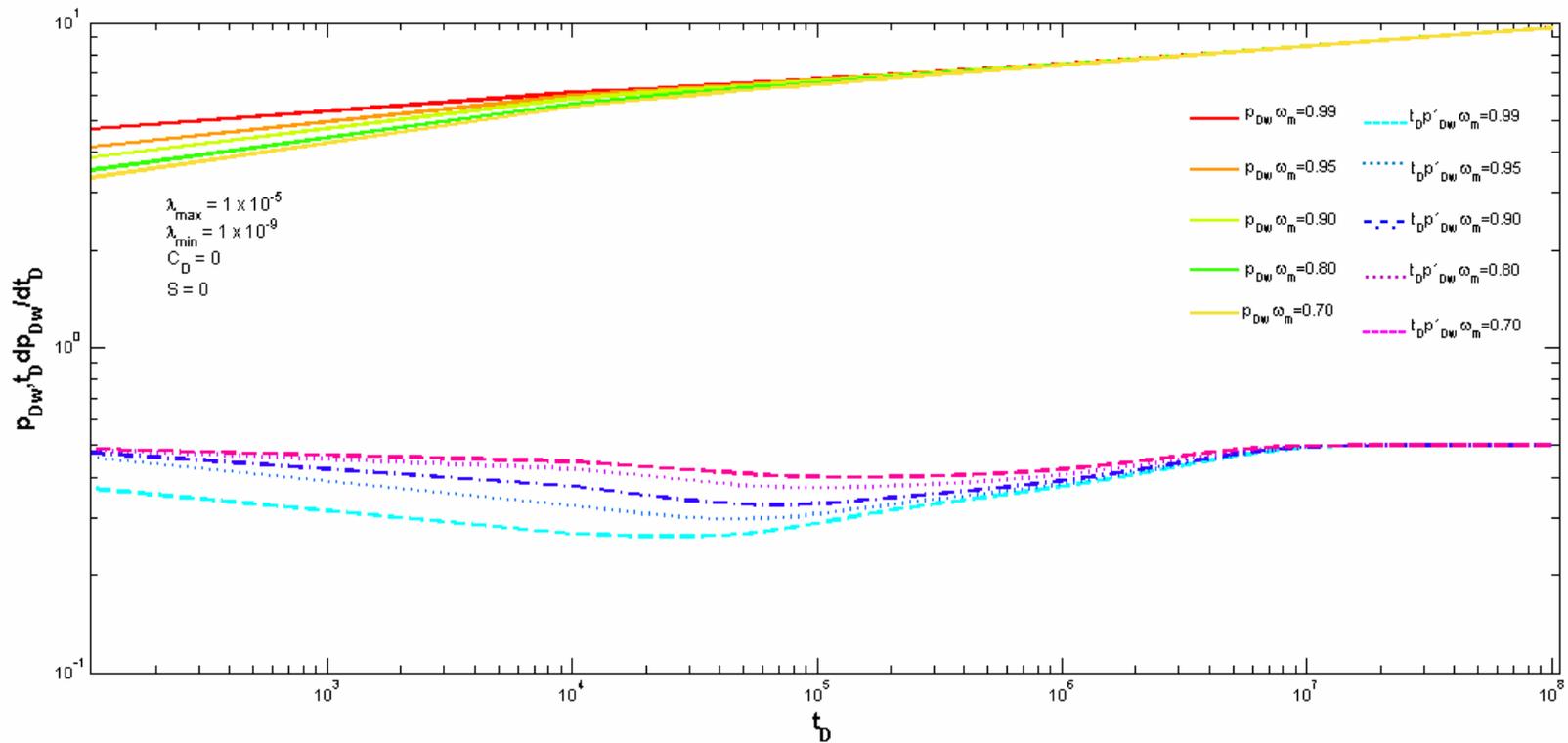


Figura IV.9 Gráfica de la presión adimensional $p_{Dw}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{Dw}(t_D)/dt_D$ contra t_D , para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme; considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura transitoria** y ω_m variable.

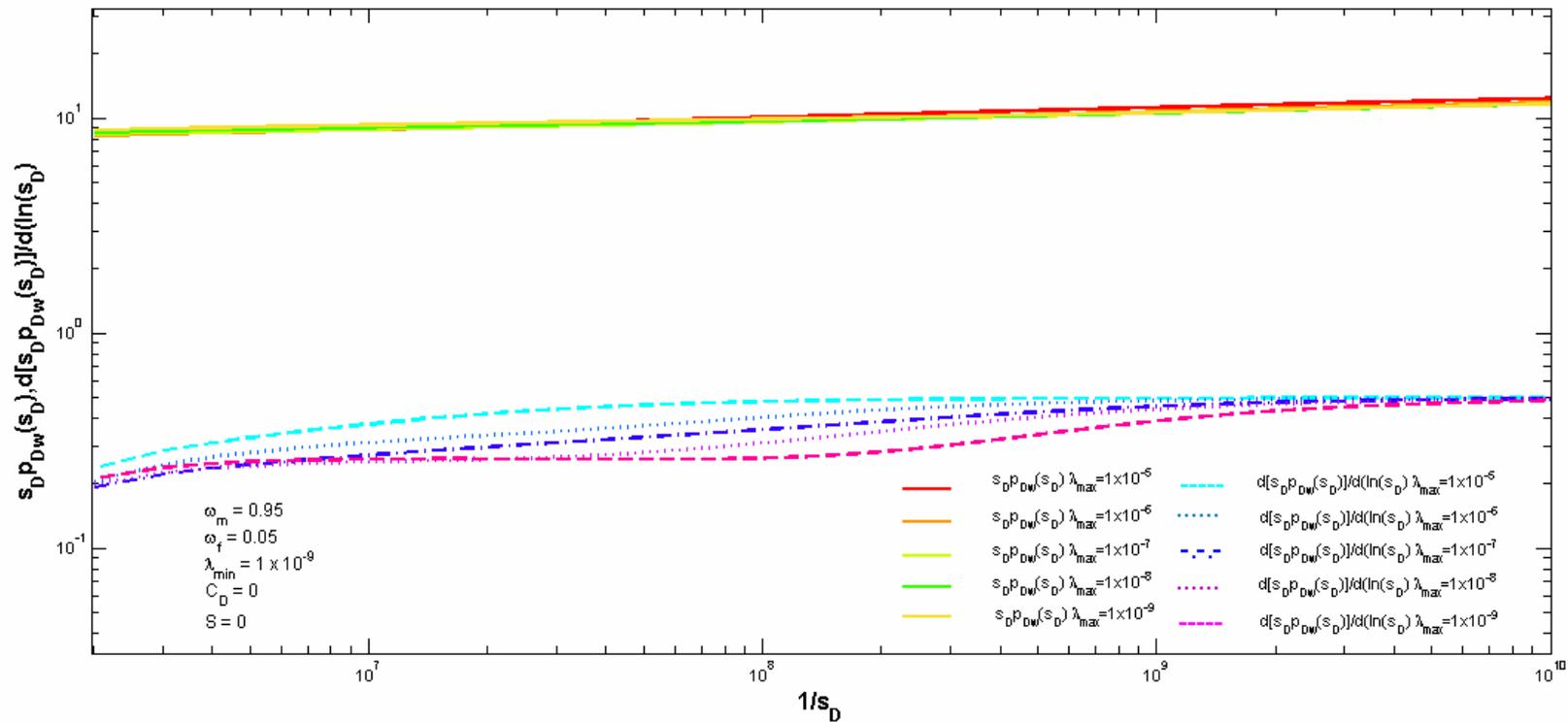


Figura IV.10 Gráfica de la presión $s_D p_{Dw}(s_D)$ y de la función derivada de la presión adimensionales en el dominio de Laplace¹⁷ $d[s_D p_{Dw}(s_D)]/d \ln(s_D)$ contra $1/s_D$, para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura transitoria** y λ_{max} variable.

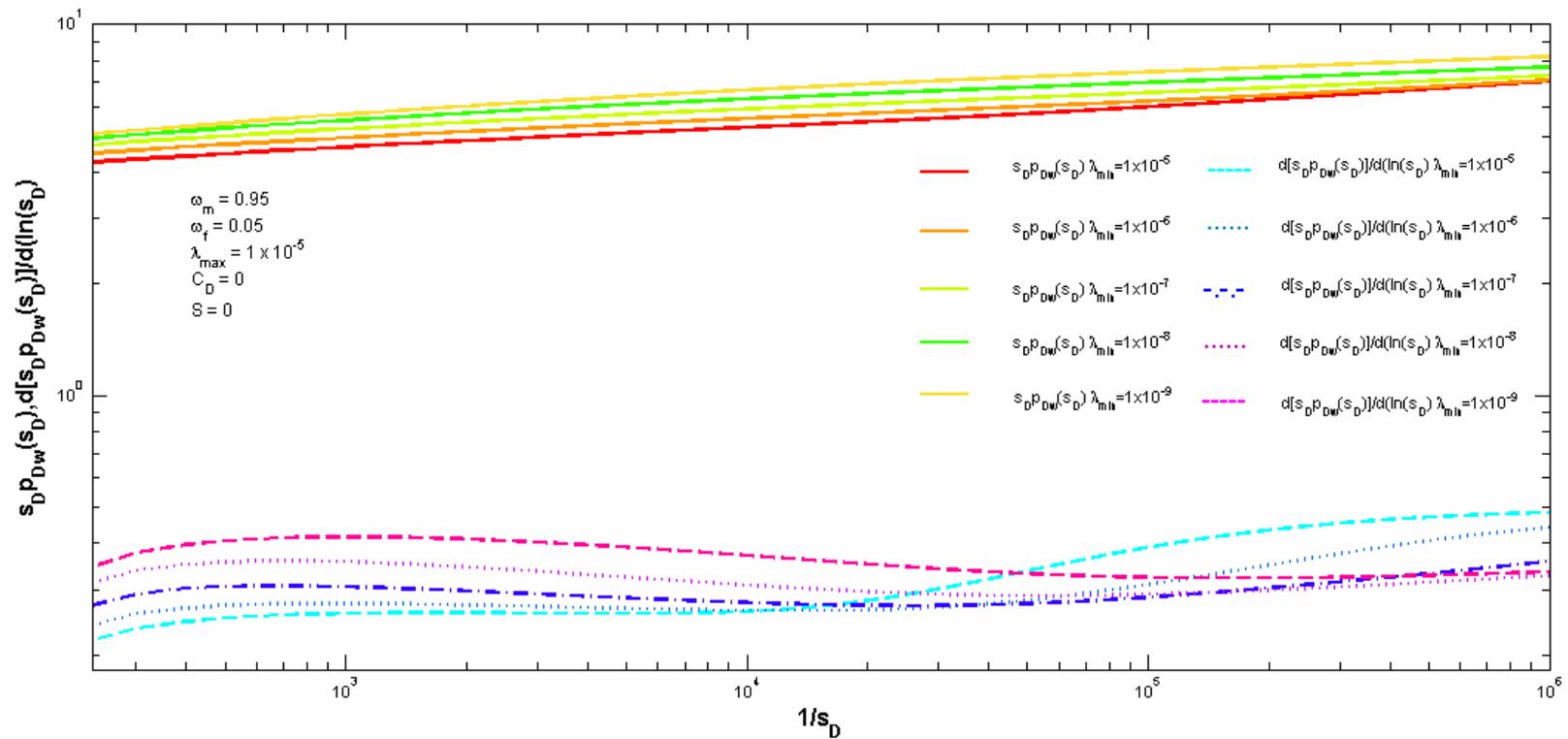


Figura IV.11 Gráfica de la presión $s_D p_{Dw}(s_D)$ y de la función derivada de la presión adimensionales en el dominio de Laplace¹⁷ $d[s_D p_{Dw}(s_D)]/d \ln(s_D)$ contra $1/s_D$, para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura transitoria** y λ_{min} variable.

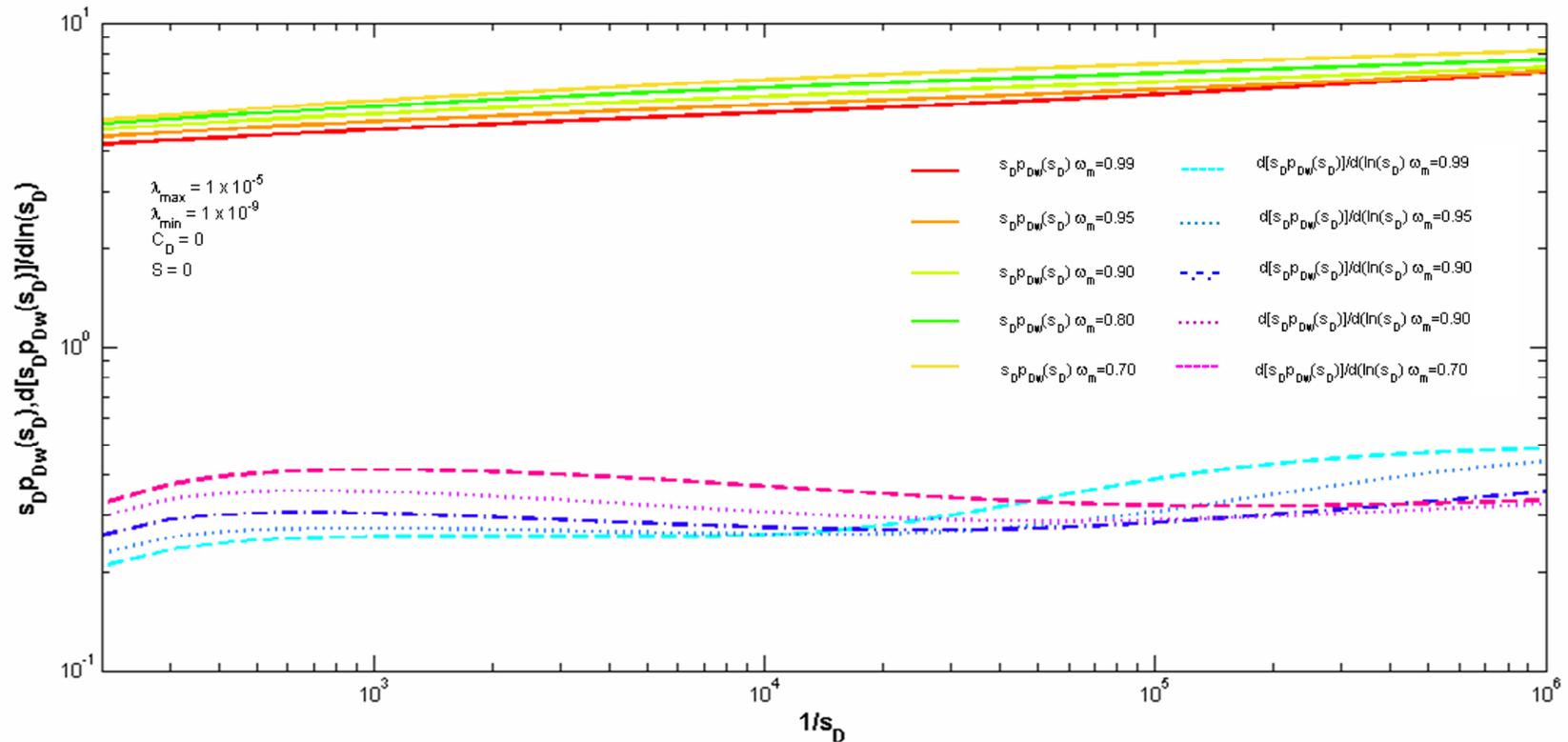


Figura IV.12 Gráfica de la presión $s_D p_{Dw}(s_D)$ y de la función derivada de la presión adimensionales en el dominio de Laplace¹⁷ $d[s_D p_{Dw}(s_D)]/d \ln(s_D)$ contra $1/s_D$, para la respuesta de decremento en un pozo que produce de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de tamaño variable, dispuestos de manera uniforme, considerando condiciones de **transferencia de fluidos matriz – fractura transitoria** y ω_m variable.

❖ **Procedimiento para la construcción de las correlaciones empíricas**

A partir de las gráficas anteriores, se puede observar que en las curvas de las derivadas para los diferentes casos se forma un valle cuyo valor mínimo se encuentra en la coordenadas en el dominio de Laplace $[s_D d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/ds_D]_{\min}$ vs $[1/s_D]_{\min}$ y en el dominio real $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ vs $[t_D]_{\min}$, de acuerdo al valor del parámetro que haya sido variado. Observando este comportamiento se realizaron más evaluaciones para las soluciones obtenidas variando los valores de los diferentes parámetros y se registraron los valores de $[s_D d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/ds_D]_{\min}$ vs $[1/s_D]_{\min}$ y de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ vs $[t_D]_{\min}$ en que ocurría el valle para cada caso.

Una vez que se obtuvieron los resultados anteriores, fue posible generar curvas que mostraban un patrón de comportamiento descriptivo de las características del yacimiento. La variación de parámetros en dichas evaluaciones se realizó como se muestra en las tablas siguientes:

Tabla IV.1 Patrón de variación de los parámetros para la formulación de las correlaciones empíricas. Los valores de λ_{\min} utilizados para realizar las corridas fueron 1×10^{-9} , 1×10^{-8} , 1×10^{-7} , 1×10^{-6} y 1×10^{-5} ; en esta tabla sólo se muestran los tres primeros valores para ejemplificar el procedimiento.

λ_{\min}	1×10^{-9}					1×10^{-8}				1×10^{-7}		
λ_{\max}	1×10^{-9}	1×10^{-8}	1×10^{-7}	1×10^{-6}	1×10^{-5}	1×10^{-8}	1×10^{-7}	1×10^{-6}	1×10^{-5}	1×10^{-7}	1×10^{-6}	1×10^{-5}
ω_m	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97
	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95
	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93
	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90
	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87
	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85
	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83
	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77
	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73
0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	

Tabla IV.2 Patrón de variación de los parámetros para la formulación de las correlaciones empíricas. Los valores de λ_{min} utilizados para realizar las corridas fueron 1×10^{-10} , 1×10^{-9} , 1×10^{-8} , 1×10^{-7} , 1×10^{-6} , 1×10^{-5} y 1×10^{-4} ; en esta tabla sólo se muestran los dos primeros valores para ejemplificar el procedimiento.

λ_{min}	1×10^{-10}					1×10^{-9}				
ω_m	0.99	0.95	0.90	0.80	0.70	0.99	0.95	0.90	0.80	0.70
λ_{max}	1×10^{-10}	1×10^{-9}								
	5×10^{-10}	5×10^{-9}								
	7.5×10^{-10}	7.5×10^{-9}								
	1×10^{-9}	1×10^{-8}								
	5×10^{-9}	5×10^{-8}								
	7.5×10^{-9}	7.5×10^{-8}								
	1×10^{-8}	1×10^{-7}								
	5×10^{-8}	5×10^{-7}								
	7.5×10^{-8}	7.5×10^{-7}								
	1×10^{-7}	1×10^{-6}								
	5×10^{-7}	5×10^{-6}								
	7.5×10^{-7}	7.5×10^{-6}								
	1×10^{-6}	1×10^{-5}								
	5×10^{-6}	5×10^{-5}								
	7.5×10^{-6}	7.5×10^{-5}								
	1×10^{-5}	1×10^{-4}								
	5×10^{-5}	5×10^{-4}								
	7.5×10^{-5}	7.5×10^{-4}								
	1×10^{-4}	1×10^{-3}								
	5×10^{-4}									
7.5×10^{-4}	7.5×10^{-4}	7.5×10^{-4}	7.5×10^{-4}	7.5×10^{-4}						
1×10^{-3}	1×10^{-3}	1×10^{-3}	1×10^{-3}	1×10^{-3}						

El procedimiento descrito por medio de las tablas anteriores fue realizado de la misma manera para los casos de regímenes de flujo transitorio y pseudoestacionario, tanto en el dominio del tiempo como en el de Laplace.

A continuación, a manera de ilustración, se muestran y describen algunas de las gráficas que fueron elaboradas al utilizar el procedimiento anterior:

Las figuras IV.13 a) y b) corresponden al régimen de transferencia matriz - fractura pseudoestacionaria, en el dominio del tiempo. La figura IV.13 a) se elaboró utilizando un valor $\lambda_{min} = 1 \times 10^{-10}$ constante, variando los valores de ω_m (0.99, 0.95, 0.90, 0.80, 0.70) y

para cada valor de ω_m se varió λ_{\max} , adquiriendo valores desde $1x10^{-10}$ hasta $1x10^{-3}$. Asimismo, en la figura IV.13 b) se mantuvo constante el valor de $\lambda_{\min} = 1x10^{-5}$ y para cada valor de ω_m se tomaron valores de λ_{\max} desde $1x10^{-5}$ hasta $1x10^{-3}$.

Las figuras siguientes, IV.14 a) y b) corresponden al régimen de transferencia matriz - fractura pseudoestacionaria en el dominio de Laplace y se generaron usando valores de $\lambda_{\min} = 1x10^{-9}$ y λ_{\max} desde $1x10^{-9}$ hasta $1x10^{-3}$ y de $\lambda_{\min} = 1x10^{-5}$ y λ_{\max} desde $1x10^{-5}$ hasta $1x10^{-3}$, respectivamente (los valores de ω_m que se utilizaron son los mismos en todos los casos).

A continuación, se encuentran las figuras correspondientes al régimen de transferencia matriz fractura transitoria en el dominio del tiempo, IV.15 a) y b), para las cuales se utilizaron valores de $\lambda_{\min} = 1x10^{-6}$ y λ_{\max} desde $1x10^{-6}$ hasta $1x10^{-3}$ y de $\lambda_{\min} = 1x10^{-5}$ y λ_{\max} desde $1x10^{-5}$ hasta $1x10^{-3}$, y las correspondientes al mismo régimen en el dominio de Laplace, IV.16 a) y b), con valores de $\lambda_{\min} = 1x10^{-6}$ y λ_{\max} desde $1x10^{-6}$ hasta $1x10^{-3}$ y de $\lambda_{\min} = 1x10^{-5}$ y λ_{\max} desde $1x10^{-5}$ hasta $1x10^{-3}$.

Debe observarse que en cada caso conforme aumenta el valor de λ_{\min} el valor de puntos que se obtiene disminuye dado que el valor de λ_{\max} por obviedad no puede ser menor que el de λ_{\min} .

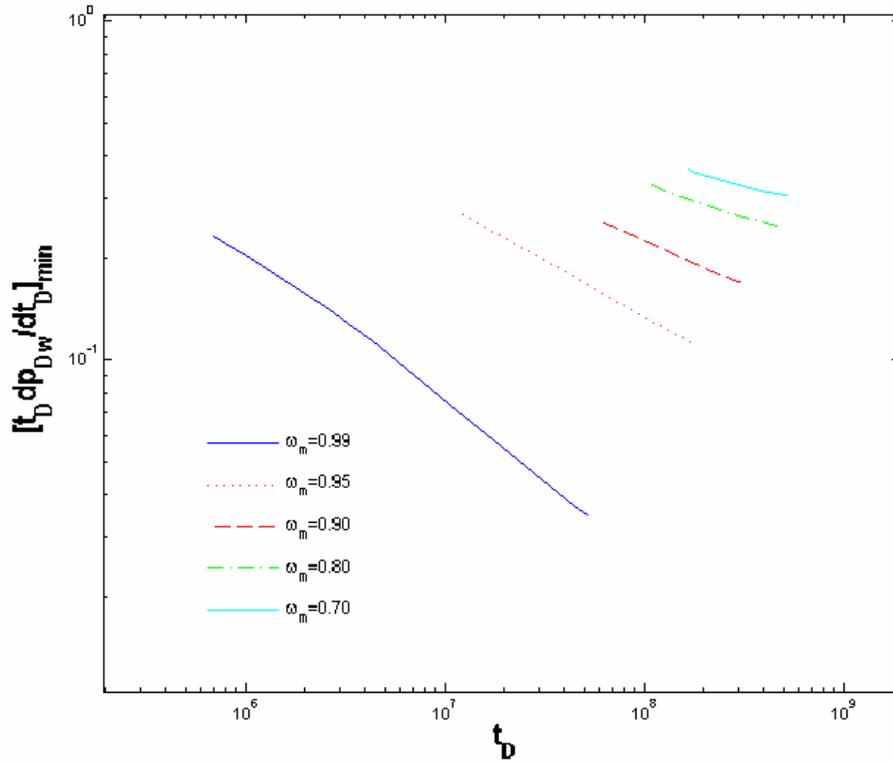


Figura IV.13 a) Flujo pseudoestacionario en el dominio del tiempo, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-10}$.

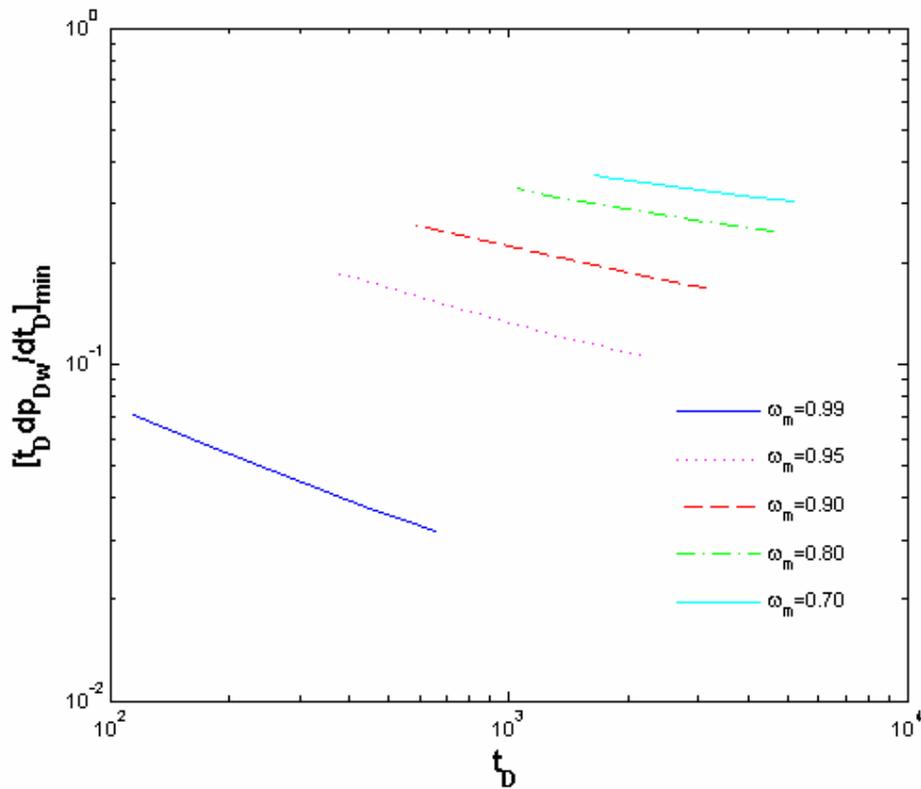


Figura IV.13 b) Flujo pseudoestacionario en el dominio del tiempo, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-5}$.

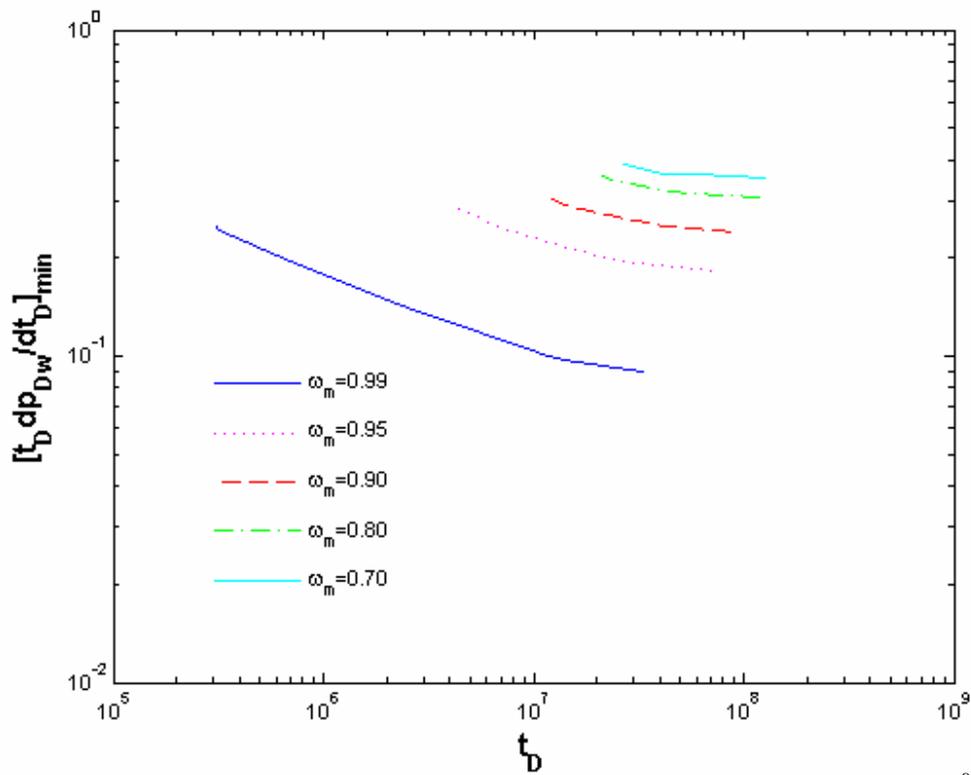


Figura IV.14 a) Flujo pseudoestacionario en el dominio de Laplace, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-9}$.

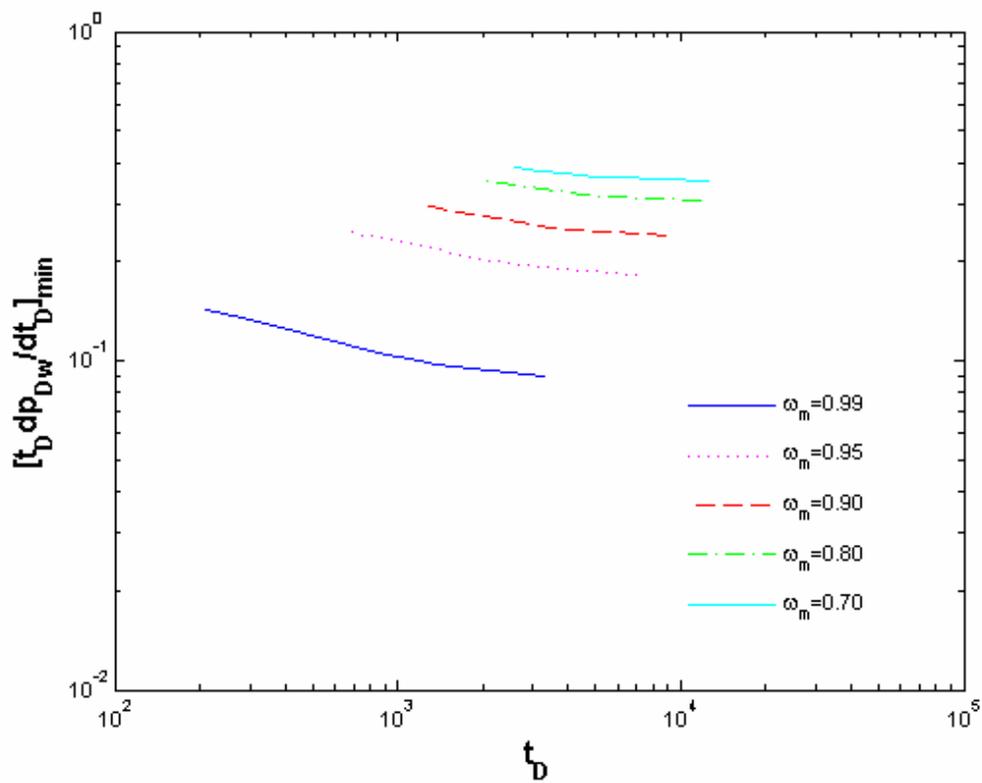


Figura IV.14 b) Flujo pseudoestacionario en el dominio de Laplace, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-5}$.

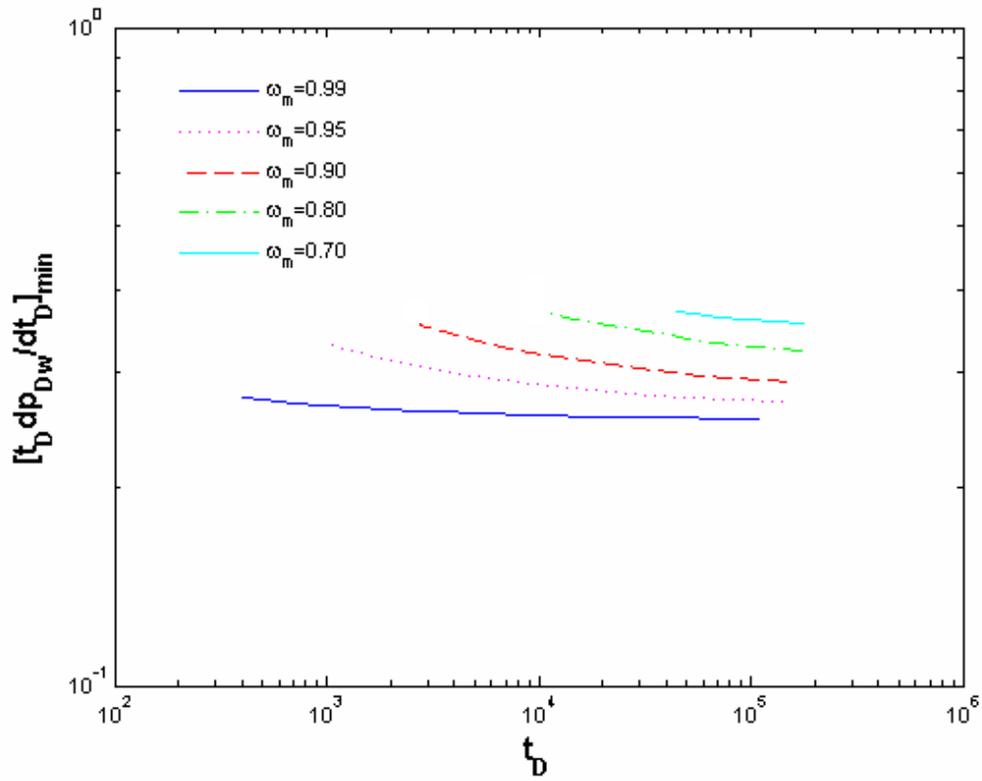


Figura IV.15 a) Flujo transitorio en el dominio del tiempo, $\lambda_{min} = 1 \times 10^{-6}$.

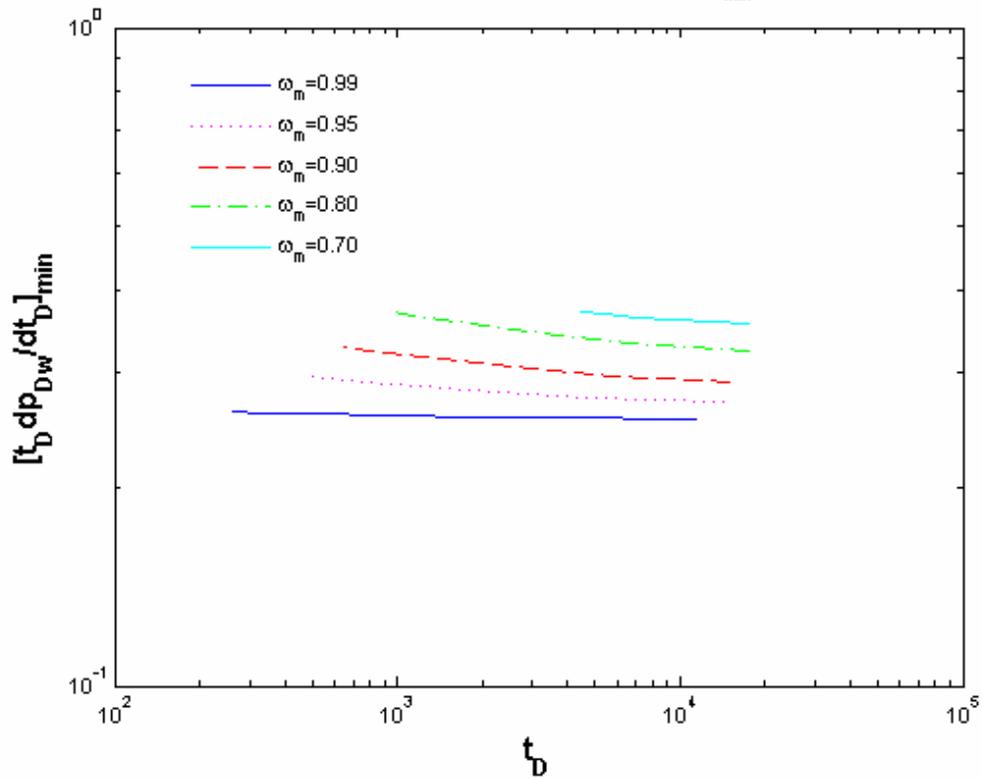


Figura IV.15 b) Flujo transitorio en el dominio del tiempo, $\lambda_{min} = 1 \times 10^{-5}$.

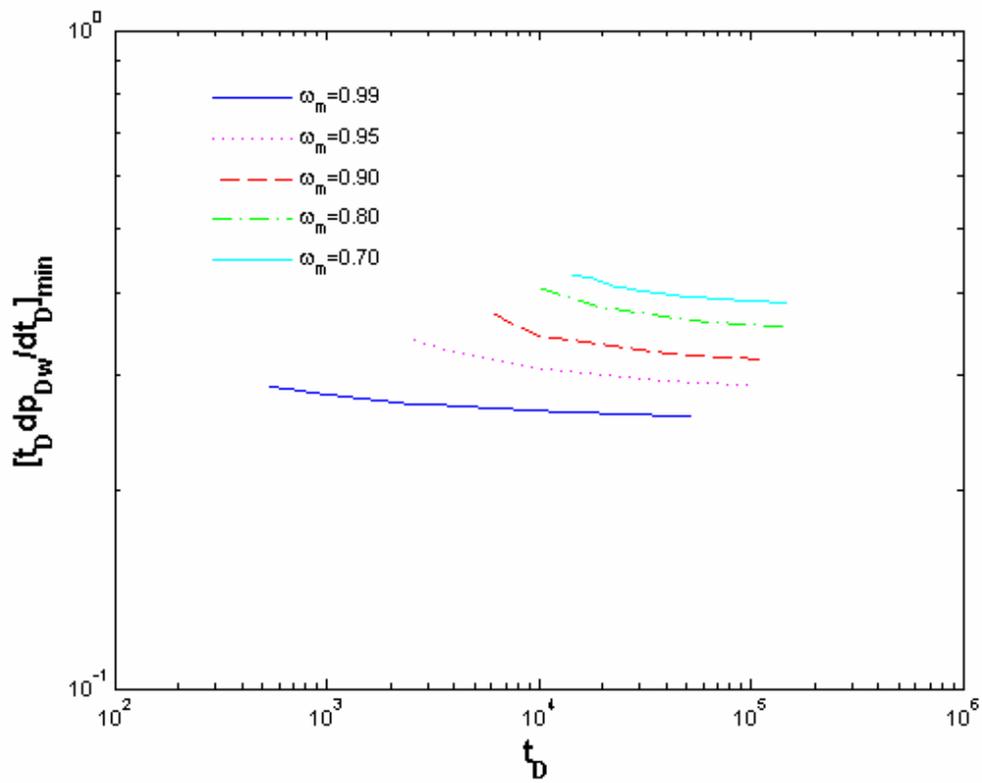


Figura IV.16 a) Flujo transitorio en el dominio de Laplace, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-6}$.

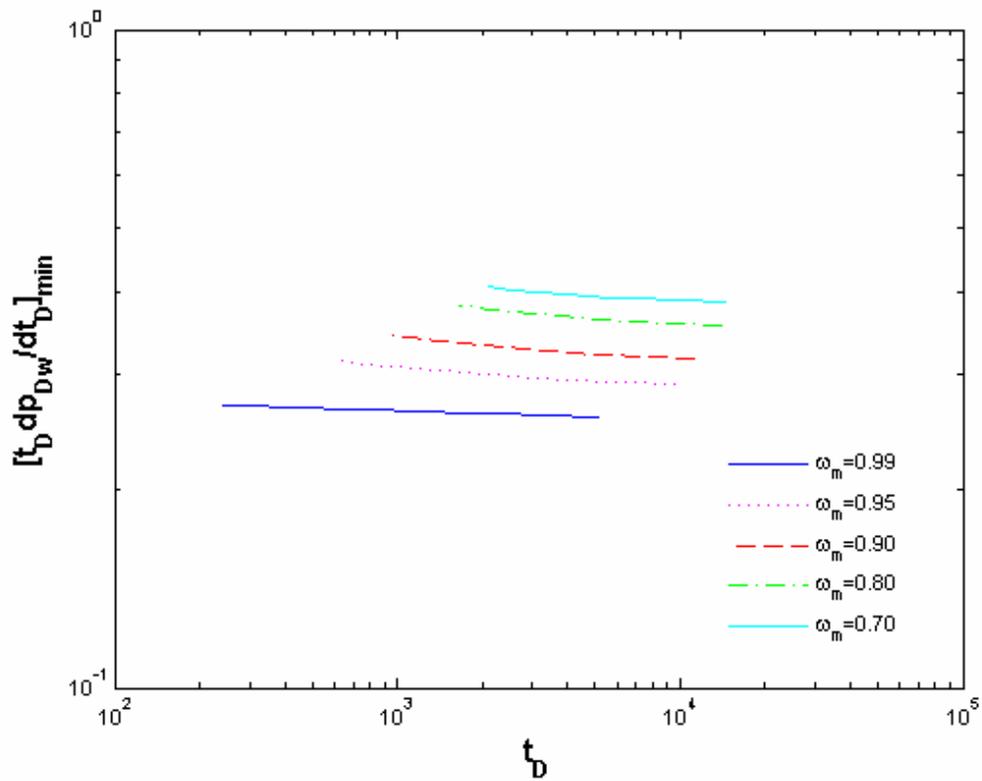


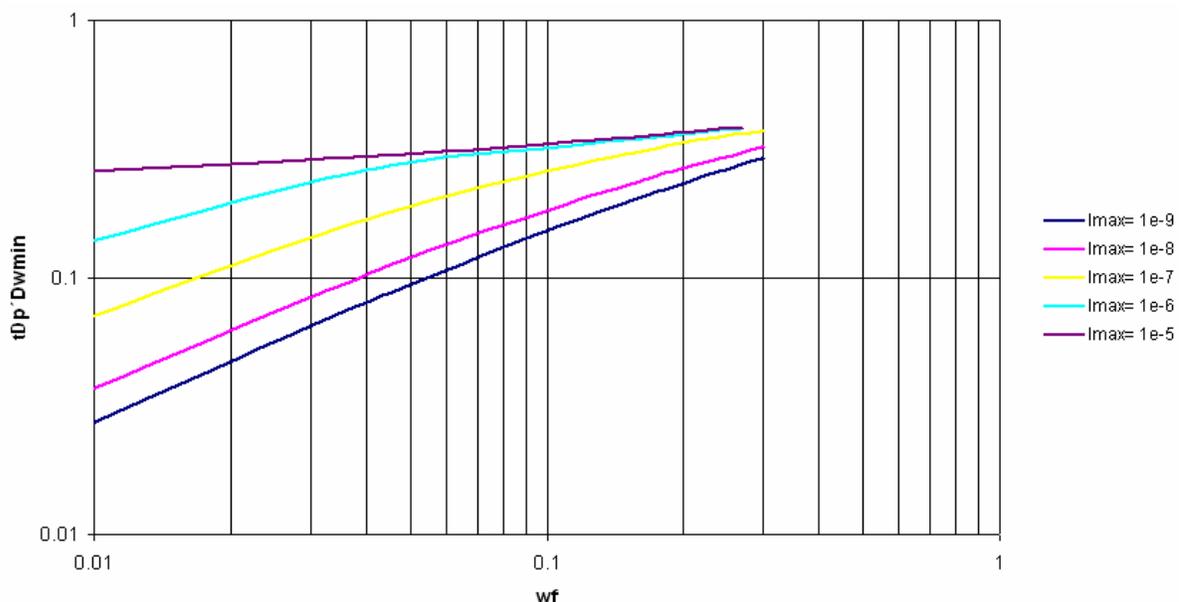
Figura IV.16 b) Flujo transitorio en el dominio de Laplace, $\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-5}$.

En las gráficas anteriormente mostradas es de suma importancia notar que, efectivamente, existe un patrón de comportamiento que señala la posibilidad de establecer una ecuación general que exprese dicho comportamiento. La expresión general corresponde principalmente a la de una recta, por lo cual se procedió a encontrar la ecuación de tendencia de cada una de las curvas, asociarlas a una recta, y encontrar la relación que existe entre los componentes de la misma (pendiente y ordenada al origen) y los parámetros que varían; con este fin se realizaron gráficas de la pendiente y de la ordenada al origen contra alguno de los parámetros del yacimiento.

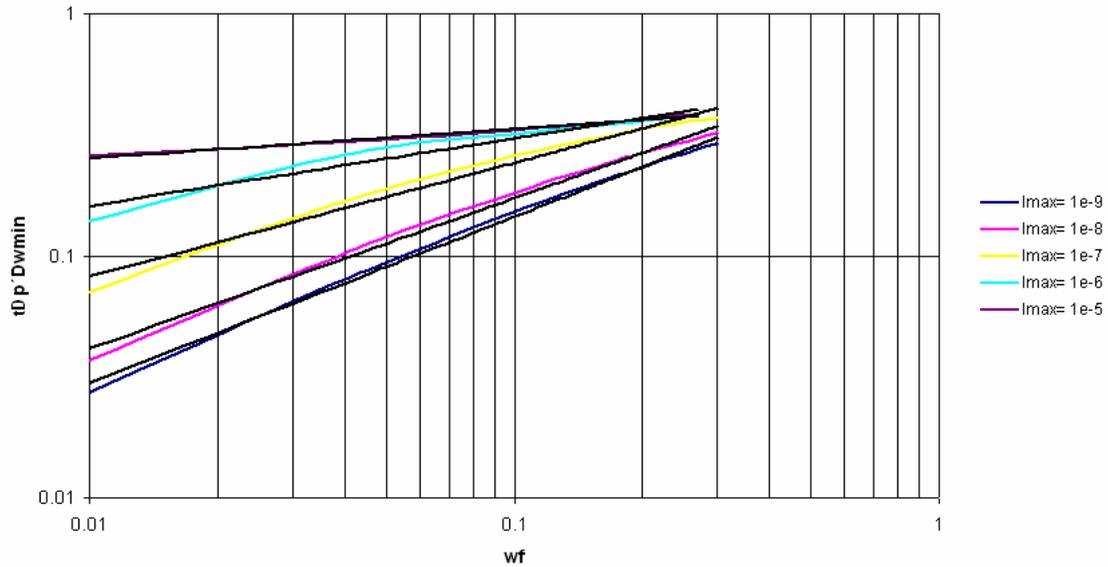
Cabe mencionar que en algunos casos estas gráficas generaban nuevamente una familia de curvas, de manera que a éstas se les asignaba una ecuación de tendencia asociada a una recta y se graficaba la pendiente y ordenada al origen contra alguno de los parámetros del yacimiento, diferente al de las gráficas anteriores, para encontrar la relación con éste y así obtener expresiones en las que la pendiente y la ordenada al origen son las variables dependientes, mientras la variable independiente es alguno de los parámetros del yacimiento; al final, se encuentra una ecuación de la recta en la cual tanto la pendiente como la ordenada al origen son funciones de λ_{\max} , λ_{\min} , ω_m , ω_f ó t_D , que dados datos de la función derivada de la presión adimensional (en el dominio del tiempo y de Laplace) y de tiempo adimensional contribuye a encontrar un valor adecuado para cada uno de los parámetros que describen a un yacimiento naturalmente fracturado.

Se muestran a continuación algunas de éstas gráficas, correspondientes a la transferencia matriz – fractura pseudoestacionaria, para ilustrar este procedimiento.

- Construcción de la gráfica $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ vs ω_f (o $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ vs $[t_D]_{\min}$ o $[s_D d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/ds_D]_{\min}$ vs $[1/s_D]_{\min}$)



- Obtención de las ecuaciones de tendencia de cada curva de la gráfica anterior



de donde se obtienen las ecuaciones de tendencia siguientes:

Para $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-9}$

$$p'_{Dwmin} = 0.7027 \omega_f^{-0.6857}$$

Para $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-8}$

$$p'_{Dwmin} = 0.7239 \omega_f^{-0.6216}$$

Para $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-7}$

$$p'_{Dwmin} = 0.7138 \omega_f^{-0.4695}$$

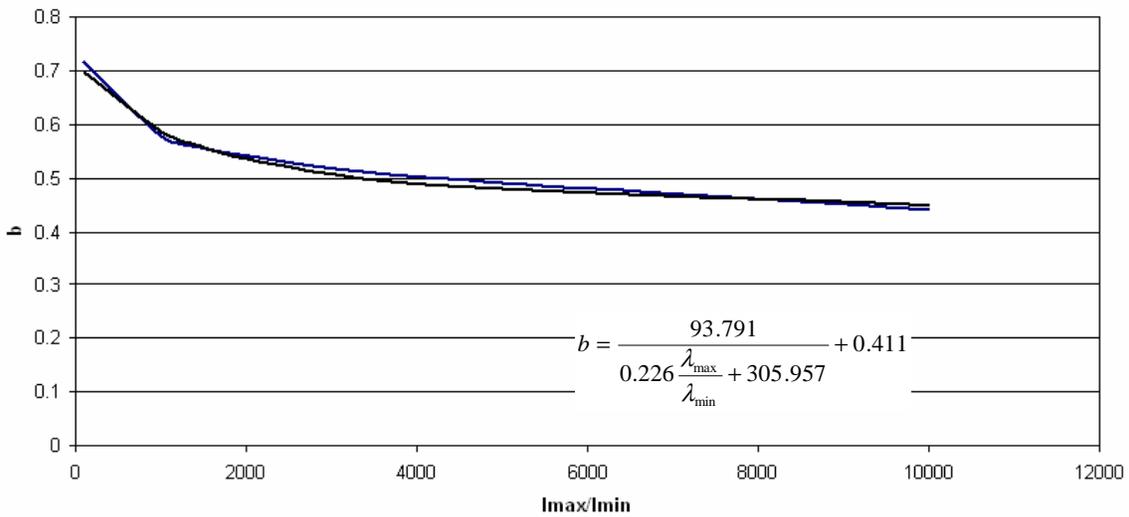
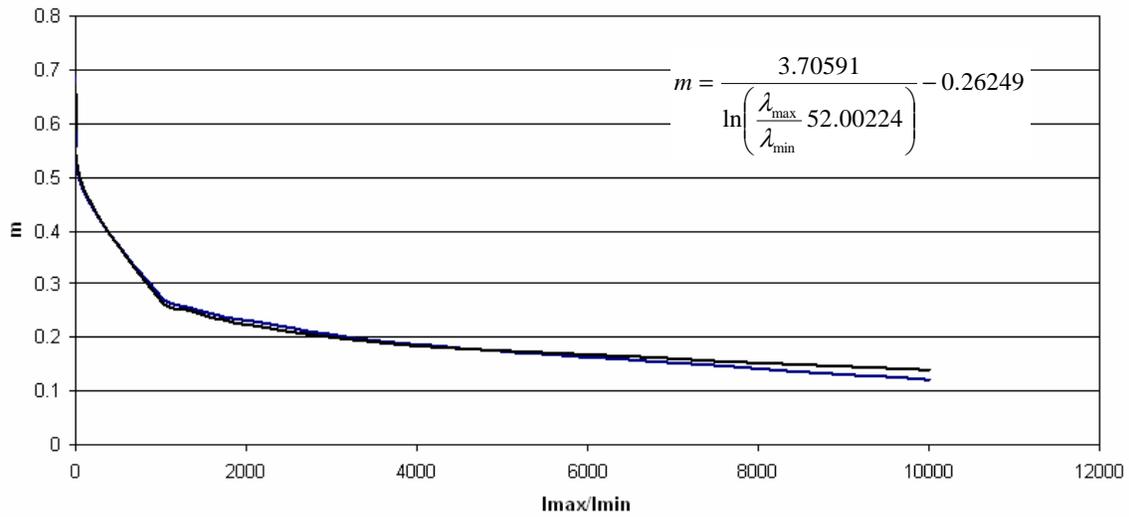
Para $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-6}$

$$p'_{Dwmin} = 0.5781 \omega_f^{-0.2777}$$

Para $\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-5}$

$$p'_{Dwmin} = 0.4414 \omega_f^{-0.1208}$$

- Gráficas de la pendiente y la ordenada al origen de las ecuaciones de tendencia anteriores (y de las obtenidas de las gráficas generadas con diferentes λ_{\min}) contra alguno de los parámetros del yacimiento y sus ecuaciones de tendencia (en este caso la curva de las diferentes gráficas es aproximadamente la misma, de otra forma generará otra familia de curvas de la cual deberá buscarse un modelo que la describa).



- Con las ecuaciones de tendencia anteriores y respetando la forma de ecuación de una recta $p'_{Dw} = b\omega_f^m$, de la primera gráfica (gráfica de procedencia) se construye una correlación empírica de la manera siguiente:

$$t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D} \Big|_{\min} = \left[\frac{93.791}{0.226 \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right) + 305.957} + 0.411 \right] \omega_f^{\left[\frac{3.70591}{\ln \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} + 52.00224 \right)} \right]^{-0.26249}}$$

Realizando reiteradamente el procedimiento antes descrito, se obtienen las correlaciones empíricas siguientes:

Tabla IV.3 Correlaciones empíricas en función de λ_{\max} , λ_{\min} y ω_f .

RÉGIMEN DE FLUJO	MODELO EMPÍRICO GENERAL	MODELO EMPÍRICO
Transitorio	$s_D \frac{d(s_D \bar{p}_{Dw})}{ds_D} \Big _{\min} = b_1 \omega_f^{m_1}$ $t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D} \Big _{\min} = b_2 \omega_f^{m_2}$ $t_D \Big _{\min} = b_3 \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{m_3}$	$s_D \frac{d(s_D \bar{p}_{Dw})}{ds_D} \Big _{\min} = \left[0.4259 \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{0.0226} \right] \omega_f \wedge^{[0.124943 - 0.000160 \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}]}$ $t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D} \Big _{\min} = \left[0.000393 \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + 0.284577 \right] \omega_f \wedge^{[0.0654054 \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} + 0.209608]}$ $t_D \Big _{\min} = \frac{0.724 - 0.3035 \omega_f}{\lambda_{\min}} \left(\frac{1}{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}} \right)^{0.9}$
Pseudoestacionario	$s_D \frac{d(s \bar{p}_{Dw})}{ds} \Big _{\min} = b_4 \omega_f^{m_4}$ $t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D} \Big _{\min} = b_5 \omega_f^{m_5}$ $t_D \Big _{\min} = b_6 \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{m_6}$	$s_D \frac{d(s_D \bar{p}_{Dw})}{ds_D} \Big _{\min} = \left[0.6053 - 0.0144 \ln \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right) \right] \omega_f \wedge^{\left[\frac{9.13366}{0.22167 \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right) + 37.40667} + 0.14261 \right]}$ $t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D} \Big _{\min} = \left[\frac{93.791}{0.226 \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right) + 305.957} + 0.411 \right] \omega_f \wedge^{\left[\frac{3.70591}{\ln \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} + 52.00224 \right)} - 0.26249 \right]}$ $t_D \Big _{\min} = \frac{-0.5072(1 - \omega_f) + 0.5253}{\lambda_{\min}} \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{(-0.4176(1 - \omega_f) - 0.1807)}$

Nótese que tanto para el caso de régimen transitorio como para el de régimen pseudoestacionario se tienen tres ecuaciones y tres variables desconocidas en total ($\lambda_{\max 0}$, $\lambda_{\min 0}$ y ω_{f0}); puesto que una vez que se tenga la prueba de presión se puede conocer $[s_D d[s p_{Dw}(s_D)]/ds_D]_{\min}$, $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ y $[t_D]_{\min}$ es posible encontrar el valor de las variables desconocidas resolviendo este problema como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Así, el valor resultante de estas variables es un valor cercano al valor real.

Ya encontrados los valores $\lambda_{\max 0}$, $\lambda_{\min 0}$ y ω_{f0} puede determinarse un valor más aproximado al real por diversos métodos; en esta tesis se propone una forma de aproximar estos valores por medio de un método de sensibilidad, para lo que fue necesario realizar primeramente un análisis de sensibilidad que permitiera saber cuanto se afecta el valor de la presión o del tiempo, cuando se varía cada uno de los parámetros. A este tipo de análisis se le conoce como análisis de tornado; el cuadro siguiente describe y resume su elaboración:

Parámetro	ESCENARIOS		
	mínimo	medio	máximo
ω_m	0.8	0.89	0.99
λ_{\max}	1.0×10^{-7}	1.0×10^{-06}	1.0×10^{-05}
λ_{\max}	1.0×10^{-09}	1.0×10^{-08}	1.0×10^{-07}
Presión		0.33295362	
Tiempo		700001	

Parámetro	p_{Dw} máxima	p_{Dw} mínima	rango	sw^2	Variabilidad %
ω_m	0.26194858	0.37061779	-0.10866921	0.011809	57.50%
λ_{\max}	0.37172471	0.30566481	0.06605989	0.00436391	21.25%
λ_{\max}	0.30566103	0.37172877	-0.06606774	0.00436495	21.25%
			suma=	0.02053785	100.00%

Parámetro	t_D máximo	t_D mínimo	rango	sw^2	Variabilidad %
ω_m	270001	1000001	-730000	5.329×10^{11}	2.27%
λ_{\max}	400001	3540001	-3140000	9.8596×10^{12}	42.09%
λ_{\max}	350001	3960001	-3610000	1.3032×10^{13}	55.63%
			suma=	2.3425×10^{13}	100.00%

En la tabla que contiene los diferentes escenarios, se muestran los valores que cada uno de los parámetros puede tomar y el valor que se obtiene de la presión y del tiempo evaluados

en el escenario medio. Por otro lado, en la tabla siguiente se muestran los valores de la presión y del tiempo evaluados tanto en el escenario máximo como en el mínimo de cada uno de los parámetros obteniendo de ello dos datos principales; el rango que determina si el parámetro del cual proviene debe disminuir o aumentar su valor y la variabilidad que determina cuál es el parámetro que más afecta, en este caso, a la presión o al tiempo.

De esta manera, considerando diferentes escenarios de interés, se determinó cual es la variable más influyente en cada uno de ellos. En el cuadro siguiente se resumen los resultados obtenidos en dicho análisis.

- Regímenes de flujo transitorio y pseudoestacionario

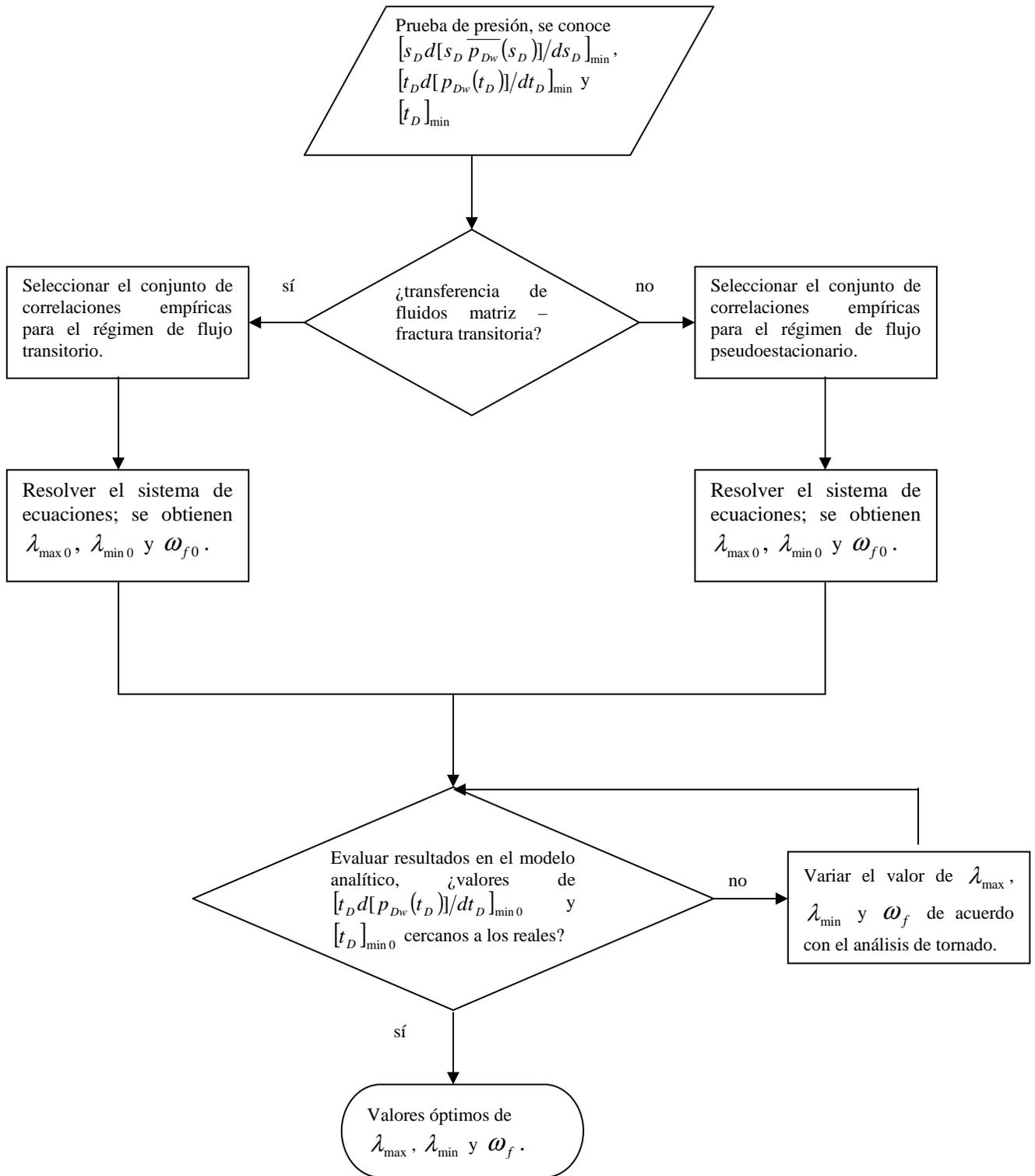
Tabla IV.4 Parámetros que influyen significativamente en el valor de la presión y del tiempo de acuerdo con el análisis de tornado.

VARIABLE	RANGO DE VARIACIÓN	VARIABLE QUE MÁS AFECTA A LA PRESIÓN	VARIABLE QUE MÁS AFECTA AL TIEMPO
ω_f	0.8 – 0.99	ω_f	λ_{\min}
λ_{\max}	$1 \times 10^{-5} - 1 \times 10^{-6}$		
λ_{\min}	$1 \times 10^{-6} - 1 \times 10^{-9}$		
ω_f	0.8 – 0.99	ω_f	λ_{\min}
λ_{\max}	$1 \times 10^{-5} - 1 \times 10^{-7}$		
λ_{\min}	$1 \times 10^{-7} - 1 \times 10^{-9}$		
ω_f	0.8 – 0.99	ω_f	λ_{\max}
λ_{\max}	$1 \times 10^{-5} - 1 \times 10^{-8}$		
λ_{\min}	$1 \times 10^{-8} - 1 \times 10^{-9}$		

Es posible concluir, con base también en el análisis, lo siguiente:

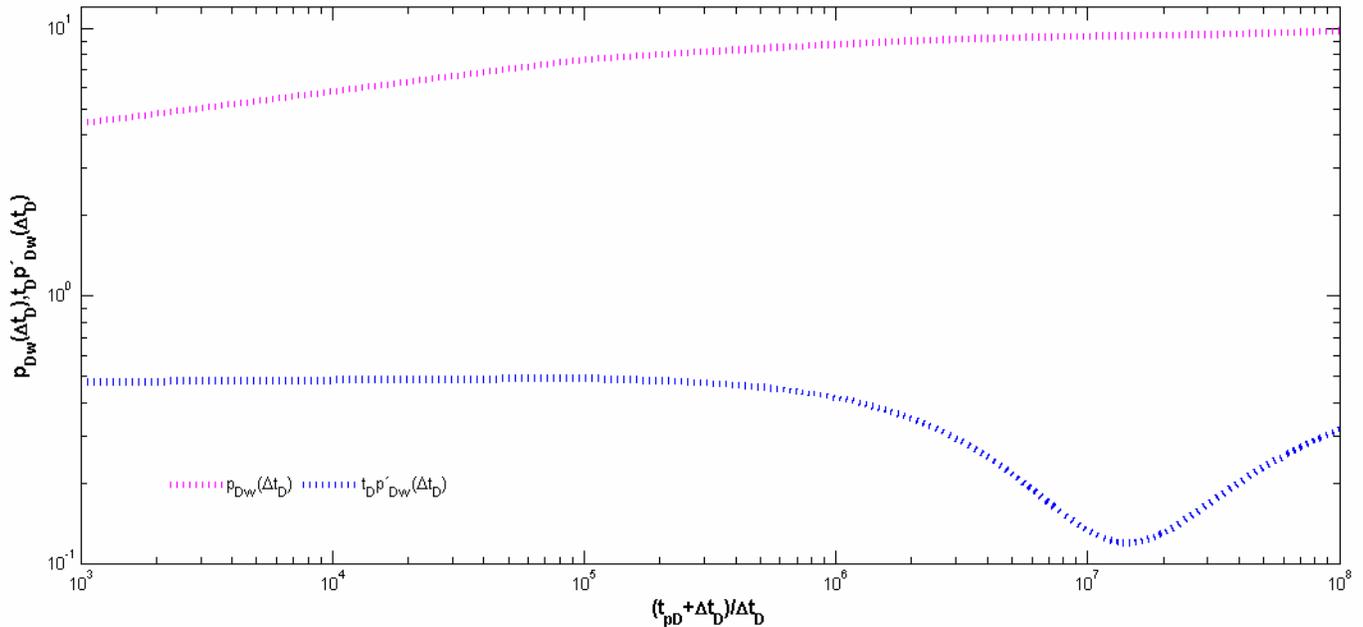
- La variación de ω_f y de λ_{\min} es inversamente proporcional al valor de la presión.
- La variación de λ_{\max} es directamente proporcional al valor de la presión.
- La variación de ω_f , λ_{\max} y λ_{\min} es inversamente proporcional al valor del tiempo.

Considerando lo anterior y variando los parámetros que más afectan a los valores ya sea de la presión o del tiempo tomando como valores iniciales aquellos obtenidos en el sistema de ecuaciones; $\lambda_{\max 0}$, $\lambda_{\min 0}$ y ω_{f0} (cuyo rango es el que debe ser tomado en cuenta al comparar con la tabla anterior), se obtienen valores más cercanos a los reales de estos parámetros que caracterizan al sistema matriz – fractura (λ_{\max} , λ_{\min} , ω_m y ω_f) además del rango de variación del tamaño de bloque (h_{\max} y h_{\min}). Este procedimiento se ilustra en el esquema siguiente:



❖ **Ejemplo de aplicación 1.** Caso hipotético con el modelo analítico.

Sea la prueba de presión en régimen de flujo pseudoestacionario cuya gráfica se muestra a continuación:



construida introduciendo los valores siguientes en el modelo analítico:

$$\begin{aligned} \omega_m &= 0.95 \\ \lambda_{\max} &= 1 \times 10^{-8} \\ \lambda_{\min} &= 1 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

y obteniendo a partir de ellos los valores siguientes:

$$[d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/d \ln(1/s_D)]_{\min} = 0.202068267$$

$$[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min} = 0.119080787$$

$$[t_D]_{\min} = 14300001$$

Considerando las correlaciones empíricas correspondientes y utilizando los tres últimos valores (como si éstos fueran reales, obtenidos de una prueba de presión) para resolverlas como un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones y tres incógnitas se obtienen los valores siguientes:

$$\lambda_{\max 0} = 8.21738 \times 10^{-9}$$

$$\lambda_{\min 0} = 1.08381 \times 10^{-9}$$

$$\omega_{f0} = 0.0617656$$

con los cuales también se obtienen los valores siguientes:

$$[d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/d \ln(1/s_D)]_{\min 0} = 0.214270332$$

$$[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min 0} = 0.130420529$$

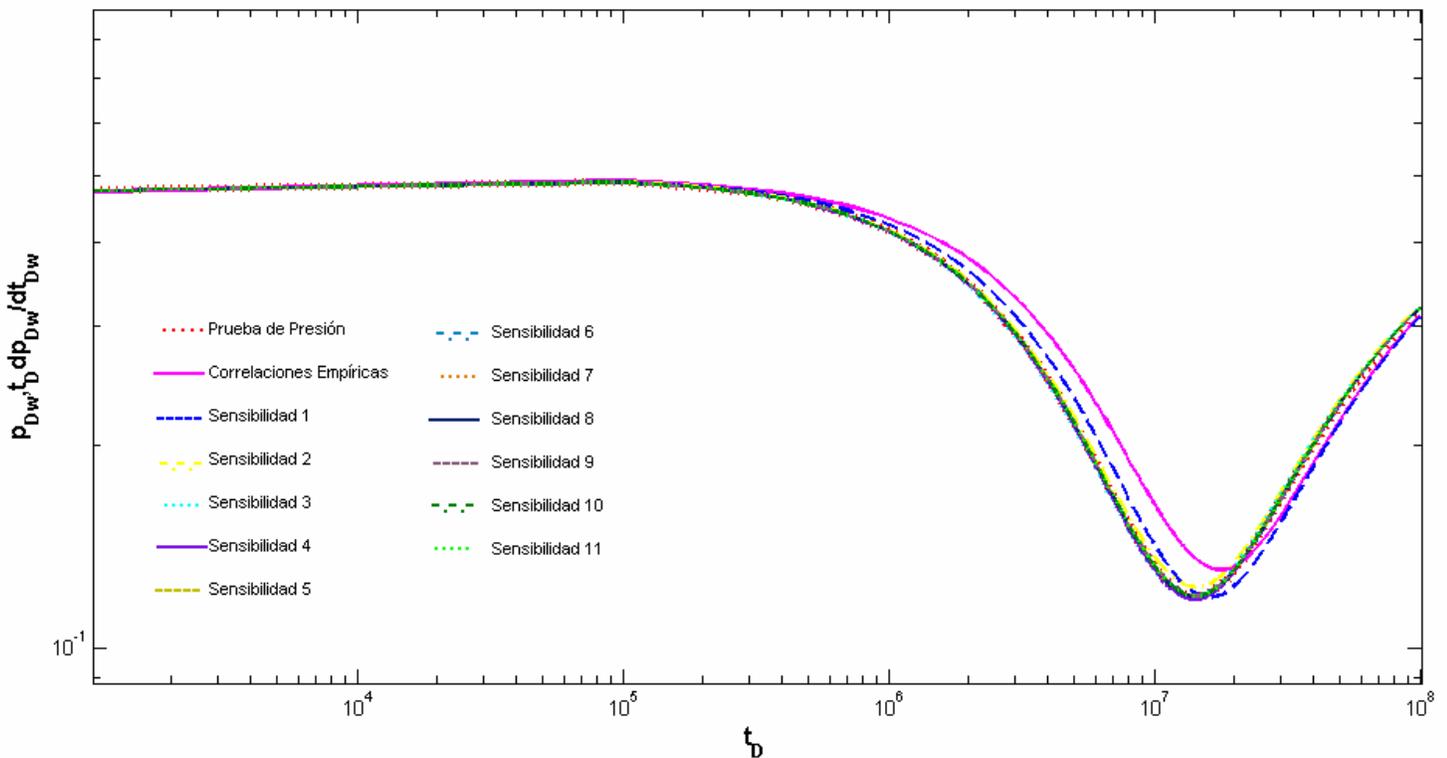
$$[t_D]_{\min 0} = 17800000$$

Estos valores son cercanos a los valores “reales” obtenidos con el modelo analítico, sin embargo, pueden aproximarse aún más haciendo sensibilidades con los criterios de variación que se establecieron anteriormente; los resultados se resumen en las tablas y en la gráfica siguientes:

Iteración	ω_f	λ_{\max}	λ_{\min}	$[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$	$[t_D]_{\min}$
Reales	0.05000	1.00000x10⁻⁸	1.00000 x10⁻⁹	0.11908	14300001
C. Empíricas	0.061765600	8.21738x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.13042	17800000
Sensibilidad 1	0.053483037	8.21738 x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.11870	16200001
Sensibilidad 2	0.053483037	1.01174 x10 ⁻⁸	1.08381 x10 ⁻⁹	0.122932904	14400001
Sensibilidad 3	0.050669446	1.01174 x10 ⁻⁸	1.08381 x10 ⁻⁹	0.118664463	13900001
Sensibilidad 4	0.050669446	9.7174 x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.117830368	14200001
Sensibilidad 5	0.051582753	9.7174E x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.11922084	14400001
Sensibilidad 6	0.051582753	9.8174E x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.119434584	14290000
Sensibilidad 7	0.051324339	9.8174E x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.119041423	14250000
Sensibilidad 8	0.051324339	9.7674 x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.118935902	14290000
Sensibilidad 9	0.051430164	9.7674 x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.119096925	14305000
Sensibilidad 10	0.051430164	9.7724 x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.119107502	14302000
Sensibilidad 11	0.051410651	9.7724 x10 ⁻⁹	1.08381 x10 ⁻⁹	0.119077824	14298000

Iteración	$t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ error	$[t_D]_{\min}$ error	$t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ error relativo	$[t_D]_{\min}$ error relativo	$t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ error porcentual	$[t_D]_{\min}$ error porcentual
C. Empíricas	-0.01134	-0.09523	9.52273	-3499999	-0.24476	24.47552
Sensibilidad 1	0.00038	0.00318	0.31832	-1900000	-0.13287	13.28671
Sensibilidad 2	-0.00385	-0.03235	3.23488	-100000	-0.00699	0.69930
Sensibilidad 3	0.00042	0.00350	0.34961	400000	0.02797	2.79720
Sensibilidad 4	0.00125	0.01050	1.05006	100000	0.00699	0.69930
Sensibilidad 5	-0.00014	-0.00118	0.11761	-100000	-0.00699	0.69930
Sensibilidad 6	-0.00035	-0.00297	0.29711	10001	0.00070	0.06994
Sensibilidad 7	0.00004	0.00033	0.03306	50001	0.00350	0.34966
Sensibilidad 8	0.00014	0.00122	0.12167	10001	0.00070	0.06994
Sensibilidad 9	-0.00002	-0.00014	0.01355	-4999	-0.00035	0.03496
Sensibilidad 10	-0.00003	-0.00022	0.02243	-1999	-0.00014	0.01398
Sensibilidad 11	0.000003	0.00002	0.00249	2001	0.00014	0.01399

*Nota: en esta tabla se utiliza $t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ como abreviación de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$



Como puede observarse en la tabla, en algunos casos se varió el valor de ω_f y en otros el de λ_{\max} con el propósito de ajustar el valor de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ o de $[t_D]_{\min}$ de la curva; el criterio de variación de estos parámetros se estableció utilizando coeficientes de sensibilidad como se muestra a continuación:

Para determinar el coeficiente de sensibilidad para $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ debe tenerse en cuenta que para este caso, de acuerdo con lo establecido anteriormente, el parámetro de mayor influencia en el valor de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ es ω_f , y por lo tanto, su variabilidad con respecto a éste proporciona información acerca de cómo debe ser modificado el valor de ω_{f0} para alcanzar el valor de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ deseado.

Así, para este ejemplo se propuso un valor $\varepsilon = 0.01$ que representa una pequeña variación en el valor de ω_{f0} , que posteriormente se utilizó para evaluar los valores de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ y de esta manera obtener el coeficiente de sensibilidad. A continuación se ejemplifica este cálculo tomando los valores obtenidos por medio de las correlaciones empíricas para este caso:

$$\omega_{f0} + \varepsilon = 0.0617656 + 0.01 = 0.0717656,$$

$$\omega_{f0} - \varepsilon = 0.0617656 - 0.01 = 0.0517656.$$

Los valores de $t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}$ (se utilizará esta simbología para simplificar $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$) obtenidos con el modelo analítico utilizando $\lambda_{\min 0}$, $\lambda_{\max 0}$, $\omega_{f0} + \varepsilon$ y $\omega_{f0} - \varepsilon$ son los siguientes:

$$[t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]_{\omega_{f0} + \varepsilon} = 0.143544702,$$

$$[t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]_{\omega_{f0} - \varepsilon} = 0.116162496,$$

una vez obtenidos estos valores, se calcula el coeficiente de sensibilidad como sigue:

$$\frac{\Delta [t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]}{\Delta \omega_{f0}} = \frac{[t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]_{\omega_{f0} + \varepsilon} - [t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]_{\omega_{f0} - \varepsilon}}{(\omega_{f0} + \varepsilon) - (\omega_{f0} - \varepsilon)} = \frac{0.143544702 - 0.116162496}{0.0717656 - 0.0517656}$$

$$\frac{\Delta [t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]}{\Delta \omega_{f0}} = 1.3691103.$$

Conocidos los valores anteriores, es necesario determinar la diferencia siguiente:

$$[t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]_{real} - [t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]_0 = 0.119080787 - 0.130420529 = -0.01133974$$

para establecer la proporción siguiente:

$$\frac{\Delta[t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min}]}{\Delta\omega_{f0}} = \frac{1.3691103}{1} = \frac{-0.01133974}{x_0}, \text{ de donde } x_0 = -0.00828256.$$

De esta manera $\omega_{f1} = \omega_{f0} + x_0 = 0.0617656 - 0.00828256$, de donde $\omega_{f1} = 0.053483037$ que es un valor más aproximado al real y con el cual, usando además los valores de $\lambda_{\min 0}$ y $\lambda_{\max 0}$, se obtiene $t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min 1} = 0.11870173$ y $[t_D]_{\min 1} = 16200001$. Estos valores, en conjunto, son los que se seguirán iterando por este mismo método hasta encontrar los valores óptimos.

Por otro lado, el procedimiento para determinar el coeficiente de sensibilidad para $[t_D]_{\min}$, es el mismo que el ilustrado anteriormente, con la excepción de que en este caso el parámetro con mayor influencia en el valor de $[t_D]_{\min}$ es λ_{\max} , por lo cual debe establecerse la variabilidad del primero con respecto del segundo para establecer un patrón de variación en $\lambda_{\max 0}$; a continuación se ejemplifica el cálculo:

Para este caso se propone un valor de $\varepsilon = 1 \times 10^{-10}$ con el cual es posible calcular lo siguiente:

$$\lambda_{\max 0} + \varepsilon = 8.31738 \times 10^{-8},$$

$$\lambda_{\max 0} - \varepsilon = 8.11738 \times 10^{-9},$$

valores que en conjunto con $\lambda_{\min 0}$ y ω_{f0} proporcionan los valores siguientes (debe notarse tanto aquí como en la tabla que se realizaron de manera intercalada las aproximaciones para $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ y para $[t_D]_{\min}$; es decir, primero se varió un valor de ω_f luego uno de λ_{\max} , después uno de ω_f y así sucesivamente, con la finalidad de aproximarlos a la par lo cual es lo más recomendable):

$$([t_D]_{\min})_{\lambda_{\max 0} + \varepsilon} = 16200001,$$

$$([t_D]_{\min})_{\lambda_{\max 0} - \varepsilon} = 16400001,$$

con los cuales el coeficiente de sensibilidad resultante es:

$$\frac{\Delta [t_D]_{\min}}{\Delta \lambda_{\max 0}} = -1 \times 10^{15}$$

y como $([t_D]_{\min})_{real} - ([t_D]_{\min})_1 = -1900000$, se puede establecer la proporción siguiente:

$$\frac{\Delta [t_D]_{\min}}{\Delta \lambda_{\max 0}} = \frac{1 \times 10^{15}}{1} = \frac{-1900000}{x_1}, \text{ de donde } x_1 = 1.9 \times 10^{-9}.$$

Sabiendo que $\lambda_{\max 1} = \lambda_{\max 0} + x_1 = 1.01174 \times 10^{-8}$, en conjunto con el valor de $\lambda_{\min 0}$ y de ω_{f1} , se obtiene $t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min 2} = 0.122932904$ y $[t_D]_{\min 2} = 1440001$. Estos valores en conjunto deberán seguir siendo iterados por el mismo método hasta encontrar el valor óptimo. Es importante señalar que los coeficientes no deben ser recalculados; aquellos encontrados inicialmente se utilizan en las iteraciones precedentes.

Así, se encontró que la mejor aproximación fue dada por los valores utilizados en la sensibilidad 11, lo cual también puede notarse en la tabla de errores, en la que el error indica, que el valor hallado tanto para $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ como para $[t_D]_{\min}$ es menor que el real (debido al valor positivo); por otro lado, el error relativo y porcentual indican que tan alejados están los valores hallados de los reales, y en este caso se observa que tanto el valor de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ como el de $[t_D]_{\min}$ tienen valores de estos errores aceptables que permiten tomarlos como válidos. A continuación, a manera de ejemplo, se muestra el cálculo de los errores antes mencionados para la sensibilidad 1:

- Para $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$:

Error

$$(t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min})_{real} - (t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min})_1 = 0.119080787 - 0.11870173 = 0.00037905$$

Error relativo

$$\frac{(t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min})_{real} - (t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min})_1}{|(t_D p'_{Dw}(t_D)|_{\min})_{real}|} = \frac{0.119080787 - 0.11870173}{|0.119080787|} = 0.003183$$

Error porcentual

$$\left| \frac{(t_D P'_{Dw}(t_D)|_{\min})_{real} - (t_D P'_{Dw}(t_D)|_{\min})_1}{(t_D P'_{Dw}(t_D)|_{\min})_{real}} \right| \times 100 = \left| \frac{0.119080787 - 0.11870173}{0.119080787} \right| \times 100 = 0.3183$$

- Para $[t_D]_{\min}$:

Error

$$([t_D]_{\min})_{real} - ([t_D]_{\min})_1 = 14300001 - 16200001 = -1900000$$

Error relativo

$$\frac{([t_D]_{\min})_{real} - ([t_D]_{\min})_1}{|([t_D]_{\min})_{real}|} = \frac{14300001 - 16200001}{|14300001|} = -0.13287$$

Error porcentual

$$\left| \frac{([t_D]_{\min})_{real} - ([t_D]_{\min})_1}{([t_D]_{\min})_{real}} \right| \times 100 = \left| \frac{14300001 - 16200001}{14300001} \right| \times 100 = 13.287$$

Así, los valores finales de este método de sensibilidad son:

$$\omega_f = 0.051410651,$$

$$\omega_m = 0.948589349,$$

$$\lambda_{\max} = 9.7724 \times 10^{-9},$$

$$\lambda_{\min} = 1.08381 \times 10^{-9}.$$

Si se cuenta con los datos siguientes:

$$r_w = 0.2917 \text{ pies},$$

$$k_m = 1.2 \text{ md},$$

$$k_f = 1000 \text{ md};$$

de la definición del coeficiente de flujo interporoso se tiene lo siguiente:

$$\lambda_{\max} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{\min}^2} \text{ y } \lambda_{\min} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{\max}^2},$$

de donde puede obtenerse que $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}}\right)^2$. Y así, despejando de ésta a h_{\min} :

$$h_{\min} = h_{\max} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}.$$

Sustituyendo h_{\min} en la ecuación de λ_{\max} :

$$\lambda_{\max} = \frac{k_m r_w^2}{k_f \left(h_{\max} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} \right)^2};$$

despejando h_{\max} se obtiene lo siguiente:

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{k_m r_w^2}{k_f \lambda_{\min}}},$$

sustituyendo lo valores:

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{(1.2)(0.2917)^2}{(1000)(1.08381 \times 10^{-9})}};$$

$$h_{\max} = 306.94 \text{ pies.}$$

Sustituyendo h_{\max} en $h_{\min} = h_{\max} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}$ y resolviendo se tiene:

$$h_{\min} = 306.94 \sqrt{\frac{1.08381 \times 10^{-9}}{9.7724 \times 10^{-9}}};$$

$$h_{\min} = 102.218 \text{ pies.}$$

Así finalmente:

$$\omega_f = 0.051410651,$$

$$\omega_m = 0.948589349,$$

$$\lambda_{\max} = 9.7724 \times 10^{-9},$$

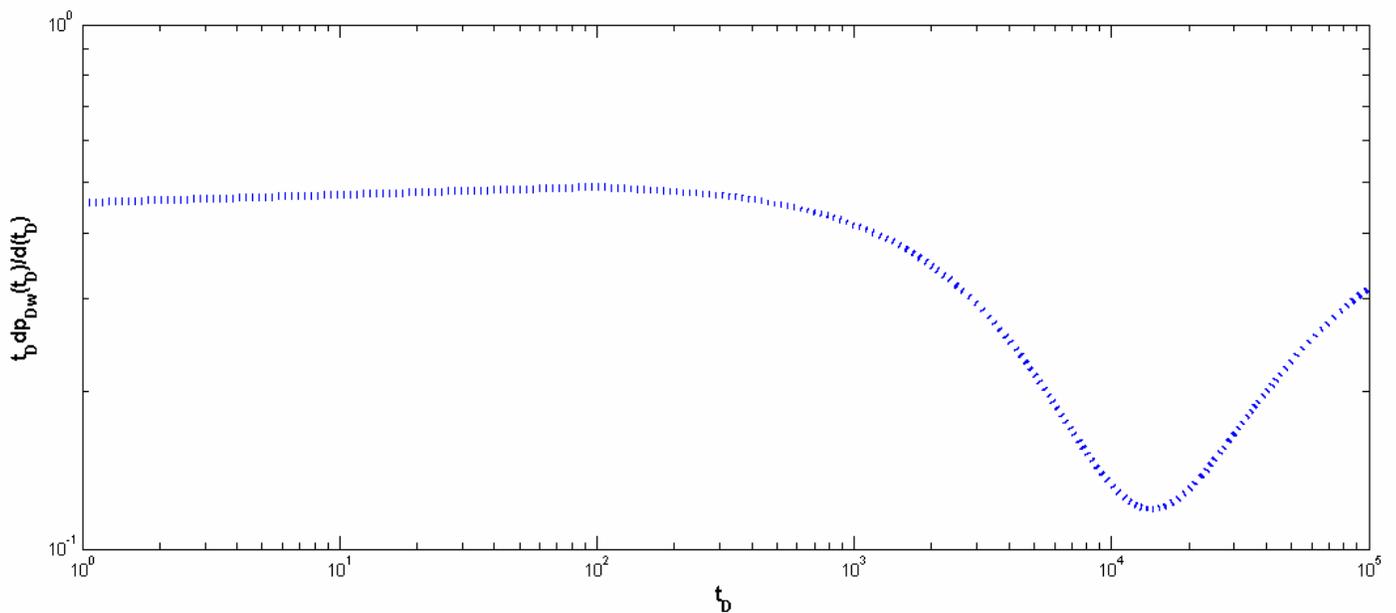
$$\lambda_{\min} = 1.08381 \times 10^{-9},$$

$$h_{\max} = 306.94 \text{ pies},$$

$$h_{\min} = 102.218 \text{ pies}.$$

❖ **Ejemplo de aplicación 2.** Caso hipotético con el modelo analítico.

Sea la prueba de presión en régimen de flujo pseudoestacionario cuya gráfica se muestra a continuación:



elaborada con los valores siguientes en el modelo analítico:

$$\omega_m = 0.95$$

$$\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-5}$$

$$\lambda_{\min} = 1 \times 10^{-6}$$

y obteniendo a partir de ellos los valores siguientes:

$$\left[d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)] / d \ln(1/s_D) \right]_{\min} = 0.202000579$$

$$\left[t_D d[p_{Dw}(t_D)] / dt_D \right]_{\min} = 0.119052629$$

$$\left[t_D \right]_{\min} = 14301$$

Como puede observarse, en la gráfica anterior sólo se encuentra la curva de la función derivada puesto que es la que proporciona la información necesaria para realizar el análisis; y como en el ejemplo de aplicación 1, se utilizan las correlaciones empíricas y los valores $[d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/d \ln(1/s_D)]_{\min}$, $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ y $[t_D]_{\min}$ correspondientes y se resuelve el sistema de ecuaciones de tres ecuaciones y tres incógnitas se obtienen los siguientes valores:

$$\lambda_{\max 0} = 8.22821 \times 10^{-6}$$

$$\lambda_{\min 0} = 1.08011 \times 10^{-6}$$

$$\omega_{f0} = 0.0617082$$

con los cuales se obtienen los valores siguientes:

$$[d[s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)]/d \ln(1/s_D)]_{\min 0} = 0.214196798$$

$$[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min 0} = 0.13041002$$

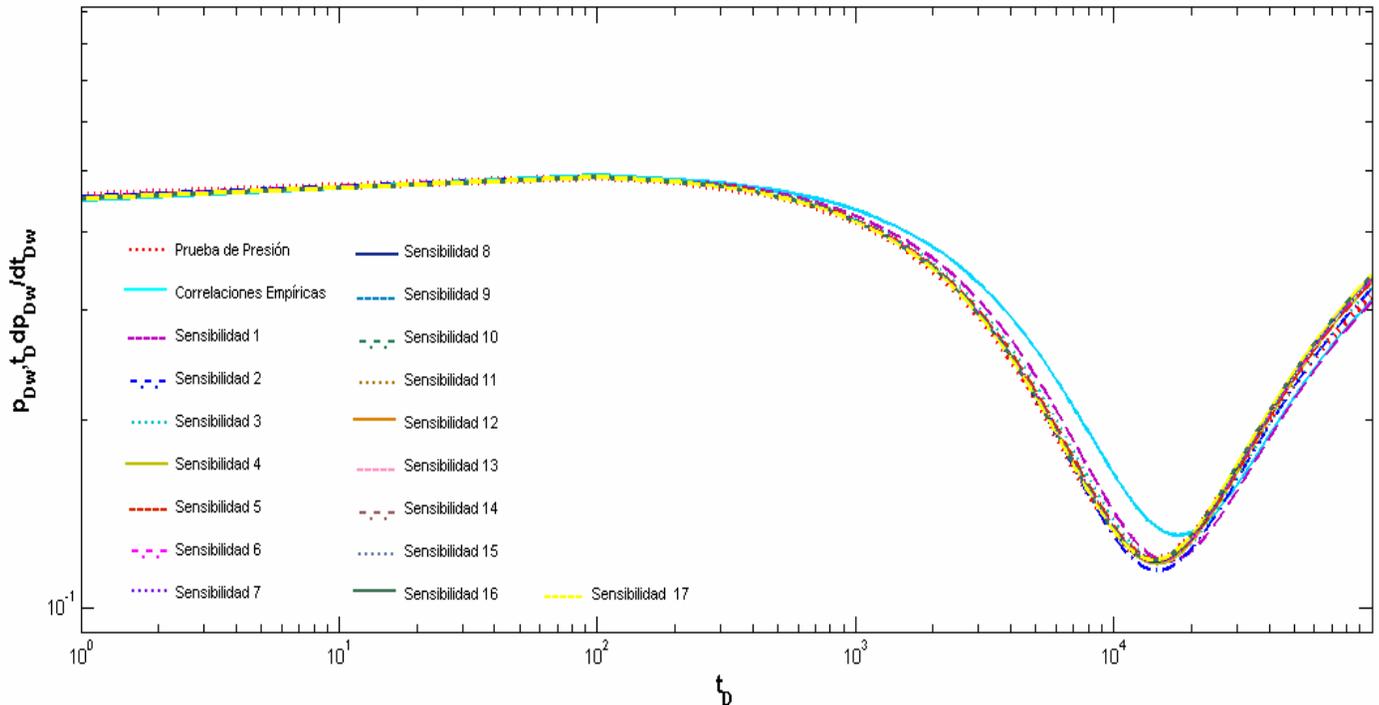
$$[t_D]_{\min 0} = 17801$$

Haciendo sensibilidades con los criterios de variación mencionados y los coeficientes de sensibilidad, se obtienen los valores presentados en las tablas y en la gráfica siguientes:

Iteración	ω_f	λ_{\max}	λ_{\min}	$[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$	$[t_D]_{\min}$
Reales	0.05000	1.00000 x10⁻⁵	1.00000 x10⁻⁶	0.119052629	14301
C. Empíricas	0.061708200	8.22821 x10 ⁻⁶	1.08011 x10 ⁻⁶	0.13041	17801
Sensibilidad 1	0.053418401	8.22821 x10 ⁻⁶	1.08011 x10 ⁻⁶	0.11867	16201
Sensibilidad 2	0.053418401	8.22821 x10 ⁻⁶	1.35154 x10 ⁻⁶	0.114546042	14701
Sensibilidad 3	0.056707774	8.22821 x10 ⁻⁶	1.35154 x10 ⁻⁶	0.119209715	15301
Sensibilidad 4	0.056707774	8.22821 x10 ⁻⁶	1.49440 x10 ⁻⁶	0.117471188	14640
Sensibilidad 5	0.057862074	8.22821 x10 ⁻⁶	1.49440 x10 ⁻⁶	0.119063561	14840
Sensibilidad 6	0.057862074	8.22821 x10 ⁻⁶	1.57000 x10 ⁻⁶	0.118238381	14521
Sensibilidad 7	0.058456418	8.22821 x10 ⁻⁶	1.57000 x10 ⁻⁶	0.119049177	14616
Sensibilidad 8	0.058456418	8.22821 x10 ⁻⁶	1.62000 x10 ⁻⁶	0.118535099	14418
Sensibilidad 9	0.058834165	8.22821 x10 ⁻⁶	1.62000 x10 ⁻⁶	0.119047125	14477
Sensibilidad 10	0.058834165	8.22821 x10 ⁻⁶	1.64000 x10 ⁻⁶	0.118848005	14399
Sensibilidad 11	0.058983521	8.22821 x10 ⁻⁶	1.64000 x10 ⁻⁶	0.119049838	14420
Sensibilidad 12	0.058983521	8.22821 x10 ⁻⁶	1.66000 x10 ⁻⁶	0.11885438	14346
Sensibilidad 13	0.059128223	8.22821 x10 ⁻⁶	1.66000 x10 ⁻⁶	0.119049497	14370
Sensibilidad 14	0.059128223	8.22821 x10 ⁻⁶	1.67000 x10 ⁻⁶	0.118953075	14329
Sensibilidad 15	0.059200882	8.22821 x10 ⁻⁶	1.67000 x10 ⁻⁶	0.119050934	14342
Sensibilidad 16	0.059200882	8.22821 x10 ⁻⁶	1.67425 x10 ⁻⁶	0.119010212	14324
Sensibilidad 17	0.059200882	8.25121 x10 ⁻⁶	1.67425 x10 ⁻⁶	0.119054862	14305

Iteración	$t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ error	$[t_D]_{\min}$ error	$t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ error relativo	$[t_D]_{\min}$ error relativo	$t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ error porcentual	$[t_D]_{\min}$ error porcentual
C. Empíricas	-0.01136	-0.09540	9.53981	-3500	-0.24474	24.47381
Sensibilidad 1	0.00038	0.00320	0.31967	-1900	-0.13286	13.28578
Sensibilidad 2	0.00451	0.03785	3.78537	-400	-0.02797	2.79701
Sensibilidad 3	-0.00016	-0.00132	0.13195	-1000	-0.06993	6.99252
Sensibilidad 4	0.00158	0.01328	1.32835	-339	-0.02370	2.37046
Sensibilidad 5	-0.00001	-0.00009	0.00918	-539	-0.03769	3.76897
Sensibilidad 6	0.00081	0.00684	0.68394	-220	-0.01538	1.53835
Sensibilidad 7	0.00000	0.00003	0.00290	-315	-0.02203	2.20264
Sensibilidad 8	0.00052	0.00435	0.43471	-117	-0.00818	0.81812
Sensibilidad 9	0.00001	0.00005	0.00462	-176	-0.01231	1.23068
Sensibilidad 10	0.00020	0.00172	0.17188	-98	-0.00685	0.68527
Sensibilidad 11	0.00000	0.00002	0.00234	-119	-0.00832	0.83211
Sensibilidad 12	0.00020	0.00167	0.16652	-45	-0.00315	0.31466
Sensibilidad 13	0.00000	0.00003	0.00263	-69	-0.00482	0.48248
Sensibilidad 14	0.00010	0.00084	0.08362	-28	-0.00196	0.19579
Sensibilidad 15	0.00000	0.00001	0.00142	-41	-0.00287	0.28669
Sensibilidad 16	0.00004	0.00036	0.03563	-23	-0.00161	0.16083
Sensibilidad 17	0.00000	-0.00002	0.00188	-4	-0.00028	0.02797

*Nota: en esta tabla se utiliza $t_D p_{Dw}(t_D)_{\min}$ como abreviación de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$



Es claro que la mejor aproximación fue encontrada en la sensibilidad 17, lo cual puede notarse en la tabla de errores donde principalmente el error porcentual para ambos valores de $[t_D d[p_{Dw}(t_D)]/dt_D]_{\min}$ y $[t_D]_{\min}$, es muy bueno e indica que el valor encontrado no dista demasiado del real. En dicha sensibilidad, se utilizaron los siguientes valores:

$$\omega_f = 0.0517082,$$

$$\omega_m = 0.9482918,$$

$$\lambda_{\max} = 1 \times 10^{-5},$$

$$\lambda_{\min} = 1.08011 \times 10^{-6}.$$

Si se conocen los datos siguientes:

$$r_w = 0.2917 \text{ pies},$$

$$k_m = 1.2 \text{ md},$$

$$k_f = 1000 \text{ md};$$

de igual forma que en el caso anterior utilizando $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}}\right)^2$ y $\lambda = \frac{k_m r_w^2}{k_f h^2}$ se obtiene:

$$h_{\max} = 7.809 \text{ pies y } h_{\min} = 3.518 \text{ pies}.$$

Finalmente:

$$\omega_f = 0.059200882,$$

$$\omega_m = 0.940799118,$$

$$\lambda_{\max} = 8.25121 \times 10^{-6},$$

$$\lambda_{\min} = 1.67425 \times 10^{-6},$$

$$h_{\max} = 7.809 \text{ pies},$$

$$h_{\min} = 3.518 \text{ pies}.$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A partir de los resultados de esta tesis se pueden establecer las conclusiones siguientes:

- El modelo propuesto en esta tesis, haciendo las consideraciones necesarias para representar el comportamiento de un yacimiento con tamaño de bloque constante, se valida adecuadamente con el modelo clásico de Warren & Root.
- Para resolver la ecuación de difusión, es posible obtener una buena aproximación de la transformada inversa de Laplace por medio del algoritmo de Stehfest.
- Los valores de $p_{Dw}(t_D)$ y de $t_D p'_{Dw}(t_D)$ obtenidos con el algoritmo de Stehfest tienen una diferencia despreciable utilizando 8, 10 y 12 como valores de N .
- Se observó en la representación gráfica log - log de $t_D p'_{Dw}$ vs t_D , que la función derivada de la presión presenta una notable sensibilidad a los cambios en los parámetros del yacimiento.
- Se desarrolló un método con el cual se calcularon los parámetros principales de un yacimiento naturalmente fracturado (ω_m , ω_f , λ_{\max} , λ_{\min} , h_{\max} y h_{\min}) a partir de una prueba de presión.
- El ajuste de curvas realizado por este método proporciona buenos resultados, aún cuando en la prueba de presión real se considere daño a la formación y factor de almacenamiento.
- Se proponen correlaciones empíricas y un procedimiento para la obtención de valores iniciales muy aproximados a los reales, con un error razonable que permite la obtención de los valores reales de forma rápida.

Lo más adecuado para generar cada curva, es que se utilice un número considerable de puntos que pueda definirla correctamente. Para esta trabajo, por ejemplo, se graficaron alrededor de diez mil puntos por curva.

En este trabajo, la construcción de las correlaciones empíricas se basa en curvas que no consideran el daño a la formación ni el factor de almacenamiento; sin embargo, debido a que estos factores sí son considerados en el modelo propuesto, se recomienda para trabajos futuros el desarrollo de correlaciones empíricas basado en curvas generadas tomando en cuenta dichos factores para obtener una mejor aproximación.

NOMENCLATURA

B	= factor de volumen de la formación
c	= compresibilidad, [psi ⁻¹]
c_f	= compresibilidad total de la fractura, [psi ⁻¹]
c_m	= compresibilidad total de la matriz, [psi ⁻¹]
C_D	= factor de almacenamiento, adimensional
$f(h)$	= función de distribución del tamaño de bloque
$g(s_D)$	= parámetro en el argumento de la función de Bessel
h	= tamaño variable de bloque de matriz, [pies]
h_D	= tamaño de bloque de matriz, adimensional
h_f	= ancho de la fractura, [pies]
h_{\min}	= tamaño de bloque mínimo, [pies]
h_{\max}	= tamaño de bloque máximo, [pies]
k_f	= permeabilidad de la fractura, [md]
k_m	= permeabilidad de la matriz, [md]
$K_0(x)$	= función de Bessel modificada, segundo tipo, cero orden
$K_1(x)$	= función de Bessel modificada, segundo tipo, primer orden
$I_0(x)$	= función de Bessel modificada, primer tipo, cero orden
$I_1(x)$	= función de Bessel modificada, primer tipo, primer orden
p_{Df}	= presión de la fractura, adimensional
p_i	= presión inicial, [psi]
p_{Dm}	= presión de la matriz, adimensional
PSS	= estado pseudoestacionario (pseudo - steady state)
q	= gasto, [BCE/D]

$Q(h)$	= contribución de flujo de un bloque de matriz de tamaño h, [horas ⁻¹]
Q_m	= contribución de flujo de la matriz acumulativa, [horas ⁻¹]
r	= coordenada radial, [pies]
r_D	= coordenada radial, adimensional
r_w	= radio del pozo, [pies]
s	= saturación, adimensional
s_D	= parámetro de Laplace, adimensional
S	= factor de daño, adimensional
t	= tiempo, [horas]
t_D	= tiempo, adimensional
USS	= estado transitorio (unsteady state)
x	= argumento de la función de Bessel
σ	= factor de forma
λ	= coeficiente de flujo interporoso, adimensional
λ_{\max}	= coeficiente de flujo interporoso máximo, adimensional
$\lambda_{\max 0}$	= coeficiente de flujo interporoso máximo obtenido de las correlaciones empíricas, adimensional
λ_{\min}	= coeficiente de flujo interporoso mínimo, adimensional
$\lambda_{\min 0}$	= coeficiente de flujo interporoso mínimo obtenido de las correlaciones empíricas, adimensional
μ	= viscosidad, [cp]
ξ	= coordenadas normales a la interfase matriz – fractura, [pies]
ξ_D	= coordenadas normales a la interfase matriz – fractura, adimensionales
ϕ_f	= porosidad de la fractura, adimensional
ϕ_m	= porosidad de la matriz, adimensional
ω_f	= coeficiente de almacenamiento de la fractura, adimensional

ω_{f0} = coeficiente de almacenamiento de la fractura obtenido de las correlaciones empíricas, adimensional

ω_m = coeficiente de almacenamiento de la matriz, adimensional

ω_{m0} = coeficiente de almacenamiento de la matriz obtenido de las correlaciones empíricas, adimensional

BIBLIOGRAFÍA

1. Rangel Germán, E.: “Apuntes de Caracterización Estática y Dinámica de Yacimientos Naturalmente Fracturados”. Facultad de Ingeniería, UNAM 2007.
 2. Warren J.E y Root P.J.: “Behaviour of Naturally Fractured Reservoirs”. *Society of Petroleum Engineers Journal*. (septiembre, 1963), 245 – 55.
 3. Kazemi, H.: “Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distributions”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, (diciembre, 1969), 451 – 62.
 4. De Swaan, O. A.: “Analytical Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, (junio, 1976).
 5. Bourdet, D. y Gringarten, A.: “Determination of Fissured Volume and Block Size in Naturally Fractured Reservoirs by Type – Curve Analysis”, artículo SPE 9293 presentado en la 1980 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, TX, 21 – 24 septiembre.
 6. Bourdet, D., Ayoub, J. A., Whittle, T. M. y Pirard, Y.M.: “Interpreting Well Test in Fractured Reservoirs”, *World Oil* (octubre, 1983), 77 - 87.
 7. Streltsova, T. D.: “Well Pressure Behavior of a Naturally Fractured Reservoir”, artículo SPE 10782 presentado en el SPE 1982 California Regional Meeting, San Francisco, CA. marzo 24 – 26 de 1982.
 8. Cinco, L. H., Samaniego, V. F. y Kucuk, F.: “The Pressure Transient Behavior for Naturally Fractured Reservoir with Multiple Block Size”, artículo de SPE 14168, presentado en la 60th Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, NV, septiembre 22 – 25 de 1985.
 9. Belani, A. K.: *Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs*, tesis de maestría, U. de Stanford; agosto, 1988.
 10. Belani, A. K. y Jalali Yazdi, Y.: “Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs”, artículo SPE 18171, presentado en la 1988 Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, TX, octubre 2 – 5 de 1988.
 11. Lee, J. y Wattenbarger R.: *Gas Reservoir Engineering*, Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, 1996.
 12. Stehfest, H.: “Numerical Inversion of Laplace Transform”, *Communications of the ACM* (enero, 1970), volumen 13, No. 1, 47 – 49.
-

13. Earlougher, R. C., Jr.: “*Advances in Well Test Analysis*”, monografía volumen 5 de la serie Henry L. Doherty, Society of Petroleum Engineering of AIME, Nueva York 1977.
14. Rodríguez, N. R.: *Caracterización de Yacimientos de Doble Porosidad con Tamaño Múltiple de Bloques de Matriz*, tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, febrero de 2000.
15. Jalali Yazdi, Y y Ershaghi, I.: “Pressure Transient Analysis of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs”, artículo SPE 16341, presentado en el 1987 SPE California Regional Meeting, Ventura, CA, abril 8 – 10.
16. Cinco, L. H. y Samaniego, V. F.: “Pressure Transient Analysis for Naturally Fractured Reservoirs”, artículo SPE 11026 presentada en la SPE 57th Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Nueva Orleans, L. A, septiembre 26 – 29, 1982.
17. Bourgeois, M. J. y Horne, R. N.: “Well – Test – Model Recognition with Laplace Space”, artículo SPE 22682, presentado en la 1991 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas. Octubre 1991.
18. Bourdet, D., Alagoa, A., Ayoub, J. A. y Pirard, Y. M.: “New Type Curves Aid Analysis of Fissured Zone Well Tests “, *World Oil*, (abril 1984), 111 – 126.
19. Sabet, M.: *Well Test Analysis*, Gulf Publishing, Houston (1991).
20. Horne, R. N.: *Modern Well Test Analysis: A Computer Aided Approach*, 2^{da} edición, Ed. Petroway Inc., Palo Alto CA, 1995.
21. Chilingarian, G. V., Mazzullo, S. J., Rieke, H. H., y cols.: *Carbonate Reservoir Characterization: A Geologic – Engineering Analysis, Part II*, Developments in Petroleum Science, 44; Elsevier (1994).
22. Bourdet, D., Ayoub, J. A. y Pirard Y. M.: “Use of Pressure Derivative in Well – Test Interpretation “, *World Oil*, (mayo 1983), 95 – 106.
23. Horner, D. R.: “Pressure Build – Up in Wells” *Proc.*, Tercer Congreso Mundial del Petróleo, E. J. Brill, Leiden (1951) 11, 503.
24. Curtis F. G.: *Análisis Numérico*, 2^{da} edición, Ed. Alfaomega, California Polytechnic State University, 248 – 252.

APÉNDICE A: DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA DE LA PRESIÓN

❖ Función derivada de la presión en el dominio del tiempo

Utilizando la definición de la transformada de la derivada de Laplace se tiene:

$$L\left\{\left.\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right|_{r_D=1}\right\} = s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\Big|_{r_D=1} - p_{Df}(r_D, 0)$$

De las condiciones iniciales se sabe que $p_{Df}(r_D, 0) = 0$; entonces:

$$L\left\{\left.\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right|_{r_D=1}\right\} = s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\Big|_{r_D=1};$$

donde $\overline{p_{Df}}(s_D)\Big|_{r_D=1} = \overline{p_{Dw}}$ y $\overline{p_{Dw}} = \frac{K_0(x) + S xK_1(x)}{s_D[C_D s_D[K_0(x) + S xK_1(x)] + xK_1(x)]}$; por lo tanto:

$$s_D \overline{p_{Dw}} = \frac{K_0(x) + S xK_1(x)}{C_D s_D[K_0(x) + S xK_1(x)] + xK_1(x)}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$L^{-1}\{s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)\} = L^{-1}\left\{\frac{K_0(x) + S xK_1(x)}{C_D s_D[K_0(x) + S xK_1(x)] + xK_1(x)}\right\} = \left.\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right|_{r_D=1} = \frac{dp_{Dw}}{dt_D}; \text{ es decir:}$$

$$\frac{dp_{Dw}}{dt_D} = L^{-1}\{s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)\}.$$

Haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{dp_{Dw}}{dt_D} \frac{d \ln t_D}{d \ln t_D} = L^{-1}\{s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)\}$$

$$\frac{dp_{Dw}}{d \ln t_D} \frac{d \ln t_D}{dt_D} = L^{-1}\{s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)\}$$

$$\frac{dp_{Dw}}{d \ln t_D} = \frac{L^{-1}\{s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)\}}{\frac{d \ln t_D}{dt_D}}$$

como $\frac{d \ln t_D}{dt_D} = \frac{1}{t_D}$, entonces:

$$\frac{dp_{Dw}}{d \ln t_D} = \frac{L^{-1}\{s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)\}}{\frac{1}{t_D}} = t_D L^{-1}\{s_D \overline{p_{Dw}}(s_D)\},$$

de donde finalmente:

$$\boxed{\frac{dp_{Dw}}{d \ln t_D} = t_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D}}$$

❖ Función derivada de la presión en el dominio de Laplace

Considerando la transformada de Laplace siguiente:

$$L\left\{\left.\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right|_{r_D=1}\right\} = s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\Big|_{r_D=1} - p_{Df}(r_D, 0);$$

lo que implica que:

$$s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\Big|_{r_D=1} = L\left\{\left.\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right|_{r_D=1}\right\};$$

por lo tanto, derivando con respecto a s se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\Big|_{r_D=1}]}{ds_D} = \frac{d\left[L\left\{\left.\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right|_{r_D=1}\right\}\right]}{ds_D};$$

usando la regla de la cadena:

$$\frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{ds_D} \frac{d \ln(1/s_D)}{d \ln(1/s_D)} = \frac{d\left[L\left\{\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right\}_{r_D=1}\right]}{ds_D};$$

$$\frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{d \ln(1/s_D)} \frac{d \ln(1/s_D)}{ds_D} = \frac{d\left[L\left\{\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right\}_{r_D=1}\right]}{ds_D}.$$

Como $\frac{d \ln(1/s_D)}{ds_D} = -\frac{1}{s_D}$; entonces:

$$\frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{d \ln(1/s_D)} \left(-\frac{1}{s_D}\right) = \frac{d\left[L\left\{\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right\}_{r_D=1}\right]}{ds_D};$$

$$\frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{d \ln(1/s_D)} = -s_D \frac{d\left[L\left\{\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right\}_{r_D=1}\right]}{ds_D}.$$

Finalmente, como $s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\big|_{r_D=1} = L\left\{\frac{dp_{Df}}{dt_D}\right\}_{r_D=1}$; sustituyendo en la expresión anterior se obtiene lo siguiente:

$$\boxed{\frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{d \ln(1/s_D)} = -s_D \frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{ds_D}}$$

Por medio de un procedimiento similar también es posible obtener la expresión siguiente:

$$\boxed{\frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{d \ln(s_D)} = s_D \frac{d\left[s_D \overline{p_{Df}}(s_D)\right]_{r_D=1}}{ds_D}}$$

APÉNDICE B: ALGORITMO DE STEHFEST

El algoritmo de Stehfest (1970)¹² proporciona una aproximación de la transformada inversa de Laplace para una transformada dada; dicho en otras palabras, dada la transformada de Laplace $\overline{p_{Dw}}(s)$, este algoritmo proporciona un valor aproximado $p_{Dw}(a)$ de la inversa $p_{Dw}(t_D)$ para un tiempo t_D determinado.

Esta evaluación se realiza de la siguiente manera:

$$p_{Dw}(a) = \frac{\ln 2}{t_D} \sum_{i=1}^N V_i p\left(\frac{\ln 2}{t_D} i\right), \quad (\text{B.1})$$

donde:

$\frac{\ln 2}{t_D} i$ en $p\left(\frac{\ln 2}{t_D} i\right)$ hará las veces de s , el parámetro de la transformada de Laplace,

N es un parámetro de convergencia del algoritmo, que como puede observarse es el límite superior de la suma y su valor debe corresponder a un número par que dependerá de la precisión que se utilice en el cálculo numérico;

V_i se define de la manera siguiente:

$$V_i = (-1)^{N/2+1} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}, \quad (\text{B.2})$$

donde:

$\min(i, N/2)$ es el límite superior de la suma, e implica que para cada caso debe seleccionarse el número menor entre i y $N/2$; k representa el límite inferior de la suma y es determinado usando enteros aritméticos.

Para utilizar el algoritmo de Stehfest es necesario seleccionar una N . Como las V_i dependen solamente de N , necesitan ser calculadas sólo una vez para cada valor de N escogido. En principio, entre más grande sea el valor de N , más exacta será la solución numéricamente invertida. Sin embargo, en la práctica, N está limitada por errores de truncamiento. Una característica de las V_i es que sus valores absolutos tienden a aumentar conforme N incrementa. Es recomendable probar varios valores de N para revisar si se obtiene el mismo resultado; en estos casos es necesaria una gran precisión aritmética.

De acuerdo con lo descrito anteriormente, para propósitos de esta tesis con el fin de encontrar la mejor aproximación se calcularon los valores de V_i para $N = 8$, $N = 10$ y $N = 12$; estos valores se presentan a continuación:

V_i	$N=8$	$N=10$	$N=12$
V_1	-0.33333333	0.08333333	-0.01666667
V_2	48.3333333	-32.0833333	16.0166667
V_3	-906.000000	1279.000000	-1247.00000
V_4	5464.66667	-15623.6667	27554.3333
V_5	-14376.6667	84244.16670	-263280.833
V_6	18730.0000	-236957.5000	1324138.70
V_7	-11946.6667	375911.6670	-3891705.53
V_8	2986.66667	-340071.667	7053286.33
V_9		164062.5000	-8005336.50
V_{10}		-32812.50000	5552830.50
V_{11}			-2155507.2
V_{12}			359251.200