

INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES

Octavio A. Rascón Chávez

Sección: Matemáticas
Noviembre de 1979

2252

2



DEPI

100
100
100

INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES

POR: DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

SIMBOLOS DE DESIGUALDADES:

- $<$ menor que
 \leq menor o igual que
 $>$ mayor que
 \geq mayor o igual que
 \neq diferente de

TEORIA DE CONJUNTOS

UN CONJUNTO ES UNA COLECCION BIEN DEFINIDA DE OBJETOS.

NOTACION: LOS CONJUNTOS SE DENOTAN USUALMENTE CON LETRAS MAYUSCULAS, Y SUS ELEMENTOS SE ANOTAN DENTRO DE UN PAR DE LLAVES.

EJEMPLOS

- A) EL CONJUNTO DE NUMEROS ANOTADOS EN UN DADO ES
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- B) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS MENORES QUE 5 ES
 $S = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 $\circ S = \{x: x \text{ ES ENTERO Y } x < 4\}$
- C) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS POSITIVOS MENORES QUE 5 ES
 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 $E = \{x: \text{ES ENTERO Y } 0 \leq x < 4\}$
- D) EL CONJUNTO DE LOS CONTINENTES ES
 $C = \{\text{ASIA, EUROPA, AMERICA, AFRICA, OCEANIA}\}$
- E) EL CONJUNTO DE MARCAS QUE TIENE UNA MONEDA ES
 $M = \{\text{CARA, CRUZ}\}$
- F) EL CONJUNTO DE NUMEROS MAYORES DE 5 PERO MENORES O IGUALES QUE 10
 $S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$

CONJUNTOS

FINITOS.- CUANDO TIENEN UN NUMERO FINITO
DE ELEMENTOS

INFINITOS.- CUANDO TIENEN UN NUMERO INFINITO
DE ELEMENTOS

SUBCONJUNTOS

PARA EXPRESAR QUE UN ELEMENTO PERTENECE A UN CONJUNTO SE USA EL
SIMBOLO \in . PARA EXPRESAR QUE NO PERTENECE SE USA EL SIMBOLO \notin .

EJEMPLO

SI $S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$, ENTONCES

$3 \notin S_1$; $5 \notin S_1$; $8 \in S_1$; $10 \in S_1$

PARA EXPRESAR QUE UN CONJUNTO ESTA CONTENIDO EN OTRO SE USA EL
SIMBOLO \subset ; SI NO ESTA CONTENIDO SE USA EL SIMBOLO $\not\subset$.

PARA QUE UN CONJUNTO ESTE CONTENIDO EN OTRO SE REQUIERE QUE TODOS
SUS ELEMENTOS LO ESTEN, ES DECIR, QUE TODOS SUS ELEMENTOS PERTE-
NEZCAN A AMBOS CONJUNTOS.

EJEMPLO

SEAN $E = \{3, 5\}$; $F = \{3, 8\}$; $G = \{7, 9\}$. $E \not\subset S_1$; $F \subset S_1$; $G \subset S_1$

SI UN CONJUNTO, B, ESTA CONTENIDO EN OTRO, S, SE DICE QUE B
ES SUBCONJUNTO DE S.

EJEMPLO

$B = \{x: 3 < x \leq 8\}$ Y $S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$

EN ESTE CASO:

$G \subset S_1 \rightarrow G$ ES SUBCONJUNTO DE S_1

$B \not\subset S_1 \rightarrow B$ NO ES SUBCONJUNTO DE S_1

SE DICE QUE DOS CONJUNTOS SON IGUALES CUANDO CONTIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS (NO IMPORTA EL ORDEN EN QUE ESTOS SE ESCRIBAN)

EJEMPLO

SEAN $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{7,5,1,3\}$ Y $C=\{7,5,1\}$

EN TAL CASO, $A = B \neq C$

CONJUNTO VACIO

DE LA MISMA MANERA QUE EXISTE EL CERO EN LOS NUMEROS, EN LA TEORIA DE CONJUNTOS EXISTE EL CONJUNTO VACIO, EL CUAL NO TIENE ELEMENTOS. USUALMENTE SE DENOTA \emptyset .

EJEMPLO

¿CUAL ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS, x , TALES QUE $2x=7$ Y x ES ENTERO?

SOLUCION - ES EL CONJUNTO VACIO, \emptyset .

A \emptyset SE LE CONSIDERA COMO SUBCONJUNTO DE CUALQUIER CONJUNTO. ASI, POR EJEM, TODOS LOS SUBCONJUNTOS DEL CONJUNTO

$S = \{2,5,10\}$ SON: $\{2\}; \{5\}; \{10\}; \{2,5\}; \{2,10\}; \{5,10\}; \{2,5,10\}$ Y \emptyset .

ESPACIO DE EVENTOS

ASOCIADO A UN EXPERIMENTO SIEMPRE HAY UN CONJUNTO DE RESULTADOS POSIBLES; A DICHO CONJUNTO SE LE LLAMA ESPACIO DE EVENTOS.

EJEMPLOS

EL ESPACIO DE EVENTOS ASOCIADO AL EXPERIMENTO DE LANZAR UN DADO Y ANOTAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL EXPERIMENTO DE LANZAR DOS DADOS Y ANOTAR LOS NUMEROS QUE QUEDAN HACIA ARRIBA ES

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

SI EN ESTE EXPERIMENTO LA OBSERVACION DE INTERES FUESE LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS OBSERVADOS, ENTONCES EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO SERIA

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

A TODO SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO DE EVENTOS SE LE LLAMA EVENTO. A LOS EVENTOS QUE TIENEN UN SOLO ELEMENTO DEL ESPACIO SE LES LLAMA EVENTOS SIMPLES.

SI AL REALIZAR UN EXPERIMENTO SE OBSERVA UN ELEMENTO DEL EVENTO A, ENTONCES SE DICE QUE OCURRIO O SE VERIFICO EL EVENTO A. POR EJEMPLO, SI $A = \{2, 4\}$ Y AL LANZAR UN DADO SE OBSERVA EL 2 O 4, SE DICE QUE OCURRIO EL EVENTO A; SI SE OBSERVA CUALQUIER OTRO NUMERO, ENTONCES SE DICE QUE NO OCURRIO A.

ESPACIOS DE
EVENTOS

DISCRETOS.- SI SUS ELEMENTOS PUEDEN NUMERARSE O CONTARSE. TIENEN UN NUMERO FINITO O INFINITO NUMERABLE DE ELEMENTOS.

CONTINUOS.- SI SUS ELEMENTOS NO PUEDEN ENUMERARSE. TIENEN UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE ELEMENTOS

EJEMPLO

LOS ESPACIOS DE EVENTOS $S_1 = \{\text{CARA, CRUZ}\}$; $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$;
 $S_3 = \{\text{VERDE, ROJO}\}$ SON DISCRETOS. LOS ESPACIOS DE EVENTOS
 $S_4 = \{X: -\infty < X \leq 0\}$; $S_5 = \{Z: Z \geq 3\}$; $S_6 = \{Y: 3 \leq Y \leq 80\}$
 SON CONTINUOS.

EJEMPLO

¿QUE TIPOS DE ESPACIOS DE EVENTOS CORRESPONDEN A LOS SIGUIENTES EXPERIMENTOS?

- A) CONTEO DEL NUMERO DE GRANOS DE UNA MAZORCA DE MAIZ
 $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$, ES DISCRETO E INFINITO
- B) MEDICION DE LA LONGITUD DE UNA ESPIGA DE TRIGO
 $S = \{X: 0 < X < \infty\}$, X EN CM, ES CONTINUO E INFINITO
- C) MEDICION DEL EFECTO DE UNA VACUNA, EN TERMINOS DE "EXITO" O "FRACASO"
 $S = \{\text{EXITO, FRACASO}\}$ ES DISCRETO Y FINITO.
- D) MEDICION DEL *CONTENIDO* DE UN ANTIBIOTICO EN UNA CAPSULA
 $S = \{Y: 0 \leq Y < \infty\}$ Y en mg, ES CONTINUO E INFINITO.

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

EL COMPLEMENTO DE UN EVENTO A ES OTRO EVENTO QUE CONTIENE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE QUE NO ESTAN EN A. USUALMENTE SE DENOTA CON UNA TILDE SOBRE EL SIMBOLO QUE CORRESPONDE AL EVENTO QUE COMPLEMENTA, \bar{A} .

EJEMPLOS

SI $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Y $A = \{1, 3, 5\}$ ENTONCES $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$.

SI $S = \{X: 0 \leq X \leq 58\}$ Y $A = \{X: 3 < X \leq 17\}$, ENTONCES $\bar{A} = \{X: 0 \leq X \leq 3, 17 < X \leq 58\}$

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

CUANDO DOS O MAS EVENTOS NO PUEDEN OCURRIR SIMULTANEAMENTE AL REALIZAR UNA SOLA VEZ UN EXPERIMENTO, SE DICE QUE ESTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, ES DECIR, DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS CUANDO NO TIENEN NI UN SOLO ELEMENTO EN COMUN.

EJEMPLO

- A) CUALQUIER EVENTO Y SU COMPLEMENTO SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS.
 B) ¿SON $E = \{Y: 0 \leq Y \leq 25\}$ Y $A = \{2, 50, 100\}$ MUTUAMENTE EXCLUSIVOS?
 NO, PORQUE TIENEN EL ELEMENTO 2 EN COMUN.

OPERACIONES CON EVENTOS

UNION

LA UNION DE DOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE AMBOS. LA OPERACION DE UNION SE DENOTA CON EL SIMBOLO U.

EJEMPLOS

- A) SI $A = \{2, 4, 6\}$ Y $B = \{1, 6, 12\}$, ENTONCES
 $G = A \cup B = \{1, 4, 6, 12, 2\}$
- B) ¿SON A Y B MUTUAMENTE EXCLUSIVOS? NO PORQUE TIENEN EL 6 EN COMUN.
- C) SI $D = \{Y: 0 \leq Y \leq 13\}$ Y $E = \{Y: 20 \leq Y \leq 50\}$,
 ENTONCES
 $D \cup E = \{Y: 0 \leq Y \leq 13, 20 \leq Y \leq 50\}$
- D) SI $F = \{Y: 8 \leq Y \leq 20\}$, ENTONCES
 $D \cup F = \{Y; 0 \leq Y \leq 20\}$.
- E) SI $G = \{Y: 3 \leq Y \leq 10\}$, ENTONCES
 $D \cup G = \{Y: 0 \leq Y \leq 13\} = D$; OBSERVESE QUE EN ESTE CASO $G \subset D$. EN GENERAL,
 SI $A \subset B$, ENTONCES $A \cup B = B$.

EN GENERAL, LA UNION DE VARIOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE LOS EVENTOS QUE SE UNEN.

EJEMPLO

$$A \cup B \cup F = K = \{1, 2, 4, 6, y: 8 \leq y \leq 20\}$$

INTERSECCION

LA INTERSECCION DE DOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE PERTENECEN SIMULTANEAMENTE A AMBOS. PARA DENOTAR LA OPERACION DE INTERSECCION SE USA EL SIMBOLO \cap .

EJEMPLOS

A) $A = \{2, 3, 6\}$ Y $B = \{2, 6, 10\}$ ENTONCES $A \cap B = C = \{2, 6\}$

B) $D = \{y: 4 \leq y \leq 5\}$, ENTONCES $A \cap D = \emptyset$.

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO A Y D SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE NO TIENEN NINGUN ELEMENTO EN COMUN. SIEMPRE QUE DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SU INTERSECCION ES EL CONJUNTO VACIO.

EN GENERAL, LA INTERSECCION DE VARIOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE TODOS ELLOS TIENEN EN COMUN.

EJEMPLO

SI $A = \{2, 3, 6, 8\}$; $B = \{2, 3, 10, 100\}$; $C = \{y: 0 \leq y \leq 5\}$ Y $D = \{y: 2 \leq y \leq 4\}$, ENTONCES

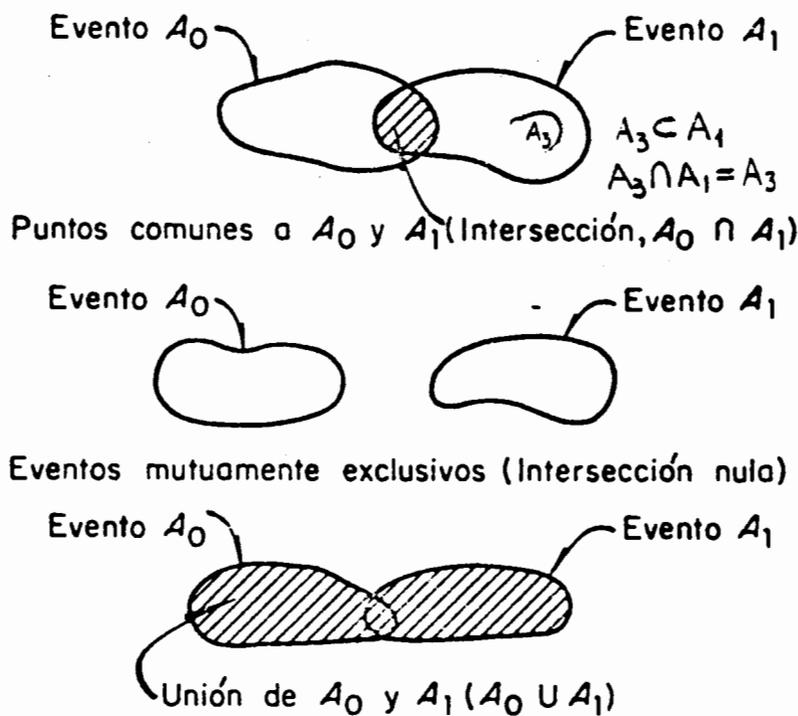
$$A \cap B \cap C \cap D = E = \{2, 3\}$$

$$A \cup B \cup C \cup D = F = \{y: 0 \leq y \leq 5, 6, 8, 10, 100\}$$

LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "Y" OTRO IMPLICA LA OCURRENCIA DE AMBOS A LA VEZ, ES DECIR, QUE SE VERIFIQUE LA INTERSECCION. LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "O" ALGUN OTRO, IMPLICA LA OCURRENCIA DE CUALQUIERA DE ELLOS, ES DECIR DE LA UNION.

DIAGRAMAS DE VENN

UNA MANERA DE ILUSTRAR GRAFICAMENTE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS ES MEDIANTE LOS DIAGRAMAS DE VENN. EN ESTOS, CADA CONJUNTO SE REPRESENTA POR UNA CURVA CERRADA QUE ENCIERRA LOS ELEMENTOS QUE LE CORRESPONDEN.



Diagramas de Venn (unión e intersección de eventos)

EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS

SE DICE QUE LOS EVENTOS B_1, B_2, \dots, B_n SON COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS CUANDO LA UNIÓN DE TODOS ELLOS ES IGUAL AL ESPACIO DE EVENTOS, ES DECIR, SI

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$$



TEORIA DE PROBABILIDADES

AL LANZAR UNA MONEDA NO PODEMOS PREDECIR CON CERTEZA CUAL CARA QUEDARA HACIA ARRIBA. LO UNICO QUE SE PUEDE ASEGURAR, SI LA MONEDA NO ESTA CARGADA, ES QUE AMBAS CARAS TIENEN LA MISMA OPORTUNIDAD DE SALIR, ES DECIR, QUE LOS EVENTOS SIMPLES (CARA) Y (CRUZ) TIENEN LA MISMA PROBABILIDAD DE OCURRIR.

COMO YA SE DIJO, LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA UN EVENTO ES UNA MEDIDA DEL GRADO DE CONFIANZA QUE SE TIENE DE QUE ESTE OCURRA AL REALIZAR EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES

LAS PROBABILIDADES QUE SE ASIGNAN A LOS DIFERENTES EVENTOS RELACIONADOS CON UN FENOMENO ALEATORIO DEBEN CUMPLIR CON LOS SIGUIENTES TRES AXIOMAS:

AXIOMA 1: LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UN EVENTO A ES UN NUMERO, $P(A)$, QUE SE LE ASIGNA A DICHO EVENTO, CUYO VALOR QUEDA EN EL INTERVALO

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

AXIOMA 2: SI S ES UN ESPACIO DE EVENTOS, ENTONCES

$$P(S) = 1$$

AXIOMA 3: LA PROBABILIDAD, $P(C)$, DE LA UNION, C, DE DOS EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, A Y B, ES IGUAL A LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE ESTOS, ES DECIR,

$$P(A \cup B) = P(C) = P(A) + P(B)$$

EXISTEN POR LO MENOS CUATRO MANERAS DE ASIGNARLE UNA PROBABILIDAD A UN EVENTO:

1. EN TERMINOS DE LOS RESULTADOS DE REPETIR VARIAS VECES UN EXPERIMENTO (METODO FRECUENCIAL),
2. APLICANDO LA DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES.
3. CON BASE EN UN MODELO MATEMATICO (PROBABILISTICO) DEL FENOMENO DE QUE SE TRATE.
4. MEDIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA

METODO FRECUENCIAL

SI $N(A)$ ES EL NUMERO DE VECES QUE SE OBSERVA EL EVENTO A AL REALIZAR N VECES UN EXPERIMENTO, LA FRECUENCIA RELATIVA DE A, DEFINIDA COMO $N(A)/N$, SE CONSIDERA COMO ESTIMACION DE LA PROBABILIDAD DE A,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

YA QUE, EN EL LIMITE, $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}$

EJEMPLO

DE UNA URNA QUE CONTIENE BOLAS ROJAS, BLANCAS Y AZULES, SE SACO UNA BOLA, SE ANOTO SU COLOR Y SE REGRESO A LA URNA. SI ESTE EXPERIMENTO SE REPITE 20 VECES Y LOS RESULTADOS SON

b,b,a,r,r,r,a,b,r,a,b,b,a,r,b,r,r.a,r,a, DONDE

r = ROJA, b = BLANCA, a = AZUL

¿QUE PROBABILIDADES LE ASIGNARIA A LOS EVENTOS $B=\{b\}$, $A=\{a\}$, y $R=\{r\}$, DE ACUERDO CON EL METODO FRECUENCIAL?

EN ESTA MUESTRA SE TIENE QUE $N(B)=6$, $N(A)=6$, $N(R)=8$, $N=20$

POR LO QUE $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$; $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$; $P(R) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$

NOTESE QUE LOS EVENTOS B, A Y R SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE SON EVENTOS SIMPLES, Y QUE

$$P(B) + P(A) + P(R) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1 = P(S)$$

EN DONDE $S = \{r,b,a\}$

DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES

SI $M(A)$ ES EL NUMERO DE MANERAS IGUALMENTE PROBABLES EN QUE PUEDE OCURRIR EL EVENTO A Y M ES EL NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE, ENTONCES LA PROBABILIDAD DE A ES

$$P(A) = \frac{M(A)}{M}$$

EJEMPLOS

A) SI EN UNA URNA SE TIENEN 5 BOLAS BLANCAS Y 15 NEGRAS, Y SE VA A SELECCIONAR UNA AL AZAR, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SEA BLANCA ($A = \{\text{BLANCA}\}$)?:

$$M = 5 + 15 = 20; M(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

B) SI SE LANZAN DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE

1. SALGA UN 2 Y UN 5 (EVENTO B)?
2. LA SUMA SEA 7 (EVENTO A)

PARA EL INCISO 1 EL ESPACIO DE EVENTOS ES:

$$S = \left[\begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right]$$

SI EL DADO NO ESTA CARGADO, CADA PAREJA DE NUMEROS ES IGUALMENTE PROBABLE. EN TAL CASO, $M=36$ y $M(B)=2$ (APARECE (2,5) O (5,2))

$$\Rightarrow P(B) = 2/36 = 1/18.$$

PARA EL INCISO 2 EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$$S_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

PERO NO TODOS LOS ELEMENTOS (EVENTOS SIMPLES) SON IGUALMENTE PROBA-

BLES, YA QUE, POR EJEMPLO, EL 2 SOLO APARECERA SI SE OBSERVA LA PAREJA (1,1), EN CAMBIO EL 3 APARECERA SI OCURREN LAS PAREJAS (1,2) O (2,1), ES DECIR, EL 3 TIENE EL DOBLE DE PROBABILIDAD QUE EL 2. POR ESTO, PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE LA SUMA SEA 7 ES NECESARIO TRABAJAR CON EL ESPACIO S Y CONTAR LAS MANERAS POSIBLES DE QUE LA SUMA SEA 7, LO CUAL OCURRE SI SE OBSERVA CUALQUIERA DE LAS PAREJAS (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) o (1,6), ES DECIR, HAY 6 MANERAS IGUALMENTE PROBABLES DE QUE OCURRA EL EVENTO A. POR LO TANTO

$$P(A) = \frac{M(A)}{M} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

PROCEDIENDO DE ESTA MANERA SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE LA SUMA SEA 2,3,4, ETC. LOS RESULTADOS SON:

$$\left. \begin{array}{l} P(\{2\}) = \frac{1}{36}; P(\{3\}) = \frac{2}{36}; P(\{4\}) = \frac{3}{36}; P(\{5\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{6\}) = \frac{5}{36}; P(\{7\}) = \frac{6}{36}; P(\{8\}) = \frac{5}{36}; P(\{9\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{10\}) = \frac{3}{36}; P(\{11\}) = \frac{2}{36} \text{ y } P(\{12\}) = \frac{1}{36} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{DISTRIBUCION} \\ \text{DE} \\ \text{PROBABILIDADES} \end{array}$$

(OBSERVESE QUE $\sum_{i=2}^{12} P(\{i\}) = 1$)

ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN MODELO MATEMATICO

MEDIANTE ESTE METODO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN A PARTIR DE UN MODELO MATEMATICO QUE INVOLUCRE TODOS LOS FACTORES POSIBLES QUE INTERVIENEN EN LA ALEATORIEDAD DEL FENOMENO.

ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA.

EN ESTE CASO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN DE MANERA SUBJETIVA, CON BASE EN LA EXPERIENCIA QUE SE TENGA SOBRE UN PROBLEMA SEMEJANTE, - PROPIA O AJENA, DE CARACTER TEORICO O EXPERIMENTAL.

EJEMPLOS

A) EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE UN DADO QUE NO ESTA CARGADO SE PUEDE ASIGNAR A CADA NUMERO (A CADA EVENTO SIMPLE) UNA PROBABILIDAD DE $1/6$, SI $A=\{2,4\}$ Y $B=\{5,6\}$, ENTONCES, PUESTO QUE $A = \{2\} \cup \{4\}$ Y $B = \{5\} \cup \{6\}$, Y QUE LOS EVENTOS ELEMENTALES SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI, APLICANDO EL AXIOMA 3 SE OBTIENEN:

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

SI $C=A \cup B$, Y DADO QUE A Y B SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ADEMAS, OBSERVESE QUE SE CUMPLE CON LOS AXIOMAS 1 Y 2, YA QUE

$$\begin{aligned} P(S) &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DEL LANZAMIENTO DE DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA SEA 7 U 11? ESTO ES EQUIVALENTE A PREGUNTAR POR LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA EL EVENTO $C = \{7\} \cup \{11\}$. PUESTO QUE $\{7\}$ Y $\{11\}$ SON EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P(C) = P(\{7\}) + P(\{11\}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

EJEMPLO

EN UN LABORATORIO SE PROBARON 100 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO NOMINALMENTE IDENTICAS, Y SE ANOTARON LAS CARGAS CON LAS CUALES FALLO CADA UNA. DE ESTA SUCESION DE EXPERIMENTOS SE ASIGNARON, EN TERMINOS DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS CORRESPONDIENTES, LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

$$\text{SI } A = \{X: 0 < X \leq 20 \text{ ton}\}; \quad P(A) = 0.17 \quad (17/100)$$

$$\text{SI } B = \{X: 20 < X \leq 40 \text{ ton}\}; \quad P(B) = 0.24 \quad (24/100)$$

$$\text{SI } C = \{X: 40 < X \leq 60 \text{ ton}\}; \quad P(C) = 0.27 \quad (27/100)$$

$$\text{SI } D = \{X: 60 < X \leq 80\}; \quad P(D) = 0.13 \quad (13/100)$$

$$\text{SI } E = \{X: 80 < X \leq 100\}; \quad P(E) = 0.11 \quad (11/100)$$

$$\text{SI } F = \{X: 100 \leq X\}; \quad P(F) = \underline{0.08} \quad (8/100)$$

$$\Sigma P(.) = 1.00$$

SI SE REALIZA UNA VEZ MAS EL EXPERIMENTO, CALCULEMOS LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES:

A) QUE LA RESISTENCIA SEA MENOR O IGUAL QUE 80 TON. PUESTO QUE $G = \{X: 0 < X \leq 80 \text{ ton}\}$ SE TIENE QUE $G = A \cup B \cup C \cup D$, POR LO QUE

$$P(G) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 0.17 + 0.24 + 0.27 + 0.13 = 0.81$$

B) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 60 TONS. PUESTO QUE

$$H = \{X: 60 < X < \infty\} \text{ O } H = \{X: X > 60\} \text{ SE TIENE QUE } H = D \cup E \cup F,$$

$$\text{POR LO QUE } P(H) = P(D) + P(E) + P(F) = 0.13 + 0.11 + 0.08 = 0.32$$

C) LA PROBABILIDAD QUE RESISTA MAS DE 40 TON, PERO CUANDO MUCHO
100 TON.

PUESTO QUE $I = \{x: 40 < x \leq 100\}$ SE TIENE QUE $I = C \cup D \cup E$

POR LO QUE $P(I) = P(C) + P(D) + P(E) = 0.27 + 0.13 + 0.11 = 0.51$

TEOREMAS

DOS TEOREMAS IMPORTANTES QUE SE DEDUCEN A PARTIR DE LOS AXIOMAS SON:

TEOREMA 1.

SI A ES UN EVENTO DEL ESPACIO S, ENTONCES $P(\bar{A})=1-P(A)$

DEMOSTRACION

PUESTO QUE A Y \bar{A} SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Y ADEMAS $A \cup \bar{A} = S$, ENTONCES, $P(S) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

CASO PARTICULAR: PUESTO QUE $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0$ Y $\bar{S} = \emptyset$, SE TIENE QUE

$$P(\emptyset) = 0$$

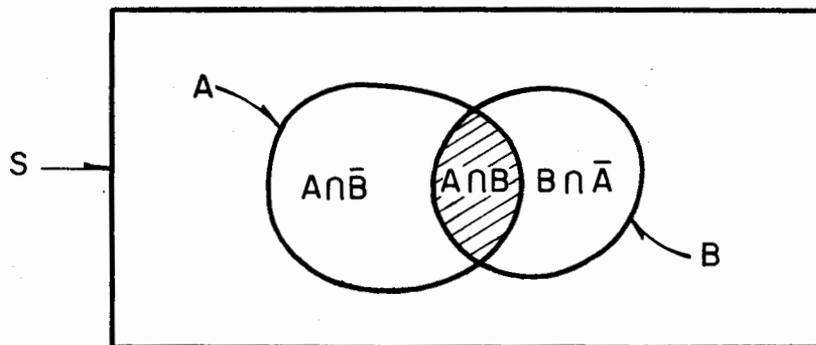
TEOREMA 2.

SI A Y B SON DOS EVENTOS CUALQUIERA DE S, ENTONCES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

DEMOSTRACION

SEA EL DIAGRAMA DE VENN:



$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$. PUESTO QUE $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ Y $B \cap \bar{A}$ SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE QUE $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A})$.

SUMANDO Y RESTANDO $P(A \cap B)$ Y AGRUPANDO TERMINOS SE OBTIENE

$$P(A \cup B) = [P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})] + [P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})] - P(A \cap B)$$

$$\text{PERO } A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$$

$$\text{Y } B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \Rightarrow P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) = P(B), \text{ POR LO QUE}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 28 TIRAS DE PAPEL Y EN CADA UNA SE ENCUEN-
TRA ANOTADA UNA LETRA DISTINTA DEL ALFABETO. CALCULE LA PROBA-
BILIDAD DE QUE AL EXTRAER AL AZAR UNA TIRA:

- A) SE OBTENGA UNA VOCAL
 B) SE OBTENGA a O z
 C) OCURRAN C Y D, DONDE $C=\{x,y,z\}$ Y
 $D=\{b,c,y,z\}$
 D) OCURRA C O D

Respuestas

$$A) A=\{a,e,i,o,u\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{28}$$

$$B) B=\{a,z\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{28}$$

$$C) F= C \cap D = \{y,z\} \Rightarrow P(F) = \frac{2}{28}$$

$$D) E= C \cup D = \{b,c,x,y,z\} \Rightarrow P(E) = \frac{5}{28}$$

$$\circ P(E) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

$$P(C \cap D) = P(F) = \frac{2}{28} \Rightarrow P(E) = \frac{3}{28} + \frac{4}{28} - \frac{2}{28} = \frac{5}{28}$$

REGLAS DE CONTEO

AL ASIGNAR PROBABILIDADES A LOS EVENTOS APLICANDO LA TEORIA CLASICA ES NECESARIO CALCULAR $N(A)$ Y N PARA APLICAR LA FORMULA $P(A) = N(A) / N$.

SEAN, POR EJEMPLO, LOS EVENTOS $A = \{b, c\}$ Y $B = \{a, e, i, o, u\}$ CON LOS CUALES SE FORMAN PALABRAS DE DOS LETRAS, LA PRIMERA DE A Y LA SEGUNDA DE B. EL EVENTO QUE SE FORMA ASI ES

$$C = \{xy : x \in A; y \in B\}$$

SI ENUMERAMOS LOS ELEMENTOS:

CON LA b: ba, be, bi, bo, bu	}	10 ELEMENTOS
CON LA c: ca, ce, ci, co, cu		

SIN EMBARGO, LA SOLUCION SE PUEDE OBTENER RAPIDAMENTE SIN NECESIDAD DE ENUMERAR TODAS LAS POSIBILIDADES, OBSERVANDO QUE LA PRIMERA LETRA SOLO PUEDE SER DE DOS TIPOS b o c, MIENTRAS QUE LA SEGUNDA, DE CINCO TIPOS a, e, i, o, u, POR LO QUE EL TOTAL DE ELEMENTOS ES $2 \times 5 = 10$, ES DECIR, EL EVENTO C PUEDE OCURRIR DE 10 MANERAS DISTINTAS E IGUALMENTE PROBABLES.

REGLA DE LA MULTIPLICACION

EN GENERAL, SI DOS EVENTOS, A Y B, PUEDEN OCURRIR DE $N(A)$ Y $N(B)$ MANERAS DISTINTAS, RESPECTIVAMENTE, ENTONCES EL TOTAL DE MANERAS EN QUE AMBOS PUEDEN OCURRIR, EN EL ORDEN INDICADO, ES $N(A) \times N(B)$. ESTA REGLA SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS.

EJEMPLO

¿CUANTOS NUMEROS PARES DE TRES CIFRAS SE PUEDEN FORMAR UTILIZANDO LOS DIGITOS 5,6,7,8 y 9, SIN QUE SE USE EL MISMO DIGITO EN LAS DECENAS Y LAS CENTENAS?

SOLUCION.- SEAN LOS EVENTOS

$$A = \{X: X \text{ ESTA EN LAS CENTENAS}\}$$

$$B = \{Y: Y \text{ ESTA EN LAS DECENAS}\}$$

$$C = \{Z: Z \text{ ESTA EN LAS UNIDADES Y ES PAR}\}$$

$$D = \{XYZ: X \in A; Y \in B; Z \in C\}$$

PUESTO QUE NO SE PERMITE REPETICION DE DIGITOS, $N(A)=5$ Y $N(B)=4$.

ADEMAS, PUESTO QUE EL NUMERO DEBE SER PAR, $N(C)=2$. POR LO TANTO

$$N(D) = 5 \times 4 \times 2 = 40$$

SI EL ULTIMO DIGITO NO TUVIESE QUE SER PAR: $S = \{XYZ: X \in A; Y \in B; Z \in F\}$

DONDE $F = \{Z: Z \text{ ESTA EN LAS UNIDADES}\}$

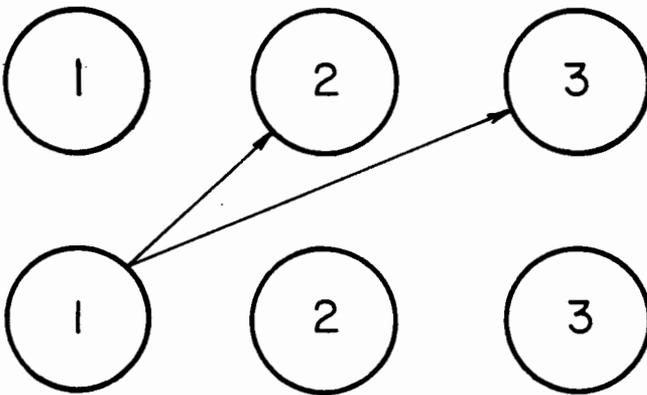
ENTONCES $N(F)=5$ Y $N(S)=5 \times 4 \times 5=100$.

CON ESTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE SI EL ESPACIO DE EVENTOS ES S Y SE ANOTAN TODOS LOS NUMEROS DEL MISMO EN UNA TIRA DE PAPEL, AL SACAR UNA AL AZAR DE UNA URNA, EL NUMERO SEA PAR:

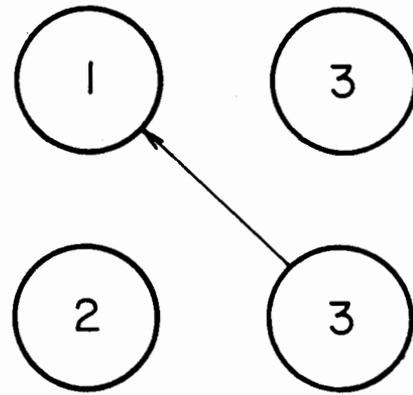
$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{40}{100} = 0.4 = 40\%$$

EJEMPLO

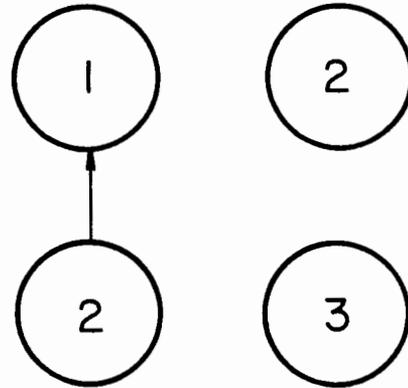
EN UNA CAJA SE TIENEN TRES PERFORACIONES NUMERADAS DEL UNO AL TRES. SI SE HECHAN EN ELLA TRES BOLAS TAMBIEN NUMERADAS DEL 1 AL 3 Y SE AGITA LA CAJA, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE NINGUNA BOLA CAIGA EN LA PERFORACION QUE TIENE SU NUMERO (EVENTO A)



2 POSIBILIDADES



1 POSIBILIDAD



1 POSIBILIDAD

$$N(A) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$N = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO

SE DISPONE DE TRES BANDERAS: UNA BLANCA, UNA NEGRA Y UNA VERDE.

1. SI CADA PAREJA DE BANDERAS DE DISTINTO COLOR CONSTITUYE UNA SEÑAL, ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER SI EL ORDEN DE COLOCACION DE LAS BANDERAS ES IMPORTANTE (EVENTO A)?

$$N(A) = 3 \times 2 = 6$$

2. SI TRES BANDERAS TAMBIEN CONSTITUYEN UNA SEÑAL CUANDO TODAS SON DE DIFERENTE COLOR ¿CUANTAS SEÑALES PODEMOS HACER CON LAS 3 BANDERAS A LA VEZ (EVENTO B)?

$$N(B) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

3. ¿CUANTAS SEÑALES SE PUEDEN HACER CON DOS O TRES BANDERAS EN LAS CONDICIONES ANTERIORES (EVENTOS C)? $C = A \cup B$

$$N(C) = N(A) + N(B) = 6 + 6 = 12$$

4. SI CADA SEÑAL DEL EVENTO C SE DIBUJA EN UNA TIRA DE PAPEL Y LUEGO SE COLOCAN EN UNA URNA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE TOMA UNA AL AZAR,

A) SALGA UNA SEÑAL ESPECIFICA (EVENTO F): $(s = c)$

$$P(F) = N(F) / N(C) = 1 / 12$$

B) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS POR LO MENOS (EVENTO G):

$$G = C \Rightarrow N(G) = 12 \Rightarrow P(G) = \frac{12}{12} = 1$$

C) SALGA UNA SEÑAL CON DOS BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO H):

$$N(H) = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4 \Rightarrow P(H) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

D) SALGA UNA SEÑAL CON TRES BANDERAS, UNA DE ELLAS VERDE (EVENTO I):

$$N(I) = 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 1 = 6$$

$$P(I) = 6 / 12 = 1 / 2 = 50\%$$

E) SALGA UNA SEÑAL CON DOS O TRES BANDERAS EN QUE SE USE UNA VERDE (EVENTO J)

$$J = \text{HUI} \Rightarrow N(J) = N(H) + N(I) = 4 + 6 = 10$$

$$P(J) = 10/12 = 5/6$$

PERMUTACIONES

EL ARREGLO DE N OBJETOS EN CIERTO ORDEN SE DENOMINA PERMUTACION.
 POR EJEMPLO, TODAS LAS PERMUTACIONES QUE PUEDEN HACERSE CON LAS
 LETRAS A,B,C SON: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. EL TOTAL ES
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ PERMUTACIONES ($N=3$).

EN GENERAL, EL NUMERO DE PERMUTACIONES ES $N(N-1)(N-2)(N-3) \times \dots \times 1 = N!$

EJEMPLO

¿CUANTAS PERMUTACIONES SE PUEDEN HACER CON 5 OBJETOS?

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

EJEMPLO

EN UN LIBRERO SE COLOCARAN AL AZAR 7 LIBROS. CALCULEMOS LA PRO-
 BABILIDAD DE QUE EL DE HISTORIA Y EL DE GEOGRAFIA QUEDEN JUNTOS
 (EVENTO A).

$$P(A) = N(A) / N$$



$$N = 7! = 7 \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 7 \times 6!$$

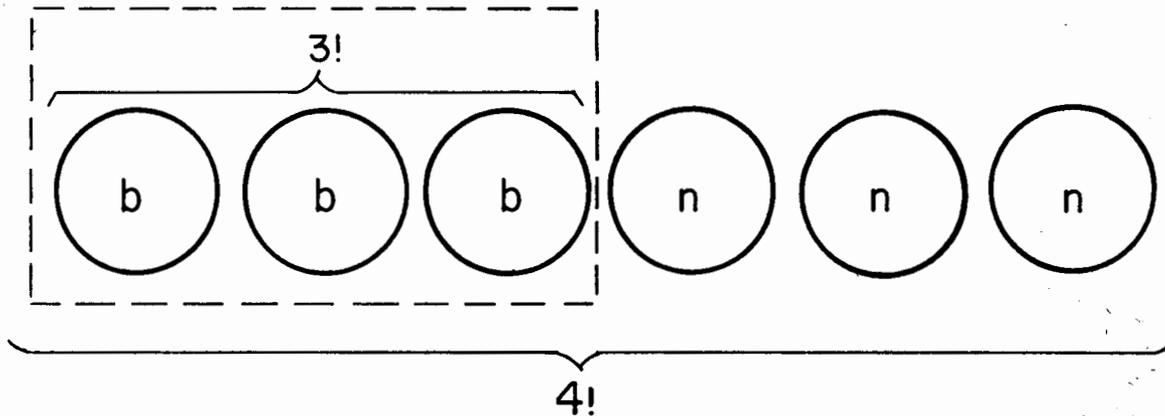
$$N(A) = 2! \times 6! ; P(A) = \frac{2! \times 6!}{7!} = \frac{2! \times 6!}{7 \times 6!} = \frac{2}{7}$$

Zero. hay 5'040 maneras diferentes de colocar dichos libros
 Si A: = los libros de historia y geografía quedan juntos

$$P(A) = \frac{2! \times 6!}{7!}$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 6 ESFERAS, DE LAS CUALES 3 SON BLANCAS Y 3 SON NEGRAS. SI LAS SEIS SE EXTRAEN AL AZAR, UNA TRAS OTRA, SIN -
REEMPLAZO LA PROBABILIDAD DE QUE LAS 3 BLANCAS SALGAN EN FORMA CON-
SECUTIVA (EVENTO F) ES:



$$N(F) = 3! \times 4! \quad ; \quad N = 6!$$

$$P(F) = N(F)/N = \frac{3! \times 4!}{6!} = \frac{3! \times 4!}{6 \times 5 \times 4!}$$

$$P(F) = \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{5}$$

LA PROBABILIDAD DE QUE LAS TRES BLANCAS SALGAN AL PRINCIPIO (EVENTO G)

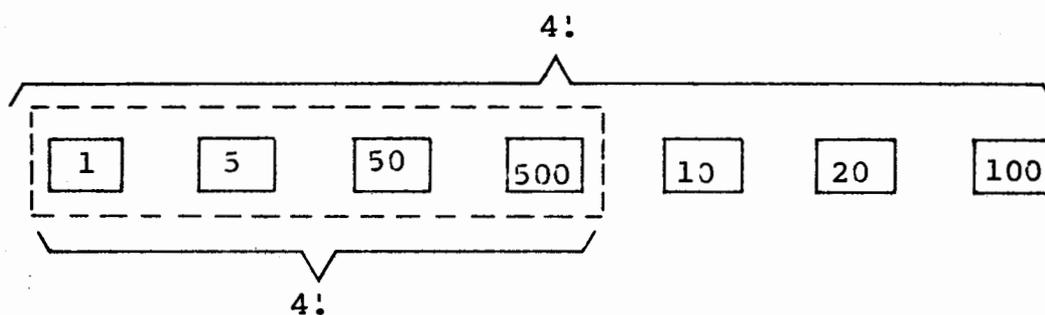
ES:

$$N(G) = 3! \times 3! \quad , \quad P(G) = \frac{3! \times 3!}{6!} = \frac{3! \times 3!}{6 \times 5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{20}$$

EJEMPLO

EN UNA URNA SE TIENEN 7 SOBRES IDENTICOS Y CADA UNO CONTIENE UN BILLETE DE DIFERENTE DENOMINACION (1,5,10,20,50,100 y 500 PESOS)

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE 1,5,50 y 500 PESOS SALGAN CONSECUTIVAMENTE EN CUALQUIER ORDEN, SI SE SACAN LOS SIETE AL AZAR, UNO TRAS OTRO (EVENTO A)?.



$$N(A) = 4! \times 4!; \quad N=7!$$

$$P(A) = \frac{4! \times 4!}{7!} = \frac{4! \times 4!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{4}{35}$$

PERMUTACIONES PARCIALES

EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$$N^P_r = \frac{N!}{(N-r)!}$$

ESTO ES EQUIVALENTE A DECIR QUE N^P_r ES EL NUMERO DE DIFERENTES MANERAS EN QUE r OBJETOS PUEDEN SER SELECCIONADOS DE N OBJETOS ($r < N$) SIN REEMPLAZAR NINGUNO DE ELLOS AL LOTE ANTES DE SACAR EL SIGUIENTE.

OBSERVESE QUE SI $r=N$:

$$N^P_N = \frac{N!}{(N-N)!} = \frac{N!}{0!} = N!$$

EJEMPLO

SI SE TIENEN LAS LETRAS A,B,C,D, EL NUMERO DE MANERAS EN QUE SE PUEDEN ORDENAR TOMANDO DE 2 EN 2 ES

$$4^P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

EL CONJUNTO DE ESTAS POSIBILIDADES ES:

$$S = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$$

OBSERVESE QUE CUANDO EL ORDEN ES IMPORTANTE, AC NO ES LO MISMO QUE CA, ETC.

LA PROBABILIDAD DE QUE SALGAN CONSECUTIVAMENTE Y EN EL ORDEN 1,5,50,500 ES:

$$N(B) = 1 \times 4! , P(B) = \frac{4!}{7!} = \frac{4!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{210}$$

COMBINACIONES

CUANDO EL ORDEN NO ES IMPORTANTE, ES DECIR, SI EL AGRUPAMIENTO GA ES EL MISMO QUE EL AG, A LOS AGRUPAMIENTOS SE LES DENOMINA COMBINACIONES. POR EJEMPLO, SI SE FORMARA UNA COMISION DE 2 INDIVIDUOS DE UN GRUPO DE 8 TOMANDO SUS NOMBRES AL AZAR DE UNA URNA, Y DESEAMOS SABER CUANTOS COMITES DE 2 MIEMBROS PODRIAN FORMARSE COMO RESULTADO DEL PROCESO, ENTONCES LOS RESULTADOS (PEDRO, JOSE) Y (JOSE, PEDRO) CONSTITUIRIAN EL MISMO COMITE, ES DECIR, NO IMPORTARIA EN QUE ORDEN SE SACARAN SUS NOMBRES DE LA URNA:

ASI, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL NUMERO DE COMBINACIONES POSIBLES DE FORMAR DE N OBJETOS TOMANDO DE r EN r ES:

$${}^N C_r = \binom{N}{r} = \frac{N!}{(N-r)!r!}$$

ESTO EQUIVALE A DECIR QUE ${}^N C_r$ ES EL NUMERO DE MANERAS DISTINTAS EN QUE r OBJETOS PUEDEN SELECCIONARSE DE N ($r \leq N$) SIN REEMPLAZO Y SIN IMPORTAR EL ORDEN EN QUE APAREZCAN.

CUANDO UNO SE ENFRENTA A UN PROBLEMA QUE IMPLICA LA REPETICIÓN DE UN EXPERIMENTO, ES NECESARIO DETERMINAR SI HAY O NO REEMPLAZO DE LAS OBSERVACIONES. POR EJEMPLO, EL REPETIR EL LANZAMIENTO DE UN DADO Y OBSERVAR CADA VEZ EL NUMERO QUE QUEDA HACIA ARRIBA LLEVA IMPLICITO QUE HAY REEMPLAZO.

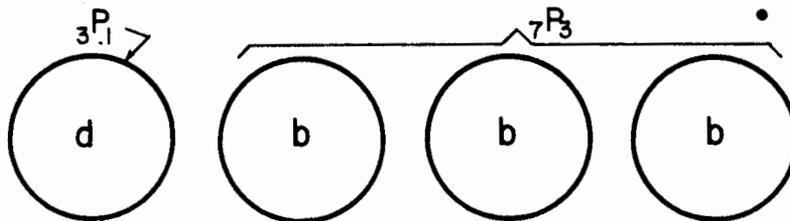
EJEMPLO

UNA CAJA CONTIENE 10 FOCOS, DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS. SI SE LECCIONAMOS 4 AL AZAR SIN REEMPLAZO

- A) ¿CUANTOS SON LOS RESULTADOS POSIBLES, ES DECIR, CUANTOS ELEMENTOS TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS?

$$N(S) = {}_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

- B) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN COMO PRIMER RESULTADO UN FOCO DEFECTUOSO Y TRES FOCOS BUENOS EN LOS OTROS TRES?

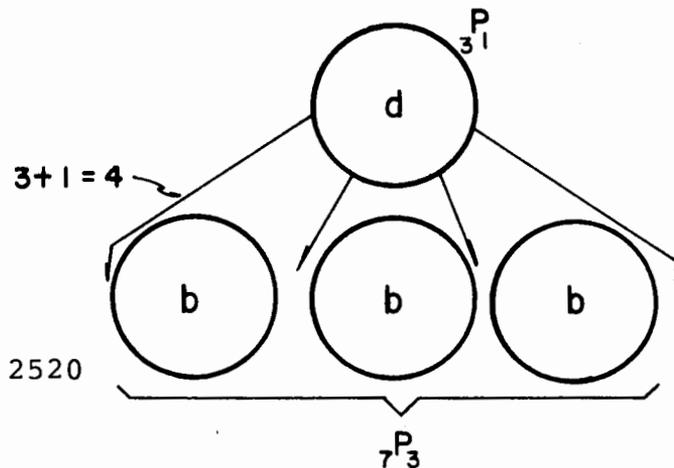


$$N(A) = {}_3P_1 \times {}_7P_3 = \frac{3!}{(3-1)!} \times \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{4!}$$

$$N(A) = 3 \times (7 \times 6 \times 5) = 630$$

$$\Rightarrow P(A) = 630/5040 = 63/504$$

- C) ¿CUANTOS ELEMENTOS DE S TIENEN UN FOCO DEFECTUOSO Y 3 BUENOS?



$$N(B) = 4 \times {}_3P_1 \times {}_7P_3 = 4 \times 630 = 2520$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{2520}{5040} = \frac{1}{2}$$

PERMUTACIONES DE GRUPOS DE OBJETOS

"EL NUMERO DE PERMUTACIONES POSIBLES DE N OBJETOS DE LOS CUALES SE TIENEN N_1 IGUALES ENTRE SI EN EL PRIMER GRUPO, N_2 IGUALES ENTRE SI EN EL SEGUNDO GRUPO, ETC, HASTA N_K IGUALES EN EL K-ESIMO GRUPO (LOS GRUPOS SON DISTINGUIBLES ENTRE SI), DE MANERA QUE $N_1 + N_2 + \dots + N_K = N$ QUEDA DADO POR LA FORMULA:

$$N \text{ P}_{N_1, N_2, \dots, N_K} = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_K!}$$

EJEMPLO

EN EL INCISO C DEL EJEMPLO ANTERIOR SE TIENEN DOS GRUPOS EN LA MUESTRA, EL DE DEFECTUOSOS CON UN SOLO ELEMENTO, ES DECIR $N_1=1$, Y EL DE BUENOS, CON TRES ELEMENTOS, $N_2=3$, QUE SE PERMUTAN POR GRUPO DE $4 \text{ P}_{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ MANERAS DISTINTAS.

EJEMPLO

ENUMERE LAS PERMUTACIONES QUE SE PUEDEN HACER CON DOS GRUPOS DE BOLAS, 2 NEGRAS Y 2 BLANCAS.

b b n n

$$n_1 = 2$$

b n b n

b n n b

$$n_2 = 2$$

n b b n

n n b b

$$4 \text{ P}_{2,2} = \frac{4!}{2! 2!} = 6$$

n b n b

EJEMPLO

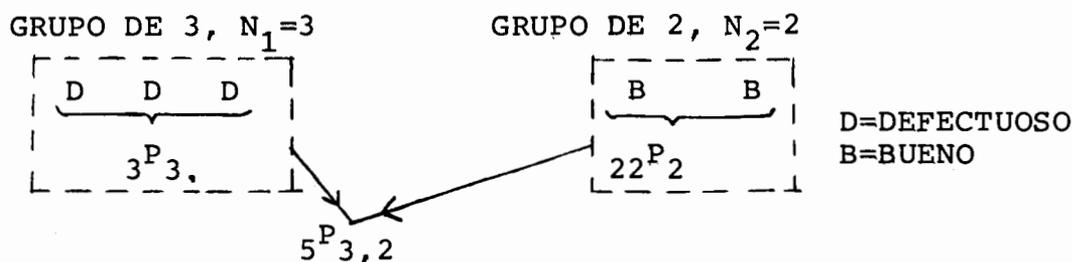
UNA CAJA CONTIENE 25 TRANSISTORES DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS.

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE, SI SE EXTRAEN 5 AL AZAR SIN
REEMPLAZO,

- A) SE OBTENGAN LOS 3 DEFECTUOSOS
 B) SE OBTENGAN SOLO 2 DEFECTUOSOS
 C) SE OBTENGA SOLO 1 DEFECTUOSO
 D) NO SE OBTENGA NINGUNO DEFECTUOSO?

SOLUCION:

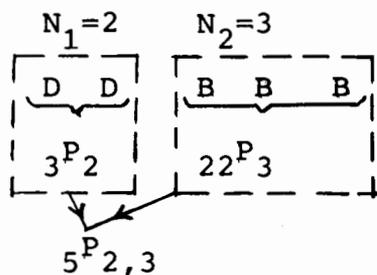
$$A) N(S) = 25^P 5 = \frac{25!}{(25-5)!} = \frac{25!}{20!}$$



$$N(A) = 3^P 3 \cdot 22^P 2 \cdot 5^P 3,2 = 3! \times \frac{22!}{(22-2)!} \times \frac{5!}{3! 2!}$$

$$N(A) = 60 \frac{22!}{20!}$$

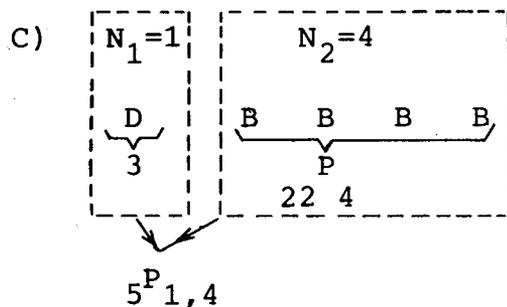
$$P(A) = \frac{60 \frac{22!}{20!}}{\frac{25!}{20!}} = 60 \frac{22!}{25!} = \frac{60}{13800}$$



$$N(B) = 3^P 2 \times 22^P 3 \times 5^P 2,3 = \frac{3!}{(3-2)!} \frac{22!}{(22-3)!} \frac{5!}{2! \times 3!}$$

$$N(B) = 3! \frac{22!}{19!} \frac{5 \times 4}{2} = 60 \frac{22!}{19!}$$

$$P(B) = \frac{60 \frac{22!}{19!}}{\frac{25!}{20!}} = 60 \frac{22!}{25!} \frac{20 \times 19!}{19!} = \frac{1200}{13800}$$

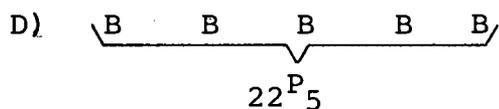


$$N(C) = 3 \times 22^P 4 \times 5^P 1,4$$

$$N(C) = 3 \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{5}{1! \times 4!}$$

$$N(C) = 3 \frac{22!}{18!} \frac{5 \times 4!}{1 \times 4!} = 15 \frac{22!}{18!}$$

$$P(C) = \frac{15 \frac{22!}{18!}}{\frac{25!}{20!}} = \frac{15 \times 20 \times 19 \times 18!}{\frac{25!}{22!} \times 18!} = \frac{5700}{13800}$$



$$N(D) = 22^P 5 = \frac{22!}{(22-5)!} = \frac{22!}{17!}$$

$$P(D) = \frac{22!/17!}{\frac{25!}{20!}} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{\frac{25!}{22!} \times 17!}$$

$$P(D) = 6840/13800$$

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO HEMOS CALCULADO LAS PROBABILIDADES DE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL "NUMERO DE DEFECTUOSOS QUE SE PUEDEN OBSERVAR EN UNA SELECCIÓN AL AZAR DE 5 ELEMENTOS", EN LA CUAL SOLO SE PUEDEN TENER 0, 1, 2, ó 3 DEFECTUOSOS, ES DECIR,

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

VERIFIQUEMOS QUE, EN EFECTO, $P(S) = 1$:

$$P(S) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= \frac{6840}{13800} + \frac{5700}{13800} + \frac{1200}{13800} + \frac{60}{13800}$$

$$= \frac{13800}{13800} = 1$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL, $P(A|B)$, DEL EVENTO A, DADO QUE EL B HA OCURRIDO SE CALCULA CON LA FORMULA

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) > 0 \quad (1)$$

EVENTOS INDEPENDIENTES

SI DOS EVENTOS, A Y B, SON INDEPENDIENTES, LA PROBABILIDAD DE A NO SE ALTERA SI OCURRE EL EVENTO B; ES DECIR, DOS EVENTOS SON INDEPENDIENTES SI

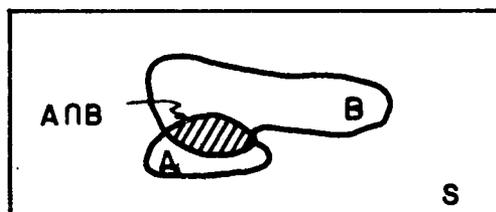
$$P(A|B) = P(A)$$

EN TAL CASO, DE LA ECUACION 1:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (1')$$

PUESTO QUE $P(A \cap B) = N(A \cap B) / N(S)$ Y $P(B) = N(B) / N(S)$ LA ECUACION 1 SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$P(A|B) = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N(S)}}{\frac{N(B)}{N(S)}} = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} \quad (2)$$



EL TRABAJAR CON LA ECUACION 2 EQUIVALE A EMPLEAR UN ESPACIO DE EVENTOS REDUCIDO DE S A B.

EJEMPLO

EN UNA URNA HAY 10 TRANSISTORES BUENOS Y 10 DEFECTUOSOS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE SACAR UNO BUENO Y UNO DEFECTUOSO (EN CUALQUIER ORDEN) AL REALIZAR DOS EXTRACCIONES AL AZAR?, SI HAY REEMPLAZO DEL PRIMER TRANSISTOR OBSERVADO?

$$P(D \cap E) = P(D) P(E|D) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{19} = \frac{10}{38}$$

$$P = 2 \times \frac{10}{38} = \frac{10}{19}$$

HAY VARIAS FORMAS DE RESOLVER ESTE PROBLEMA:

1. PUESTO QUE EL NUMERO DE DEFECTUOSOS ES IGUAL AL DE BUENOS, SE PUEDE FORMULAR EL SIGUIENTE ESPACIO DE EVENTOS, EN EL QUE TODOS LOS ELEMENTOS SON IGUALMENTE PROBABLES:

$$S = \{(d,d), (d,b), (b,b), (b,d)\}$$

EL EVENTO DE INTERES ES:

$$A = \{(d,b), (b,d)\}$$

$$\text{POR LO QUE } N(S) = 4, N(A) = 2$$

$$\text{Y } P(A) = 2/4 = 1/2$$

2. HAY 10×10 MANERAS DISTINTAS DE QUE SALGA PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO, Y OTRAS TANTAS DE QUE OCURRA DE MANERA INVERSA. POR LO TANTO:

$$N(A) = (10 \times 10) \times 2 = 200$$

$$N(S) = 20 \times 20 = 400$$

$$P(A) = 200/400 = 1/2$$

3. SEAN LOS EVENTOS

$$B = \{\text{SALE PRIMERO EL BUENO Y LUEGO EL DEFECTUOSO}\} = \{(b, d)\}$$

$$F = \{\text{SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO Y LUEGO EL BUENO}\} = \{(d, b)\}$$

$$D = \{\text{SALE PRIMERO EL BUENO}\}$$

$$E = \{\text{SALE SEGUNDO EL DEFECTUOSO}\}$$

$$O = \{\text{SALE PRIMERO EL DEFECTUOSO}\}$$

$$R = \{\text{SALE SEGUNDO EL BUENO}\}$$

POR LO TANTO, AL REALIZAR LAS DOS EXTRACCIONES CONSECUTIVAMENTE:

$$B = D \cap E \quad \text{Y} \quad F = O \cap R$$

SI $A = \{\text{SALE UNO BUENO Y UNO MALO}\} = \text{BUF}$

SE TIENE QUE $P(A) = P(B) + P(F)$

YA QUE B Y F SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, Y

$$P(B) = P(D \cap E) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$P(F) = P(O \cap R) = \frac{10}{20} \times \frac{10}{20} = \frac{1}{4}$$

YA QUE D Y E, Y O Y R SON INDEPENDIENTES. ESTO CONDUCE A

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

RESOLVAMOS AHORA ESTE PROBLEMA SI NO HAY REEMPLAZO:

$$P(D \cap E) = P(E|D)P(D) = \frac{10}{19} \times \frac{10}{20} = \frac{10}{38}, \text{ YA QUE}$$

$$P(D) = 10/20, P(E|D) = 10/19 \text{ ANALOGAMENTE, } P(F) = \frac{10}{38},$$

$$\text{POR LO QUE } P(A) = \frac{10}{38} + \frac{10}{38} = \frac{10}{19}.$$

INDEPENDENCIA DE UN GRUPO DE EVENTOS

EN GENERAL, LOS EVENTOS A_1, A_2, \dots, A_M

SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$P(A_{K_1} \cap A_{K_2} \cap \dots \cap A_{K_R}) = P(A_{K_1}) \times P(A_{K_2}) \times \dots \times P(A_{K_R})$$

PARA CUALQUIER GRUPO DE ENTEROS K_1, K_2, \dots, K_R , CON $K_R \leq M$ (TODAS LAS PAREJAS, TERCIAS, ETC, DE EVENTOS POSIBLES DE FORMARSE DEBEN SER INDEPENDIENTES).

DICHO DE OTRA MANERA, LOS EVENTOS A_1, A_2, \dots, A_M SON INDEPENDIENTES SI LOS ELEMENTOS DE TODOS LOS SUBCONJUNTOS POSIBLES DE $R = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ SON INDEPENDIENTES.

EJEMPLO

SI $M=3$, A_1 , A_2 Y A_3 SON INDEPENDIENTES SI, Y SOLO SI,

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

TODAS LAS COMBINACIONES QUE PUE DAN
FORMARSE CON DOS EVENTOS:

$\{A_1, A_2\}$, $\{A_1, A_3\}$, $\{A_2, A_3\}$

SI $M=4$, PARA QUE A_1 , A_2 , A_3 Y A_4 SEAN INDEPENDIENTES SE REQUIERE QUE SE CUMPLA QUE

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_4) = P(A_1)P(A_4)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_4) = P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_3 \cap A_4) = P(A_3)P(A_4)$$

TODAS LAS COMBINACIONES DE
TRES EVENTOS QUE PUE DAN FOR-
MARSE = $4^C_3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$

TODAS LAS COMBINACIONES DE
DOS EVENTOS QUE PUE DAN FOR-
MARSE = $4^C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$

EJEMPLO

LA URNA A CONTIENE 10 ARTICULOS, DE LOS CUALES 3 SON DEFECTUOSOS;
 LA URNA B CONTIENE 6 ARTICULOS DE LOS CUALES 2 SON DEFECTUOSOS.
 SI SE SACA AL AZAR UNO DE CADA URNA:

- a. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNO SEA DEFECTUOSO Y EL OTRO NO (EVENTO R)?

SEN LOS EVENTOS

$$C = \{ (\text{DEFECTUOSO DE A, BUENO DE B}) \}$$

$$D = \{ (\text{DEFECTUOSO DE B, BUENO DE A}) \}$$

EN TAL CASO

$$P(C) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{5}$$

$$P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{30}$$

$$P(R) = P(C) + P(D) = \frac{1}{5} + \frac{7}{30} = \frac{13}{30}$$

- b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOS DOS SEAN DEFECTUOSOS (EVENTO T)?

$$T = \{ (\text{DEFECTUOSO DE A, DEFECTUOSO DE B}) \}$$

$$P(T) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{10}$$

- c. ¿ CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LOS DOS SEAN BUENOS (EVENTO V)?

$$V = \{ (\text{BUENO DE A, BUENO DE B}) \}$$

$$P(V) = \frac{7}{10} \times \frac{4}{6} = \frac{7}{15}$$

$$\text{OBSERVESE QUE } P(R) + P(T) + P(V) = \frac{13}{30} + \frac{1}{10} + \frac{7}{15} = 1$$

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOCIOLOGICO SE INTERROGARON 1200 PERSONAS DE UNA COLONIA RESIDENCIAL, Y SE OBTUVIERON LOS SIGUIENTES DATOS:

GUSTO POR LA MUSICA CLASICA	TITULO UNIVER-SITARIO		SIN TITULO UNI-VERSITARIO		Σ
	VARONES	DAMAS	VARONES	DAMAS	
ALTO	100	50	200	250	600
BAJO	150	100	150	200	600
Σ	250	150	350	450	1200

SI $A = \{\text{VARON}\}$, $B = \{\text{CON TITULO}\}$
 $C = \{\text{GUSTO ALTO}\}$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SI SE SELECCIONA UN CIUDADANO AL AZAR DE LA MISMA COLONIA, ESTE SEA VARON, TENGA TITULO Y GUSTO ALTO POR LA MUSICA?

POR EL METODO FRECUENCIAL:

$$\text{NUMERO DE VARONES} = 250 + 350 = 600$$

$$\text{NUMERO DE PERSONAS CON TITULO} = 250 + 150 = 400$$

$$\text{NUMERO DE PERSONAS CON ALTO GUSTO POR LA MUSICA CLASICA} = 600$$

POR LO TANTO

$$P(A) = 600/1200 = 1/2, \quad P(B) = 400/1200 = \frac{1}{3}$$

Y $P(C) = 600/1200 = 1/2$. PUESTO QUE

$D = A \cap B \cap C$ Y A, B Y C SON INDEPENDIENTES, SE TIENE QUE

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

DE OTRA MANERA: $P(D) = 100/1200 = 1/12$

LEY GENERAL DE MULTIPLICACION

DE LA ECUACION (1):

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

ESTA ECUACION SE PUEDE GENERALIZAR A MAS DE DOS EVENTOS ASI:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = P(E_1)P(E_2|E_1) \dots P(E_k|E_1, E_2, \dots, E_{k-1}) \quad (3)$$

POR EJEMPLO, SI $k=4$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1, E_2) \times \\ \times P(E_4|E_1, E_2, E_3)$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE AL EXTRAER SIN REEMPLAZO CUATRO CARTAS AL AZAR DE UN PAQUETE DE 52, LAS DOS PRIMERAS SEAN DIAMANTES Y LAS DOS ULTIMAS SEAN CORAZONES (EVENTO E)?

SEAN $A = \{\text{LA 1a. ES DIAMANTE}\}$, $B = \{\text{LA 2a. ES DIAMANTE}\}$,
 $C = \{\text{LA 3a. ES CORAZON}\}$, $D = \{\text{LA 4a. ES CORAZON}\}$.

EN TAL CASO

$$E = A \cap B \cap C \cap D = \{(d, d, c, c)\}$$

$$P(A) = 13/52, P(B|A) = 12/51, P(C|A, B) = 13/50$$

$$P(D|A, B, C) = 12/49$$

APLICANDO LA ECUACION 3 SE OBTIENE

$$P(E) = \frac{13}{52} \frac{12}{51} \frac{13}{50} \frac{12}{49} = \frac{78}{20825}$$

SI LOS EVENTOS E_i QUE APARECEN EN LA ECUACION (3) SON INDEPENDIENTES, ENTONCES

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) = P(E_1) \times P(E_2) \times \dots \times P(E_k)$$

QUE ES LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION

EJEMPLO

SE TIENEN EN UNA URNA TRES BOLAS BLANCAS Y TRES NEGRAS. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN LAS TRES BLANCAS AL PRINCIPIO SI SE EXTRAEN SIN REEMPLAZO SUCESIVAMENTE LAS SEIS?

$$1. \quad \overbrace{b \ b \ b \ n \ n \ n}^{6!}$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{3!} \quad \quad \underbrace{3!}$$

CON PERMUTACIONES:

$$N(A) = 3! \times 3!$$

$$N(S) = 6!$$

$$P(A) = 3! \ 3! / 6! = 1/20$$

$$2. \quad \boxed{b \ b \ b} \ n \ n \ n$$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$$N(A) = 1$$

$$N(S) = {}_6P_{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$P(A) = 1/20$$

$$3. \quad \begin{array}{ccccccc} & b & b & b & n & n & n \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ \text{PROBABILIDADES:} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & & & 1 \end{array}$$

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

AHORA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LAS TRES BLANCAS APAREZCAN CONSECUTIVAMENTE?

$$1. \quad \overbrace{\underbrace{b \ b \ b}_{3!} \ \underbrace{n \ n \ n}_{4!}}^{6!}$$

CON PERMUTACIONES:

$$P(A) = \frac{3!4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

$$2. \quad \boxed{b \ b \ b} \ n \ n \ n$$

CON PERMUTACIONES POR GRUPOS:

$$N(A) = 4P_{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4, \quad N(S) = 6P_{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$P(A) = 4/20 = 1/5$$

3.

$$\begin{array}{ccccccc} b & b & b & \underline{n \ n \ n} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}$$

PROBABILIDADES:

CON PROBABILIDADES CONDICIONALES:

$$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) 4P_{1,3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

EJEMPLO

DE UN LOTE DE 100 EJES DE RELOJERIA SE EXTRAEN CUATRO AL AZAR SIN REEMPLAZO, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE APAREZCAN DOS DEFECTUOSOS (EVENTO A) SI EN EL LOTE HAY 20 POR CIENTO DE DEFECTUOSOS?

1.

$$\begin{array}{cccc}
 & & \overbrace{4P_{2,2}}^6 & & \\
 & d & d & b & b \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{PROBABILIDADES:} & \frac{20}{100} & \frac{19}{99} & \frac{80}{98} & \frac{79}{97}
 \end{array}$$

CON PROBABILIDAD CONDICIONAL:

$$P(A) = \frac{20}{100} \frac{19}{99} \frac{80}{98} \frac{79}{97} 6 = 0.15$$

2.

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{100P_4} \\
 \underbrace{d \quad d \quad b \quad b} \\
 \underbrace{20P_2 \quad 80P_2} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 4P_{2,2}
 \end{array}$$

CON PERMUTACIONES PARCIALES Y EN GRUPOS:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{\frac{20!}{18!} \frac{80!}{78!} \frac{4!}{2!2!}}{\frac{100!}{96!}} \\
 &= \frac{(20 \times 19)(80 \times 79)(6)}{100 \times 99 \times 98 \times 97} = 0.15
 \end{aligned}$$

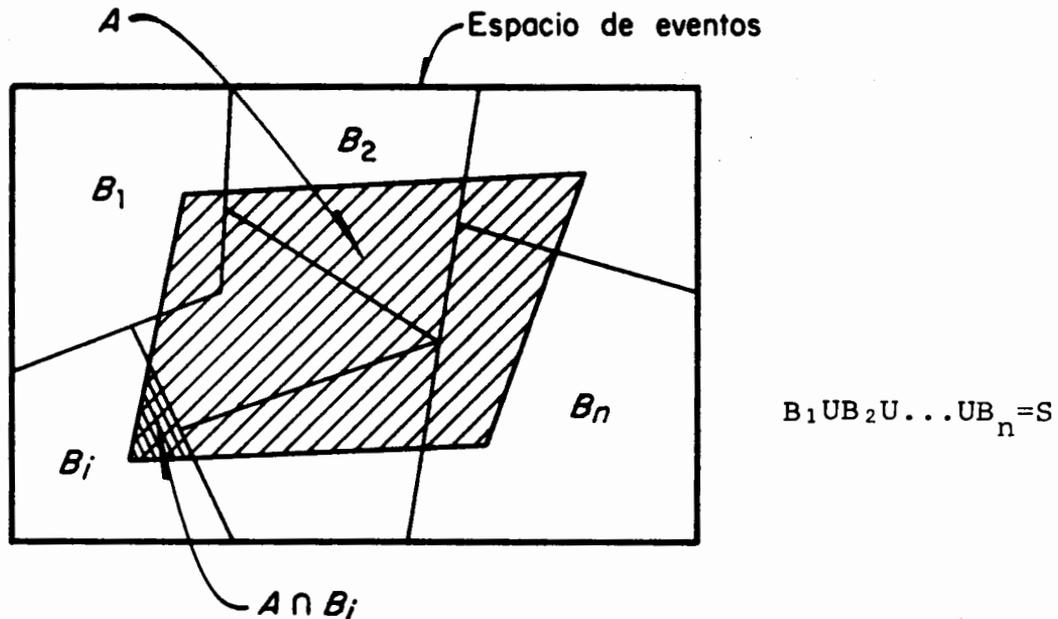
LEY GENERAL DE LA ADICION

SI TODOS LOS EVENTOS E_i SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS ENTRE SI,
EL AXIOMA 3 TAMBIEN SE GENERALIZA A:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_k)$$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

SE DICE QUE UN GRUPO DE EVENTOS ES COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO SI LA UNION DE TODOS ELLOS ES EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE.



EN UN GRUPO DE EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS Y MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, B_1, B_2, \dots, B_n , SI A ES UN EVENTO CUALQUIERA DEFINIDO EN EL MISMO ESPACIO, ENTONCES, APLICANDO EL AXIOMA 3, RESULTA

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A \cap B_i)$$

YA QUE LOS EVENTOS $A \cap B_i$ SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS. $\gamma (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots = A$

TOMANDO EN CUENTA QUE $P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A|B_i)$, SE OBTIENE FINALMENTE LA ECUACION

$$P(A) = \sum_{i=1}^{i=n} P(B_i)P(A|B_i)$$

CON LA CUAL SE DEFINE EL LLAMADO TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

TEOREMA DE BAYES

CONSIDERANDO QUE $P(B_j \cap A) = P(A \cap B_j)$, SE TIENE QUE

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

DE DONDE

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

ESTE RESULTADO SE CONOCE COMO TEOREMA DE BAYES. A LAS PROBABILIDADES $P(B_j)$ QUE SE ASIGNAN A LOS EVENTOS B_j ANTES DE OBSERVAR EL EVENTO A, SE LES DENOMINA A PRIORI O PREVIAS; A LAS PROBABILIDADES $P(B_j | A)$ QUE SE OBTIENEN DESPUES DE OBSERVAR EL EVENTO A, SE LES LLAMA A POSTERIORI O POSTERIORES.

EJEMPLO

EN UNA FABRICA SE RECIBEN REGULADORES DE VOLTAJE DE DOS PROVEEDORES, B_1 Y B_2 , EN PROPORCION DE 3 A 1; ES DECIR, LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR PROVENGA DEL PROVEEDOR B_1 ES $P(B_1)=3/4$, Y DEL B_2 ES $P(B_2)=1/4$.

SUPONGAMOS ADEMAS QUE EL CONTROL DE CALIDAD DEL PROVEEDOR B_1 ES MEJOR QUE EL DE B_2 , DE MANERA QUE EL 95% DE LOS REGULADORES DE B_1 TRABAJAN BIEN, Y SOLO EL 80% DE LOS DE B_2 FUNCIONAN CORRECTAMENTE. CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR FUNCIONE BIEN (EVENTO A):

$$P(A|B_1) = 0.95; P(A|B_2) = 0.80$$

DEL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2) \\ &= 0.95 \times \frac{3}{4} + 0.80 \times \frac{1}{4} = 0.9125 \end{aligned}$$

EJEMPLO

SUPONGAMOS AHORA QUE LA PREGUNTA DEL PROBLEMA SE CAMBIA A: ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN REGULADOR TOMADO AL AZAR PROVENGA DEL PROVEEDOR B_1 , SI SE HIZO UNA PRUEBA DEL REGULADOR Y SE OBSERVO QUE FUNCIONA CORRECTAMENTE?

APLICANDO EL TEOREMA DE BAYES:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)} ; P(B_1) = \frac{3}{4} , P(B_2) = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times 0.95}{\frac{3}{4} \times 0.95 + \frac{1}{4} \times 0.80} = \frac{2.85}{3.65} = 0.78$$

ADEMAS

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2) P(A|B_2)}{\frac{3.65}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \times 0.80}{\frac{3.65}{4}} = 0.22$$

OBSERVESE QUE

$$P(B_1|A) + P(B_2|A) = 0.78 + 0.22 = 1.00$$

EJEMPLO

SUPONGASE QUE UNA PRUEBA PARA DETECTAR DIABETES TIENE UNA EFICIENCIA DEL 95%, ES DECIR, SOLO EN EL 95% DE LOS CASOS SE DETECTA CON ELLA LA DIABETES EN UNA PERSONA QUE LA PADECE. SUPONGASE TAMBIEN QUE EL 2% DE LAS PRUEBAS QUE RESULTAN POSITIVAS SON DE GENTE SANA, Y QUE EL 3 % DE LA POBLACION DE UNA REGION DE MEXICO PADECE ESTA ENFERMEDAD.

- a) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNA PERSONA SELECCIONADA AL - AZAR PUEDA SER DECLARADA DIABETICA POR LA PRUEBA?
- b) SI LA PRUEBA DICE QUE SI ES DIABETICA, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE REALMENTE LO SEA?

SOLUCION

$$B_1 = \{\text{TIENE DIABETES}\}; \quad B_2 = \{\text{NO TIENE DIABETES}\}$$

$$E = \{\text{LA PRUEBA DETECTA DIABETES}\}$$

$$P(B_1) = 0.03, \quad P(B_2) = 0.97$$

$$P(E|B_1) = 0.95, \quad P(E|B_2) = 0.02$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(E) &= P(E|B_1)P(B_1) + P(E|B_2)P(B_2) \\ &= 0.95 \times 0.03 + 0.02 \times 0.97 = 0.0479 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(B_1|E) &= \frac{P(B_1)P(E|B_1)}{P(B_1)P(E|B_1) + P(B_2)P(E|B_2)} \\ &= \frac{0.03 \times 0.95}{0.03 \times 0.95 + 0.97 \times 0.02} = 0.59 \end{aligned}$$

EJEMPLO

TRES MAQUINAS A, B Y C PRODUCEN EL 50, 20 Y 30 %, RESPECTIVAMENTE, DEL TOTAL DE ARTICULOS QUE PRODUCE UNA FABRICA. LOS PORCENTAJES DE DEFECTUOSOS QUE CADA MAQUINA ELABORA SON 1, 3 Y 5, RESPECTIVAMENTE. SI SE SELECCIONO UN ARTICULOS AL AZAR Y RESULTO DEFECTUOSO, CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE HAYA SIDO PRODUCIDO POR CADA UNA DE LAS MAQUINAS.

Solución

Sea D= {ARTICULOS DEFECTUOSOS}; ENTONCES

$$P(A|D) = \frac{P(A) P(D|A)}{P(A) P(D|A) + P(B) P(D|B) + P(C) P(D|C)}$$

CON P(A)= 0.5, P(B)= 0.2, P(C)= 0.3, P(D|A)= 0.01,
P(D|B)= 0.03 Y P(D|C)= 0.05

SE OBTIENE

$$P(A|D) = \frac{0.5 \times 0.01}{0.5 \times 0.01 + 0.2 \times 0.03 + 0.3 \times 0.05} = \frac{0.005}{0.026} = 0.19$$

ANALOGAMENTE,

$$P(B|D) = \frac{0.2 \times 0.03}{0.026} = \frac{0.006}{0.026} = 0.23$$

$$P(C|D) = \frac{0.3 \times 0.05}{0.026} = \frac{0.015}{0.026} = 0.58$$

OBSERVESE QUE

$$P(A|D) + P(B|D) + P(C|D) = 0.19 + 0.23 + 0.58 = 1.00$$

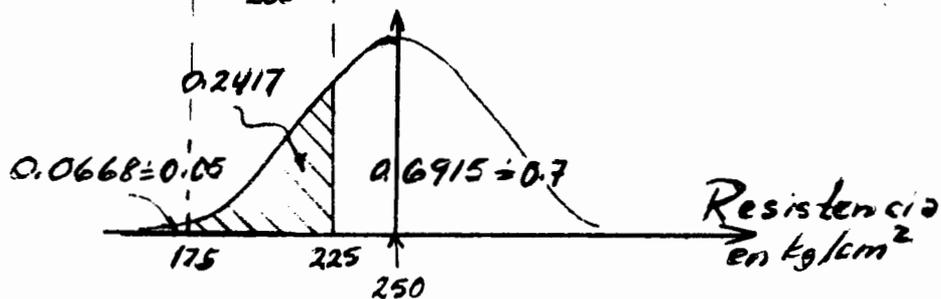
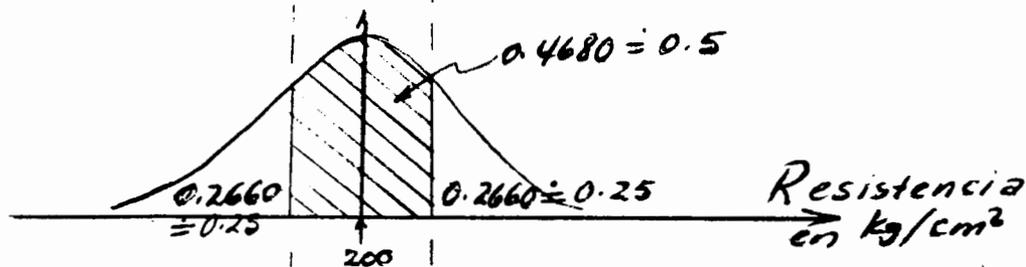
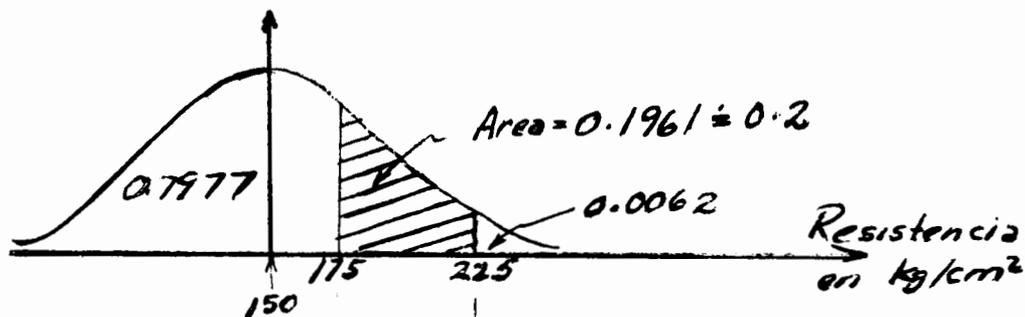
EJEMPLO

EXISTE UN EDIFICIO DE CONCRETO REFORZADO PARA EL CUAL SE INVESTIGA SU CAPACIDAD DE CARGA DE DISEÑO. UN INGENIERO, CON BASE EN SU EXPERIENCIA PERSONAL Y CON BASE EN LA EPOCA EN QUE FUE CONSTRUIDO, DECIDE QUE LA RESISTENCIA NOMINAL, f'_c , DEL CONCRETO PUDO SER DE 150 KG/CM^2 , 200 KG/CM^2 , 250 KG/CM^2 , CON LAS SIGUIENTES PROBABILIDADES PREVIAS:

RESISTENCIA NOMINAL, EN KG/CM^2	PROBABILIDAD
$B_1 = \{150\}$	$P(B_1) = 0.3$
$B_2 = \{200\}$	$P(B_2) = 0.6$
$B_3 = \{250\}$	$P(B_3) = 0.1$

PARA ESTIMAR LA RESISTENCIA NOMINAL REAL, ES NECESARIO REALIZAR UN EXPERIMENTO QUE CONSISTE EN EXTRAER CORAZONES (MUESTRAS) DEL CONCRETO DE LA ESTRUCTURA Y PROBARLOS A COMPRESION SIMPLE. EL INGENIERO DECIDE QUE LA RESISTENCIA, S , DE UN SOLO CORAZON DARA UNA INDICACION CONFIABLE, Y DEFINE LOS EVENTOS ANOTADOS EN LA PRIMERA COLUMNA DE LA TABLA DE LA SIGUIENTE HOJA, A LAS CUALES LES ASIGNA PROBABILIDADES CONDICIONALES, DADA LA RESISTENCIA NOMINAL, f'_c , DE ACUERDO CON LA SUPOSICION DE QUE LA RESISTENCIA CIA TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON LA MEDIA IGUAL A f'_c Y COEFICIENTE DE VARIACION CONSTANTE; DE ACUERDO CON LA TEXTURA DEL CONCRETO Y CON LA EPOCA DE CONSTRUCCION, LE ASIGNA UN VALOR DE 0.20 A DICHO COEFICIENTE (IMPLICA UN CONTROL DE CALIDAD MALO).

RESISTENCIA DEL CORAZON, S, EN KG/CM ²	P(A _j B _i)		
	(f' _C) ₁ =150 B ₁ ={150}	(f' _C) ₂ =200 B ₂ ={200}	(f' _C) ₃ =250 B ₃ ={250}
EVENTO A ₁ = {S < 175}	0.80	0.25	0.05
EVENTO A ₂ = {175 ≤ S ≤ 225}	0.20	0.50	0.25
EVENTO A ₃ = {S > 225}	0	0.25	0.70



SUPONGASE QUE SE SACA UN CORAZON Y QUE SU RESISTENCIA RESULTA SER DE 164 KG/CM^2 , ES DECIR, QUE OCURRE EL EVENTO A_1 . LAS PROBABILIDADES A POSTERIORI DE LAS RESISTENCIAS NOMINALES SON, ENTONCES

$$\begin{aligned}
 P(\{150\}|A_1) &= \frac{P(\{150\})P(A_1|\{150\})}{P(\{150\})P(A_1|\{150\})+P(\{200\})P(A_1|\{200\})+P(\{250\})P(A_1|\{250\})} \\
 &= \frac{0.3 \times 0.80}{0.3 \times 0.8 + 0.6 \times 0.25 + 0.1 \times 0.05} = \frac{0.24}{0.24 + 0.15 + 0.005} \\
 &= \frac{0.24}{0.395} = 0.6076
 \end{aligned}$$

$$P(\{200\}|A_1) = \frac{P(\{200\})P(A_1|\{200\})}{0.395} = \frac{0.15}{0.395} = 0.3797$$

$$P(\{250\}|A_1) = \frac{P(\{250\})P(A_1|\{250\})}{0.395} = \frac{0.005}{0.395} = 0.0127$$

SUPONGASE AHORA QUE EN VEZ DE UN SOLO CORAZON EL INGENIERO HUBIESE DECIDIDO OBTENER DOS, SITUADOS EN DIFERENTES NIVELES DE LA ESTRUCTURA, Y QUE AL PROBARLOS EN UNO OCURRIO A_1 Y EN EL OTRO A_2 . LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN AMBOS EVENTOS (A_1, A_2) SI f'_c ES REALMENTE 150, 200 O 250 KG/CM^2 , SERA EL PRODUCTO DE DOS PROBABILIDADES CONDICIONALES, PUESTO QUE A_1 Y A_2 SON INDEPENDIENTES.

$$P(A_1, A_2|\{150\}) = P(A_1|\{150\})P(A_2|\{150\}) = 0.80 \times 0.20 = 0.16$$

$$P(A_1, A_2|\{200\}) = P(A_1|\{200\})P(A_2|\{200\}) = 0.25 \times 0.50 = 0.125$$

$$P(A_1, A_2|\{250\}) = P(A_1|\{250\})P(A_2|\{250\}) = 0.05 \times 0.25 = 0.0125$$

ESTAS PROBABILIDADES SON INDISPENSABLES, YA QUE EL TEOREMA DE BAYES EN ESTE CASO NOS DARIA:

$$P(\{150\} | A_1, A_2) = \frac{P(\{150\})P(A_1, A_2 | \{150\})}{P(\{150\})P(A_1, A_2 | \{150\}) + P(\{200\})P(A_1, A_2 | \{200\}) + P(\{250\}) \times P(A_1, A_2 | \{250\})}$$

EN ESTE CASO LAS PROBABILIDADES A POSTERIORI SON:

$$P(\{150\} | A_1, A_2) = \frac{0.3 \times 0.16}{0.3 \times 0.16 + 0.6 \times 0.125 + 0.1 \times 0.0125}$$

$$= \frac{0.048}{0.048 + 0.075 + 0.00125} = \frac{0.048}{0.12425} = 0.386$$

$$P(\{200\} | A_1, A_2) = \frac{P(\{200\})P(A_1, A_2 | \{200\})}{0.12425} = \frac{0.075}{0.12425} = 0.604$$

$$P(\{250\} | A_1, A_2) = \frac{P(\{250\})P(A_1, A_2 | \{250\})}{0.12425} = \frac{0.00125}{0.12425} = 0.010$$

LOS MISMOS RESULTADOS SE HABRIAN OBTENIDO SI EL INGENIERO, DESPUES DE EXTRAER EL PRIMER CORAZON Y DE CALCULAR LAS PROBABILIDADES POSTERIORES CORRESPONDIENTES, HUBIERA DECIDIDO SACAR EL SEGUNDO Y RECALCULAR DICHAS PROBABILIDADES CON BASE EN LAS OBTENIDAS PARA EL PRIMERO; ES DECIR, LAS PROBABILIDADES PREVIAS EN EL SEGUNDO CALCULO SERIAN $P(\{150\}) = 0.6076$, $P(\{200\}) = 0.3797$ Y $P(\{250\}) = 0.0127$. EN TAL CASO, LAS PROBABILIDADES POSTERIORES, DADO QUE OCURRIO A_2 , SON

$$P(\{150\}|A_2) = \frac{P(\{150\})P(A_2|\{150\})}{0.2 \times 0.6076 + 0.5 \times 0.3797 + 0.25 \times 0.0127}$$

$$= \frac{0.12152}{0.12152 + 0.18975 + 0.00318} = \frac{0.12152}{0.31445} = 0.386$$

$$P(\{200\}|A_2) = \frac{P(\{200\})P(A_2|\{200\})}{0.31445} = \frac{0.18975}{0.31445} = 0.604$$

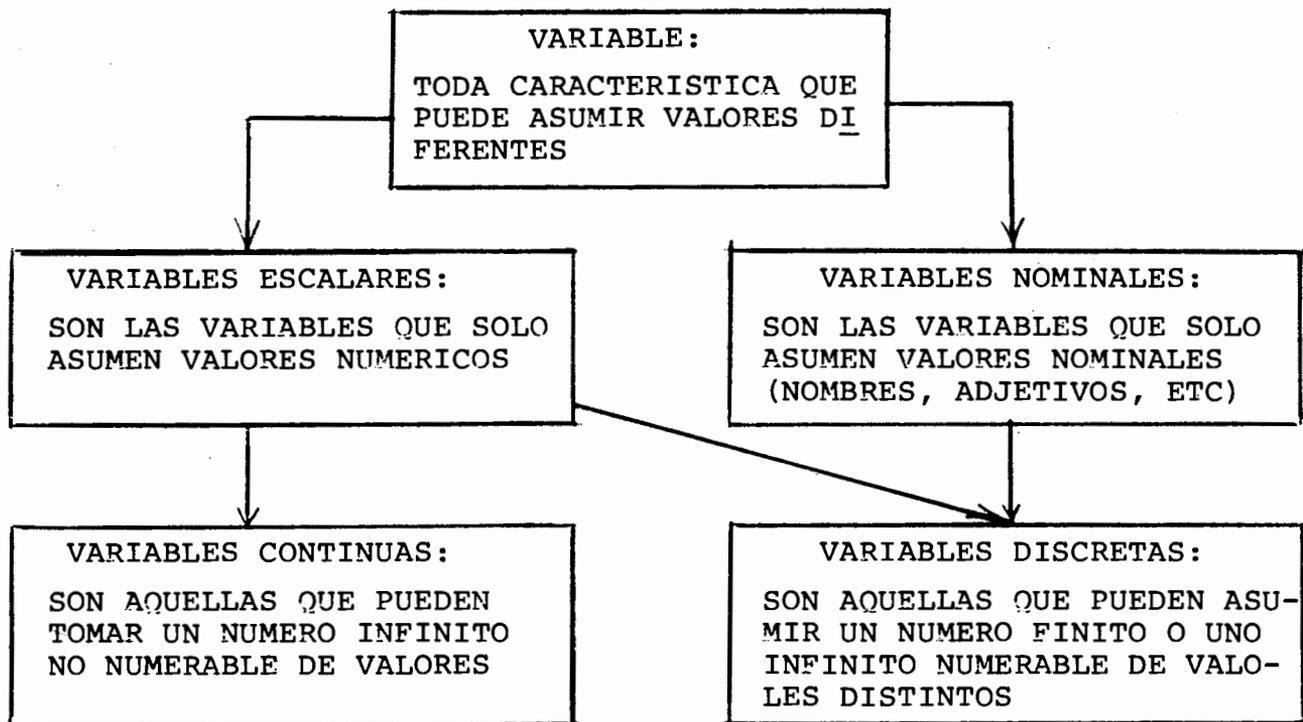
$$P(\{250\}|A_2) = \frac{P(\{250\})P(A_2|\{250\})}{0.31445} = \frac{0.00318}{0.31445} = 0.010$$

QUE SON IGUALES A LAS ANTERIORES.

CON LO ANTERIOR SE DEMUESTRA QUE LAS PROBABILIDADES SE PUEDEN ACTUALIZAR CONFORME SE VA OBTENIENDO NUEVA INFORMACION EXPERIMENTAL.

VARIABLES ALEATORIAS

CLASIFICACION DE VARIABLES



UNA VARIABLE ALEATORIA ES UNA VARIABLE TAL QUE NO PUEDE PREDECIRSE CON CERTEZA EL VALOR QUE ASUMIRA AL REALIZAR UN EXPERIMENTO. POR EJEMPLO, LA RESISTENCIA O CARGA DE FALLA DE UNAS VIGAS ES UNA VARIABLE ALEATORIA, YA QUE ANTES DE ROMPER UNA VIGA TOMADA AL AZAR NO SE PUEDE PRECISAR CUAL SERA SU RESISTENCIA. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON 15 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO, OBSERVANDOSE QUE ESTOS VARIAN DE UNAS A OTRAS DE MANERA ALEATORIA.

TABLA 2. PRUEBAS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Número de la viga	Carga de agrietamiento, en kg, X	Carga de falla, en kg, Y
1	4 700	4 700
2	3 840	4 220
3	3 270	4 360
4	2 310	4 680
5	2 950	4 270
6	4 810	4 810
7	2 720	4 590
8	2 720	4 490
9	4 310	4 310
10	2 950	4 630
11	4 220	4 220
12	2 720	4 340
13	2 720	4 340
14	2 630	4 770
15	2 950	4 630

A TODO EXPERIMENTO SE LE PUEDE ASOCIAR AL MENOS UNA VARIABLE ALEATORIA, DEPENDIENDO ESTA DEL PROBLEMA QUE SE TENGA PLANTEADO. POR EJEMPLO, EN EL CASO DE LA RESISTENCIA DE LAS VIGAS DE VARIABLE ALEATORIA PUEDE SER DIRECTAMENTE DICHA RESISTENCIA, EN CUYO CASO SU ESPACIO DE EVENTOS SERIA

$$S_1 = \{X: 0 < X < \infty\}$$

LA VARIABLE TAMBIEN PUDO HABER SIDO UNA CUYO ESPACIO DE EVENTOS FUERA

$$S_2 = \{\text{EXITO, FRACASO}\}$$

EN DONDE EL EXITO OCUERRIRIA SI LA VIGA RESISTIERA MAS DE CIERTA CANTIDAD, POR EJEMPLO 4600 KG, Y EL FRACASO OCUERRIRIA SI RESISTIERA MENOS, ES DECIR:

EXITO: SI $X \geq 4600$ KG

FRACASO: SI $X < 4600$ KG

LEYES DE PROBABILIDADES

EL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE ALEATORIA SE DESCRIBE MEDIANTE SU LEY DE PROBABILIDADES, LA CUAL PUEDE ESPECIFICARSE DE DIFERENTES FORMAS. LA MANERA MAS COMUN DE HACERLO ES MEDIANTE SU DISTRIBUCION O DENSIDAD DE PROBABILIDADES.

A FIN DE EVITAR CONFUSION, SE EMPLEARA UNA LETRA MAYUSCULA PARA DENOTAR UNA VARIABLE ALEATORIA, Y LA MINUSCULA CORRESPONDIENTE PARA LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR. SI LA VARIABLE ALEATORIA X ES DISCRETA Y PUEDE ASUMIR LOS VALORES x_i , SU DENSIDAD DE PROBABILIDADES, $f_X(x)$ SERA EL CONJUNTO DE LAS PROBABILIDADES

$$P_X(x_i) = P(X = x_i)$$

LA CUAL SE LEE "PROBABILIDAD DE QUE $X = x_i$ ". ESTO ES

$$f_X(x) = \{P_X(x_i)\}$$

PARA QUE UNA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SATISFAGA LOS TRES AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES, SE DEBEN CUMPLIR LOS SIGUIENTES REQUISITOS

- A) $0 \leq P_X(x_i) \leq 1$ PARA TODA x_i
- B) $\sum_{i=1}^n P_X(x_i) = 1$, DONDE n ES EL NUMERO TOTAL DE VALORES QUE PUEDE ASUMIR X
- C) $P(x_m \leq X \leq x_r) = \sum_{i=m}^{i=r} P_X(x_i)$; $m \leq r$, DONDE LAS x_i ESTAN

ORDENADAS EN FORMA CRECIENTE, ES DECIR,

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS O FUNCION DE DISTRIBUCION

OTRA FORMA DE ESPECIFICAR LA LEY DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA ES MEDIANTE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, $F_X(x)$, QUE SE DEFINE COMO EL CONJUNTO DE LAS SUMAS PARCIALES DE LAS PROBABILIDADES, $P_X(x_i)$, CORRESPONDIENTES A TODOS LOS VALORES DE X MENORES O IGUALES QUE x_i . POR LO TANTO, ESTA FUNCION DA LAS PROBABILIDADES DE QUE LA VARIABLE ALEATORIA TOME VALORES MENORES O IGUALES QUE x_m PARA CUALQUIER m , ES DECIR

$$F_X(x) = \{F_X(x_m)\} ; m = 1, 2, \dots, n$$

EN DONDE

$$F_X(x_m) = \sum_{i=1}^{i=m} P_X(x_i) = P(X \leq x_m)$$

EJEMPLO

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA "NUMERO TOTAL DE CARROS QUE SE DETIENEN EN UNA ESQUINA DEBIDO A LA LUZ ROJA DE UN SEMAFORO". SI LAS PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA VALOR, DETERMINADAS POR EL METODO FRECUENCIAL, SON

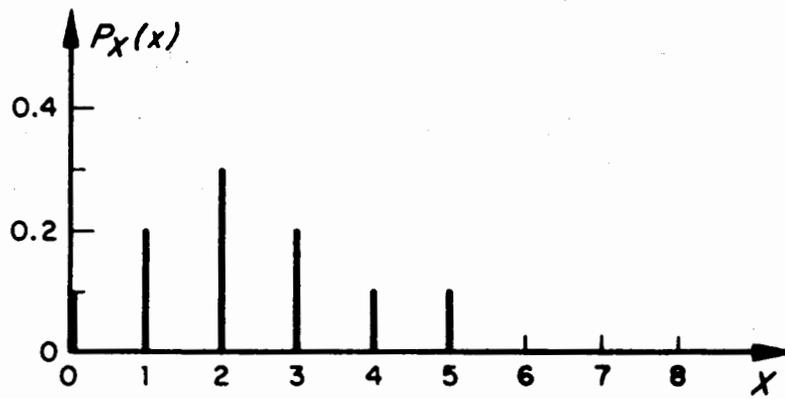
$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{SI } x = 0 \\ 0.2 & \text{SI } x = 1 \\ 0.3 & \text{SI } x = 2 \\ 0.2 & \text{SI } x = 3 \\ 0.1 & \text{SI } x = 4 \\ 0.1 & \text{SI } x = 5 \\ 0 & \text{SI } x \geq 6 \end{cases}$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES Y LA DE PROBABILIDADES ACUMULADAS CORRESPONDIENTES SERAN

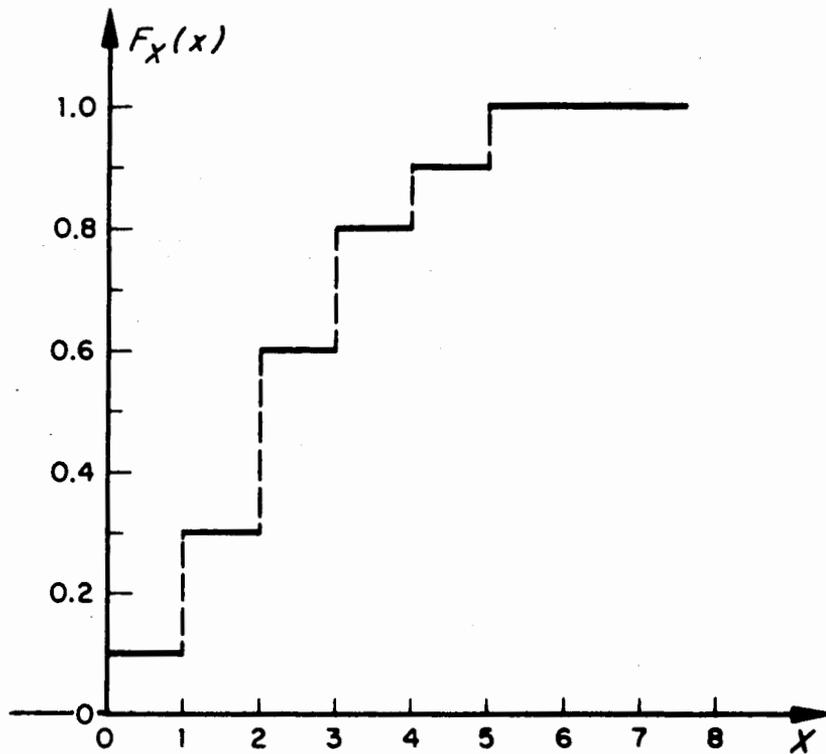
x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
<0	0	0
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
≥ 6	0	1.0

O SEA $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI } x < 0 \\ 0.1, & \text{SI } 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & \text{SI } 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & \text{SI } 2 \leq x < 3 \\ 0.8, & \text{SI } 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & \text{SI } 4 \leq x < 5 \\ 1.0, & \text{SI } 5 \leq x \end{cases}$

LAS GRAFICAS DE ESTAS DISTRIBUCIONES SE PRESENTAN EN LA FIGURA DE LA SIGUIENTE HOJA.



a) Distribución de probabilidades



b) Función de distribución

Ley de probabilidades del ejemplo del tráfico

EJEMPLO

SEA LA VARIABLE ALEATORIA X DEFINIDA POR LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS QUE QUEDEN HACIA ARRIBA AL LANZAR DOS DADOS. EN ESTE CASO EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$X = a + b$$

Y LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES

$$f_X(x) = \left\{ \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36} \right\}$$

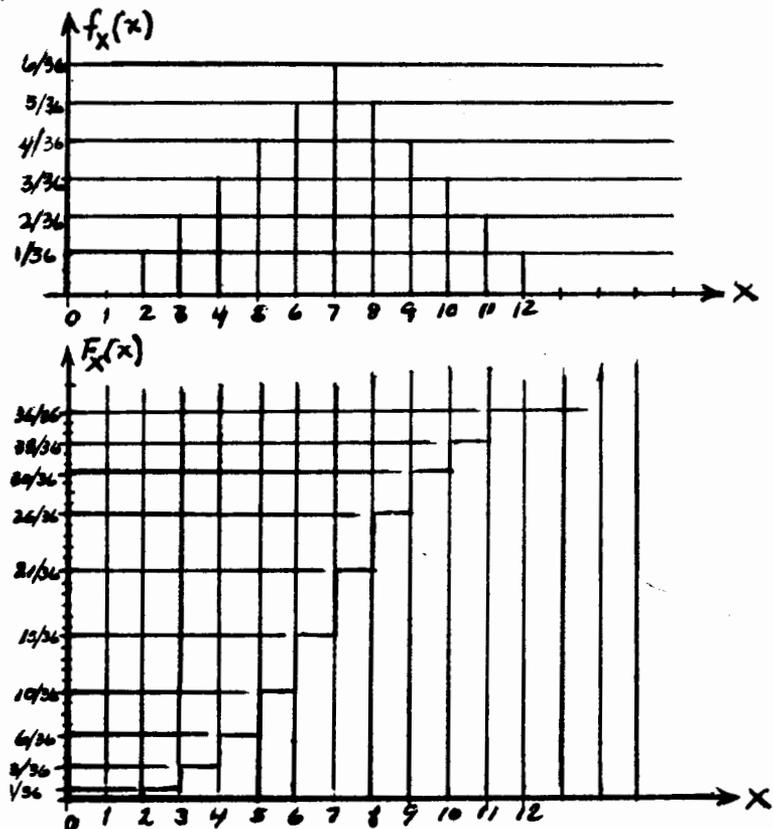
EN ESTE CASO $x_1=2, x_2=3, \dots, x_{11}=12$

$$Y \quad f_X(2) = \frac{1}{36}, f_X(3) = \frac{2}{36}, \dots, f_X(12) = \frac{1}{36}$$

ESTAS PROBABILIDADES FUERON CALCULADAS EN UN EJEMPLO PREVIO SOBRE PROBABILIDADES DE EVENTOS .

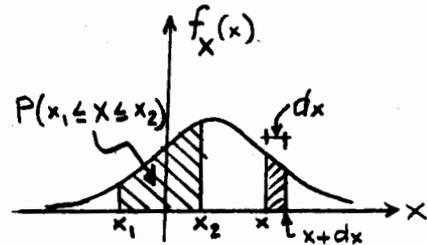
CON ESTAS PROBABILIDADES SE PUEDE OBTENER LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCION O DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, DE LA SIGUIENTE MANERA:

x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
<2	0	0
2	$1/36$	$1/36$
3	$2/36$	$3/36$
4	$3/36$	$6/36$
5	$4/36$	$10/36$
6	$5/36$	$15/36$
7	$6/36$	$21/36$
8	$5/36$	$26/36$
9	$4/36$	$30/36$
10	$3/36$	$33/36$
11	$2/36$	$35/36$
12	$1/36$	$36/36=1$
>12	0	1
	$\Sigma=1$	



EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X , LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA TOMA UN VALOR COMPRENDIDO ENTRE x Y $x + dx$ ESTA DADA POR $f_X(x)dx$, DONDE $f_X(x)$ ES LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X . POR LO TANTO, LA PROBABILIDAD DE QUE X ASUMA VALORES COMPRENDIDOS EN EL INTERVALO $x_1 < X < x_2$ ES

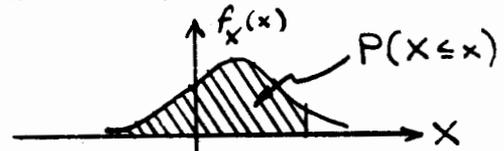
$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$



LA INTERPRETACION GRAFICA DE ESTA PROBABILIDAD ES QUE CORRESPONDE AL AREA BAJO LA CURVA DE $f_X(x)$ COMPRENDIDA ENTRE x_1 Y x_2 .

PUESTO QUE $F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x)$, Y EN VIRTUD DE LA ECUACION ANTERIOR SE TIENE QUE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ES:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$



DONDE U ES SOLO UNA VARIABLE MUDA DE INTEGRACION. EL VALOR DE ESTA INTEGRAL ES IGUAL AL AREA BAJO LA CURVA DE $F_X(x)$ A LA IZQUIERDA DE x . DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x f_X(u) du \right) = f_X(x)$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE $F_X(x)$ SON:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(\infty) = 1$$

$$F_X(x + \epsilon) \geq F_X(x), \text{ SI } \epsilon \geq 0$$

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

PARA SATISFACER LOS AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES SE
NECESITA QUE

$$f_X(x) \geq 0 \text{ PARA TODA } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

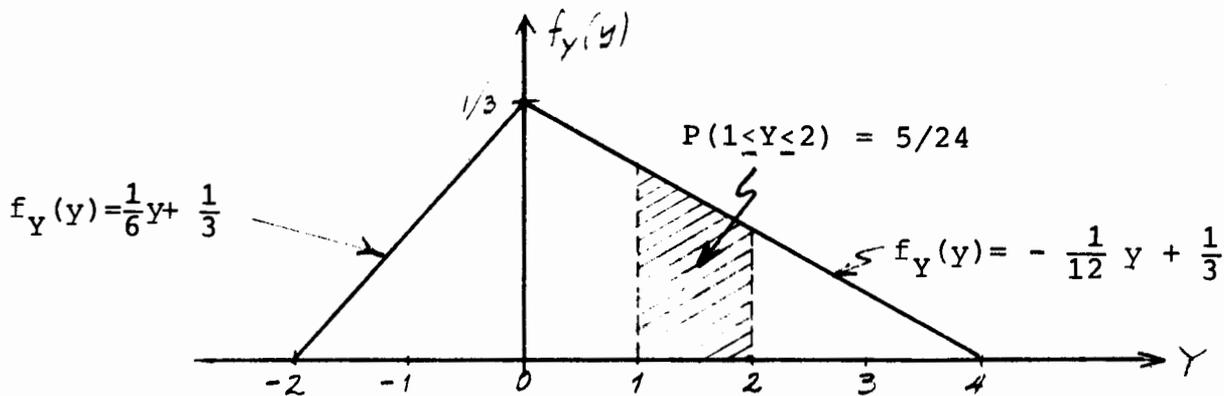
EJEMPLO

SEA UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES DE FORMA TRIANGULAR DADA POR LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}, \text{ SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12}y + \frac{1}{3}, \text{ SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y < -2 \text{ O } y > 4$$



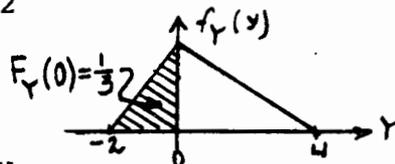
LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES, ENTONCES:

$$\text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u) du = \int_{-2}^y \left(\frac{1}{6}u + \frac{1}{3} \right) du$$

$$= \left[\frac{u^2}{12} + \frac{u}{3} \right]_{-2}^y = \frac{y^2}{12} + \frac{y}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\text{SI } 0 \leq y \leq 4$$



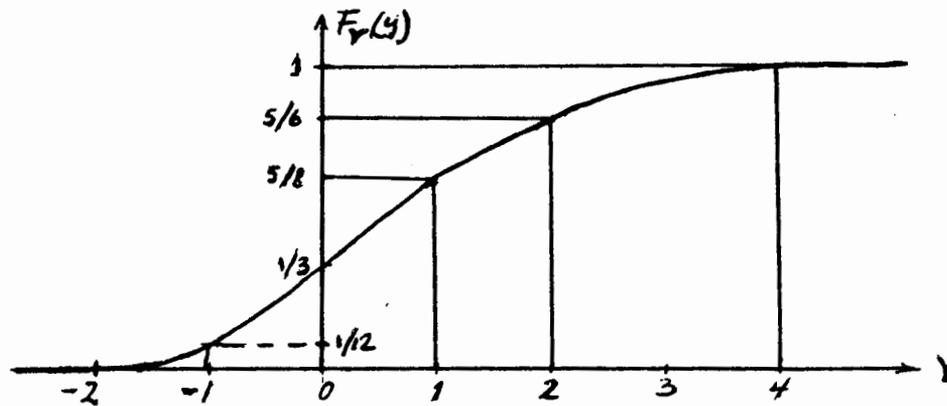
$$F_Y(y) = F_Y(0) + \int_0^y \left(-\frac{1}{12}u + \frac{1}{3} \right) du = \frac{1}{3} + \left[-\frac{u^2}{24} + \frac{u}{3} \right]_0^y =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}$$

$$\text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2$$

$$F_Y(y) = 1 \quad \text{SI } y \geq 4$$



SI SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO QUE INVOLUCRA A DICHA VARIABLE, EL VALOR QUE SE OBSERVE CAIGA EN EL INTERVALO $1 < Y < 2$, ENTONCES

$$P[1 < Y < 2] = \int_1^2 \left(-\frac{1}{12}y + \frac{1}{3}\right) dy = \left[-\frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{24}$$

O

$$P[1 < Y < 2] = F_Y(2) - F_Y(1) = \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

EJEMPLO

UN INGENIERO ESTA INTERESADO EN DISEÑAR UNA TORRE QUE RESISTA LAS CARGAS DEBIDAS AL VIENTO. DE UNA SERIE DE OBSERVACIONES DE LA MAXIMA VELOCIDAD ANUAL DEL VIENTO CERCA DEL SITIO DE INTERES, SE ENCUENTRA QUE EL HISTOGRAMA PUEDE AJUSTARSE RAZONABLEMENTE, DESDE UN PUNTO DE VISTA ESTADISTICO, MEDIANTE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL DE LA FORMA

$$f_X(x) = Ke^{-\lambda x}; x \geq 0$$

DONDE X ES LA MAXIMA VELOCIDAD DEL VIENTO, λ ES UNA CONSTANTE Y K ES OTRA CONSTANTE TAL QUE OBLIGA A QUE EL AREA BAJO LA CURVA DE $f_X(x)$ SEA IGUAL A UNO. POR TANTO,

$$\int_0^{\infty} Ke^{-\lambda x} dx = \frac{-K}{\lambda} [e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = \frac{K}{\lambda} = 1$$

DE DONDE

$$K = \lambda$$

POR TANTO

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0$$

LA FUNCION DE DISTRIBUCION SERA

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u) du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = [-e^{-\lambda u}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}; x \geq 0$$

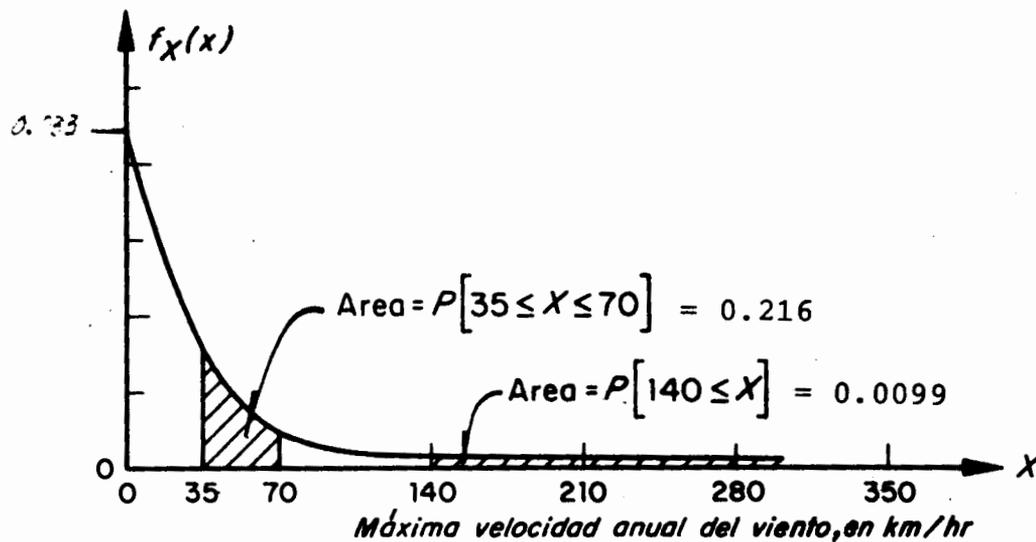
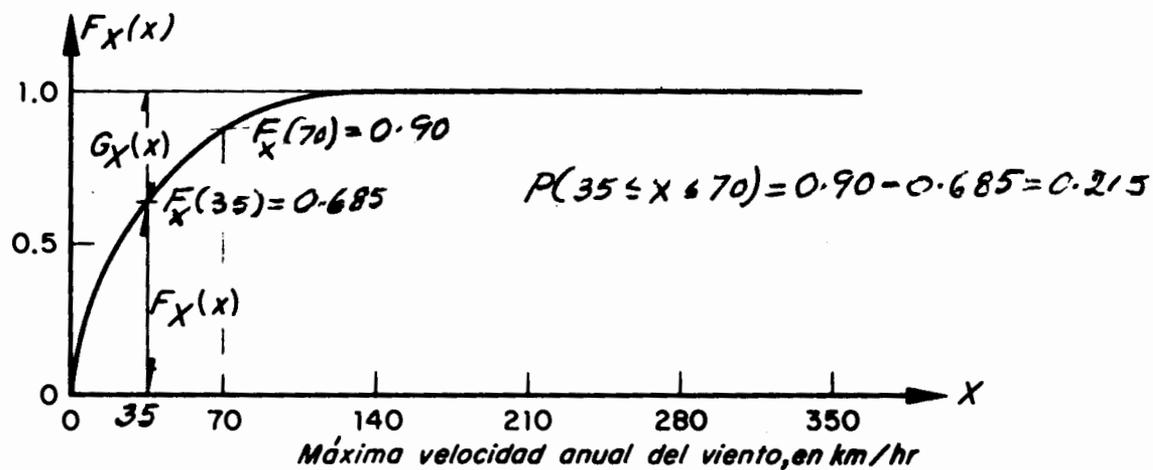
EL VALOR DE λ SE PUEDE TOMAR, POR EJEMPLO, DE MANERA QUE $F_X(x)$ SE AJUSTE PARA QUE COINCIDA CON UN VALOR EMPIRICO. ASI, SI LA FRECUENCIA RELATIVA DEL EVENTO $A = \{X \leq 70 \text{ KM/H}\}$ ES 0.9, ENTONCES

$$P(0 \leq X \leq 70) = F_X(70) = 0.9$$

DE DONDE

$$0.9 = 1 - e^{-70\lambda}$$

POR LO CUAL $\lambda = 0.033$.

a) Densidad de probabilidades de X b) Función de distribución de X

Ley de probabilidades correspondiente al ejemplo de la máxima velocidad anual del viento

SI SE DESEA CALCULAR, POR EJEMPLO, LA PROBABILIDAD DE QUE LA VELOCIDAD MÁXIMA DEL VIENTO EN UN AÑO DADO ESTE ENTRE 35 Y 70 KM/H, SE TENDRÁ:

$$\begin{aligned}
 P(35 \leq X \leq 70) &= \int_{35}^{70} 0.033e^{-0.033x} dx = [-e^{-0.033x}]_{35}^{70} = \\
 &= -e^{-0.033 \times 70} - (-e^{-0.033 \times 35}) = -e^{-2.31} + e^{-1.155} = \\
 &= -0.099 + 0.315 = 0.216
 \end{aligned}$$

EN TERMINOS DE $F_X(x)$ ESTA PROBABILIDAD QUEDA DADA POR

$$\begin{aligned}
 P(35 \leq X \leq 70) &= F_X(70) - F_X(35) = 0.90 - (1 - e^{-1.155}) = 0.90 - 0.685 \\
 &= 0.215
 \end{aligned}$$

FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA

EL COMPLEMENTO, $G_X(x)$, DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS SU UTILIZA CUANDO LAS DECISIONES SE TOMAN CON BASE EN PROBABILIDADES DE QUE SE EXCEDA UN VALOR DADO DE LA VARIABLE. LA FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA SE DEFINE COMO

$$G_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

EJEMPLO

PARA EL PROBLEMA ANTERIOR DE LA VELOCIDAD MAXIMA ANUAL DEL VIENTO, CALCULEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA SEA MAYOR DE 140 KM/H:

$$G_X(140) = P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} 0.33e^{-0.033x} dx = 0.0099$$

O, ALTERNATIVAMENTE

$$P(X \geq 140) = 1 - F_X(140) = G_X(140) = 1 - (1 - e^{-0.033 \times 140}) = e^{-4.62} = 0.0099$$

ESPERANZAS

LA ESPERANZA DE UNA FUNCION $g(X)$, DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, X , ES, POR DEFINICION

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{i=n} g(x_i) P_X(x_i)$$

O PARA UNA VARIABLE CONTINUA

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

EJEMPLOS

1. SI $g(X) = \text{CONSTANTE} = c$

$$E(c) = c \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = c$$

2. SI $g(X) = x$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

3. SI $g(X) = a + bx$

$$E[a + bx] = a \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = a + bE[X]$$

4. SI $g(X) = g_1(X) + g_2(X)$

$$\begin{aligned} E[g_1(X) + g_2(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x) dx \\ &= E[g_1(X)] + E[g_2(X)] \end{aligned}$$

5. SI $g(X) = \frac{x-c}{d} = \frac{1}{d} x - \frac{c}{d}$

$$E\left(\frac{x-c}{d}\right) = \frac{1}{d} E(x) - \frac{c}{d} = \frac{E(x) - c}{d}$$

6. SI $g(X) = ax^2$

$$E(ax^2) = a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = a E(x^2)$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR LA ESPERANZA DE LA FUNCION

$$g(x) = x^2$$

EN ESTE CASO SE TIENE QUE

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ SI } 0 \leq x < \infty, \text{ Y } f_X(x) = 0, \text{ SI } x < 0$$

POR LO QUE

$$E(x^2) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{-x^2 e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\infty} + \frac{2\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{-2}{\lambda^2} [e^{-\lambda x} (1 + \lambda x)]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

EN GENERAL, A LA ESPERANZA DE x^2 SE LE DENOMINA VALOR MEDIO CUADRATICO.

Ejemplo. Construcción de la carpeta de una carretera.

Un contratista construirá la carpeta de una carretera en tramos de 50 m; el gobierno aceptará o rechazará cada tramo de acuerdo con una prueba de control de calidad. El contratista tiene la opción de pedir el concreto a una de dos plantas premezcladoras; la planta A cobra 140 pesos/m³ y la B 160 pesos/m³, pero, el control de calidad que se lleva en la planta B es mejor, lo cual hace más probable que un tramo dado pase favorablemente la prueba de aceptación. Tomando en cuenta que en cada tramo se usan 100 m³ de concreto y que la probabilidad de que el proveniente de la planta A no pase la prueba de control es 0.10, y la de B es 0.05, el constructor deberá decidirse por cuál planta usar. El árbol de decisiones de este problema es el mostrado en la fig 6.4, donde $P(\theta_1)$ y $P(\theta_2)$ son las probabilidades de que ocurran θ_1 y θ_2 , respectivamente. La utilidad $u_1 = u(a_1, \theta_1)$ es la que corresponde a utilizar la planta A y que la carpeta pase la prueba de control de calidad; en este caso la utilidad (negativa) es el costo del concreto (\$14,000.00) más la colocación (supongamos \$100,000.00), por lo cual $u_1 = -114,000.00$. $u_2 = u(a_1, \theta_2)$ es la que corresponde a usar la planta A y que la carpeta no pase la prueba de calidad; en este caso el constructor deberá demoler y reconstruir el tramo con los siguientes costos:

Carpeta demolida	{	Pérdida de prestigio	\$	5,000.00
		Mano de obra de demolición		15,000.00
		Concreto		14,000.00
		Mano de obra de colocación		100,000.00

Reconstrucción	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mano de obra} \\ \text{Concreto} \end{array} \right.$	\$ 100,000.00
		14,000.00
T O T A L		\$ 248,000.00

De manera similar se obtienen u_3 y u_4 , cuyos valores resultan ser $u_3 = - \$116,000.00$ y $u_4 = - \$252,000.00$.

Si la decisión se tomara sin considerar las probabilidades de aceptar la carpeta, el constructor se decidiría por la planta A, ya que la pérdida (utilidad negativa) sería menor. Si sí se toman en cuenta y adoptamos como *criterio de decisión* el escoger la planta que conduzca a una *esperanza de pérdida* menor se tendrá (recuerde que la esperanza de la variable aleatoria X , $E[X]$, es $E[X] = \sum_{i=1}^m P[X_i] X_i$, donde las X_i son los valores que puede asumir X , y $P[X_i]$ son las probabilidades correspondientes):

Para la planta A:

$$E[U] = 0.90 \times (-114,000) + 0.10 \times (-248,000) = -\$127,400.$$

Para la planta B:

$$E[U] = 0.95 \times (-116,000) + 0.05 \times (-252,000) = -\$122,800.$$

Comparando ambas cifras se concluye que la decisión de comprar el concreto de la planta B conduce a una pérdida esperada menor que la de la planta A, es decir, se escoge la planta B aunque el precio unitario del concreto sea mayor.

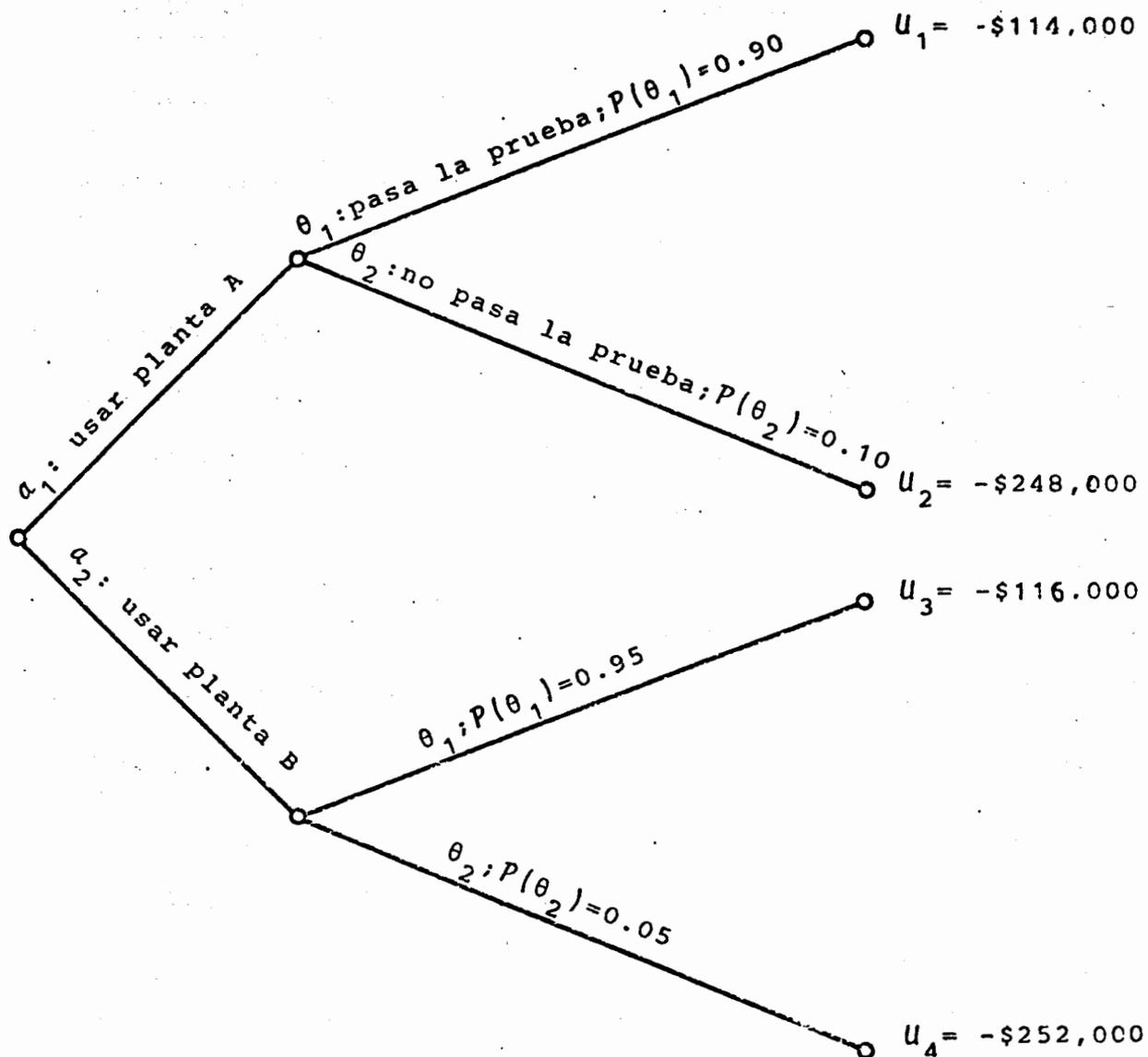


Fig 6.4 Arbol de decisiones del ejemplo 6.2

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

LA MEDIA O ESPERANZA, $E[X]$, DE UNA VARIABLE ALEATORIA, X , SE CALCULA CON LAS ECUACIONES ANTERIORES PARA EL CASO EN QUE $g(X)=X$. DE ESTA MANERA, SI LA VARIABLE ES DISCRETA, SU ESPERANZA QUEDA DADA POR

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_X(x_i)$$

DONDE n ES EL TOTAL DE VALORES QUE X PUEDE ASUMIR.

PARA EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, LA MEDIA ES

$$m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

OTRAS MEDIDAS USUALES DE TENDENCIA CENTRAL DE UNA VARIABLE ALEATORIA SON LA MEDIANA Y EL MODO. LA PRIMERA SE DEFINE COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE UNA PROBABILIDAD ACUMULADA DE 50%, Y LA SEGUNDA, COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE LA MAYOR PROBABILIDAD.

EJEMPLO

SI LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA X CORRESPONDE A LOS ERRORES EN UNA NIVELACION, ES LA DE LA SEGUNDA COLUMNA DE LA SIGUIENTE TABLA, LA MEDIA DE DICHA VARIABLE RESULTA SER 4 167 LA MEDIANA 4000 Y EL MODO 4000 MICRAS. LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES SE LOCALIZAN EN LA TERCERA COLUMNA.

x_i , EN MICRAS	$P_X(x_i)$	$x_i P_X(x_i)$, EN MICRAS	$F_X(x_i)$
0	6/60	0	6/60
1 000	2/60	2 000/60	8/60
2 000	4/60	8 000/60	12/60
3 000	8/60	24 000/60	20/60
4 000	13/60	52 000/60	33/60 = 0.5
5 000	12/60	60 000/60	45/60
6 000	7/60	42 000/60	52/60
7 000	4/60	28 000/60	56/60
8 000	2/60	16 000/60	58/60
9 000	2/60	18 000/60	60/60
TOTAL: $E[X] = 250\ 000/60 = 4\ 167$ MICRAS			

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE
 · PROBABILIDADES ES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12}y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2 \quad \text{O} \quad y \geq 4$$

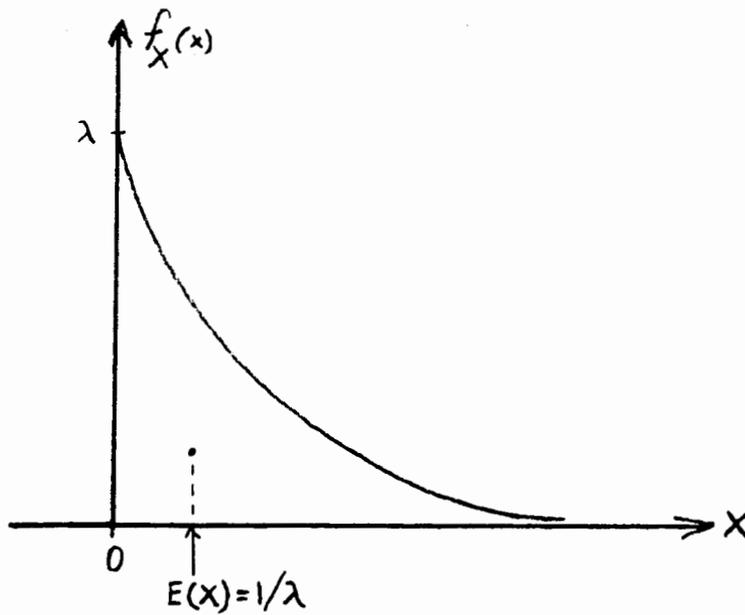
$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-2}^0 y \left(\frac{y}{6} + \frac{1}{3} \right) dy + \int_0^4 y \left(-\frac{y}{12} + \frac{1}{3} \right) dy \\ &= \left[\frac{y^3}{18} + \frac{y^2}{6} \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{y^3}{36} + \frac{y^2}{6} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL

$$f_{\lambda}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\lambda}(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda^2} (1 + \lambda x) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$



MEDIDAS DE DISPERSION

UNA MEDIDA MUY COMUN DE LA DISPERSION O VARIABILIDAD DE LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR UNA VARIABLE ALEATORIA ES LA VARIANCIA, LA CUAL SE DENOTA COMO $\sigma^2(X)$ O $\text{VAR}(X)$, LA CUAL SE DEFINE COMO LA ESPERANZA DE LA FUNCION $g(X) = [X - E(X)]^2$. ASI, PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$\sigma^2(X) = \text{VAR}(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$$

Y PARA UNA CONTINUA

$$\sigma^2(X) = \text{VAR}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$$

DESARROLLANDO EL INTEGRANDO DE ESTA ULTIMA ECUACION:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E^2(X))f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + E^2(X) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = E[X^2] - E^2[X] \end{aligned}$$

ES DECIR, LA VARIANCIA SE PUEDE CALCULAR COMO LA DIFERENCIA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO Y EL CUADRADO DE LA MEDIA DE X.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION DE LA VARIABLE ALEATORIA X SON LA DESVIACION ESTANDAR, $\sigma(X)$, LA CUAL ES IGUAL A LA RAIZ CUADRADA DE LA VARIANCIA, Y EL COEFICIENTE DE VARIACION QUE SE DEFINE COMO

$$v(X) = \sigma(X) / E(X) , \text{ SI } E(X) \neq 0$$

EJEMPLO

EN LA SIGUIENTE TABLA SE CALCULA LA VARIANCIA DE LA VARIABLE ALEATORIA
CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SE PRESENTO EN EL EJEMPLO

ANTERIOR ($E(x) = 4167$ MICRAS)

$x_i - E(X)$ EN MICRAS	$(x_i - E(x))^2$ MICRAS ²	$P_X(x_i)$ $f(x)$	$(x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$, EN MICRAS
-4 167	17 363 889	6/60	1 736 388
-3 167	10 029 889	2/60	334 329
-2 167	4 695 889	4/60	313 059
-1 167	1 361 889	8/60	181 585
- 167	27 889	13/60	6 042
833	693 889	12/60	138 777
1 833	3 359 889	7/60	391 987
2 833	8 025 889	4/60	535 059
3 833	14 691 889	2/60	489 729
4 833	23 357 889	2/60	778 596

TOTAL: 4 405 551 MICRAS² = $\sigma^2(X)$

LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION DE ESTA VARIABLE
ALEATORIA SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\sigma(X) = \sqrt{4\ 405\ 551} = 2\ 215 \text{ MICRAS, Y } v(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{2\ 215}{4\ 167} = 0.531$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR SU VARIANCIA, DESVIACION ESTANDAR Y COEFICIENTE DE VARIACION:

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= E(X-E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} (x^2 - 2xE[X] + E^2[X]) e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - 2E[X] \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx + E^2[X] \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - 2 \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{x^2}{2e^{\lambda x}} \right]_0^{\infty} = \\ E[X^2] &= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3e^{\lambda x}} \right]_0^{\infty} =\end{aligned}$$

YA QUE $E(X) = 1/\lambda$ Y $E[X^2] = 2/\lambda^2$.

USANDO LA FORMULA $\sigma^2(X) = E[X^2] - E^2[X]$, Y TOMANDO EN CUENTA QUE $E[X^2] = 2/\lambda^2$ SE OBTIENE:

$$\sigma^2(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$$

EN CONSECUENCIA, LA DESVIACION ESTANDAR ES

$$\sigma(X) = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$$

Y EL COEFICIENTE DE VARIACION

$$v(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = 1$$

EJEMPLO

SEA Y UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12} y + \frac{1}{3} \quad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \quad \text{SI } y \leq -2 \text{ O } y \geq 4$$

CALCULAR LA VARIANCIA, LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION.

CALCULAREMOS PRIMERO EL VALOR MEDIO CUADRATICO PARA LUEGO APLICAR LA ECUACION $\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$

$$E[Y^2] = \int_{-2}^0 y^2 \left(\frac{1}{6} y + \frac{1}{3}\right) dy + \int_0^4 y^2 \left(-\frac{y}{12} + \frac{1}{3}\right) dy = \left[\frac{y^4}{24} + \frac{y^3}{9}\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{y^4}{48} + \frac{y^3}{9}\right]_0^4 = 2$$

$$\sigma^2(Y) = 2 - (2/3)^2 = 14/9$$

$$\sigma(Y) = 1.25 \left(\sqrt{14/9}\right)$$

$$v(Y) = 1.25 / (2/3) = 1.88$$

EJEMPLO

SI SE HACE LA TRANSFORMACION $Y = ax$, ¿CUANTO VALE LA VARIANCIA DE Y EN TERMINOS DE LA DE X?

DE LO VISTO ANTERIORMENTE, $E(Y) = aE(x)$ Y $E(Y^2) = a^2 E(X^2)$

$$\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = a^2 E(x^2) - a^2 E^2(x) = a^2 [E(x^2) - E^2(x)] = a^2 \sigma^2(x)$$

DISTRIBUCIONES PARTICULARESVARIABLES ALEATORIAS DISCRETASDISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI

LA DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI SE EMPLEA COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS ASOCIADOS A EXPERIMENTOS EN LOS QUE SOLO HAY (O SOLO IMPORTAN) DOS RESULTADOS POSIBLES, UNO DE LOS CUALES USUALMENTE SE DENOMINA "EXITO" Y, EL OTRO, "FRACASO" ($S = \{\text{EXITO}, \text{FRACASO}\}$).

SEAN p = PROBABILIDAD DE OBSERVAR "EXITO" AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO

q = PROBABILIDAD DE "FRACASO" = $1-p$

X = VARIABLE ALEATORIA "NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO "CON REEMPLAZO"

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES BINOMIAL ES

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} : x = 0, 1, \dots, n$$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS PARAMETROS DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = np, \quad \sigma^2(X) = npq$$

REFERENCIA: W. BEYER, "HANDBOOK OF TABLES FOR PROBABILITY AND STATISTICS", THE CHEMICAL RUBBER, CO. (1966).

DEMOSTRACION

SI $n=2$, ENTONCES X PUEDE ASUMIR LOS VALORES 0, 1 y 2, ES DECIR $S = \{0, 1, 2\}$. EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$S_1 = \{ \underbrace{(\text{FRACASO}, \text{FRACASO})}_{X=0}, \underbrace{(\text{EXITO}, \text{FRACASO})}_{X=1}, \underbrace{(\text{FRACASO}, \text{EXITO})}_{X=1},$$

$$\underbrace{(\text{EXITO}, \text{EXITO})}_{X=2} \}$$

$$f_X(x) = \{f_X(0), f_X(1), f_X(2)\}$$

OBSERVESE QUE $x=0$ OCURRE DE UNA MANERA, $x=1$, DE DOS, Y $x=2$, DE UNA. ESTOS RESULTADOS SE PUEDEN OBTENER PERMUTANDO DOS GRUPOS, UNO CON x Y EL OTRO CON $n-x$ ELEMENTOS:

$$x=0: \quad 2^P_{0,2} = \frac{2!}{0!x2!} = 1 ; P(\{0\}) = q \times q = q^2 = p^0 q^2$$

$$x=1: \quad 2^P_{1,1} = \frac{2!}{1!x1!} = 2 ; P(\{1\}) = 2pq$$

$$x=2: \quad 2^P_{2,0} = \frac{2!}{2!x0!} = 1 ; P(\{2\}) = p \times p = p^2 = p^2 q^0$$

$$\sum_{i=0}^2 P(\{i\}) = q^2 + 2pq + p^2 = (p+q)^2 = 1$$

(OBSERVESE QUE LOS ELEMENTOS DE S_1 NO SON IGUALMENTE PROBABLES, A MENOS QUE $p = q = 1/2$.)



SI $n = 3$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$, $e = \text{EXITO}$ Y $f = \text{FRACASO}$, ENTONCES

$$S_1 = \{(f, f, f), (e, f, f), (f, e, f), (f, f, e), (e, e, f), (e, f, e), (f, e, e), (e, e, e)\}$$

$$x = 0: {}_3P_{0,3} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1; P(\{0\}) = 1 p^0 q^3 = q^3$$

$$x = 1: {}_3P_{1,2} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3; P(\{1\}) = 3 p q^2$$

$$x = 2: {}_3P_{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3; P(\{2\}) = 3 p^2 q$$

$$x = 3: {}_3P_{3,0} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1; \frac{P(\{3\}) = 1 p^3 q^0 = p^3}{\sum_{i=0}^3 P(\{i\}) = (p+q)^3 = 1}$$

PASANDO AL CASO GENERAL DE CUALQUIER VALOR DE n , LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN x EXITOS Y $n-x$ FRACASOS EN UN ORDEN DETERMINADO ES

$$P(X=x) = p^x q^{n-x}$$

EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION.

UN ORDEN POSIBLE SERIA, POR EJEMPLO,

$$\underbrace{\text{EXITO, EXITO, \dots, EXITO}}_x, \underbrace{\text{FRACASO, \dots, FRACASO}}_{n-x}$$

AHORA BIEN, LOS x EXITOS PUEDEN OCURRIR EN ${}_n P_{x, n-x}$ ORDENES DISTINTOS, CADA UNO CON PROBABILIDAD $p^x q^{n-x}$. POR LO TANTO, EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE ADICION, LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE X RESULTA SER

$$f_X(x) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}; x = 0, 1, \dots, n$$

LA CUAL SE CONOCE CON EL NOMBRE DE BINOMIAL O DE BERNOULLI.

LA ESPERANZA DE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI ES .

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\
 &= np \underbrace{\sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}}_{(p+q)^{n-1}} = np(p+q)^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL ES

$$\sigma^2(X) = E[(X-E(X))^2] = E[(X-np)^2]$$

$$\begin{aligned}
 \text{PERO } E[(X-np)^2] &= E[X^2 - 2npX + n^2p^2] = E[X + X(X-1) - 2npX + n^2p^2] \\
 &= E[(1-2np)X] + E[X(X-1)] + E(n^2p^2) \\
 &= (1-2np)np + n^2p^2 + \sum_{x=0}^n \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} x(x-1) \\
 &= np - n^2p^2 + \sum_{x=2}^n n(n-1) \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} q^{n-x} \\
 &= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x}}_{(p+q)^{n-2}} \\
 &= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = np - np^2 = np(1-p) = npq
 \end{aligned}$$

EN RESUMEN, PARA LA DISTRIBUCION BINOMIAL,

$$E(X) = np \quad ; \quad \sigma^2(X) = npq \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

TABLA 1
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
2	0	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500
	1	.9900	.9600	.9100	.8400	.7500
3	0	.7290	.5120	.3430	.2160	.1250
	1	.9720	.8960	.7840	.6480	.5000
	2	.9990	.9920	.9730	.9360	.8750
4	0	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625
	1	.9477	.8192	.6517	.4752	.3125
	2	.9963	.9728	.9163	.8208	.6875
	3	.9999	.9984	.9919	.9744	.9375
5	0	.5905	.3277	.1681	.0778	.0312
	1	.9185	.7373	.5282	.3370	.1875
	2	.9914	.9421	.8369	.6826	.5000
	3	.9995	.9933	.9692	.9130	.8125
	4	1.0000	.9997	.9976	.9898	.9688
6	0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156
	1	.8857	.6554	.4202	.2333	.1094

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
6	2	.9842	.9011	.7443	.5443	.3438
	3	.9987	.9830	.9295	.8208	.6562
	4	.9999	.9984	.9891	.9590	.8906
	5	1.0000	.9999	.9993	.9959	.9844
7	0	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078
	1	.8503	.5767	.3294	.1586	.0625
	2	.9743	.8520	.6471	.4199	.2266
	3	.9973	.9667	.8740	.7102	.5000
	4	.9998	.9953	.9712	.9037	.7734
	5	1.0000	.9996	.9962	.9812	.9375
8	0	.4305	.1678	.0576	.0168	.0039
	1	.8131	.5033	.2553	.1064	.0352
	2	.9619	.7969	.5518	.3154	.1445
	3	.9950	.9437	.8059	.5941	.3633
	4	.9996	.9896	.9420	.8263	.6367
	5	1.0000	.9988	.9887	.9502	.8555
	6	1.0000	.9999	.9987	.9915	.9648
9	0	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020
	1	.7748	.4362	.1960	.0705	.0195
	2	.9470	.7382	.4628	.2318	.0898
	3	.9917	.9144	.7297	.4826	.2539
	4	.9991	.9804	.9012	.7334	.5000
	5	.9999	.9969	.9747	.9006	.7461
	6	1.0000	.9997	.9957	.9750	.9102
	7	1.0000	1.0000	.9996	.9962	.9805
10	0	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010
	1	.7361	.3758	.1493	.0464	.0107
	2	.9298	.6778	.3828	.1573	.0547
	3	.9872	.8791	.6496	.3823	.1719
	4	.9984	.9672	.8497	.6331	.3770

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
10	5	.9999	.9936	.9527	.8338	.6230
	6	1.0000	.9991	.9894	.9452	.8281
	7	1.0000	.9999	.9984	.9877	.9453
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9990
11	0	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005
	1	.6974	.3221	.1130	.0302	.0059
	2	.9104	.6174	.3127	.1189	.0327
	3	.9815	.8389	.5696	.2963	.1133
	4	.9972	.9496	.7897	.5328	.2744
	5	.9997	.9883	.9218	.7535	.5000
	6	1.0000	.9980	.9784	.9006	.7256
	7	1.0000	.9998	.9957	.9707	.8867
	8	1.0000	1.0000	.9994	.9941	.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
12	0	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002
	1	.6590	.2749	.0850	.0196	.0032
	2	.8891	.5583	.2528	.0834	.0193
	3	.9744	.7946	.4925	.2253	.0730
	4	.9957	.9274	.7237	.4382	.1938
	5	.9995	.9806	.8822	.6652	.3872
	6	.9999	.9961	.9614	.8418	.6128
	7	1.0000	.9994	.9905	.9427	.8062
	8	1.0000	.9999	.9983	.9847	.9270
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9972	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
13	0	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001
	1	.6213	.2336	.0637	.0126	.0017
	2	.8661	.5017	.2025	.0579	.0112
	3	.9658	.7473	.4206	.1686	.0461
	4	.9935	.9009	.6543	.3530	.1334
	5	.9991	.9700	.8346	.5744	.2905
	6	.9999	.9930	.9376	.7712	.5000
	7	1.0000	.9988	.9818	.9023	.7095

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
13	8	1.0000	.9998	.9960	.9679	.8666
	9	1.0000	1.0000	.9993	.9922	.9539
	10	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	0	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001
	1	.5846	.1979	.0475	.0081	.0009
	2	.8416	.4481	.1608	.0398	.0065
	3	.9559	.6982	.3552	.1243	.0287
	4	.9908	.8702	.5842	.2793	.0898
	5	.9985	.9561	.7805	.4859	.2120
	6	.9998	.9884	.9067	.5925	.3953
	7	1.0000	.9976	.9685	.8499	.6047
	8	1.0000	.9996	.9917	.9417	.7880
	9	1.0000	1.0000	.9983	.9825	.9102
	10	1.0000	1.0000	.9998	.9961	.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	
15	0	.2059	.0352	.0047	.0005	.0000
	1	.5490	.1671	.0353	.0052	.0005
	2	.8159	.3980	.1268	.0271	.0037
	3	.9444	.6482	.2969	.0905	.0176
	4	.9873	.8358	.5155	.2173	.0592
	5	.9978	.9389	.7216	.4032	.1509
	6	.9997	.9819	.8689	.6098	.3036
	7	1.0000	.9958	.9500	.7869	.5000
	8	1.0000	.9992	.9848	.9050	.6964
	9	1.0000	.9999	.9963	.9662	.8491
	10	1.0000	1.0000	.9993	.9907	.9408
	11	1.0000	1.0000	.9999	.9981	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
18	0	.1501	.0180	.0016	.0001	.0000
	1	.4503	.0991	.0142	.0013	.0001
	2	.7338	.2713	.0600	.0082	.0007
	3	.9018	.5010	.1646	.0328	.0038
	4	.9718	.7164	.3327	.0942	.0154
	5	.9936	.8671	.5344	.2088	.0481
	6	.9988	.9487	.7217	.3743	.1189
	7	.9998	.9837	.8593	.5634	.2403
	8	1.0000	.9957	.9404	.7368	.4073
	9	1.0000	.9991	.9790	.8653	.5927
	10	1.0000	.9998	.9939	.9424	.7597
	11	1.0000	1.0000	.9986	.9797	.8811
	12	1.0000	1.0000	.9997	.9942	.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0	.1351	.0144	.0011	.0001	.0000
	1	.4203	.0829	.0104	.0008	.0000
	2	.7054	.2369	.0462	.0055	.0004
	3	.8850	.4551	.1332	.0230	.0022
	4	.9648	.6733	.2822	.0696	.0096
	5	.9914	.8369	.4739	.1629	.0318
	6	.9983	.9324	.6655	.3081	.0835
	7	.9997	.9767	.8180	.4878	.1796
	8	1.0000	.9933	.9161	.6675	.3238
	9	1.0000	.9984	.9674	.8139	.5000
	10	1.0000	.9997	.9895	.9115	.6762
	11	1.0000	1.0000	.9972	.9648	.8204
	12	1.0000	1.0000	.9994	.9884	.9165
	13	1.0000	1.0000	.9999	.9969	.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

80VI

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
16	0	.1353	.0281	.0033	.0003	.0000
	1	.5147	.1407	.0261	.0033	.0003
	2	.7892	.3518	.0994	.0183	.0021
	3	.9316	.5981	.2459	.0651	.0106
	4	.9830	.7982	.4499	.1666	.0384
	5	.9967	.9183	.6598	.3288	.1051
	6	.9995	.9733	.8247	.5272	.2272
	7	.9999	.9930	.9256	.7161	.4018
	8	1.0000	.9985	.9743	.8577	.5982
	9	1.0000	.9998	.9929	.9417	.7728
	10	1.0000	1.0000	.9984	.9809	.8949
	11	1.0000	1.0000	.9997	.9951	.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
17	0	.1668	.0225	.0023	.0002	.0000
	1	.4818	.1182	.0193	.0021	.0001
	2	.7618	.3096	.0774	.0123	.0012
	3	.9174	.5489	.2019	.0464	.0064
	4	.9779	.7582	.3887	.1260	.0245
	5	.9953	.8943	.5968	.2639	.0717
	6	.9992	.9623	.7752	.4478	.1662
	7	.9999	.9891	.8954	.6405	.3145
	8	1.0000	.9974	.9597	.8011	.5000
	9	1.0000	.9995	.9873	.9081	.6855
	10	1.0000	.9999	.9968	.9652	.8338
	11	1.0000	1.0000	.9993	.9894	.9283
	12	1.0000	1.0000	.9999	.9975	.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9936
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

TABLA 1 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	p				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
20	0	.1216	.0115	.0008	.0000	.0000
	1	.3917	.0692	.0076	.0005	.0000
	2	.6769	.2061	.0355	.0036	.0002
	3	.8670	.4114	.1071	.0160	.0013
	4	.9568	.6296	.2375	.0510	.0059
	5	.9887	.8042	.4164	.1256	.0207
	6	.9976	.9133	.6080	.2500	.0577
	7	.9996	.9679	.7723	.4159	.1316
	8	.9999	.9900	.8867	.5956	.2517
	9	1.0000	.9974	.9520	.7553	.4119
10	1.0000	.9994	.9829	.8725	.5881	
11	1.0000	.9999	.9949	.9435	.7483	
12	1.0000	1.0000	.9987	.9790	.8684	
13	1.0000	1.0000	.9997	.9935	.9423	
14	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9793	
15	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9941	
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

EJEMPLO

SI SE LANZA AL AIRE SEIS VECES UNA MONEDA HOMOGENEA,

- A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER DOS "CARAS"?
- B) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER POR LO MENOS CUATRO "CARAS" ($X \geq 4$)?
- C) ¿CUANTO VALEN LA ESPERANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR?

SOLUCION

- A) PUESTO QUE LA MONEDA ES HOMOGENEA SE TIENE $p=1/2$ Y $q=1-1/2=1/2$, DONDE p ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR "CARA" (CARA = EXITO) EN UN LANZAMIENTO. POR TANTO

$$P[X = 2] = f_x(2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1/2)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!} (1/2)^6 = \frac{15}{64}$$

(DE LA TABLA: $P(x=2) = P(x \leq 3) - P(x \leq 2) = 0.3438 - 0.1094 = 0.2344$)

- B) PARA QUE SE CUMPLA $X \geq 4$ EN SEIS LANZAMIENTOS, SE NECESITA QUE SE OBSERVEN 4, 5 o 6 CARAS. PUESTO QUE ESTOS TRES EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE

$$P[X \geq 4] = f_x(4) + f_x(5) + f_x(6)$$

CALCULANDO LOS TRES SUMANDOS COMO EN LA PREGUNTA ANTERIOR, RESULTA

$$P[X \geq 4] = \frac{6!}{4!2!} (1/2)^4 (1/2)^{6-4} + \frac{6!}{5!1!} (1/2)^5 (1/2)^{6-5} + \frac{6!}{6!0!} (1/2)^6 (1/2)^{6-6}$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} = 0.3438$$

(DE LA TABLA: $P(x \geq 4) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - 0.6562 = 0.3438$)

- C) $E[X] = np = 6(1/2) = 3$

$$\sigma^2[X] = npq = 6(1/2)(1/2) = 3/2, \quad \sigma(X) = \sqrt{3/2} = 1.22$$

EJEMPLO

SI CON BASE EN LA EXPERIENCIA DE MUCHO TIEMPO SE SABE QUE UNA MAQUINA IMPRIME COLORES DEFECTUOSOS EN UN 5 POR CIENTO DE LAS VECES, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 10 IMPRESIONES SE OBTENGA:

- a. NINGUNA DEFECTUOSA
- b. UNA DEFECTUOSA
- c. MAS DE UNA DEFECTUOSA

ASIMISMO, CALCULAR LA MEDIA Y LA DESVIACION ESTANDAR DEL NUMERO DE DEFECTUOSAS.

$$E(x) = np = 0.5$$

$$\sigma^2 = npq = 0.475$$

$$\sigma = \sqrt{0.475} = 0.68$$

Solución

SEA EXITO = IMPRESION DEFETUOSA
EN TAL CASO p = 0.05 Y q = 1-0.05 = 0.95

- a. NINGUNA DEFECTUOSA ES LO MISMO

QUE X = 0; ENTONCES n-x= 10-0=10 Y:

$$P(x=0) = f_x(0) = \frac{n!}{x! (n-x)!} = \frac{10!}{0! (10-0)!} (0.05)^0 (0.95)^{10}$$

$$= \frac{10!}{10!} (0.95)^{10} = 0.599 = 59.9\%$$

- b. UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO

QUE X = 1; ENTONCES n-x = 10-1 = 9 Y:

$$P(x = 1) = f_x(1) = \frac{10!}{1! 9!} (0.05)^1 (0.95)^9$$

$$= \frac{10 \times 9!}{9!} (0.05) (0.6302) = 0.315$$

- c. MAS DE UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO

QUE x > 1

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

$$= 1 - (0.599 + 0.315) = 0.086$$

$$E(x) = np = 10 \times 0.05 = 0.5$$

$$\sigma^2(x) = npq = 10 \times 0.05 \times 0.95 = 0.0475$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0.0475} = 0.2179$$

EJEMPLO

RESOLVER AHORA EL INCISO b. DEL EJEMPLO ANTERIOR, PARA EL CASO EN QUE $p = 0.1$

$$q = 0.9$$

$$P(x = 1) = \frac{10!}{1! 9!} (0.10)^1 (0.90)^9 = 0.3874 = 38.74\%$$

USANDO LAS TABLAS DE LA DISTRIBUCION BINOMINAL:

$$\{X = x\} \cup \{X \leq x-1\} = \{X \leq x\}$$

$$\text{POR LO TANTO } P\{X = x\} + P\{X \leq x-1\} = P\{X \leq x\}$$

$$\text{Y } P\{X = x\} = P\{X \leq x\} - P\{X \leq x-1\}$$

EN ESTE EJEMPLO $x = 1$ Y $x-1=0$, POR LO QUE

$$P(X=1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0)$$

$$= 0.7361 - 0.3487 = 0.3874$$

DISTRIBUCION GEOMETRICA

SEA p LA PROBABILIDAD DE EXITO EN UN EXPERIMENTO. SI EL EXPERIMENTO ES CON REEMPLAZO Y SE REPITE SUCESIVAMENTE HASTA QUE SE OBSERVA UN EXITO, SE TENDRA LA VARIABLE ALEATORIA X =NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMIENTO HASTA QUE SE OBSERVA EL PRIMER EXITO. OBTENGAMOS LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X ($S = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$).

EL PRIMER EXITO OCURRIRA EN EL EXPERIMENTO NUMERO x SI, Y SOLO SI, EN LOS $x-1$ ANTERIORES HUBO PUROS FRACASOS. LA PROBABILIDAD DE ESTE EVENTO, DADO QUE LOS EXPERIMIENTOS SON INDEPENDIENTES, ES

$$f_X(x) = (1-p)^{x-1} p$$

ESTA FUNCION SE DENOMINA DISTRIBUCION GEOMETRICA. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \sum_{x=1}^n p(1-p)^{x-1} = 1 - (1-p)^n$$

Y QUE

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p = 1/p$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{p}\right)^2 (1-p)^{x-1} p = (1-p)/p^2$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN TORNILLO DEFECTUOSO POR PRIMERA VEZ EN LA SEXTA EXTRACCION, SI EL PORCENTAJE DE DEFECTUOSOS DEL LOTE DEL CUAL SE MUESTREA ES DE 5 POR CIENTO?

$$P(X=6) = f_X(6) = (1-0.05)^5 \times 0.05 = 0.95^5 \times 0.05 = 0.03869$$

0.95⁵ = 0.7738
0.7738 x 0.05 = 0.03869

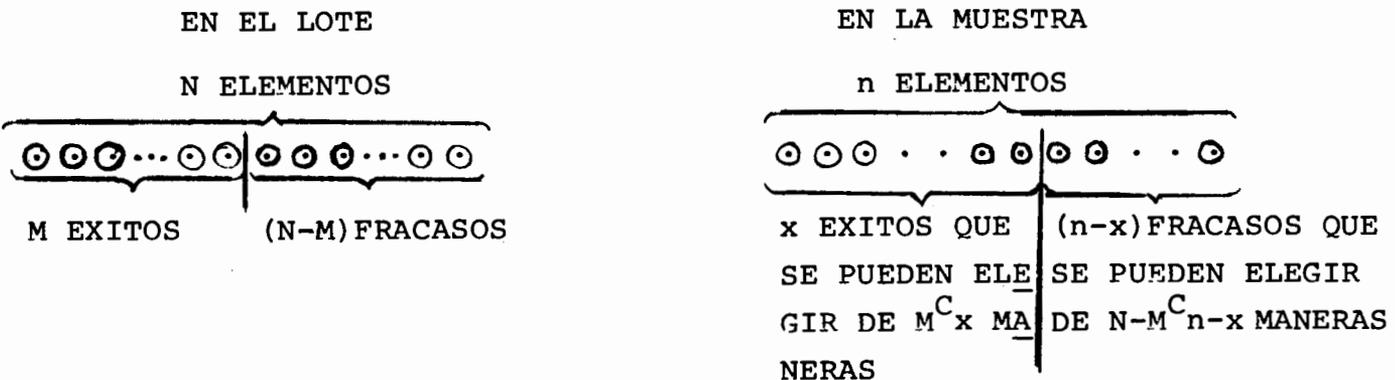
DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMETRICA

CUANDO SE TIENE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CUYO ESPACIO DE EVENTOS TIENE SOLO DOS ELEMENTOS, DIGAMOS $S=\{\text{EXITO}, \text{FRACASO}\}$, Y SE REALIZA UN MUESTREO SIN REEMPLAZO, ENTONCES LOS RESULTADOS DE CADA EXPERIMENTO NO SON INDEPENDIENTES NI LA PROBABILIDAD DE EXITO PERMANECE CONSTANTE, COMO EN LA DISTRIBUCION BINOMIAL, POR LO QUE ESTA ULTIMA NO ES APLICABLE.

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO CONSISTENTE EN EXTRAER, SIN REEMPLAZO, ELEMENTOS DE UN LOTE QUE TIENE N OBJETOS DE LOS CUALES M SON "EXITOS". EL NUMERO DE ELEMENTOS QUE TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$N(S) = N C_n$$

EL NUMERO, $N(\{X=x\})$, DE MANERAS POSIBLES E IGUALMENTE PROBABLES DE OBTENER x EXITOS ES



CADA ELECCION POSIBLE DE x EXITOS SE COMBINA CON CADA ELECCION POSIBLE DE $(n-x)$ FRACASOS; POR LO TANTO, EL NUMERO TOTAL DE MANERAS DE OBTENER x EXITOS EN n EXTRACCIONES SIN REEMPLAZO ES

$$N(\{X=x\}) = \binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}$$

POR LO TANTO

$$P(\{X=x\}) = f_X(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x=0,1,\dots,n$$

EN DONDE $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$, $\binom{N-M}{n-x} = \frac{(N-M)!}{(n-x)!(N-M-n+x)!}$

Y $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

QUE SE CONOCE COMO DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA. LA MEDIA Y LA VARIAN-
CIA DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = nM/N = np, \quad \text{si } p = M/N$$

Y

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=0}^n \left(x - \frac{nM}{N}\right)^2 \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} = p(1-p) \frac{n(N-n)}{N-1}$$

RESPECTIVAMENTE.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD, SE TIENE UN LOTE DE 100 TRANSFORMADORES DE CORRIENTE ELECTRICA, DE LOS CUALES 40 SON DEFECTUOSOS (NO CUMPLEN LAS NORMAS DE FABRICACION). ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UNO DEFECTUOSO DE TRES SELECCIONADOS AL AZAR SIN REEMPLAZO?

$$P[X=1] = \frac{\binom{40}{1} \binom{100-40}{3-1}}{\binom{100}{3}} = \frac{\binom{40}{1} \binom{60}{2}}{\binom{100}{3}}$$

$$= \frac{40!}{39! \times 1!} \times \frac{60!}{58! \times 2!} = 0.438$$

N=100
p=40/100
X=1
n=3
 $\binom{40}{1} \binom{60}{2}$
 $\binom{100}{3}$

APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA MEDIANTE LA BINOMIAL

CUANDO N ES GRANDE Y n PEQUEÑO ($N \geq 10n$), LA DISTRIBUCION BINOMIAL SE PUEDE USAR COMO APROXIMACION DE LA HIPERGEOMETRICA. DE ESTA APROXIMACION SE HECHA MANO CUANDO LOS CALCULOS CON ESTA ULTIMA RESULTAN TEDIOSOS. EN EL CASO DEL EJEMPLO ANTERIOR, SI SE USA LA DENSIDAD BINOMIAL SE OBTIENE, CON $p=40/100 = 0.40$ Y $n=3$

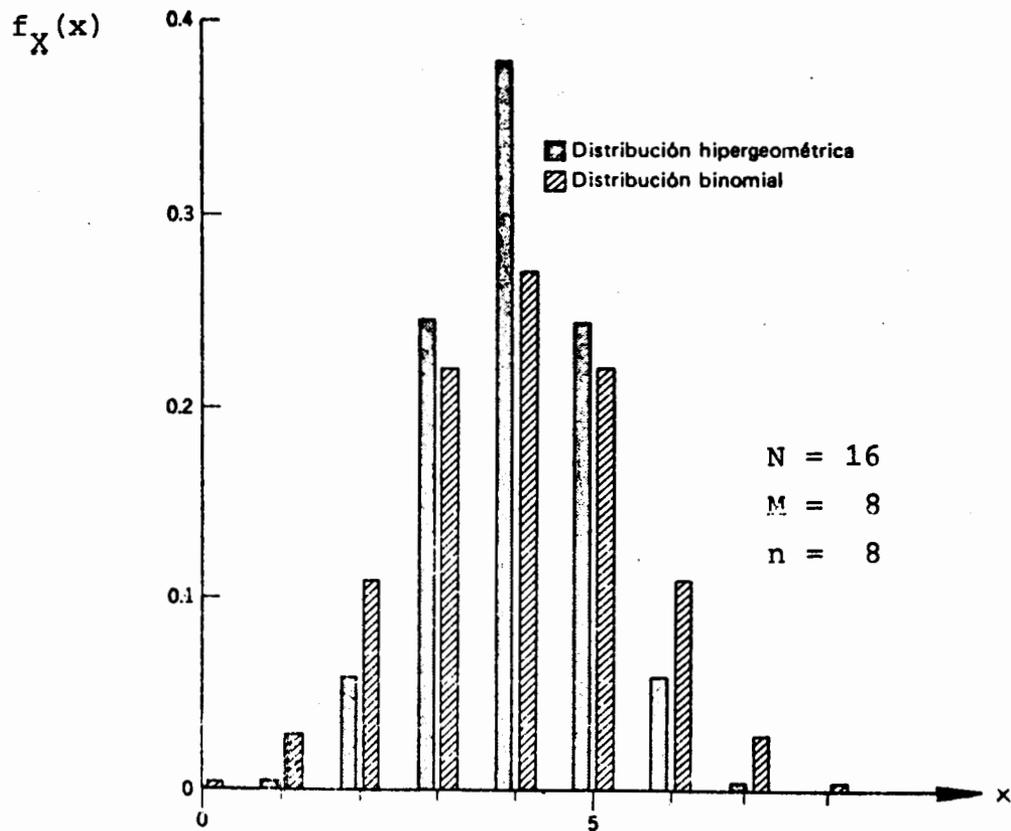
$$P[X=1] = \frac{3!}{1! 2!} (0.40)^1 (0.60)^2 = 0.432$$

FORMULA DE STIRLING

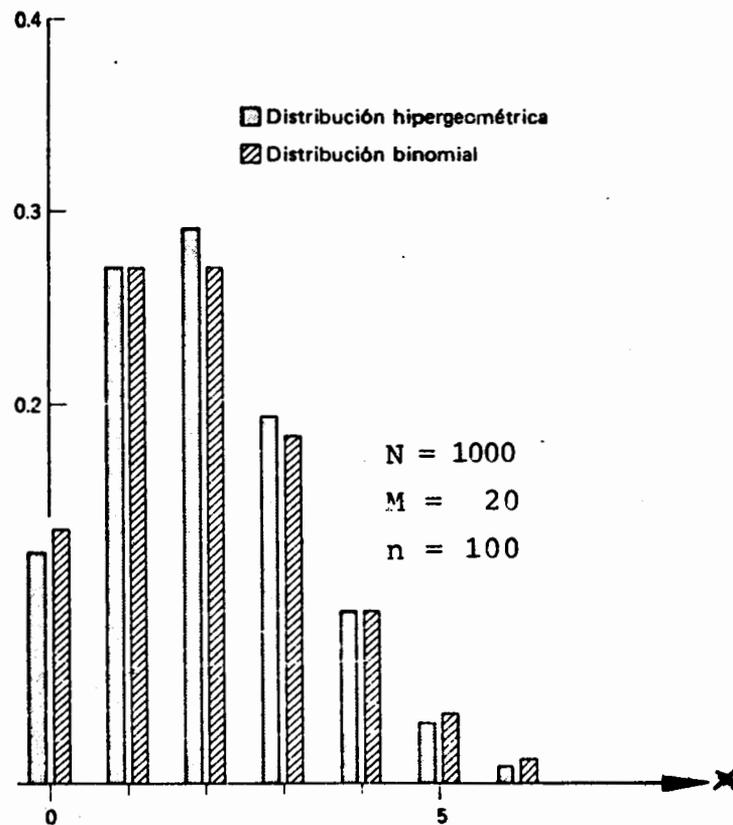
$$N! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n ; \quad (e = 2.718\dots)$$

Error = 2% SI $n = 4$

Error = 0.8% SI $n = 10$



COMPARACION DE LAS DISTRIBUCIONES HIPERGEOMETRICA Y BINOMIAL



DISTRIBUCION DE POISSON

UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, X , DE LA FORMA

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

SE LLAMA DISTRIBUCION DE POISSON; EN ESTA ECUACION λ ES UNA CONSTANTE. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA MEDIA Y LA VARIANCIA PARA ESTA DISTRIBUCION QUEDAN DADAS POR

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

$$\sigma^2(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

UNA VEZ CONOCIDA λ , CON ESTA DISTRIBUCION SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE UN EVENTO OCURRA x VECES.

ES POSIBLE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE POISSON PUEDE EMPLEARSE COMO UNA PROXIMACION DE LA DE BERNOULLI, TOMANDO $\lambda = np$, CUANDO n ES GRANDE Y p PEQUEÑA, PERO DE TAL MANERA QUE $npq > 1$. AL RESPECTO, SI $n=20$ y $p=0.05$, ENTONCES EL ERROR QUE SE TIENE AL USAR DICHA APROXIMACION ES MENOR DE 3 POR CIENTO PARA VALORES DE X MENORES DE 3; PARA $X=4$ y $X=5$ LOS ERRORES RESPECTIVOS SON 15 Y 41 POR CIENTO, DEBIDO A QUE NO SE CUMPLE CON LA CONDICION DE QUE npq SEA MAYOR DE UNO, YA QUE $npq = 20 \times 0.05 \times 0.95 = 0.95$

TABLA 2 (continuación)
 FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

x	λ					
	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
2	.003	.001	.001	.000	.000	.000
3	.010	.005	.002	.001	.000	.000
4	.029	.015	.008	.004	.002	.001
5	.067	.038	.020	.011	.006	.003
6	.130	.079	.046	.026	.014	.008
7	.220	.143	.090	.054	.032	.018
8	.333	.232	.155	.100	.062	.037
9	.458	.341	.242	.166	.109	.070
10	.583	.460	.347	.252	.176	.118
11	.697	.579	.462	.353	.260	.185
12	.792	.689	.576	.462	.358	.268
13	.864	.781	.682	.573	.464	.363
14	.917	.854	.772	.675	.570	.466
15	.951	.907	.844	.764	.669	.568
16	.973	.944	.899	.835	.756	.664
17	.986	.968	.937	.890	.827	.749
18	.993	.982	.963	.930	.883	.819
19	.997	.991	.979	.957	.923	.875
20	.998	.995	.988	.975	.952	.917
21	.999	.998	.994	.986	.971	.947
22	1.000	.999	.997	.992	.983	.967
23	1.000	1.000	.999	.996	.991	.981
24	1.000	1.000	.999	.998	.995	.989
25	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.994
26	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997
27	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE UNA DETERMINADA FUERZA DE TENSION ES DE 0.001, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN A) TRES, B) MAS DE DOS?

CON $\lambda = 2000 \times 0.001 = 2$ Y CONSIDERANDO QUE $npq = 1.9 > 1$, SE PUEDE USAR LA DISTRIBUCION DE POISSON COMO APROXIMACION DE LA BINOMIAL:

$$a) \quad P[X = 3] = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

$$P[X = 3] = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.18$$

EN ESTE CASO LA DISTRIBUCION BINOMIAL DA COMO RESULTADO

$$P[X=3] = \frac{2000!}{3! \times 1997!} (0.001)^3 (0.999)^{1997} = 0.184$$

$$b) \quad P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - F_X(2) = 1 - \left\{ P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] \right\} = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

EJEMPLO

UNA COMPAÑIA ASEGURADORA DESPUES DE MUCHOS AÑOS DE EXPERIENCIA HA HA ESTIMADO QUE EL 0.004% DE LA POBLACION FALLECE ANUALMENTE POR ACCIDENTE AUTOMOVILISTICO. SI ESTA COMPAÑIA TIENE 40,000 ASEGURADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE 2 DE ELLOS MUERAN EN UN AÑO POR ESTE TIPO DE ACCIDENTE?

SEA X EL NUMERO DE PERSONAS QUE MUEREN ANUALMENTE DE ENTRE LOS ASEGURADOS, POR ACCIDENTE, LA MEDIA DE X ES

$$E[X] = 0.00004 \times 40,000 = 1.6 = \lambda$$

ADEMAS, TOMANDO EN CUENTA QUE $npq > 1$, SE PUEDE USAR SIN GRAN ERROR LA DISTRIBUCION DE POISSON:

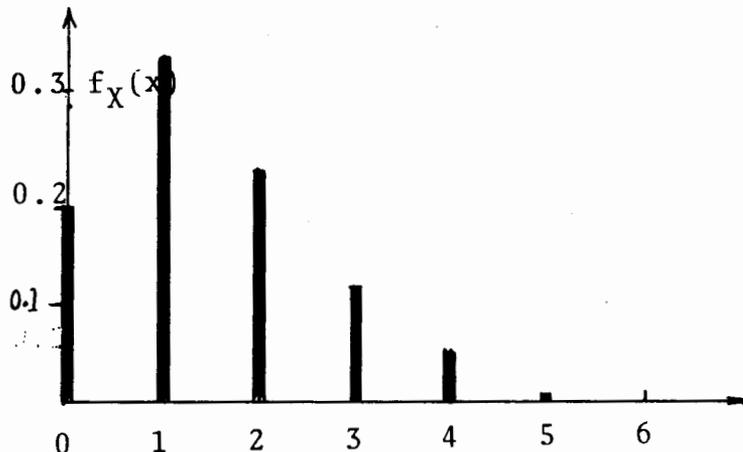
$$P[X=x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1.6)^x e^{-1.6}}{x!}; \quad x=0, 1, 2, \dots$$

POR LO QUE

$$P[X=2] = \frac{(1.6)^2 e^{-1.6}}{2!} = \frac{0.2019 \times 2.56}{2} = 0.26$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA ESTA VARIABLE ALEATORIA ES:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.005 ...



EJEMPLO

EN LA AMPLIACION DEL CARRIL PARA DAR VUELTA A LA IZQUIERDA EN UNA AVENIDA, SOLO HAY CAPACIDAD PARA 3 AUTOS COMO MAXIMO ESPERANDO LA FLECHA LUMINOSA DEL SEMAFORO. EN UN ESTUDIO ESTADISTICO DEL TRANSITO EN ESE LUGAR SE ENCONTRO QUE EN CADA CICLO DE LUCES DEL SEMAFORO HAY EN PROMEDIO 6 AUTOS QUE VAN A DAR VUELTA. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN CICLO DEL SEMAFORO, TOMADO AL AZAR, SE CONGESTIONE EL TRANSITO POR EXCEDERSE LA CAPACIDAD DEL CARRIL?

$$P[X > 3] = ?$$

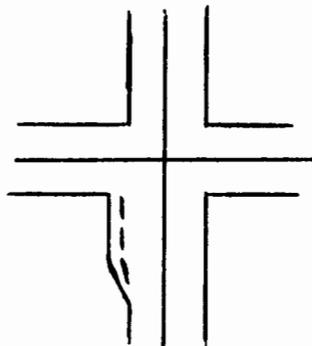
$$\text{SI } A = \{X > 3\}, \bar{A} = \{X \leq 3\}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ O } P(A) = 1 - P(\bar{A}). \text{ CON } \lambda = 6,$$

$$P(\bar{A}) = P[X \leq 3] = \sum_{x=0}^{x=3} f_X(x) = \sum_{x=0}^{x=3} \frac{e^{-6} 6^x}{x!}$$

$$P(\bar{A}) = e^{-6} \left(1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{6} \right) = 61e^{-6} = 0.151$$

$$P[A] = P[X > 3] = 1 - 0.151 = 0.849$$



PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON

CON BASE EN LA DISTRIBUCION DE POISSON SE PUEDE DEDUCIR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DEL NUMERO DE OCURRENCIAS DE UN EVENTO DURANTE UN PERIODO t QUEDA DADA POR

$$f_X(x) = P[X = x \text{ EN UN LAPSO } t]$$

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

DONDE

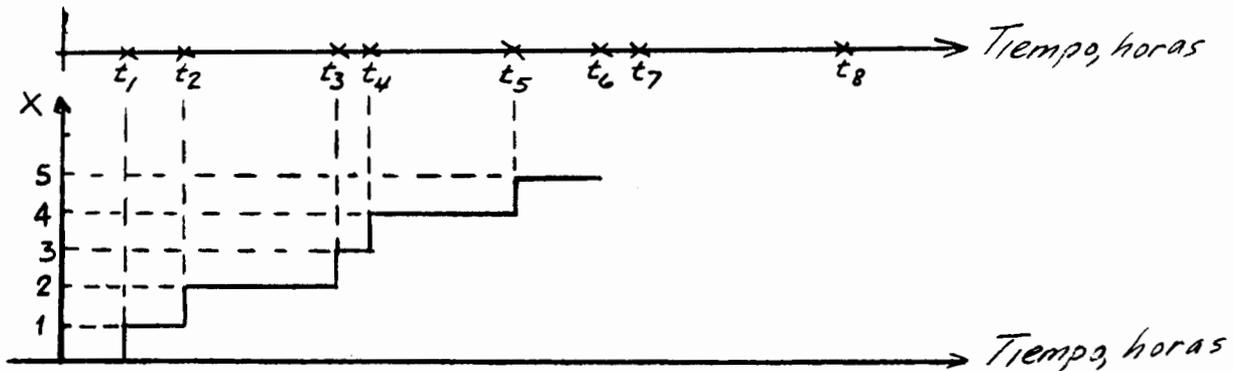
λ = NUMERO MEDIO DE OCURRENCIAS POR UNIDAD DE TIEMPO.

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE ESTE PROCESO, PARA UN LAPSO t, SON

$$E(X) = \lambda t$$

$$\sigma^2(X) = \lambda t$$

PARA QUE ESTA DISTRIBUCION SE APLIQUE SE REQUIERE QUE EL EVENTO OCURRA CADA VEZ DE MANERA INDEPENDIENTE DE LAS OCURRENCIAS PREVIAS, Y QUE λ SEA CONSTANTE. A λ SE LE CONOCE COMO INTENSIDAD DEL PROCESO; A SU RECIPROCO, $1/\lambda$ SE LE DENOMINA PERIODO DE RECURRENCIA.



SE PUEDE DEMOSTRAR QUE CUANDO UN EVENTO OCURRE SIGUIENDO UN PROCESO DE POISSON, LA VARIABLE ALEATORIA "TIEMPO ENTRE UNA OCURRENCIA CUALQUIERA Y LA SIGUIENTE" TIENE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL.

EJEMPLO

SI LOS MAREMOTOS QUE SE REGISTRAN EN UN PUNTO DE LA COSTA MEXICANA DEL OCEANO PACIFICO OCURREN SIGUIENDO UN PROCESO DE POISSON CON $\lambda = 0.01$, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE ENTRE UN MAREMOTO Y EL SIGUIENTE TRANSCURRA UN TIEMPO

- a. MAYOR DE 100 AÑOS
- b. ENTRE 50 Y 100 AÑOS

$$a. P(t > 100) = \int_{100}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-0.01 \times 100} = e^{-1} = 36.79\%$$

$$\begin{aligned}
 b. P(50 \leq t \leq 100) &= \int_{50}^{100} 0.01 e^{-0.01 t} dt = F(100) - F(50) \\
 &= (1 - e^{-0.01 \times 100}) - (1 - e^{-0.01 \times 50}) = e^{-0.5} - e^{-1} \\
 &= 0.6065 - 0.3679 = 0.2386
 \end{aligned}$$

EJEMPLO

EN UNA CENTRAL DE COMUNICACIONES SE TIENE UNA DEMANDA MEDIA DEL SERVICIO DE 8 LLAMADAS CADA MINUTO. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN 2 MINUTOS NO SE SOLICITE EL SERVICIO, DE QUE SE SOLICITE SOLO UNA VEZ, Y MAS DE UNA VEZ.

$$f_X(0) = P[X=0] = \frac{(\lambda t)^0 e^{-8 \times 2}}{0!} = e^{-16} = 0.00004$$

$$f_X(1) = \frac{16^1 e^{-16}}{1!} = 0.00064$$

$$P[X > 1] = 1 - (0.00004 + 0.00064) = 0.99932$$

EJEMPLO

MEDIANTE UN ESTUDIO ESTADISTICO SOBRE LA OCURRENCIA DE MAREMOTOS EN LA COSTA MEXICANA DEL OCEANO PACIFICO SE ESTIMO QUE UNA OLA DE 4m DE ALTURA O MAYOR SOBRE EL NIVEL DE LA MAREA TIENE UN PERIODO DE RECURRENCIA DE 100 AÑOS. CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE EN LOS PROXIMOS 10, 50 Y 100 AÑOS NO OCURRA NINGUN MAREMOTO EN DICHA REGION CUYA OLA MAXIMA EXCEDE DE 4m, SUPONIENDO QUE LA OCURRENCIA DE LOS MAREMOTOS SE PUEDE MODELAR MEDIANTE UN PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON.

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA X =NUMERO DE MAREMOTOS CUYA OLA MAXIMA ES MAYOR DE 4m, CON $\lambda=1/100=0.01$ ES

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{(0.01t)^x e^{-0.01t}}{x!}$$

POR LO TANTO, PARA $t=10, 50$ Y 100 AÑOS, SE TIENE, RESPECTIVAMENTE, QUE:

$$a) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 10)^0 e^{-0.01 \times 10}}{0!} = e^{-0.1} = 0.905$$

$$b) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 50)^0 e^{-0.01 \times 50}}{0!} = e^{-0.5} = 0.607$$

$$c) f_X(0) = \frac{(0.01 \times 100)^0 e^{-0.01 \times 100}}{0!} = e^{-1} = 0.368$$

PARA ESTE MISMO PROBLEMA, LAS PROBABILIDADES DE QUE OCURRA AL MENOS UN MAREMOTO CON OLA MAXIMA MAYOR DE 4m SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\text{a) } P[X \geq 1] = 1 - f_X(0) = 1 - 0.905 = 0.095$$

$$\text{b) } P[X \geq 1] = 1 - 0.607 = 0.393$$

$$\text{c) } P[X \geq 1] = 1 - 0.368 = 0.632$$

EJEMPLO

SE SABE QUE UNA MAQUINA QUE PRODUCE PAPEL PARA DIBUJO, LO HACE CON UN DEFECTO POR CADA 100 M FABRICADOS

- a. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER CERO DEFECTOS EN UN PLIEGO DE 20 M?

$$\lambda = 1/100 = 0.01 \text{ DEFECTOS /METRO}$$

$$P(X = 0) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{0.01 \times 20 e^{-0.01 \times 20}}{0!} =$$

$$\frac{0.2 e^{-0.2}}{0!} = 0.164$$

(EN ESTE CASO $t = \text{LONGITUD}$)

- b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UN DEFECTO EN 20m)

$$P(X = 1) = \frac{0.2 e^{-0.2}}{1!} = 0.164$$

- c. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UNO O CERO DEFECTOS?

$$P(0 \leq x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.164 + 0.164 = 0.328$$

- d. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER MAS DE UN DEFECTO?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.328 = 0.672$$

EJEMPLO

SE SABE QUE EN CIERTA ZONA GEOGRAFICA SE LOCALIZA UNA ESPECIE ANIMAL RARA A RAZON DE 2 EJEMPLARES POR 100 KM². SI SE TOMA UNA FOTOGRAFIA AEREA QUE ABARQUE 120 KM², ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR 5 ANIMALES?

$$\text{CON } \lambda = \frac{2}{100} = 0.02 \text{ ANIMALES/KM}^2$$

$$P(X = 5) = \frac{\lambda t e^{-\lambda t}}{X!} = \frac{0.02 \times 120 e^{-0.02 \times 120}}{5!} =$$

$$\frac{2.4 e^{-2.4}}{5!} = \frac{0.219}{5!} = 0.00183$$

(EN ESTE CASO t= AREA)

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR UN ANIMAL?

$$P(X = 1) = \frac{2.4 e^{-2.4}}{1!} = 0.219$$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE NO LOCALIZAR NINGUNO?

$$P(X = 0) = \frac{0.219}{0!} = 0.219$$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE LOCALIZAR MAS DE UNO?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (0.219 + 0.219) = 0.562$$

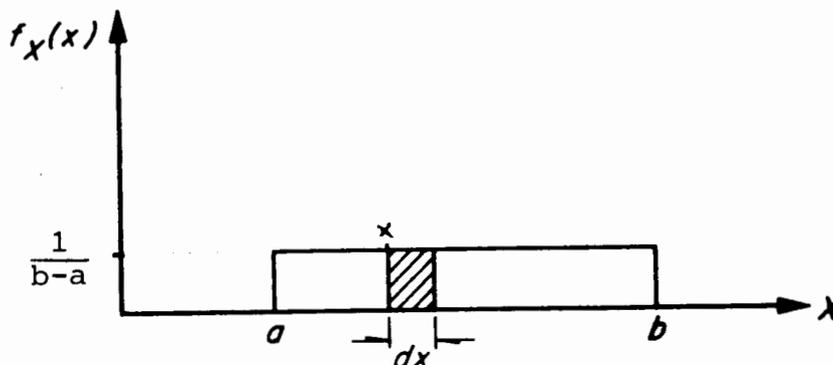
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

DISTRIBUCION UNIFORME

SE DICE QUE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X , TIENE DISTRIBUCION UNIFORME ENTRE $X = a$ Y $X = b$ ($b > a$) SI

$$f_X(x) = \text{CONSTANTE} = \frac{1}{b-a} \quad ; \quad a \leq x \leq b$$

LO QUE SIGNIFICA QUE LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN VALOR ENTRE x Y $x + dx$ ES LA MISMA PARA CUALQUIER x COMPRENDIDA ENTRE a Y b . LA GRAFICA DE DICHA DISTRIBUCION ES



Distribución uniforme de una variable aleatoria continua

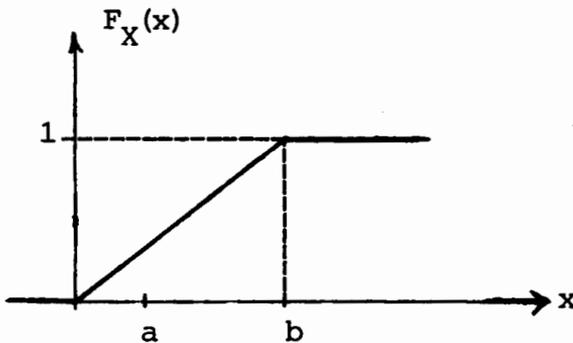
LA ESPERANZA Y LA VARIANCA DE LA DISTRIBUCION UNIFORME SE CALCULAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = (b+a)/2 \\
 \sigma^2(X) &= \int_a^b (x-E[X])^2 \frac{1}{b-a} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx + \int_a^b \frac{(E[X])^2}{b-a} dx - \\
 &\quad - \int_a^b \frac{2xE[X]}{a-b} dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b + \left[\frac{(E[X])^2}{b-a} x \right]_a^b - \left[\frac{2E[X]}{b-a} \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \\
 &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} + (E[X])^2 - E[X](b+a) = \frac{(b-a)^2}{12}
 \end{aligned}$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \int_a^x f_x(u) du = \int_a^x \frac{1}{b-a} du = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

LA GRAFICA DE ESTA FUNCION ES UNA LINEA RECTA DE a A b:



EJEMPLO

¿CUANTO VALE LA PROBABILIDAD DE QUE X SEA MENOR QUE 1/3, SI ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION UNIFORME EN EL INTERVALO 0-1?

$$F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{x - a}{b - a} = \frac{\frac{1}{3} - a}{b - a}$$

PARA $a = 0$ Y $b = 1$ NOS QUEDA

$$F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{3}$$

DISTRIBUCION NORMAL

UNA DE LAS DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS MAS UTIL ES LA DISTRIBUCION NORMAL O DE GAUSS, DEFINIDA POR LA ECUACION

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



DONDE μ ES LA MEDIA Y σ LA DESVIACION ESTANDAR DE X.

SI SE HACE LA TRANSFORMACION

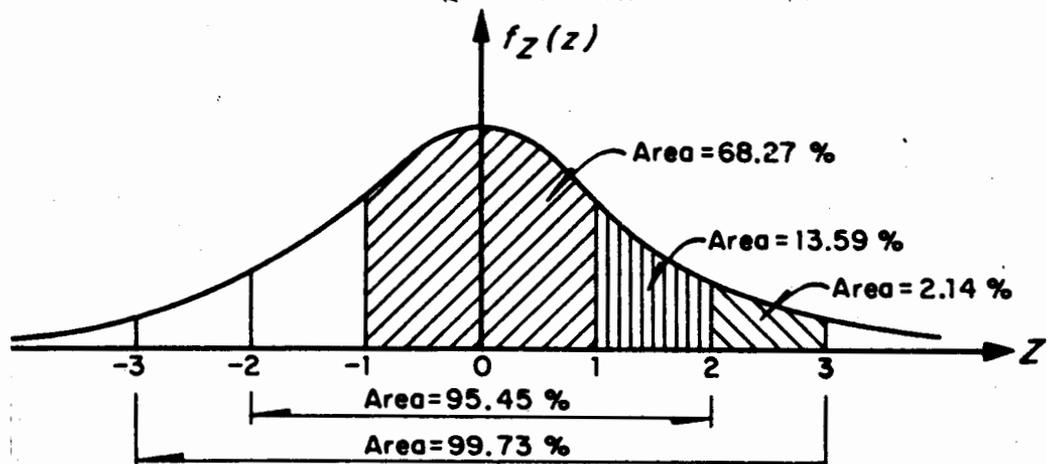
$$Z = (X-\mu)/\sigma \quad (E(Z) = E \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{E(X)-\mu}{\sigma} = 0; \sigma^2(Z) = \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2} = 1)$$

ENTONCES LA ECUACION ANTERIOR SE REDUCE A LA LLAMADA FORMA ESTANDAR, CUYA ECUACION ES

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}; \quad F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

EN ESTE CASO LA VARIABLE ALEATORIA Z TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA IGUAL A CERO Y VARIANCIA IGUAL A UNO.

EXISTEN TABLAS PARA CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ASOCIADA A UNA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRA LA FORMA DE CAMPANA DE ESTA DISTRIBUCION, OBSERVANDOSE LA SIMETRIA RESPECTO A $Z=E(Z)=0$ Y QUE ES ASINTOTICA AL EJE Z.



Distribución normal de una variable aleatoria continua

LA UTILIDAD DE LA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR RADICA EN QUE

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx = P[z_1 \leq Z \leq z_2] = \int_{z_1}^{z_2} f_Z(z) dz$$

DONDE

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{Y} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

EJEMPLO

COMO RESULTADO DE UNA LARGA SERIE DE EXPERIMENTOS PROBANDO A COMPRESION SIMPLE CILINDROS DE CONCRETO, SE HA ESTIMADO QUE LA ESPERANZA DE LA RESISTENCIA ES DE 240 KG/CM^2 Y LA DESVIACION ESTANDAR DE 30 KG/CM^2 .

- A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE OTRO CILINDRO TOMADO AL AZAR RESISTA MENOS DE 240 KG/CM^2 ?
- B. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE RESISTA MAS DE 330 KG/CM^2 ?
- C) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SU RESISTENCIA ESTE EN EL INTERVALO DE 210 A 240 KG/CM^2 ?

SUPONGASE QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ES NORMAL.

SOLUCION

- A) PARA EMPLEAR LAS TABLAS DE DISTRIBUCION NORMAL ES NECESARIO ESTANDARIZAR LA VARIABLE X, EMPLEANDO $\mu=240$ Y $\sigma=30$, CON $x_1=240$:

$$z_1 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

RECURRIENDO A LA TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL SE OBTIENE

$$P[X \leq 240] = P[Z \leq 0] = 0.5$$

O SEA, LA PROBABILIDAD QUE CORRESPONDE AL AREA SOMBRREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:

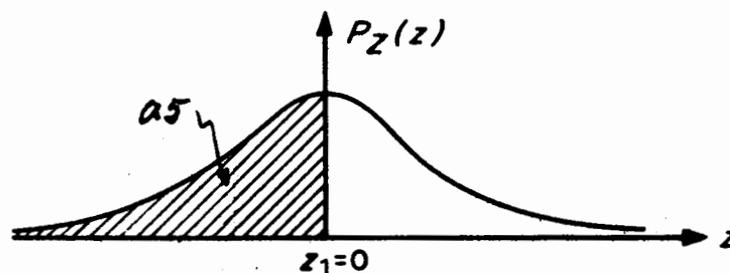


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

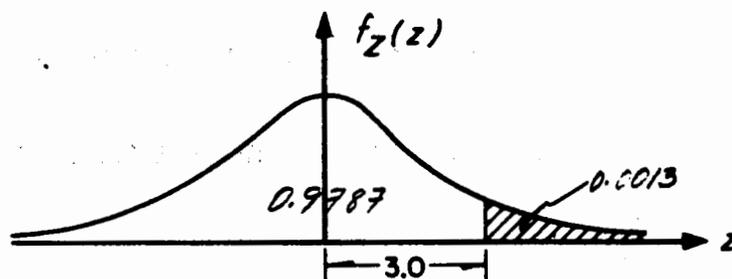
B) EL VALOR ESTANDARIZADO DE LA VARIABLE, PARA $x_1=330 \text{ KG/CM}^2$, ES

$$z_1 = \frac{330 - 240}{30} = 3$$

POR LO QUE

$$P[X \geq 330] = P[Z \geq 3] = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

QUE ES EL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:



Distribución normal correspondiente al inciso b del ejemplo

C) LOS VALORES ESTANDARIZADOS DE LA VARIABLE, PARA $x_1=210$ Y $x_2=240$ SON:

$$z_1 = \frac{210 - 240}{30} = -1$$

$$z_2 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

POR LO QUE

$$P[210 \leq X \leq 240] = P[-1 \leq Z \leq 0] = 0.3413$$

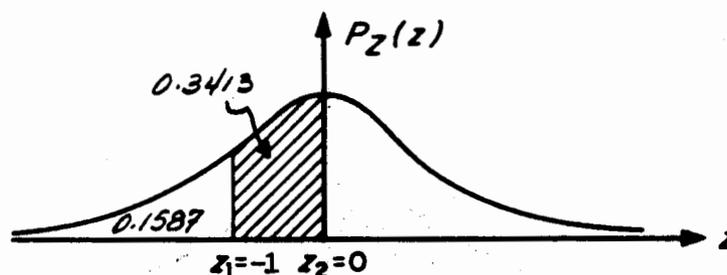


Fig 16. *Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo*

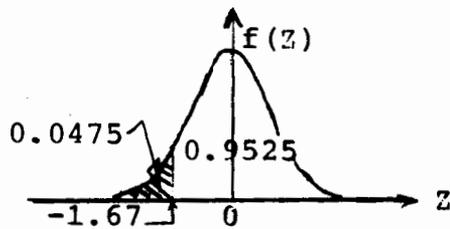
EJEMPLO

SE HA ENCONTRADO QUE LA VARIABLE ALEATORIA "ERROR EN LA MEDICION DE LAS DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS" TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA CERO. SI SE SABE QUE EL TAMAÑO VERDADERO DE UNA LINEA ES DE 2 M Y QUE LA VARIANCA DE SUMEDICION ES 9CM^2 , CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN UNA MEDICION LA LONGITUD QUE SE REGISTRE SEA

- a. MENOR DE 195 CM
- b. MAYOR DE 203 CM
- c. COMPRENDIDO ENTRE 198 Y 202 CM.

a. $P(X < 195) = ?$ CON $\mu = 200 \text{ CM}$ Y $\sigma = \sqrt{9} = 3 \text{ CM}$

$$z = \frac{195 - 200}{3} = \frac{-5}{3} = -1.67$$



$$P(X < 195) = P(Z < -1.67) = 0.0475 = 4.75\%$$

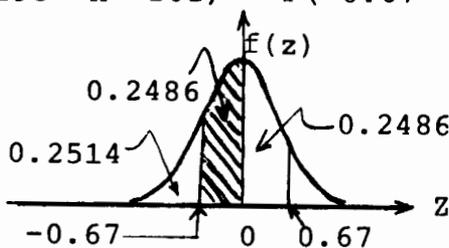
b. $z = \frac{203 - 200}{3} = 1$

$$P(X > 203) = 1 - P(X \leq 203) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$$

c. $P(198 < X < 202) = ?$

$$z_1 = \frac{198 - 200}{3} = -0.67, \quad z_2 = \frac{202 - 200}{3} = 0.67$$

$$P(198 < X < 202) = P(-0.67 < Z < 0.67) = 2 \times 0.2486 = 0.4972 = 49.72 \%$$



TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

SEAN LAS VARIABLES ALEATORIAS X_1, X_2, \dots, X_k , ^{IDENTICAS} CON DENSIDADES DE PROBABILIDADES (ARBITRARIAS), CUYA SUMA SE DENOTARA COMO W, ES DECIR

$$W = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

ES POSIBLE DEMOSTRAR EL TEOREMA DENOMINADO TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE, CUYO ENUNCIADO INDICA QUE CONFORME AUMENTA EL NUMERO DE VARIABLES INVOLUCRADAS EN LA SUMA ANTERIOR (AL AUMENTAR k), LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE W TIENDE A SER LA DISTRIBUCION NORMAL. ADEMÁS SE PUEDE DEMOSTRAR QUE SI TODAS LAS VARIABLES X_1, X_2, \dots, X_k TIENEN DISTRIBUCION NORMAL, ENTONCES, RIGUROSAMENTE, W TAMBIEN LA TIENE, INDEPENDIENTEMENTE DEL NUMERO DE VARIABLES QUE APAREZCAN EN LA SUMA.

A PARTIR DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL SE DEMUESTRA QUE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE PUEDE APROXIMAR MEDIANTE LA NORMAL CUANDO EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE (30 O MAS), CON LO CUAL SE LOGRA UN AHORRO CONSIDERABLE DE LABOR NUMERICA EN LA SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS. PARA MEJORAR ESTA APROXIMACION, CONVIENE EFECTUAR UNA CORRECCION POR CONTINUIDAD, LA CUAL SE JUSTIFICA POR USAR UNA DISTRIBUCION CONTINUA EN VEZ DE UNA DISCRETA, SUMANDO O RESTANDO, SEGUN SEA EL CASO, 0.5 AL VALOR DE X QUE SE USE. POR EJEMPLO, SI SE DESEA CUANTIFICAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 ENSAYES SE LOGREN DE 3 A 6 EXITOS, LOS LIMITES REALES QUE SE DEBEN USAR AL APLICAR LA DISTRIBUCION CONTINUA SON $x_1=2.5$ Y $x_2=6.5$.

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE CIERTA CARGA ES DE 0.001, DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN MAS DE DOS.

USANDO LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE OBTIENE

$$\begin{aligned}
 P[X > 2] &= 1 - P[X \leq 2] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = \\
 &= 1 - \left(\frac{2\,000!}{2\,000! \, 0!} (0.001)^0 (0.999)^{2\,000} + \frac{2\,000!}{1\,999! \, 1!} (0.001)^1 (0.999)^{1\,999} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\,000!}{1\,998! \, 2!} (0.001)^2 (0.999)^{1\,998} \right) = 0.3233
 \end{aligned}$$

LOS CALCULOS NECESARIOS PARA OBTENER LA SOLUCION SON BASTANTE MAS TEDIOSOS QUE LOS QUE DEBEN EFECTUARSE APROVECHANDO QUE EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE, A FIN DE UTILIZAR LA DISTRIBUCION NORMAL. EN ESTAS CIRCUNSTANCIAS, LA PROBABILIDAD DE QUE $X \leq 2$ EN EL CASO DISCRETO, EQUIVALE A LA DE QUE $X \leq 2.5$ EN EL CONTINUO; ASI

$$\mu = np = 2\,000 \times 0.001 = 2 \text{ (SE USA LA MISMA MEDIA).}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\,000 \times 0.001 \times 0.999} = 1.41$$

$$P[X \leq 2.5] = P\left[Z \leq \frac{2.5 - 2}{1.41}\right] = P[Z \leq 0.355] = 0.6387$$

DE DONDE

$$P[X > 2.5] = 1 - P[X \leq 2.5] = 1 - 0.6387 = 0.3613$$

EJEMPLO

EN UNA SERIE DE 462 EXPERIMENTOS CON FINES ANTROPOLOGICOS, CONSISTENTES EN MEDIR EL TAMAÑO DE LA CABEZA DE LOS INDIGENAS RESIDENTES EN UNA ZONA TROPICAL, SE OBTUVIERON LOS RESULTADOS ANOTADOS EN LAS DOS PRIMERAS COLUMNAS DE LA SIGUIENTE TABLA. SI LA VARIABLE ALEATORIA "TAMAÑO DE LA CABEZA" SE CONSIDERA QUE TIENE DISTRIBUCION NORMAL, ¿QUE CANTIDAD DE RESULTADOS SE ESPERARIA OBTENER ANTES DE HACER LAS MEDICIONES, SI SE CONSIDERA QUE $\mu = \bar{x} = 191.8\text{MM}$ Y $\sigma = s = 6.48\text{MM}$, DONDE \bar{x} =PROMEDIO ARITMETICO Y s =DESVIACION ESTANDAR DE LOS DATOS?

$$z_1 = \frac{171.5 - 191.8}{6.48} = -3.13; \quad z_2 = \frac{175.5 - 191.8}{6.48} = -2.51; \quad x_3 = \frac{179.5 - 191.8}{6.48} =$$

= - 190, ETC.

$$P(-3.13 < z < -2.51) = 0.0051; \quad P(-2.51 < z < -1.90) = 0.0227;$$

$$P(-1.90 < z < -1.28) = 0.0716, \text{ ETC.}$$

$$462 \times 0.0051 = 2.4; \quad 462 \times 0.0227 = 10.5; \quad 462 \times 0.0716 = 33.1, \text{ ETC.}$$

INTERVALO DE VALORES DE X, EN MM	NUMERO DE OBSERVACIONES (frecuencia, f)	INTERVALO DE $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	PROBABILIDAD $P(z_1 \leq z \leq z_2) = P$	FRECUENCIA ESPERADA = 462 P
171.5-175.5	3	(-3.13) - (-2.51)	0.0051	2.4
175.5-179.5	9	(-2.51) - (-1.90)	0.0227	10.5
179.5-183.5	29	(-1.90) - (-1.28)	0.0716	33.1
183.5-187.5	76	(-1.28) - (-0.66)	0.1543	71.3
187.5-191.5	104	(-0.66) - (-0.05)	0.2255	104.2
191.5-195.5	110	(-0.05) - 0.57	0.2356	108.8
195.5-199.5	88	0.57 - 1.19	0.1673	77.3
199.5-203.5	30	1.19 - 1.80	0.0811	37.5
203.5-207.5	6	1.80 - 2.42	0.0281	13.0
207.5-211.5	4	2.42 - 3.04	0.0066	3.0
211.5-215.5	2	3.04 - 3.66	0.0011	0.5
215.5-219.5	1	3.66 - 4.27	0.0001	0.0

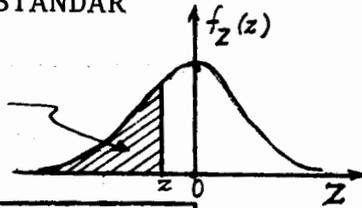
TOTAL: 462

TOTAL: 461.6

TABLA 3

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.	.0013									
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0227	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1921	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2326	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

BIBLIOGRAFIA DE CONTROL DE CALIDAD

1. Mathematical methods of statistical quality control, V. Sarkadi, Academic Press, 1974
2. Sensibilidad estadística de cartas de control de calidad, Universidad de La Habana, Centro de Información Científica y Técnica, 1971
3. Control de calidad, Seminario, Memoria del Instituto Mexicano del Petróleo, Publicación No. 69 JF/050, Ed. Instituto Mexicano del Petróleo, 1969
4. Control de calidad estadístico, E.L. Grant, Ed. CECSA, 1974
5. Control total de la calidad, A.V. Feigenbaum, Ed. CECSA, 1975
6. Practical Quality Control, Simmons A. David, Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1970
7. Quality Control Handbook, J.M. Juran, Gryna, F.M. y R.J. Bingham, 3a. edición, Ed. McGraw-Hill, 1974
8. Quality Planning and Analysis, J.M. Juran y F.M. Gryna, Ed. McGraw-Hill, 1970
9. Construction Specifications Writing: Principles and Procedures, H.J. Rosen, Ed. J. Wiley, 1974
10. Transactions of the American Society for Quality Control.

-
1. Kreyszig, E., "Introducción a la estadística matemática", Limusa-Wiley (1973)
 2. Larson, H.J., "Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística", Limusa-Wiley (1978)
 3. Rascón, O.A., "Introducción a la Estadística Descriptiva", Vols. I y II, Ed. UNAM.
 4. Rascón, O.A., "Introducción a la Teoría de Probabilidades", Ed. UNAM.

BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA SOBRE TEORIA DE LA PROBABILIDAD, ESTADISTICA MATEMATICA, ESTADISTICA APLICADA, MUESTREO, Y PROCESOS ESTOCASTICOS, Y SUS APLICACIONES A LA INGENIERIA, DISPONIBLE EN LA BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS SUPERIORES.

1. Anderson, T., and D. Darling, Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes. C-1097, A
2. Arrow, K., et al, Bayes and minimax solutions of sequential decision problems. C-1101, A
3. Bair, D., Experimentation: an introduction to measurement theory and experiment design, Prentice Hall, 1962. QC39 B2
4. Barucha-Reid, A., ed., Probabilistic methods in applied mathematics, Academic Press, 1968. QA273 B42
5. Bellman, R., Programmed statistics; with chapters on probability, computer theory, and programmed instruction, Holt, Rinehart and Winston, 1970. HA29 B45
6. Benjamin, J., Probability, statistics, and decision for civil engineers, McGraw-Hill, 1970. QA273 B46
7. Bhat, U., Elements of applied process, Wiley, 1972. QA274 B42
8. Blackman, R., Linear data-smoothing and prediction in theory and practice. Addison-Wesley, 1965. QA275 B55
9. Blackwell, D., Another countable Markow process with only instantaneous states. C-1589, B.
10. Box, G., A bayesian approach to some outlier problems. C-1586, B
11. Box, G., Time series analysis; forecasting and control, Holden-Day, 1970. QA276 B6
12. Box, G., Evolutionary operation; a statistical method for process improvement, Wiley, 1969. TP155.7 B66
13. Breiman, L., Probability and stochastic processes. Houghton Mifflin, Co., 1969. QA273 B73
14. Breipohl, A., Probabilistic system analysis; an introduction to probabilistic models, decisions, and applications of random processes, Wiley, 1970. QA273 B746
15. Brown, R., Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series, Prentice-Hall, 1963. TA168 B6
16. Brown, W., and C. Palermo, Random processed, communications, and radar, McGraw-Hill, 1969. TK5101 B75
17. Brownlee, K., Statistical theory and methodology in science and engineering, Wiley, 1960. QA276 B77
18. Bruning, J. and B. Kintz, Computational handbook of statistics, Scott, Foreman and Co., 1968. HA29 B77
19. Bush, R., A stochastic model with applications to learning. C-1590, B
20. Castro, G. de, Introduccao ao curso sobre instrumentos matematicos da estatística. F-2164, C
21. Clarke, B., Probability and random processes for engineers and scientists, Wiley, 1970. QA273 C48
22. Cochran, W., Experimental designs, Wiley, 1957. Q180 A1C6
23. Conover, W., Practical nonparametric statistics, Wiley, 1971. QA278.8 C65

24. Cooper, G. Probabilistic methods of signal and systems analysis, Holt, Rinehart and Winstons, 1971. TK454.2 C664
25. Cornell, C., A probability-based structural code, ACI, 1968.
26. Derman, C., Finite state markovian decision processes, Academic Press, 1970.
27. Deutsch, R., Nonlinear transformation of random processes, 517.7 D.
28. Dubes, R., The theory of applied probability, Prentice-Hall, 1968. TK5101 D8
29. Dynkin, E., Markow processes; theorems and problems, Plenum Press, 1969. QA273 D894
30. Edwards, A., Experimental design in psychological research, Holt-Rinehart and Winsont, 1968. BFS9 E37
31. Ehrenfeld, S. and S. Littauer, Introduction to statistical method, McGraw-Hill, 1964. 519.9 E
32. Esteva, L., Consideraciones prácticas en la estimación bayesiana de riesgo sísmico, México, UNA. Instituto de Ingeniería, 1970. F-8843, E
33. Feller, W., Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, Limusa-Wilesey, 1973. QA273 F3714
34. Forcadas, J., Estadística aplicada a la Ingeniería, 1969. QA276 F66
35. Freeman, H., Introducción a la inferencia estadística, Trillas, 1970. QA276 F6845
36. Freund, J., Mathematical statistics, Prentice Hall, 1971. QA276 F692
37. Freudenthal, H., Probability and statistics, Elsevier, 1965. QA273 F75
38. García, A., Elementos de método estadístico, México, UNA, 1966. HA29 G146
39. Gotkin, L., Estadística descriptiva; texto programado, Limusa-Wiley, 1967. HA29 G695
40. Greenwood, A. and H. Hartley, Guide to tables in mathematical statistics, Princenton University Press, 1962. 519.9 G
41. Grenander, U., Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes. C-1588, G
42. Hanman, H., Modern factor analysis, University of Chicago Press, 1967. QA276 H38
43. Hanna, E., Time series analysis, Methuen, 1960. QA76 H32
44. Hays, W., Statistics: probability inference and decisions, Holt-Rinehart and Winston, 1970. QA276 H39
45. Hoel, P., Elementary statistics, Wiley, 1971. HQ29 H66
46. Hoel, P., et al, Introduction to stochastic processes, Houghton, Mifflin, 1972. QA274 H63
47. Howard, R., Dynamic probabilistic systems, Wiley, 1971. T57.95 H66
48. Iosifescu, M., Random process and learning, Springer Verlag, 1969. QA273 164
49. Jazwinski, A., Stochastic process and filtering theory, Academic Press, 1970. QA276 J38
50. Kefer, J. and J. Wolfowitz, Stochastic estimation of the maximum of a regression function. C-1481, X

51. Kemeny, J., Finite Markow chains, Van Nostrand, 1960.
QA273 K33
52. Kish, L., Muestreo de encuestas, Trillas, 1972.
HN29 K5
53. Kozin, F. and J. Bogdanoff, An introduction to random function for engineer, 1963. F-1930, K
54. Kyburg, H., Probability theory, Prentice-Hall, 1969.
QA273 K92
55. Lange, F., Correlation techniques: Foundation and applications of correlation analysis in modern communications, measurement and control, Iliffe, 1967.
TK7870 L34
56. Larson, H., Introduction to probability theory and statistical inference, Wiley, 1969. QA273 L37
57. La Valle, I., An introduction to probability decision, and inference, 1970. QA276 L36
58. Lecture notes in mathematics, probability and information theory, Springer Verlag, 1964. QA1 L42
59. Lee, T., et al, Estimating the parameters of the Markow probability model, North Holland, 1970.
HB74 M3L43
60. Lindgren, B., Statistical theory, Macmillan, 1968.
QA276 L55
61. Lin, Y., Random processes, F-8709, L.
62. Prelewicz, D., Range of validity of the method of averaging. F-9116, P
63. Prohorov, Y., Probability theory; basic concept, limit theorems, random processes, Springer Verlag, 1969. QA273 P75
64. Raiffa, H. and R. Schlaifer, Applied statistical decision theory, Harvard University Press, 1971.
QA279.4 R34
65. Raj, D., Sampling theory, McGraw-Hill, 1968.
QA276.6 R33
66. Raj, D., Design of sample survey, McGraw-Hill, 1972.
HA312 R33
67. Rascón, O., Introducción a la teoría de probabilidades. México, UNA, 1971. QA273 R37
68. Rascón, O., Introducción a la estadística descriptiva, 1970. HA31 R37
69. Ravindra, H., Probabilistic evaluation of safety factors, University of Waterloo, 1969. F-8680, R
70. Robinson, E., Multichannel time series analysis with digital computer programs, Holden-Day, 1967.
QA276 R633
71. Rosenblueth, E., Current research on probabilistic methods at the National University. C-1517, R
72. Ross, S., Applied probability models with optimization applications, Holden-Day, 1970. QA273 R67
73. Sage, A., Estimation theory with applications to communications and control, McGraw-Hill, 1971.
QA276.8 S33
74. Savage, L., The theory of static decision. C-1098, S
75. Sawaragi, Y., Statistical decision theory in adaptive control system, Academic Press, 1967. QA402.3 S37
76. Schäl, H., Markow renewal processes with auxiliary phats. C-1617, S

77. Schlaifer, R., Probability and statistics for business decisions and Introduction to managerial economics under uncertainty, McGraw-Hill, 1959. HD38 S35
78. Schwartz, J., Statistical methods in traffic engineering, The Ohio State University, 1967. HE336 S7S3
79. Searle, S., Linear models, Wiley, 1971. QA279 S4
80. Sengupta, J., Stochastic programming methods and applications, North Holland, 1973. T57.79 S44
81. Sengupta, S. and S. Jain, A representative theory for measurable random variable. F-5967, S
82. Sheppard, R., Multidimensional scaling, Seminar Press, 1972. CF39 M84
83. Spiegel, M., Theory and problems of statistics, Schaum's Publishing, Co., 1960. HA29 S65
84. Sterling, T., Introduction to statistical data processing. Prnetice-Hall, 1968. QA276.4 S82
85. Stratonovich, R., Conditional Markow processes and their application to the theory of optimal control, Elsevier, 1968. QA273 S76
86. Symposium on time series analysis proceedings, held at Brown University, June 11-14, 1962. Ed. by Murray Rosenblatt. New York, John Wiley and Sons, 1963. S19.9 S
87. Tannur, M., Statistics: a guide to the unknow, Holden Day, Inc., 1972. QA276 S82
88. Theil, H., Statistical decomposition analysis with applications, North Holland, 1972. H61 T43
89. Thomas J., An introduction to statistical communication theory, Wiley, 1969. TK5102.5 T45
90. Tintner, G., Stochastic economics, stochastic processes, control and programming. Academic Press, 1972. QA274 T54
91. Turkstra, C., Applications of bayesian decision theory, University of Waterloo, 1969. F-8619, T
92. Turkstra, C., Elements of probability theory. F-9105, T
93. Turkstra, C., Theoretical distribution functions. F-9104, T
94. Valdes, R., Nociones de cálculo de probabilidades y estadística, Limusa-Wiley, 1970. QA273 V34
95. Van der Gerr, J., Introduction to multivariate analysis for the social sciences, Freeman, 1971. QA278 V34
96. Vere-Jones, D., Stochastic models for earthquake occurence; discussion. F-9247, V
97. Waerden, B., Mathematical statistics, Springer-Verlag, 1957. QA276 W3
98. Wold, H., ed., Bibliography on time series stochastic processes: an international team project. Edinburgh, Oliver and Boyd, 1965.
99. Yaglom, A., An introduction to the theory of stationar random function, Prentice-Hall, 1962. 517.5 Y

Recopilación elaborada por el profesor Ariel Kleiman

F/DEPFI/D-19/1979/EJ.4



702252

