



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

Implementación de algoritmos por modos  
deslizantes continuos (CSMC) en un  
manipulador serial de tres grados de  
libertad y análisis comparativo con  
controles clásicos

TESIS

Que para obtener el título de  
Ingeniero Eléctrico Electrónico

PRESENTA

José Alejandro León Sánchez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Rafael Iriarte Vivar-Balderrama



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2024



Jurado asignado

Presidente: Dr. Leonid Fridman  
Secretario: Dr. Hoover Mujica Ortega  
Vocal: Dr. Rafael Iriarte Vivar-Balderrama  
1<sup>er</sup> suplente: M.I. Ulises Arturo Pérez Ventura  
2<sup>do</sup> suplente: Dr. Juan Gustavo Rueda Escobedo

Ciudad Universitaria, Departamento de Control y Robótica, Laboratorio de Modos Deslizantes.

Ciudad de México.

Director de tesis

---

Dr. Rafael Iriarte Vivar-Balderrama



## Dedicatoria

A mis padres, Claudia y Odilón, quienes han sacrificado tanto para verme triunfar. Gracias a ustedes, soy la persona que soy hoy. Si alguna vez logro ser solo una fracción de lo extraordinarios que son como seres humanos, me consideraré afortunado. Los amo.

A mi amada Isabel, testigo de mis altibajos y mi motivación a cada paso del camino. Tu paciencia infinita y tu amor incondicional han sido mi refugio en los momentos difíciles. Este trabajo lleva la marca de tu incommensurable amor. Te amo mi Chabelupis.



## Agradecimientos

Primero, quiero agradecer a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, por abrirme las puertas, así como a su valiosa comunidad; a los docentes y compañeros que me brindaron su apoyo durante mi formación como ingeniero.

A mi profesor y director de tesis, el Dr. Rafael Iriarte, por haberme brindado su confianza y haberme guiado en este proyecto, dándome todas las herramientas necesarias para su desarrollo. Así como al Dr. Leonid Fridman, por su invaluable apoyo y asesoría. A ambos les agradezco por haberme abierto las puertas del laboratorio de Modos Deslizantes y por inculcarme la pasión por la ingeniería de control.

Agradezco también a todos mis compañeros en el Laboratorio de Modos Deslizantes, especialmente al Dr. Luis Ovalle, M.I. Andrés González, M.I. Antonio Ortega, Ing. Alejandro Lagunas e Ing. Luis Silva por su colaboración invaluable en el desarrollo teórico y las pruebas que fundamentan este trabajo.

A mis padres y a mi familia, a mis hermanas y mi abuelita, quienes han sido mi sostén inquebrantable.

A Isabel, mi compañera y fuente de motivación.

A todos ellos los tengo presentes en cada una de las páginas de este trabajo. Gracias a todos y todas por su apoyo.



## Resumen

En esta tesis, se exploran estrategias de control robusto basadas en modos deslizantes continuos para manipuladores robóticos, enfocándose en la integración del Algoritmo Super-Twisting Multivariable. Este enfoque busca abordar las limitaciones inherentes al modelado y a la implementación práctica de los controladores basados en modelo. El estudio comienza con el modelado dinámico del robot manipulador Quanser QArm, un robot de cuatro grados de libertad (GDL), simplificado a tres GDL para facilitar el análisis y control.

Posteriormente, se implementan controladores clásicos, como el Controlador por Par Calculado y el Controlador Slotine-Li, y se evalúa su desempeño en el seguimiento de trayectorias. No obstante, debido a las incertidumbres paramétricas y a las dinámicas no modeladas presentes en el sistema, estos controladores pueden presentar limitaciones en su rendimiento. Para mitigar estos desafíos, se propone la adición de un término robusto basado en el Algoritmo Super-Twisting (STA) multivariable.

Los resultados experimentales muestran una mejora notable en el rendimiento del seguimiento de trayectorias al incorporar el STA multivariable, evidenciando una reducción en los efectos de las dinámicas no modeladas e incertidumbres del sistema. Además, los esquemas de control presentados no muestran un fenómeno de chattering significativo, el cual es común en los controladores de modos deslizantes convencionales.

Finalmente, se discuten las posibles extensiones de este trabajo, incluyendo el análisis de estabilidad de los controladores propuestos, la sintonización analítica de ganancias, y la evaluación de versiones mejoradas del STA multivariable, así como la exploración de otros esquemas de control robusto.



# Índice general

Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xv
Acrónimos	xvii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Justificación . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Contribuciones . . . . .	5
1.5. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Manipuladores robóticos . . . . .	9
2.1.1. Definición y clasificación . . . . .	10
2.1.2. Importancia y aplicaciones . . . . .	11
2.2. Actuadores . . . . .	12
2.2.1. Tipos de actuadores . . . . .	12
2.2.2. Motores de corriente directa y servo-motores . . . . .	13
2.3. Cinemática . . . . .	13
2.3.1. Cinemática directa . . . . .	13
2.4. Jacobiano Geométrico . . . . .	16
2.4.1. Matrices antisimétricas . . . . .	17
2.5. Dinámica de robots manipuladores . . . . .	18
2.5.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	18
2.5.2. Energía cinética . . . . .	19
2.5.3. Energía potencial . . . . .	20
2.5.4. Ecuaciones de movimiento . . . . .	21
2.6. Control de robots manipuladores . . . . .	22
2.6.1. Controlador por Par Calculado . . . . .	23
2.6.2. Controlador Slotine-Li . . . . .	24

<b>3. Modelo del Robot Manipulador QArm</b>	<b>25</b>
3.1. Descripción del robot manipulador Quanser QArm	25
3.1.1. Características y parámetros	25
3.1.2. Espacio de trabajo	26
3.2. Modelo dinámico del QArm	28
3.2.1. Cinemática directa	29
3.2.2. Jacobiano Geométrico	31
3.2.3. Matriz de inercia y Energía cinética	32
3.2.4. Matriz de Coriolis y Centrifuga	34
3.2.5. Energía potencial y Vector de gravedad	36
3.3. Conversión de Par a PWM	37
<b>4. Control por Modos Deslizantes</b>	<b>41</b>
4.1. Algoritmo Super-Twisting	43
4.2. Par Calculado + Algoritmo Super-Twisting (STA, por sus siglas en inglés) multivariable	45
4.3. Slotine-Li + STA multivariable	45
<b>5. Implementación de controladores en el QArm</b>	<b>47</b>
5.1. Trayectorias de referencia	47
5.2. Simulaciones	49
5.2.1. Controlador por Par Calculado	50
5.2.2. Controlador Slotine-Li	52
5.2.3. Controlador Par Calculado + STA multivariable	53
5.2.4. Controlador Slotine-Li + STA multivariable	56
5.3. Resultados Experimentales	58
5.3.1. Controlador por Par Calculado	58
5.3.2. Controlador Slotine-Li	58
5.3.3. Controlador Par Calculado + STA multivariable	60
5.3.4. Controlador Slotine-Li + STA multivariable	60
<b>6. Conclusiones</b>	<b>63</b>
6.1. Trabajo Futuro	63
<b>Apéndice A. Modelado dinámico del QArm</b>	<b>65</b>
A.1. Cinemática directa	65
A.2. Jacobiano Geométrico	68
A.3. Matriz de inercia y Energía cinética	76
A.4. Matriz de Coriolis y Centrifuga	80
A.5. Energía potencial	84
A.6. Vector de Gravedad	85
<b>Referencias</b>	<b>87</b>

# Índice de figuras

2.1. Tipos de articulaciones en un robot manipulador. . . . .	11
2.2. Imagen de un Robot ABB en la industria. Créditos: © Peter Potrowl . . . . .	12
2.3. Tipos de cadenas cinemáticas . . . . .	14
3.1. Robot manipulador Quanser QArm en el Laboratorio de Modos Deslizantes de la UNAM	26
3.2. Diagrama de alambre del robot manipulador Quanser QArm . . . . .	27
3.3. Espacio de trabajo del robot manipulador QArm . . . . .	28
3.4. Diagrama de alambre del robot manipulador QArm . . . . .	29
3.5. Gráfica de rendimiento del motor XM540. . . . .	38
3.6. Comparación de la relación lineal y la relación polinomial de segundo orden. . . . .	39
3.7. Relación de conversión de par a corriente. . . . .	39
4.1. Visualización de la trayectoria de un sistema de segundo orden arbitrario. . . . .	42
4.2. Espacio de estados con superficie deslizante . . . . .	42
4.3. Comparación de la función signo y la potencia signada . . . . .	44
5.1. Trayectorias de referencia y sus derivadas para cada articulación. . . . .	48
5.2. Modelo CAD del robot manipulador QArm. . . . .	49
5.3. Función de perturbación para las simulaciones. . . . .	50
5.4. Modelo de Simulink para las simulaciones. . . . .	51
5.5. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador por Par Calculado sin perturbación.	51
5.6. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador por Par Calculado con perturbación.	52
5.7. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li sin perturbación. . .	52
5.8. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li con perturbación. . .	53
5.9. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Par Calculado + STA sin perturbaciones . . . . .	54
5.10. Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Par Calculado + STA sin perturbaciones . . . . .	54
5.11. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Par Calculado + STA con perturbaciones . . . . .	55
5.12. Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Par Calculado + STA con perturbaciones . . . . .	55

5.13. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li + STA sin perturbaciones	56
5.14. Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Slotine-Li + STA sin perturbaciones . . . . .	56
5.15. Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li + STA con perturbaciones . . . . .	57
5.16. Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Slotine-Li + STA con perturbaciones . . . . .	57
5.17. Modelo de simulink para la implementación de controladores en el QArm. . . . .	58
5.18. Errores de seguimiento para el controlador por Par Calculado. . . . .	59
5.19. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li. . . . .	59
5.20. Errores de seguimiento para el controlador Par Calculado + STA multivariable. . . . .	60
5.21. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Par Calculado + STA multivariable. . . . .	61
5.22. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li + STA multivariable. . . . .	61
5.23. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Slotine-Li + STA multivariable. . . . .	62
A.1. Diagrama de alambre del manipulador QArm . . . . .	66
A.2. Diagrama de alambre al centro de masa del primer eslabón . . . . .	68
A.3. Diagrama de alambre al centro de masa del segundo eslabón . . . . .	70
A.4. Diagrama de alambre al centro de masa del tercer eslabón . . . . .	72
A.5. Diagrama de alambre al centro de masa del cuarto eslabón . . . . .	74

# Índice de tablas

2.1. Tabla de Jacobianos según tipo de articulación . . . . .	17
3.1. Parámetros geométricos y dinámicos del robot manipulador QArm . . . . .	27
3.2. Parámetros de Denavit-Hartenberg del robot manipulador QArm . . . . .	30
5.1. Parámetros de las trayectorias . . . . .	47
5.2. Amplitudes y frecuencias de las senoides . . . . .	50
A.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg del manipulador QArm . . . . .	65
A.2. Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 1 . . . . .	68
A.3. Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 2 . . . . .	69
A.4. Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 3 . . . . .	71
A.5. Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 4 . . . . .	74



# Acrónimos

**STA** Algoritmo Super-Twisting. XII, XIII, XIV, 2, 5, 6, 43, 44, 45, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63

**SMC** Control por Modos Deslizantes. 2, 5, 6

**CSMC** Control por Modos Deslizantes Continuo. 2, 4, 6

**GDL** Grados de Libertad. 2, 10, 19, 21, 25, 44

**ISO** Organización Internacional de Normalización. 10

**PD** Control Proporcional-Derivativo. 23, 24, 45, 51

**PWM** Modulación por ancho de pulso. 25, 26, 37, 38, 40

**DC** Corriente Directa. 43

**HOSM** Modos Deslizantes de Alto Orden. 43

**CAD** Diseño Asistido por Computadora. 49



# Capítulo 1

## Introducción

Los manipuladores robóticos, también conocidos como brazos robóticos o simplemente **manipuladores**, han emergido como componentes esenciales en una gran variedad de aplicaciones, sobre todo en el ámbito industrial. Hasta finales de los años ochenta los únicos robots reales eran aquellos dedicados a la manufactura, a día de hoy están firmemente asentados, con una tecnología bien desarrollada y un amplio mercado de fabricantes. El trabajo que este tipo de robots realiza es básicamente el de manipular piezas o herramientas en un entorno de trabajo [Barrientos, *et al.*, 2007].

La omnipresencia de manipuladores robóticos en la sociedad contemporánea subraya su importancia debida a su amplia gama de aplicaciones, desde entornos industriales, donde optimizan procesos de fabricación, hasta campos de investigación en robótica avanzada, donde desempeñan un papel fundamental en la exploración de entornos hostiles. Los manipuladores son herramientas versátiles que mejoran la eficiencia y seguridad en la ejecución de diversas tareas.

El control de robots es un tema central dentro de la robótica. Consiste en estudiar cómo hacer que un robot manipulador haga lo que se desea de forma *automática*; por lo tanto, consiste en diseñar *controladores* de robots. Normalmente, estos toman la forma de ecuaciones o algoritmos que son implementados de manera computacional y pasan a formar parte del llamado *Sistema de Control* del robot [Kelly, *et al.*, 2005].

La complejidad inherente a la dinámica y comportamiento de los manipuladores exige la implementación de estrategias de control eficientes y robustas. Este control no solo garantiza la precisión en la ejecución de tareas, sino que también contribuye a la seguridad y adaptabilidad de los manipuladores en entornos dinámicos y cambiantes.

En el ámbito de control de manipuladores, los algoritmos convencionales como el Controlador por Par Calculado [Spong y Vidyasagar, 1989] y el Controlador Slotine-Li [Slotine y Li, 1987] han demostrado su eficacia en numerosas aplicaciones. Sin embargo, cada uno presenta limitaciones específicas en términos de robustez y desempeño en ambientes inciertos y perturbados.

Esta investigación explora y destaca una categoría de algoritmos de control conocida como Control por Modos Deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés). Estos algoritmos, caracterizados por su robustez frente a perturbaciones e incertidumbres en el modelo, ofrecen una alternativa valiosa a los métodos convencionales antes mencionados. A partir de controladores basados en modelo, se propone un término adicional basado en Control por Modos Deslizantes Continuo (CSMC, por sus siglas en inglés), que busca mejorar la precisión y robustez del sistema. En particular, se considera el STA multivariable debido a que es bien sabido que los SMC de segundo orden ofrecen una mejoría en cuanto a la reducción del fenómeno de *chattering* [Boiko y Fridman, 2005].

En el desarrollo de la presente tesis, se aborda inicialmente el modelado dinámico del manipulador Quanser Qarm, un robot de 4 Grados de libertad (GDL) que se reduce a 3 GDL para simplificar el análisis y el diseño del controlador. Posteriormente, se presenta la implementación de controladores clásicos basados en modelo, en específico dos que compensan la dinámica del robot, como lo son el Controlador por Par Calculado y el Controlador Slotine-Li. Finalmente, se propone un CSMC, específicamente el STA multivariable como una entrada robusta a los controladores clásicos y se realiza una verificación experimental.

## 1.1. Motivación

Esta investigación aborda el desafío de la implementación de algoritmos de control en robots manipuladores, específicamente ante un modelo con parámetros inciertos. Estas incertidumbres pueden surgir de diversas fuentes, como variaciones en la carga, fricciones no lineales, dinámicas no modeladas, entre otros. La presencia de estas incertidumbres afecta el rendimiento y la estabilidad de los manipuladores robóticos, especialmente en escenarios donde se requiere cierto nivel de rendimiento y precisión. Existen varias aproximaciones para lidiar con este problema, como técnicas de control adaptable y control robusto.

Los métodos clásicos de control de manipuladores, como el Controlador por Par Calculado y el controlador Slotine-Li, requieren un conocimiento preciso del modelo del sistema y no son robustos ante incertidumbres y perturbaciones. Por otro lado, los algoritmos de control adaptable han demostrado ser efectivos en manipuladores, pero suelen tener mayor complejidad y un mayor costo computacional. Finalmente, los algoritmos de control robustos, y específicamente los algoritmos de SMC, han demostrado ser una alternativa eficaz para lidiar con incertidumbres y perturbaciones en sistemas no lineales. Más aún, los CSMC, son una solución atractiva debido a que mitigan el efecto del fenómeno de *chattering* presente en los SMC convencionales.

Esta tesis busca explorar la eficacia y rendimiento de los CSMC como una entrada adicional robusta a los algoritmos clásicos, específicamente los basados en modelo que aplican un principio de

compensación de la dinámica del manipulador.

Las implicaciones de esta investigación son de gran alcance. Mejora la robustez y efectividad de los algoritmos de control en manipuladores robóticos, lo que a su vez contribuye a la eficiencia y seguridad en la ejecución de tareas. Se presenta una metodología robusta que es viable para su implementación en situaciones reales ante la presencia de incertidumbres y una clase de perturbaciones. También proporciona una perspectiva valiosa sobre la implementación de algoritmos por modos deslizantes, que comúnmente han sido estigmatizados por su fenómeno de *chattering*.

Además, existen muchas posibles direcciones futuras y problemas abiertos que pueden surgir de este trabajo. Estos incluyen el análisis de estabilidad, diseño de ganancias, entre otras.

## 1.2. Justificación

El control preciso de manipuladores es una necesidad crucial en diversas aplicaciones industriales y de investigación. La capacidad de estos dispositivos para ejecutar movimientos con exactitud determina la eficacia de tareas como ensamblajes automatizados, cirugía robótica, y exploración espacial. Lograr este nivel de precisión requiere sistemas de control avanzados que puedan gestionar la complejidad de la dinámica de los manipuladores.

Tradicionalmente, los sistemas de control de manipuladores se basan en controladores que emplean modelos matemáticos detallados de la dinámica del sistema. Estos controladores, a través de técnicas como la linealización por realimentación (Feedback Linearization), buscan transformar el sistema no lineal original en uno que se comporte de manera lineal en lazo cerrado. Este enfoque permite diseñar controladores que son fáciles de analizar y sintonizar, facilitando así el logro de un control preciso.

Sin embargo, el éxito de los controladores basados en modelos depende en gran medida del conocimiento exacto del modelo dinámico del manipulador, así como de sus parámetros. La precisión de la ecuación de lazo cerrado está directamente relacionada con la fidelidad del modelo utilizado. En un entorno ideal, donde el modelo matemático representa perfectamente la realidad, estos controladores pueden ofrecer un gran rendimiento.

En la práctica, no obstante, la obtención de un modelo dinámico exacto del manipulador es extremadamente difícil. Diversos factores, como variaciones en las propiedades mecánicas, incertidumbres en el modelado, y la presencia de perturbaciones externas, hacen que los modelos dinámicos disponibles sean aproximaciones imperfectas. Esta discrepancia entre el modelo y la realidad puede degradar significativamente el desempeño del controlador basado en modelo, resultando en errores, comportamientos no deseados y sobreestimación de las ganancias del controlador.

De manera más formal, se puede entender una formulación del problema de la siguiente manera: considere el modelo dinámico de un manipulador robótico, como se muestra en la ecuación 1.1.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u \quad (1.1)$$

En esta ecuación,  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ , y  $G(q)$  representan la matriz de inercia, las matrices de Coriolis y centrífuga, y el vector de gravedad del manipulador, respectivamente. Además,  $u$  es la entrada de control.

Si se desea controlar este sistema se debe elegir una entrada  $u$  que logre un objetivo de control propuesto, una clase de controladores comunes para robots manipuladores son los controladores basados en modelo. De forma general, un controlador basado en modelo, que busca compensar la dinámica del manipulador, se puede expresar como se muestra en la ecuación 1.2.

$$u = M(q)a_q + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (1.2)$$

Sin embargo, en la práctica, el modelo dinámico del manipulador no es conocido exactamente, sino que se tiene una estimación  $\hat{M}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$ , y  $\hat{G}(q)$ . Por lo tanto, el controlador real se puede expresar como se muestra en la ecuación 1.3.

$$u = \hat{M}(q)a_q + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \quad (1.3)$$

Aquí,  $\hat{(\cdot)}$  representa una estimación y la variable  $a_q$  es una nueva entrada al sistema que se puede escoger.

Sustituyendo la ecuación 1.3 en la ecuación 1.1, se obtiene la ecuación 1.4, tal que  $\eta$  se conoce como *incertidumbre*.

$$\ddot{q} = a_q + \eta(q, \dot{q}, a_q) \quad (1.4)$$

La incertidumbre  $\eta$  se define como se muestra en la ecuación 1.5, donde  $\tilde{(\cdot)} = (\cdot) - \hat{(\cdot)}$  representa el error o la diferencia entre el modelo ideal y el modelo estimado.

$$\eta = M^{-1}(\tilde{M}a_q + \tilde{C}\dot{q} + \tilde{G}) \quad (1.5)$$

La presencia de la incertidumbre  $\eta$  en la ecuación 1.4 afecta el rendimiento del sistema. Para mitigar estos problemas, se propone la incorporación de una entrada de control robusta mediante Modos Deslizantes Continuos (CSMC). Este enfoque tiene la capacidad de compensar las incertidumbres y perturbaciones presentes en el modelo del manipulador. Los CSMC provocan que el sistema mantenga un desempeño robusto, sobreponiéndose a las variaciones y desconocimientos en la dinámica del sistema. La combinación de controladores basados en modelo con CSMC promete mejorar la precisión del robot manipulador en su tarea de seguimiento de trayectoria, incluso ante un modelo incierto y perturbaciones externas.

### 1.3. Objetivos

El presente trabajo de tesis tiene como objetivos:

#### Objetivo General:

- Implementar algoritmos de control clásicos basados en modelo y añadir un término robustificante basado en Modos Deslizantes Continuos (CSMC), específicamente el STA multivariable para mejorar la precisión y la robustez del sistema en lazo cerrado en presencia de perturbaciones e incertidumbres para un robot manipulador.

#### Objetivos Particulares:

1. Modelar el manipulador Quanser QArm.
2. Implementar algoritmos clásicos para seguimiento de trayectorias.
3. Robustificar el lazo de control mediante controladores basados en Modos Deslizantes Continuos.
4. Realizar una verificación experimental y discusión de los resultados obtenidos.

### 1.4. Contribuciones

En el marco de esta tesis, se han logrado diversas contribuciones que abordan tanto el modelado y control de manipuladores robóticos como la implementación de técnicas avanzadas para mejorar su desempeño. A continuación, se detallan las principales aportaciones de este trabajo:

- Modelado dinámico del robot manipulador QArm: se llevó a cabo un análisis exhaustivo y detallado del manipulador Quanser QArm, un robot de 4 grados de libertad (GDL), para el análisis y el diseño del controlador. Este modelado incluyó la derivación de las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del sistema.
- Implementación de controladores clásicos: se implementaron y evaluaron algoritmos de control clásico basados en modelo. Estos controladores, por Par Calculado y Slotine-Li, fueron implementados para asegurar un seguimiento de trayectorias predefinidas, ofreciendo una base sólida para comparar con métodos más avanzados.
- Robustificación con STA: una contribución central de esta tesis es la propuesta y evaluación de un término robusto adicional basado en Modos Deslizantes Continuos (CSMC), específicamente el STA multivariable. Este término robusto se integró con los controladores clásicos para mejorar la precisión y la estabilidad del sistema en lazo cerrado del robot manipulador, reduciendo los efectos del fenómeno de *chattering* comúnmente asociado con los SMC convencionales.
- Verificación experimental y evaluación del desempeño: se realizó una verificación experimental exhaustiva para evaluar el rendimiento del manipulador bajo el control de los algoritmos propuestos. Los resultados experimentales demostraron la eficacia del enfoque propuesto, mostrando

mejoras significativas en la robustez y precisión del control en presencia de incertidumbres y perturbaciones.

- **Discusión:** se llevó a cabo una discusión comparativa entre los controladores clásicos y los que incorporan el término robustificante basado en el STA. Esto permitió identificar las ventajas y limitaciones de cada enfoque, proporcionando una base para futuras investigaciones en el área del control de robots manipuladores.

## 1.5. Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra dividido en 5 capítulos, cada uno abordando aspectos específicos del modelado y control de manipuladores robóticos. A continuación, se describe la estructura y contenido de cada capítulo:

- **Capítulo 1. Introducción:** este capítulo introduce el tema de la tesis, presentando la motivación detrás del estudio, la justificación de la investigación, los objetivos generales y específicos, y las contribuciones principales. Además, se proporciona una visión general de la organización de la tesis.
- **Capítulo 2. Preliminares:** se abordan los conceptos fundamentales necesarios para comprender el resto del trabajo. Se describe la definición y clasificación de los manipuladores robóticos, su importancia y aplicaciones. Además, se discuten los diferentes tipos de actuadores, con un enfoque en los motores de corriente directa y servo-motores. La cinemática directa de los robots manipuladores y el jacobiano geométrico, también se cubre en este capítulo. Luego, se presentan las ecuaciones dinámicas de los manipuladores utilizando la formulación de Euler-Lagrange para finalmente presentar dos de los controladores más comunes en la literatura, el Controlador por Par Calculado y el Controlador Slotine-Li.
- **Capítulo 3. Modelo del QArm:** este capítulo describe el robot manipulador Quanser QArm, la planta utilizada para la experimentación de este trabajo, incluyendo sus características y parámetros. Se discute el espacio de trabajo del QArm y se presenta el modelo dinámico del robot, abordando aspectos como la cinemática directa, el jacobiano geométrico, la matriz de inercia, las matrices de Coriolis y centrífuga, y el vector de gravedad. También se incluye un apartado sobre la conversión de par a señales PWM, que será útil para la implementación de los controladores en el QArm.
- **Capítulo 4. Control por Modos Deslizantes:** en este capítulo, se introduce el concepto SMC, el fenómeno de *chattering* y se presenta el algoritmo Super-Twisting, una técnica específica de control robusto basado en modos deslizantes continuos CSMC. Se detallan las ventajas de este enfoque y cómo se integra con los controladores clásicos para añadir robustez y mejorar la precisión.
- **Capítulo 5. Implementación de controladores en el QArm:** se presenta la implementación de diferentes algoritmos de control en el manipulador Quanser QArm. Este capítulo incluye el diseño

y la simulación de trayectorias de referencia, así como la evaluación de varios controladores, incluyendo el Controlador por Par Calculado, el Controlador Slotine-Li, y las versiones mejoradas con el algoritmo Super-Twisting multivariable. Se discuten los resultados experimentales y se comparan los diferentes enfoques de control.

- Capítulo 6. Conclusiones: en este capítulo, se presentan las conclusiones finales del trabajo, resumiendo los resultados obtenidos y discutiendo las implicaciones de la investigación, tales como las limitaciones y posibles extensiones. Se destacan las contribuciones principales y se proponen posibles direcciones futuras para la continuación de este trabajo.
- Apéndice A. Modelado dinámico del QArm: este apéndice proporciona detalles adicionales sobre el modelado dinámico del QArm, complementando la información presentada en el Capítulo 3. Se incluyen las derivaciones matemáticas detalladas de la cinemática directa, el jacobiano geométrico, la matriz de inercia, las matrices de Coriolis y centrífuga, la energía potencial, y el vector de gravedad.



# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Manipuladores robóticos

En la industria contemporánea, los actuales requerimientos de calidad y rapidez en la producción demandan una amplia variedad de tecnologías innovadoras. La eficiencia y precisión en la ejecución de tareas se han vuelto fundamentales, y un ejemplo destacado de esta revolución tecnológica son los *robots*, que no solo han transformado la manufactura, sino que también han encontrado aplicaciones en campos tan diversos como la medicina [Burgner-Kahrs, *et al.*, 2015] o la exploración espacial [Sreekanth, *et al.*, 2021].

El auge de la robótica en el mundo nos invita a conocer y estudiar los orígenes de esta disciplina. Es bien sabido que los primeros en acuñar la terminología de robots fueron escritores de ciencia ficción, como es el caso de Isaac Asimov. Muchos de los conceptos traídos de la imaginación de estos escritores han pasado a ser realidades tecnológicas, y a partir de ellas definimos a la disciplina de la robótica.

El término “robot” encuentra sus orígenes en “robota”, que significa *trabajo forzado* en checo. Fue introducido por el escritor checo de ciencia ficción Karel Čapek para nombrar humanoides artificiales, bipedales, que ayudaban a los seres humanos en tareas físicamente difíciles [Kelly, *et al.*, 2005].

Según la Real Academia Española, un robot es una máquina o ingenio electrónico programable que es capaz de manipular objetos y realizar diversas operaciones [RAE, 2024]. Así, más allá de su definición literal, el término “robot” se utiliza en la actualidad para denotar máquinas autónomas. Estas máquinas pueden clasificarse de manera general en:

- **Robots Manipuladores\***
- Robots Móviles
  - Robots en tierra
    - Robots con llantas

- Robots con piernas
- Robots submarinos
- Robots Aéreos

### 2.1.1. Definición y clasificación

Entre los primeros en proponer una definición formal de robot, está la RIA (Robot Institute of America, actualmente Robotic Industries Association), según la cual:

**Robot:** Un robot industrial es un manipulador multifuncional reprogramable, capaz de mover materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales, según trayectorias variables, programadas para realizar tareas diversas [Albus, *et al.*, 1981].

A partir de esta temprana definición es que se han establecido las sucesivas hasta dar con la establecida por la Organización Internacional de Normalización (ISO, por sus siglas en inglés). La cual define en su norma ISO 8373:2021, un robot industrial como:

**Robot:** Manipulador de 3 o más ejes, con control automático, reprogramable, multiaplicación, móvil o no, destinado a ser utilizado en aplicaciones de automatización industrial. Incluye al manipulador (sistema mecánico y actuadores) y al sistema de control (software y hardware de control y potencia) [Organización Internacional de Normalización (ISO), 2021].

Es importante destacar que la definición ISO exige que el robot tenga al menos 3 grados de libertad.

Dentro de estas definiciones se reconocen diferentes clasificaciones de robots, las cuales se basan en criterios como la movilidad, tipo de actuador, tipo de transmisión, capacidad, entre otros. En este sentido, los robots manipuladores son una de las categorías más comunes y versátiles de los robots. Y es fácil reconocer dos principales configuraciones, las cuales son los manipuladores paralelos y los manipuladores en serie o seriales. La diferencia entre estos dos tipos de manipuladores está dada principalmente por la disposición de sus eslabones y articulaciones, en un robot paralelo todos los eslabones del robot se encuentran unidos a un mismo efector final, mientras que en un robot serial los eslabones se encuentran unidos en serie, es decir, el eslabón  $i$  se encuentra unido al eslabón  $i+1$ , estos últimos también son conocidos como brazos articulados [Spong y Vidyasagar, 1989].

En los brazos articulados, una de las principales clasificaciones es descrita por sus grados de libertad (GDL). Los GDL son el número de movimientos independientes que puede realizar un sistema mecánico. Como un manipulador es generalmente una cadena cinemática abierta y como la posición de cada articulación se define generalmente con una sola variable, el número de articulaciones es igual al número de grados de libertad [Craig, 2006].

Cuando nos referimos a los movimientos de un robot manipulador, estos se pueden dividir en dos tipos principales, los movimientos prismáticos y los movimientos rotatorios (ver Figura 2.1). Los movimientos prismáticos son aquellos que se realizan a lo largo de un eje recto, mientras que los

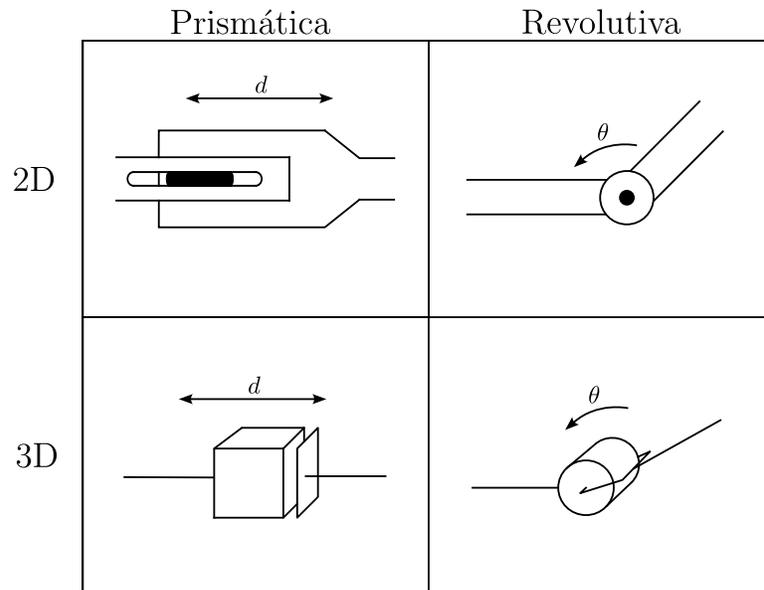


Figura 2.1 Tipos de articulaciones en un robot manipulador.

movimientos rotatorios son aquellos que se realizan alrededor de un eje [Spong y Vidyasagar, 1989], es decir, los tipos de articulaciones se dividen en:

- **Prismáticas (P):** Crean un desplazamiento lineal entre los dos eslabones a los que conectan. Su variable articular es  $q_i = d_i$ .
- **Revolutivas (R):** Crean un desplazamiento angular entre los dos eslabones a los que conectan. Su variable articular es  $q_i = \theta_i$ .

### 2.1.2. Importancia y aplicaciones

Los manipuladores robóticos han emergido como componentes esenciales en una amplia gama de aplicaciones industriales, científicas y comerciales debido a su capacidad para realizar tareas repetitivas con alta precisión y eficiencia. Su importancia radica en su capacidad para automatizar procesos que anteriormente requerían intervención humana, lo que conduce a mejoras significativas en la productividad y la calidad del trabajo. Estos sistemas robóticos encuentran aplicación en diversas industrias, incluyendo la manufactura automotriz, la electrónica, la logística, la atención médica y la exploración espacial. En el ámbito industrial, los manipuladores robóticos se utilizan para tareas de ensamblaje, soldadura, pintura, manipulación de materiales y embalaje, entre otras. Además, su flexibilidad y adaptabilidad los hacen idóneos para entornos cambiantes y peligrosos, donde la seguridad del operador es una preocupación primordial. En el ámbito científico, estos sistemas se utilizan para la investigación en robótica, inteligencia artificial, visión por computadora y control automático, impulsando avances tecnológicos y teóricos en estos campos.



Figura 2.2 Imagen de un Robot ABB en la industria. Créditos: © Peter Potrowl

## 2.2. Actuadores

Para que un brazo articulado sea capaz de realizar movimientos, es necesario contar con transductores de energía-movimiento que generen los desplazamientos lineales o angulares en las articulaciones. Los actuadores en un robot son aquellos dispositivos que convierten energía en movimiento, estos movimientos son indispensables para la realización de tareas.

### 2.2.1. Tipos de actuadores

Dependiendo de cuál sea la energía utilizada por los ejes principales del robot, este puede ser clasificado como:

- Robot neumático
- Robot hidráulico
- Robot Eléctrico

La mayor parte de los robots actuales son de accionamiento eléctrico, pero pueden encontrarse casos particulares de robots con accionamiento hidráulico, neumático, o incluso sistemas híbridos [Barrientos, *et al.*, 2007].

El tipo de actuador más común, y que son el caso a considerar para esta tesis, son los actuadores eléctricos. Los actuadores eléctricos se pueden clasificar dentro de tres tipos diferentes:

- Motores de corriente directa
- Motores de corriente alterna
- Motores paso a paso

### 2.2.2. Motores de corriente directa y servo-motores

Los motores de corriente directa son ampliamente utilizados en la industria debido a su alta eficiencia, capacidad de control, sencillez y precisión.

Los motores de corriente directa son dispositivos electromecánicos que convierten energía eléctrica en energía mecánica. Estos motores están compuestos por un rotor y un estator, y funcionan mediante la interacción de campos magnéticos. La rotación del rotor se produce gracias a la acción de un campo magnético generado por la corriente eléctrica que circula por las bobinas del motor. La dirección y velocidad de rotación del motor pueden ser controladas mediante la variación de la corriente eléctrica que se suministra al motor.

Los servomotores, por otro lado, son dispositivos construidos a partir de los motores de corriente directa, con capacidades adicionales de control y retroalimentación. Se utilizan comúnmente en aplicaciones que requieren un control preciso de la posición, velocidad y/o torque del motor. Los servomotores están equipados con un circuito de control que permite al usuario especificar la posición deseada del eje del motor. Además, incorporan un sistema de retroalimentación que proporciona información en tiempo real sobre la posición actual del motor, lo que permite ajustes precisos para alcanzar la posición deseada.

Para poder llevar a cabo el control de las articulaciones del robot con servomotores, es necesario conocer algunos parámetros y variables del dispositivo. Estos parámetros dependen de la construcción eléctrica y mecánica del servomotor, entre los cuales se pueden reconocer la resistencia e inductancia de la armadura, inercia del motor, fricción viscosa, constante eléctrica y constante mecánica, relación de engranajes, entre otros.

## 2.3. Cinemática

Dentro de la robótica, la cinemática es una rama fundamental, ya que esta se encarga de estudiar el movimiento de los robots sin considerar las fuerzas que intervienen [Barrientos, *et al.*, 2007]. Este estudio comprende una descripción y análisis de las relaciones geométricas y cinemáticas entre los diferentes elementos del robot, como las articulaciones, eslabones y efector final. La cinemática de un robot manipulador se puede dividir en dos categorías principales: cinemática directa y cinemática inversa.

### 2.3.1. Cinemática directa

La cinemática directa de un manipulador robótico se refiere al cálculo de la posición y orientación del efector final del robot en función de las posiciones de las articulaciones. Se deben encontrar las coordenadas cartesianas de la posición del efector final  $(o_x, o_y, o_z)$  y su orientación  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , respecto al marco de la base, esto en función de las variables articulares  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  y tomando en cuenta si las articulaciones son rotativas o prismáticas. La cinemática directa es esencial para determinar

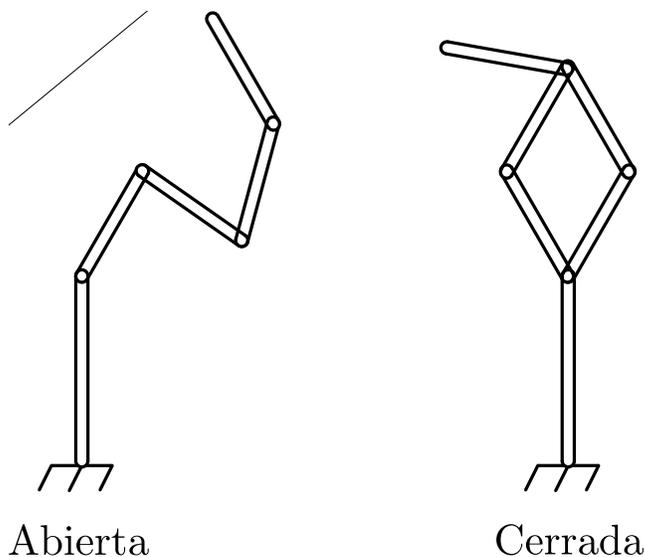


Figura 2.3 Tipos de cadenas cinemáticas

la trayectoria que debe seguir el efector final para alcanzar una posición y orientación deseada [Spong y Vidyasagar, 1989].

Dentro de la cinemática directa es necesario definir el marco de referencia del robot, el cual se compone de un marco de referencia fijo en la **base** del robot y un marco de referencia móvil en el último eslabón, llamado **efector final**. La posición y orientación del efector final se describen mediante una matriz de transformación homogénea, que relaciona las coordenadas del efector final con las coordenadas de la base [Barrientos, *et al.*, 2007].

Además, es importante entender la estructura de una cadena cinemática, que consiste en una sucesión de eslabones conectados por articulaciones. En robótica, existen dos tipos principales de cadenas cinemáticas: abiertas y cerradas. Los robots manipuladores tipo serie se representan mediante cadenas cinemáticas abiertas, que constan de  $n$  articulaciones y  $n + 1$  eslabones. La articulación  $i$  conecta el eslabón  $i - 1$  con el eslabón  $i$  y crea un movimiento relativo lineal (articulaciones prismáticas) o angular (articulaciones de revolución) [Spong y Vidyasagar, 1989].

La representación matemática de la cinemática directa implica el uso de transformaciones homogéneas entre los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón del robot. Estas transformaciones se expresan en función de las variables articulares y permiten calcular la posición y orientación del efector final con respecto al sistema base del robot. En particular, nos interesa encontrar la transformación homogénea del sistema base  $o_0(x_0, y_0, z_0)$  al sistema del efector final  $o_n(x_n, y_n, z_n)$ , en términos de las transformaciones entre sistemas adyacentes. Y a su vez, estas transformaciones deben depender de las variables articulares del robot, i.e.,

$${}^0H_n(\mathbf{q}) = {}^0H_1(q_1) {}^1H_2(q_2) \cdots {}^{n-1}H_n(q_n), \quad (2.1)$$

de forma que cada transformación homogénea está definida por una matriz de  $4 \times 4$ , que se puede expresar como:

$${}^{i-1}H_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}o_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  ${}^0R_i$  es una matriz de rotación de  $3 \times 3$  y  ${}^0o_i$  es un vector de traslación de  $3 \times 1$ , es decir, un vector que indica el desplazamiento en  $x, y, z$  [Spong y Vidyasagar, 1989].

### Método de Denavit-Hartenberg

[Denavit y Hartenberg, 1955] desarrollaron una metodología estándar para la representación de la cinemática de robots manipuladores, conocida como el método de Denavit-Hartenberg (DH), que simplifica la descripción cinemática mediante la introducción de cuatro parámetros asociados a cada articulación.

En esta convención cada una de las transformaciones homogéneas se representa como un producto de cuatro transformaciones elementales, cada una de las cuales se define por un conjunto de parámetros  $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$ . Estos parámetros definen la geometría de la cadena cinemática y permiten calcular la transformación homogénea entre dos eslabones adyacentes. Estas cuatro transformaciones elementales son:

$${}^{i-1}H_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

donde

- $c_{\theta_i} = \cos(\theta_i)$ ,  $s_{\theta_i} = \sin(\theta_i)$ ,  $c_{\alpha_i} = \cos(\alpha_i)$ ,  $s_{\alpha_i} = \sin(\alpha_i)$ ,
- $Rot_{z,\theta_i}$  es una rotación de  $\theta_i$  alrededor del eje  $z$  y
- $Trans_{z,d_i}$  es una traslación de  $d_i$  a lo largo del eje  $z$ .

Estos cuatro parámetros  $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$  generalmente reciben los nombres de longitud del eslabón, ángulo de inclinación, longitud de la articulación y ángulo de rotación, respectivamente.

Para que podamos definir la cinemática directa a través de estos cuatro parámetros, es necesario que se introduzcan las siguientes dos restricciones:

- **[DH1]:** El eje  $x_i$  siempre intersecta al eje  $z_{i-1}$ .
- **[DH2]:** El eje  $z_i$  es perpendicular al eje  $z_{i-1}$ .

Estas dos restricciones se pueden forzar si se realiza la asignación de los sistemas coordenados por medio del siguiente algoritmo de Denavit-Hartenberg (DH):

1. Colocar los ejes  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ . Colocar el eje  $z_{i-1}$  sobre el eje de rotación de la articulación  $i$  si es de revolución, o sobre el eje de traslación si es prismática.
2. Completar el sistema coordenado de la base. Comenzar por  $o_0$  en un punto conveniente sobre el eje  $z_0$ . Colocar el eje  $x_0$  y  $y_0$  de tal forma que formen un sistema dextrógiro ortonormal.
3. Colocar los orígenes  $o_1, o_2, \dots, o_{n-1}$ , de acuerdo con los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Si  $z_{i-1}$  y  $z_i$  se intersectan, colocar  $o_i$  en el punto de intersección. Si son paralelos, colocar  $o_i$  en cualquier lugar conveniente sobre  $z_i$ . Si  $z_{i-1}$  y  $z_i$  no son paralelos ni se intersectan, colocar  $o_i$  en el punto de intersección de las normales comunes a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
4. Colocar los ejes  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  de acuerdo con los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Si  $z_{i-1}$  y  $z_i$  se intersectan, colocar  $x_i$  en la normal al plano que forman  $z_{i-1}$  y  $z_i$  pasando por  $o_i$ . Si no se intersectan, colocar  $x_i$  en la normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$  pasando por  $o_i$ .
5. Colocar los ejes  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  completando los sistemas coordenados dextrógiros.
6. Colocar el sistema coordenado del efector final. Colocar  $o_n$  en el punto más importante o de interés (centro de la pinza, punta de la herramienta, etc.). Luego, colocar el eje  $z_n$  paralelo a  $z_{n-1}$  y pasando por  $o_n$ . Colocar  $x_n$  de tal forma que intersecte a  $z_{n-1}$ . Completar el sistema coordenado dextrógiro colocando a  $y_n$ .
7. Formar una tabla de parámetros DH. Para cada eslabón  $i$ , se asignan los valores de  $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$ , cuyas filas son los números de las articulaciones.
  - $a_i$ : Distancia entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  a lo largo de  $x_i$ .
  - $\alpha_i$ : Ángulo entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  a lo largo de  $x_i$ .
  - $d_i$ : Distancia entre  $o_{i-1}$  y  $o_i$  a lo largo de  $z_{i-1}$ .
  - $\theta_i$ : Ángulo entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$  a lo largo de  $z_{i-1}$ .
8. Formar las  $n$  transformaciones homogéneas  ${}^{i-1}H_i$  a partir de los parámetros DH, de acuerdo a la ecuación 2.3.
9. Obtener la cinemática directa, i.e., la matriz de transformación homogénea  ${}^0H_n$  a partir de la multiplicación de las  $n$  transformaciones homogéneas  ${}^{i-1}H_i$ . Tal como en la ecuación 2.1.

## 2.4. Jacobiano Geométrico

El jacobiano geométrico es una herramienta fundamental en la robótica, ya que permite establecer una relación entre las velocidades articulares y la velocidad lineal y angular del efector final del robot, expresadas habitualmente en el sistema de referencia de la base del robot [Barrientos, *et al.*, 2007].

Una vez que se conocen las matrices de transformación que representan a la cinemática directa, es posible encontrar cuáles son las velocidades del efector final, centro de masa, o cualquier otro punto

de interés sobre el eslabón, respecto a su marco de referencia en la base.

Cuando un robot se está moviendo, tanto las variables articulares  $q_i$  como la posición  ${}^0o_n$  y orientación  ${}^0R_n$  son funciones del tiempo. El objetivo es relacionar la velocidad angular y linear de estos puntos de interés con el vector de velocidades  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ .

Si consideramos un manipulador de n-eslabones, y su matriz de transformación a cada uno de los centros de masa, considerandolo como un efector final, como la ec. 2.1. Una vez que se han extraído las matrices de transformación, podemos obtener el llamado **Jacobiano geométrico**. El jacobiano geométrico es una matriz de  $6 \times n$ , donde cada columna representa la velocidad lineal y angular del punto de interés, en este caso, del centro de masa de cada eslabón. El jacobiano geométrico se define como:

$${}^0J_n = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Dependiendo del tipo de articulación, ya sea prismática o rotativa, los elementos de velocidad lineal  $J_{\omega_i}$  y angular  $J_{v_i}$  se pueden calcular acorde a la Tabla 2.1.

Para el caso del QArm, donde todas sus articulaciones son rotativas, los elementos del jacobiano geométrico se puede calcular como:

$$J_{\omega_i} = {}^0z_{i-1}, \quad (2.5)$$

$$J_{v_i} = {}^0z_{i-1} \times ({}^0o_n - {}^0o_{i-1}). \quad (2.6)$$

#### 2.4.1. Matrices antisimétricas

Una herramienta útil, sobre todo para eficiencia computacional, son las **Matrices Antisimétricas**, que por definición son matrices cuadradas cuyos elementos son tales que  $S_{ij} = -S_{ji}$ . Estas matrices son de gran utilidad en la representación de operaciones vectoriales, como el producto cruz. Para obtener el producto cruz entre dos vectores bajo el concepto de matrices antisimétricas, se puede utilizar la siguiente según la ecuación 2.7

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S(\mathbf{a})\mathbf{b}, \quad (2.7)$$

Tipo de Articulación	$J_{\omega_i}$	$J_{v_i}$
Rotativa	${}^0z_{i-1}$	${}^0z_{i-1} \times ({}^0o_n - {}^0o_{i-1})$
Prismática	0	${}^0z_{i-1}$

Tabla 2.1 Tabla de Jacobianos según tipo de articulación

donde  $S(a)$  es una matriz antisimétrica definida de la forma

$$S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

En esta matriz, los elementos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  representan las componentes del vector  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ . La estructura de la matriz antisimétrica  $S(\mathbf{a})$  permite simplificar la operación de producto cruz, transformando el problema en una simple multiplicación matricial.

## 2.5. Dinámica de robots manipuladores

La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. Esta relación se obtiene mediante el denominado **modelo dinámico**, el cual establece una relación matemática entre:

- Las posiciones y velocidades de las articulaciones.
- Las aceleraciones de las articulaciones.
- Las fuerzas y pares aplicados al robot.
- Parámetros dimensionales del robot, tales como masas, longitudes e inercias de sus elementos.

Normalmente es posible reconocer dos enfoques principales para la obtención del modelo dinámico de un robot manipulador, estos son:

- Método de Euler-Lagrange
- Método de Newton-Euler

Para lograr un control efectivo, es crucial contar con un modelo dinámico preciso y confiable, ya que la fidelidad del modelo determina, en muchos de los casos, el rendimiento del controlador. Sin embargo, en la práctica, a menudo se utilizan modelos dinámicos simplificados que no consideran todas las fuerzas y efectos presentes en la planta real. A pesar de su simplicidad, estos modelos pueden ser suficientes para diseñar controladores efectivos. Adicionalmente, es esencial considerar la incertidumbre paramétrica, dado que las variaciones en los parámetros pueden influir en el comportamiento del sistema y afectan la eficacia del controlador.

### 2.5.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En este trabajo se utilizará el método de Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico del robot manipulador. Este método se basa en la formulación de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que establecen un enfoque sobre las energías potenciales y cinéticas que componen al robot y a sus articulaciones [Spong y Vidyasagar, 1989].

De forma general, considerando un manipulador de  $n$  articulaciones, la energía total  $\mathcal{E}$  de un sistema de  $n$  GDL se puede expresar como la suma de la energía cinética  $\mathcal{K}$  y la energía potencial  $\mathcal{U}$ , que son funciones de las posiciones  $\mathbf{q}$  y velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  de las articulaciones, i.e.,

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (2.9)$$

El llamado Lagrangiano de un manipulador está dado por la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (2.10)$$

una vez obtenido el lagrangiano, las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen a partir de la derivada parcial de  $\mathcal{L}$  con respecto a las velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$ , i.e.,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.11)$$

o de forma equivalente, para cada articulación  $i$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.12)$$

donde  $\tau_i$  corresponde a las fuerzas externas y pares aplicados en cada articulación.

El uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la obtención del modelo dinámico de un robot se puede reducir a cuatro principales pasos:

1. Calcular la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .
2. Calcular la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ .
3. Calcular el Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .
4. Desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange (Eqs. 2.12) para cada articulación.

### 2.5.2. Energía cinética

De forma general, la energía cinética de un sistema se puede expresar como la suma de dos términos: la energía cinética de traslación y la energía cinética de rotación. Para un eslabón de un manipulador, la energía cinética está dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathcal{I} \boldsymbol{\omega}, \quad (2.13)$$

donde  $m$  es la masa del eslabón, concentrada en el centro de masa,  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidad lineal,  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector de velocidad angular, y  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el tensor de inercia del eslabón [Spong y Vidyasagar, 1989]. Es posible expresar estas ecuaciones en términos de un conjunto de coordenadas generalizadas. Para un manipulador, esto significa expresar las ecuaciones de movimiento usando las variables articulares,

es decir, las posiciones  $\mathbf{q}$  y velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  de las articulaciones.

Podemos encontrar las velocidades angulares y lineales a partir de los subelementos de la matriz Jacobiana. Es decir, para  $J_{v_i}$  y  $J_{\omega_i}$  apropiados, tenemos:

$$\mathbf{v}_i = J_{v_i}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\omega}_i = J_{\omega_i}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{v}_i$  y  $\boldsymbol{\omega}_i$  son las velocidades lineales y angulares del  $i$ -ésimo eslabón, respectivamente. Considerando la masa  $m_i$  y el tensor de inercia  $\mathcal{I}_i$  del  $i$ -ésimo eslabón, referenciado al centro de masa, la energía cinética total es:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n \left[ m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T R_i \mathcal{I}_i R_i^T J_{\omega_i} \right] \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.15)$$

tal que  $R_i$  es la matriz de rotación que relaciona el sistema de coordenadas del eslabón  $i$  con el sistema de coordenadas del manipulador. Si el tensor de inercia  $\mathcal{I}_i$  está referido al centro de masa, no es necesario considerar la matriz de rotación  $R_i$ , y la expresión se simplifica a:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n \left[ m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathcal{I}_i J_{\omega_i} \right] \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

De las expresiones (2.15) y (2.13), se puede observar que la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es la suma de los términos  $m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T R_i \mathcal{I}_i R_i^T J_{\omega_i}$ . Es decir:

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \left[ \underbrace{m_i J_{v_i}^T J_{v_i}}_{M_{v_i}} + \underbrace{J_{\omega_i}^T R_i \mathcal{I}_i R_i^T J_{\omega_i}}_{M_{\omega_i}} \right], \quad (2.17)$$

donde los términos  $M_{v_i}$  y  $M_{\omega_i}$  son los elementos de la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  asociados a la velocidad lineal y angular, respectivamente.

### 2.5.3. Energía potencial

Para el caso de un robot manipulador, la única fuente de energía potencial es la gravedad. Cuando asumimos que la masa de todo el eslabón está concentrada en un punto, i.e., el centro de masa, la energía potencial del  $i$ -ésimo eslabón se puede calcular como:

$$\mathcal{U}_i = g^T r_{ci} m_i, \quad (2.18)$$

donde  $g$  es un vector que proporciona la dirección de la gravedad en el marco de referencia inercial, y  $r_{ci}$  son las coordenadas del centro de masa del  $i$ -ésimo eslabón.

Para un robot de  $n$  GDL, la energía potencial total es la suma de las energías potenciales de cada eslabón, i.e.,

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \mathcal{U}_i = \sum_{i=1}^n g^T r_{ci} m_i. \quad (2.19)$$

Se puede notar que la energía potencial depende de la configuración del robot, i.e., de las posiciones articulares  $\mathbf{q}$ , pero no de las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  [Spong y Vidyasagar, 1989].

#### 2.5.4. Ecuaciones de movimiento

El Lagrangiano, dado en la ec. 2.10, puede ser entonces expresado como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.20)$$

Si desarrollamos las ecuaciones de Euler-Lagrange 2.12 bajo esta estructura, podemos encontrar la llamada forma compacta del modelo: [Kelly, *et al.*, 2005]

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.21)$$

La ecuación 2.21 es una ecuación diferencial vectorial no lineal de segundo orden. Donde  $M(\mathbf{q})$  es la matriz de inercia,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es la matriz de fuerzas de Coriolis y centrífugas,  $G(\mathbf{q})$  es el vector de gravedad y  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector de fuerzas y pares aplicados.

La matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , es conocida como la matriz de fuerzas de Coriolis y centrífugas, y sus elementos están dados por los llamados símbolos de Christoffel de primer tipo, de la siguiente manera:

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (2.22)$$

Tal que, los elementos de la matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  están dados por:

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \quad (2.23)$$

Es posible demostrar que, a pesar de que la matriz de Coriolis y centrífuga pueda no ser única, el vector  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$  sí lo es [Spong y Vidyasagar, 1989].

La matriz  $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ , es conocida como el vector de gravedad, y se puede simplemente definir como el gradiente de la energía potencial  $\mathcal{U}$ , i.e.,

$$G(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.24)$$

Esta representación del modelo dinámico es de gran utilidad y puede ser visto como un sistema dinámico con entrada, el vector de fuerzas y pares  $\boldsymbol{\tau}$ , y salida, el vector de posiciones articulares  $\mathbf{q}$ , así como el vector de velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Finalmente, se puede resumir el proceso de obtención del modelo dinámico de un robot manipulador en los siguientes pasos:

1. Obtener la cinemática directa del robot calculando las matrices de transformación homogénea a partir de una formulación de Denavit-Hartenberg.
2. Calcular las matrices jacobianas de velocidad angular y lineal para cada eslabón.
3. Calcular la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  y la energía cinética.
4. Obtener la matriz de coriolis y centrífuga  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  a partir de la matriz de inercia y los símbolos de Christoffel.
5. Calcular la energía potencial utilizando las matrices de transformación homogénea, las masas de los eslabones y la gravedad.
6. Calcular el vector de gravedad  $G(\mathbf{q})$  a partir de la energía potencial.
7. Obtener el modelo dinámico en su forma compacta (ecuación 2.21).

## 2.6. Control de robots manipuladores

Para el alcance de esta tesis, se abordará específicamente el problema de control de seguimiento, o *tracking control*. Este problema se refiere a la tarea de controlar las posiciones y velocidades de las articulaciones de un robot manipulador para que sigan una trayectoria deseada. El problema puede ser formulado con los siguientes términos:

Considerando el modelo descrito en la ecuación 2.21, y dado un vector de funciones vectoriales acotadas  $\mathbf{q}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ , a las que podemos denominar *referencias* de posición, velocidad y aceleración, respectivamente, deseamos encontrar una función vectorial  $\boldsymbol{\tau}$  tal que las posiciones articulares  $\mathbf{q}$  sigan  $\mathbf{q}_d(t)$  de forma precisa [Kelly, *et al.*, 2005].

De manera más formal, esto es:

Para el problema de control de seguimiento, el objetivo consiste en encontrar un vector de control sin restricciones  $\boldsymbol{\tau}$  tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = 0, \quad (2.25)$$

donde  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  denota el error de seguimiento de posición.

El problema de control para robots manipuladores es el de determinar las entradas para las articulaciones requeridas para hacer que el efector final ejecute un movimiento deseado. Las entradas de las articulaciones pueden ser fuerzas, pares, o pueden ser entradas a los actuadores, como por ejemplo voltajes o corrientes de entrada a los motores, dependiendo del modelo usado para el diseño del controlador. [Spong y Vidyasagar, 1989]

El control de un brazo manipulador es un desafío, debido a la naturaleza no lineal del sistema, su estructura mecánica compleja y la presencia de incertidumbres y perturbaciones. Es entonces necesario el uso de técnicas de control avanzadas para lograr un desempeño adecuado en la ejecución de tareas.

Existen numerosas técnicas de control para alcanzar el objetivo de control de seguimiento, uno de los enfoques principales para dicho fin, es el control basado en modelo, donde se destacan principalmente dos controladores en la literatura: el Controlador por Par Calculado y el Controlador de Slotine & Li.

### 2.6.1. Controlador por Par Calculado

El modelo dinámico que describe a un manipulador 2.21 está compuesto, en general, por funciones no lineales de las coordenadas generalizadas (posiciones y velocidades articulares). Esta es una característica que puede hacernos pensar que, dado cualquier controlador, la ecuación en lazo cerrado nos llevará a un sistema no lineal. Sin embargo, el Controlador por Par Calculado es una técnica que permite linealizar el sistema en lazo cerrado.

La ley de control del par calculado está dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_d + K_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}), \quad (2.26)$$

donde  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}$  son los errores de posición y velocidad, respectivamente.  $K_p$  y  $K_d$  son matrices simétricas y definidas positivas del tipo PD (Proporcional Derivativo). Es fácil notar que, dado que las ganancias de velocidad y posición no son constantes debido a que dependen explícitamente del error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$ , la ecuación 2.26 representa un controlador no lineal.

Por otro lado, si sustituimos la ecuación 2.26 en la ecuación 2.21, podemos ver el sistema en lazo cerrado:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) [\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_d + K_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}}]. \quad (2.27)$$

La matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es simétrica y definida positiva, y por lo tanto también es invertible, la ecuación 2.27 se reduce a:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.28)$$

donde  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$  se expresa en términos del vector de estado de los errores de posición y velocidad como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

lo cual representa una ecuación diferencial lineal autónoma.

### 2.6.2. Controlador Slotine-Li

[Slotine y Li, 1987] propusieron un controlador basado en pasividad para manipuladores. En este trabajo estudiamos la versión *no adaptable* del controlador Slotine-Li. La ley de control está dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] + G(\mathbf{q}), \quad (2.30)$$

donde  $\Lambda$  está definido como:

$$\Lambda = K_v^{-1} K_p \quad (2.31)$$

y  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas y definidas positivas de diseño, como es usual,  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  denota el error de posición. Es importante remarcar que se asume que la matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se asume modelada a partir de los símbolos de Christoffel.

De manera simple, podemos decir que la ley de control está formada por un término PD más una “compensación”. Por lo anterior, este controlador también se conoce como PD con compensación.

La ecuación en lazo cerrado, obtenida al sustituir la ecuación 2.30 en la ecuación 2.21, es:

$$M(\mathbf{q}) [\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] = -K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \quad (2.32)$$

la cual, expresada en términos del vector de estados  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^T$ , es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}]] - \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

## Capítulo 3

# Modelo del Robot Manipulador QArm

La obtención de las ecuaciones de movimiento del brazo manipulador QArm se realizó a través de la formulación de Euler-Lagrange y del conocimiento de los parámetros dinámicos del manipulador dados por fabricante [Quanser, 2022]. En este capítulo se presenta el modelado dinámico del manipulador QArm, el cual es necesario para el diseño de controladores y simulaciones del sistema.

### 3.1. Descripción del robot manipulador Quanser QArm

En esta sección, abordaremos la descripción de la planta experimental utilizada en este trabajo, el robot manipulador Quanser QArm. Este robot es un manipulador serial de 4 GDL con una estructura de tipo antropomórfica, se puede observar una imagen del robot en la figura 3.1.

#### 3.1.1. Características y parámetros

El Quanser QArm cuenta con 4 GDL, aunque en el presente trabajo solo se estudiará el robot bajo 3 GDL, que son la base, el hombro, y el codo. La cuarta articulación corresponde a la muñeca, que no será utilizada.

Estas articulaciones son accionadas por servomotores Dynamixel XM540-W270-T/R[Robotis, 2023].

El fabricante Quanser, provee tres diferentes formas de actuar sobre los servomotores, configurables a través de Simulink, que son:

- **Modo de posición:** En este modo, el usuario puede enviar una posición deseada al servomotor, y este se encargará de llevar la articulación a la posición deseada. Esto gracias a los controladores internos de los servomotores.
- **Modo de PWM:** En este modo, el usuario puede enviar una señal de voltaje a través de Modulación por ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés) al servomotor.



Figura 3.1 Robot manipulador Quanser QArm en el Laboratorio de Modos Deslizantes de la UNAM

- **Modo de corriente:** En este modo, el usuario puede enviar una referencia de corriente al motor, en la hoja de especificaciones de los servomotores se describe la relación par-corriente, por lo que es posible controlar el par de salida del motor.

Cabe resaltar que, tanto el modo PWM como el modo corriente están en lazo abierto, es decir, ningún controlador interno de los servomotores está teniendo acción sobre la posición de las articulaciones, por lo que hay que o bien, sostener al manipulador para que no se caiga, o implementar un controlador que mantenga la posición deseada.

Para el uso efectivo de esta planta en experimentos, es importante entender su geometría, cinemática y dinámica. Un diagrama de alambre, que muestra las posiciones de las articulaciones, los eslabones del robot, así como sus centros de masa se muestra en la Figura 3.2.

Los parámetros geométricos y dinámicos del robot manipulador QArm se muestran en la tabla 3.1. Los parámetros  $I_{nA}$ ,  $I_{nL}$  corresponden a los momentos de inercia de los centros de masa de los eslabones, mientras que los parámetros  $m_n$  corresponden a las masas de los eslabones.

### 3.1.2. Espacio de trabajo

Como parte de una operación segura de la planta, es importante conocer el espacio de trabajo del robot, esto permite evitar colisiones con objetos cercanos, así como evitar que el robot se salga de su

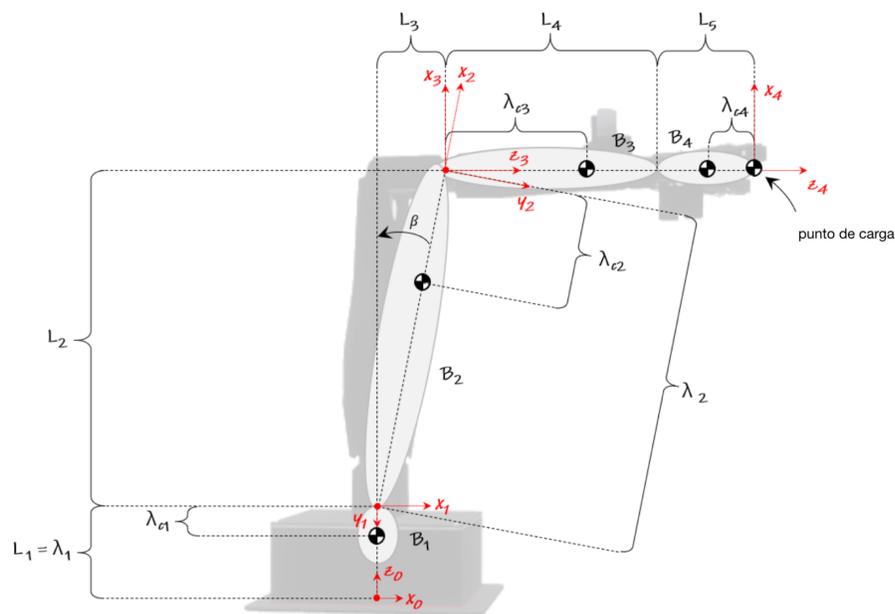


Figura 3.2 Diagrama de alambre del robot manipulador Quanser QArm

rango de operación.

El espacio de trabajo se define como el subconjunto del espacio cartesiano de todos los puntos posibles que puede alcanzar el efector final. También llamado *espacio alcanzable*.

El manipulador tiene un alcance horizontal de 0.7536m. El alcance vertical es de 0.8936 debido a la altura añadida desde la base. La figura 3.3 muestra el espacio de trabajo del robot [Quanser, 2022].

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$m_1$	0.7906 kg	$m_2$	0.4591 kg
$\lambda_{c1}$	0.0399 m	$\lambda_{c2}$	0.1071 m
$I_{1A}$	$1.489 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$I_{2A}$	$1.922 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$
$m_L$	-	$I_{2L}^*$	$9.610 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
$m_3$	0.269 kg	$m_4$	0.257 kg
$\lambda_{c3}$	0.1561 m	$\lambda_{c4}$	0.0998 m
$I_{3A}$	$2.679 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$	$I_{4A}$	$6.528 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$
$I_{3L}^*$	$2.069 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$I_{4L}^*$	$1.120 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
$\lambda_1$	0.14 m	$\lambda_2$	0.3556 m
$L_2$	0.35 m	$L_3$	0.05 m
$L_4$	0.25 m	$L_5$	0.15 m
$\beta$	$8.13^\circ$		

Tabla 3.1 Parámetros geométricos y dinámicos del robot manipulador QArm

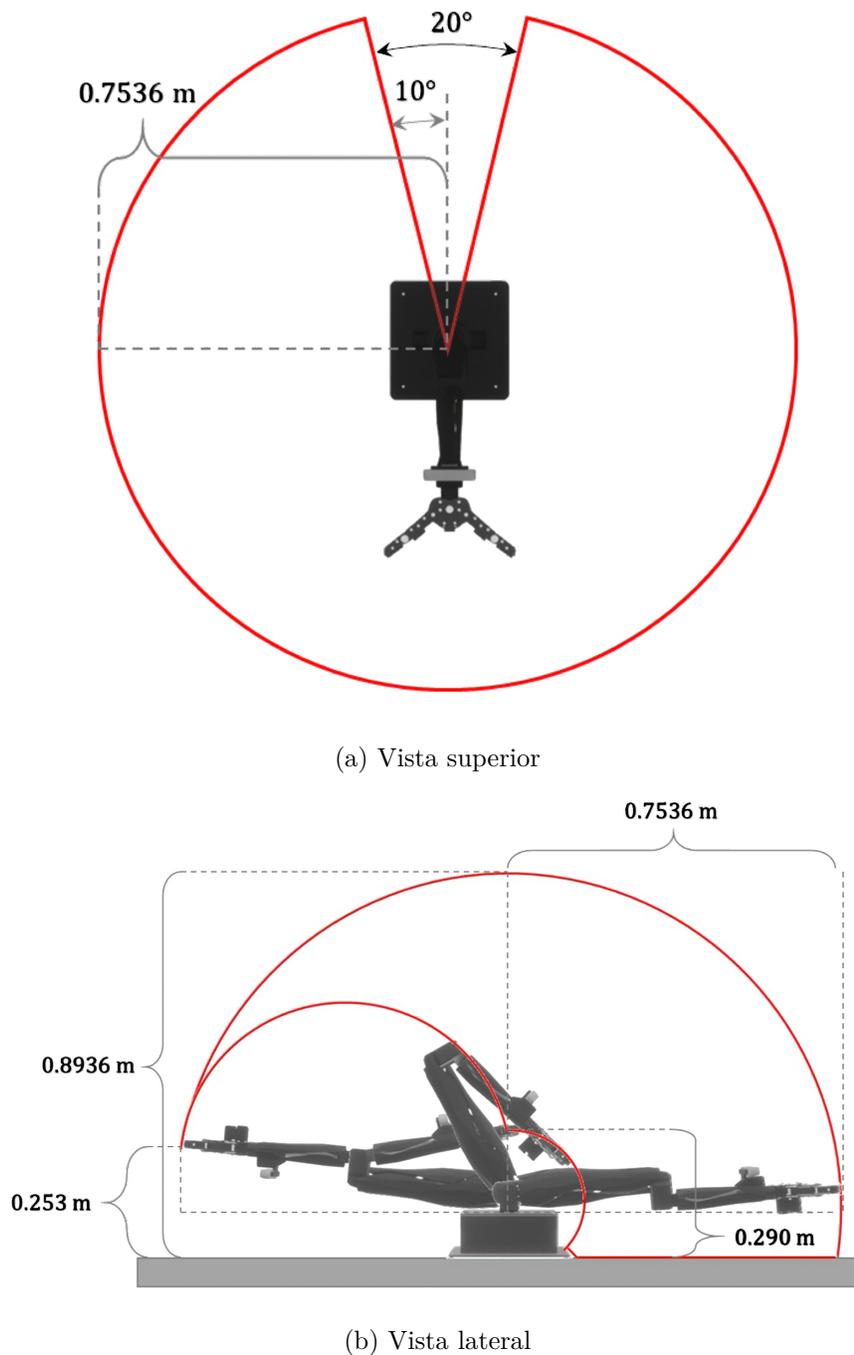


Figura 3.3 Espacio de trabajo del robot manipulador QArm

## 3.2. Modelo dinámico del QArm

A continuación, se presenta el modelo dinámico del robot manipulador QArm obtenido a través de la formulación de Euler-Lagrange. Un análisis detallado de la obtención de las ecuaciones de movimiento se presenta en el apéndice A.

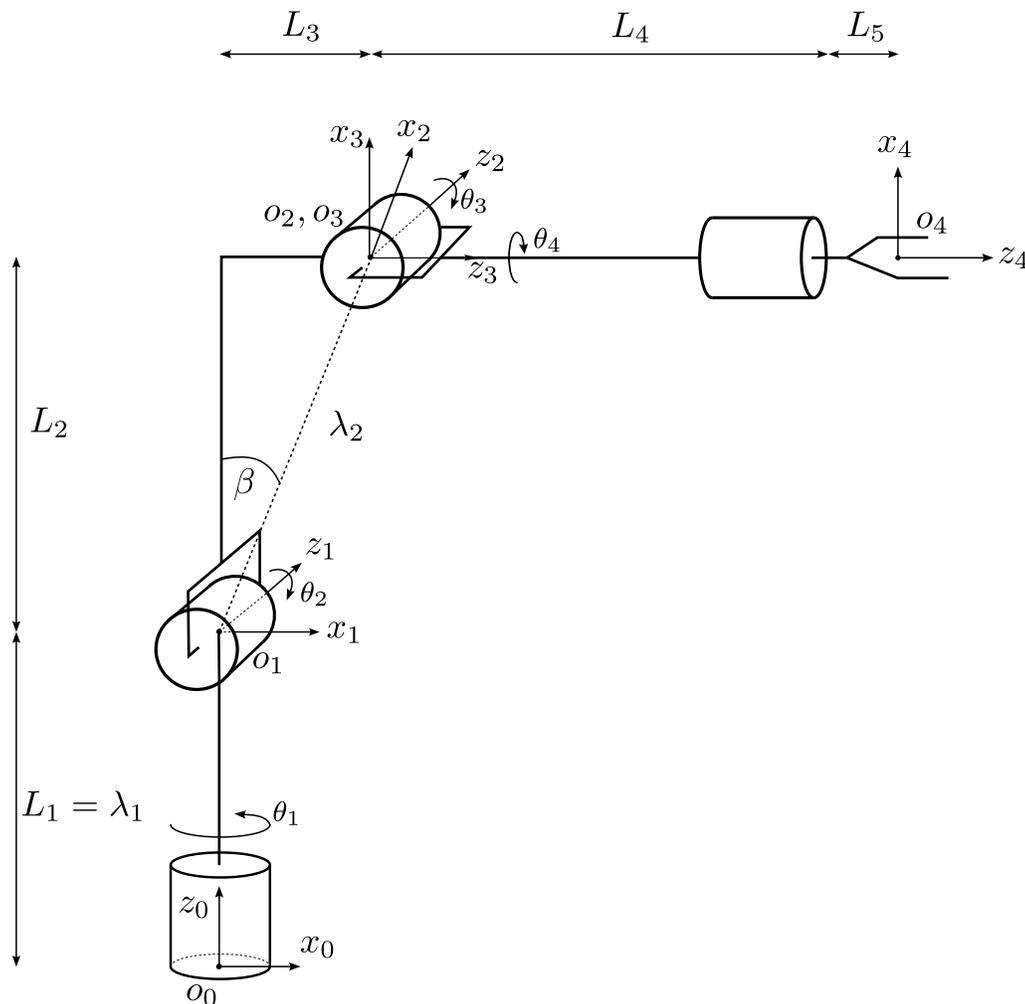


Figura 3.4 Diagrama de alambre del robot manipulador QArm

### 3.2.1. Cinemática directa

Como fue descrito en la Sección 2.5, el primer requisito para obtener las ecuaciones de movimiento de un robot manipulador es el conocimiento de la cinemática directa. Para obtener la cinemática directa del robot manipulador QArm es necesario definir un sistema de referencia para cada eslabón según las normas de Denavit-Hartenberg, esto es mostrado en la Figura 3.4.

Una vez que se asignaron los ejes coordenados a cada articulación, se procedió construir la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, la cual se muestra en la Tabla 3.2.

Nótese que el manipulador mostrado en la figura 3.4 representa su posición inicial o *Home*, en la cual, el vector de ángulos está dado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta - \frac{\pi}{2} \\ -\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Los actuadores y encoders del manipulador están calibrados en esta posición, por lo que si se comanda una posición de  $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  el manipulador debería regresar a *Home*, donde los encoders tendrán una lectura de  $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Es importante considerar este mapeo del espacio articular cuando se realicen pruebas experimentales.

Con la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg y haciendo uso de la ecuación 2.3 se procedió a obtener las matrices de transformación homogéneas.

### Primera articulación

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

### Segunda articulación

$${}^0H_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & \lambda_2c_1c_2 \\ c_2s_1 & -s_1s_2 & c_1 & \lambda_2c_2s_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

### Tercera articulación

$${}^0H_3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1 & -c_1s_{23} & \lambda_2c_1c_2 \\ s_1c_{23} & -c_1 & -s_1s_{23} & \lambda_2s_1c_2 \\ -s_{23} & 0 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
<b>1</b>	0	$-\frac{\pi}{2}$	$L_1$	$\theta_1$
<b>2</b>	$\lambda_2$	0	0	$\theta_2$
<b>3</b>	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\theta_3$
<b>4</b>	0	0	$\lambda_3$	$\theta_4$

Tabla 3.2 Parámetros de Denavit-Hartenberg del robot manipulador QArm

### Cuarta articulación

$${}^0H_4 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & -c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4 & -c_1 s_{23} & \lambda_2 c_1 c_2 - \lambda_3 c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -s_1 c_{23} s_4 - c_1 c_4 & -s_1 s_{23} & \lambda_2 s_1 c_2 - \lambda_3 s_1 s_{23} \\ -s_{23} c_4 & s_{23} s_4 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_2 s_2 - \lambda_3 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

donde  $c_i = \cos(\theta_i)$  y  $s_i = \sin(\theta_i)$  y  $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$  y  $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$

### 3.2.2. Jacobiano Geométrico

Una vez que se obtuvieron las matrices de transformación homogéneas, se procedió a obtener el Jacobiano geométrico del manipulador.

#### Primer eslabón

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

#### Segundo eslabón

$$J_2 = \begin{bmatrix} -(\lambda_2 - \lambda_{c_2}) s_1 c_2 & -(\lambda_2 - \lambda_{c_2}) c_1 s_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_{c_2}) c_1 c_2 & -(\lambda_2 - \lambda_{c_2}) s_1 s_2 \\ 0 & -(\lambda_2 - \lambda_{c_2}) c_2 \\ 0 & -s_1 \\ 0 & c_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

#### Tercer eslabón

$$J_3 = \begin{bmatrix} s_1(\lambda_{c_3} s_{23} - \lambda_2 c_2) & -c_1(\lambda_{c_3} s_{23} + \lambda_2 c_2) & -c_1 \lambda_{c_3} c_{23} \\ -c_1(\lambda_{c_3} s_{23} - \lambda_2 c_2) & -s_1(\lambda_{c_3} s_{23} + \lambda_2 c_2) & -s_1 \lambda_{c_3} c_{23} \\ 0 & (\lambda_{c_3} s_{23} - \lambda_2 c_2) & \lambda_{c_3} s_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

### Cuarto eslabón

$$J_4 = \begin{bmatrix} -\lambda_2 s_1 c_2 + s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -\lambda_2 c_1 s_2 - c_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -c_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & 0 \\ \lambda_2 c_1 c_2 - s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -\lambda_2 s_1 s_2 - c_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -c_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & 0 \\ 0 & -\lambda_2 c_2 + s_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & s_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & 0 \\ 0 & -s_1 & -c_1 & -s_{23} c_1 \\ 0 & c_1 & -s_1 & -s_{23} s_1 \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

### 3.2.3. Matriz de inercia y Energía cinética

Una vez que se obtuvieron la cinemática directa y los jacobianos geométricos, es posible calcular la matriz de inercia y por tanto, la energía cinética. Para ello, se hizo uso de las ecuaciones 2.16 y 2.17.

Para el tensor de inercia, se hicieron las siguientes consideraciones que simplifican el modelado del robot:

- Los momentos de inercia están principalmente alineados con el marco de referencia  $i$ . Esto hace que los términos no-diagonales del tensor de inercia sean cero.
- Cada eslabón es tratado como un cilindro sólido. Por ello, los términos diagonales del tensor de inercia son  $\mathcal{I}_{iA}$  a lo largo del eje principal y simétrico sobre los otros dos ejes  $\mathcal{I}_{iL}$ .

Las matrices de momentos de inercia, o tensores de inercia para cada eslabón son:

$$\begin{aligned} {}^1\mathcal{I}_{c_1} &= \begin{bmatrix} I_{1L} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1A} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1L} \end{bmatrix}, & {}^2\mathcal{I}_{c_2} &= \begin{bmatrix} I_{2A} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2L} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2L} \end{bmatrix}, \\ {}^3\mathcal{I}_{c_3} &= \begin{bmatrix} I_{3L} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3L} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3A} \end{bmatrix}, & {}^4\mathcal{I}_{c_4} &= \begin{bmatrix} I_{4L} & 0 & 0 \\ 0 & I_{4L} & 0 \\ 0 & 0 & I_{4A} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

### Primer eslabón

$$M_1 = I_{1L}. \quad (3.11)$$

### Segundo eslabón

$$M_2 = \begin{bmatrix} I_{2L} - m_2(\lambda_2 - \lambda_{c_2})^2((s_2)^2 - 1) & 0 \\ 0 & I_{2L} + (s_1)^2(I_{2A} - I_{2L}) + m_2(\lambda_2 - \lambda_{c_2})^2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

**Tercer eslabón**

Por lo tanto,

$$M_3 = \begin{bmatrix} I_{3A} + m_3(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_{3L} + m_3(\lambda_2^2 - 2s_3\lambda_2\lambda_{c3} + \lambda_{c3}^2) & I_{3L} + \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3) \\ 0 & I_{3L} + \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3) & m_3\lambda_{c3}^2 + I_{3L} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

**Cuarto eslabón**

$$\begin{aligned} M_4 &= \\ M_4(1, 1) &= I_{4A} + m_4(\lambda_{c4}s_{23} - \lambda_3s_{23} + \lambda_2c_2)^2 \\ M_4(2, 2) &= I_{4L} + m_4(\lambda_2^2 - 2s_3\lambda_2\lambda_3 + 2s_3\lambda_2\lambda_{c4} + \lambda_3^2 - 2\lambda_3\lambda_{c4} + \lambda_{c4}^2) \\ M_4(3, 3) &= I_{4L} + m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})^2 \\ M_4(2, 3) &= M_4(3, 2) = I_{4L} - m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})(\lambda_{c4} - \lambda_3 + \lambda_2s_3) \\ M_4(4, 4) &= I_{4A} - I_{4A}s_{23}^2 + I_{4L}s_{23}^2 \\ M_4(1, 2) &= M_4(2, 1) = M_4(1, 3) = M_4(3, 1) = M_4(1, 4) = M_4(4, 1) = 0 \\ M_4(2, 4) &= M_4(4, 2) = M_4(3, 4) = M_4(4, 3) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

**Matriz de inercia total**

Se suman las matrices de inercia de cada eslabón para obtener la matriz de inercia total, esto se ve en las ecuaciones 3.16 con una descripción término a término de la matriz  $M(\mathbf{q})$ .

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_{3A} + I_{4A} + I_{2L} + I_{yy1} + m_4(\lambda_{c4}s_{23} - \lambda_3s_{23} + \lambda_2c_2)^2 + m_3(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2)^2 \\ &\quad + m_2c_1^2c_2^2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 + m_2c_2^2s_1^2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2, \\ M_{22} &= I_{2L} + I_{3L} + I_{4L} + \lambda_2^2m_2 + \lambda_2^2m_3 + \lambda_2^2m_4 + \lambda_3^2m_4 + \lambda_{c3}^2m_3 + \lambda_{c2}^2m_2 + \lambda_{c4}^2m_4 + I_{2A}s_1^2 \\ &\quad - I_{2L}s_1^2 - 2\lambda_2\lambda_{c2}m_2 - 2\lambda_3\lambda_{c4}m_4 - 2\lambda_2\lambda_3m_4s_3 - 2\lambda_2\lambda_{c3}m_3s_3 + 2\lambda_2\lambda_{c4}m_4s_3, \\ M_{23} &= M_{32} = I_{3L} + I_{4L} - m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})(\lambda_{c4} - \lambda_3 + \lambda_2s_3) + \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3), \\ M_{33} &= I_{3L} + I_{4L} + \lambda_{c3}^2m_3 + m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})^2, \\ M_{44} &= I_{4A} - I_{4A}s_{23}^2 + I_{4L}s_{23}^2, \\ M_{12} &= M_{13} = M_{14} = M_{21} = M_{24} = M_{31} = M_{34} = M_{42} = M_{43} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.2.4. Matriz de Coriolis y Centrífuga

La matriz de Coriolis y Centrífuga se obtiene a partir de los símbolos de Christoffel, como se muestra en las ecuaciones 2.22 y 2.23. Ya que  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está dada por la sumatoria de los símbolos de Christoffel, primero se obtienen los símbolos de Christoffel para cada eslabón, la matriz  $C$  para cada eslabón y finalmente se suman para obtener la matriz de Coriolis y Centrífuga total.

#### Primer eslabón

$$C_1 = 0. \quad (3.17)$$

#### Segundo eslabón

$$\begin{aligned} C_2(1, 1) &= \frac{1}{2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_{11} (I_{2A} - I_{2L}) \\ C_2(1, 2) &= \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2^2 - m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2 \lambda_{c2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_{c2}^2 + \frac{1}{2} I_{2A} s_{11} - \frac{1}{2} I_{2L} s_{11} \right) \\ C_2(2, 1) &= -\frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2 s_{22} (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 \\ C_2(2, 2) &= -\dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2^2 - m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2 \lambda_{c2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_{c2}^2 + \frac{1}{2} I_{2A} s_{11} - \frac{1}{2} I_{2L} s_{11} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

#### Tercer eslabón

$$\begin{aligned} C_3(1, 1) &= m_3 \dot{q}_3 (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 \dot{q}_2 s_2 + \lambda_{c3} \dot{q}_2 c_{23}) \\ C_3(1, 2) &= m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 s_2) (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\ C_3(1, 3) &= \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\ C_3(2, 1) &= -m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 s_2) (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\ C_3(2, 2) &= -\lambda_2 \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_3 c_3 \\ C_3(2, 3) &= -\lambda_2 \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_3 c_3 (\dot{q}_2 + 1) \\ C_3(3, 1) &= -\lambda_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\ C_3(3, 2) &= \lambda_2 \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_3 \\ C_3(3, 3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Cuarto eslabón**

$$\begin{aligned}
C_4(1, 1) &= -m_4 \dot{q}_3 \dot{q}_4 (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23} + \lambda_2 \dot{q}_2 s_2 + \lambda_3 \dot{q}_2 c_{23} - \lambda_{c4} \dot{q}_2 c_{23}) \\
C_4(1, 2) &= \dot{q}_4 \left( \frac{I_{4A} s_{23}}{2} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23} + \lambda_2 s_2) \right) \\
C_4(1, 3) &= \dot{q}_4 \left( \frac{I_{4A} s_{23}}{2} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c4}) (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) \right) \\
C_4(1, 4) &= \frac{1}{2} I_{4A} \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{23} (\dot{q}_2 + 1) \\
C_4(2, 1) &= -\dot{q}_4 \left( \frac{I_{4A} s_{23}}{2} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23} + \lambda_2 s_2) \right) \\
C_4(2, 2) &= -\lambda_2 m_4 \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_3 (\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\
C_4(2, 3) &= -\lambda_2 m_4 \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_3 (\lambda_3 - \lambda_{c4}) (\dot{q}_2 + 1) \\
C_4(2, 4) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(3, 1) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4A} s_{23} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c4}) (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2)) \\
C_4(3, 2) &= \lambda_2 m_4 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_3 (\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\
C_4(3, 3) &= 0 \\
C_4(3, 4) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(4, 1) &= \frac{1}{2} I_{4A} \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{23} (\dot{q}_2 + 1) \\
C_4(4, 2) &= \frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(4, 3) &= \frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(4, 4) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{2233} (I_{4A} - I_{4L}) (\dot{q}_2 + 1),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde,  $s_{2233} = \sin(2q_2 + 2q_3) = \sin(q_2 + q_2 + q_3 + q_3)$ .

### Matriz de Coriolis y Centrífuga total

Las ecuaciones resultantes son muy largas, por lo que no se expresarán aquí, pero se hace énfasis en que la matriz resultante está expresada por los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_1(1, 1) + C_2(1, 1) + C_3(1, 1) + C_4(1, 1) \\
C_{12} &= C_2(1, 2) + C_3(1, 2) + C_4(1, 2) \\
C_{13} &= C_3(1, 3) + C_4(1, 3) \\
C_{14} &= C_4(1, 4) \\
C_{21} &= C_2(2, 1) + C_3(2, 1) + C_4(2, 1) \\
C_{22} &= C_2(2, 2) + C_3(2, 2) + C_4(2, 2) \\
C_{23} &= C_3(2, 3) + C_4(2, 3) \\
C_{24} &= C_4(2, 4) \\
C_{31} &= C_3(3, 1) + C_4(3, 1) \\
C_{32} &= C_3(3, 2) + C_4(3, 2) \\
C_{33} &= C_3(3, 3) + C_4(3, 3) \\
C_{34} &= C_4(3, 4).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

### 3.2.5. Energía potencial y Vector de gravedad

Para la obtención de la energía potencial de cada eslabón, se considera la energía potencial gravitacional de cada centro de masa. Se hizo uso de las ecuaciones 2.18 y 3.22

La energía potencial total es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4 \\
&= m_1g(\lambda_1 - \lambda_{c1}) + m_2g(\lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_{c2})s_2) + m_3g(\lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2) \\
&\quad + m_4g(\lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4})).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

El vector de gravedad  $G(\mathbf{q})$  se obtiene a partir de la ecuación 2.24, y de la energía potencial obtenida.

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ gm_3(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) - gm_4(\lambda_2c_2 - s_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4})) - gm_2c_2(\lambda_2 - l_{c2}) \\ g\lambda_{c3}m_3s_{23} + gm_4s_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

es entonces que tenemos todos los elementos para formar la dinámica del manipulador de la forma compacta descrita en la ecuación 2.21, de forma más detallada, el modelo tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

### 3.3. Conversión de Par a PWM

De las tres formas de control admitidas por el Quanser QArm, se optó por controlar el robot en modo PWM, esta estrategia implica que se controlará el voltaje aplicado a cada motor en las articulaciones. Sin embargo, las leyes de control propuestas en esta tesis están dadas en términos de par, por lo que es necesario realizar una conversión de par a PWM.

PWM es una técnica utilizada para controlar dispositivos analógicos mediante una señal digital de alta frecuencia. Funciona a través de la modulación de una señal analógica en una señal digital, mediante un tren de pulsos que varían en ancho, mientras que la frecuencia es constante, variando así el llamado *ciclo de trabajo* o *duty cycle* [Yu, et al., 1997].

Es entonces necesario encontrar una relación entre el voltaje aplicado a los motores y la salida de par que producen. Para este fin, el voltaje del motor de corriente continua puede definirse de la siguiente manera:

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + K_e \omega, \quad (3.25)$$

donde  $i$  es la corriente,  $R$  es la resistencia,  $L$  es la inductancia,  $\frac{di}{dt}$  es la tasa de cambio de la corriente,  $K_e$  es la constante de fuerza electromotriz (EMF) y  $\omega$  es la velocidad angular del rotor. El cambio en la corriente y el término de la constante EMF multiplicada por la velocidad del eje pueden asumirse como despreciables en comparación con la magnitud de  $R \cdot i$ . La salida de par del motor también puede expresarse en términos de la corriente, como sigue:

$$\tau = K_t i, \quad (3.26)$$

donde  $K_t$  es la constante de par.

Si sustituimos la ecuación 3.26 en la ecuación 3.25, obtenemos:

$$V = \left( \frac{\tau}{K_t} \right) R. \quad (3.27)$$

Los valores de las constantes  $R$  y  $K_t$  para el motor XM540 se encuentran en la hoja de datos del fabricante [Robotis, 2023]:

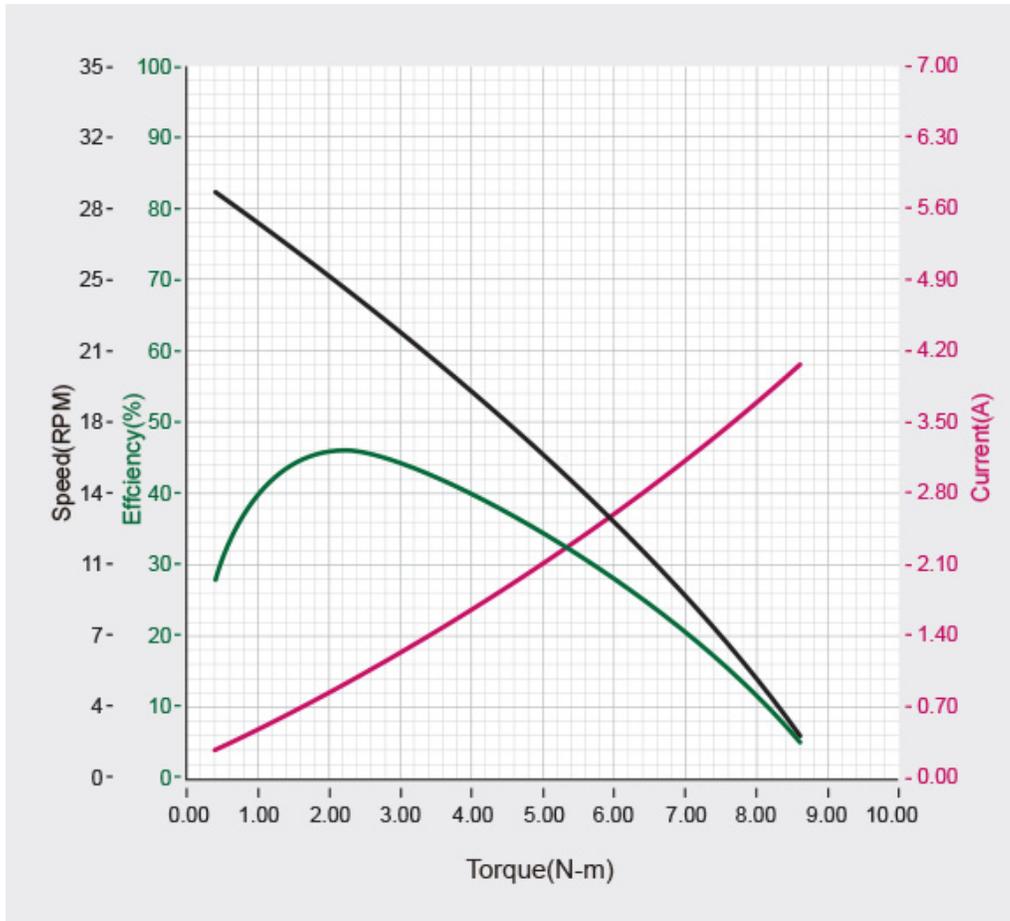


Figura 3.5 Gráfica de rendimiento del motor XM540.

$$R = \frac{12}{4.4} = 2.7272 [\Omega], \quad (3.28)$$

$$K_t = \frac{10.6 [N \cdot m]}{4.4 [A]} = 2.4091 [N \cdot m/A],$$

Esta es una relación lineal que permite convertir el par en una señal PWM, sin embargo, la hoja de datos de los motores XM540 ilustra una relación no lineal entre el par y la corriente, tal como se muestra en la figura 3.5.

Para lograr una buena conversión de par a PWM, se analizaron tres ajustes a la gráfica original de par a corriente, uno de una relación lineal calculado a partir de mínimos cuadrados, el siguiente de igual manera pero forzando el cruce por cero y finalmente un ajuste polinomial de segundo orden, tal como se muestra en la figura 3.6. Se puede apreciar que en la gráfica proporcionada por el fabricante no se expresan los valores cercanos a cero de la relación y la función de segundo orden propuesta no es capaz de representar acertadamente estos valores, por lo que una combinación de la función polinomial y la recta con cruce por cero se propone para tomar en cuenta estos valores y el cruce por cero. También es importante destacar que esta relación debe ser simétrica en el tercer cuadrante, ya

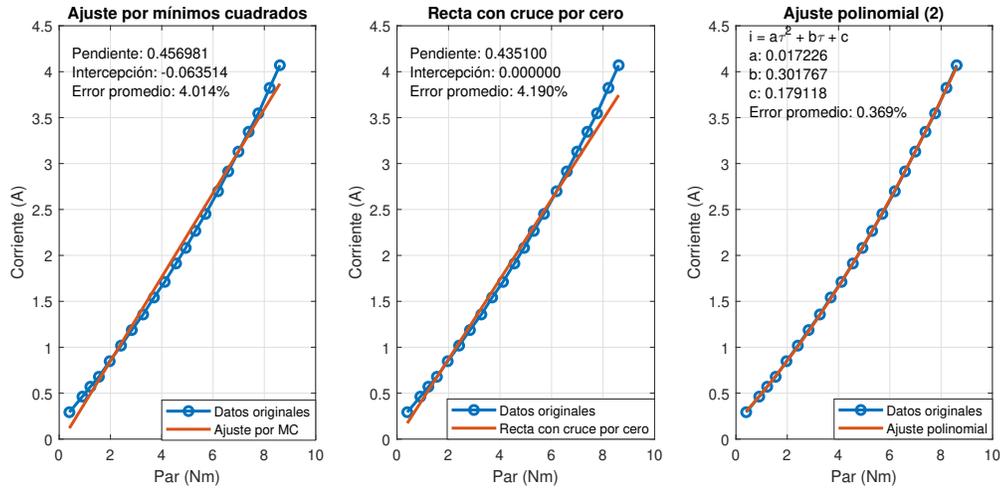


Figura 3.6 Comparación de la relación lineal y la relación polinomial de segundo orden.

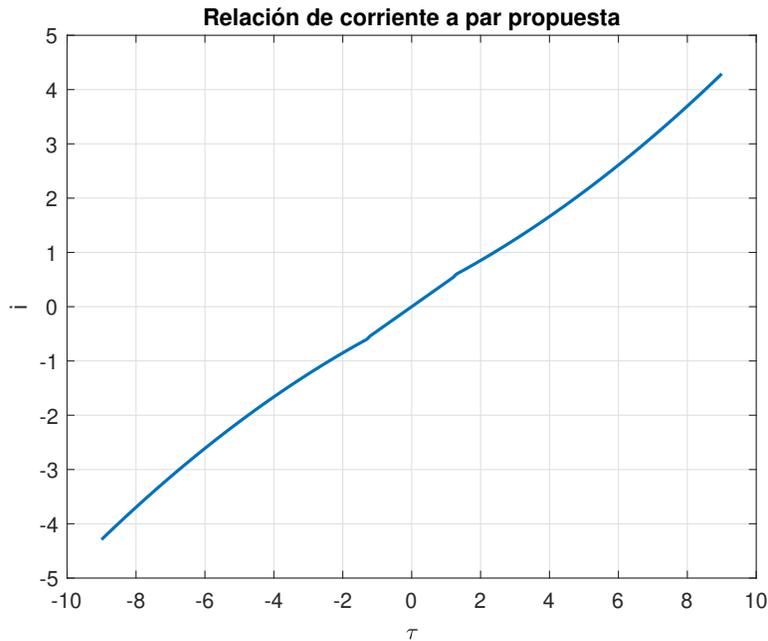


Figura 3.7 Relación de conversión de par a corriente.

que el motor puede girar en ambas direcciones. Una vez que se consiguió esta relación a través de la combinación de ambas funciones, se obtuvo la relación de conversión mostrada en la figura 3.7, una función a trozos definida por:

$$i = \begin{cases} 0.4351\tau & \text{si } -0.17 \leq \tau \leq 0.17, \\ 0.017226\tau^2 + 0.301767\tau + 0.179118 & \text{si } \tau > 0.17 \\ -0.017226\tau^2 - 0.301767\tau - 0.179118 & \text{si } \tau < -0.17. \end{cases} \quad (3.29)$$

Una vez que se tiene la conversión de par a corriente, se puede obtener la conversión de corriente a PWM utilizando la relación lineal de la ecuación 3.27 y luego dividiendo sobre el voltaje máximo del motor, es decir,

$$\text{PWM} = \frac{Ri}{12} = \frac{V}{12}. \quad (3.30)$$

## Capítulo 4

# Control por Modos Deslizantes

El control por modos deslizantes nace de la premisa de que, para un problema práctico de control, siempre habrá incertidumbres debidas a las perturbaciones externas, parámetros desconocidos o inexactos, y las llamadas dinámicas *parásitas* o *no modeladas*. El diseño de controladores que sean robustos a estas incertidumbres es un problema de gran importancia en la ingeniería de control.

Para el caso de un manipulador esto es especialmente cierto, ya que su estructura mecánica es compleja y altamente no lineal. Además, se tiene que considerar que hoy en día los manipuladores son utilizados en una amplia gama de aplicaciones, desde cargar objetos de diferentes dimensiones y pesos, hasta realizar tareas de alta precisión sobre diferentes superficies y entornos, lo cual se puede modelar como incertidumbre paramétrica o perturbaciones exógenas.

Para ilustrar el funcionamiento de un controlador por modos deslizantes, consideremos un sistema de segundo orden de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(t), \quad (4.1)$$

donde  $f(\mathbf{x}, t)$  es una función que contiene al modelo dinámico del sistema, sus parámetros inciertos y perturbaciones, mientras que  $\mathbf{u}(t)$  es la entrada de control.

Desarrollando el espacio de estados para visualizar mejor al sistema de segundo orden, esto es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(x_1, x_2, t) + u(t) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

tal que el término  $f(x_1, x_2, t)$  se asume acotado, es decir,  $|f(x_1, x_2, t)| \leq L \geq 0$ .

Cuando no existe entrada de control, esto es,  $u(t) = 0$ , el sistema desarrolla su comportamiento natural, tal como se muestra en el plano fase de la figura 4.1, a esta gráfica también se le conoce como **trayectorias del sistema**. Si se propone una dinámica compensada deseada para el sistema 4.1 de la forma:

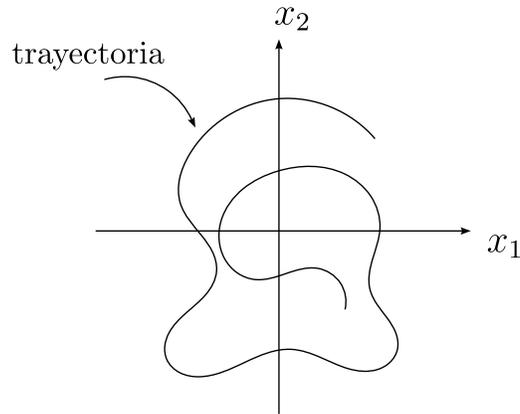


Figura 4.1 Visualización de la trayectoria de un sistema de segundo orden arbitrario.

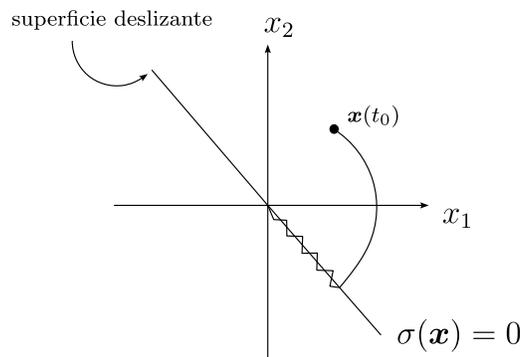


Figura 4.2 Espacio de estados con superficie deslizante

$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0, \quad c > 0, \quad (4.3)$$

dado que  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ , la solución general para 4.3 es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{-ct} \\ x_2(t) &= -cx_1(0)e^{-ct}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

debido a las exponenciales negativas, tanto  $x_1(t)$  como  $x_2(t)$  tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  de manera asintótica.

Es claro ver de 4.2 que, para un sistema mecánico, la entrada de control sólo nos permite modificar la velocidad y no la posición. Sin embargo, podemos proponer una superficie deslizante  $\sigma(\mathbf{x})$  de la forma:

$$\sigma(\mathbf{x}) = x_2 + cx_1, \quad c > 0 \quad (4.5)$$

en el espacio de estados y buscamos que  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ , entonces la superficie deslizante es una línea recta en el plano fase, tal como se muestra en la figura 4.2.

Para poder alcanzar convergencia asintótica de las variables  $x_1$  y  $x_2$  a cero, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t), x_2(t) = 0$ , con una tasa de convergencia como la de 4.4, debemos llevar a la variable deslizante a cero por medio de la variable de control  $u(t)$ . Esto se puede lograr aplicando técnicas de función de Lyapunov a la dinámica de la variable deslizante  $\sigma$  a partir de las ec. 4.2 y 4.5 [Shtessel, *et al.*, 2014].

$$\dot{\sigma} = cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u(t) = 0, \quad \sigma(0) = \sigma_0. \quad (4.6)$$

A través del análisis en [Shtessel, *et al.*, 2014], se nota que es necesario buscar un control que pueda atraer las trayectorias del sistema a la superficie de deslizamiento, y que una vez en ella, se mantengan ahí. La conclusión a la que se llega a través del análisis de Lyapunov es que es necesario que  $\sigma\dot{\sigma} \leq 0$ .

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = \sigma(cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u(t)). \quad (4.7)$$

Una función de control en  $u$  que lleve a las trayectorias de  $\sigma$  a cero en tiempo finito es:

$$u(t) = -cx_2 - \rho \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (4.8)$$

donde  $\rho > 0$  es una ganancia de diseño, dada por:

$$\rho = L + \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha > 0. \quad (4.9)$$

El control por modos deslizantes presenta el defecto de implementación en la función signo, donde el controlador puede presentar un comportamiento no deseado en la vecindad de cero, este comportamiento es conocido como *chattering* y consta de oscilaciones con una amplitud finita y una alta frecuencia que se puede ver como "zig-zag" en la señal de control.

En muchas aplicaciones prácticas —y en este caso particular, los motores de Corriente Directa (DC, por sus siglas en inglés)— es importante mitigar el efecto de *chattering* en el controlador, ya que puede ser perjudicial y reducir la vida útil del motor, además representa un gasto energético importante.

Los algoritmos de (Modos Deslizantes de Alto Orden (HOSM, por sus siglas en inglés)) han demostrado reducir el efecto del *chattering*, manteniendo la robustez de los Modos Deslizantes de primer orden y mejorando su precisión [Fridman y Levant, 2002]. La desventaja de imponer un Modo Deslizante de  $r$ -ésimo orden es la necesidad de conocer las derivadas de alto orden de las salidas del sistema,  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{r-1}$ . Sin embargo, en un caso especial de Modos Deslizantes de segundo orden, la información de la segunda derivada no es necesaria. Este es el llamado "Super-Twisting Algorithm (STA)" [Levant, 1998].

## 4.1. Algoritmo Super-Twisting

El algoritmo STA es una modificación del control por modos deslizantes descrito en 4.8 que busca reducir el efecto de *chattering* debido a la discontinuidad de la función signo. El STA parte de la idea

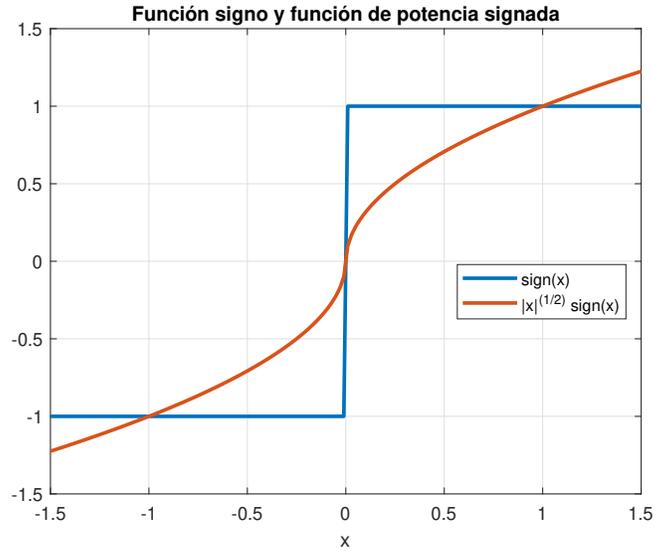


Figura 4.3 Comparación de la función signo y la potencia signada

de que el control de *switcheo* es impráctico y un control continuo es una necesidad.

El algoritmo STA usa el concepto de *potencia signada*, que es una función continua, cuyo comportamiento es similar al de la función signo, pero no presenta la discontinuidad en cero. De la figura 4.2 podemos ver la diferencia de la potencia signada respecto a la función signo. La potencia signada se puede definir como:

$$[x]^{\frac{1}{\alpha}} := |x|^{\frac{1}{\alpha}} \text{sgn}(x) \quad (4.10)$$

La función de control para el algoritmo STA [Shtessel, *et al.*, 2014], está dada por:

$$\begin{cases} u = c [\sigma]^{\frac{1}{2}} + \nu \\ \dot{\nu} = b \text{sgn}(\sigma) \end{cases}, \quad c = 1.5\sqrt{L}, \quad b = 1.1L. \quad (4.11)$$

El STA tiene las siguientes propiedades [Shtessel, *et al.*, 2014]:

- Es un controlador de segundo orden, ya que lleva a la variable deslizante y su derivada a cero en tiempo finito, i.e.,  $\exists t_r > 0 : \sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0 \forall t \geq t_r$ .
- Es un controlador continuo, ya que  $c [\sigma]^{\frac{1}{2}}$  y el término  $\nu = b \int \text{sgn}(\sigma) dt$  son continuos. Se puede decir que el efecto de *chattering* del término  $\text{sgn}(\sigma)$  se "esconde" bajo la integral.

Para el caso de un manipulador de 3 GDL, se puede utilizar esta ley de control en cada canal, es decir, en cada articulación. Sin embargo, una versión multivariable del STA se propone en [Nagesh y Edwards, 2014]. Usar un controlador con estas características por sobre el presentado anteriormente en 4.11 presenta la ventaja de que no es necesario sintonizar las ganancias de diseño para

cada articulación, ya que es posible utilizar las ganancias propuestas en [Levant, 1998].

Una versión multivariable del STA está definida en [Nagesh y Edwards, 2014] con la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{sta} &= -k_1 \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|^{1/2}} \right) - k_2 \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} &= -k_3 \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \right) - k_4 \boldsymbol{\sigma},\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices de ganancias de diseño, usualmente diagonales, y  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  es un vector auxiliar que se representa al término integral. Esta contempla todos los canales (es decir un vector, no una sola variable) y en lugar de una función signo o una potencia signada, usa la división por la norma, i.e.  $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|^{1/\alpha}}$ , donde  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  es un vector que contiene las superficies de deslizamiento de las  $n$  articulaciones.

## 4.2. Par Calculado + STA multivariable

A partir de la ley de control de Par Calculado descrita en 2.26, se propone añadir la entrada robusta del STA multivariable definida en 4.12 de la forma

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{u}_{sta}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}).\tag{4.13}$$

Tomando como referencia la ecuación de lazo cerrado 2.28, y sustituyendo el término PD por el término 4.12, el sistema en lazo cerrado de 4.13 está dado por

$$\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{u}_{sta} = 0.\tag{4.14}$$

## 4.3. Slotine-Li + STA multivariable

Una idea similar se puede aplicar al controlador Slotine-Li descrito en 2.30, esto es, sustituyendo el término PD del controlador Slotine-Li por el término STA multivariable, como se muestra en la ecuación 4.15:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_{sta} + M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\mathbf{q}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) [\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] + G(\mathbf{q})\tag{4.15}$$

Teniendo una ecuación en lazo cerrado de la forma:

$$M(\mathbf{q}) [\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] = -\mathbf{u}_{sta}\tag{4.16}$$



## Capítulo 5

# Implementación de controladores en el QArm

Luego de obtener la dinámica del manipulador, se vuelve necesario buscar un control que pueda seguir una trayectoria en el espacio articular lidiando con perturbaciones, incertidumbre paramétrica y no linealidades. En este capítulo se presentan los resultados tanto simulados como experimentales de la implementación de distintos controladores en el manipulador, así como la comparación de los mismos.

### 5.1. Trayectorias de referencia

Como se definió anteriormente, el objetivo de control es de seguimiento, por lo que la elección de una trayectoria apropiada y desafiante para los controladores es crucial. Para este propósito se eligieron las siguientes trayectorias, propuestas en [Kelly, *et al.*, 2005]:

$$q_{d_i}(t) = b_i \left[ 1 - e^{-2t^3} \right] + c_i \left[ 1 - e^{-2t^3} \right] \sin(\omega_i t) \quad (5.1)$$

donde  $b_i$ ,  $c_i$  y  $\omega_i$  son constantes que definen la amplitud, frecuencia y fase de la senoide, respectivamente, para cada articulación. Para este trabajo se eligieron los valores de la tabla 5.1 para las constantes de las trayectorias.

Notar que las trayectorias tienen características importantes:

Tabla 5.1 Parámetros de las trayectorias

Articulación	$b_i$	$c_i$	$\omega_i$
<b>1</b>	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$
<b>2</b>	$\frac{\pi}{7}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$
<b>3</b>	$-\frac{\pi}{7}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{7}$

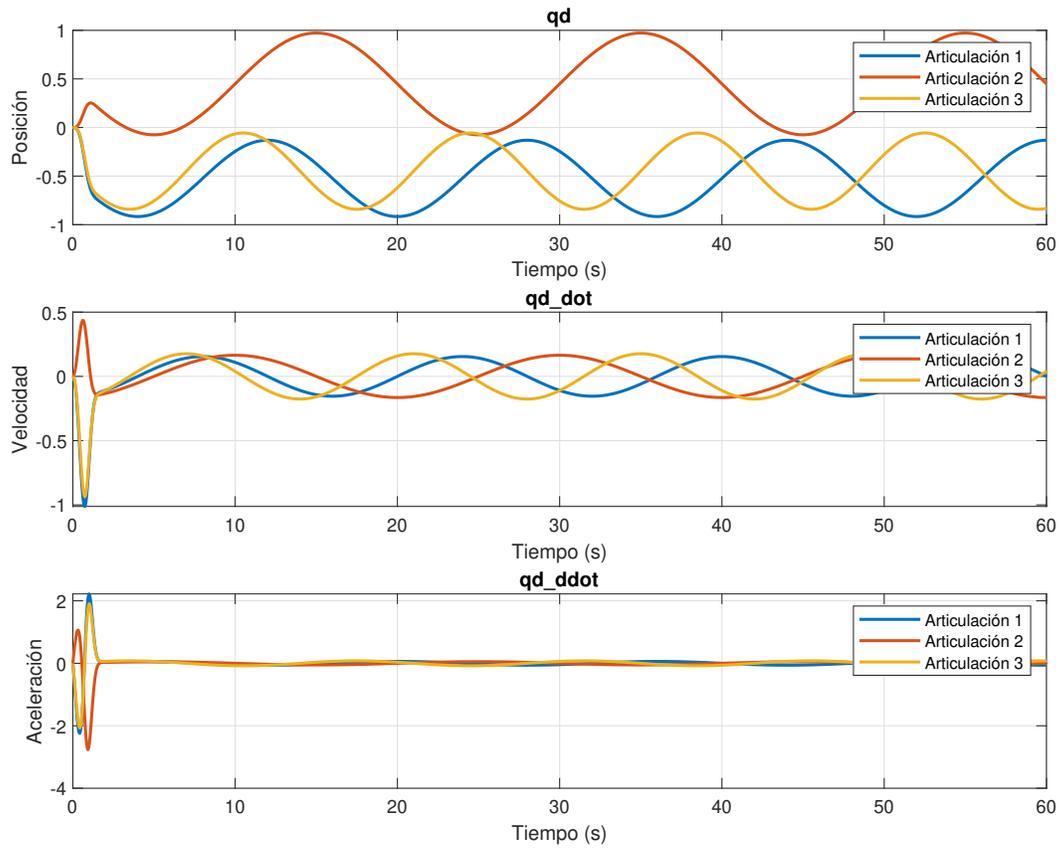


Figura 5.1 Trayectorias de referencia y sus derivadas para cada articulación.

- La trayectoria contiene un término senoidal para evaluar el rendimiento del controlador siguiendo movimientos periódicos.
- También contiene un término creciente para llevar al robot al punto de operación sin llevar a los actuadores a saturación.
- El módulo y la frecuencia se deben elegir cuidadosamente para evitar saturación de los actuadores.
- La trayectoria es continua y diferenciable.

Una gráfica de las trayectorias deseadas, así como de sus derivadas, se muestra en la figura 5.1.

La primera y segunda derivadas de 5.1 obtenidas directamente de forma analítica son:

$$\dot{q}_{d_i}(t) = 6b_i t^2 e^{-2t^3} + 6c_i t^2 e^{-2t^3} \sin(\omega_i t) + [c_i - c_i e^{-2t^3}] \omega_i \cos(\omega_i t) \quad (5.2)$$

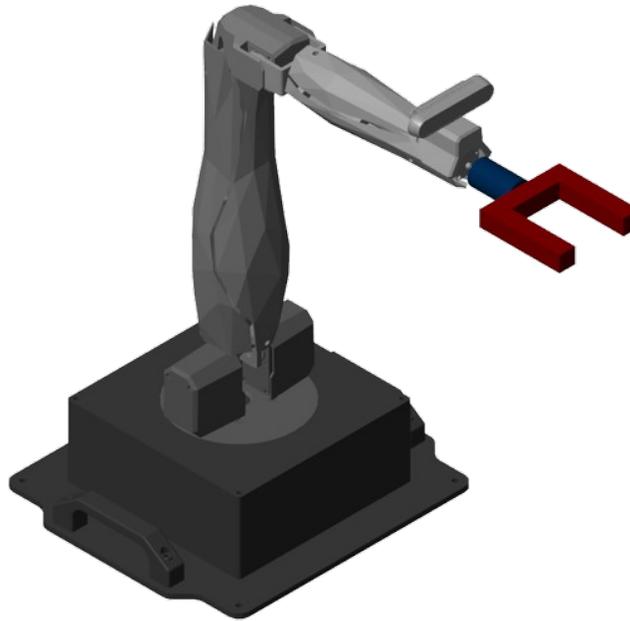


Figura 5.2 Modelo CAD del robot manipulador QArm.

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_{d_i}(t) = & 12b_i t e^{-2t^3} - 36b_i t^4 e^{-2t^3} + 12c_i t e^{-2t^3} \sin(\omega_i t) \\
 & - 36c_i t^4 e^{-2t^3} \sin(\omega_i t) + 12c_i t^2 e^{-2t^3} \omega_i \cos(\omega_i t) \\
 & - [c_i - c_i e^{-2t^3}] \omega_i^2 \sin(\omega_i t)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

## 5.2. Simulaciones

Para las simulaciones se utilizó un modelo en Diseño Asistido por Computadora (CAD, por sus siglas en inglés) del manipulador, el cual fue importado a MATLAB/Simulink usando la paquetería de Simscape, la cual permite modelar sistemas físicos de manera más sencilla. En la figura 5.2 se muestra el modelo 3D del manipulador [Quanser, 2022]. Dado que la pinza no está modelada por el fabricante, se agregaron cuerpos rígidos de las mismas dimensiones que la pinza real, para poder visualizar esta parte.

Además, no se aplicó movimiento de la cuarta articulación, es decir, la trayectoria se puso en cero, ya que no es de interés para este trabajo, a pesar de que se incluyó en el modelado del capítulo anterior. Otra consideración es que a las simulaciones se les agregó una componente de “perturbación” en forma de sumas senoidales, con el fin de simular un ambiente no ideal y perturbaciones al sistema. En la figura 5.3 se muestra la gráfica de esta función de perturbación creada a partir de la siguiente suma de senos:

$$u_{pert_i}(t) = \sum_{i=1}^4 A_i \sin(2\pi f_i t), \tag{5.4}$$

donde  $A_i$  es la amplitud de la senoide  $i$  y  $f_i$  es la frecuencia de la senoide  $i$ , y se eligieron los valores en la tabla 5.2 para las amplitudes y frecuencias de las senoides, estas amplitudes y frecuencias se

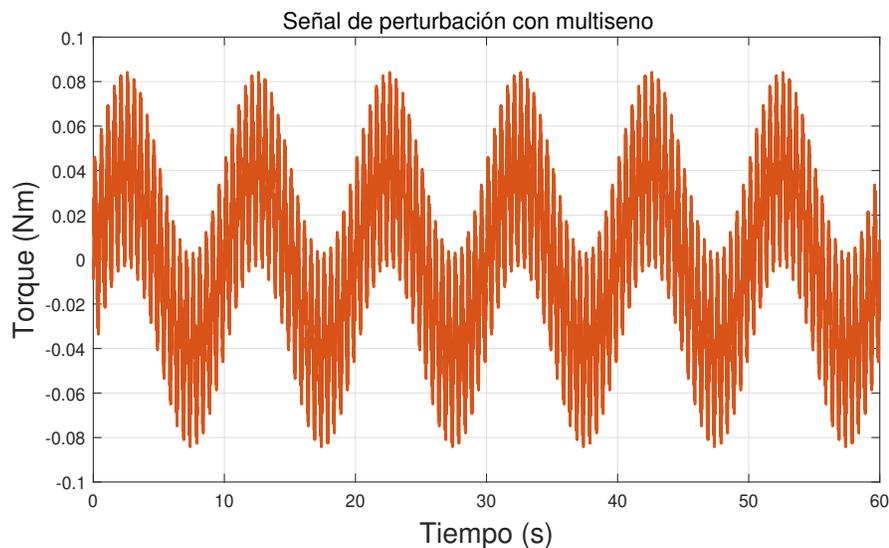


Figura 5.3 Función de perturbación para las simulaciones.

generaron de manera aleatoria.

Para la implementación de las simulaciones se programó un modelo en Simulink, el cual se muestra en la figura 5.4. En este modelo se implementaron los controladores a probar con Matlab Functions<sup>1</sup>, así como las trayectorias deseadas, el modelo del manipulador y la perturbación.

Después se obtuvieron las gráficas de interés de cada simulación, como lo son las gráficas de error de seguimiento, posiciones, velocidades y torques de las articulaciones, así como el comportamiento de la superficie deslizante en los controladores propuestos en 4.13 y 4.15.

### 5.2.1. Controlador por Par Calculado

Atendiendo a la ley de control 2.26 se implementó un controlador por par calculado en Simulink, a través de los *Matlab Functions* mencionados anteriormente.

<sup>1</sup>Los Matlab Functions son bloques de simulink en los que se puede incluir código de Matlab a forma de funciones

Senoide	Amplitud	Frecuencia
1	0.0407	0.1
2	0.0064	55
3	0.0307	2
4	0.0066	200

Tabla 5.2 Amplitudes y frecuencias de las senoides

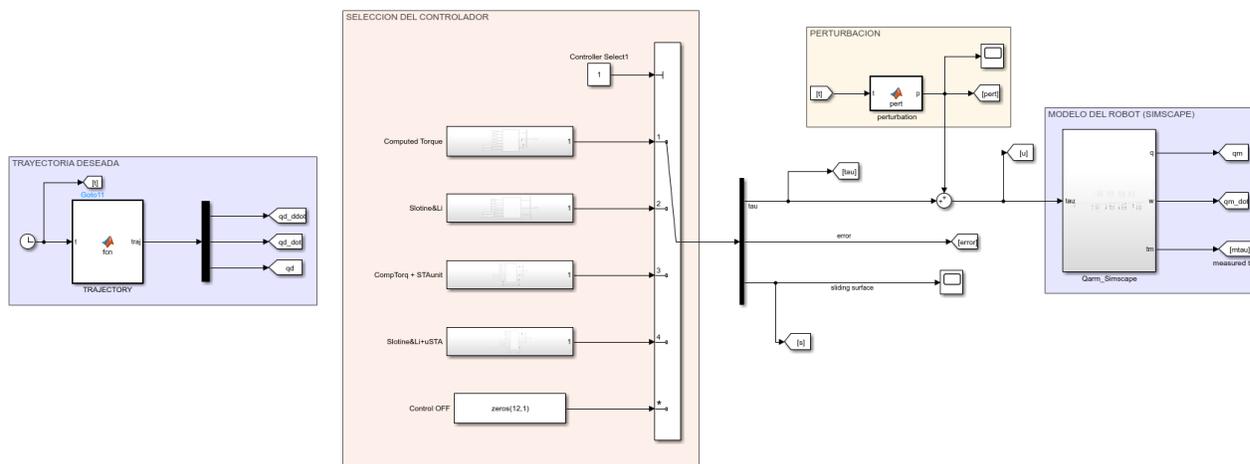


Figura 5.4 Modelo de Simulink para las simulaciones.

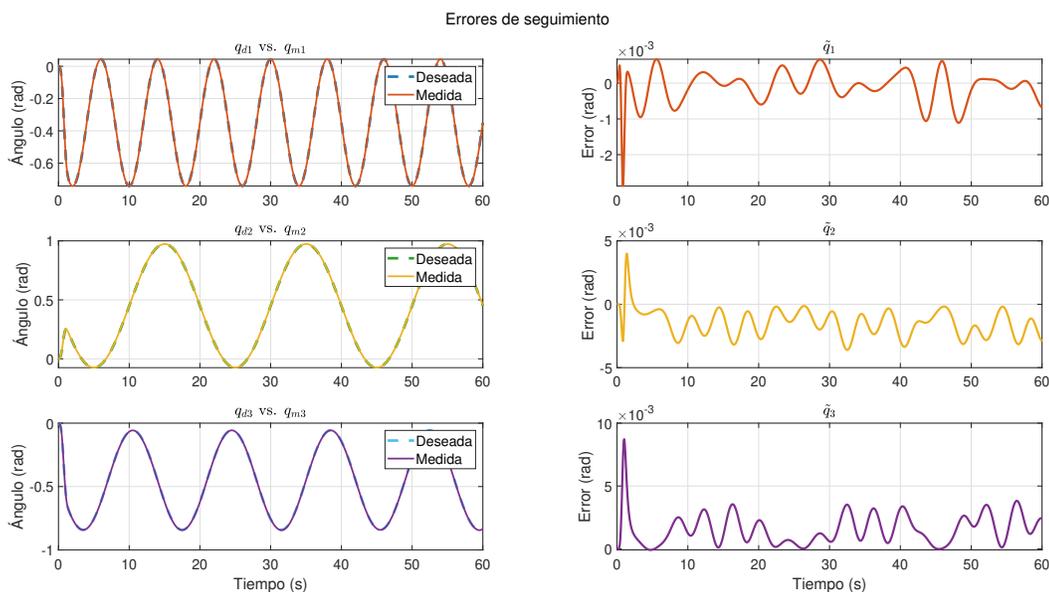


Figura 5.5 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador por Par Calculado sin perturbación.

Primero se realizó la simulación en Simulink usando el controlador por Par Calculado, con las trayectorias de referencia definidas en 5.1, y sin perturbación. Los errores de seguimiento se muestran en la figura 5.5.

Luego, se realizó la simulación con perturbaciones, y los resultados se muestran en la figura 5.6.

Se puede observar que el control por Par Calculado es efectivo, y tiene cierto nivel de robustez gracias al término PD, sin embargo ante perturbaciones externas, el controlador no es capaz de seguir la trayectoria de referencia de manera precisa.

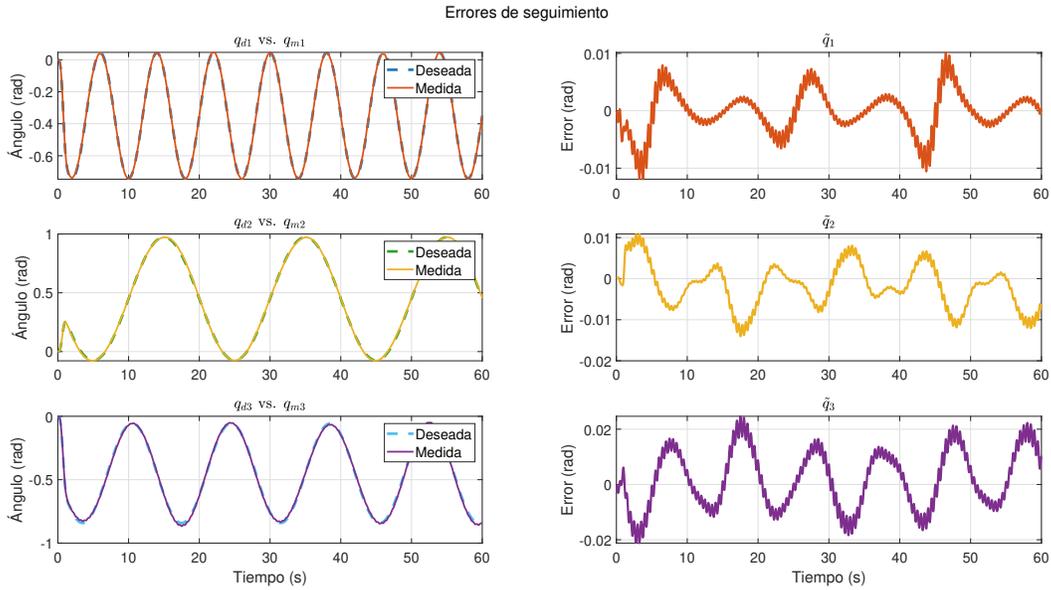


Figura 5.6 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador por Par Calculado con perturbación.

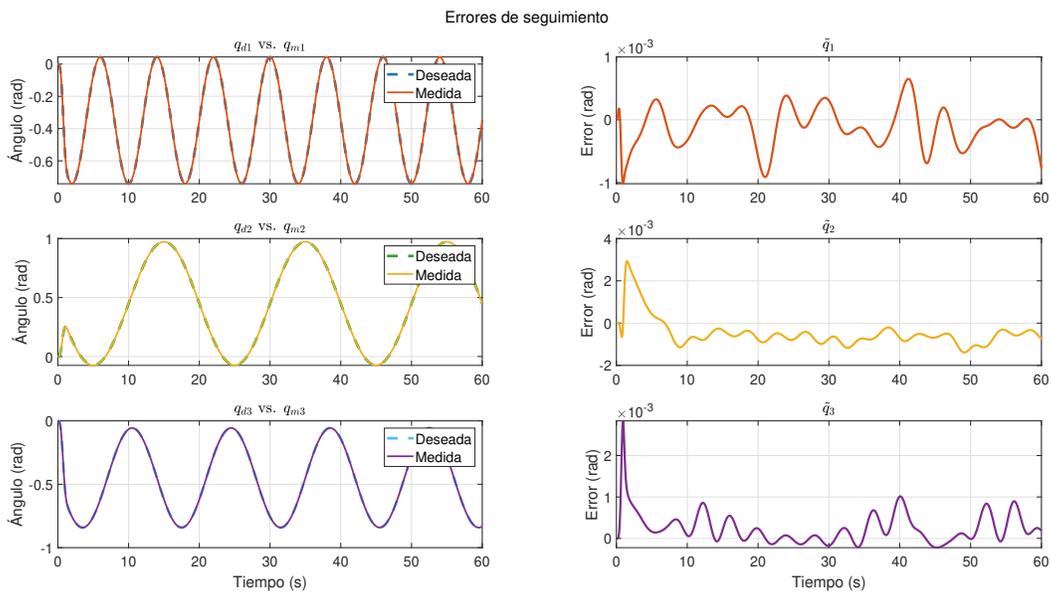


Figura 5.7 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li sin perturbación.

### 5.2.2. Controlador Slotine-Li

La versión no adaptable del controlador Slotine-Li fue programado siguiendo la ley de control descrita en 2.30, y se implementó en Simulink. Se realizaron las simulaciones sin perturbaciones, y los resultados se muestran en la figura 5.7.

Posteriormente, se añadieron perturbaciones a la simulación, y los resultados se muestran en la figura 5.8.

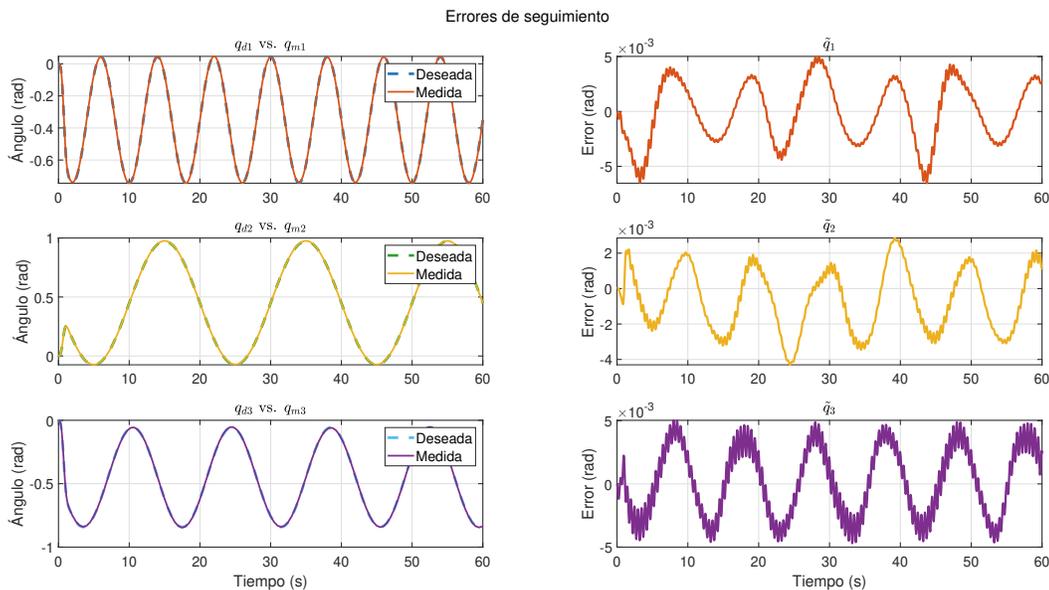


Figura 5.8 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li con perturbación.

Se puede observar un nivel de mejora con respecto al control por Par Calculado en cuanto a la robustez ante perturbaciones, el controlador Slotine-Li es capaz de seguir la trayectoria de referencia de manera más precisa, el error de seguimiento es menor en casi un orden de magnitud.

### 5.2.3. Controlador Par Calculado + STA multivariable

El controlador Super-Twisting fue implementado en Simulink siguiendo la ley de control propuesta en 4.13. Se realizaron las simulaciones sin perturbaciones, y los resultados del comportamiento del seguimiento, así como de la señal de control y la superficie se muestran en las figuras 5.9 y 5.10, respectivamente.

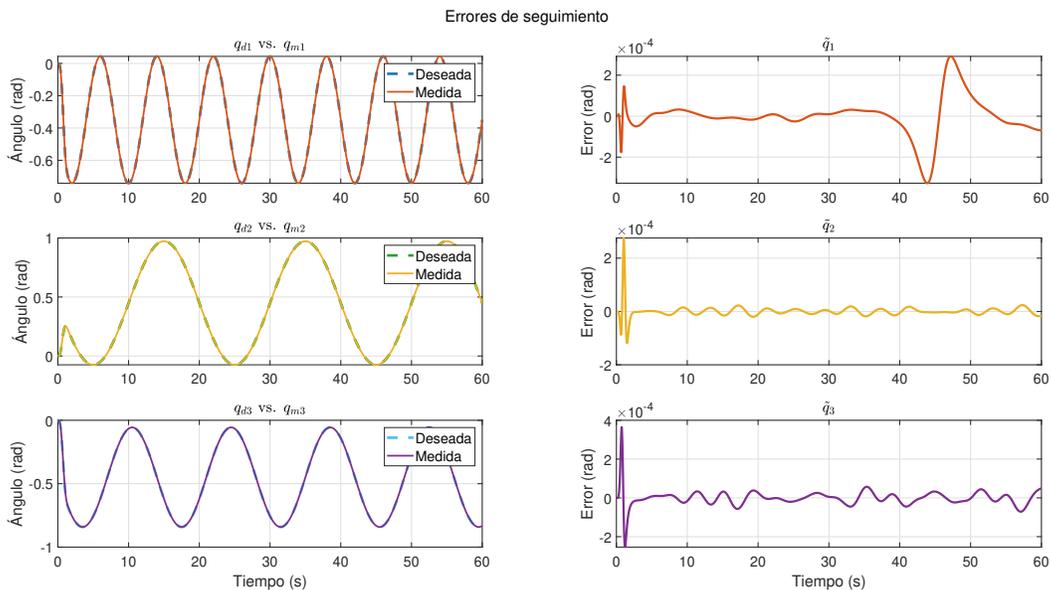


Figura 5.9 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Par Calculado + STA sin perturbaciones

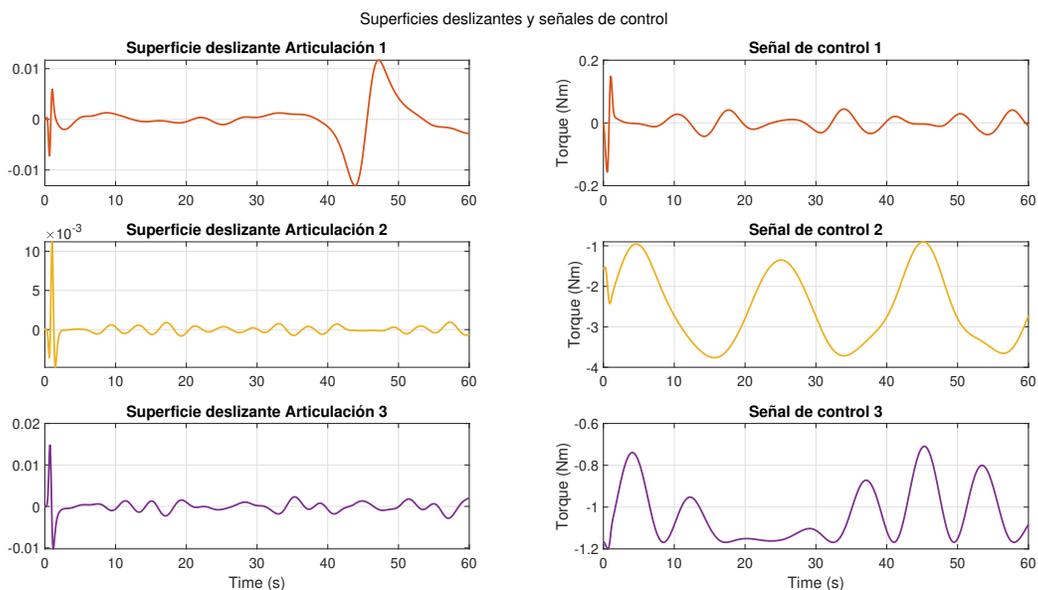


Figura 5.10 Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Par Calculado + STA sin perturbaciones

Posteriormente, se añadieron perturbaciones a la simulación, y los resultados se muestran en las figuras 5.11 y 5.12.

En este caso se observa la capacidad de la entrada robusta del STA multivariable para seguir la trayectoria de referencia en presencia de perturbaciones, el error de seguimiento es menor que en su

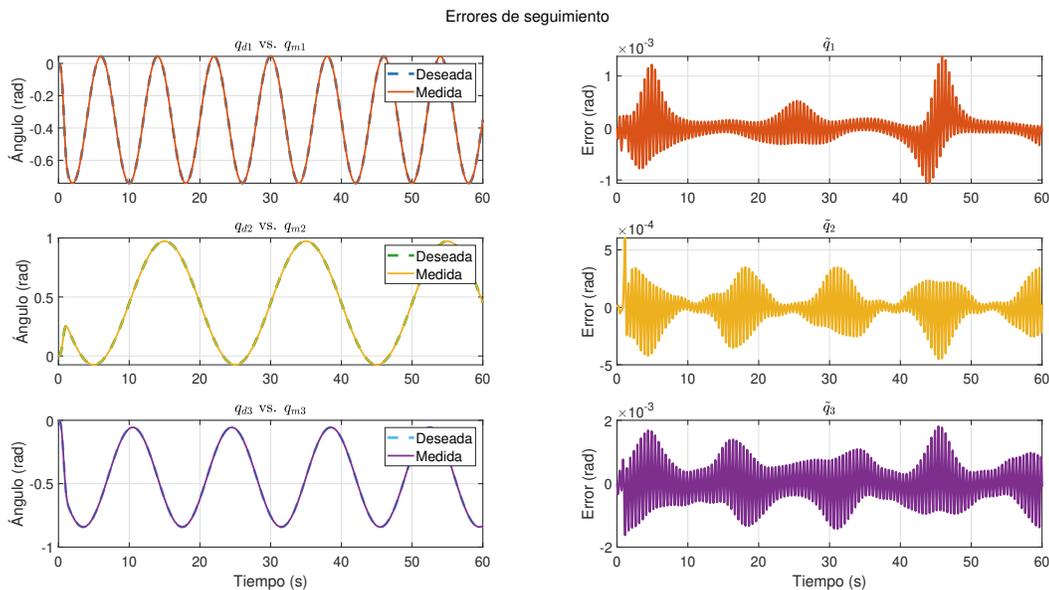


Figura 5.11 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Par Calculado + STA con perturbaciones

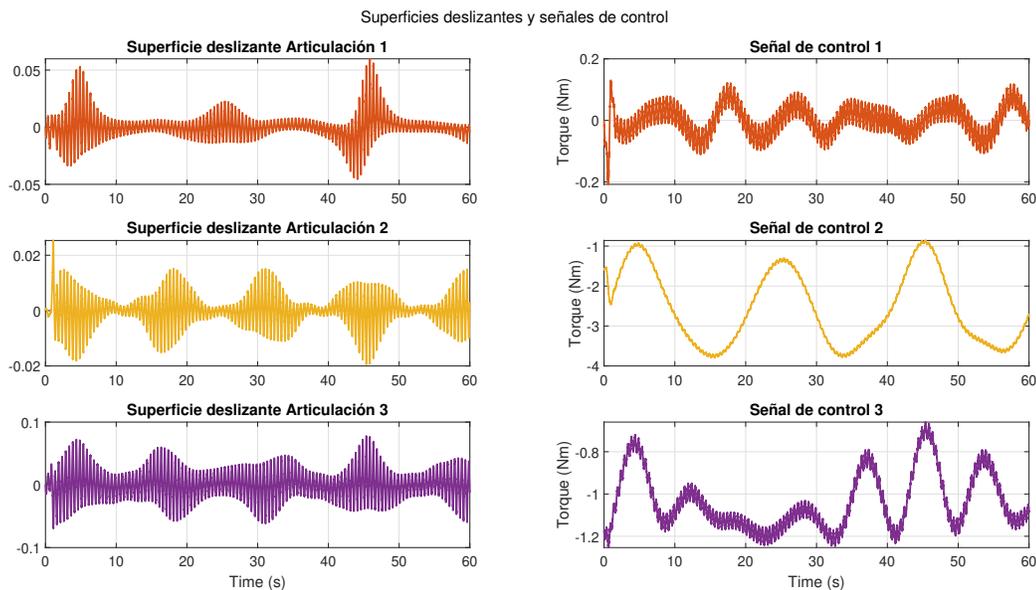


Figura 5.12 Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Par Calculado + STA con perturbaciones

contraparte sin STA y se mantiene con un error bajo incluso ante las perturbaciones aplicadas.

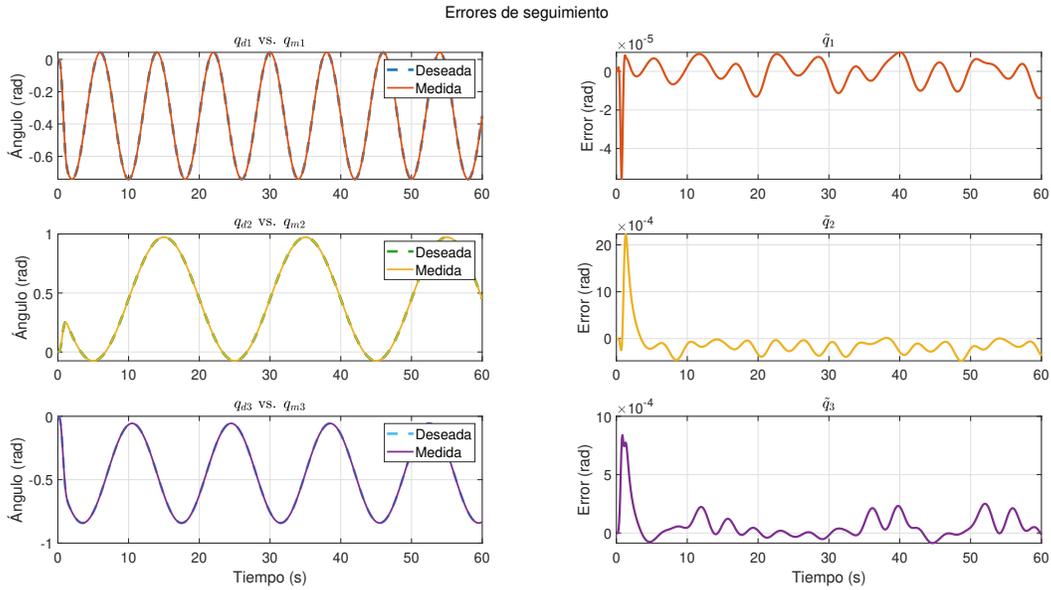


Figura 5.13 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li + STA sin perturbaciones

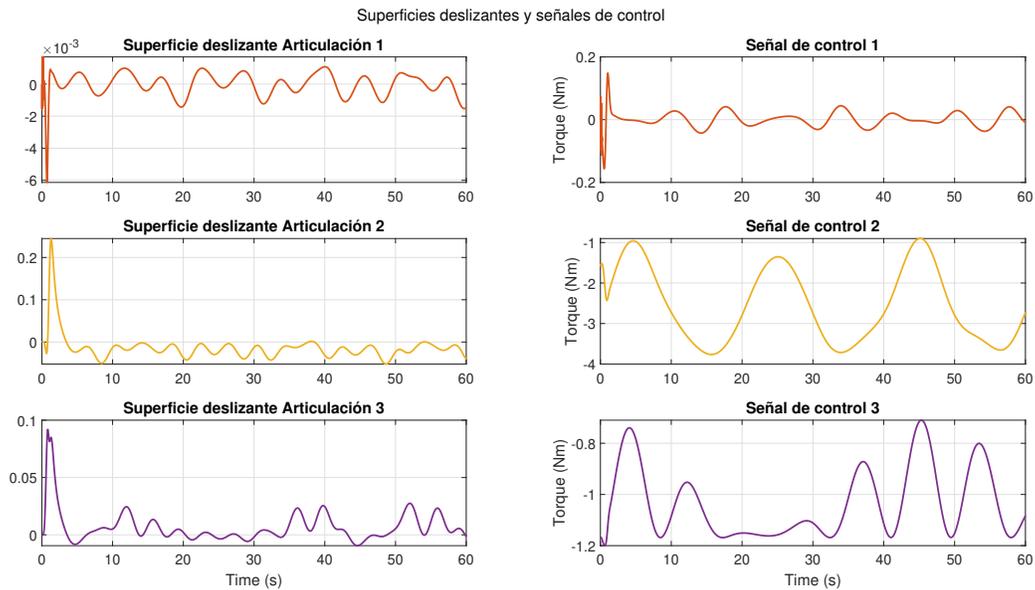


Figura 5.14 Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Slotine-Li + STA sin perturbaciones

#### 5.2.4. Controlador Slotine-Li + STA multivariable

El controlador propuesto en 4.15 fue implementado en Simulink, y se realizaron las simulaciones sin perturbaciones, y los resultados del comportamiento del seguimiento, así como de la señal de control y la superficie se muestran en las figuras 5.13 y 5.14, respectivamente.

Posteriormente, se añadieron perturbaciones a la simulación, y los resultados se muestran en las figuras 5.15 y 5.16.

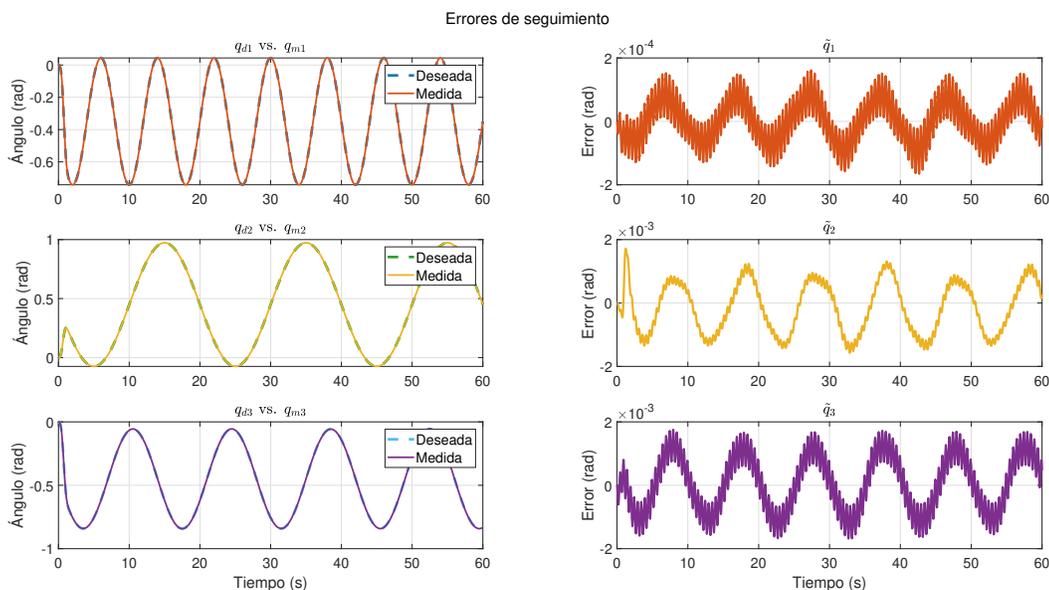


Figura 5.15 Simulación. Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li + STA con perturbaciones

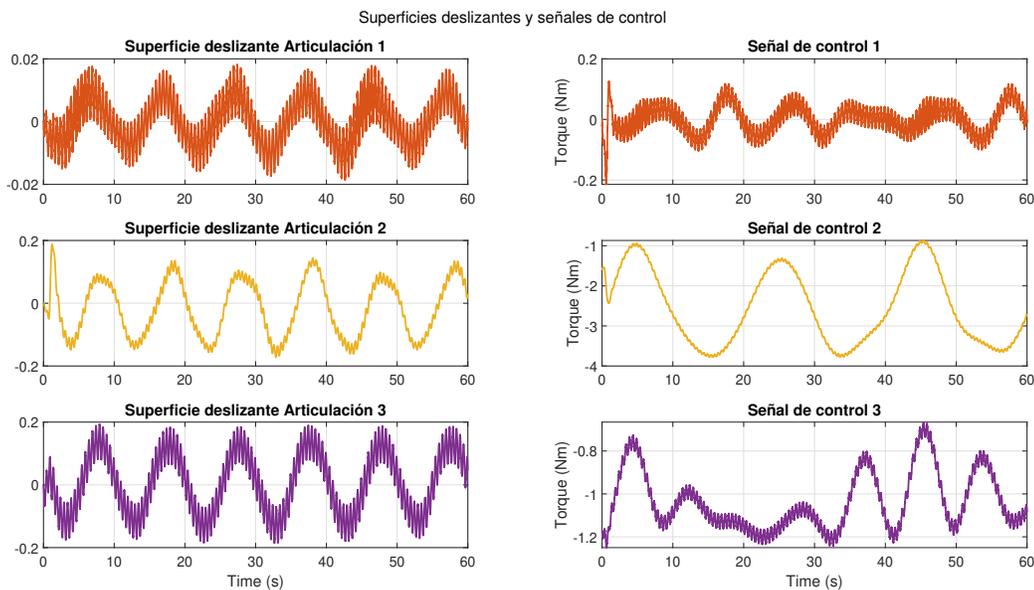


Figura 5.16 Simulación. Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Slotine-Li + STA con perturbaciones

Se observó una mejora en el seguimiento de la trayectoria con respecto al controlador Slotine-Li sin STA, y se mantuvo un error bajo ante las perturbaciones aplicadas, aunque el resultado no

es tan contrastante debido a que el controlador sin STA ya tenía un buen desempeño en las simulaciones.

### 5.3. Resultados Experimentales

Para la implementación de los controladores en el QArm, se utilizó el mismo modelo de Simulink como base, pero se añaden los bloques de comunicación con el hardware dados por el fabricante. En la figura 5.17 se muestra el modelo de Simulink para la implementación de los controladores en el QArm.

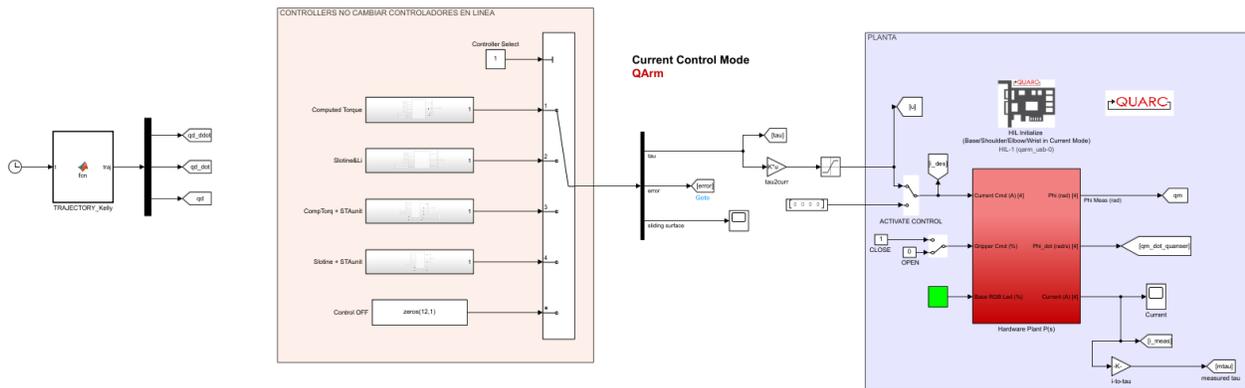


Figura 5.17 Modelo de simulink para la implementación de controladores en el QArm.

Luego de realizar un experimento con duración de un minuto para cada uno de los controladores propuestos, se obtuvieron los resultados de seguimiento de las trayectorias de referencia.

#### 5.3.1. Controlador por Par Calculado

Se realizó la implementación del controlador por Par Calculado en el manipulador real, y se obtuvieron los resultados de seguimiento de las trayectorias de referencia. Los resultados se muestran en la figura 5.18.

Se puede observar un considerable error en el seguimiento de trayectorias, lo cual se puede atribuir a la incertidumbre paramétrica y dinámicas no modeladas del manipulador, el control por Par Calculado no es capaz de seguir la trayectoria de referencia de manera precisa, a pesar de que se buscó exhaustivamente de manera experimental la sintonización de las ganancias del controlador.

#### 5.3.2. Controlador Slotine-Li

Los resultados de la implementación del controlador Slotine-Li para seguimiento de trayectoria en el Quanser QArm se muestran en la figura 5.19.

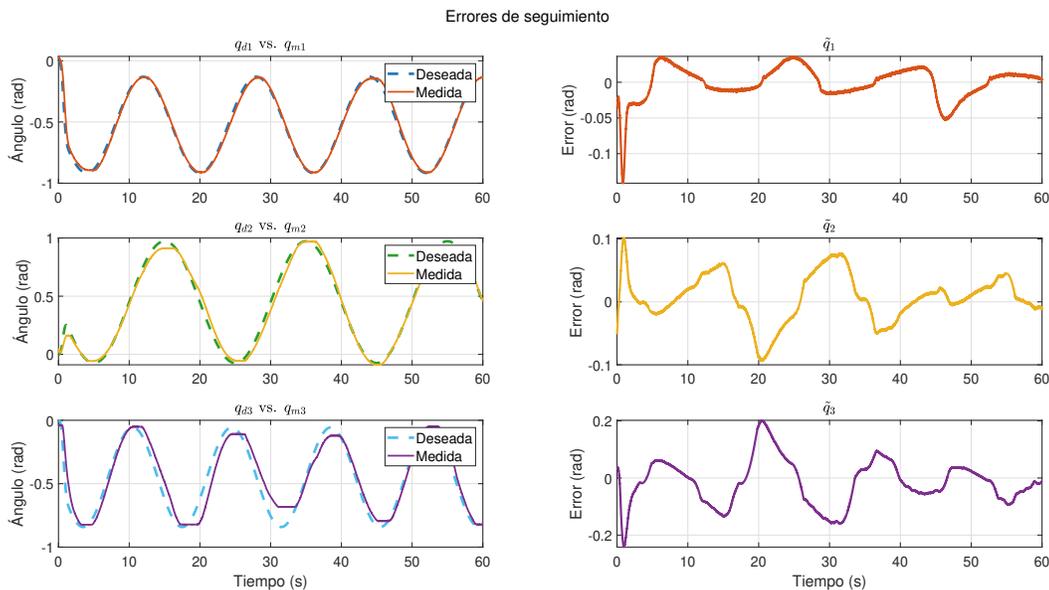


Figura 5.18 Errores de seguimiento para el controlador por Par Calculado.

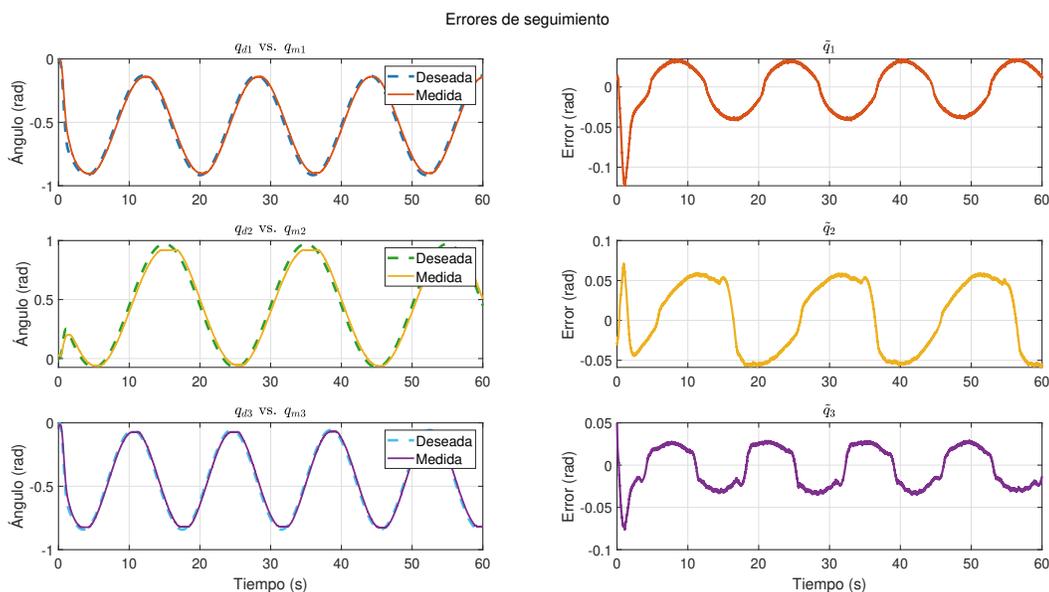


Figura 5.19 Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li.

El controlador Slotine-Li es capaz de realizar un seguimiento apropiado de las trayectorias, a pesar de que se observa un error de seguimiento en la articulación 2, el controlador es capaz de seguir la trayectoria de referencia de manera aceptable.

### 5.3.3. Controlador Par Calculado + STA multivariable

Los resultados de la implementación del controlador Par Calculado + STA multivariable, tal como se propone en 4.13, para seguimiento de trayectoria en el Quanser QArm se muestran en la figura 5.20, mientras que el comportamiento de la señal de control y de la superficie deslizante se muestra en la figura 5.21.

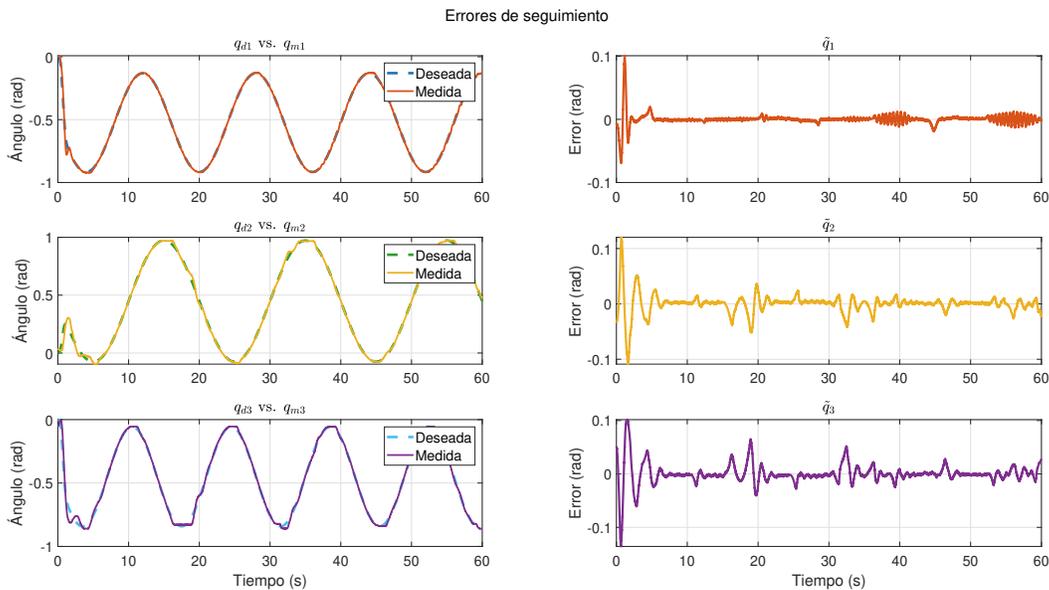


Figura 5.20 Errores de seguimiento para el controlador Par Calculado + STA multivariable.

Los resultados experimentales revelan una evidente mejora en el rendimiento, el controlador Par Calculado + STA multivariable es capaz de seguir la trayectoria de referencia de manera precisa, demostrando que la entrada robusta del STA multivariable puede lidiar con las incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas del manipulador.

### 5.3.4. Controlador Slotine-Li + STA multivariable

Los resultados de la implementación del controlador Slotine-Li + STA multivariable propuesto en 4.15 para seguimiento de trayectoria en el Quanser QArm se muestran en la figura 5.22, mientras que el comportamiento de la señal de control y de la superficie deslizante se muestra en la figura 5.23.

Este controlador demuestra el mejor desempeño entre los controladores probados experimentalmente, el controlador Slotine-Li + STA multivariable es capaz de seguir la trayectoria de referencia de manera precisa, si bien el controlador Slotine-Li ya tenía un buen desempeño, la entrada robusta del STA multivariable parece lidiar correctamente con incertidumbres, mejorando el desempeño.

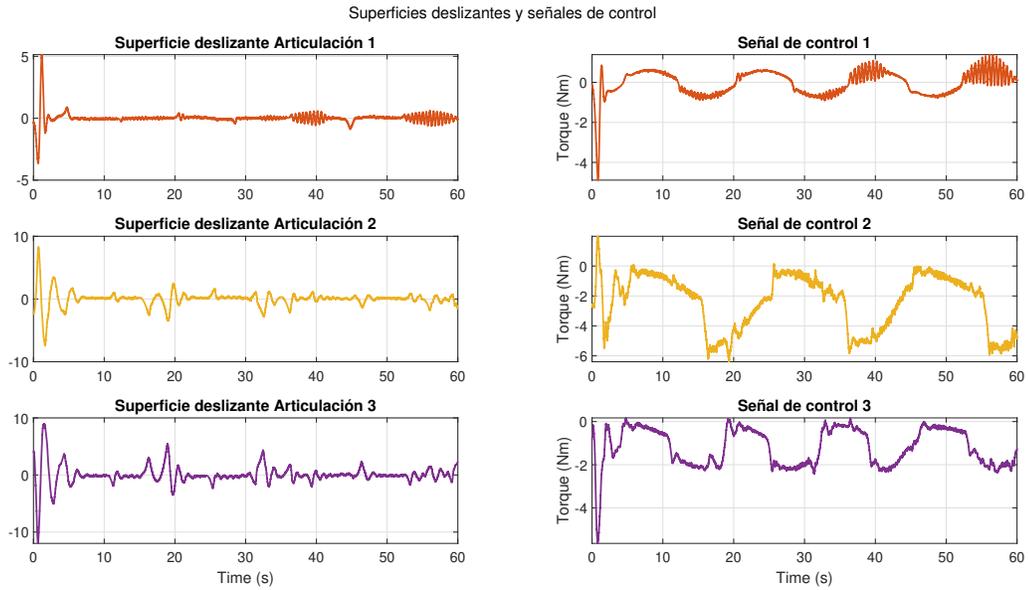


Figura 5.21 Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Par Calculado + STA multivariable.

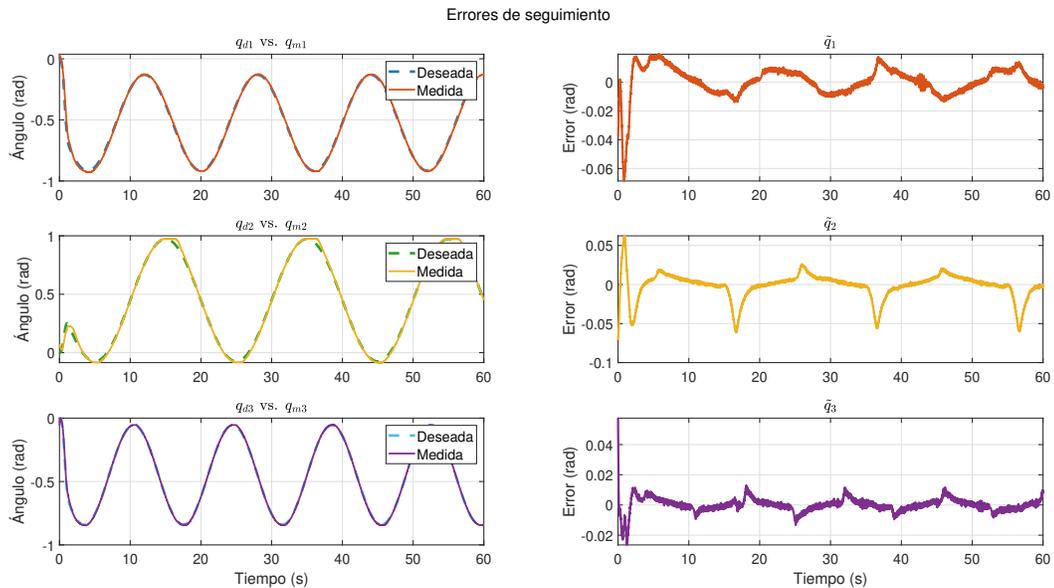


Figura 5.22 Errores de seguimiento para el controlador Slotine-Li + STA multivariable.

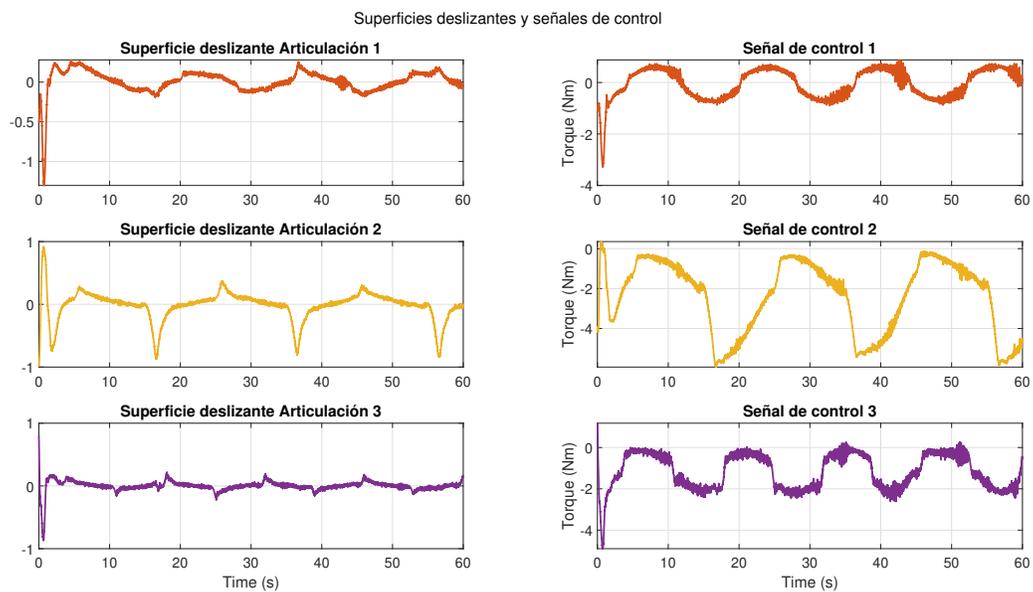


Figura 5.23 Comportamiento de la superficie deslizante y la señal de control: Slotine-Li + STA multivariable.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En el presente trabajo se ha demostrado que la incorporación del algoritmo STA multivariable a los denotados *controladores clásicos*, como el Control por Par Calculado y el controlador Slotine-Li, mejora significativamente el rendimiento del manipulador robótico en el seguimiento de trayectorias. La robustez del sistema se ve incrementada, permitiendo mitigar los efectos de dinámicas no modeladas y perturbaciones externas, lo que se traduce en un seguimiento de trayectorias más preciso.

Uno de los aspectos destacados de los esquemas de control propuestos es el bajo impacto del fenómeno de *chattering*, comúnmente asociado a los controladores basados en modos deslizantes. La implementación del STA multivariable proporciona una acción de control suave y continua, evitando la presencia de oscilaciones en la señal de control, ya que estas pueden ser perjudiciales y comprometer la integridad mecánica del manipulador y reducir el desempeño del controlador.

Los resultados experimentales obtenidos respaldan la efectividad del STA multivariable como una adición robusta a los controladores convencionales. La combinación de técnicas de control basadas en modelo, con el enfoque robusto del STA multivariable, demostró ser una estrategia efectiva para mejorar el rendimiento de los manipuladores robóticos en tareas de seguimiento de trayectorias en presencia de incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas.

### 6.1. Trabajo Futuro

A pesar de los resultados prometedores obtenidos en este trabajo, existen áreas de oportunidad que pueden ser exploradas en futuras investigaciones. Algunas de las posibles extensiones de este trabajo son:

- **Análisis de estabilidad:** se propone realizar un análisis exhaustivo de la estabilidad de los controladores propuestos. Este análisis permitirá entender mejor las condiciones bajo las cuales los controladores garantizan un desempeño estable y robusto.

- **Sintonización y cálculo de ganancias:** asimismo, se sugiere explorar métodos de sintonización de ganancias de manera analítica, lo que podría optimizar el desempeño del sistema y facilitar su implementación en aplicaciones prácticas.
- **Evaluación de algoritmos mejorados del STA multivariable:** Investigar la implementación de versiones avanzadas del STA multivariable, como los algoritmos con ganancias adaptables, para mejorar la adaptabilidad y el rendimiento del control en diversas condiciones operativas.
- **Exploración de otros controladores robustos:** Probar otros esquemas de control robusto, tales como controladores basados en esquemas PID-Like, para comparar su efectividad y potencialmente encontrar soluciones aún más eficientes y precisas para el control de manipuladores robóticos.

# Apéndice A

## Modelado dinámico del QArm

### A.1. Cinemática directa

Como fue descrito en la sección 2.5, el primer requisito para obtener las ecuaciones de movimiento de un manipulador es el conocimiento de la cinemática directa. Para obtener la cinemática directa del manipulador QArm es necesario definir un sistema de referencia para cada eslabón según las normas de Denavit-Hartenberg, esto es mostrado en la figura A.1.

Una vez que se asignaron los ejes coordenados a cada articulación, se procedió construir la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, la cual se muestra en la tabla A.1.

Tabla A.1 Parámetros de Denavit-Hartenberg del manipulador QArm

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
<b>1</b>	0	$-\frac{\pi}{2}$	$L_1$	$\theta_1$
<b>2</b>	$\lambda_2$	0	0	$\theta_2$
<b>3</b>	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\theta_3$
<b>4</b>	0	0	$\lambda_3$	$\theta_4$

Nótese que el manipulador mostrado en la figura A.1 representa su posición inicial o *Home*, en la cual, el vector de ángulos está dado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta - \frac{\pi}{2} \\ -\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Los actuadores y encoders del manipulador están calibrados en esta posición, por lo que si se comanda una posición de  $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  el manipulador debería regresar a esta posición, donde los encoders tendrán una lectura de  $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Es importante considerar este mapeo del espacio articular cuando

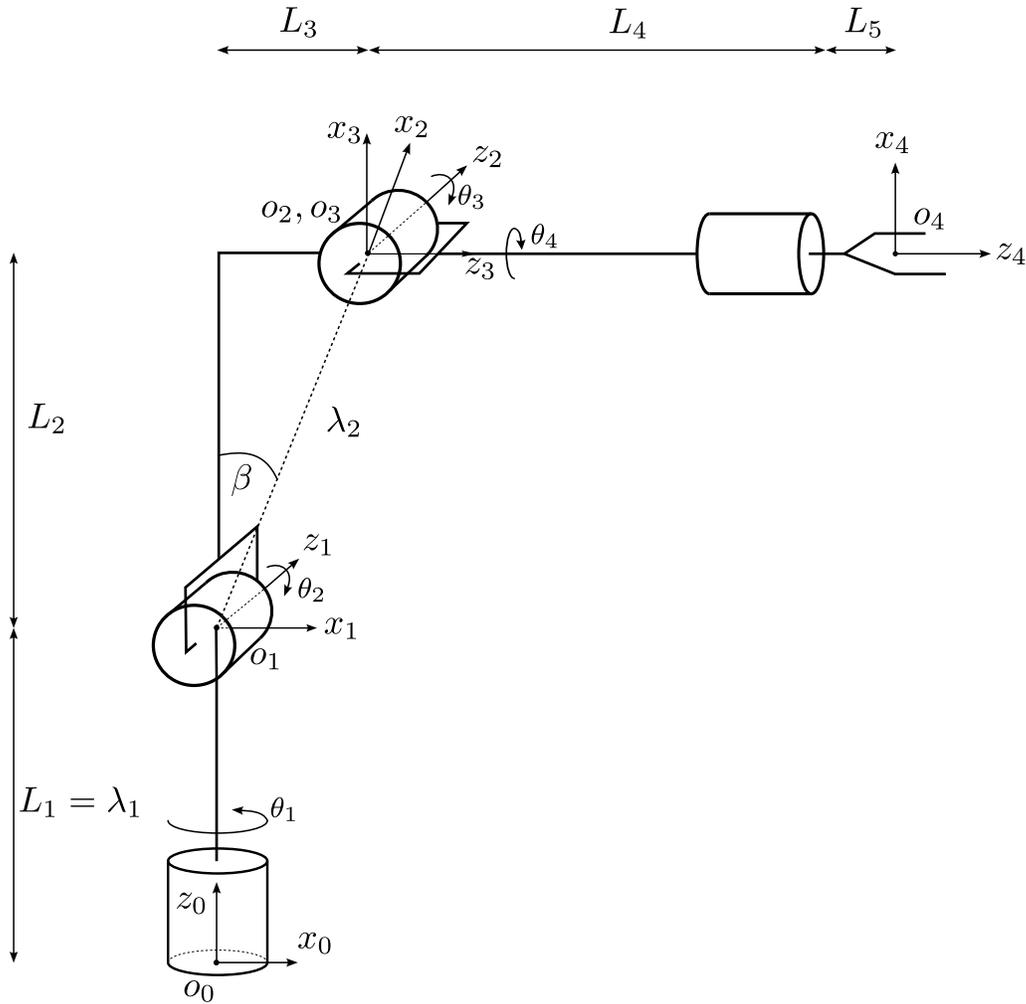


Figura A.1 Diagrama de alambre del manipulador QArm

se realicen pruebas experimentales.

Con la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg y haciendo uso de la ecuación 2.3 se procedió a obtener las matrices de transformación homogéneas.

### Primera articulación

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

## Segunda articulación

$$\begin{aligned}
{}^1H_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \lambda_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \lambda_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0H_2 &= {}^0H_1 {}^1H_2 \\
{}^0H_2 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & \lambda_2 c_1 c_2 \\ c_2 s_1 & -s_1 s_2 & c_1 & \lambda_2 c_2 s_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

## Tercera articulación

$$\begin{aligned}
{}^2H_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0H_3 &= {}^0H_2 {}^2H_3 \\
{}^0H_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & -c_1 s_{23} & \lambda_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & -c_1 & -s_1 s_{23} & \lambda_2 s_1 c_2 \\ -s_{23} & 0 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

(A.5)

## Cuarta articulación

$${}^3H_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
{}^0H_4 &= {}^0H_3 {}^3H_4 \\
{}^0H_4 &= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & -c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4 & -c_1 s_{23} & \lambda_2 c_1 c_2 - \lambda_3 c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -s_1 c_{23} s_4 - c_1 c_4 & -s_1 s_{23} & \lambda_2 s_1 c_2 - \lambda_3 s_1 s_{23} \\ -s_{23} c_4 & s_{23} s_4 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_2 s_2 - \lambda_3 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Donde  $c_i = \cos(\theta_i)$  y  $s_i = \sin(\theta_i)$  y  $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$  y  $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

## A.2. Jacobiano Geométrico

Una vez que se obtuvieron las matrices de transformación homogéneas, se procedió a obtener el Jacobiano geométrico del manipulador.

### Primer eslabón

En la figura A.2, que corresponde a un diagrama de alambre del primer eslabón, se muestra la posición del centro de masa sobre el eslabón. Se realiza la cinemática directa hasta el centro de masa de interés, según la tabla A.2. Esta posición nos permitirá obtener la parte lineal del Jacobiano geométrico, ya que podemos conocer el vector de posición del centro de masa con respecto al sistema de referencia base.

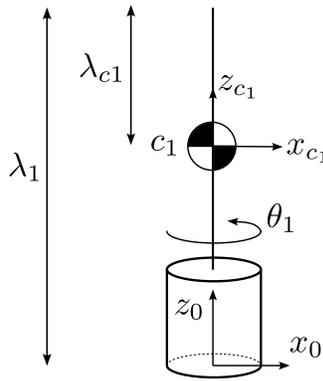


Figura A.2 Diagrama de alambre al centro de masa del primer eslabón

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$\lambda_1 - \lambda_{c1}$	$\theta_1$

Tabla A.2 Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 1

$${}^0H_{c1} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 - \lambda_{c1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Obtenemos el jacobiano geométrico a partir de las ecuaciones 2.6:

Para el la parte rotacional ( $J_{w_1}$ ), se extrae el vector  ${}^0z_0$  de la matriz de rotación A.2, los primeros tres renglones de la tercera columna, que corresponde al eje de rotación del eslabón 1:

$$J_{w_1} = {}^0z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Para la parte lineal o traslacional ( $J_{v_1}$ ), se extrae el vector  ${}^0o_1$  de la matriz de transformación A.2, los primeros tres renglones de la cuarta columna, que corresponde al vector de posición del centro de masa del eslabón 1:

$${}^0o_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 - \lambda_{c1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Y haciendo uso de la propiedad de las matrices antisimétricas para el producto cruz de dos vectores (ec. 2.7), tenemos que:

$$J_{v_1} = {}^0z_0 \times ({}^0o_{c1} - {}^0o_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 - \lambda_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 - \lambda_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, el Jacobiano geométrico del eslabón 1 es:

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{v_1} \\ J_{w_1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

## Segundo eslabón

Siguiendo el mismo procedimiento para la segunda articulación, observamos la figura A.3 y construimos la cinemática directa al segundo centro de masa, según la tabla A.3.

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\lambda_1$	$\theta_1$
2	$\lambda_2 - \lambda_{c2}$	0	0	$\theta_2$

Tabla A.3 Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 2

$${}^0H_{c2} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & (\lambda_2 - \lambda_{c2})c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & (\lambda_2 - \lambda_{c2})s_1 c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & \lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_{c2})s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

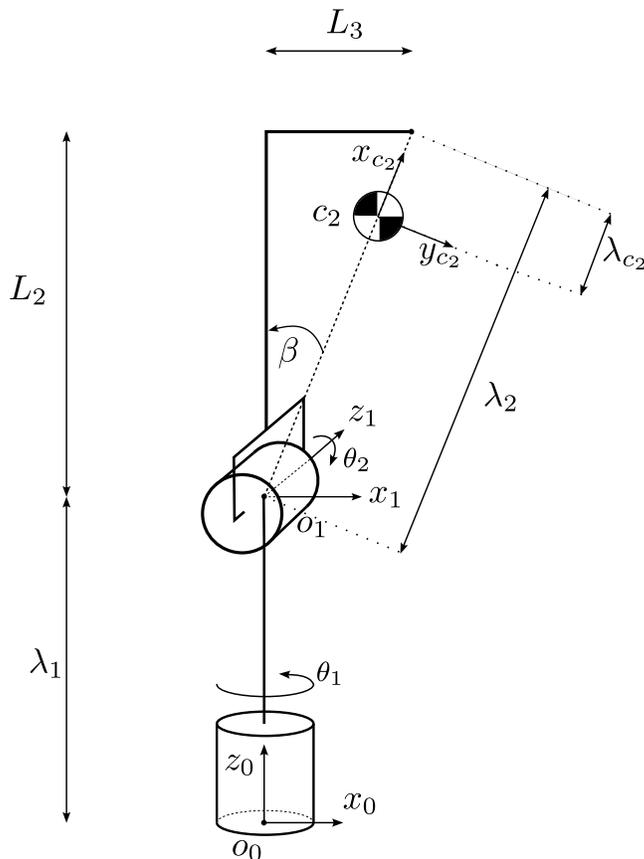


Figura A.3 Diagrama de alambre al centro de masa del segundo eslabón

Obtenemos el jacobiano geométrico a partir de las ecuaciones 2.6:

$$J_{w_{2(1)}} = {}^0z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad J_{w_{2(2)}} = {}^0z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$${}^0o_{c_2} = \begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1c_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1c_2 \\ \lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Mientras que los vectores  ${}^0o_{i-1}$  se obtienen de la matriz de transformación de cada articulación, por ejemplo, para el vector  ${}^0o_1$  se extraen los primeros tres renglones de la cuarta columna de la matriz de transformación A.2. Es trivial notar que  ${}^0o_0 = [0\ 0\ 0]^T$ .

$${}^0o_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}
J_{v_2(1)} &= {}^0z_0 \times ({}^0o_{c_2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1c_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1c_2 \\ \lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1c_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
J_{v_2(2)} &= {}^0z_1 \times ({}^0o_{c_2} - {}^0o_1) = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1c_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1c_2 \\ -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1c_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1c_2 \\ -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1s_2 \\ -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1s_2 \\ -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esto es,

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{v_2(1)} & J_{v_2(2)} \\ J_{w_2(1)} & J_{w_2(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1c_2 & -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1s_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_1c_2 & -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})s_1s_2 \\ 0 & -(\lambda_2 - \lambda_{c_2})c_2 \\ 0 & -s_1 \\ 0 & c_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

### Tercer eslabón

Siguiendo el mismo procedimiento para la tercera articulación, observamos la figura A.4 y construimos la cinemática directa al tercer centro de masa, según la tabla A.4.

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\lambda_1$	$\theta_1$
2	$\lambda_2$	0	0	$\theta_2$
3	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\theta_3$
4	0	0	$\lambda_{c3}$	0

Tabla A.4 Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 3

En este caso, y como se puede observar de la tabla A.4, se hizo uso de una transformación adicional para obtener la posición del centro de masa del tercer eslabón cumpliendo con las reglas de Denavit-Hartenberg. La matriz de transformación homogénea correspondiente es:

$${}^0H_{c3} = \begin{bmatrix} c_{23}c_1 & s_1 & -s_{23}c_1 & -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ c_{23}s_1 & -c_1 & -s_{23}s_1 & -s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ -s_{23} & 0 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

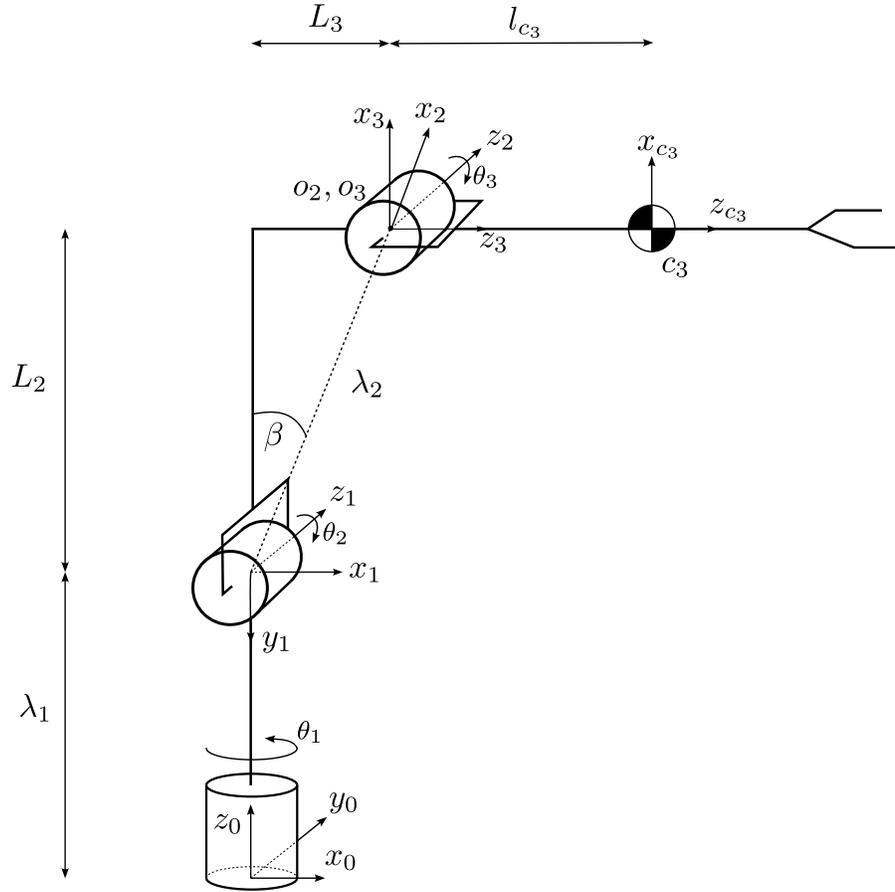


Figura A.4 Diagrama de alambre al centro de masa del tercer eslabón

Obtenemos el jacobiano geométrico a partir de las ecuaciones 2.6:

$$J_{w_{3(1)}} = {}^0 z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{w_{3(2)}} = {}^0 z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$J_{w_{3(3)}} = {}^0 z_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0 o_{c_3} = \begin{bmatrix} -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2 c_2) \\ -s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2 c_2) \\ \lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2 s_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Mientras que  ${}^0 o_2$  se obtiene de la matriz de transformación 3.3 y  ${}^0 o_1$  ya se describe en la ecuación A.16.

$${}^0o_2 = \begin{bmatrix} -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ -s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ \lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} J_{v_{3(1)}} = {}^0z_0 \times ({}^0o_{c3}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ -s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ \lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ -s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ \lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{v_{3(2)}} = {}^0z_1 \times ({}^0o_{c3} - {}^0o_1) &= \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ -s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ -s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \\ \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -c_1(\lambda_{c3}s_{23} + \lambda_2c_2) \\ -s_1(\lambda_{c3}s_{23} + \lambda_2c_2) \\ (\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{v_{3(3)}} = {}^0z_2 \times ({}^0o_{c3} - {}^0o_2) &= \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_1\lambda_{c3}s_{23} \\ -s_1\lambda_{c3}s_{23} \\ -\lambda_{c3}c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1\lambda_{c3}s_{23} \\ -s_1\lambda_{c3}s_{23} \\ -\lambda_{c3}c_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -c_1\lambda_{c3}c_{23} \\ -s_1\lambda_{c3}c_{23} \\ \lambda_{c3}s_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente,  $J_3$  es:

$$J_3 = \begin{bmatrix} J_{v_{3(1)}} & J_{v_{3(2)}} & J_{v_{3(3)}} \\ J_{w_{3(1)}} & J_{w_{3(2)}} & J_{w_{3(3)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) & -c_1(\lambda_{c3}s_{23} + \lambda_2c_2) & -c_1\lambda_{c3}c_{23} \\ -c_1(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) & -s_1(\lambda_{c3}s_{23} + \lambda_2c_2) & -s_1\lambda_{c3}c_{23} \\ 0 & (\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) & \lambda_{c3}s_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

### Cuarto eslabón

Siguiendo el mismo procedimiento para la cuarta articulación, observamos la figura A.5 y construimos la cinemática directa al cuarto centro de masa, según la tabla A.5.

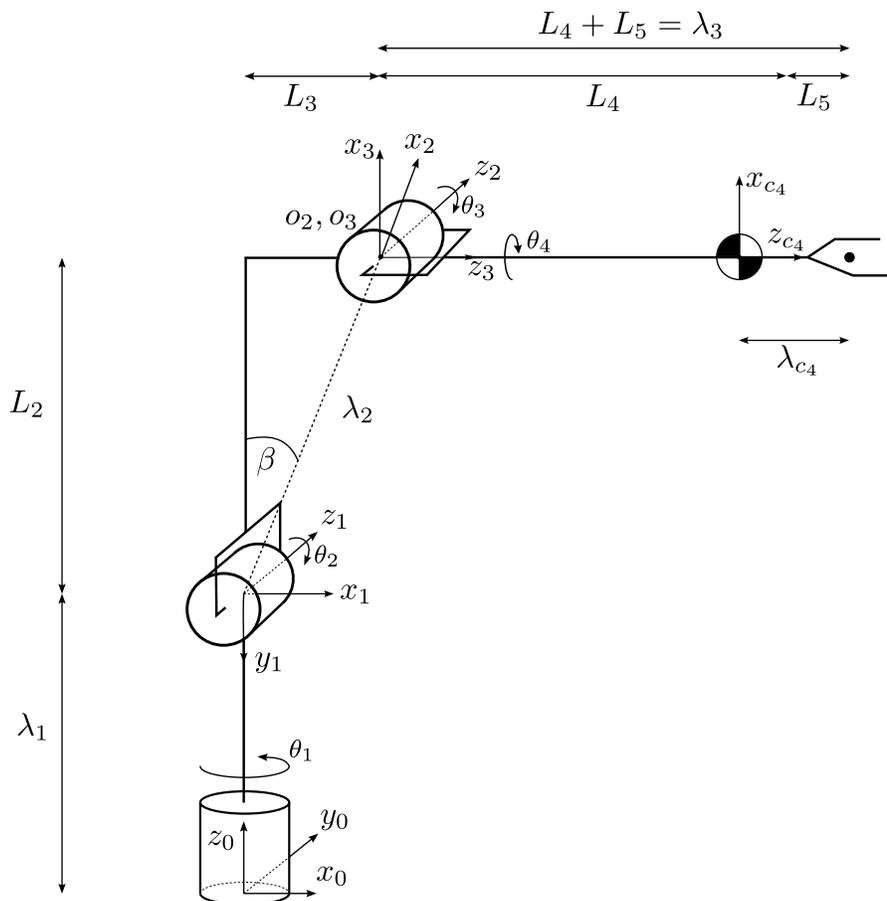


Figura A.5 Diagrama de alambre al centro de masa del cuarto eslabón

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\lambda_1$	$\theta_1$
2	$\lambda_2$	0	0	$\theta_2$
3	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\theta_3$
4	0	0	$\lambda_3 - \lambda_{c4}$	$\theta_4$

Tabla A.5 Parámetros de Denavit-Hartenberg del centro de masa del eslabón 4

Se obtiene la matriz de transformación homogénea correspondiente:

$${}^0H_{c_4} = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_4 - c_1c_{23}s_4 & -c_1s_{23} & \lambda_2c_1c_2 - s_{23}c_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ c_{23}s_1c_4 - c_1s_4 & -c_1c_4 - s_1c_{23}s_4 & -s_1s_{23} & \lambda_2s_1c_2 - s_{23}s_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -s_{23}c_4 & s_{23}s_4 & -c_{23} & \lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Obtenemos el jacobiano geométrico a partir de las ecuaciones 2.6:

$$\begin{aligned} J_{w_4(1)} = {}^0z_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ J_{w_4(2)} = {}^0z_1 &= \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ J_{w_4(3)} = {}^0z_2 &= \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ J_{w_4(4)} = {}^0z_3 &= \begin{bmatrix} -s_{23}c_1 \\ -s_{23}s_1 \\ -c_{23} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$${}^0o_{c_4} = \begin{bmatrix} \lambda_2c_1c_2 - s_{23}c_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_2s_1c_2 - s_{23}s_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Mientras que  ${}^0o_3$  se obtiene de la matriz de transformación A.5 y  ${}^0o_2, {}^0o_1$  ya se describen en las ecuaciones A.21 y A.16, respectivamente.

$${}^0o_3 = \begin{bmatrix} \lambda_2c_1c_2 \\ \lambda_2s_1c_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2s_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} J_{v_4(1)} = {}^0z_0 \times ({}^0o_{c_4}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2c_1c_2 - s_{23}c_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_2s_1c_2 - s_{23}s_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2c_1c_2 - s_{23}c_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_2s_1c_2 - s_{23}s_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda_2s_1c_2 + s_{23}s_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_2c_1c_2 - s_{23}c_1(\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{v_4(2)} &= {}^0z_1 \times ({}^0o_{c_4} - {}^0o_1) = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_2 c_1 c_2 - s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_2 s_1 c_2 - s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -\lambda_2 s_2 - c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 c_1 c_2 - s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ \lambda_2 s_1 c_2 - s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -\lambda_2 s_2 - c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda_2 c_1 s_2 - c_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -\lambda_2 s_1 s_2 - c_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -\lambda_2 c_2 + s_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{v_4(3)} &= {}^0z_2 \times ({}^0o_{c_4} - {}^0o_2) = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & s_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -c_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -c_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ s_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{v_4(4)} &= {}^0z_3 \times ({}^0o_{c_4} - {}^0o_3) = \begin{bmatrix} -s_{23} c_1 \\ -s_{23} s_1 \\ -c_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{23} & -s_{23} s_1 \\ -c_{23} & 0 & s_{23} c_1 \\ s_{23} s_1 & -s_{23} c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \\ -c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente,  $J_4$  es:

$$\begin{aligned}
J_4 &= \begin{bmatrix} J_{v_4(1)} & J_{v_4(2)} & J_{v_4(3)} & J_{v_4(4)} \\ J_{w_4(1)} & J_{w_4(2)} & J_{w_4(3)} & J_{w_4(4)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda_2 s_1 c_2 + s_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -\lambda_2 c_1 s_2 - c_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -c_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & 0 \\ \lambda_2 c_1 c_2 - s_{23} c_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -\lambda_2 s_1 s_2 - c_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & -c_{23} s_1 (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & 0 \\ 0 & -\lambda_2 c_2 + s_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & s_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c_4}) & 0 \\ 0 & -s_1 & -c_1 & -s_{23} c_1 \\ 0 & c_1 & -s_1 & -s_{23} s_1 \\ 1 & 0 & 0 & -c_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

### A.3. Matriz de inercia y Energía cinética

Una vez que se obtuvieron la cinemática directa y los jacobianos geométricos, es posible calcular la matriz de inercia y por tanto, la energía cinética. Para ello, se hizo uso de las ecuaciones 2.16 y 2.17.

En estas ecuaciones se pueden observar los términos correspondientes a la matriz de rotación de cada articulación, que son las primeras tres columnas y tres renglones de las matrices de transformación A.2, A.3, A.4 y A.6.

También se observa al tensor de inercia, para el cual se hicieron las siguientes consideraciones que simplifican el modelado del robot:

- Los momentos de inercia están principalmente alineados con el marco de referencia  $i$ . Esto hace que los términos no-diagonales del tensor de inercia sean cero.
- Cada eslabón es tratado como un cilindro sólido. Por ello, los términos diagonales del tensor de inercia son  $\mathcal{I}_{iA}$  a lo largo del eje principal y simétrico sobre los otros dos ejes  $\mathcal{I}_{iL}$ .

Las matrices de momentos de inercia, o tensores de inercia para cada eslabón son:

$$\begin{aligned} {}^1\mathcal{I}_{c_1} &= \begin{bmatrix} I_{1L} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1A} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1L} \end{bmatrix} & {}^2\mathcal{I}_{c_2} &= \begin{bmatrix} I_{2A} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2L} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2L} \end{bmatrix} \\ {}^3\mathcal{I}_{c_3} &= \begin{bmatrix} I_{3L} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3L} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3A} \end{bmatrix} & {}^4\mathcal{I}_{c_4} &= \begin{bmatrix} I_{4L} & 0 & 0 \\ 0 & I_{4L} & 0 \\ 0 & 0 & I_{4A} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

### Primer eslabón

La matriz de inercia del primer eslabón, a partir de la ecuación 2.17, es:

$$M_{w_1} = J_{\omega_1}^T {}^1\mathcal{I}_{c_1} J_{\omega_1} = I_{1L} \quad (\text{A.29})$$

$$M_{v_1} = m_1 J_{v_1}^T J_{v_1} = 0 \quad (\text{A.30})$$

Por lo tanto,

$$M_1 = M_{w_1} + M_{v_1} = I_{1L} \quad (\text{A.31})$$

### Segundo eslabón

La matriz de inercia del segundo eslabón, a partir de la ecuación 2.17, es:

$$M_{w_2} = J_{\omega_2}^T {}^2\mathcal{I}_{c_2} J_{\omega_2} = \begin{bmatrix} I_{2L} & 0 \\ 0 & I_{2L} + (s_1)^2 (I_{2A} - I_{2L}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$M_{v_2} = m_2 J_{v_2}^T J_{v_2} = \begin{bmatrix} -m_2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2((s_2)^2 - 1) & 0 \\ 0 & m_2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M_2 &= M_{w_2} + M_{v_2} \\ &= \begin{bmatrix} I_{2L} - m_2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2((s_2)^2 - 1) & 0 \\ 0 & I_{2L} + (s_1)^2(I_{2A} - I_{2L}) + m_2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

### Tercer eslabón

La matriz de inercia del tercer eslabón, a partir de la ecuación 2.17, es:

$$M_{w_3} = J_{\omega_3}^T {}^3\mathcal{I}_{c_3} J_{\omega_3} = \begin{bmatrix} I_{3A} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3L} & I_{3L} \\ 0 & I_{3L} & I_{3L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$M_{v_3} = m_3 J_{v_3}^T J_{v_3} = \begin{bmatrix} m_3(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3(\lambda_2^2 - 2s_3\lambda_2\lambda_{c3} + \lambda_{c3}^2) & \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3) \\ 0 & \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3) & \lambda_{c3}^2m_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M_3 &= M_{w_3} + M_{v_3} \\ &= \begin{bmatrix} I_{3A} + m_3(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_{3L} + m_3(\lambda_2^2 - 2s_3\lambda_2\lambda_{c3} + \lambda_{c3}^2) & I_{3L} + \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3) \\ 0 & I_{3L} + \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3) & m_3\lambda_{c3}^2 + I_{3L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

### Cuarto eslabón

La matriz de inercia del cuarto eslabón, a partir de la ecuación 2.17:

$$M_{\omega_4} = \begin{bmatrix} I_{4A} & 0 & 0 & -I_{4A}c_{23} \\ 0 & I_{4L} & I_{4L} & 0 \\ 0 & I_{4L} & I_{4L} & 0 \\ -I_{4A}c_{23} & 0 & 0 & I_{4A} - I_{4A}s_{23}^2 + I_{4L}s_{23}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

La parte lineal, escrita término a término por simplicidad, es:

$$\begin{aligned}
M_{v_4} = & \\
M_{v_4}(1, 1) &= m_4(\lambda_{c4}s_{23} - \lambda_3s_{23} + \lambda_2c_2)^2 \\
M_{v_4}(2, 2) &= m_4(\lambda_2^2 - 2s_3\lambda_2\lambda_3 + 2s_3\lambda_2\lambda_{c4} + \lambda_3^2 - 2\lambda_3\lambda_{c4} + \lambda_{c4}^2) \\
M_{v_4}(3, 3) &= m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})^2 \\
M_{v_4}(2, 3) &= M_{v_4}(3, 2) = -m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})(\lambda_{c4} - \lambda_3 + \lambda_2s_3) \\
M_{v_4}(1, 2) &= M_{v_4}(2, 1) = M_{v_4}(1, 3) = M_{v_4}(3, 1) = M_{v_4}(1, 4) = M_{v_4}(4, 1) = 0 \\
M_{v_4}(2, 4) &= M_{v_4}(4, 2) = M_{v_4}(3, 4) = M_{v_4}(4, 3) = M_{v_4}(4, 4) = 0
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
M_4 = & \\
M_4(1, 1) &= I_{4A} + m_4(\lambda_{c4}s_{23} - \lambda_3s_{23} + \lambda_2c_2)^2 \\
M_4(2, 2) &= I_{4L} + m_4(\lambda_2^2 - 2s_3\lambda_2\lambda_3 + 2s_3\lambda_2\lambda_{c4} + \lambda_3^2 - 2\lambda_3\lambda_{c4} + \lambda_{c4}^2) \\
M_4(3, 3) &= I_{4L} + m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})^2 \\
M_4(2, 3) &= M_4(3, 2) = I_{4L} - m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})(\lambda_{c4} - \lambda_3 + \lambda_2s_3) \\
M_4(4, 4) &= I_{4A} - I_{4A}s_{23}^2 + I_{4L}s_{23}^2 \\
M_4(1, 2) &= M_4(2, 1) = M_4(1, 3) = M_4(3, 1) = M_4(1, 4) = M_4(4, 1) = 0 \\
M_4(2, 4) &= M_4(4, 2) = M_4(3, 4) = M_4(4, 3) = 0
\end{aligned} \tag{A.40}$$

### Matriz de inercia total y Energía cinética

Finalmente, se suman las matrices de inercia de cada eslabón para obtener la matriz de inercia total, esto se ve en las ecuaciones A.41 con una descripción término a término de la matriz  $M(\mathbf{q})$ .

$$\begin{aligned}
M_{11} &= I_{3A} + I_{4A} + I_{2L} + I_{yy1} + m_4(\lambda_{c4}s_{23} - \lambda_3s_{23} + \lambda_2c_2)^2 + m_3(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2)^2 \\
&\quad + m_2c_1^2c_2^2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 + m_2c_2^2s_1^2(\lambda_2 - \lambda_{c2})^2, \\
M_{12} &= 0, \\
M_{13} &= 0, \\
M_{14} &= M_{41} = -I_{4A}c_{23}, \\
M_{21} &= 0, \\
M_{22} &= I_{2L} + I_{3L} + I_{4L} + \lambda_2^2m_2 + \lambda_2^2m_3 + \lambda_2^2m_4 + \lambda_3^2m_4 + \lambda_{c3}^2m_3 + \lambda_{c2}^2m_2 + \lambda_{c4}^2m_4 + I_{2A}s_1^2 \\
&\quad - I_{2L}s_1^2 - 2\lambda_2\lambda_{c2}m_2 - 2\lambda_3\lambda_{c4}m_4 - 2\lambda_2\lambda_3m_4s_3 - 2\lambda_2\lambda_{c3}m_3s_3 + 2\lambda_2\lambda_{c4}m_4s_3, \\
M_{23} &= M_{32} = I_{3L} + I_{4L} - m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})(\lambda_{c4} - \lambda_3 + \lambda_2s_3) + \lambda_{c3}m_3(\lambda_{c3} - \lambda_2s_3), \\
M_{24} &= 0, \\
M_{31} &= 0, \\
M_{33} &= I_{3L} + I_{4L} + \lambda_{c3}^2m_3 + m_4(\lambda_3 - \lambda_{c4})^2, \\
M_{34} &= 0, \\
M_{42} &= 0, \\
M_{43} &= 0, \\
M_{44} &= I_{4A} - I_{4A}s_{23}^2 + I_{4L}s_{23}^2
\end{aligned} \tag{A.41}$$

#### A.4. Matriz de Coriolis y Centrífuga

La matriz de Coriolis y Centrífuga se obtiene a partir de los símbolos de Christoffel, como se muestra en las ecuaciones 2.22 y 2.23. Ya que  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está dada por la sumatoria de los símbolos de Christoffel, se obtienen los símbolos de Christoffel para cada eslabón, la matriz C para cada eslabón y finalmente se suman para obtener la matriz de Coriolis y Centrífuga total.

##### Primer eslabón

Los símbolos de Christoffel para el primer eslabón son cero, dado que la matriz A.31 no contiene términos dependientes de  $\mathbf{q}$ , por lo que todas las parciales en la ecuación 2.22 son cero, i.e.,

$$C_1 = 0 \tag{A.42}$$

## Segundo eslabón

Los símbolos de Christoffel para el segundo eslabón son:

$$\begin{aligned}
c_{111} &= 0, \\
c_{112} &= m_2 c_1^2 c_2 s_2 (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 + m_2 c_2 s_1^2 s_2 (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2, \\
c_{121} &= -m_2 c_1^2 c_2 s_2 (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 - m_2 c_2 s_1^2 s_2 (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2, \\
c_{122} &= I_{2A} c_1 s_1 - I_{2L} c_1 s_1, \\
c_{211} &= -m_2 c_1^2 c_2 s_2 (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 - m_2 c_2 s_1^2 s_2 (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2, \\
c_{212} &= I_{2A} c_1 s_1 - I_{2L} c_1 s_1, \\
c_{221} &= I_{2L} c_1 s_1 - I_{2A} c_1 s_1, \\
c_{222} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.43}$$

y aplicando la ecuación 2.23 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
C_2(1, 1) &= \frac{1}{2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_{11} (I_{2A} - I_{2L}) \\
C_2(1, 2) &= \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2^2 - m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2 \lambda_{c2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_{c2}^2 + \frac{1}{2} I_{2A} s_{11} - \frac{1}{2} I_{2L} s_{11} \right) \\
C_2(2, 1) &= -\frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2 s_{22} (\lambda_2 - \lambda_{c2})^2 \\
C_2(2, 2) &= -\dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2^2 - m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_2 \lambda_{c2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_1 s_{22} \lambda_{c2}^2 + \frac{1}{2} I_{2A} s_{11} - \frac{1}{2} I_{2L} s_{11} \right)
\end{aligned} \tag{A.44}$$

## Tercer eslabón

Los símbolos de Christoffel para el tercer eslabón son:

$$\begin{aligned}
c_{112} &= -m_3 (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 s_2) (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2), \\
c_{113} &= -\lambda_{c3} m_3 c_{23} (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2), \\
c_{121} &= m_3 (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 s_2) (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2), \\
c_{131} &= \lambda_{c3} m_3 c_{23} (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2), \\
c_{211} &= m_3 (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 s_2) (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2), \\
c_{223} &= \lambda_2 \lambda_{c3} m_3 c_3, \\
c_{232} &= -\lambda_2 \lambda_{c3} m_3 c_3, \\
c_{311} &= \lambda_{c3} m_3 c_{23} (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2), \\
c_{322} &= -\lambda_2 \lambda_{c3} m_3 c_3, \\
c_{332} &= -\lambda_2 \lambda_{c3} m_3 c_3, \\
c_{111}, c_{122}, c_{123}, c_{132}, c_{133}, c_{212}, c_{213}, c_{221}, c_{222}, c_{231}, c_{233}, c_{312}, c_{313}, c_{321}, c_{323}, c_{331}, c_{333} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.45}$$

y aplicando la ecuación 2.23 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
C_3(1, 1) &= m_3 \dot{q}_3 (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 \dot{q}_2 s_2 + \lambda_{c3} \dot{q}_2 c_{23}) \\
C_3(1, 2) &= m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 s_2) (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\
C_3(1, 3) &= \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\
C_3(2, 1) &= -m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c3} c_{23} + \lambda_2 s_2) (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\
C_3(2, 2) &= -\lambda_2 \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_3 c_3 \\
C_3(2, 3) &= -\lambda_2 \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_3 c_3 (\dot{q}_2 + 1) \\
C_3(3, 1) &= -\lambda_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_{c3} s_{23} - \lambda_2 c_2) \\
C_3(3, 2) &= \lambda_2 \lambda_{c3} m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_3 \\
C_3(3, 3) &= 0
\end{aligned} \tag{A.46}$$

#### Cuarto eslabón

Los símbolos de Christoffel para el cuarto eslabón son:

$$\begin{aligned}
c_{112} &= m_4 (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23} + \lambda_2 s_2) \\
c_{113} &= m_4 (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23}) (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) \\
c_{121} &= -c_{112} \\
c_{131} &= -c_{113} \\
c_{211} &= -c_{112} \\
c_{223} &= m_4 (\lambda_2 \lambda_3 c_3 - \lambda_2 l_{c4} c_3) \\
c_{232} &= -c_{223} \\
c_{311} &= -c_{113} \\
c_{322} &= -c_{223} \\
c_{332} &= -\lambda_2 m_4 c_3 (\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\
c_{344} &= I_{4L} c_{23} s_{23} - I_{4A} c_{23} s_{23} \\
c_{424} &= c_{344} \\
c_{434} &= c_{344} \\
c_{442} &= -c_{344} \\
c_{443} &= -c_{344} \\
c_{111}, c_{114}, c_{122}, c_{123}, c_{124}, c_{132}, c_{133}, c_{134}, c_{141}, c_{142}, c_{143}, c_{144}, c_{212}, c_{213}, c_{214}, c_{221}, \\
c_{224}, c_{231}, c_{233}, c_{234}, c_{241}, c_{242}, c_{243}, c_{312}, c_{313}, c_{314}, c_{321}, c_{323}, c_{324}, c_{331}, c_{333}, \\
c_{334}, c_{341}, c_{342}, c_{343}, c_{411}, c_{412}, c_{413}, c_{414}, c_{421}, c_{423}, c_{431}, c_{432}, c_{433}, c_{441} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.47}$$

y aplicando la ecuación 2.23 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
C_4(1, 1) &= -m_4 \dot{q}_3 \dot{q}_4 (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23} + \lambda_2 \dot{q}_2 s_2 + \lambda_3 \dot{q}_2 c_{23} - \lambda_{c4} \dot{q}_2 c_{23}) \\
C_4(1, 2) &= \dot{q}_4 \left( \frac{I_{4A} s_{23}}{2} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23} + \lambda_2 s_2) \right) \\
C_4(1, 3) &= \dot{q}_4 \left( \frac{I_{4A} s_{23}}{2} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c4}) (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) \right) \\
C_4(1, 4) &= \frac{1}{2} I_{4A} \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{23} (\dot{q}_2 + 1) \\
C_4(2, 1) &= -\dot{q}_4 \left( \frac{I_{4A} s_{23}}{2} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2) (\lambda_3 c_{23} - \lambda_{c4} c_{23} + \lambda_2 s_2) \right) \\
C_4(2, 2) &= -\lambda_2 m_4 \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_3 (\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\
C_4(2, 3) &= -\lambda_2 m_4 \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_3 (\lambda_3 - \lambda_{c4}) (\dot{q}_2 + 1) \\
C_4(2, 4) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(3, 1) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4A} s_{23} - m_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 c_{23} (\lambda_3 - \lambda_{c4}) (\lambda_{c4} s_{23} - \lambda_3 s_{23} + \lambda_2 c_2)) \\
C_4(3, 2) &= \lambda_2 m_4 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_3 (\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\
C_4(3, 3) &= 0 \\
C_4(3, 4) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(4, 1) &= \frac{1}{2} I_{4A} \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{23} (\dot{q}_2 + 1) \\
C_4(4, 2) &= \frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(4, 3) &= \frac{1}{2} \dot{q}_4 (I_{4L} s_{2233} - I_{4A} s_{2233} + I_{4A} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s_{23}) \\
C_4(4, 4) &= -\frac{1}{2} \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{2233} (I_{4A} - I_{4L}) (\dot{q}_2 + 1)
\end{aligned} \tag{A.48}$$

### Matriz de Coriolis y Centrífuga total

La matriz  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  se obtiene sumando las matrices  $C_i$  de cada eslabón, dado que se expresó cada matriz  $C_i$  como matrices de tamaño  $i \times i$ , es importante mencionar que para llevar a cabo la suma se deben considerar matrices de tamaño  $4 \times 4$ , por lo que se deben agregar ceros en las posiciones faltantes de cada matriz  $C_i$  para posteriormente sumarlas, o bien, tomar los elementos no nulos en su posición  $ij$  y realizar la suma para ese término  $C(i, j)$ .

Las ecuaciones resultantes son muy largas, por lo que no se expresarán aquí, pero se hace énfasis en que la matriz resultante está expresada por los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
C(1, 1) &= C_1(1, 1) + C_2(1, 1) + C_3(1, 1) + C_4(1, 1) \\
C(1, 2) &= C_2(1, 2) + C_3(1, 2) + C_4(1, 2) \\
C(1, 3) &= C_3(1, 3) + C_4(1, 3) \\
C(1, 4) &= C_4(1, 4) \\
C(2, 1) &= C_2(2, 1) + C_3(2, 1) + C_4(2, 1) \\
C(2, 2) &= C_2(2, 2) + C_3(2, 2) + C_4(2, 2) \\
C(2, 3) &= C_3(2, 3) + C_4(2, 3) \\
C(2, 4) &= C_4(2, 4) \\
C(3, 1) &= C_3(3, 1) + C_4(3, 1) \\
C(3, 2) &= C_3(3, 2) + C_4(3, 2) \\
C(3, 3) &= C_3(3, 3) + C_4(3, 3) \\
C(3, 4) &= C_4(3, 4)
\end{aligned} \tag{A.49}$$

## A.5. Energía potencial

Para la obtención de la energía potencial de cada eslabón, se considera la energía potencial gravitacional de cada centro de masa. Se hizo uso de las ecuaciones 2.18 y A.52.

Las coordenadas a cada uno de los centros de masa están dados en las matrices de transformación homogénea A.8, A.13, A.18 y A.23, particularmente en la componente  $z$  de la cuarta columna. Es decir, buscamos la altura de cada centro de masa.

$$\begin{aligned}
h_1 &= \lambda_1 - \lambda_{c1} \\
h_2 &= \lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_{c2})s_2 \\
h_3 &= \lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2 \\
h_4 &= \lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4})
\end{aligned} \tag{A.50}$$

Sustituyendo las alturas en A.50 en la ecuación 2.18 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= m_1g(\lambda_1 - \lambda_{c1}) \\
\mathcal{U}_2 &= m_2g(\lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_{c2})s_2) \\
\mathcal{U}_3 &= m_3g(\lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2) \\
\mathcal{U}_4 &= m_4g(\lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4}))
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Finalmente, la energía potencial total es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4 \\
&= m_1g(\lambda_1 - \lambda_{c1}) + m_2g(\lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_{c2})s_2) + m_3g(\lambda_1 - \lambda_{c3}c_{23} - \lambda_2s_2) \\
&\quad + m_4g(\lambda_1 - \lambda_2s_2 - c_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4}))
\end{aligned} \tag{A.52}$$

## A.6. Vector de Gravedad

El vector de gravedad  $G(\mathbf{q})$  se obtiene a partir de la ecuación 2.24, y de la energía potencial obtenida en A.52.

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ gm_3(\lambda_{c3}s_{23} - \lambda_2c_2) - gm_4(\lambda_2c_2 - s_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4})) - gm_2c_2(\lambda_2 - l_{c2}) \\ g\lambda_{c3}m_3s_{23} + gm_4s_{23}(\lambda_3 - \lambda_{c4}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.53}$$

Es entonces que tenemos todos los elementos para formar la dinámica del manipulador de la forma compacta descrita en la ecuación 2.21.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{A.54}$$



# Referencias

- [Albus, *et al.*, 1981] Albus, J., Sacra, J., of America, R. I., of Standards, U. S. N. B., & for Mechanical Engineering Process Technology . Industrial Systems Division, C. (1981). *NBS/RIA Robotics Research Workshop: Proceedings of the NBS/RIA Workshop on Robotic Research, held at the National Bureau of Standards in Gaithersburg, MD, on November 13-15, 1979*. Gaithersburg, MD: U.S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards. Edited by James S. Albus [and others]; sponsored by the Robot Institute of America. (Citado en página 10.)
- [Barrientos, *et al.*, 2007] Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., & Aracil, R. (2007). *Fundamentos de Robótica*. Madrid, España: McGrawHill, 2 edition. (Citado en páginas 1, 12, 13, 14 y 16.)
- [Boiko y Fridman, 2005] Boiko, I. & Fridman, L. (2005). Analysis of chattering in continuous sliding mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9), 1441–1446. (Citado en página 2.)
- [Burgner-Kahrs, *et al.*, 2015] Burgner-Kahrs, J., Rucker, D. C., & Choset, H. (2015). Continuum robots for medical applications: A survey. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(6), 1261–1280, <https://doi.org/10.1109/TRO.2015.2489500>. (Citado en página 9.)
- [Craig, 2006] Craig, J. J. (2006). *Robótica: Mecánica y Control*. México: Pearson Educación, 3<sup>a</sup> edition. (Citado en página 10.)
- [Denavit y Hartenberg, 1955] Denavit, J. & Hartenberg, R. S. (1955). A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, 77(2), 215–221. (Citado en página 15.)
- [Fridman y Levant, 2002] Fridman, L. & Levant, Arie, e. a. (2002). Higher order sliding modes. *Sliding mode control in engineering*, 11, 53–102. (Citado en página 43.)
- [Kelly, *et al.*, 2005] Kelly, R., Santibáñez, V., & Loría, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London, UK: Springer-Verlag London. (Citado en páginas 1, 9, 21, 22 y 47.)
- [Levant, 1998] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384. (Citado en páginas 43 y 45.)
- [Nagesh y Edwards, 2014] Nagesh, I. & Edwards, C. (2014). A multivariable super-twisting sliding mode approach. *Automatica*, 50(3), 984–988. (Citado en páginas 44 y 45.)
- [Organización Internacional de Normalización (ISO), 2021] Organización Internacional de Normalización (ISO) (2021). Robots industriales – vocabulario. <https://www.iso.org/es/contents/data/standard/07/55/75539.html>. Consultado el: 10 de marzo de 2024. (Citado en página 10.)
- [Quanser, 2022] Quanser (2022). QArm. <https://www.quanser.com/products/Qarm/>. Consultado el 13 de enero del 2024. (Citado en páginas 25, 27 y 49.)
- [RAE, 2024] RAE (2024). Robot. <https://dle.rae.es/robot>. Consultado el: 10 de marzo de 2024. (Citado en página 9.)

- [Robotis, 2023] Robotis (2023). XM540-W270-T/R. <https://emannual.robotis.com/docs/en/dxl/x/xm540-w270/>. Consultado el 5 de febrero del 2024. (Citado en páginas 25 y 37.)
- [Shtessel, *et al.*, 2014] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., & Levant, A. (2014). *Sliding modes and observation*. Springer. (Citado en páginas 43 y 44.)
- [Slotine y Li, 1987] Slotine, J.-J. E. & Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *The international journal of robotics research*, 6(3), 49–59. (Citado en páginas 1 y 24.)
- [Spong y Vidyasagar, 1989] Spong, M. W. & Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley and Sons. (Citado en páginas 1, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21 y 23.)
- [Sreekanth, *et al.*, 2021] Sreekanth, N., Dinesan, A., Nair, A. R., Udupa, G., & Tirumaladass, V. (2021). Design of robotic manipulator for space applications. *Materials Today: Proceedings*, 46, 4962–4970. (Citado en página 9.)
- [Yu, *et al.*, 1997] Yu, Z., Mohammed, A., & Panahi, I. (1997). A review of three pwm techniques. 1, 257–261 vol.1, <https://doi.org/10.1109/ACC.1997.611797>. (Citado en página 37.)