



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Estabilización de bicicleta
autónoma mediante técnicas
avanzadas de control**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Eléctrico Electrónico

P R E S E N T A

Rodrigo Yael Rubio Ortiz

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Saúl de la Rosa Nieves



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado ESTABILIZACION DE BICICLETA AUTONOMA MEDIANTE TECNICAS AVANZADAS DE CONTROL, que presenté para obtener el título de INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

RODRIGO YAEL RUBIO ORTIZ
Número de cuenta: 113004674

Prólogo

“Si he visto más lejos es porque estoy parado sobre los hombros de gigantes.”

—Isaac Newton

Desde niño siempre me han interesado los autos, bicicletas, patines, básicamente cualquier tipo de transporte que tenga ruedas, y aunque no lo menciono explícitamente en el texto, mi preocupación por el cambio climático me impulsó indirectamente a que este proyecto fuera una bicicleta eléctrica y no una motocicleta que utiliza combustibles fósiles como fuente de energía.

Al viajar por carretera en México, es común observar accidentes. No soy antropólogo ni biólogo, pero tal vez los humanos no evolucionamos para desplazarnos a más de 180 km/h. Además, vivimos en un mundo donde existen múltiples eventos aleatorios que no podemos controlar. Por otro lado, mi abuelo paterno llegó a tener accidentes al manejar una motocicleta, entonces surge la pregunta: ¿existe una forma o un método para asistir a un motociclista?, o incluso, ¿darle directamente todo el control de la conducción a una máquina podría ayudar a minimizar los accidentes?

También tiendo a ser impaciente, y el hecho de ver el metro de la Ciudad de México tan lento, o que en una avenida sin semáforos haya tráfico por decisiones caóticas de los humanos, me hace pensar si existen soluciones automatizadas para que el mundo sea más eficiente.

Estas ideas, derivadas de mi crianza y mi interacción con el mundo, sientan las bases para plantear en esta tesis la construcción de una bicicleta eléctrica, autónoma, que puede mantener el equilibrio por sí sola para conducir en lugar de los humanos o ayudarlos en la conducción y así evitar que haya menos accidentes. Donde, únicamente en este trabajo, me centro en la parte de los algoritmos de control para autobalancear la bicicleta y los elementos que rodean al control.

Como sociedad debemos buscar soluciones tecnológicas que prioricen la vida humana y no solo la eficiencia económica.

Este proyecto me cambió completamente, me ayudó a mejorar mi gestión del tiempo y mis prioridades, y me hizo más disciplinado. Levantarme a diario para investigar, escribir y leer, en los días buenos y los malos, ser constante, y aunque tal vez un día no represente un avance significativo, después de un año uno puede mirar a ese Rodrigo del pasado y decirle: “¡Felicidades!... Lo conseguimos” .

Agradecimientos

- A mis padres, quienes me criaron y me dieron todo su apoyo para completar mis sueños.
- A mis hermanas, por sacarme risas y alegrarme más la vida.
- A mi abuelo Anastasio, junto a Yeni, Anita y Cristina, quienes siempre me reciben en San Luis cuando tengo problemas de la vida.
- A Lizbeth Vallejo, Wendy, Iván, Diana Laura (Mapache), Yael, Franco, Frida, Charly y Beni, por compartir la vida juntos. Ustedes me motivan a querer ser mejor persona.
- Al Dr. Saúl, el Dr. Icaza y el Dr. Valeri Orlov, por apoyarme y orientarme en mi formación académica.
- A todos los chicos del LIESE y de UNAM SPACE, en especial a Carlos Benito, Alison, Irving, Farid, Andrés, Heriberto, Diego, Tony, Rebeca, Anton, Guillermo Villanueva y Abraham. Gracias por ayudarme a construir este proyecto. No somos Ford ni Tesla, pero conseguimos fabricar una bicicleta eléctrica con un soldador de punta y un horno de fundición caseros. Sin ustedes este proyecto no hubiera sido posible.

Índice general

Prólogo	I
Agradecimientos	III
1. Introducción	1
1.1. Problemática	1
1.2. Justificación	4
1.2.1. Naturaleza y el propósito de su investigación	4
1.3. Meta del Proyecto	4
1.4. Objetivo General	5
1.5. Objetivos Específicos	5
2. Marco Teórico	7
2.1. Conceptos Básicos	7
2.1.1. Función de Transferencia	7
2.1.2. Introducción al Control PID	8
2.1.3. Representación de espacio de estados	8
2.1.4. Estabilidad en el Espacio de Estados	9
2.1.5. Controlabilidad y observabilidad	9
2.1.6. Sistema Lineal de Parámetros Variables	10
2.1.7. Retroalimentación de estados	11
2.1.8. Cuerpo rígido y tensores de inercia	11
2.2. Antecedentes	12
2.2.1. Historia de la bicicleta	12
2.2.2. Investigaciones previas del análisis del control de bicicletas y vehículos similares	19
2.3. Bases Teóricas	23
2.3.1. Conservación de la energía y estabilidad asintótica	23
2.3.2. ¿Cómo medir experimentalmente los momentos de inercia de la bicicleta?	24
2.3.3. Control LQR Discreto	25
2.3.4. Control Adaptable	26
2.3.5. Discretización de Sistemas	29
3. Estado del Arte	31
3.1. Honda Riding Assist	31
3.1.1. Principios de Funcionamiento	32
3.2. Yamaha Motobot	33
3.2.1. Funcionamiento de MOTOBOT	33

3.3.	MOTOROiD	34
3.3.1.	Principio de funcionamiento	34
3.4.	BMW Vision Next 100	35
3.4.1.	Introducción	35
3.4.2.	Principio de Funcionamiento de la Estabilidad	35
3.4.3.	Geometrías Variables	36
3.4.4.	Discusión	36
3.5.	BMW R1200GS	37
3.5.1.	Principio de funcionamiento	38
3.5.2.	Análisis	38
3.6.	Cuadro Comparativo	39
3.7.	Conclusiones sobre el Estado del Arte	39
4.	Diseño	41
4.1.	Diseño nivel concepto	41
4.1.1.	Sistemas y requerimientos para la bicicleta de estabilidad autónoma	42
4.2.	Diseño a Nivel de Sistema	42
4.2.1.	Sistema de Actuadores de la Bicicleta	43
4.2.2.	Sistema de Instrumentación	44
4.2.3.	Sistema de Procesamiento	47
4.2.4.	Sistema de Energía	48
4.2.5.	Sistema de Procesamiento	48
4.2.6.	Sistema de Energía	49
4.2.7.	Sistema Mecánico	49
4.2.8.	Sistema de Control	50
4.2.9.	Resumen de los Requerimientos Técnicos Propuestos para los Sistemas y Subsistemas	52
4.3.	Diseño a nivel detalle	54
4.3.1.	Actuadores	54
4.3.2.	Instrumentación	58
4.3.3.	Unidad de procesamiento	61
4.3.4.	Sistema de suministro de energía	63
4.3.5.	Mecánica	66
4.3.6.	Control	74
4.3.7.	Algoritmos	83
4.3.8.	Costos	87
5.	Pruebas	93
5.1.	Introducción	93
5.2.	Restricciones físicas del sistema	93
5.3.	Sintonizar ganancias Q y R	94
5.4.	Algoritmo RLS mediante diferentes señales de excitación	98
5.5.	Sintonización del factor de olvido	102
5.6.	Control PI	105
5.7.	Comparación entre un Control LQR con Estimación Directa y Estimación Adaptativa	110
5.7.1.	Diferencia entre ambos controladores	117
5.8.	Conclusiones de las pruebas realizadas	118

6. Conclusiones y Trabajos Futuros	119
6.1. Conclusiones	119
6.2. Trabajos Futuros	120
Referencias	123

Capítulo 1

Introducción

1.1. Problemática

En la última década, el sector de los envíos de comida y paquetería ha experimentado un crecimiento notable, impulsado en gran parte por la pandemia del SARS-CoV-2. Durante la pandemia, se observó un aumento del 21,4% en el PIB de los servicios de mensajería y paquetería, mientras que el PIB nacional disminuyó un 8,2% [1].

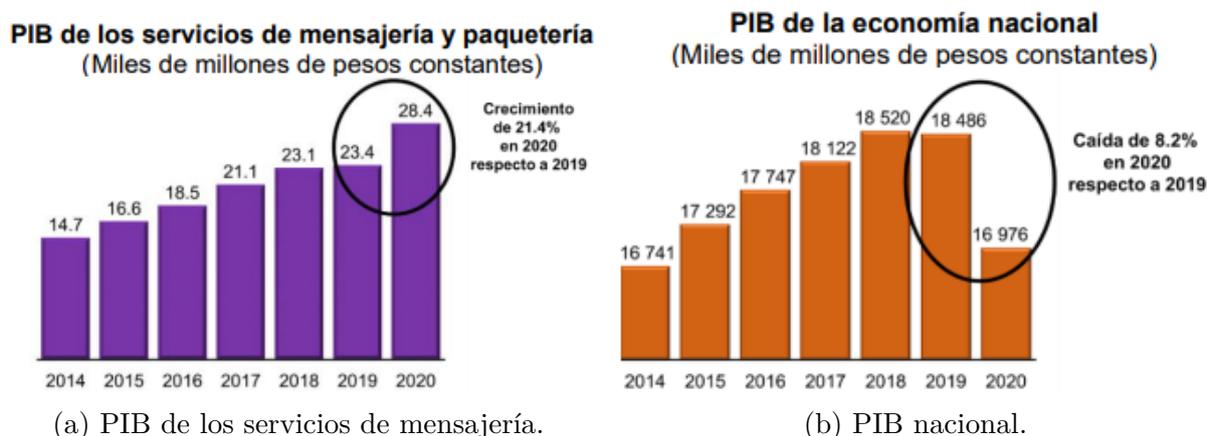


Figura 1.1: Comparación del PIB de los servicios de mensajería y paquetería con el PIB nacional entre 2014 y 2020. Fuente: [1].

Uno de los principales problemas derivados del incremento en los envíos de paquetería es el aumento de accidentes automovilísticos relacionados con ciclistas y motociclistas repartidores. Según los datos presentados por el Instituto de Estadística y Geografía de Jalisco, el 63% de los repartidores en 2021 sufrió accidentes, de los cuales el 96,1% no recibió apoyo por parte de la empresa para la que trabajaba [2].

Los accidentes pueden ser causados por diversos factores, tales como la falta de infraestructura vial adecuada, el exceso de velocidad, la distracción del conductor o la imprudencia de los usuarios de la vía. Estas situaciones representan una seria preocupación en términos de seguridad vial, ya que tienen el potencial de causar lesiones graves o fatales, así como consecuencias legales y financieras tanto para los conductores involucrados como para las empresas de entrega.



Figura 1.2: Repartidores que reportaron accidentes durante su jornada laboral. Fuente: [2].

En las Figuras 1.3, 1.4 y 1.5 se observa la evolución de los accidentes reportados desde 1997 hasta 2023, según datos del INEGI [3].

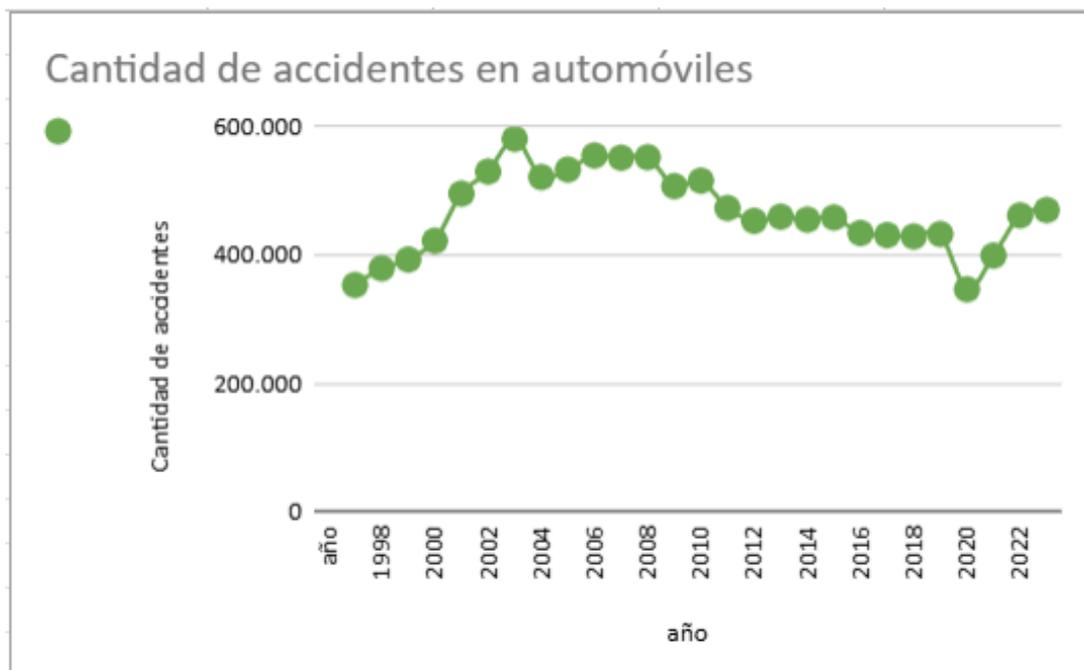


Figura 1.3: Accidentes en automóviles.

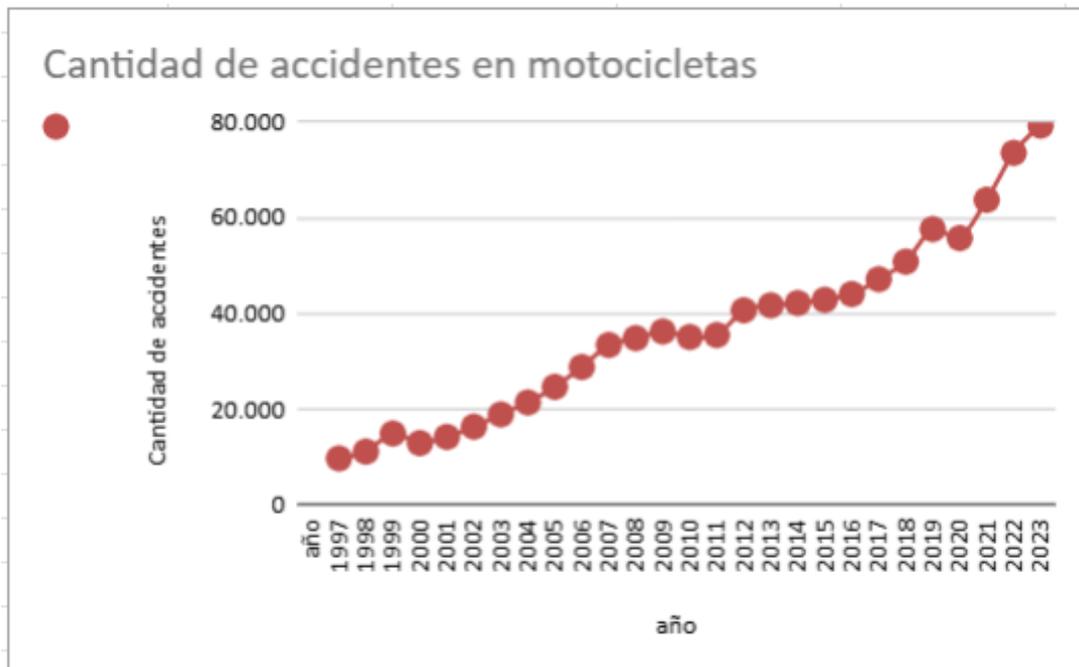


Figura 1.4: Accidentes en motocicletas.

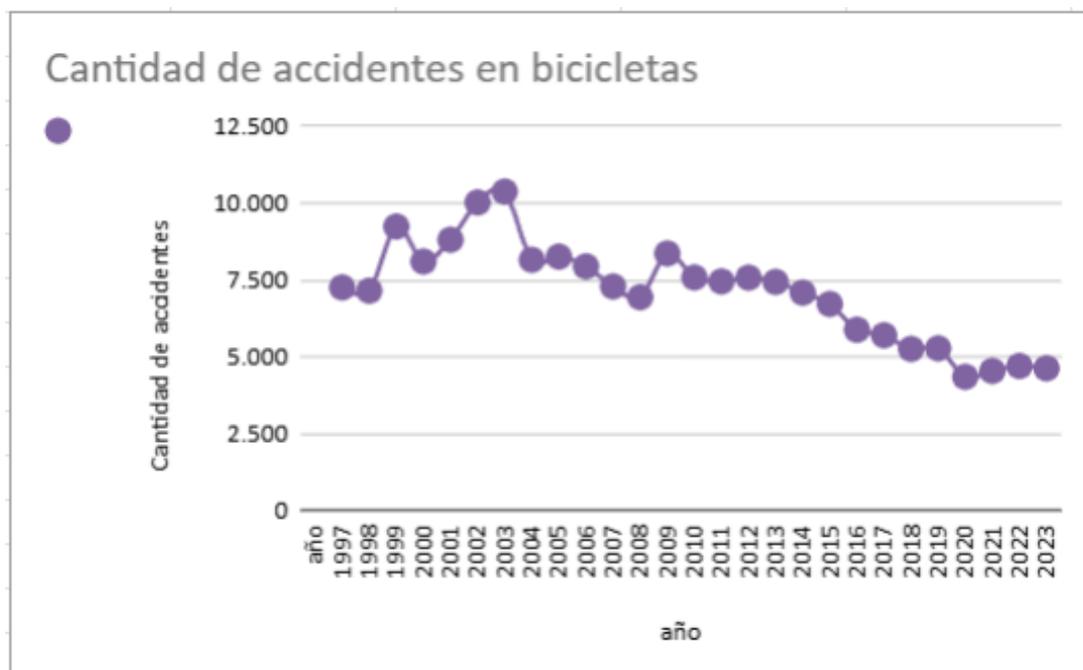


Figura 1.5: Accidentes en bicicletas.

Actualmente existen robots autónomos de entrega (ADR, por sus siglas en inglés, *Autonomous Delivery Robots*), los cuales comparten espacio con los peatones; por ende, los robots no pueden viajar a altas velocidades (llegando hasta los $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ máximo [4]).



Figura 1.6: Kiiwibot, robot autónomo de entrega utilizado en campus universitarios. Fuente: [4].

En el presente trabajo de tesis se propone el desarrollo de una bicicleta que pueda transportar los paquetes de forma autónoma. Esto retiraría a los humanos de situaciones de alto riesgo y, a su vez, reduciría los accidentes. Además, se busca conseguirlo de una forma más eficiente que los robots ADR existentes, consiguiendo alcanzar velocidades superiores a los 6 km/h.

Siendo más específico, en esta tesis, como una etapa inicial, se desarrollará un algoritmo de control que pueda mantener el equilibrio y la selección de todos los componentes necesarios para implementar dicha ley de control en la realidad.

1.2. Justificación

Como se puede observar en la Figura 1.1, el mercado de entregas de última milla está incrementando. Este crecimiento demanda soluciones de movilidad más eficientes y sostenibles. Además, como se muestra anteriormente, vale la pena realizar investigaciones en esta área para poder disminuir los accidentes viales relacionados con repartidores de paquetería.

Se ha comprobado en investigaciones que una bicicleta eléctrica consume 12.2 veces menos energía que una motocicleta [5], siendo esta una solución eficiente en términos de energía.

Por otra parte, una bicicleta podría trasladarse más rápido utilizando la infraestructura existente para estos vehículos.

1.2.1. Naturaleza y el propósito de su investigación

Este trabajo tiene una naturaleza experimental bajo simulaciones, donde se buscará analizar el comportamiento de una bicicleta ante diferentes técnicas de control con el propósito de mejorar la seguridad en el transporte de cargas y en un futuro minimizar los accidentes reportados hacia los humanos.

1.3. Meta del Proyecto

Como resultado tangible, en este trabajo se valida, mediante simulaciones, la viabilidad de implementar un algoritmo de control adaptable para mantener el equilibrio de

estos vehículos. En dichas simulaciones se contempla la bicicleta con sus modificaciones mecánicas y el peso de todos los componentes, junto con la carga. Se modela el sistema en su totalidad para validar la factibilidad de su implementación en futuras aplicaciones de logística de última milla.

1.4. Objetivo General

Desarrollar un sistema de control de estabilización para una bicicleta mediante el control adaptable.

1.5. Objetivos Específicos

- Diseñar algoritmos de control que garanticen la estabilidad del sistema ante perturbaciones o cambios en el sistema.
- Validar la estabilidad mediante simulaciones en diferentes escenarios de carga y condiciones de operación.
- Seleccionar los sensores que cumplan con las especificaciones dadas por el modelo matemático para medir los estados del sistema.
- Seleccionar motores que cumplan con las especificaciones de fuerzas y velocidades dadas por el modelo matemático para actuar sobre el sistema.
- Seleccionar un microcontrolador viable para la implementación del algoritmo de control para futuras pruebas experimentales.

Capítulo 2

Marco Teórico

Este capítulo abarca los conceptos básicos que necesita el lector para entender el trabajo, posteriormente, un breve resumen de la historia de la bicicleta, investigaciones previas que han realizado algunas personas para estabilizar estos sistemas y, por último, conocimiento matemático necesario para comprender las propuestas de algoritmos de control de este trabajo.

2.1. Conceptos Básicos

2.1.1. Función de Transferencia

Las funciones de transferencia son una herramienta que permite comprender cómo se relaciona la entrada y la salida de un sistema. A este tipo de representación se le conoce como sistemas de Una Entrada y Una Salida (SISO, por sus siglas en inglés). Para simplificar el estudio de sistemas complejos, se utiliza la transformada de Laplace, que convierte ecuaciones diferenciales en expresiones algebraicas.

Se define la función de transferencia $G(s)$ como la razón entre la transformada de Laplace de la salida $Y(s)$ y la de la entrada $X(s)$, considerando condiciones iniciales nulas, como se muestra en la Ecuación (2.1) [6]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (2.1)$$

Esta ecuación indica que, al conocer $G(s)$, es posible determinar la salida de un sistema para cualquier entrada dada. Asimismo, al aplicar un impulso y utilizando la transformada inversa, se obtiene la respuesta temporal del sistema, expresada en la Ecuación (2.2):

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \quad (2.2)$$

Un impulso es una señal idealizada que representa un pulso infinitamente estrecho y alto con un área unitaria. Matemáticamente se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

y cumple con la propiedad fundamental:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

2.1.2. Introducción al Control PID

El controlador PID es un esquema ampliamente utilizado en sistemas de control industrial debido a su capacidad para mejorar el desempeño de una planta sin necesidad de un modelo matemático preciso de la misma [6]. Su función de transferencia se expresa como:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (2.3)$$

Este controlador está compuesto por tres términos: proporcional, integral y derivativo, cada uno con un efecto particular sobre la respuesta del sistema.

El término proporcional, representado por K_p , influye en la magnitud de la corrección aplicada. A mayor valor de K_p , el sistema responde con mayor fuerza ante cualquier desviación de la referencia. Sin embargo, un K_p demasiado alto puede provocar oscilaciones indeseadas [6].

El efecto generado por el término integral $\left(\frac{1}{T_i s}\right)$ en la Ecuación (2.3) incrementa la contribución del control acumulando los errores a lo largo del tiempo; esta acción consigue eliminar el error en estado estacionario, dicho de otra forma, cuando el tiempo tiende a infinito. Esta parte del control ingresa un polo en el origen, la cual, si no es correctamente calculada, podría afectar la estabilidad del sistema o causar oscilaciones en el estado estacionario [6].

El elemento derivativo ($T_d s$) en la Ecuación (2.3) reacciona ante cambios rápidos en el error, lo que ayuda a minimizar el sobrepaso en la respuesta del sistema. Una de sus desventajas ocurre cuando el sistema presenta ruido, ya que esta ganancia amplifica las señales de alta frecuencia, pudiendo comprometer la estabilidad del sistema [6].

La combinación de estos tres términos permite que un controlador PID ajuste su comportamiento de manera flexible, equilibrando rapidez, estabilidad y precisión en la respuesta del sistema. La sintonización de los parámetros K_p , T_i y T_d es fundamental para lograr el desempeño deseado [6].

2.1.3. Representación de espacio de estados

La representación de espacio de estados describe sistemas dinámicos mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Para sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), se expresa como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el **vector de estados**, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ la **entrada**, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ la **salida**, y A, B, C, D son matrices constantes que definen los parámetros del sistema [7].

Los estados $\mathbf{x}(t)$ representan variables internas que capturan la evolución temporal del sistema. Los parámetros A, B, C, D determinan las interacciones entre estados, entradas y salidas. La matriz A gobierna la dinámica libre del sistema, mientras B y C vinculan entradas y salidas con los estados (ver ecuaciones (2.4) y (2.5)) [7].

La solución de la ecuación de estado se obtiene mediante la matriz exponencial (matriz de transición de estados):

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

2.1.4. Estabilidad en el Espacio de Estados

En el libro [7], se analiza la relación entre la estabilidad BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) de un sistema y los valores propios de la matriz A en la representación en espacio de estados. Un sistema en espacio de estados se describe mediante las ecuaciones vistas anteriormente ((2.4) y (2.5)),

donde A representa la matriz de estado, B la matriz de entrada, C corresponde a la matriz de salida y D es la matriz de transmisión directa. La función de transferencia $G(s)$ del sistema está dada por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.7)$$

Polos de la función de transferencia y valores propios de A

Los polos de la función de transferencia $G(s)$ son las raíces del denominador de $G(s)$, que corresponden a los valores de s que satisfacen $\det(sI - A) = 0$. Estos valores son precisamente los **valores propios de la matriz A** . Por lo tanto, todos los polos de $G(s)$ son valores propios de A . Sin embargo, no todos los valores propios de A necesariamente son polos de $G(s)$ debido a posibles cancelaciones entre ceros y polos en $G(s)$.

Estabilidad BIBO

Para el caso de sistemas SISO, la estabilidad se puede garantizar si, ante una entrada acotada, se obtiene una salida acotada (BIBO). En [7] se establece que esta estabilidad se puede garantizar si y solo si todos los polos de la función de transferencia $G(s)$ tienen parte real negativa.

Sistemas multivariables

Para sistemas multivariables (MIMO, multiple input, multiple output del inglés), un sistema con una matriz de transferencia racional propia $G(s) = [g_{ij}(s)]$ es BIBO estable si y solo si todos los polos de cada $g_{ij}(s)$ tienen parte real negativa.

2.1.5. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad describen la relación entre las entradas, salidas y estados internos de un sistema dinámico. Básicamente, estas dos propiedades representan si nuestros actuadores pueden modificar todo el sistema y si nuestros sensores seleccionados, incluso si no tenemos sensores para todos los estados, pueden medir todos los estados del sistema, aunque esto sea indirectamente.

Para un sistema lineal en espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.8)$$

Controlabilidad

Un sistema es *controlable* en $[t_o, t_f]$ si cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_o)$ puede llevarse al origen usando una entrada $\mathbf{u}(t)$. La condición se verifica mediante el Gramiano de controlabilidad (W):

$$W(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \Phi(t_o, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_o, t) dt \quad (2.9)$$

El sistema es controlable si $\det(W(t_o, t_f)) \neq 0$ **rough**. Para sistemas invariantes en el tiempo, basta comprobar:

$$\text{rank} [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n \quad (2.10)$$

Donde la matriz de controlabilidad se denota por \mathcal{C} y se define como:

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]. \quad (2.11)$$

Observabilidad

Un sistema es *observable* en $[t_o, t_f]$ si el estado inicial $\mathbf{x}(t_o)$ puede determinarse únicamente desde $\mathbf{y}(t)$. La matriz clave es:

$$M(t_o, t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \Phi^T(t, t_o)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_o) dt \quad (2.12)$$

Análogo al caso de la controlabilidad, la invertibilidad de $M(t_o, t_f)$ garantiza observabilidad para sistemas invariantes en el tiempo **rough**. En este caso, la matriz de observabilidad se define como:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

El sistema es observable si la matriz \mathcal{O} es de rango completo:

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n. \quad (2.14)$$

2.1.6. Sistema Lineal de Parámetros Variables

Un sistema no lineal se puede representar como una colección de modelos lineales, donde los términos que causan la no linealidad ($\theta(t)$) se pueden considerar como un parámetro externo constante. Cada representación lineal corresponde a un valor diferente de θ . A esta representación se le conoce como LPV, por sus siglas en inglés, Linear Parameter-Varying system [8]. La forma básica se presenta en la Ecuación (2.15) [8]:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\theta)\mathbf{x} + B(\theta)\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C(\theta)\mathbf{x}, \quad (2.15)$$

donde:

- \mathbf{x} representa el estado del sistema.

- \mathbf{u} es la señal de entrada.
- \mathbf{y} es la salida.
- $A(\theta)$, $B(\theta)$ y $C(\theta)$ son matrices que dependen del parámetro θ .

En la Ecuación (2.15) se observa cómo la estructura del sistema varía conforme cambia θ , lo que posibilita ajustar el comportamiento en tiempo real según condiciones observadas [8]. La medición actual de θ se usa para seleccionar el modelo adecuado en cada instante [8].

2.1.7. Retroalimentación de estados

En sistemas de control, la *retroalimentación de estados* se refiere al uso de las variables internas del sistema (estados) para ajustar la señal de control. Basado en [9], en un sistema descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.16)$$

donde \mathbf{x} es el vector de estados y \mathbf{u} la entrada de control, la ley de retroalimentación se define como:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

siendo \mathbf{K} una matriz de ganancias. Al aplicar esta ley, el sistema en lazo cerrado se convierte en:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

Se considera $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ y se obtiene un nuevo sistema retroalimentado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \quad (2.19)$$

donde si elegimos una \mathbf{K} que provoque que los valores propios de $\bar{\mathbf{A}}$ tengan parte real negativa, entonces podemos hacer que el sistema sea asintóticamente estable.

2.1.8. Cuerpo rígido y tensores de inercia

El momento de inercia es una magnitud física que mide la resistencia que presenta un cuerpo ante cambios en la velocidad angular cuando estos se encuentran rotando. En el caso de objetos que no son simétricos, la inercia puede cambiar dependiendo del eje sobre el que se esté rotando; por ello, se creó una herramienta que engloba todos los momentos de inercia para cada eje de referencia, a la cual se le conoce como tensor de inercia [10].

El tensor de inercia se representa como:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

donde los elementos diagonales representan los momentos de inercia, mientras que los elementos fuera de la diagonal representan los productos de inercia. Cada momento se calcula como:

$$I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV \quad (2.21)$$

Donde:

- I_{ij} : Componente del tensor de inercia.
- $\rho(\mathbf{r})$: Densidad del cuerpo en función del vector de posición \mathbf{r} .
- r : Distancia del elemento diferencial de volumen dV al origen.
- δ_{ij} : Delta de Kronecker, cuyo valor es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$.
- x_i, x_j : Coordenadas cartesianas en las direcciones x, y, z .
- dV : Elemento diferencial de volumen.

A partir del tensor de inercia se puede calcular la energía cinética de un objeto como:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.22)$$

Donde:

- T : Energía cinética rotacional.
- $\boldsymbol{\omega}$: Vector de velocidad angular.
- \mathbf{I} : Tensor de inercia.

2.2. Antecedentes

2.2.1. Historia de la bicicleta

La Draisina

En el siglo XVII, la fuente de energía principal era el caballo; este ser vivo era capaz de transportar cargas y personas. En esta época, el francés Jacques Ozman escribió un teórico llamado *Recreation Mathematiques et Physiques, quicontiennent*, donde propone las ventajas de un carruaje impulsado por humanos, o dicho de otra manera, un *caballo mecánico*. Este artículo se puede ver en la Figura 2.1.

En América y Europa intentaron recrear el invento de Jacques de forma física; sin embargo, no tuvieron éxito. Por otra parte, en Alemania, el inventor Karl von Drais realizó avances significativos en el desarrollo de vehículos impulsados por humanos con su invención llamada *laufmaschine* o *máquina de correr* en 1817. Este invento fue el precursor temprano de la bicicleta, con un marco de madera y dos ruedas, donde la propulsión del vehículo es generada por el conductor al empujar el suelo con los pies, como se muestra en la Figura 2.2. A esta época de la bicicleta se le conoció como *La Draisina*.



Figura 2.1: Escrito de Jacques sobre las ventajas teóricas del carruaje impulsado por humanos, publicado en París en 1696. Imagen tomada de [11].



Figura 2.2: Folleto de 1817 donde Drais destaca las ventajas de su máquina de correr, mostrando a un correo militar en un velocípedo. Imagen tomada de [11].

Durante varios años, el velocípedo se consideró vanguardia en la investigación científica; sin embargo, con la llegada del ferrocarril a Gran Bretaña en 1850, el velocípedo fue perdiendo fuerza, ya que no era una máquina suficientemente convincente para el transporte mediante fuerza humana. Drais y otros inventores realizaron intentos por desarrollar un nuevo velocípedo con tres o cuatro ruedas, pero la verdadera innovación en la búsqueda de un *caballo mecánico* ocurrió aproximadamente cincuenta años después de la Draisina.

En términos de control, la Draisina no podía equilibrarse sin usar las manos, ya que no contaba con apoyos para los pies y tenía rodamientos de dirección con mucha fricción.

Aunque algunas imitaciones tenían reposapiés cerca de la rueda delantera, el equilibrio sin manos probablemente solo se lograba dirigiendo el vehículo con los pies, lo que indica que este invento no contaba con autoestabilidad [12], [13].

La Era del Bon Shaker

Pierre Michaux decidió hacerle modificaciones al diseño de Drais e incluyó pedales conectados directo a la llanta frontal. Este nuevo invento fue bastante apreciado en Francia. El costo era elevado; sin embargo, la clase alta comenzó a adoptarla como medio de transporte. Como estrategia de marketing, Michaux ofreció lecciones gratuitas para aprender a usar la bicicleta, lo que llevó a su país a impulsar el crecimiento de la industria para este vehículo.

En 1868 ya eran muchas las personas que utilizaban este medio de transporte. Esto generó preocupaciones sobre la seguridad y su regulación en áreas urbanas; sin embargo, la revolución de la bicicleta se extendió rápidamente hacia Estados Unidos y Europa.



Figura 2.3: Carrera de mujeres en velocípedos en diciembre de 1868 en Francia. Imagen tomada de [11].

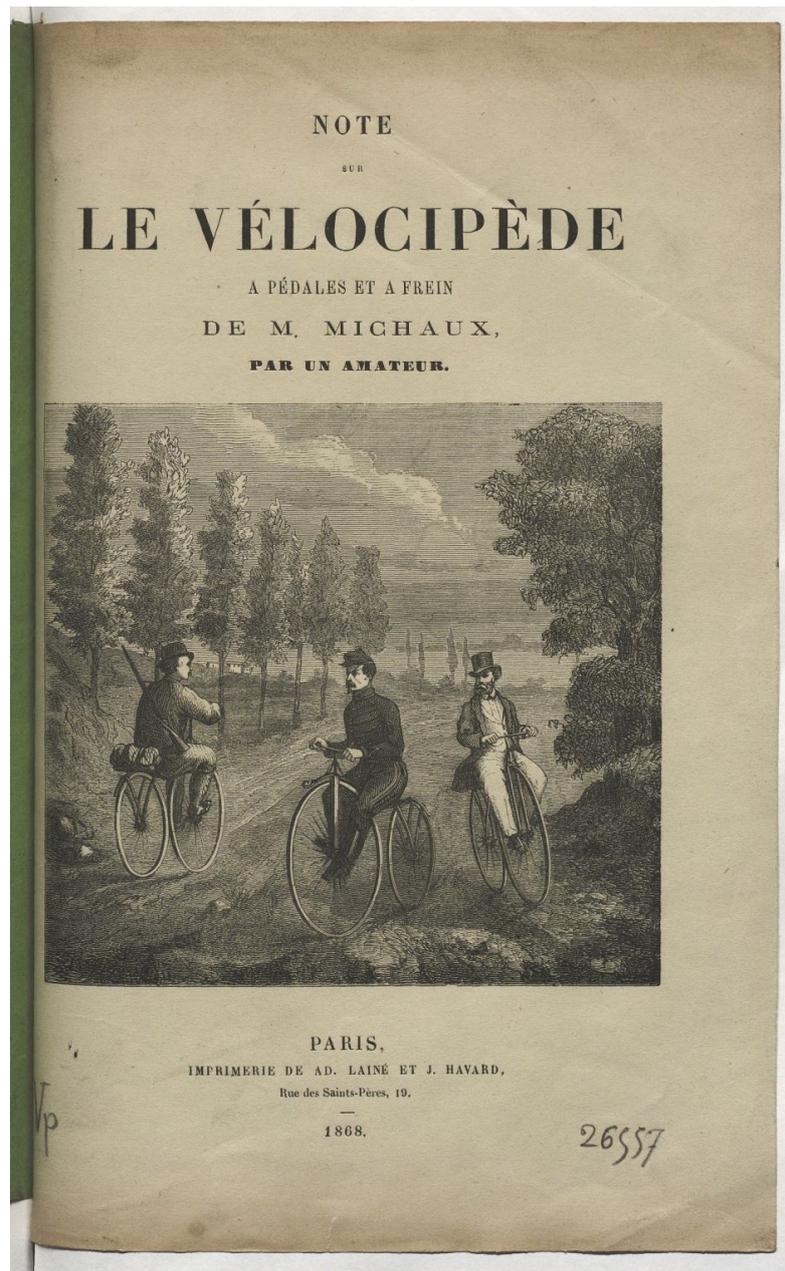


Figura 2.4: Portada del primer folleto promocional de Michaux, impreso en la primavera de 1868. Muestra a un cazador, un soldado y un caballero en bicicletas Michaux, destacando el velocípedo con pedales y frenos”. Imagen tomada de [11].

High Wheeler

Los usuarios comenzaron a demandar bicicletas más veloces, lo que llevó a que en 1870 en Inglaterra se construyeran bicicletas con la rueda frontal más grande. Esta nueva generación de bicicletas se les conoció como High Wheeler, la cual conseguía desplazar el vehículo con mayor rapidez sin necesidad de mover las piernas más rápido. Una de sus desventajas fue la dificultad para montar, ya que requería un ayudante que sujetara la bicicleta para que el piloto pudiera subirse; además, las caídas desde el asiento más elevado podían generar mayores riesgos para los conductores.

James Starley y William Hillman fueron los fabricantes de este tipo de bicicletas

más famosos de la época, además participaron en la formación de clubes de ciclismo y en la realización de hazañas como recorridos de cien millas en un solo día. A pesar de los problemas con el control y la resistencia al cambio de algunos ciclistas, las "high wheelers" se asociaron con la velocidad y la modernidad en la Inglaterra de la época.



Figura 2.5: Carrera de diez millas en el Alexandra Palace en Londres, publicada en el Pictorial World del 24 de julio de 1875, donde ciclistas compitieron contra caballos. Imagen tomada de [11].

Bicicleta de Seguridad

Debido a los problemas generados por la High Wheeler, era necesario realizar adaptaciones para facilitar el uso de bicicletas, por ello John Kemp Starley introdujo el modelo *Rover Safety Bicycle* en 1885 [14]. Rediseñando completamente la bicicleta; ahora esta contaba con los pedales en el centro del cuadro, neumáticos inflables y transmisión por cadena hacia la llanta trasera, lo cual permitió aumentar la velocidad sin necesidad de incrementar el radio de alguna llanta. Esto provocó que el vehículo fuera más estable y fácil de controlar, transformándolo de un juguete recreativo a un medio de transporte cotidiano.



Figura 2.6: Bicicleta de seguridad. Imagen tomada de [11].

Modelo de Carvallo-Whipple

En 1897, el matemático francés Emmanuel Carvallo [15], y luego, de manera más general, el estudiante universitario de Cambridge, Francis Whipple [16], utilizaron ecuaciones de dinámica de cuerpos rígidos para demostrar que las bicicletas pueden autoestabilizarse sin necesidad de un ciclista cuando se mueven dentro de un cierto rango de velocidad.

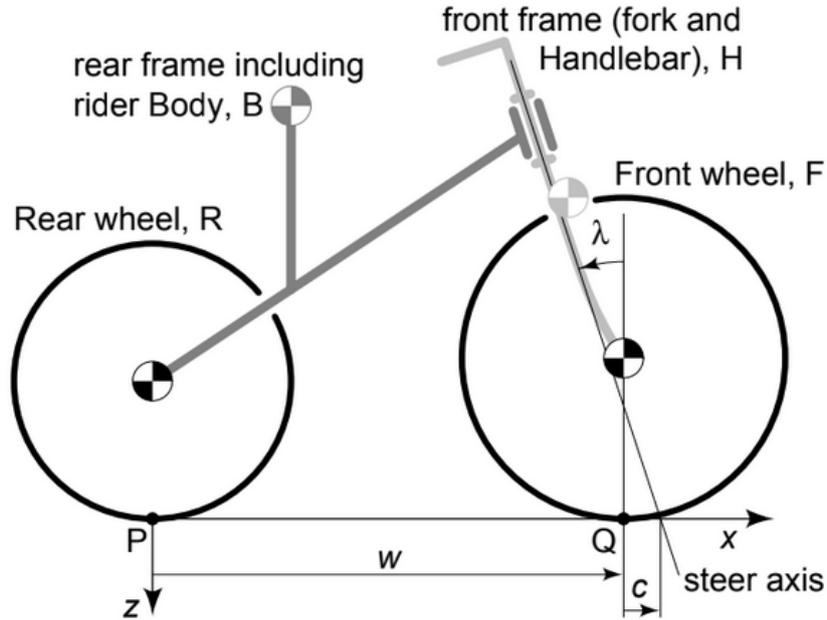


Figura 2.7: Ubicación de los centros de masa de los cuatro cuerpos rígidos que conforman a la bicicleta con respecto al marco de referencia colocado en P, en función de las dimensiones de la bicicleta y sus parámetros. Imagen tomada de [17].

El modelo matemático presentado por Whipple y Carvallo es el siguiente: Las ecuaciones linealizadas tienen la forma general:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + v\mathbf{C}_1\dot{\mathbf{q}} + (g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2)\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (2.23)$$

donde:

- $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \end{bmatrix}$: ángulos de inclinación y dirección.
- $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_\delta \end{bmatrix}$: pares (fuerzas de giro) de entrada.

Se puede realizar una simplificación más al sistema considerándolo como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(v)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(v)\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (2.24)$$

Las matrices se definen como:

- **M**: Matriz de inercia (simétrica), representa la masa efectiva y energía cinética del sistema.

- $\mathbf{C}(v) = v\mathbf{C}_1$: Matriz de amortiguamiento giroscópico aparente, proporcional a la velocidad. \mathbf{C}_1 también captura las fuerzas inerciales inducidas por la velocidad angular de dirección (esto es, la velocidad de giro del manubrio), la cual incluye tanto el efecto de la aceleración lateral causada por la curvatura de trayectoria (tasa de cambio de orientación del vehículo) como la aceleración de giro alrededor del eje vertical (comúnmente conocida como "guiñada").
- $\mathbf{K} = g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2$: Matriz de rigidez efectiva, compuesta por una parte debida a la gravedad y otra cuadrática con la velocidad, que incluye efectos centrífugos y giroscópicos.

En [18] se puede encontrar la deducción paso a paso de cada parámetro de las matrices, las cuales son las siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} T_{xx} & F_{\lambda x} + fT_{xz} \\ F_{\lambda x} + fT_{xz} & F_{\lambda\lambda} + 2fF_{\lambda z} + f^2T_{zz} \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} gm_t z_t & -gS_u \\ -gS_u & -gS_u \sin(\lambda) \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{S_t - m_t z_t}{w} \cos(\lambda) \\ 0 & \frac{S_u + S_f \sin(\lambda)}{w} \cos(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & fS_t + S_f \cos(\lambda) + \frac{T_{xz} \cos(\lambda)}{w} - fm_t z_t \\ -(fS_t + S_f \cos(\lambda)) & \frac{F_{\lambda z} \cos(\lambda)}{w} + f \left(S_u + \frac{T_{zz} \cos(\lambda)}{w} \right) \end{bmatrix}.$$

Donde:

- g : Aceleración gravitatoria constante (9,81 m/s²).
- m_t : Masa total del sistema, suma de las masas principales (ruedas y cuadros).
- z_t : Altura del centro de masa total respecto al suelo.
- S_u : Momento estático total respecto al eje de dirección.
- S_t : Momento angular total dividido por la velocidad de avance.
- T_{xx}, T_{xz}, T_{zz} : Momentos de inercia totales respecto al origen.
- $F_{\lambda\lambda}, F_{\lambda x}, F_{\lambda z}$: Momentos de inercia proyectados sobre el eje de dirección.
- f : Relación entre avance mecánico y distancia entre ejes.
- λ : Ángulo del eje de dirección respecto al eje vertical.

En el trabajo de [19] se observa cómo es que el sistema se puede tratar como una representación de espacio de estados LVP considerando la velocidad como parámetro variable, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_\delta \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

$$\mathbf{A}(v) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2) & -\mathbf{M}^{-1}(v\mathbf{C}_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(v)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t). \quad (2.28)$$

Otro trabajo donde se toma la misma representación es [20], del cual se tomaron los valores de sus matrices A y B para graficar el movimiento de sus polos al aumentar la velocidad de traslación v . Como se puede observar en la Figura 2.8, cuando la velocidad de la bicicleta se encuentra entre $3,9 \frac{m}{s}$ y $7,9 \frac{m}{s}$, todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa; por lo tanto, en esta región la bicicleta tiene un comportamiento estable. Matemáticamente, se puede representar la existencia de una zona de estabilidad.

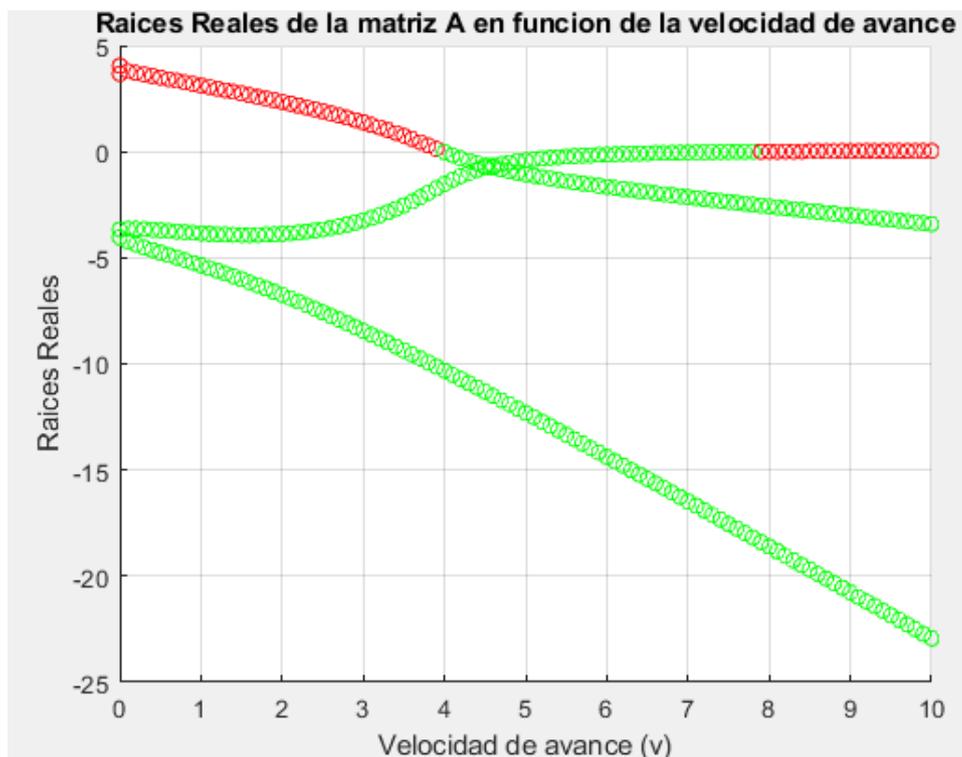


Figura 2.8: Parte real de los valores característicos de la matriz A de una bicicleta al variar la velocidad de avance. Los valores de las matrices fueron tomados de [20].

2.2.2. Investigaciones previas del análisis del control de bicicletas y vehículos similares

Se han realizado diversos estudios a lo largo de la historia para estudiar la dinámica de la bicicleta y cómo es que el control afecta este sistema. A continuación, se expresa un pequeño resumen de algunas de las investigaciones que se han realizado después de Carvallo y Whipple.

El modelo de equilibrio para la bicicleta y su dinámica lateral ha sido extensamente estudiado en la literatura. En trabajos seminales, Sharp [21], [22], [23], [24] abordó la dinámica de los vehículos de una sola pista y la estabilidad en línea recta de las motocicletas, así como la dinámica lateral de motocicletas y bicicletas. Otros autores, como Limebeer y Sharp [25] y Popov, Rowell y Meijaard [26], revisaron los modelos y el control de vehículos de pista única.

En [17] se presentaron las ecuaciones linealizadas de la bicicleta, las cuales muestran una relación entre la inclinación y la dirección del manubrio; además, realizaron pruebas experimentales para garantizar que el modelo lineal podía considerarse como una buena aproximación para representar los fenómenos que afectan a la bicicleta.

En [27] y [18] se discutió la estabilidad y técnicas de control aplicadas a bicicletas y motocicletas.

En el trabajo [11] se habla sobre la historia de la bicicleta y el desarrollo de los primeros modelos matemáticos.

El análisis del control y la estabilidad de bicicletas autónomas y el uso de técnicas de control avanzadas también han sido investigados por Chen y Dao en los trabajos [28], [29], [30], analizando algunas técnicas como el control difuso y genético para el seguimiento de trayectorias en bicicletas robóticas.

Durante los últimos 10 años se han desarrollado diferentes métodos para estabilizar vehículos de dos ruedas. A razón de que son técnicas experimentales, hasta ahora no existe una sola herramienta que predomine entre las demás. En general, se han utilizado cinco métodos principales para estabilizar y controlar la bicicleta, giroscopios, masas en movimiento, control de dirección y por último una combinación entre los anteriores.

Control de Dirección

Similar a la forma en que los humanos controlamos la bicicleta; el trabajo [31] fue de los primeros en aplicar fuerzas al manubrio para cambiar la dirección y así conseguir estabilizar la bicicleta. A esta técnica en inglés se le conoce como Steering torque.

Se han propuesto varios métodos de control, como el control proporcional con colocación de polos, el control de retroalimentación de estado con variación de parámetros lineales (LPV) [32], y el control óptimo [33].

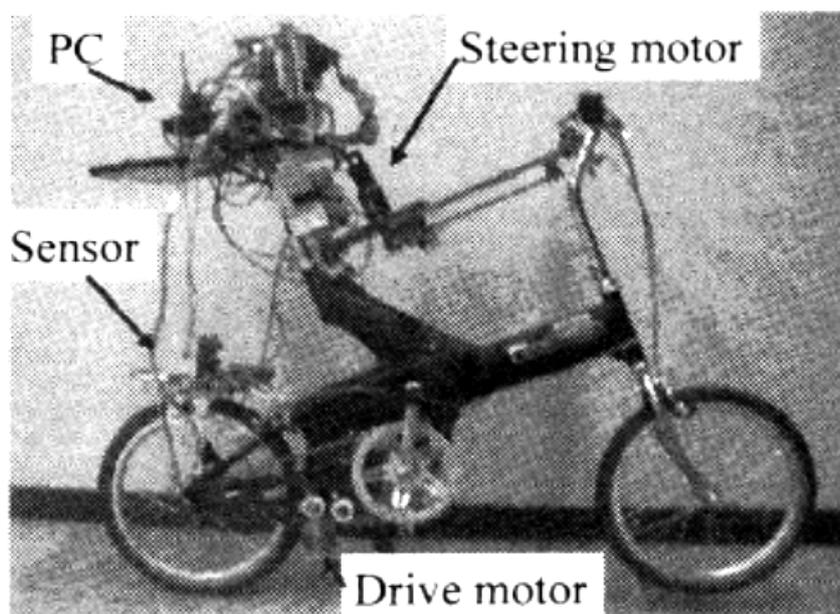


Figura 2.9: Bicicleta construida por Saguchi para comprobar estabilidad por control de dirección, tomada de [34].

Control Mediante Masa Móvil

El *control mediante masa móvil* utiliza un péndulo invertido o una masa móvil lateral para generar torque de inclinación y estabilizar la bicicleta. Esta técnica es más compleja que el control de dirección, ya que requiere ganancias de retroalimentación mucho mayores.

En otros trabajos como el de [35] y [36] se centraron en modificar el centro de masa de la bicicleta; al igual que un ciclista al soltar el manubrio, este aún puede controlar la bicicleta mediante movimientos de su torso para mantener el equilibrio.

Yamakita implementó controladores independientes para la estabilización (control no lineal) y el seguimiento de la postura (control linealizado entrada-salida). Posteriormente, añadieron un controlador H_∞ para mejorar la robustez en sus experimentos [36].

Control con Giroscopio

Al igual que un trompo, la inercia generada por una masa al girar a velocidades muy altas se comporta naturalmente como una resistencia al cambio de momento angular. Estos sistemas pueden mantener el equilibrio sin necesidad de una ley de control, únicamente deben preocuparse por mantener el giroscopio en movimiento.

Murata utilizó un giroscopio en un robot miniaturizado para estabilizar una bicicleta, y otros estudios han empleado controladores basados en root-locus y control H_2/H_∞ , [37]. Esta técnica es efectiva aun cuando la bicicleta se encuentra quieta o a bajas velocidades, el cual es uno de los mayores problemas presentados por este sistema. Una de sus desventajas es el coste energético; en prototipos pequeños puede tener buen desempeño; en cambio, al aplicarlo a escalas reales se requieren masas muy pesadas y motores con mucha potencia para mantener la masa constantemente girando.

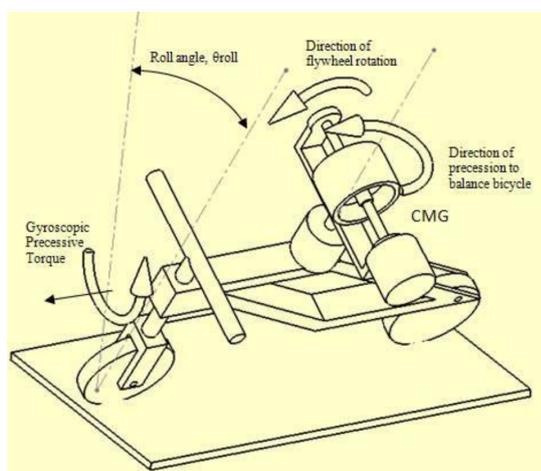


Figura 2.10: Diagrama de torques aplicados para controlar una bicicleta mediante uso de giroscopios, Tomada de [38]

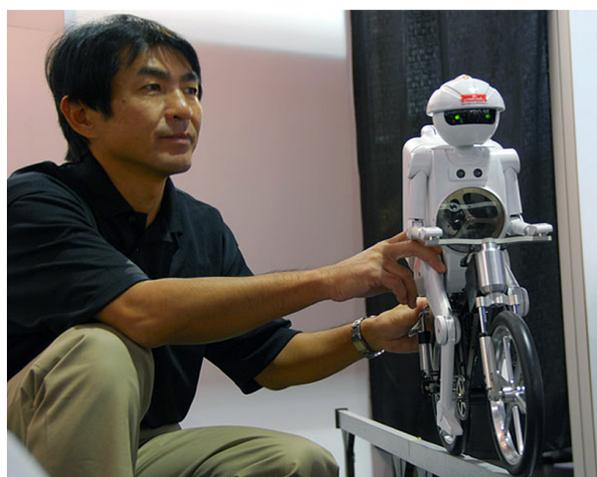


Figura 2.11: Murata y su robot equilibrador tomada de [39]

Métodos de Control Múltiples

Los *métodos de control múltiples* combinan el control de dirección y el par de inclinación para mejorar la estabilización y el seguimiento de trayectorias.

Lychee Keo y Masaki Yamakita propusieron un control output-zeroing controller, donde crean un sistema equilibrador, el cual se puede configurar como un volante de inercia cuando las perturbaciones en el sistema son grandes y cambiar al modo equilibrador cuando sea necesario desplazar la posición del centro de gravedad. La bicicleta estabilizada con volante tiene un rendimiento superior al equilibrador, pero no puede controlar el cambio del ángulo de la bicicleta para seguir el valor deseado, a diferencia del equilibrador, que puede realizar esta tarea. Dado que el volante y el equilibrador tienen ventajas diferentes para estabilizar la bicicleta, se utilizan ambos. El volante se utiliza cuando hay grandes perturbaciones en el sistema o en el modo de arranque, y se cambia al equilibrador cuando el sistema se encuentra en la región estabilizable.

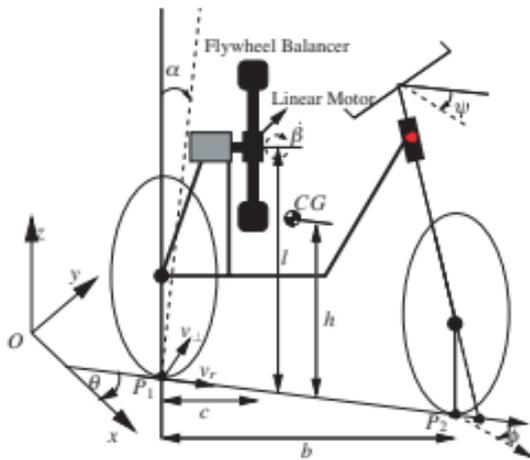


Figura 2.12: Esquema general del equilibrador-volante. Imagen tomada de [40].

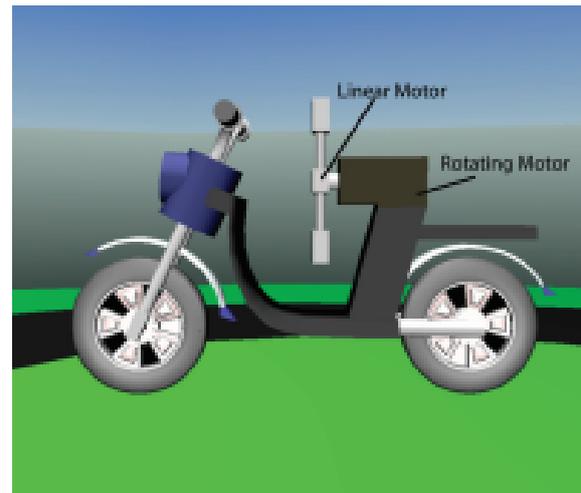


Figura 2.13: Simulación sistema equilibrador volante. Imagen tomada de [40].

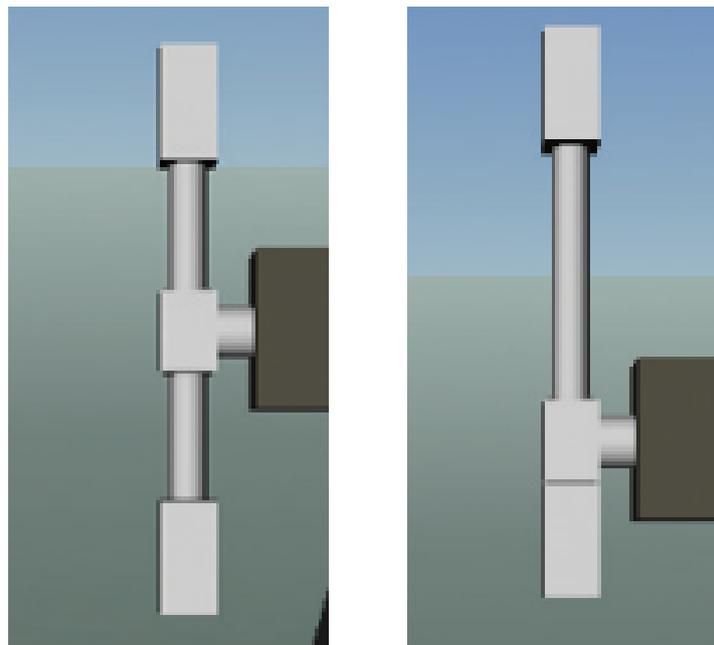


Figura 2.14: Modo volante de inercia y modo equilibrador. Imagen tomada de [40].

2.3. Bases Teóricas

2.3.1. Conservación de la energía y estabilidad asintótica

En [17] Meijaard, Papadopoulos, Andy Ruina y A. L. Schwab explican que cuando una bicicleta sin control está dentro de su rango de velocidad estable, las perturbaciones de inclinación y dirección disminuyen de manera aparentemente amortiguada, aunque en realidad el sistema no tiene amortiguamiento y conserva energía. En lugar de disiparse, la energía de las oscilaciones de inclinación y dirección se transfiere a la velocidad

hacia adelante. Las ecuaciones linealizadas no capturan esta conservación de energía, por lo tanto, ellos realizaron una simulación no lineal del modelo de bicicleta en SPACAR. En dicha simulación, la velocidad hacia adelante final aumenta debido a la energía de la perturbación lateral, incrementando aproximadamente 0.022 m/s. En su trabajo muestran este pequeño aumento en la velocidad hacia adelante mientras los movimientos laterales desaparecen, con un período de oscilaciones de inclinación y dirección de aproximadamente 1.60 segundos, similar al resultado del análisis linealizado. La diferencia en el segundo decimal se debe a efectos de amplitud finita, no a problemas numéricos. Además, el movimiento de dirección tiene un pequeño desfase respecto al movimiento de inclinación.

2.3.2. ¿Cómo medir experimentalmente los momentos de inercia de la bicicleta?

En 2008, Kooijman, Schwab y Meijaard realizaron un experimento para validar el modelo matemático de forma experimental. En su trabajo [41], explican cómo midieron los parámetros de la bicicleta utilizando la ecuación del péndulo torsional:

$$I_m \ddot{\theta} + \frac{G}{l_p} \theta = 0,$$

donde:

- I_m : momento de inercia respecto al eje vertical,
- $\ddot{\theta}$: aceleración angular,
- G : módulo de elasticidad en cortante,
- l_p : longitud libre de la varilla.

Resolvieron la ecuación diferencial y obtuvieron:

$$I_m = \frac{G \cdot T^2 \cdot l_p}{4 \cdot l \cdot \pi^2},$$

donde:

- T : período de oscilación,
- l : longitud total de la varilla.

Si se conocen las constantes, el momento de inercia se calcula a partir del período de oscilación. Este experimento se repite en diferentes ejes para reconstruir el tensor de inercia:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix},$$

donde:

- I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} : momentos de inercia,
- I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} , etc.: productos de inercia.

2.3.3. Control LQR Discreto

El control óptimo, también conocido como regulador cuadrático lineal (LQR), tiene como objetivo seleccionar los valores de la matriz de ganancias K para realizar una retroalimentación de estados capaz de estabilizar un sistema.

Este método permite determinar la ley de control que minimiza la siguiente función de costo.

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}_k^T Q \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T R \mathbf{u}_k), \quad (2.29)$$

donde:

- \mathbf{x}_k es el vector de estados.
- \mathbf{u}_k el vector de entradas de control.
- Q es una matriz simétrica semidefinida positiva que pondera la penalización sobre los estados.
- R es una matriz simétrica definida positiva que pondera la penalización sobre el esfuerzo de control.

Las matrices Q y R pueden regular la prioridad de los estados y el desempeño del controlador. Es decir, se puede asignar mayor peso a ciertos estados para que el controlador los regule con mayor prioridad, o penalizar más el uso excesivo de los actuadores limitando su esfuerzo y así evitar que estos se saturen.

Para encontrar la solución mínima de la función de costo es necesario resolver la ecuación de Riccati, la cual en este caso, para ser implementada en un microcontrolador, debe ser resuelta de una forma discreta (ver Ecuación (2.30)).

En este apartado se explican las principales ecuaciones del LQR discreto y se describe brevemente su justificación, siguiendo la formulación clásica expuesta en [42].

Ecuación de Riccati Discreta

Para encontrar la solución óptima, en este caso mínima, es necesario resolver la ecuación de Riccati, la cual, si se desea implementar en un microcontrolador, debe ser resuelta de forma discreta de la siguiente forma:

$$P_{k+1} = Q + A_d^T P_k A_d - A_d^T P_k B_d \left(R + B_d^T P_k B_d \right)^{-1} B_d^T P_k A_d. \quad (2.30)$$

Donde:

- A_d y B_d son las matrices A y B en su forma discreta.
- P representa la solución óptima.
- P_{k+1} es la iteración siguiente de la solución óptima.

Este algoritmo se inicializa con

$$P_0 = Q, \quad (2.31)$$

y termina cuando se cumple la siguiente condición:

$$\|P_{k+1} - P_k\| < \epsilon, \quad (2.32)$$

donde ϵ es un valor de diferencia aceptable entre el valor anterior y el actual. Al finalizar el algoritmo, se calcula la ganancia mediante:

$$K = \left(R + B_d^T P B_d\right)^{-1} B_d^T P A_d. \quad (2.33)$$

La cual, después, se utiliza para determinar el valor de la entrada de control mediante:

$$u_k = -K x_k. \quad (2.34)$$

Equivalencia con Notación Alternativa

En algunas referencias se utiliza una notación distinta, pero equivalente, para describir el LQR discreto. Por ejemplo, en [42] se presenta la ecuación de Riccati en la forma

$$S_k = G_k^T \left(S_{k+1} - S_{k+1} H_k \left(H_k^T S_{k+1} H_k + R_k \right)^{-1} H_k^T S_{k+1} \right) G_k + Q_k, \quad (2.35)$$

donde:

- S_k corresponde a la matriz P_k ,
- G_k es la representación de la matriz de estado discreta A_d , y
- H_k es la representación de la matriz de control discreta B_d .

De igual forma, la ganancia del controlador se expresa en esta notación como

$$K_k = \left(H_k^T S_{k+1} H_k + R_k \right)^{-1} H_k^T S_{k+1} G_k, \quad (2.36)$$

lo que es conceptualmente idéntico a la Ecuación (2.33).

Observaciones

Es importante señalar que, a pesar de la similitud con la notación alternativa presentada en (2.33) y (2.36), el contenido conceptual es el mismo. Sin embargo, también es necesario aclarar que la ecuación (2.36) es una versión más generalizada, donde G_k y H_k pueden cambiar en el tiempo; por ende, existen diversas K_k . Por otro lado, en (2.33) se considera que A_d y B_d no cambian en el tiempo, por lo tanto, solo es necesario correr únicamente una vez el algoritmo (hasta cumplir la condición 2.32) y K representaría la solución óptima.

2.3.4. Control Adaptable

El control adaptable tiene como objetivo ajustar en tiempo real los parámetros de un controlador ante la presencia de incertidumbres o variaciones en el modelo de la planta. En este trabajo se estudiará el control adaptable indirecto, el cual es una extensión en tiempo real del procedimiento clásico de diseño de control, donde los estados son retroalimentados por una ganancia. En este esquema, la sintonización del controlador se

realiza en dos etapas: primero, se estima en línea el modelo de la planta a partir de las mediciones de entrada y salida mediante un predictor ajustable que minimiza el error de predicción; y segundo, se calculan los parámetros del controlador usando el modelo estimado. Este método se fundamenta en el principio de equivalencia por certeza, en el cual se trata la estimación de los parámetros de la planta como si fueran los valores reales, permitiendo así ajustar el controlador de manera directa.

Es importante señalar que para garantizar una correcta estimación paramétrica es necesario utilizar señales de excitación que estén compuestas por diversas componentes de frecuencia, fase y amplitud [43].

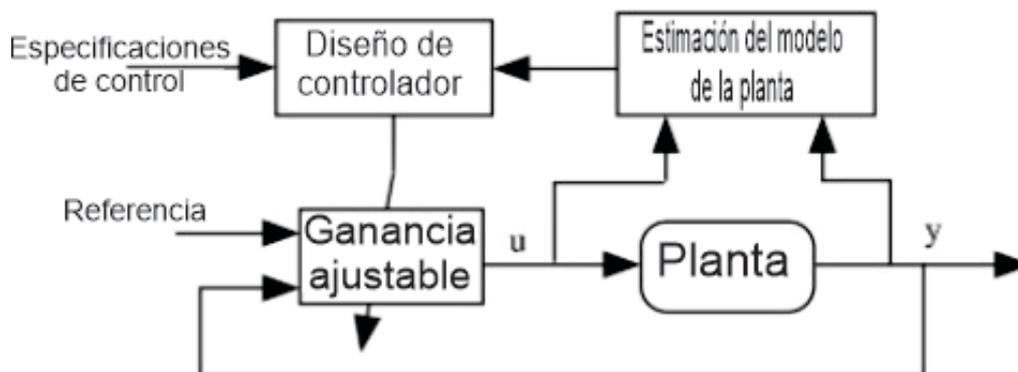


Figura 2.15: Bloques del control adaptable indirecto.

Se observa en la Figura 2.15 que son necesarios tres bloques para poder construir un Control Adaptable Indirecto. Para estimar el modelo de la planta es necesario un algoritmo de adaptación de parámetros (PAA por sus siglas en inglés); en este trabajo se estudiará el Algoritmo Recursivo de Mínimos Cuadrados (RLS) con factor de olvido.

El bloque de Control Ajustable en este caso es una Retroalimentación de estados, donde la matriz de retroalimentación K será estimada por el bloque de Diseño de control, la cual implementa un Control LQR.

Estructura del algoritmo RLS con factor de olvido

El algoritmo RLS permite estimar los parámetros de un sistema en forma recursiva. Su propiedad de olvido permite implementarlo en sistemas cuyos parámetros están variando con el tiempo. El factor de olvido se conoce como λ , el cual toma valores constantes entre 0 y 1, donde mientras más cercano sea a 1, más lento se olvidan los datos pasados. El algoritmo tiene la siguiente forma recursiva:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)\phi(t)\varepsilon_0(t+1) \quad (2.37)$$

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1} \left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi^T(t)F(t)}{\lambda_1 + \phi^T(t)F(t)\phi(t)} \right] \quad (2.38)$$

$$\varepsilon_0(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t) \quad (2.39)$$

Donde:

- $\hat{\theta}(t)$ es el vector de parámetros,

- $\phi(t)$ es el vector de regresores (entradas y/o salidas pasadas del sistema),
- $F(t)$ es la matriz de ganancia de adaptación,
- $\lambda_1 \in (0, 1]$ es el factor de olvido,
- $\varepsilon_0(t + 1)$ es el error de predicción a un paso,
- $y(t + 1)$ es la salida medida.

Estas ecuaciones surgen de minimizar la siguiente función de costo:

$$J(t) = \sum_{i=1}^t \lambda_1^{t-i} \left[y(i) - \hat{\theta}^T(t) \phi(i-1) \right]^2 \quad (2.40)$$

Donde:

- $y(i)$ es la salida medida en el tiempo i ,
- $\phi(i-1)$ es el vector de regresores.

“El efecto de $\lambda_1(t) < 1$ es introducir un peso cada vez más débil sobre los datos antiguos (para $i < t$). Por eso a λ_1 se le llama *factor de olvido*. El mayor peso lo tienen los errores más recientes.” [43, p. 67]

Condición de excitación persistente

El algoritmo RLS estima el vector de parámetros resolviendo un sistema de ecuaciones del tipo:

$$R(t) \hat{\theta}(t) = b(t) \quad (2.41)$$

donde:

$$R(t) = \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi^T(i) \quad (2.42)$$

Para encontrar $\hat{\theta}(t)$, la matriz $R(t)$ debe ser invertible, de modo que exista una solución única y estable.

Esto es posible si $\phi(t)$ cumple con la siguiente condición:

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1} \sum_{t=1}^{t_1} \phi(t) \phi^T(t) > 0 \quad (2.43)$$

donde n es la dimensión del vector $\phi(t)$. A este tipo de señales se les conoce como *señales persistentemente excitantes de orden n* . Esta condición implica que la *matriz de covarianza promedio de los datos* debe ser **positiva definida**, es decir, debe mantener *rango completo* en el tiempo [43, p. 115].

Interpretación espectral (criterio de Nyquist): Una señal de entrada $u(t)$ es persistentemente excitante si su contenido espectral cubre todo el ancho de banda desde $f = 0$ hasta $0,5f_s$, donde f_s es la frecuencia de Nyquist del sistema.

Criterio práctico con senoidales: Existen señales capaces de cubrir todo el espectro de frecuencias, como el caso del ruido blanco. Sin embargo, una señal puede considerarse una excitación persistente si está compuesta por múltiples sinusoidales de diferentes frecuencias. Esto solo es posible si el número de componentes armónicas p satisface las siguientes condiciones [43, p. 89]:

- $p \geq n/2$, si el orden n del sistema es par;
- $p \geq (n + 1)/2$, si el orden n es impar.

2.3.5. Discretización de Sistemas

En el diseño de sistemas de control digital es fundamental poder pasar de un modelo continuo a uno discreto. Uno de los métodos teóricos que permite obtener una representación exacta del sistema continuo en los instantes de muestreo se conoce como *muestreo exacto* o *discretización exacta*. Este método se fundamenta en la solución exacta de la ecuación de estado y, en teoría, garantiza que la respuesta del modelo discreto coincida con la respuesta del modelo continuo en los instantes de muestreo.

Solución Exacta y Discretización

La solución de la ecuación de estado con condición inicial $x(0)$ se puede obtener mediante la transformada de Laplace y se expresa de la siguiente manera (véase, por ejemplo, [44]):

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (2.44)$$

Si asumimos que la entrada $u(t)$ se mantiene constante durante cada intervalo de muestreo, es decir, para

$$t \in [kT, (k+1)T), \quad u(t) = u(kT),$$

entonces, evaluando la solución en $t = (k+1)T$ obtenemos:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B u(kT). \quad (2.45)$$

Esta expresión permite definir las matrices del sistema discreto:

$$A_d = e^{AT}, \quad (2.46)$$

$$B_d = \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B, \quad (2.47)$$

$$C_d = C, \quad D_d = D. \quad (2.48)$$

Así, el sistema discreto queda descrito por:

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k], \quad (2.49)$$

$$y[k] = C_d x[k] + D_d u[k]. \quad (2.50)$$

Aunque el método es *exacto* en teoría, el cálculo de la matriz exponencial e^{AT} y de la integral:

$$\int_0^T e^{A\tau} d\tau$$

puede resultar computacionalmente costoso para sistemas de alta dimensión. Por ello, en aplicaciones prácticas se emplean métodos aproximados (como la aproximación de Euler o la transformación de Tustin) para discretizar el sistema.

Capítulo 3

Estado del Arte

En 2016 comenzó a haber un aumento en las investigaciones sobre vehículos autónomos. Un claro ejemplo fue la llegada de la marca Tesla al mercado, lo que impulsó a las empresas automotrices a innovar en esta área. Algunas compañías como Honda, Yamaha y BMW intentaron presentar sus propuestas de motocicletas autónomas; sin embargo, no tuvieron éxito, y hasta la fecha no existen motocicletas autónomas disponibles para el público general. En este capítulo se analizará la tecnología que utilizaron todos estos prototipos.

3.1. Honda Riding Assist

El *Honda Riding Assist* es un sistema de autoestabilidad que ajusta la geometría de la motocicleta y el manejo del volante para mantener el equilibrio sin giroscopios, consiguiendo reducir el peso [45].



(a) Vista lateral del Honda Riding Assist presentado en 2017 [46].



(b) Prueba de estabilidad donde el piloto permanece de pie sobre la motocicleta sin sujetar el manubrio, que se mantiene estabilizada [46].

Figura 3.1: Tecnología Honda Riding Assist.

3.1.1. Principios de Funcionamiento

- **Control mediante torques aplicados al manubrio:** El *steering torque*, como se ha visto anteriormente en las investigaciones de Ruijs y Pacejka, muestra una relación directa entre la dirección del manubrio y el ángulo de inclinación de la motocicleta, siempre que esta se desplace a velocidades elevadas. Por efectos centrífugos, al girar a la izquierda se experimenta una fuerza hacia la derecha, y viceversa, debido a la inercia del vehículo. Honda aprovecha este fenómeno físico para generar torques capaces de levantar la motocicleta en caso de que comience a caer [47].
- **Control de Geometría Variable:** La longitud del *trail* es la distancia entre el punto donde una línea imaginaria que pasa por el eje de dirección toca el suelo y el punto donde contacta el neumático delantero (ver Figura 3.2). Un *trail* más largo generalmente proporciona mayor estabilidad a altas velocidades, ya que facilita al piloto mantener la motocicleta en línea recta. Por otro lado, un *trail* más corto puede hacer que la motocicleta sea más ágil y manejable en giros cerrados. Finalmente, es posible tener un *trail* negativo, lo que produce cambios en la dinámica de la motocicleta, permitiendo que los giros del manubrio generen inclinaciones en la moto.

A bajas velocidades o en reposo, la fuerza centrífuga no es suficiente para mantener la moto erguida. Un actuador ajusta el ángulo de la horquilla y la distancia entre ejes para mantenerla vertical. Los ángulos de las horquillas permiten:

- **Trail positivo:** Ideal para altas velocidades, donde los torques aplicados al manubrio afectan la inclinación de la motocicleta a través de efectos centrífugos (ver Figura 3.2a).
- **Trail negativo:** Favorece la estabilidad a bajas velocidades al generar una relación directa entre los torques aplicados al manubrio y la inclinación de la moto (ver Figura 3.2b).



(a) Posición de horquillas ideal para altas velocidades [48].



(b) Configuración ideal para estabilidad a bajas velocidades [48].

Figura 3.2: Comparación entre las posiciones de las horquillas.

- **Steer-by-wire:** Es una tecnología de dirección aplicada en vehículos donde no existe una conexión mecánica directa entre el volante y la rueda delantera. Se desacopla el manubrio de la rueda, sensores miden el ángulo del volante, mientras un motor ajusta la dirección del vehículo en consecuencia. En esta motocicleta,

este sistema desacopla el manubrio de las horquillas delanteras a bajas velocidades, evitando que el conductor afecte la estabilidad, dejando esta tarea de control a la computadora de la motocicleta [47].

3.2. Yamaha Motobot

El *Yamaha Motobot* es un robot diseñado para manejar motocicletas de forma autónoma, imitando las acciones de un piloto humano, como el control de la dirección y el ajuste del centro de masa. Utiliza actuadores de alta precisión y una variedad de sensores para mantener la estabilidad y controlar la motocicleta [49].

3.2.1. Funcionamiento de MOTOBOT

El sistema se interconecta mediante cinco actuadores a la motocicleta, lo que permite manipular el acelerador, el freno, el clutch, el pedal de cambios y el manubrio. Además, cuenta con sensores de velocidad, revoluciones por minuto (RPM) del motor, acelerómetros y GPS. La empresa asegura que este sistema es controlado mediante algoritmos de machine learning [49].



Figura 3.3: Yamaha Motobot en acción en una pista de carreras. [49].

En los videos presentados por la empresa se observa que el robot cuenta con una geometría antropomórfica, sin embargo, no parece que pueda hacer ajustes en el centro de masa, al igual que los humanos. En la página oficial, se menciona que tiene 5 actuadores; 4 de ellos controlan la velocidad de la rueda trasera, mientras que solo uno estabiliza la motocicleta mediante torques aplicados al manubrio.

3.3. MOTOROiD

Yamaha desarrolló una motocicleta llamada MOTOROiD, presentada en 2017, la cual incorpora un sistema de control activo para mantener el equilibrio incluso en condiciones de conducción a baja velocidad. Este vehículo representa un avance significativo en la estabilización autónoma de motocicletas, un desafío importante en el contexto del desarrollo de nuevas tecnologías de movilidad [50].



Figura 3.4: MOTOROiD.

3.3.1. Principio de funcionamiento

El MOTOROiD utiliza un sistema denominado *Active Mass Center Control System* (AMCES), el cual incorpora un eje de rotación que permite variar activamente el centro de gravedad de la motocicleta. Este sistema permite que la motocicleta se estabilice automáticamente durante la conducción a baja velocidad, incluso cuando está detenida. Básicamente el sistema AMCES mueve el contrapeso para equilibrar el vehículo [50].

Como se puede apreciar en la Figura 3.5, existen dos ángulos, Q_1 y Q_2 , que juegan un papel crucial en la descripción de la inclinación y el movimiento de oscilación del MOTOROiD respecto a su eje de rotación. El ángulo Q_1 representa la inclinación lateral de la motocicleta respecto al eje vertical del suelo y es fundamental para el control del balance lateral, especialmente a bajas velocidades [51]. Por otro lado, Q_2 es el ángulo al que apunta el AMCES con respecto a la inclinación de la motocicleta. La combinación de estos dos ángulos desplaza el centro de gravedad, lo que genera fuerzas laterales capaces de levantar la motocicleta incluso a velocidades bajas o nulas [51].

Este sistema se modela como un péndulo invertido y, mediante control PID, LQR e incluso modos deslizantes, la motocicleta puede estabilizarse [50].

Esta motocicleta juega un papel fundamental en la investigación, ya que sí es capaz de mantener el equilibrio en reposo.

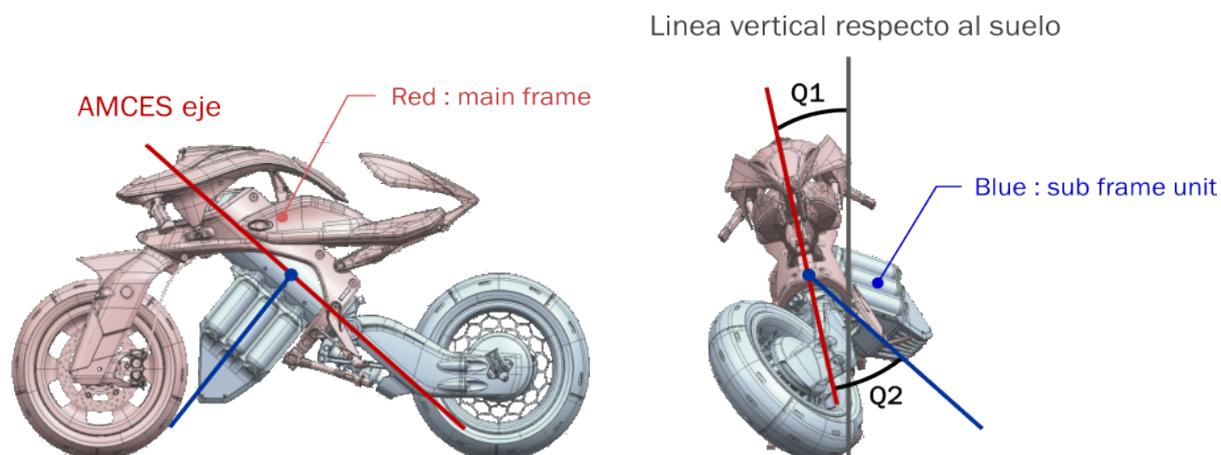


Figura 3.5: Representación del eje AMCES que varía el centro de gravedad.

3.4. BMW Vision Next 100

3.4.1. Introducción

El modelo BMW Vision Next 100 fue una propuesta de la empresa para representar su perspectiva de los cambios en los vehículos dentro de cien años. La motocicleta contaba con gafas de asistencia visual, geometrías adaptativas y un sistema de autoequilibrio [52].



Figura 3.6: Prototipo de la BMW Motorrad VISION NEXT 100. [53].

3.4.2. Principio de Funcionamiento de la Estabilidad

En entrevistas con el equipo de diseño de esta motocicleta se menciona que la BMW NEXT Vision mantiene el equilibrio gracias al uso de giroscopios, los cuales pueden generar fuerzas que mantienen la moto en pie [54].

3.4.3. Geometrías Variables

En [55] se menciona que esta motocicleta cuenta con un marco flexible (*Flexframe*) capaz de contraerse y expandirse según las necesidades del piloto. A bajas velocidades este se comporta de una manera más suave para que el piloto pueda tener mayor control, mientras que a altas velocidades se endurece para darle más estabilidad a la motocicleta. En [56] se indica que el uso de este marco adaptable favorece la seguridad al motociclista.

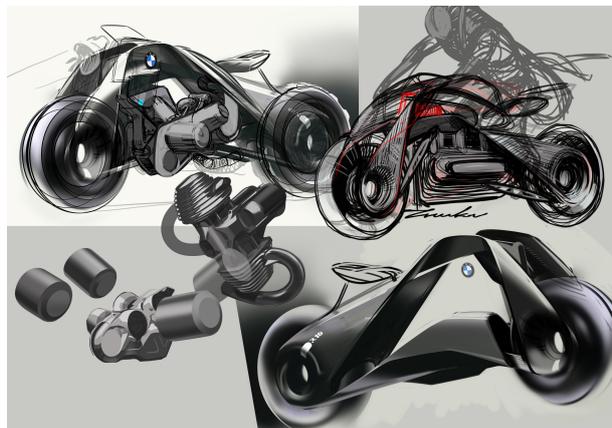


Figura 3.7: Boceto de la vista interior.

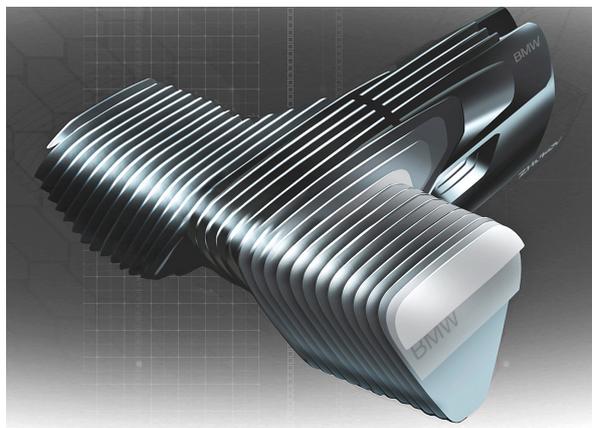


Figura 3.8: Boceto con estilo realista de las geometrías variables.

Bocetos del interior de la BMW Vision Next 100. [53].

3.4.4. Discusión

La información oficial proporcionada por BMW sobre el funcionamiento técnico detrás del sistema de autoequilibrio es limitada.

No se encontraron pruebas reales que muestren al sistema estabilizándose autónomamente. En la presentación del concepto durante el evento ICON en Los Ángeles, se presentó la motocicleta en vivo; sin embargo, los reportes gráficos de ese evento no muestran el sistema de autobalanceo en funcionamiento [54].

En [54], aunque no es una fuente oficial de BMW, se cita a Edgar Heinrich, Director de Diseño de BMW Motorrad, quien menciona que la motocicleta funciona mediante giroscopios. Sin embargo, no se encontraron fotos del interior de la motocicleta que comprueben la existencia de dichos giroscopios. En los videos presentados por la empresa, tampoco se observa control por dirección de manubrio, ya que en la única escena en la que se ve a la piloto parada sobre la motocicleta sin sujetar el manubrio no hay ningún actuador que compense el equilibrio, ni moviendo el manubrio ni cambiando la geometría de la motocicleta; de hecho, se ve completamente quieta, como si las perturbaciones generadas por la piloto al ponerse en pie fueran completamente suprimidas, como se muestra en la Figura 3.9.

La integración de elementos que puedan variar su geometría a la altura del cuadro podría estar relacionada con el control mediante masas móviles, lo que podría cambiar el centro de masa y estabilizar la moto. Sin embargo, las páginas oficiales no confirman que este sea el propósito de esta tecnología. Probablemente este prototipo solo fue una representación conceptual de las tecnologías que aspiraba tener BMW en 2016; la tecnología de la época todavía no estaba lista para ser plasmada en un vehículo comercial.



Figura 3.9: BMW Vision Next 100 siendo estabilizada mientras una piloto se mantiene de pie sin sujetar el manubrio, tomado de su video publicitario. [57].

3.5. BMW R1200GS

Esta motocicleta en 2018 se presentó durante el BMW Motorrad Techday, la cual demostró ser capaz de acelerar, desplazarse y mantener el equilibrio por sí sola. Fue desarrollada por el ingeniero Stefan Hans y su equipo, los cuales indican que su propósito es ayudar al conductor en situaciones de peligro y no realizar una conducción completamente autónoma [58].



Figura 3.10: BMW R 1200 GS durante una demostración en el BMW Techday 2018. [58].

3.5.1. Principio de funcionamiento

En [58], [59], [60] se explica que la motocicleta utiliza sensores giroscópicos e inerciales para medir la inclinación. Además, se implementan actuadores para ajustar la dirección del manubrio y la fuerza aplicada a las suspensiones. En dichos reportes se menciona que la base detrás de la toma de decisiones de esta moto es una ley de control predictivo, la cual puede predecir en el futuro el comportamiento del sistema.



Figura 3.11: Vista interior del sistema.



Figura 3.12: Vista general del sistema.

Sistema de estabilización de la BMW R 1200 GS autónoma. [59].

3.5.2. Análisis

La BMW R 1200 GS autónoma utiliza motores que aplican torques al manubrio, generando fuerzas centrífugas similares a las empleadas por Honda para estabilizar la motocicleta en movimiento. Sin embargo, es probable que el sistema no pueda mantener el equilibrio cuando la motocicleta está en reposo. Esto se evidencia en los videos presentados por BMW, donde se observa que, al estar detenida, la moto es sostenida por técnicos [60].

3.6. Cuadro Comparativo

Motocicl	Funcionamiento	¿Estabilización en reposo?	Ventajas adicionales	Eficiencia energética
Honda Riding Assist	<i>Steering torque</i> más geometría variable.	Sí, gracias al ajuste de la horquilla.	Preserva la experiencia de conducción sin el uso de giroscopios.	Alta, solo emplea dos motores.
Yamaha Moto-bot	El robot aplica <i>steering torque</i> .	No, requiere asistencia en reposo.	Capacidad de aprender y optimizar tiempos de carrera con <i>machine learning</i> .	Media, agrega varios motores para mover a todo el robot.
Yamaha Moto-roid	Ajusta el centro de gravedad con un contrapeso móvil.	Sí, puede estabilizarse en movimiento y en reposo.	Uso de control PID y LQR, con mejoras recientes con FSLQ.	Media, necesita motores más potentes para mover la masa activa.
BMW Vision Next 100	Giroscopios para mantener el equilibrio.	Sí.	Estructura con geometrías variables que se ajustan automáticamente a las condiciones de conducción.	Baja, se necesita mucha energía para mover giroscopios.
BMW R 1200 GS	<i>Steering torque</i> .	No, necesita asistencia humana.	Uso de control de modelo predictivo.	Alta, solo ocupa dos motores.

Cuadro 3.1: Cuadro comparativo de las motocicletas con sistemas de estabilización.

3.7. Conclusiones sobre el Estado del Arte

Hasta ahora, ninguna de las empresas ha podido comercializar estos productos. Esto demuestra indirectamente que, hasta la fecha, todavía falta mucha investigación por realizarse en este campo para que los usuarios puedan disponer de estos vehículos de forma segura.

El uso de giroscopios queda descartado; hasta ahora, solo una empresa (BMW) los ha implementado, y no existen pruebas suficientes que respalden la viabilidad de ese diseño. Además, como se mostró en las investigaciones previas, la implementación de giroscopios para controlar la estabilización en motocicletas implicaría un costo significativo en términos de peso y energía.

La tecnología predominante es el *steering torque* (mecanismo que mueve el manubrio). Desde mi perspectiva, esta tecnología es fundamental para el futuro de las motocicletas

autónomas, ya que aborda simultáneamente dos problemáticas: la dirección del vehículo y la estabilidad. Sin embargo, esta solución aún no es suficiente para mantener la motocicleta estable a bajas velocidades. Hasta ahora, Honda es la única empresa que ha logrado mover autónomamente un vehículo de dos ruedas a diferentes velocidades con el menor costo energético.

Dada la tendencia evidente en el uso del *steering torque*, esta tecnología presenta un interés considerable para su aplicación en el trabajo actual.

Capítulo 4

Diseño

4.1. Diseño nivel concepto

Se busca crear un prototipo de bicicleta capaz de mantenerse en equilibrio mediante la técnica revisada en el marco teórico *Steering Torque*. Esto debe conseguirlo incluso si cambia la carga o el peso del ciclista. Para llevar a cabo este prototipo, son necesarios los siguientes bloques con sus respectivos requerimientos:

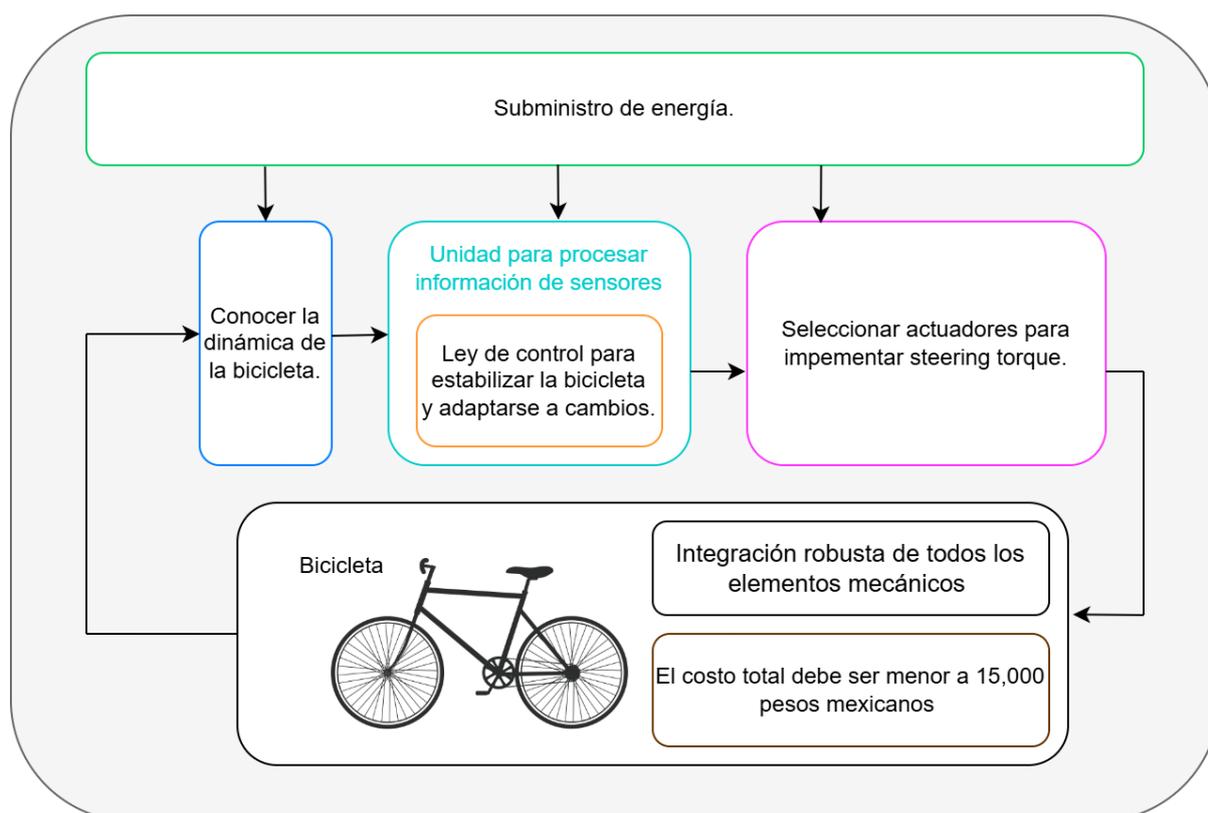


Figura 4.1: Diagrama que representa las interconexiones de los requerimientos.

4.1.1. Sistemas y requerimientos para la bicicleta de estabilidad autónoma

Bloque	Requerimientos
Instrumentación	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Conocer la dinámica de la bicicleta en tiempo real.
Control	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ley de control que establezca la bicicleta basada en el modelo matemático de la bicicleta. ▪ Adaptación a cambios en la masa de la bicicleta.
Potencia	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Implementar actuadores para realizar la técnica <i>Steering Torque</i>. ▪ Seleccionar etapas de potencia para poder acoplar las señales del microcontrolador a los motores.
Unidad de Procesamiento (μC)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Procesar información de la ley de control. ▪ Procesar información de los sensores. ▪ Enviar señales de control a los actuadores. ▪ Debe integrar un sistema operativo en tiempo real para administrar las tareas.
Administrador de Energía (Energía)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Minimizar tamaño de las baterías. ▪ Mantener la bicicleta encendida por 30 min. ▪ Contar con protecciones para evitar altos consumos de corriente en caso de cortos circuitos o fallas en los motores.
Estructura mecánica	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sujetar todos los componentes a la bicicleta.
Costos	<ul style="list-style-type: none"> ▪ El sistema no debe superar los 15,000 MXN.

Cuadro 4.1: Sistemas y requerimientos para la bicicleta de estabilidad autónoma.

4.2. Diseño a Nivel de Sistema

A partir de los requerimientos previos surgen los siguientes sistemas:

- Sistema de Potencia

- Sistema de Instrumentación
- Sistema de Control
- Sistema de Procesamiento
- Sistema de Energía
- Sistema Mecánico

4.2.1. Sistema de Actuadores de la Bicicleta

Este sistema define los motores que generan las fuerzas necesarias para estabilizar la bicicleta. Se seleccionó la técnica de Steering torque, que requiere dos actuadores específicos: uno para mover el manubrio y otro para controlar el avance de la bicicleta.



Figura 4.2: Fuerzas necesarias para implementar Steering torque.

Motor llanta

Con el fin de seleccionar la potencia y par del motor, se realizó una investigación donde se consultaron varios modelos de motores. En el Cuadro 4.2 se pueden observar los diferentes torques y pares de cada motor.

Fabricante	Modelo	Par [Nm]	Potencia [W]
Bosch, [61]	Performance Line CX Gen5	85	600
DJI, [62]	Anvinox M1	105	850
Panasonic, [63]	GX Ultimate	95	250
Specialized, [64]	SL 1.2	50	240
Yamaha [65]	PW-X3	85	250
PasionEbikes, [66]	Milli 150V	35	1500

Cuadro 4.2: Cuadro de especificaciones de motores seleccionados para bicicletas eléctricas.

A partir de esta información se estableció que:

- El torque mínimo requerido para el motor es de 35 Nm, ya que este valor corresponde al menor torque entre los motores analizados y asegura que la bicicleta, junto con un piloto, consigan desplazarse.
- La potencia mínima se estableció en 250 W, la cual corresponde al menor valor encontrado de los motores revisados.
- La potencia máxima del motor se determinó en 1000 W, ya que existe una relación directa entre la potencia y el costo. Comprar un motor de mayor potencia provocaría rebasar el límite presupuestal para este proyecto.

Motor Manubrio

La elección del motor se basó en dos características importantes: la potencia y el torque. Se tomaron como referencia las siguientes investigaciones:

Def.	Motor	Potencia	Par (Nm)
Appelman (2012)	Maxon DC-EC 90	90 W	2.6 Nm
Tani et al. (2016)	No especificado	No especificado	20 Nm (máximo)
Baquero et al. (2017)	No especificado	No especificado	6 Nm (máximo)

Cuadro 4.3: Cuadro comparativo de motores y características de estabilización [20], [67], [68].

Con base en estos datos, se establecieron las siguientes especificaciones técnicas como punto de partida para esta aplicación:

- Par mínimo de 2.6 Nm.
- Potencia mínima de 90 W.

4.2.2. Sistema de Instrumentación

Este subsistema permite la medición de los estados y los parámetros medibles de la bicicleta, lo cual es fundamental para comprender y controlar su dinámica. La instrumentación es necesaria para reconstruir el modelo matemático. Es necesario conocer las frecuencias de muestreo de nuestras variables para poder seleccionar correctamente un sensor. Para cubrir estos aspectos, se utilizan tres tipos de mediciones:

- **Mediciones del manubrio** ($\delta, \dot{\delta}$).
- **Mediciones de inclinación** ($\phi, \dot{\phi}$).
- **Velocidad de la llanta trasera** (v).

El diagrama de la Figura 4.3 muestra la disposición de los sensores empleados. Las derivadas necesarias se calculan mediante procesamiento digital de señales.

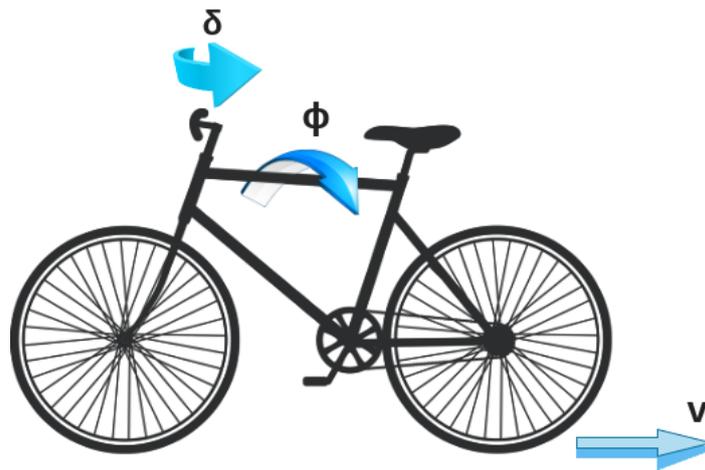


Figura 4.3: Diagrama de instrumentación que muestra los sensores para obtener δ , ϕ y v .

Cálculo de la frecuencia de muestreo de la velocidad de la llanta trasera.

Para realizar esta estimación es necesario pasar de la velocidad tangencial (v) a velocidad angular (ω).

Algunos datos a considerar son:

- La velocidad máxima alcanzada por la bicicleta es de 30 km/h.
- La llanta es de rodada 26; esta es la dimensión del diámetro de la llanta en pulgadas.

Primero, se convierte la velocidad al sistema internacional de unidades. La relación de conversión es:

$$1 \text{ km/h} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s.} \quad (4.1)$$

Por lo tanto:

$$v = 30 \cdot \frac{1}{3,6} = 8,3333 \text{ m/s.} \quad (4.2)$$

Se determina el radio de la llanta, también en el sistema internacional. Dado que 1 pulgada = 0,0254 m, el diámetro de la llanta es:

$$d = 26 \cdot 0,0254 = 0,6604 \text{ m.} \quad (4.3)$$

El radio de la llanta es:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0,6604}{2} = 0,3302 \text{ m.} \quad (4.4)$$

Con el radio conocido, se calcula la frecuencia angular ω mediante:

$$v = r \cdot \omega. \quad (4.5)$$

Despejando ω :

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (4.6)$$

Sustituyendo los valores:

$$\omega = \frac{8,3333}{0,3302} \approx 25,24 \text{ rad/s.} \quad (4.7)$$

Por último, se convierte la frecuencia angular en hertz f utilizando la relación:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (4.8)$$

Sustituyendo:

$$f = \frac{25,24}{2\pi} \approx 4,02 \text{ Hz}. \quad (4.9)$$

Con base en los datos obtenidos anteriormente, tenemos un ancho de banda de frecuencias desde 0 a 4 Hz. El criterio de Nyquist nos indica que el valor mínimo para poder reconstruir esta señal es dos veces la frecuencia máxima del sistema.

$$f_{\text{muestreo}} = 2 \cdot f = 8,04 \text{ Hz}. \quad (4.10)$$

Cálculo de la frecuencia de muestreo de δ y ϕ

En este caso, el proceso es un poco más elaborado, ya que es necesario extraer los valores propios del Sistema de Procesamiento. Es necesario comenzar por la construcción de la matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2) & -\mathbf{M}^{-1}v\mathbf{C}_1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Con el fin de estimar las frecuencias, se tomaron como referencia los parámetros de la bicicleta del trabajo de [20]:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4,09537 & 0,31541 \\ 0,31541 & 0,16216 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4,11551 \\ -0,58511 & 0,51821 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} -61,76730 & -4,80033 \\ -4,80033 & -1,31521 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6,69605 \\ 0 & 0,57886 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A medida que se incrementa la velocidad de desplazamiento v [m/s], la frecuencia natural del sistema aumenta. Por lo tanto, se considera que la bicicleta alcanzará una velocidad máxima de 8.3 m/s, valor calculado anteriormente.

Los valores propios (o eigenvalores) se obtienen a partir de la siguiente identidad:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad (4.16)$$

donde s es la variable escalar compleja de Laplace, la cual en este caso contiene los valores propios (λ_i) del sistema, \mathbf{I} es la matriz identidad, y \mathbf{A} es la matriz del sistema.

Los valores propios pueden ser reales o complejos:

- Si el valor propio es real ($\lambda = \pm\sigma$), entonces σ representa un término de decaimiento o crecimiento exponencial donde no existen oscilaciones.
- Si el valor propio es complejo ($\lambda = \pm\sigma \pm j\omega$), la parte imaginaria (ω) representa la frecuencia natural del sistema.

Entonces evaluamos \mathbf{M} , \mathbf{K}_0 , \mathbf{C}_1 , \mathbf{K}_2 y $v = 8,3333$ m/s en (4.11) y resolvemos la ecuación (4.16) para encontrar los valores propios, obteniendo:

- $\lambda_1 = -0,8020 + j16,8161$
- $\lambda_2 = -0,8020 - j16,8161$
- $\lambda_3 = -13,3140$
- $\lambda_4 = 0,0895$

La parte imaginaria de los valores propios (ω) está en radianes por segundo (rad/s). Para convertir a hertz (Hz), se utiliza la relación:

$$f = \frac{|\omega|}{2\pi} \quad (4.17)$$

Por lo tanto, la frecuencia natural del sistema a su velocidad máxima sería:

$$f = \frac{16,8161}{2\pi} = 2,674 \text{ [Hz]} \quad (4.18)$$

Y la frecuencia de muestreo mínima para el muestreo de esta señal es:

$$f_{\text{muestreo}} = f \times 2 = 5,35 \text{ [Hz]} \quad (4.19)$$

Especificaciones técnicas de la instrumentación

- **Mediciones del manubrio:** Se requiere medir el ángulo (δ) y la velocidad angular ($\dot{\delta}$) mediante un encoder incremental. Debe contar con una resolución mínima de 100 PPR. Además, es indispensable contar con sensores de final de carrera para poder calibrar los encoders cada que se encienda la bicicleta.
- **Mediciones de la inclinación:** Es indispensable obtener el ángulo de inclinación (ϕ) y su velocidad angular ($\dot{\phi}$) mediante un sensor MPU a una frecuencia mínima de 5.35 Hz y resolución de al menos $1[\text{rad}]$.
- **Velocidad de la llanta trasera:** Se necesita poder medir la velocidad tangencial de la rueda trasera (v) con un sensor de efecto Hall o infrarrojo capaz de medir interrupciones de 8 Hz.

4.2.3. Sistema de Procesamiento

La unidad central de procesamiento realiza el procesamiento digital de las señales de los sensores, ejecuta los algoritmos de control y activa los actuadores.

- **Periféricos de comunicación:**
 - **I2C:** Un canal para el sensor IMU.
 - **SPI:** Un canal para el potenciómetro digital.
- **Timers con modos especializados:**
 - **Modo encoder:** Para el manejo del encoder.

- **PWM:** Timers para generar señales PWM para control de las velocidades de los motores.
- **Interrupciones por GPIO:** Necesarios para colocar finales de carrera y sensor de RPMs.
- **Puertos configurables:** Periféricos necesarios para implementar comunicación I2C, SPI, GPIO y PWM.

4.2.4. Sistema de Energía

Se requiere diseñar una batería para suministrar energía a los demás sistemas. Es necesario que cuente con protecciones contra sobrecarga para prevenir cortocircuitos. Por último, debe ser ligera para minimizar el peso de toda la bicicleta.

Para estimar la energía en Wh que debe proporcionar el banco de baterías, se considera únicamente la potencia nominal de los dos motores. El consumo energético del sistema de instrumentación y del Sistema de Procesamiento se considera despreciable en comparación con los actuadores.

En el Cuadro 4.5 se observa la potencia considerada para estos motores.

Componente	Potencia máxima (W)
Motor llanta	1000
Motor manubrio	200
Total	1200

Cuadro 4.4: Datos de los motores utilizados en el sistema.

Para garantizar un funcionamiento de 30 minutos, la energía en Wh se puede calcular mediante:

$$E = P \cdot t, \quad (4.20)$$

donde E es la energía en watt-hora (Wh) y t es el tiempo en horas. Sustituyendo la potencia máxima consumida y media hora de operación:

$$E = 1200 \cdot 0,5 = 600 \text{ Wh}. \quad (4.21)$$

El banco de baterías debe ser capaz de suministrar mínimo 600 Wh para garantizar el funcionamiento durante 30 minutos.

4.2.5. Sistema de Procesamiento

La unidad central de procesamiento realiza el procesamiento digital de las señales de los sensores, ejecuta los algoritmos de control y activa los actuadores.

- **Periféricos de comunicación:**
 - **I2C:** Un canal para el sensor IMU.
 - **SPI:** Un canal para el potenciómetro digital.
- **Timers con modos especializados:**

- **Modo encoder:** Para el manejo del encoder.
- **PWM:** Timers para generar señales PWM para control de las velocidades de los motores.
- **Interrupciones por GPIO:** Necesarias para colocar finales de carrera y sensor de RPMs.
- **Puertos configurables:** Periféricos necesarios para implementar comunicación I2C, SPI, GPIO y PWM.

4.2.6. Sistema de Energía

Se requiere diseñar una batería para suministrar energía a los demás sistemas. Es necesario que cuente con protecciones contra sobrecarga para prevenir cortocircuitos. Por último, debe ser ligera para minimizar el peso de toda la bicicleta.

Para estimar la energía en Wh que debe proporcionar el banco de baterías, se considera únicamente la potencia nominal de los dos motores. El consumo energético del sistema de instrumentación y del Sistema de Procesamiento se considera despreciable en comparación con los actuadores.

En el Cuadro 4.5 se observa la potencia considerada para estos motores.

Componente	Potencia máxima (W)
Motor llanta	1000
Motor manubrio	200
Total	1200

Cuadro 4.5: Datos de los motores utilizados en el sistema.

Para garantizar un funcionamiento de 30 minutos, la energía en Wh se puede calcular mediante:

$$E = P \cdot t, \quad (4.22)$$

donde E es la energía en watt-hora (Wh) y t es el tiempo en horas. Sustituyendo la potencia máxima consumida y media hora de operación:

$$E = 1200 \cdot 0,5 = 600 \text{ Wh}. \quad (4.23)$$

El banco de baterías debe ser capaz de suministrar mínimo 600 Wh para garantizar el funcionamiento durante 30 minutos.

4.2.7. Sistema Mecánico

Es el encargado de sujetar y proteger todos los componentes de la bicicleta, con el propósito de mantener más organizado este apartado. Se divide en tres subsistemas:

- **Llanta:** Es necesario realizar piezas para sujetar el motor, las transmisiones de potencia y realizar adaptaciones para colocar la instrumentación relacionada con la velocidad de la llanta.
- **Manubrio:** Debe fijar el motor al manubrio, seleccionar las transmisiones necesarias y sujetar sensores relacionados con las mediciones del manubrio.

- Electrónica: Es indispensable realizar cajas que protejan los circuitos, el microcontrolador y las baterías, así como fijar estos componentes al cuadro de la bicicleta.

4.2.8. Sistema de Control

Con base en la información obtenida por los sensores, este sistema calcula las acciones correctivas que deben realizar los motores. Es indispensable que la ley de control pueda ajustarse a cambios en el sistema o a perturbaciones no modeladas. El control adaptable con factor de olvido ajusta su prioridad ante mediciones recientes. Esto mejora el rendimiento del sistema, ya que puede autoajustarse a las condiciones que está percibiendo en el momento, olvidando datos o fenómenos físicos pasados que no tengan tanta relevancia.

En el capítulo 2 se estudió la existencia de un rango de velocidades donde es posible estabilizar una bicicleta sin entrada de control (sin conductor). En la Figura 4.4 se observa esta región de estabilidad entre $4 \frac{m}{s}$ y $8 \frac{m}{s}$, en estas gráficas utilicé los parámetros de la bicicleta de [20]. Este trabajo busca ampliar dicha zona mediante la implementación de un control adaptable en el manubrio, como se muestra en la Figura 4.5a. Además, se aplicará un control PI en la llanta trasera para acelerar la convergencia del sistema hacia la nueva zona de estabilidad lo más pronto posible, Figura 4.5b.

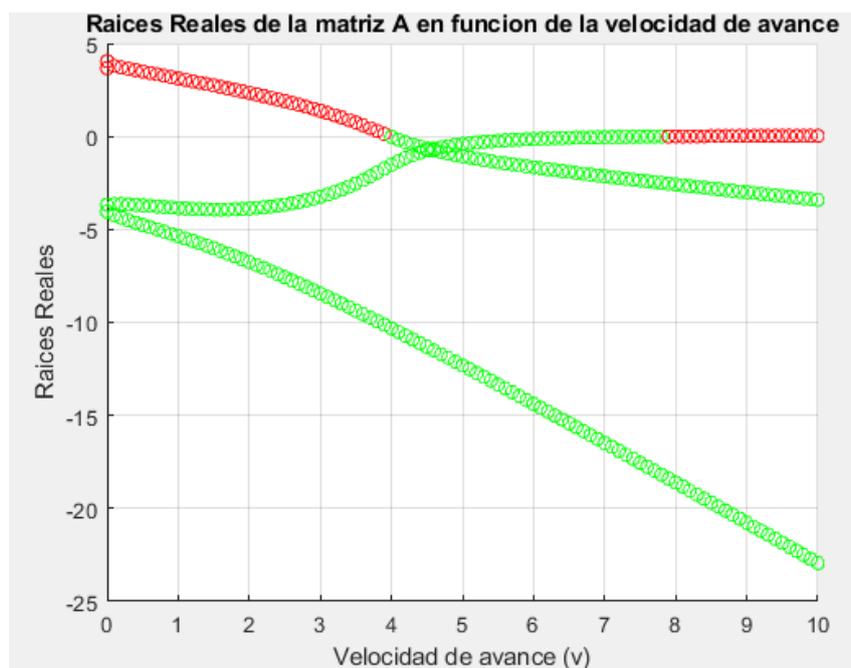
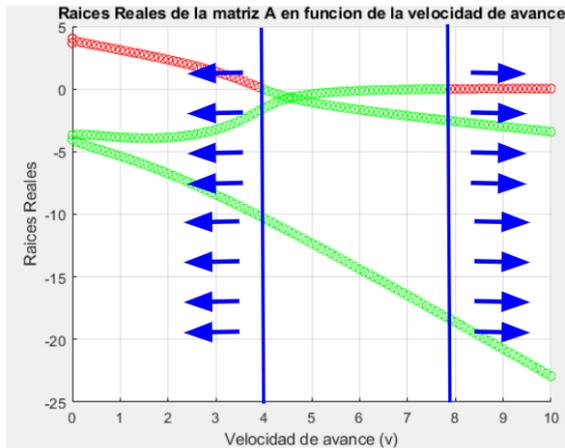
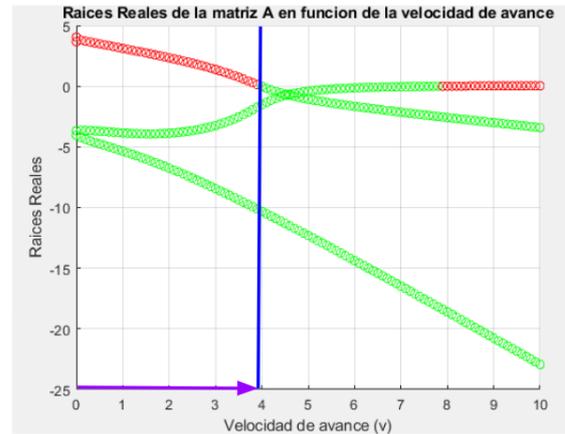


Figura 4.4: Ploteo de ubicación de polos al variar la velocidad de la bicicleta propuesta por [20].



(a) Diagrama del sistema de control adaptable. Busca aumentar la región de estabilidad.



(b) Diagrama del sistema de control PI. Busca que la llanta de la bicicleta alcance la región de estabilidad lo más pronto posible.

Figura 4.5: Estrategia de control: comparación entre el control adaptable y el control PI.

A continuación, en la Figura 4.6 se muestra a grandes rasgos un esquema de control donde se realizará un control PI para estabilizar la velocidad de la llanta y un control adaptable indirecto para realizar movimientos sobre el manubrio y poder estabilizar el ángulo de inclinación de la bicicleta.

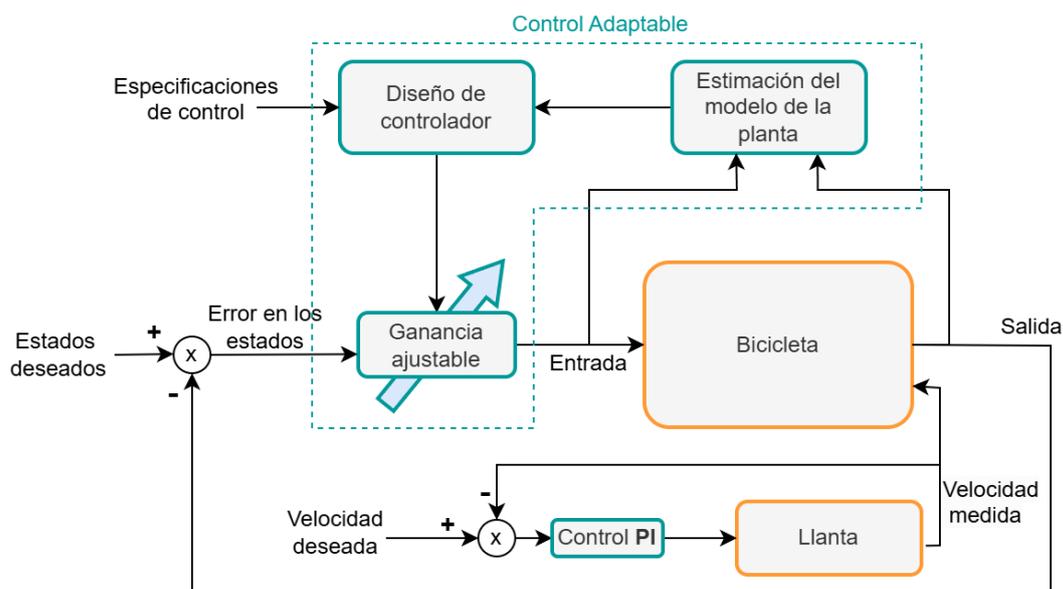


Figura 4.6: Estrategia de control simplificada.

4.2.9. Resumen de los Requerimientos Técnicos Propuestos para los Sistemas y Subsistemas

Diagrama Diseño a Nivel Sistema

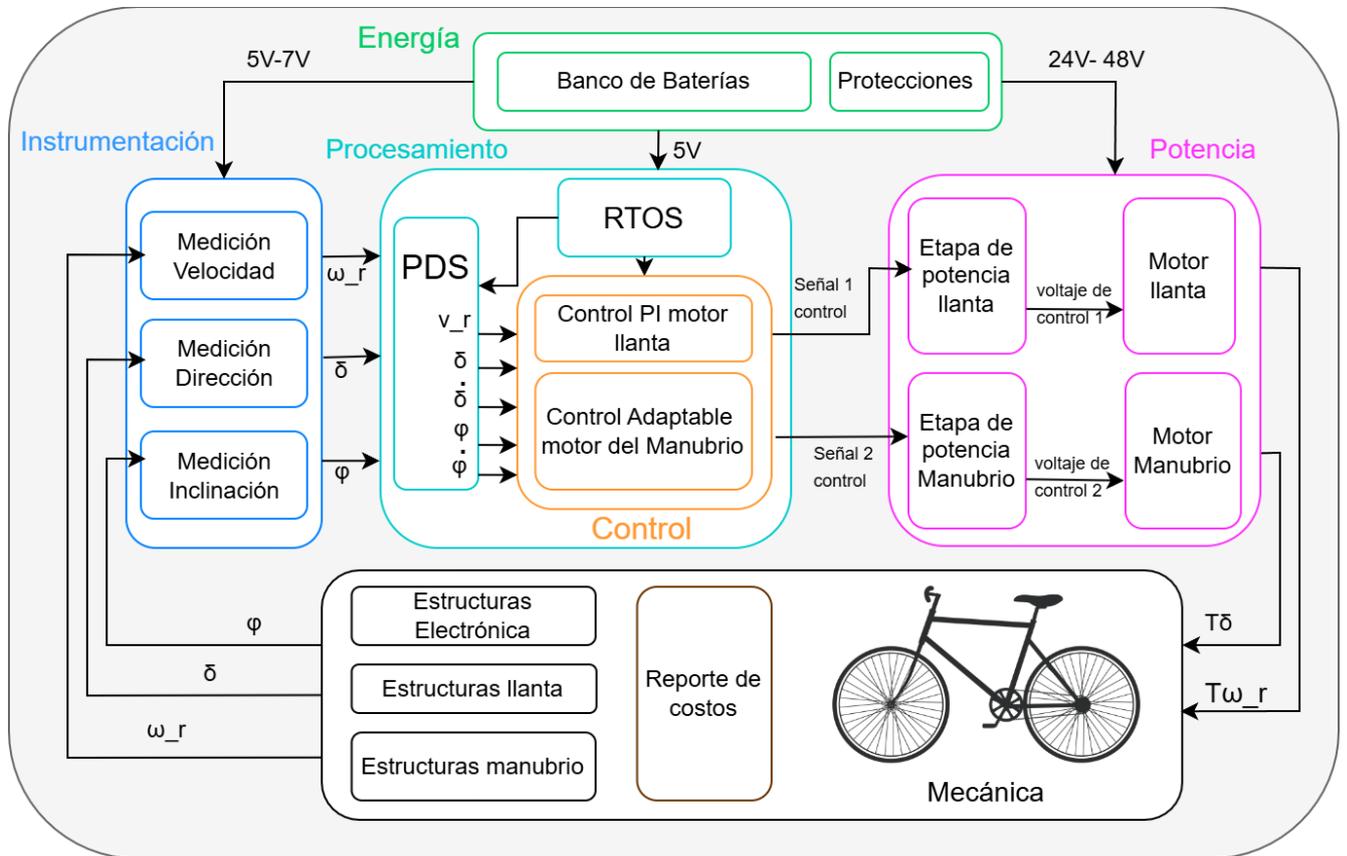


Figura 4.7: Diagrama del diseño a nivel sistema.

Requerimientos técnicos

Sistema	Subsistema	Requerimientos Técnicos
Instrumen- tación	Dirección	Encoder de resolución mínima de 100 PPR.
	Inclinación	Sensor de movimiento y orientación (IMU) con resolución mínima de $1[rad]$ y frecuencia mínima de 5.35 Hz.
	Velocidad	Sensor de RPMs de efecto Hall o infrarrojo capaz de leer mínimo un ancho de banda desde 0 a 8 [Hz].
Sistema de Proce- samiento	RTOS	Implementación de un sistema operativo en tiempo real o un controlador de interrupciones dentro del microcontrolador.
	PDS	Mínimo 2 interrupciones por TIMER, módulo de encoder, 3 interrupciones por GPIO, un canal de SPI y un canal de I2C.
Energía	Banco de baterías	Desarrollado con litio y con una capacidad de entregar 600 Wh.
	Protecciones	BMS para control de carga y descarga de las baterías.
Control	Control adaptable manubrio	Debe contar con el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, para adaptarse a dinámicas no modeladas y cambios en la masa de la bicicleta.
	Control PI llanta	Este control debe estabilizar la velocidad de la llanta en menos de 5 s.
Potencia	Motor llanta	Motor entre 250 y 1000 W con torque de 30 a 85 N·m.
	Etapas potencia llanta	Seleccionar una etapa de potencia que aisle el actuador del microcontrolador y soporte una potencia de 1000 W.
	Motor manubrio	Motor entre 100 y 200 W con torque de 10 a 20 N·m.
	Etapas potencia manubrio	Seleccionar una etapa de potencia que aisle el actuador del microcontrolador y soporte una potencia de 200 W.
Estructura mecánicas	Llanta	Caja reductora para garantizar un torque mínimo de 30 N·m. Sistema para transmitir la potencia del motor a la llanta trasera. Estructura de sujeción del motor al cuadro de la bicicleta.
	Manubrio	Caja reductora para garantizar un torque mínimo de 10 N·m. Sistema para transmitir la potencia del motor al manubrio. Estructura de sujeción del motor al cuadro de la bicicleta.
	Electrónica	Se requieren diseñar estructuras para proteger y sujetar los sistemas de energía, Sistema de Procesamiento y las etapas de potencia de los motores.
Costos	Reporte de costos	La materia prima de todo el vehículo no debe superar los 15,000 MXN.

Cuadro 4.6: Resumen de los requerimientos técnicos propuestos para los sistemas y subsistemas.

4.3. Diseño a nivel detalle

4.3.1. Actuadores

Para cumplir con estos requisitos se proponen dos motores en esta sección:

Motor para la llanta trasera

El motor MY1020 cumple con las especificaciones del Cuadro 4.6, debido a que es el motor para bicicleta más económico que se encontró en el mercado y supera los 500 W. Por otro lado, cuenta con un par inferior a los 30 Nm; por lo tanto, es necesario colocar una caja reductora NMRV40 con una relación de engranajes 10:1. Existen motores brushless con características similares; sin embargo, su costo es entre dos y tres veces mayor.

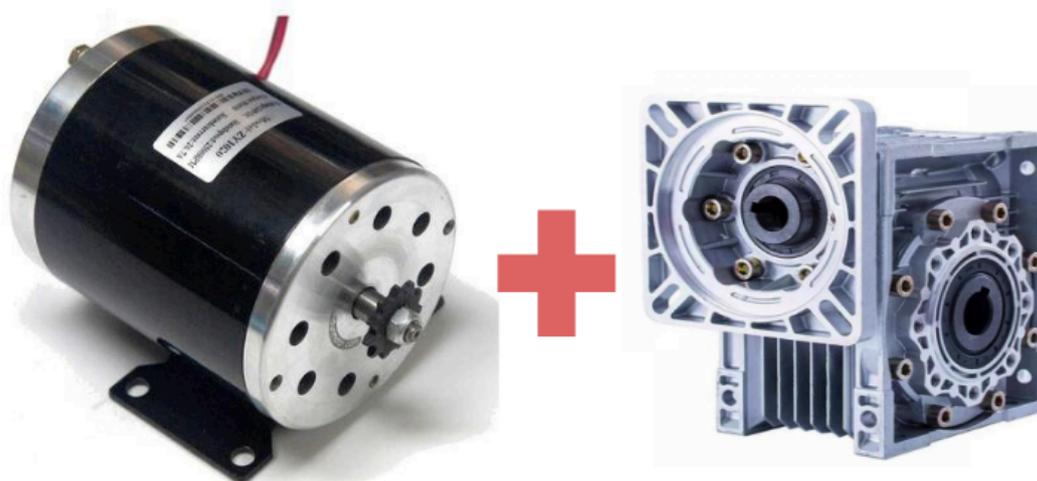


Figura 4.8: Motor MY1020 combinado con una caja reductora NMRV40.

Características del Motor MY1020 - 1000 W:

Especificación	1000 W 48 V
Velocidad sin carga (rpm)	3700
Velocidad nominal (rpm)	3000
Torque nominal (N·m)	3.2
Corriente nominal (A)	≤ 26.7
Eficiencia (%)	≤ 78

Cuadro 4.7: Especificaciones del Motor MY1020 - 1000 W.

Especificación	NMRV40
Torque máximo (Nm)	40
Relación de transmisión	24
Eficiencia (%)	≤ 70

Cuadro 4.8: Especificaciones de la caja reductora NMRV40.

Etapa de potencia llanta trasera

Para poder controlar el Motor MY1020 es necesaria una etapa de potencia que soporte los 48 V de alimentación del motor y un consumo de 34 A, valor obtenido a partir de considerar un factor de protección del 10 %.

El HS2741 PWM speed controller DC destaca de los demás controladores de motores DC debido a su precio y su capacidad para manejar altas corrientes, cercanas a 60 A a voltajes de 55 V. Además, el ciclo de trabajo de este driver es controlado mediante un potenciómetro, el cual puede ser fácilmente reemplazado por un potenciómetro digital.

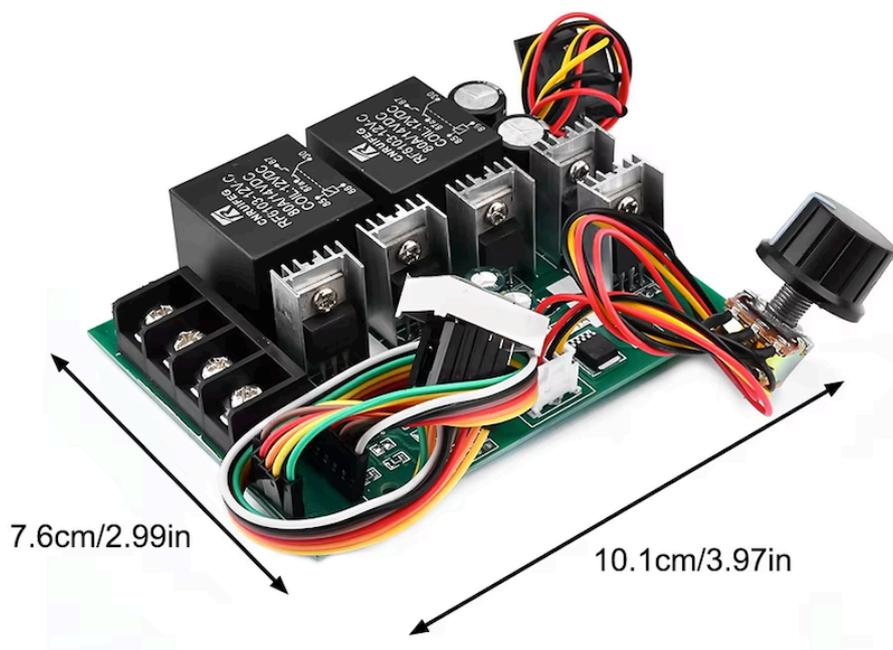


Figura 4.9: HS2741 PWM speed controller DC.

Especificación	Driver PWM
Voltaje de entrada (V)	10-55
Voltaje de salida	Lineal bajo carga
Corriente máxima (A)	60
Corriente continua (A)	40
Tipo de regulación de velocidad	Regulación de corriente
Modo de regulación de velocidad	Potenciómetro (lineal)
Motor de soporte	Motor de cepillo DC
Rotación hacia adelante y atrás	Soportado
Rango de ajuste de velocidad (%)	0-100
Frecuencia de control (kHz)	15
Tipo de cableado	Bloque de terminales de valla
Peso (g)	170
Tamaño de la placa base (mm)	100 × 76 × 28

Cuadro 4.9: Especificaciones del Driver PWM.

El controlador HS2741 requiere un potenciómetro digital para regular la potencia desde un microcontrolador. Entre las opciones disponibles, se eligió el potenciómetro digital

MCP41010 por su bajo consumo de energía y su sencilla interfaz de control mediante el protocolo SPI.

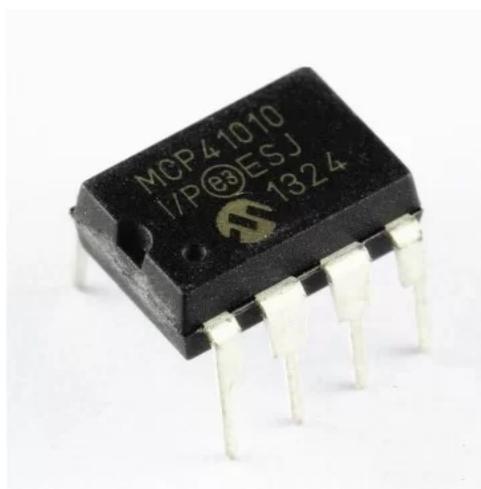


Figura 4.10: Potenciómetro digital MCP41010.

Especificación	Potenciómetro Digital MCP41010
Resolución	256 posiciones
Valores de resistencia	10 k Ω , 50 k Ω , 100 k Ω
Versiones	Sencillo (MCP41XXX) y Doble (MCP42XXX)
Interfaz de comunicación	SPI (modos 0,0 y 1,1)
Linealidad máxima	± 1 LSB INL DNL
Consumo en reposo	$< 1 \mu\text{A}$
Operación de apagado	Desconexión de resistencias y conexión de la terminal B al cursor
Voltaje de operación	2.7-5.5 V
Rango de temperatura	-40 °C a +85 °C (industrial), -40 °C a +125 °C (extendido)
Función de reinicio	Reset de cursor a posición media (80h)
Capacidad de encadenamiento	Soporte para daisy-chaining (MCP42XXX)

Cuadro 4.10: Especificaciones del Potenciómetro Digital MCP41010.

Motor para el control del manubrio

Este motor cumple con los requerimientos del Cuadro 4.6, ya que cuenta con una potencia de 100 W y 16 Nm de torque. A diferencia de los servomotores, este motor puede superar los 180°. Además, al ser de corriente directa, es más fácil implementar una ley de control que regule torque y velocidad.



Figura 4.11: Motor Gimson GR-WM4.

Características del Motor Gimson GR-WM3

Especificación	Gimson GR-WM3
Voltaje nominal (V)	24
Torque máximo	16 Nm (carga continua), 222 (carga estática)
Corriente nominal (A)	4.2
Velocidad sin carga (rpm)	51
Velocidad nominal (rpm)	40
Corriente máxima (A)	16
Relación de transmisión	60:1

Cuadro 4.11: Especificaciones del Motor Gimson GR-WM3.

Etapa de potencia motor Gimson GR-WM4

Debido a que se seleccionó el motor Gimson, es necesario un puente H que soporte sus voltajes y corrientes nominales. El controlador BTS7960 se diferencia del resto debido a su facilidad de control, costo reducido y capacidad para soportar corrientes mayores a 40 A; por ende, es adecuado para controlar la potencia del motor Gimson. Este driver permite una fácil integración con el microcontrolador, controlando la dirección y potencia del motor del manubrio de forma eficiente.

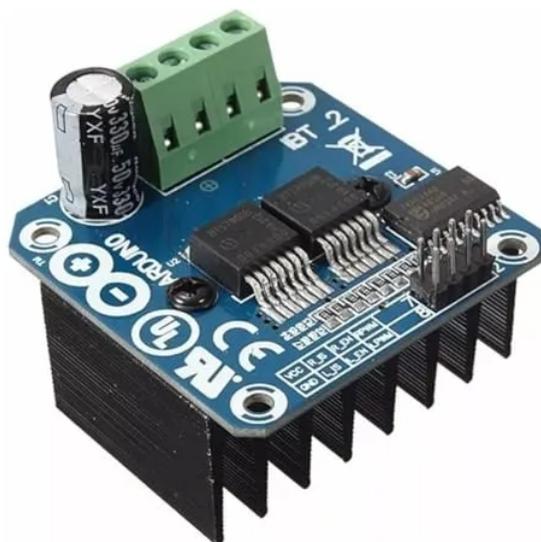


Figura 4.12: Puente H BTS7960.

Parámetro	Valor
Modelo	BTS7960
Voltaje de entrada	24 V
Corriente máxima	43 A
Corriente continua	16 A
Tipo de control	Señal PWM
Frecuencia de trabajo	25 kHz
Soporte de motor	Motores de corriente continua
Rotación inversa	Soportado
Protección contra sobrecalentamiento	Sí

Cuadro 4.12: Características del puente H BTS7960.

4.3.2. Instrumentación

Dirección del manubrio

El encoder S38 cumple con las características del Cuadro 4.6, ya que cuenta con una resolución de 100 PPR. Adicionalmente, este dispositivo es robusto frente al ruido, ya que sus cables están recubiertos por una malla conectada a tierra. Esta característica protege las señales internas contra interferencias electromagnéticas externas (EMI), asegurando la precisión de las mediciones.

Por otro lado, aunque existen opciones más económicas en el mercado, estas suelen ser muy frágiles y pueden romperse debido a las vibraciones de la bicicleta.

La única desventaja de emplear un encoder incremental es la pérdida de referencia del sistema, lo que hace necesaria la recalibración del sensor. Sin embargo, este problema puede resolverse fácilmente añadiendo sensores de finales de carrera al manubrio, permitiendo recalibrar el marco de referencia mediante software.



Figura 4.13: Encoder S38.



Figura 4.14: Final de carrera V153 1C25.

Cuadro 4.13: Características del encoder S38.

Parámetro	Valor
Modelo	S38
Tipo	Incremental
Pulsos por revolución	100 PPR
Resolución angular	3.6°
Alimentación	5 VDC
Salida	Cuadratura
Rango de temperatura	-10 °C a 70 °C

Final de carrera

Debido a la pérdida de referencia que genera el uso del encoder S38, se propone el interruptor V153 1C25 como final de carrera, el cual ayuda a calibrar el ángulo de la dirección. Además, evita el sobregiro del manubrio al apagar los motores mediante software, deteniendo el motor en caso de que este supere los límites permitidos. Se seleccionó este final de carrera por su robustez mecánica y costo accesible, cumpliendo con las especificaciones del Cuadro 4.6.

Cuadro 4.14: Características del final de carrera V153 1C25.

Parámetro	Valor
Modelo	V153 1C25
Tipo	Final de carrera
Voltaje nominal	125/250 VAC
Intensidad nominal	15 A
Resistencia de contacto	15 mΩ máximo
Vida útil	100,000 ciclos

Inclinación de la bicicleta

El sensor cumple con las especificaciones del Cuadro 4.6, ya que es barato, permite obtener resoluciones superiores a 1° y soporta frecuencias de muestreo de hasta 1 kHz. Este sensor no mide directamente el ángulo de inclinación. Sin embargo, a partir de las aceleraciones lineales, junto con las velocidades angulares, se pueden estimar de forma precisa las posiciones angulares y, así, obtener la inclinación.

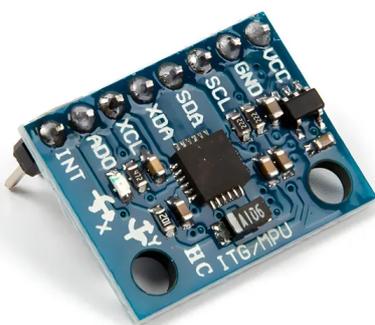


Figura 4.15: Sensor MPU 6050.

Cuadro 4.15: Características del MPU 6050.

Parámetro	Valor
Modelo	MPU 6050
Acelerómetro	Rango: $\pm 2g$, $\pm 4g$, $\pm 8g$, $\pm 16g$
Giroscopio	Rango: ± 250 , ± 500 , ± 1000 , $\pm 2000^\circ/s$
Voltaje de operación	2.3 V - 3.4 V
Interfaz de comunicación	I2C
Sensibilidad	Ajustable
Frecuencia de actualización	Hasta 1 kHz

Velocidad de la llanta

El sensor KY-024 cumple con las especificaciones del Cuadro 4.6; su costo es bajo y su resolución máxima de muestreo llega a los 10Hz, por lo tanto podrá leer correctamente la velocidad de la llanta.

Este sensor detecta la presencia de campos magnéticos, por ello es necesario incluir un imán en el ring de la llanta para poder medir su velocidad cada que esta completa una vuelta. Es necesario implementar códigos de procesamiento digital de la señal para poder calcular la velocidad.

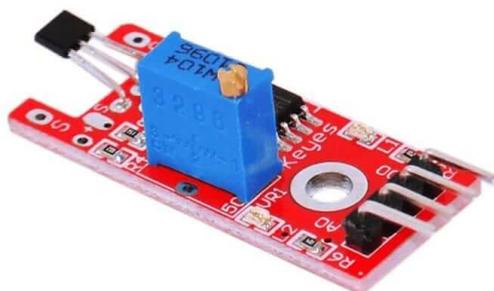


Figura 4.16: Sensor KY024LM.

Cuadro 4.16: Características del sensor KY024LM.

Parámetro	Valor
Modelo	KY024LM
Tipo de sensor	Efecto Hall
Alimentación	5 VDC
Rango de detección	Depende de la fuerza del campo magnético
Tipo de salida	Digital (interrupción)
Frecuencia de respuesta	Hasta 10 Hz

4.3.3. Unidad de procesamiento

Microcontrolador

Este microcontrolador se seleccionó porque cumple con las especificaciones técnicas descritas en el Cuadro 4.6. El STM32 Nucleo F439ZI, basado en el núcleo Arm® Cortex®-M4 de 32 bits con una frecuencia de hasta 180 MHz, incorpora periféricos avanzados, como hasta 12 temporizadores de propósito general de 16 bits, incluyendo dos temporizadores PWM, tres módulos I2C, seis módulos SPI y capacidad para integrar un módulo de encoder. Además, ofrece soporte para múltiples interrupciones GPIO, esenciales para el control del sistema. Este microcontrolador, además de contar con un precio accesible al público en general, es capaz de implementar FreeRTOS, un sistema operativo en tiempo real que puede administrar las tareas del microcontrolador.

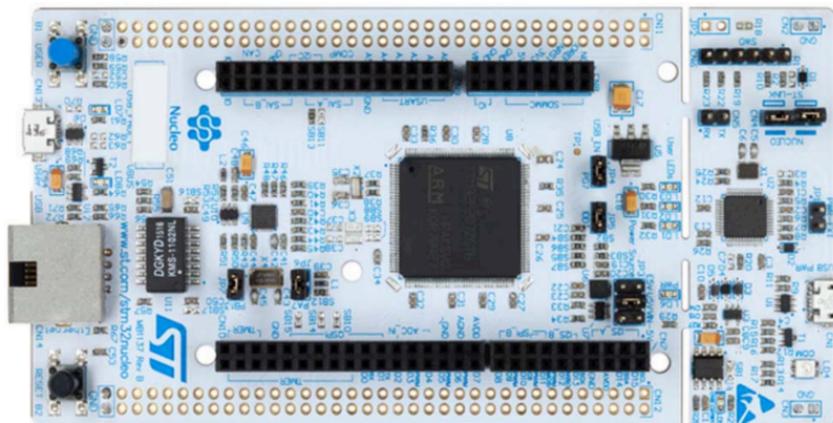


Figura 4.17: Microcontrolador STM32 F439.

El siguiente cuadro muestra los pines a los cuales se deben conectar los sensores y motores, junto con sus respectivos periféricos a configurar:

Sensor/Componente	Periférico	Pines a Conectar
MPU6050	I2C	PF0 (SDA)
		PF1 (SCL), PF2 (INT)
Encoder	TIMER 1 (modo encoder)	PE9 (Fase A)
		PE11 (Fase B)
Puente H	TIMER 2 (PWM)	PA0
	TIMER 3 (PWM)	PA6
Finales de Carrera	GPIO	PD7
		PD6

Cuadro 4.17: Sensores del manubrio.

Sensor/Componente	Periférico	Pines a Conectar
Sensor RPMs	GPIO (interrupción)	PF13
	TIMER 7 (interrupción)	No aplica
Potenciómetro Digital	SPI	PB6 (CS)
		PA5 (SCK)
		PB5 (MOSI)

Cuadro 4.18: Sensores de la llanta.

4.3.4. Sistema de suministro de energía

Batería

Para desarrollar un banco de baterías capaz de proporcionar 600 Wh y partiendo de que el voltaje más alto de todos los componentes eléctricos es 48 V, se propone armar un paquete de baterías con la capacidad de proporcionar 48 V y 12 Ah. Las baterías **18650** de **Samsung** pueden dar 3.7 V y 3 Ah, por lo tanto, 48 celdas son necesarias para garantizar suministrar la energía necesaria.

Para comprender mejor la estructura de este sistema, se utilizarán los siguientes términos:

- **Celda:** Una sola pila 18650.
- **Paquete:** Conjunto de celdas.
- **Batería:** Conjunto de paquetes.

Cada paquete genera 24 V y 6 Ah, formado por 12 celdas (configuración 6s2p). La batería final se compone de 4 paquetes, dos de ellos en serie y otro dos en paralelo, de modo que se alcanzan los requerimientos de 48 V y 12 Ah.



Figura 4.18: Baterías 18650.

Cuadro 4.19: Características de baterías Samsung 18650.

Parámetro	Valor
Modelo	Samsung INR18650-30Q
Capacidad nominal	3000 mAh
Voltaje nominal	3.6 V
Voltaje máximo	4.2 V
Corriente máxima de descarga	15 A
Ciclo de vida estimado	300-500 ciclos
Protección integrada	No
Tipo de celda	Li-ion
Peso	48 g
Diámetro	18.3 mm
Longitud	65 mm

Protecciones

Para proteger las celdas contra sobrecorrientes de carga y descarga, es necesario implementar un **BMS** (Battery Management System). Considerando que el motor más potente del proyecto consume una corriente de 26 A, con un pico máximo de 30 A al arrancar, se seleccionó un BMS capaz de soportar hasta 40 A.

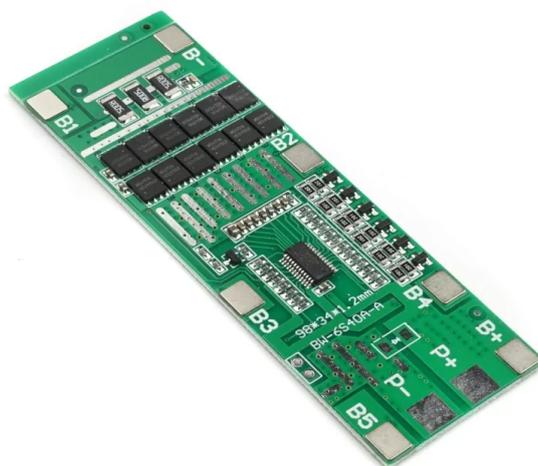
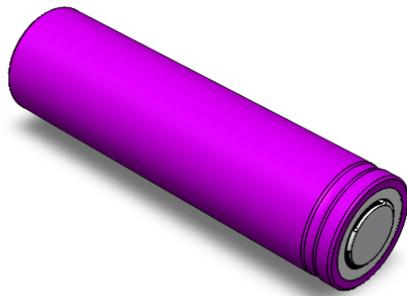


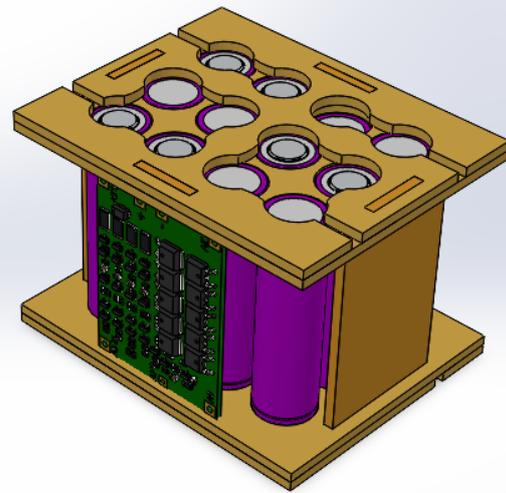
Figura 4.19: Circuito BMS de 40 A.

Cuadro 4.20: Propiedades físicas del circuito BMS.

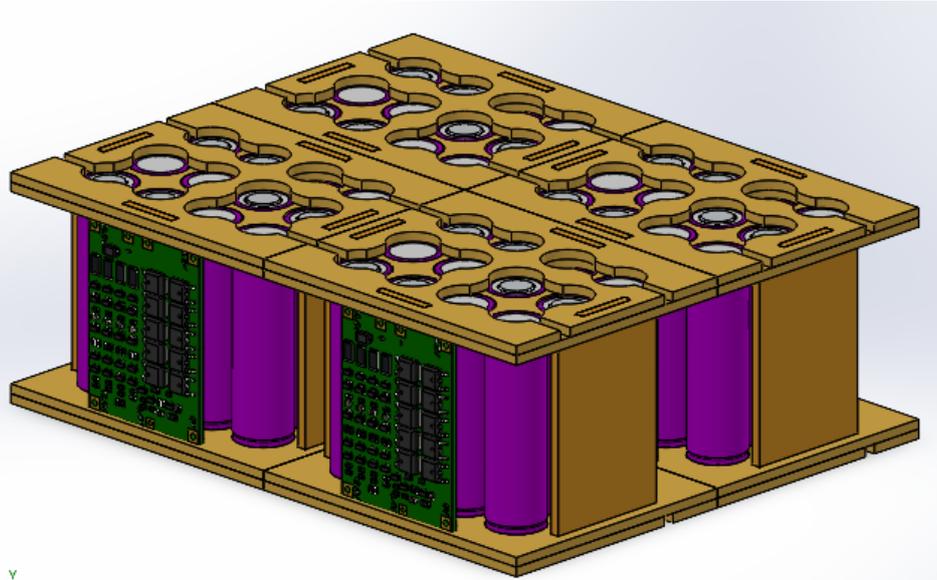
Parámetro	Valor
Tamaño	88 × 34 × 2.8 mm
Color	Verde
Temperatura de funcionamiento	-30 °C a +80 °C
Corriente máxima de descarga	40 A
Corriente de descarga instantánea	70 A
Corriente de operación	40 μ A



(a) Una celda individual 18650 utilizada como unidad básica del sistema.



(b) Un paquete compuesto por varias celdas en configuración 6s2p.



(c) Batería completa formada por cuatro paquetes en configuración 12s4p.

Figura 4.20: Clasificación del sistema de baterías: (a) Celda individual, (b) Paquete de celdas, (c) Batería completa.

4.3.5. Mecánica

Estructuras requeridas para acoplar el motor MY1020 a la llanta

Se realizó el diseño de las siguientes estructuras con el fin de cubrir las siguientes necesidades:

1. Fijación del motor MY1020 al cuadro.
2. Selección de una caja reductora para amplificar el par del motor hasta 30 Nm.
3. Acoplamiento entre el motor, la caja reductora y el engranaje de salida.
4. Transmisión de potencia desde la caja reductora hasta la llanta trasera mediante dos engranajes conectados por una cadena de motocicleta.
5. Instalación de tornillos para ajustar la posición del motor respecto al cuadro y permitir la alineación de la cadena.
6. Implementación de un tensor de cadena para evitar deslizamientos fuera de los engranajes.
7. Diseño de un soporte para el sensor KY024LM en el cuadro para medir las revoluciones por minuto de la llanta trasera.

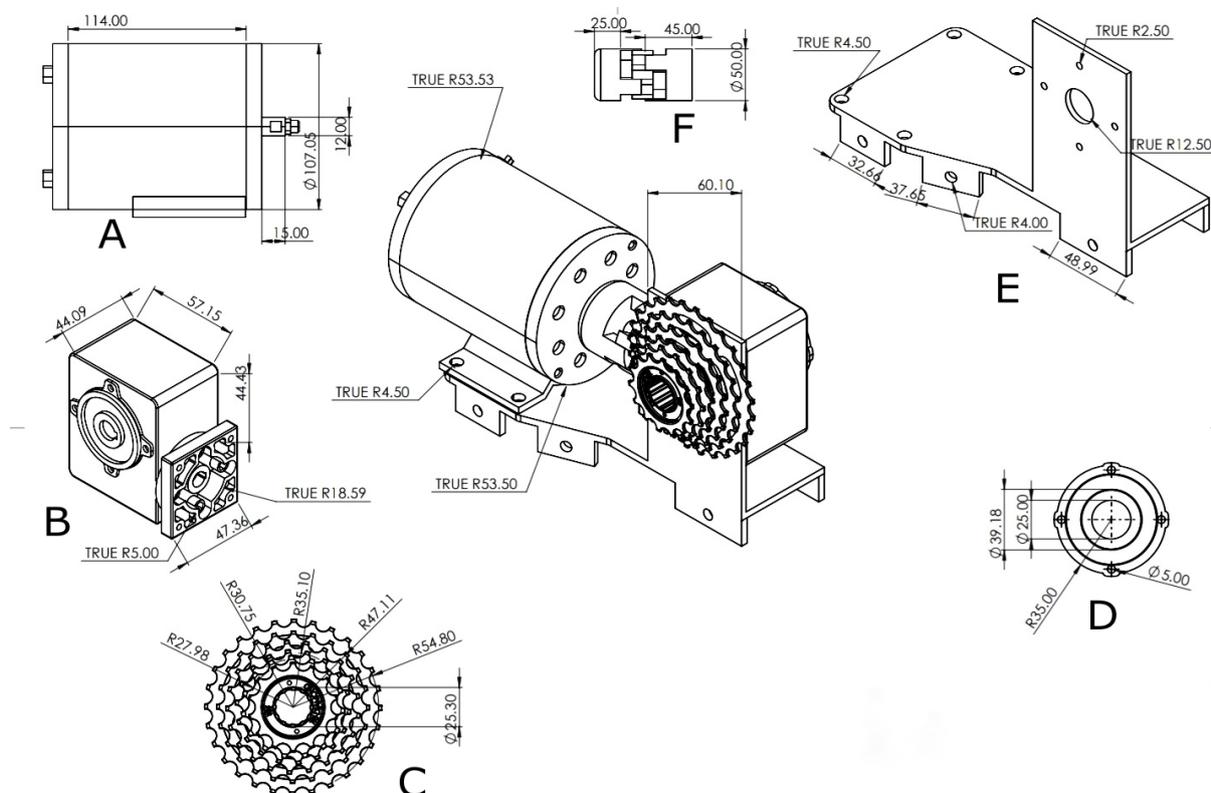


Figura 4.21: Estructuras necesarias para acoplar el motor MY1020 a la llanta.

En la Figura 4.21 se muestran los siguientes elementos:

- **A:** es el motor MY1020.
- **B y C:** son la caja reductora y un casete de bicicleta. En conjunto, dan una relación de engranes de 10:1, consiguiendo elevar el par del motor hasta 30 Nm.
- **F:** acopla el motor a la caja reductora. Es la estructura que fija el motor al cuadro de la bicicleta.

Estructuras de manubrio

Este apartado abarcó las siguientes tareas:

1. Fijación del motor Gimson al cuadro.
2. Eliminación de la necesidad de diseñar o adquirir una caja reductora, debido a que el motor Gimson incluye una reducción interna que incrementa el torque hasta 16 Nm, adecuado para mover el manubrio.
3. Diseño de componentes para transmitir el torque desde el eje del motor hasta el eje de giro del volante.
4. Instalación de un encoder en la misma estructura que el motor y transmisión del giro mediante una polea dentada y dos engranajes, garantizando una medición precisa del ángulo de dirección.

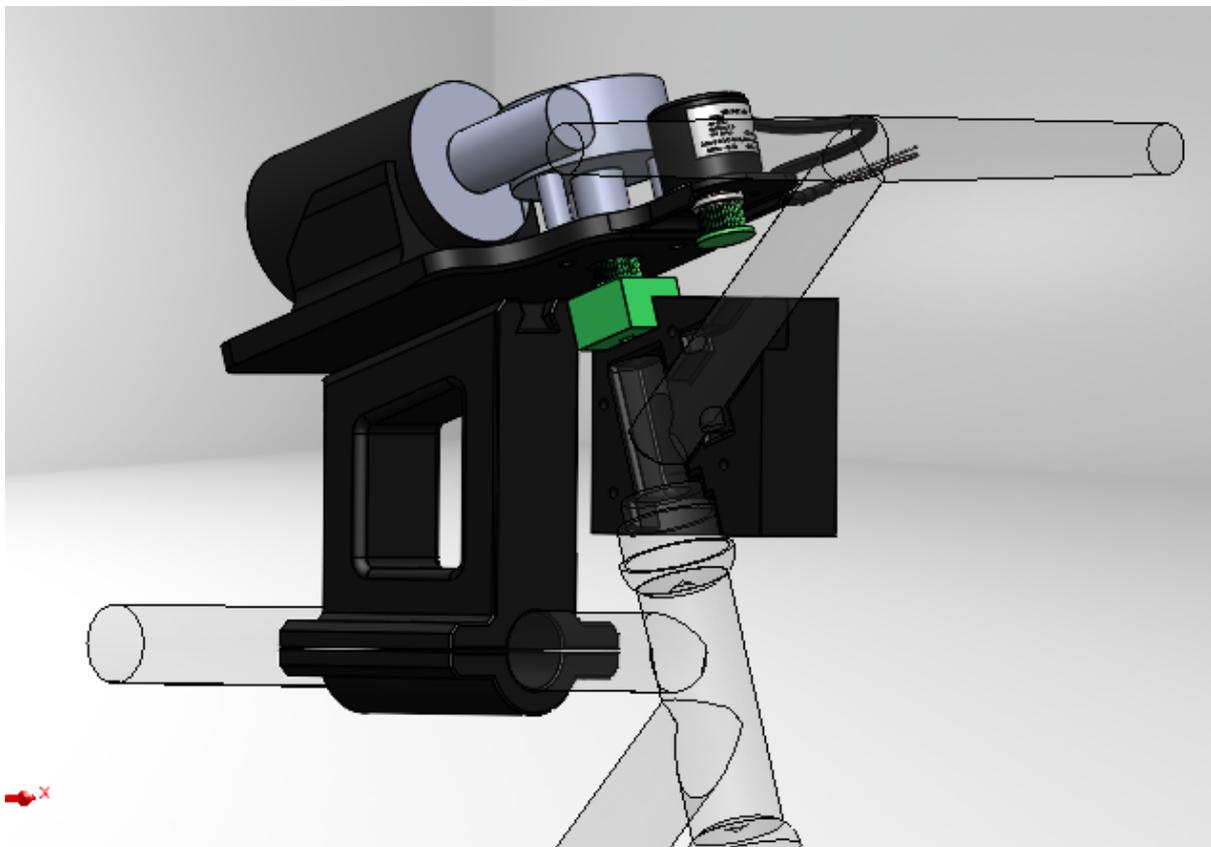


Figura 4.22: Estructuras mecánicas que acoplan los actuadores y sensores al manubrio.

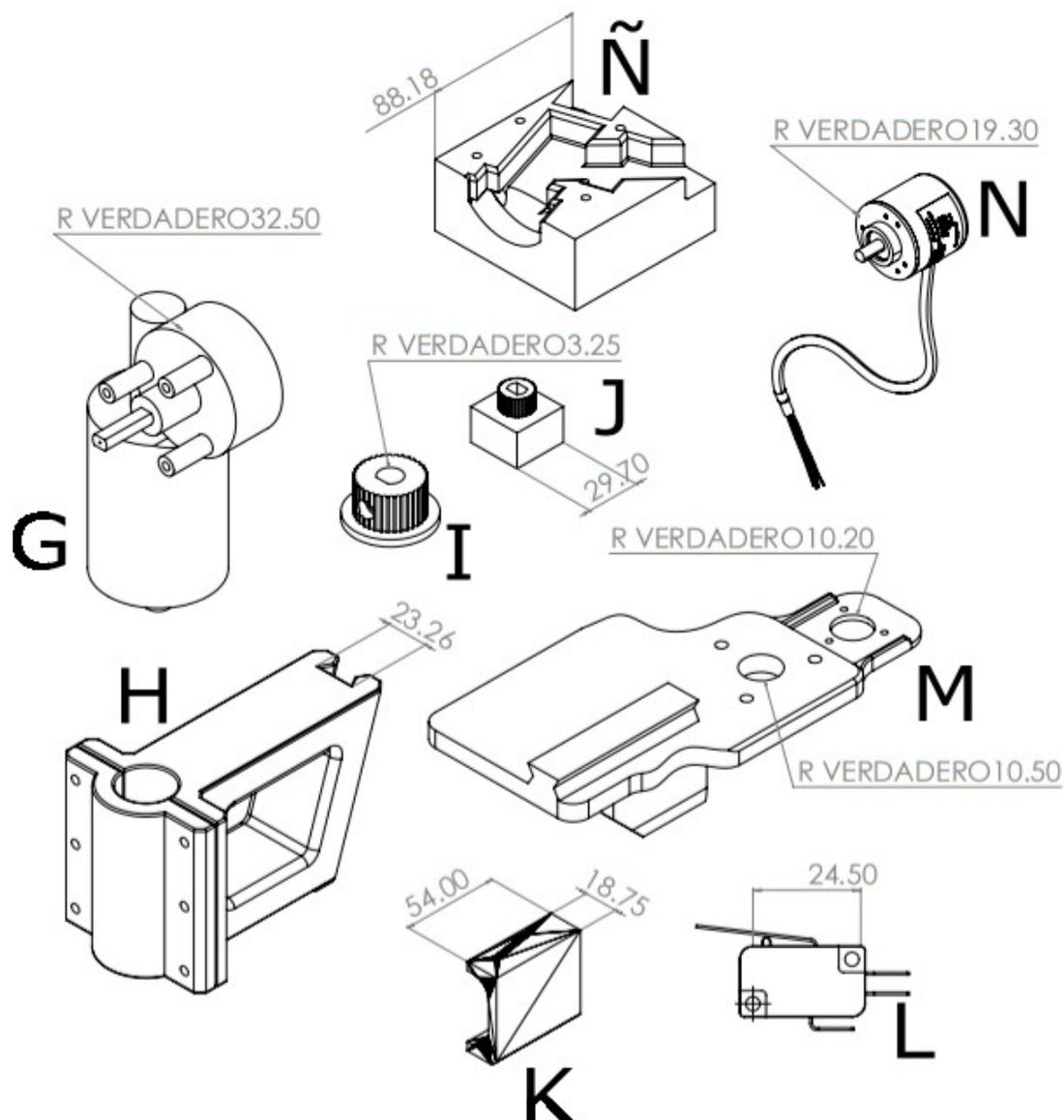


Figura 4.23: Pano de las piezas que conforman el subsistema del manubrio.

En la Figura 4.23 se muestran los siguientes elementos:

- **G:** es el motor Gimson.
- **N:** es el encoder.
- **I y J:** son engranes que acoplan el giro del motor al encoder, para poder medir la posición del manubrio mediante una banda dentada.
- **H y M:** se encargan de sujetar el motor Gimson para que el eje del motor quede colineal con el manubrio.
- **Ñ:** es una estructura que envuelve al manubrio para poder acoplarse al eje del motor.
- **L:** son los finales de carrera.

- **K:** sujeta los finales de carrera, los cuales permiten detectar los máximos ángulos permitidos.

En la figura del plano explosivo se muestra cómo deben integrarse todos los elementos.

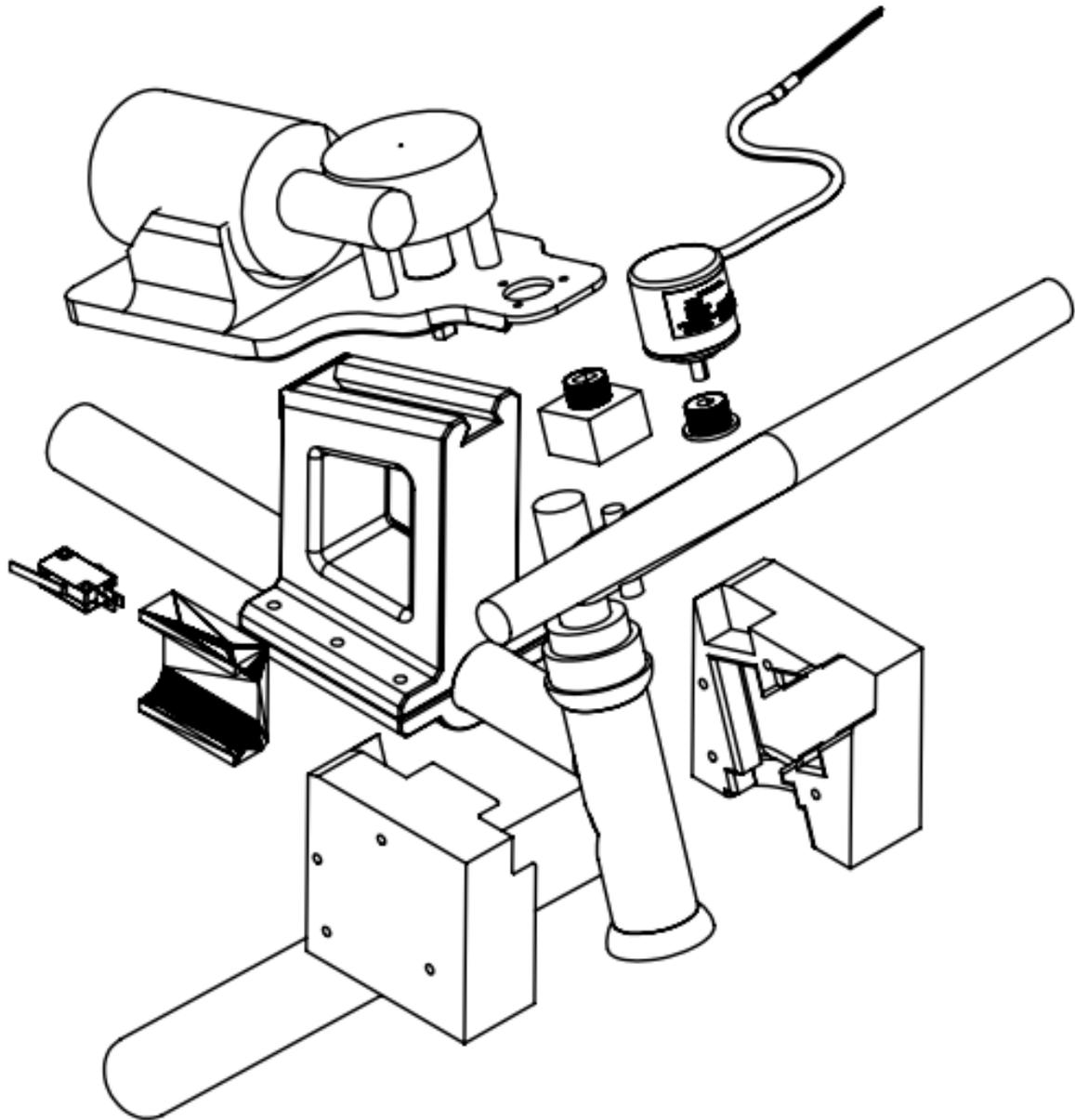


Figura 4.24: Plano explosivo del manubrio.

Estructuras encargadas de electrónica

Este apartado buscó resolver cómo sujetar las baterías al marco y cómo proteger la electrónica.

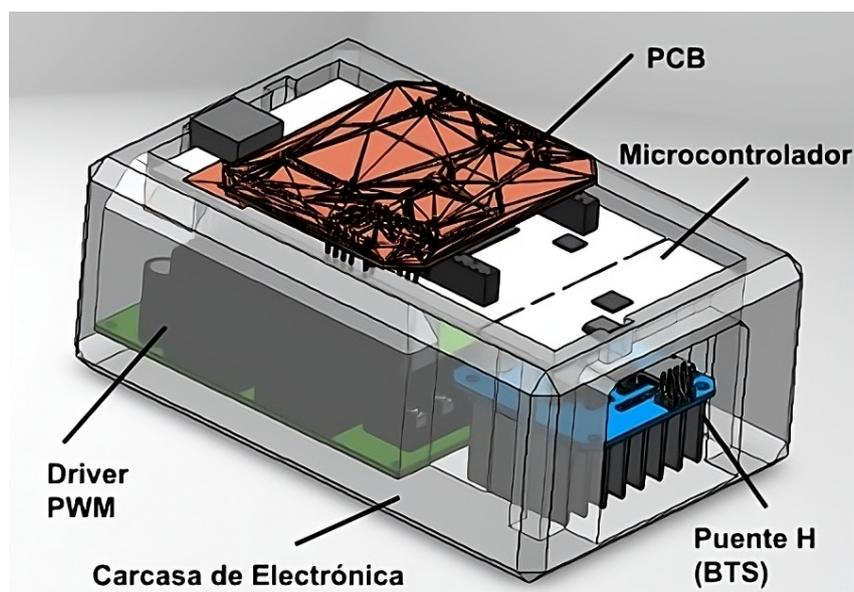
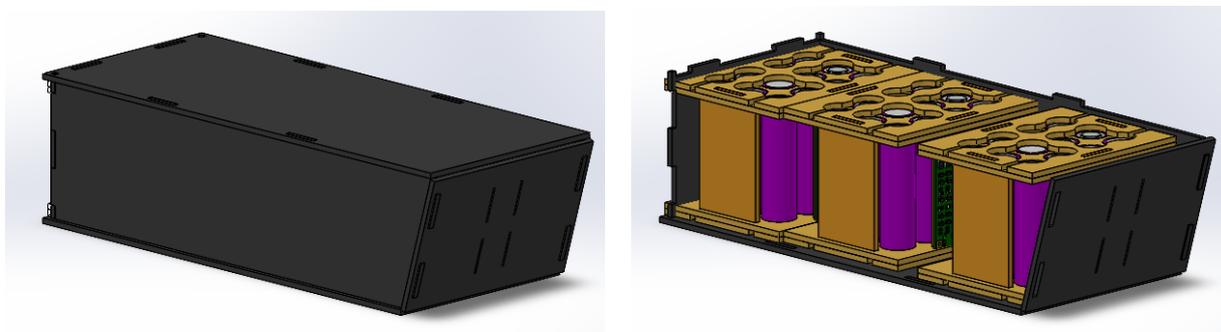


Figura 4.25: Estructura encargada de sujetar la electrónica.

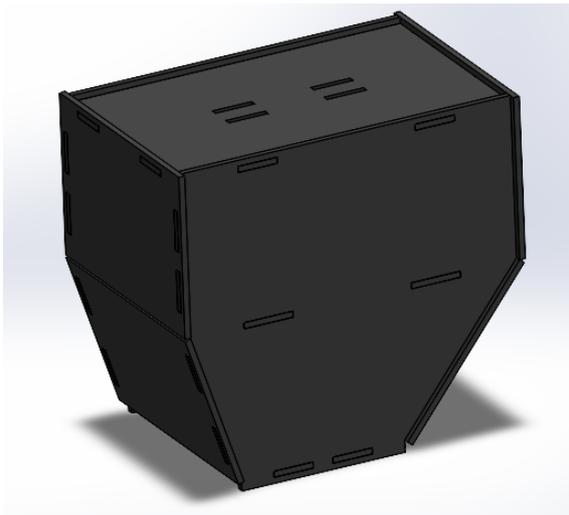
En las Figuras 4.26 y 4.27 se muestran las cajas que almacenan las baterías y la electrónica para poderlas fijar al cuadro de la bicicleta.



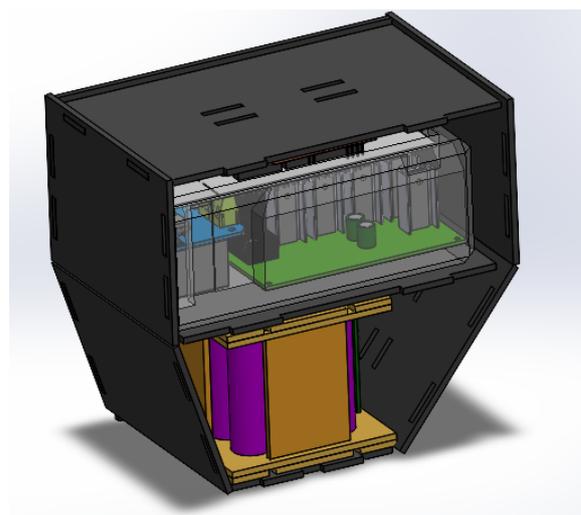
(a) Caja superior cerrada.

(b) Caja superior abierta.

Figura 4.26: Componentes superiores del sistema mecánico-electrónico.



(a) Caja inferior cerrada.



(b) Caja inferior abierta.

Figura 4.27: Componentes inferiores del sistema mecánico-electrónico.

Sistema general

En la Figura 4.28 se observa una vista lateral del sistema general.

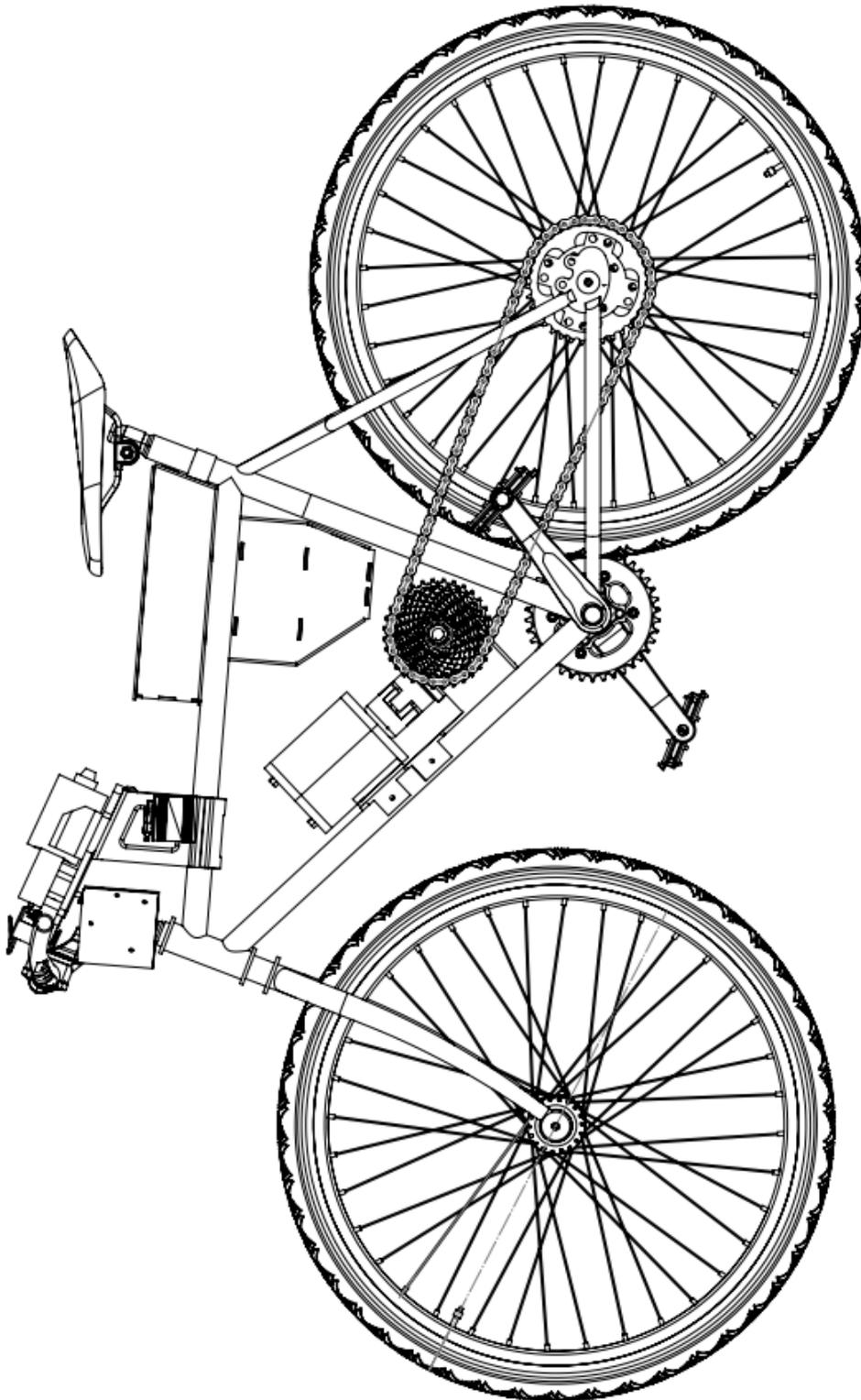


Figura 4.28: Visión lateral del sistema general integrado.

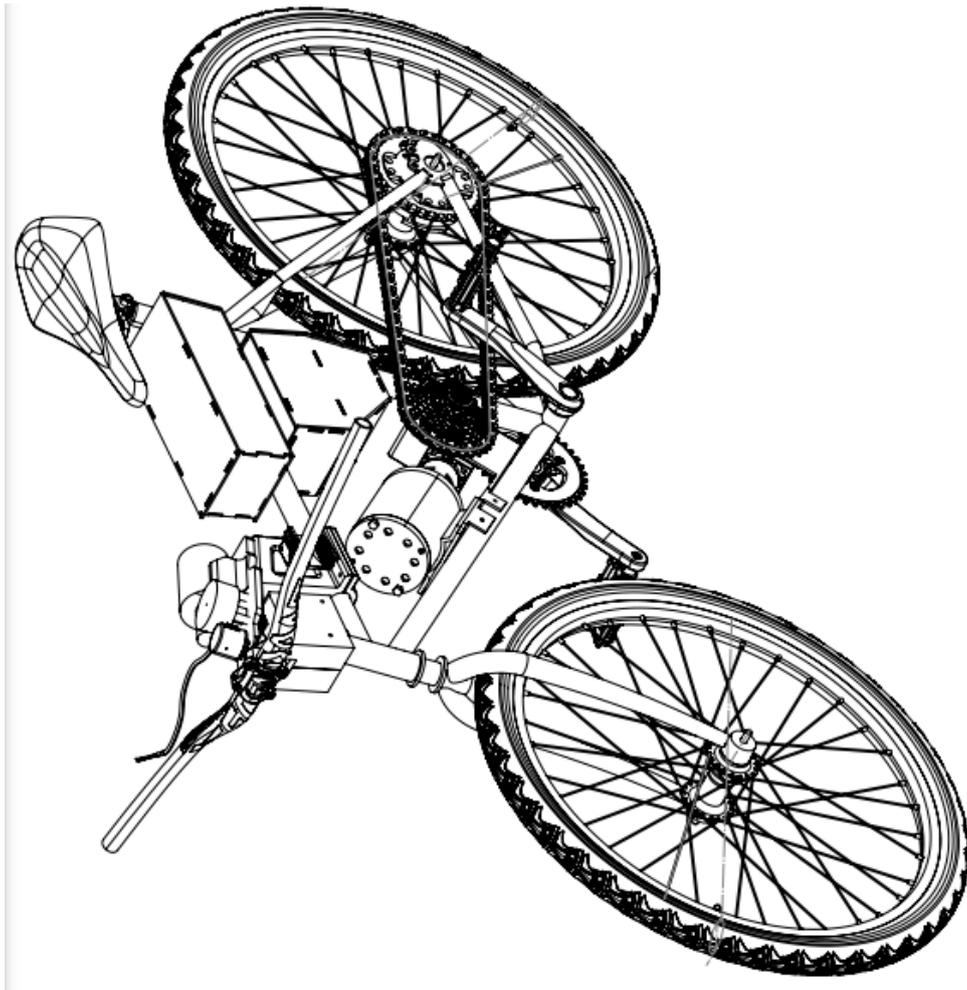


Figura 4.29: Visión isométrica del sistema general integrado.

4.3.6. Control

Obtención del modelo matemático de la bicicleta

Lo primero que se hizo fue medir las distancias constantes de la bicicleta, como λ , trail, wheel base y α (la cual se determina a partir de λ).

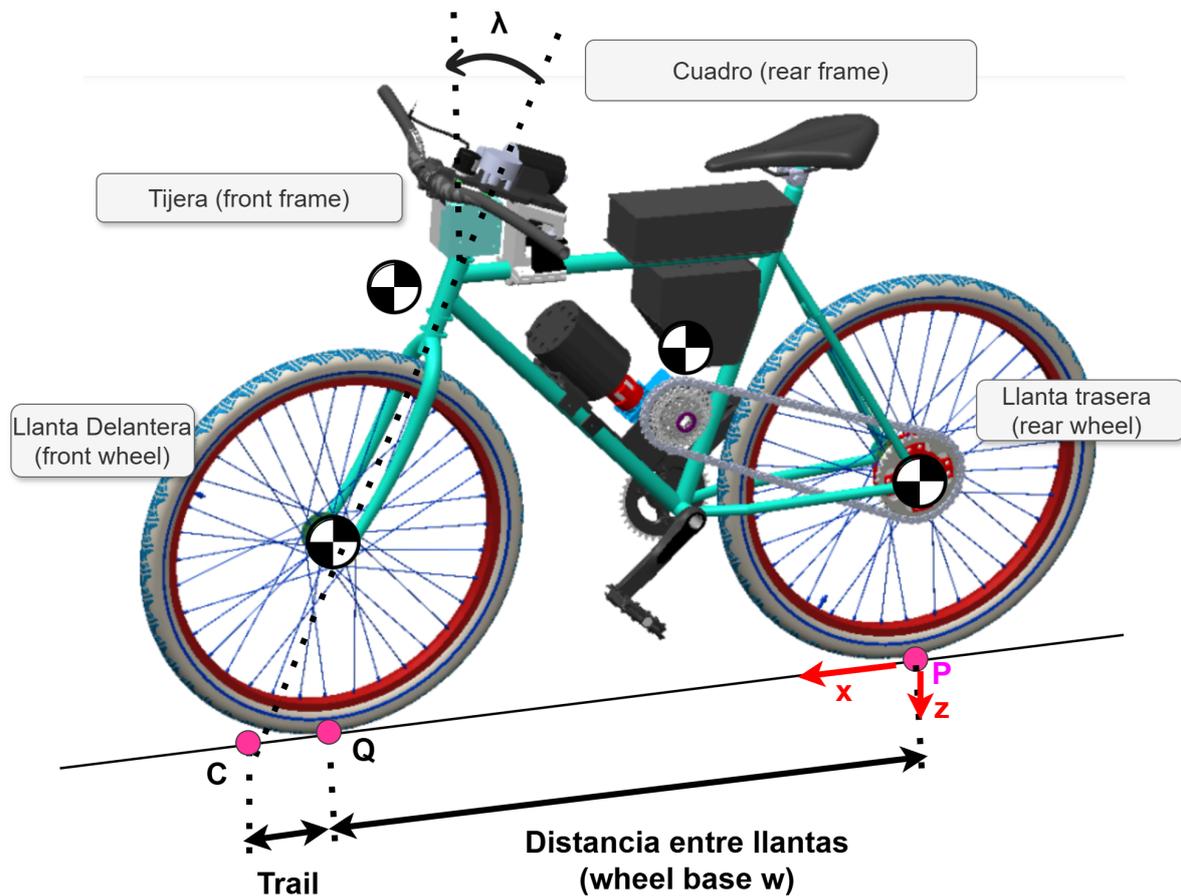


Figura 4.30: Dimensiones de la bicicleta.

Posteriormente, se calcularon los tensores de inercia como en [17], mediante la construcción de un péndulo torsional a partir del período de oscilación.

Además, se realizaron simulaciones en SolidWorks para conocer los tensores de inercia y corroborar los resultados experimentales. También se hicieron mediciones físicas de todas las longitudes y ángulos mostrados en la Figura 4.30, obteniendo el siguiente cuadro con los parámetros de la bicicleta:

Cuadro 4.21: Datos generales y parámetros del sistema.

Parámetro	Símbolo	Valor
Datos generales		
Wheel base	w	1,010 m
Trail	t	0,110 m
Head angle	α	70° (1,222 rad)
Gravity	g	9,81 m/s ²
Ángulo lambda	λ	20° (0,349 rad)
Rueda trasera		
Radio	R_{rw}	0,3500 m
Masa	m_{rw}	2,56 kg
Momentos de inercia		$\begin{bmatrix} 0,1471 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2910 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1470 \end{bmatrix}$ kg m ²
Cuadro rf		
Centro de masa	\mathbf{r}_{rf}	$[0,4307 \ 0 \ -0,5908]^\top$ m
Masa	m_{rf}	29,3 kg
Momentos de inercia		$\begin{bmatrix} 0,68 & 0 & 0,11 \\ 0 & 1,38 & 0 \\ 0,11 & 0 & 0,76 \end{bmatrix}$ kg m ²
Tijera		
Centro de masa	\mathbf{r}_{ff}	$[0,75 \ 0 \ -0,810]^\top$ m
Masa	m_{ff}	2,2 kg
Momentos de inercia		$\begin{bmatrix} 0,05 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0,04 & 0 \\ 0,01 & 0 & 0,02 \end{bmatrix}$ kg m ²
Rueda delantera		
Radio	R_{fw}	0,3485 m
Masa	m_{fw}	3,2 kg
Momentos de inercia		$\begin{bmatrix} 0,14 & 0 & 0 \\ 0 & 0,28 & 0 \\ 0 & 0 & 0,14 \end{bmatrix}$ kg m ²

Con los datos del Cuadro 4.21 se reconstruyeron las matrices del sistema.

Se obtuvieron las siguientes matrices:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} -207,0267 & -16,5433 \\ -16,5433 & -5,6581 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 21,1557 \\ 0 & 1,8246 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 12,4218 \\ -0,9223 & 1,3026 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 13,3898 & 0,9935 \\ 0,9935 & 0,3151 \end{bmatrix}.$$

Con las matrices previamente definidas, se construye el modelo en espacio de estados de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.24)$$

donde el vector de estados \mathbf{x} y el vector de entrada \mathbf{u} están definidos como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_\delta \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} del modelo en espacio de estados se presentan a continuación:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2) & -\mathbf{M}^{-1}v\mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Se graficó la parte real de las raíces a diferentes velocidades, obteniendo la siguiente gráfica:

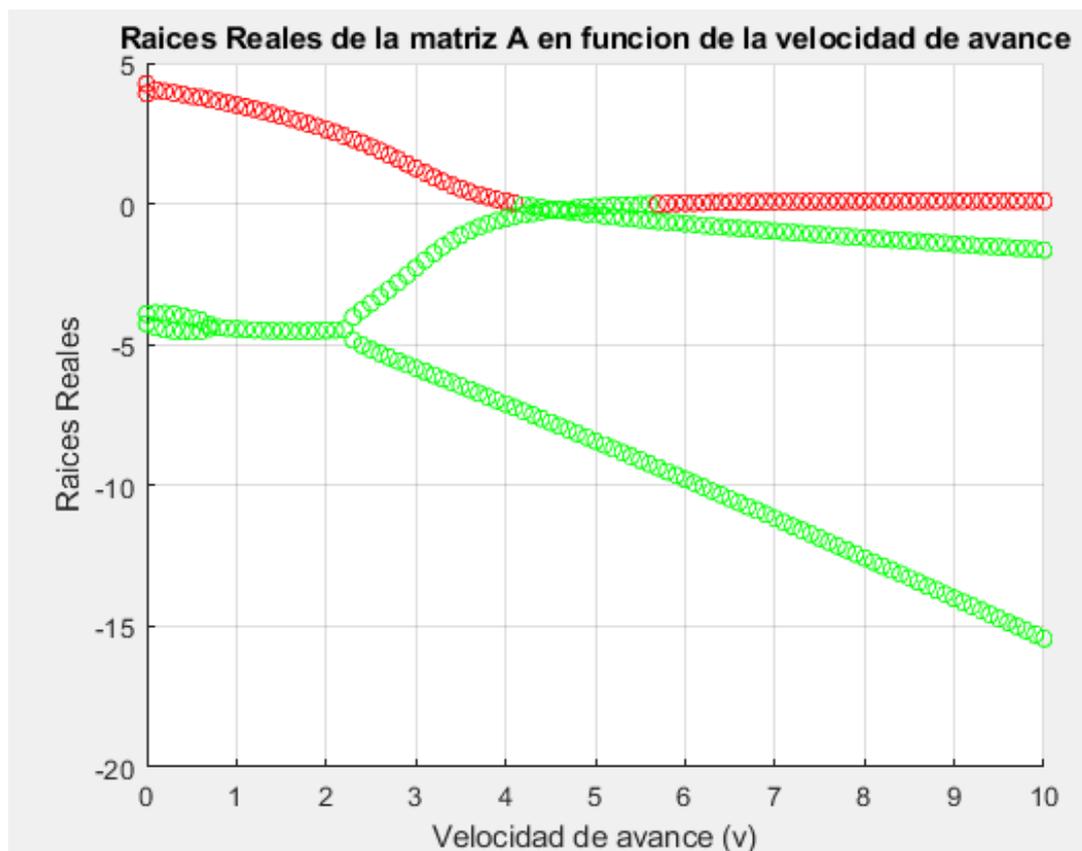


Figura 4.31: Región estable. Los puntos rojos (antes de 4.1 m/s y después de 5.8 m/s) marcan la zona de inestabilidad. Los puntos verdes (entre 4.1 m/s y 5.8 m/s) marcan la región donde la bicicleta es estable.

Esquema general del control

En el siguiente diagrama se pueden observar los bloques de control que estabilizarán a la bicicleta. El control PI buscará llevar la velocidad de la bicicleta a la zona de esta-

bilidad, mientras que el control adaptable estima los parámetros del modelo matemático de la bicicleta para aumentar el rango de velocidades donde esta se puede mantener en equilibrio.

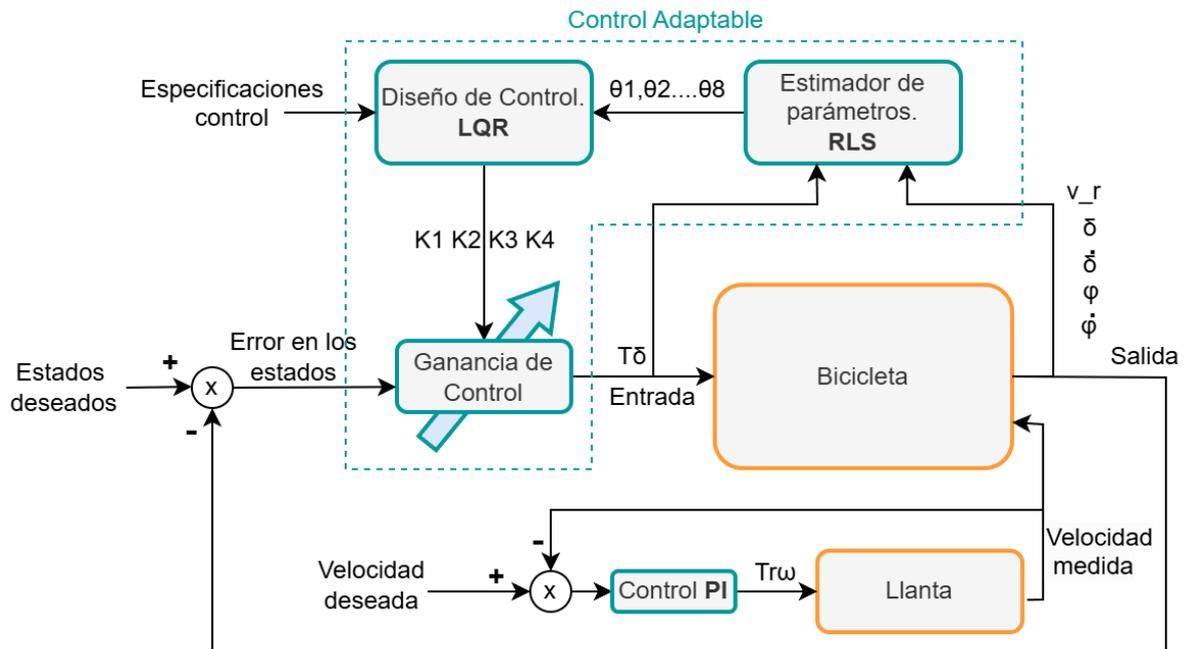


Figura 4.32: Estrategia de control.

Control Adaptable

Control Adaptable El esquema se compone de tres bloques: estimación del modelo matemático, cálculo de la ganancia de retroalimentación y retroalimentación del sistema. Se utilizó el método de mínimos cuadrados recursivos (RLS) con factor de olvido para actualizar los parámetros del modelo en tiempo real. El control se basa en retroalimentación de estados, donde la ganancia se determina mediante control óptimo LQR.

El bloque RLS recibe las mediciones de los estados, la velocidad y el torque aplicado. Con esta información, ajusta los parámetros del sistema y los envía al módulo de diseño de control.

El bloque de diseño de control reconstruye las matrices A y B y, junto con las matrices de penalización Q y R, calcula la ganancia óptima que estabiliza el sistema, priorizando la inclinación de la bicicleta.

El bloque de ganancia evalúa la diferencia entre los valores deseados y los medidos, multiplica este error por la ganancia de control y aplica la señal resultante al sistema.

RLS con Factor de olvido

Para realizar el algoritmo, se propone el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Theta_1 & \Theta_2 v^2 & \Theta_3 v & \Theta_4 v \\ \Theta_6 & \Theta_7 v^2 & \Theta_8 v & \Theta_9 v \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_5 \\ \Theta_{10} \end{bmatrix}$$

Donde las Θ_n representan parámetros no conocidos del sistema. v es la velocidad de traslación. La entrada u y los estados x son los mismos que en la bicicleta:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \\ \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}, \quad u = T_\delta \quad (4.26)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 v^2 & \Theta_3 v & \Theta_4 v \\ \Theta_6 & \Theta_7 v^2 & \Theta_8 v & \Theta_9 v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_5 \\ \Theta_{10} \end{bmatrix} T_\delta$$

Por lo tanto, el regresor queda definido como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 v^2 & x_3 v & x_4 v & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 v^2 & x_3 v & x_4 v & u \end{bmatrix}$$

El vector de parámetros queda como:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \\ \Theta_5 \\ \Theta_6 \\ \Theta_7 \\ \Theta_8 \\ \Theta_9 \\ \Theta_{10} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el sistema se puede expresar como:

$$Y = \Phi\Theta$$

1. **Inicialización** Cuando el código se ejecuta por primera vez, las siguientes variables se definen como:

$$P_0 = 1000 \cdot I_{10}, \quad \hat{\Theta}_0 = 0,75 \cdot \Theta_{\text{real}} \quad (4.27)$$

donde P es la matriz de covarianza inicial y $\hat{\Theta}$ el vector de parámetros estimados.

2. **Construcción de la Matriz de Regresores (Φ_t) y Cálculo de las Salidas (\mathbf{Y}_t)** Se miden todos los elementos que conforman la matriz $\Phi_t \in \mathbb{R}^{2 \times 10}$ y el vector de salidas correspondientes $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$:

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 v^2 & x_3 v & x_4 v & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 v^2 & x_3 v & x_4 v & u \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Cabe destacar que los valores de \dot{x}_3 y \dot{x}_4 deben ser estimados mediante las derivadas discretas de x_3 y x_4 para poder conocer sus valores. Además, es necesario que la velocidad sea mayor que cero para que el sistema pueda estimar de mejor forma los parámetros.

3. **Cálculo de la Ganancia de Kalman (K_t)**

$$K_t = P_t \Phi_t^\top (\Phi_t P_t \Phi_t^\top + \lambda I_2)^{-1} \quad (4.30)$$

donde λ es el factor de olvido.

4. **Actualización de los Parámetros Estimados ($\hat{\Theta}$)** Se calcula el error de predicción:

$$\text{Error}_t = \mathbf{Y}_t - \Phi_t \hat{\Theta}_t \quad (4.31)$$

y los parámetros se actualizan con:

$$\hat{\Theta}_{t+1} = \hat{\Theta}_t + K_t \cdot \text{Error}_t \quad (4.32)$$

5. **Actualización de la Matriz de Covarianza (P)**

$$P_{t+1} = \frac{1}{\lambda} (P_t - K_t \Phi_t P_t) + \epsilon I_{10} \quad (4.33)$$

donde ϵ es un escalar positivo pequeño que asegura estabilidad numérica (típicamente del orden de 10^{-5} o menor), evitando singularidades en la matriz de covarianza.

6. **Salida** El vector de parámetros estimados, $\hat{\Theta}_{t+1}$, es la salida del algoritmo y se regresa al paso 2 para una nueva estimación.

Ganancia Adaptable LQR

A continuación, se presenta la ejecución paso a paso del algoritmo para el diseño de un controlador LQR adaptable, basado en parámetros identificados en línea mediante el método RLS:

1. Inicio

A partir de los parámetros $\hat{\Theta}$ obtenidos por el algoritmo RLS, se reconstruyen las matrices $A(v)$ y B . Se define el tiempo de muestreo, en este caso $T_s = 0,001$ s. Así mismo, se definen las matrices de ponderación Q y R , junto con los valores $\epsilon = 10^{-6}$ y $\alpha = 0,5$, donde α es el parámetro de suavizado y ϵ es el criterio de convergencia. Finalmente, se indica el número máximo de iteraciones.

2. **Discretización del sistema** El sistema continuo se transforma a su forma discreta mediante:

$$A_d = e^{AT_s}, \quad B_d = A^{-1}(A_d - I)B \quad (4.34)$$

3. **Inicialización de variables** Se definen las condiciones iniciales:

- $P_0 = Q$
- Iteración inicial: $k = 0$

4. **Iteración de la ecuación de Riccati (versión discreta)** Se aplica el siguiente esquema:

$$\tilde{P}_{k+1} = Q + A_d^\top P_k A_d - A_d^\top P_k B_d (R + B_d^\top P_k B_d)^{-1} B_d^\top P_k A_d \quad (4.35)$$

5. **Suavizado de la actualización** Para evitar inestabilidad numérica, se actualiza la matriz P como:

$$P_{k+1} = \alpha \cdot \tilde{P}_{k+1} + (1 - \alpha) \cdot P_k \quad (4.36)$$

6. **Verificación de convergencia** La iteración continúa hasta que:

$$\|P_{k+1} - P_k\|_F < \epsilon \quad (4.37)$$

7. **Cálculo de la ganancia óptima K** Una vez alcanzada la convergencia, se calcula la ganancia:

$$K = (R + B_d^\top P B_d)^{-1} B_d^\top P A_d \quad (4.38)$$

8. **Actualización del controlador** Se actualiza la ley de control con la ganancia calculada:

$$\mathbf{u}_k = -K \mathbf{x}_k \quad (4.39)$$

Como las matrices $A(v)$, B y por lo tanto K , pueden cambiar con el tiempo, el procedimiento completo se repite de forma continua cada vez que se actualizan los parámetros $\hat{\Theta}$.

En la figura 4.33 se observa un ejemplo, donde se consideró la siguiente matriz de ponderación:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que penaliza en mayor medida las desviaciones en el estado de la inclinación de la bicicleta. Para la señal de control, se estableció:

$$R = 0,1$$

lo que restringe el uso excesivo de la acción de control.

A partir de esta configuración, se obtuvieron los siguientes polos del sistema al variar la velocidad, garantizando su estabilidad.

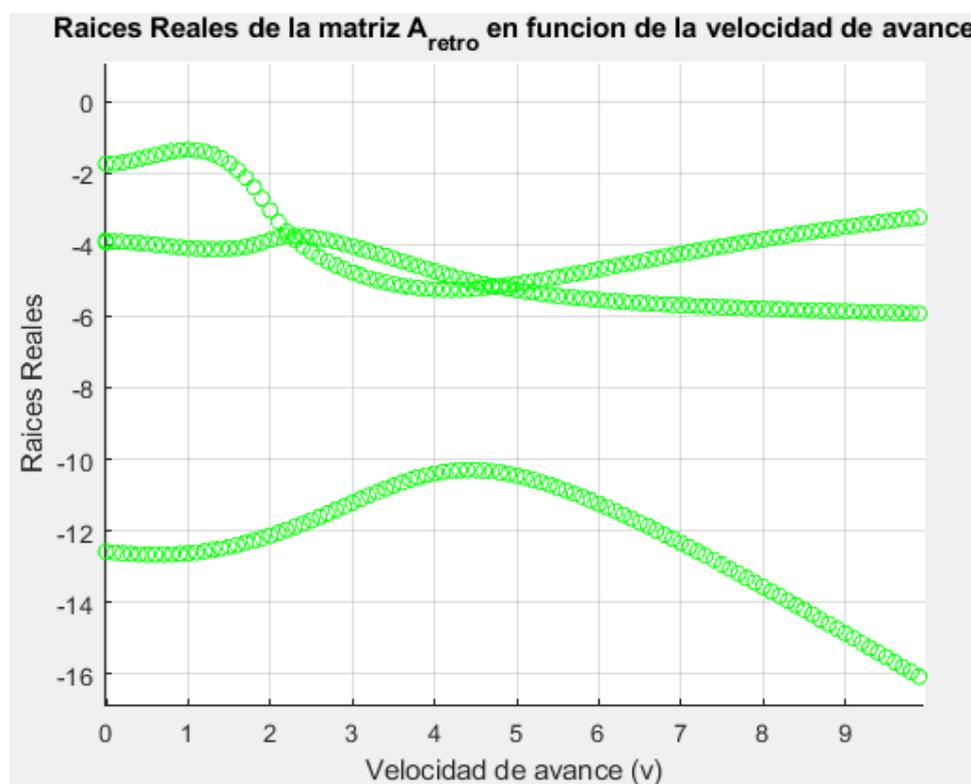


Figura 4.33: Region estable. Gráfica de la parte real de los polos del nuevo sistema A-BK. todos los polos todos son negativos, por lo la bicicleta es estable con la retroalimentación.

Nota

La Figura 4.33 muestra la distribución de polos del sistema con retroalimentación idealizada. Empíricamente se conoce que la bicicleta no es capaz de estabilizarse únicamente con movimientos en el manubrio a velocidad igual a cero por lo tanto en el siguiente capítulo, se evaluará el sistema incluyendo sus restricciones físicas, como el límite de giro del manubrio, que no puede superar los 360° , y la saturación en torque y velocidad de los motores. Así mismo, se experimentará con diferentes combinaciones de Q y R para determinar la configuración que optimiza el desempeño del controlador.

Control PI para la velocidad de la llanta

Diagrama de fuerzas y modelo matemático

En la Figura 4.37 se presenta el diagrama de fuerzas aplicado a la llanta trasera. Este modelo, basado en [69], considera que no hay deslizamiento ni deformación de la rueda, y que el coeficiente de fricción es constante. Bajo estas suposiciones, la velocidad de la bicicleta v está relacionada con el par aplicado T_{rw} mediante la siguiente función de transferencia:

$$G_{vT}(s) = \frac{v(s)}{T_{rw}(s)} = \frac{R_{rw}}{(A_{yy} + m_t R_{rw})s + \mu_d}. \quad (4.40)$$

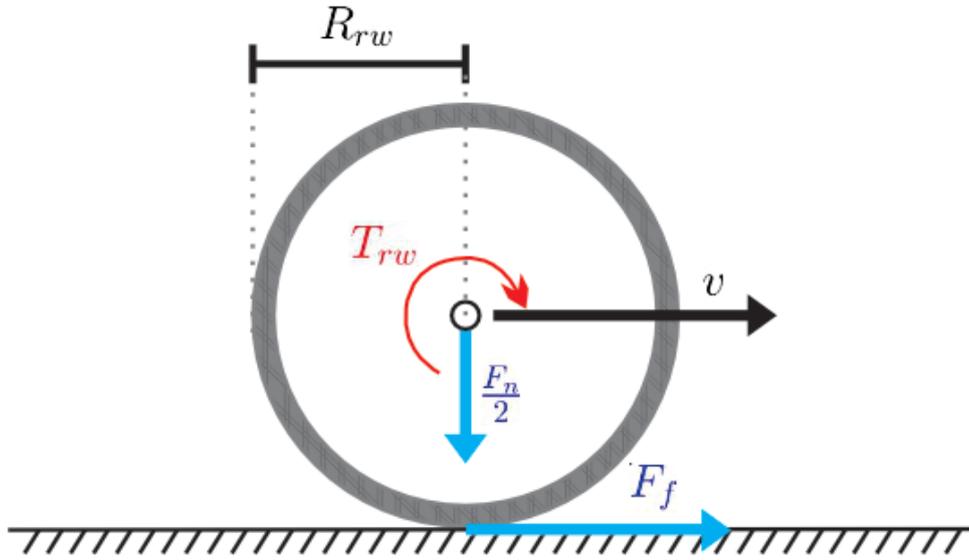


Figura 4.34: Diagrama de fuerzas y momentos en el eje de la llanta trasera.

Control PI y efectos sobre el sistema

Para regular la velocidad v , se implementa un controlador proporcional-integral (PI), cuya ecuación está dada por:

$$T_{rw} = -K_p e_v - K_i \int_0^t e_v dt, \quad (4.41)$$

donde $e_v = v - v^*$ es el error entre la velocidad actual v y la deseada v^* . La nueva función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$T_o(s) = \frac{K_p s + K_i}{\left(\frac{A_{yy} + m_t R_{rw}}{R_{rw}}\right) s^2 + \left(\frac{K_p R_{rw} + \mu_d}{R_{rw}}\right) s + K_i}. \quad (4.42)$$

Cálculo de K_p y K_i

Para sintonizar las ganancias del controlador, se definen los parámetros deseados del sistema ω_0 (frecuencia natural) y ζ_0 (coeficiente de amortiguamiento).

El tiempo de establecimiento t_s está relacionado con $\zeta_0 \omega_0$ mediante:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta_0 \omega_0}. \quad (4.43)$$

Dado que $t_s = 5$ s, se tiene:

$$\zeta_0 \omega_0 = \frac{4}{5} = 0,8. \quad (4.44)$$

Asumiendo $\zeta_0 = 0,7$, se obtiene:

$$\omega_0 = \frac{0,8}{0,7} \approx 1,14 \text{ rad/s}. \quad (4.45)$$

Sustituyendo en las ecuaciones 4.46 y 4.47, se calculan K_p y K_i :

$$K_p = \frac{2(A_{yy} + m_t R_{rw}) \zeta_0 \omega_0 - \mu_d}{R_{rw}}, \quad (4.46)$$

$$K_i = \frac{(A_{yy} + m_t R_{rw}) \omega_0^2}{R_{rw}}, \quad (4.47)$$

Finalmente, los valores obtenidos son:

- $K_p = 30,4491$
- $K_i = 25,6728$

4.3.7. Algoritmos

En esta sección se proponen los algoritmos a implementar dentro del microcontrolador para:

- Realizar el control PI, donde se mide la velocidad de la llanta y se calcula el voltaje necesario para activar el motor.
- Realizar el control adaptable y aplicarlo sobre el motor del manubrio.
- Lecturas de los estados ϕ y $\dot{\phi}$ a partir del sensor MPU.
- Lecturas de los estados δ y $\dot{\delta}$ a partir del sensor encoder.

PI para controlar velocidad de la llanta

Se calcula la velocidad mediante dos métodos, pero en ambos casos se utilizó la misma fórmula:

$$\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (4.48)$$

donde ω y θ son la velocidad y la posición angular de la llanta, respectivamente, y el tiempo se denota por t .

La diferencia entre ambas mediciones es que en una se mantiene constante el tiempo de muestreo y se calcula cuántas revoluciones (es decir, $\Delta\theta$) ocurrieron durante ese intervalo de tiempo:

$$\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = \frac{\Delta\theta}{1\text{s}} \quad (4.49)$$

Por otro lado, la segunda forma de medir la velocidad calcula el tiempo que transcurrió entre dos revoluciones. Por lo tanto, se mantiene constante $\Delta\theta$ y los cambios se representan en Δt .

$$\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (4.50)$$

Al finalizar, se promedian ambas velocidades para obtener un valor más preciso.

En la Figura 4.35 se muestra el diagrama de flujo en el que se programaron los periféricos y las interrupciones.

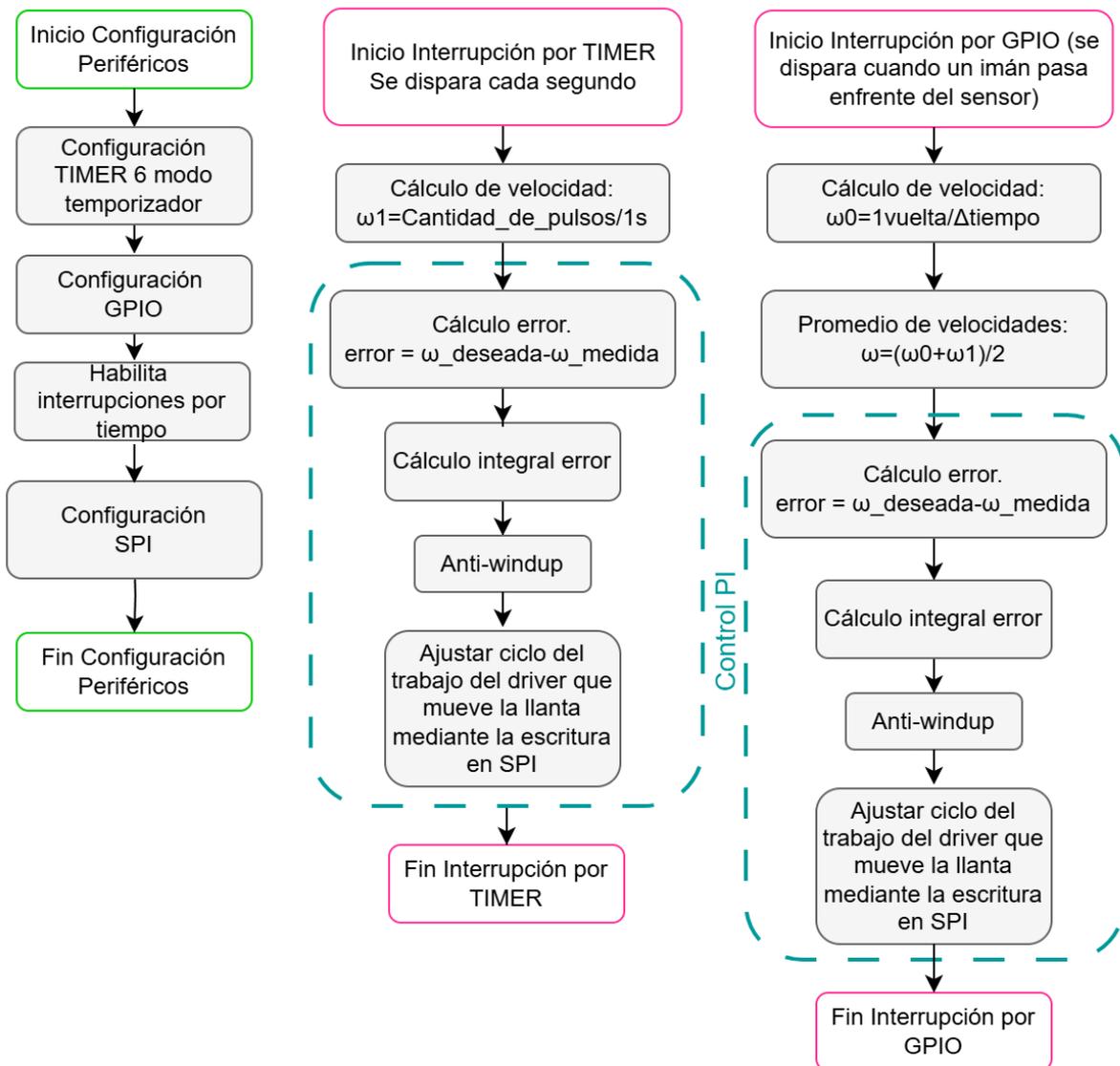


Figura 4.35: Diagrama de programación del sensor de revoluciones por minuto.

El anti-windup es un algoritmo que evita que la parte integral se acumule en caso de que el actuador se sature. Si existe saturación en el actuador, el error integral se mantiene constante. De esta forma, cuando haya un cambio en el signo del error, este no producirá sobretiros.

Obtención de ϕ y $\dot{\phi}$

En la Figura 4.36 se observan los pasos a seguir para programar el microcontrolador y así obtener los estados ϕ y $\dot{\phi}$ (denotado también como ω_r en este contexto).

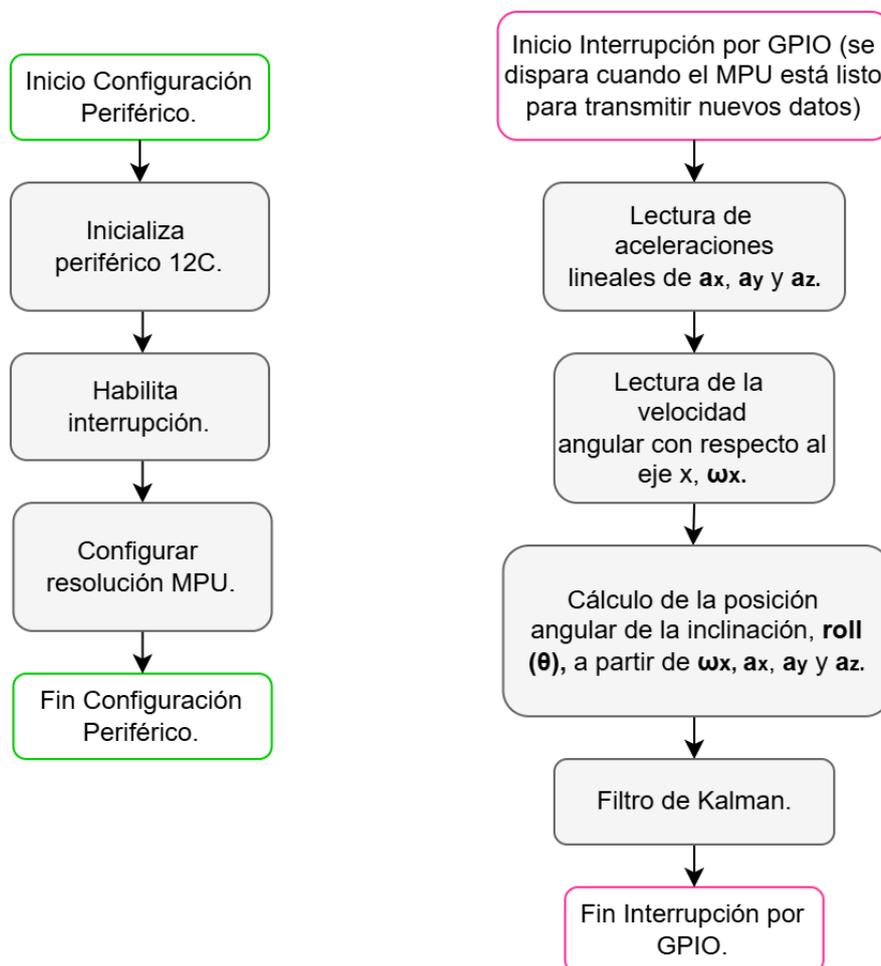


Figura 4.36: Diagrama de programación del MPU6050.

El cálculo del ángulo de roll ϕ se realiza mediante estas dos expresiones:

- **Medición de ϕ con acelerómetro:**

$$\phi_{\text{acc}}(t) = \arctan \left(\frac{a_y(t)}{\sqrt{a_x(t)^2 + a_z(t)^2}} \right) \quad (4.51)$$

- **Medición de ϕ con giroscopio (por integración):**

$$\phi_{\text{acc}}(t) = \phi_{\text{acc}}(t - 1) + \omega_x(t) \cdot \Delta t \quad (4.52)$$

Donde:

- $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$: aceleraciones lineales en los ejes x , y y z en el instante t [m/s²].

- $\omega_x(t)$: es la velocidad angular en el eje x en el instante t [rad/s].
- T_s : tiempo de muestreo es constante. En este caso, $T_s = 0,01$ s.

Con el fin de minimizar los errores producidos por el ruido en las mediciones y tener un resultado más preciso de la estimación de estos estados, se implementa un filtro de Kalman, el cual consiste en dos puntos: primero se realiza una estimación de los estados y, posteriormente, se hace una corrección.

Paso de predicción

$$\hat{\phi}_{t|t-1} = \phi_{\text{acc}}(t) \quad (4.53)$$

$$P_{t|t-1} = P_{t-1} + Q \cdot \Delta t^2 \quad (4.54)$$

Paso de corrección

$$K_t = \frac{P_{t|t-1}}{P_{t|t-1} + R} \quad (4.55)$$

$$\hat{\phi}_t = \hat{\phi}_{t|t-1} + K_t \cdot [\phi_{\text{acc}}(t) - \hat{\phi}_{t|t-1}] \quad (4.56)$$

$$P_t = (1 - K_t) \cdot P_{t|t-1} \quad (4.57)$$

Donde:

- $\hat{\phi}_{t-1}$: estimación corregida del ángulo en el instante anterior.
- $\hat{\phi}_{t|t-1}$: predicción del ángulo en el instante t , antes de la corrección.
- $\hat{\phi}_t$: estimación corregida del ángulo en el instante t .
- P_{t-1} : varianza corregida en el instante anterior.
- $P_{t|t-1}$: varianza predicha antes de la corrección.
- P_t : varianza corregida.
- K_t : ganancia de Kalman.
- $Q = 16$: varianza del modelo (ruido del proceso, giroscopio).
- $R = 9$: varianza de la medición (acelerómetro).

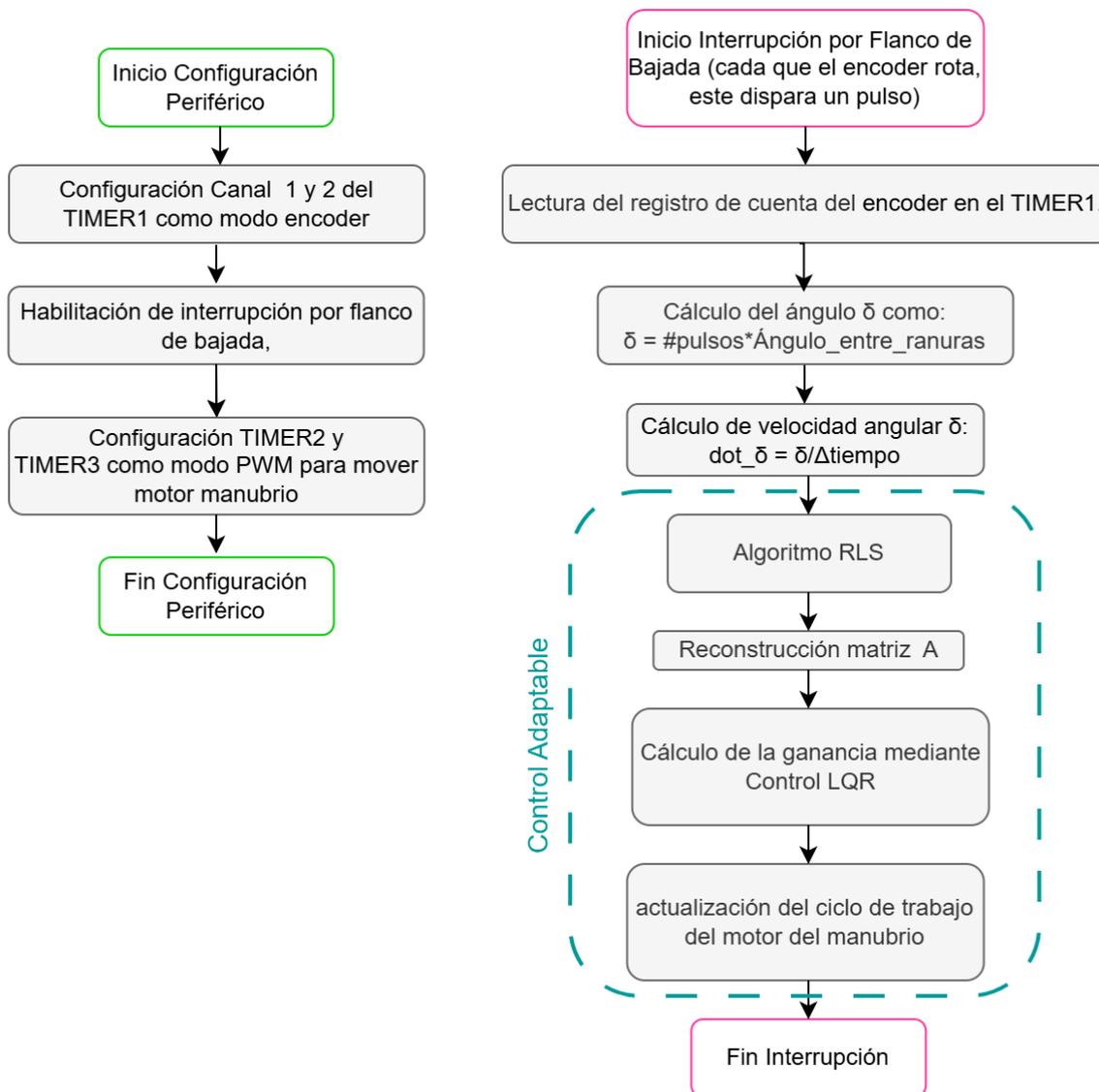
Obtención de δ y $\dot{\delta}$ 

Figura 4.37: Diagrama de programación del Encoder.

4.3.8. Costos

En esta sección se realizó una investigación de los proveedores de los componentes para construir la bicicleta al menor precio:

Sistema	Componente	Precio (MXN)	Cita
Actuadores	Motor MY1020 (1000W, 48V)	3,025.19	[70]
Actuadores	Motor Gimson GR-WM4 (24V, 16 Nm)	1,600.00	[71]
Actuadores	HS2741 PWM Speed Controller DC	125.31	[72]

Sistema	Componente	Precio (MXN)	Cita
Actuadores	Potenciómetro digital MCP41010	40.00	[73]
Actuadores	BTS7960 (Puente H)	129.00	[74]
Sensores	Encoder S38 (100 PPR) (2 uds)	277.00	[75]
Sensores	Final de carrera V153 1C25	63.90	[76]
Sensores	Sensor MPU6050 (IMU)	97.00	[77]
Sensores	Sensor KY-024 (Efecto Hall)	28.00	[78]
Energía	Celda Samsung INR18650-30Q (48 uds)	55.82	[79]
Energía	BMS 40A	129.00	[80]
Cerebro	STM32 Nucleo F439ZI	1,200.00	[81]
Mecánica	Cassette bicicleta 7 velocidades	100.00	[82]
Mecánica	Engrane Kinley moto + cadena	164.00	[83]
Mecánica	Placa de acero	100.00	-
Mecánica	1kg de TPU	289.00	[84]
Mecánica	1kg de PETG	319.00	[85]
Mecánica	Tornillos	200.00	-
Mecánica	Placa de MDF de 80cm	299.00	[86]
Mecánica	Caja reductora para MY1020	1,705.00	[87]
Mecánica	Tensor de cadena universal	140.00	[88]
Total		13,309.86	

El costo de la materia prima requerida para adaptar una bicicleta de ruta a este proyecto es de \$13,309,86 MX, estos precios ya incluyen los gastos por envío a Ciudad de México. Alcanzando la meta de construir este sistema con menos de 15,000.00 (quince mil) pesos mexicanos.

En las Figuras 4.38, 4.39, 4.40 y 4.41 se muestra el prototipo construido.

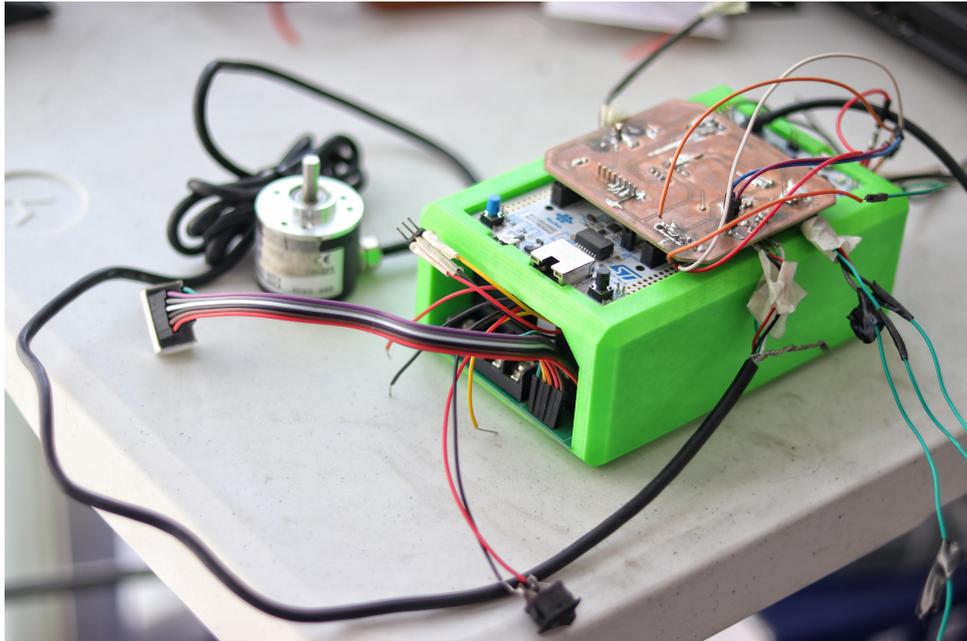


Figura 4.38: Electrónica integrada.



Figura 4.39: Estructura de conexión entre el motor Gimson, el manubrio y el encoder.



Figura 4.40: Transmisión de par desde el motor My1020 a la llanta trasera.



Figura 4.41: Vista lateral del prototipo construido.

Diagrama Diseño a Nivel Detalle

En el siguiente esquema se muestran de manera simplificada todas las interconexiones entre todos los elementos descritos en esta sección.

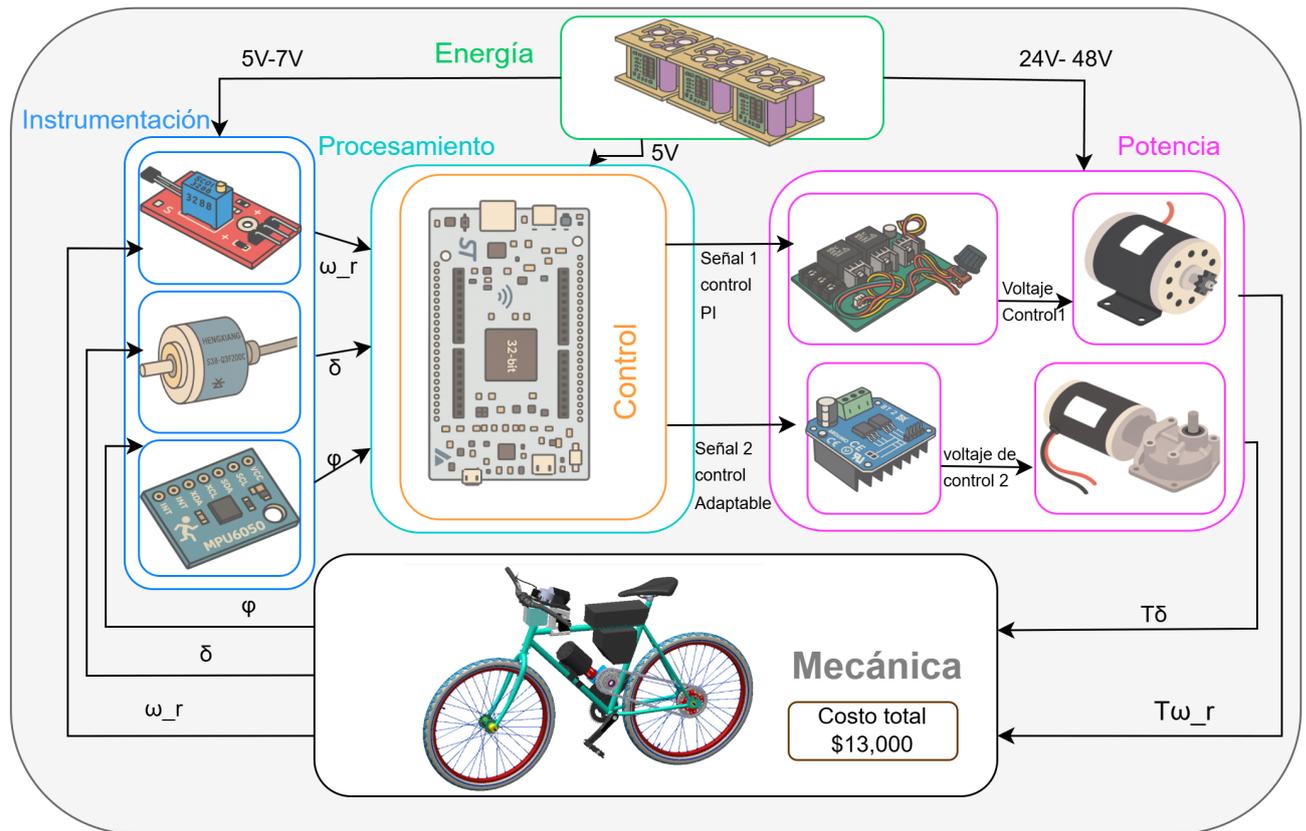


Figura 4.42: Diagrama del diseño a nivel detalle.

Capítulo 5

Pruebas

5.1. Introducción

Este capítulo presenta los resultados experimentales de las estrategias de control implementadas en este trabajo, donde se consideraron las restricciones físicas del sistema. Se analizan cuatro enfoques fundamentales:

- Control LQR con diferentes matrices de ponderación (**Q** y **R**)
- Control adaptable con identificación en línea mediante RLS
- Control PI para regulación de velocidad
- Comparativa crítica entre control óptimo y adaptable

Las pruebas consideran limitaciones reales del sistema:

- Saturación mecánica del manubrio ($\pm 70^\circ$)
- Velocidad angular máxima del motor (0,105 rad/s)
- Torque límite (6 N m)
- Restricción de inclinación física ($\phi < 90^\circ$)

Se evalúan métricas clave: tiempo de estabilización, error en estado estacionario, robustez ante cargas externas y capacidad para operar dentro de los límites físicos del actuador.

5.2. Restricciones físicas del sistema

La dirección del manubrio no puede dar giros de 360° ; de hecho, para mi bicicleta en particular, no es capaz de superar los 70° en ambas direcciones. Por lo tanto, es necesario colocar un saturador a δ para que no supere estos rangos de posición.

Por otro lado, el motor del manubrio no es capaz de moverse a velocidades mayores a 1 rpm (0,105 rad/s), por ello también es necesario un saturador para $\dot{\delta}$.

La bicicleta tampoco puede superar los 90° en la inclinación, ya que esto representaría que la bicicleta ha caído. En simulación se requiere agregar un saturador para ϕ , y en caso de que este estado llegue a tocar el suelo, se debe tener en cuenta que los datos posteriores no tienen sentido físico.

También es necesario considerar que el torque máximo del motor del manubrio es de 6 N m.

5.3. Sintonizar ganancias \mathbf{Q} y \mathbf{R}

El objetivo de esta prueba es encontrar los costos \mathbf{Q} y \mathbf{R} que consigan tener un buen desempeño en la bicicleta. Básicamente, la matriz \mathbf{Q} penaliza las desviaciones de los estados; entre más grande es este término, el control reacciona de manera más agresiva ante errores. Dentro de la matriz, se pueden asignar valores más grandes a los estados que más interesa regular, lo cual es una forma de modificar la prioridad de los estados. Por otro lado, el costo \mathbf{R} penaliza el uso excesivo de un actuador. Ajustar correctamente este parámetro nos puede ayudar a evitar saturaciones en los actuadores del sistema.

Se experimentó con los siguientes valores de \mathbf{R} : 10, 1, 0.1 y 0.01. Mientras que, para la matriz \mathbf{Q} , donde solo se varió su primer elemento (Q_{11}), se utilizaron los valores: 1, 10, 100 y 1000. Visualmente, la matriz \mathbf{Q} se definió de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: únicamente se modificó el primer elemento en la matriz anterior, debido a que este corresponde al primer estado del sistema (ϕ), el ángulo de inclinación de la bicicleta. Se espera que, al modificar su prioridad, este sea el primer estado en converger a cero, donde 0 rad significa que la bicicleta está completamente recta.

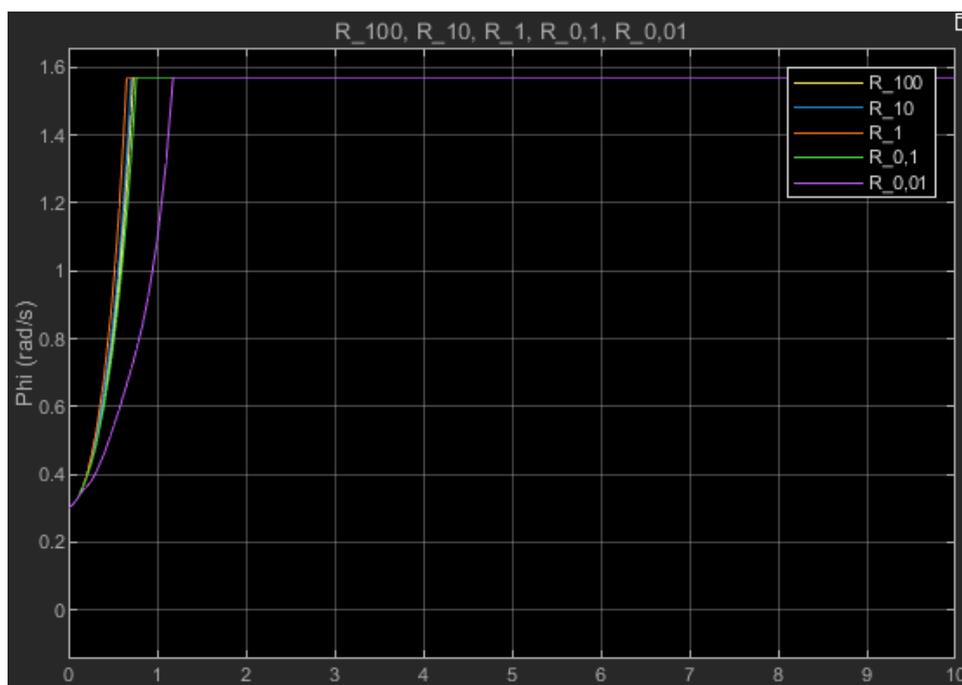
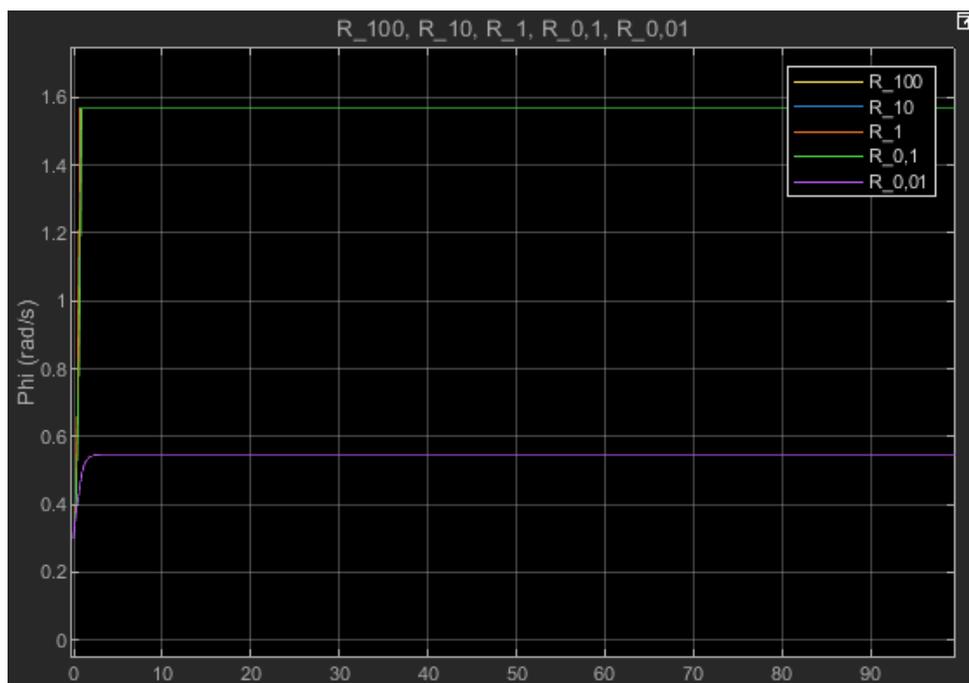
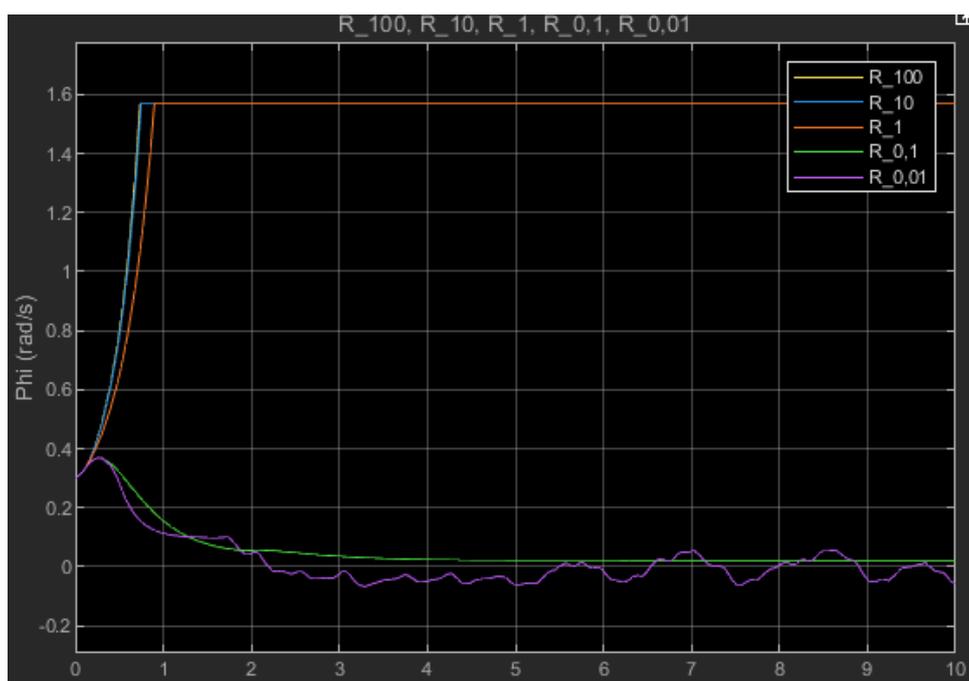


Figura 5.1: Evolución de los estados del sistema con control LQR para $Q = 1$.

Figura 5.2: Evolución de los estados del sistema con control LQR para $Q = 10$.Figura 5.3: Evolución de los estados del sistema con control LQR para $Q = 100$.

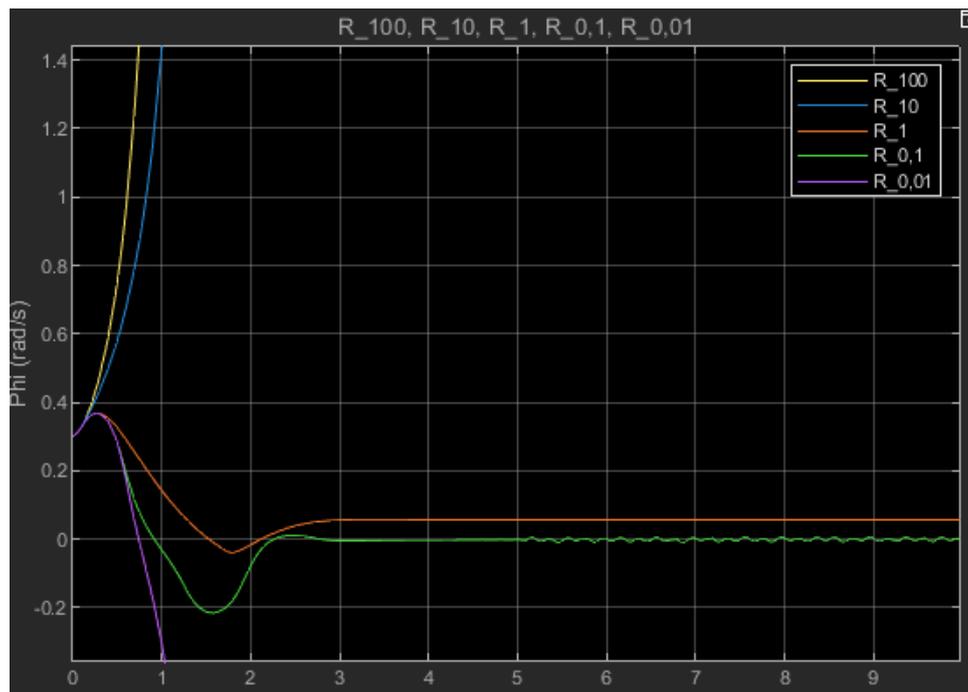


Figura 5.4: Evolución de los estados del sistema con control LQR para $Q = 1000$.

Q/R	10	1	0.1	0.01
1000	No se estabiliza	Se estabiliza, pero no en el ángulo deseado	Se estabiliza en el ángulo deseado	No se estabiliza
100	No se estabiliza	No se estabiliza	Se estabiliza en el ángulo deseado	Se estabiliza en el ángulo deseado
10	No se estabiliza	No se estabiliza	No se estabiliza	Se estabiliza, pero no en el ángulo deseado
1	No se estabiliza	No se estabiliza	No se estabiliza	No se estabiliza

Cuadro 5.1: Resultados de estabilidad según Q/R .

Con el fin de comparar el rendimiento de los tres casos anteriores, se graficaron simultáneamente en la Figura 5.5. Además, se agregó una nueva combinación con $Q = 500$ y $R = 0,1$.

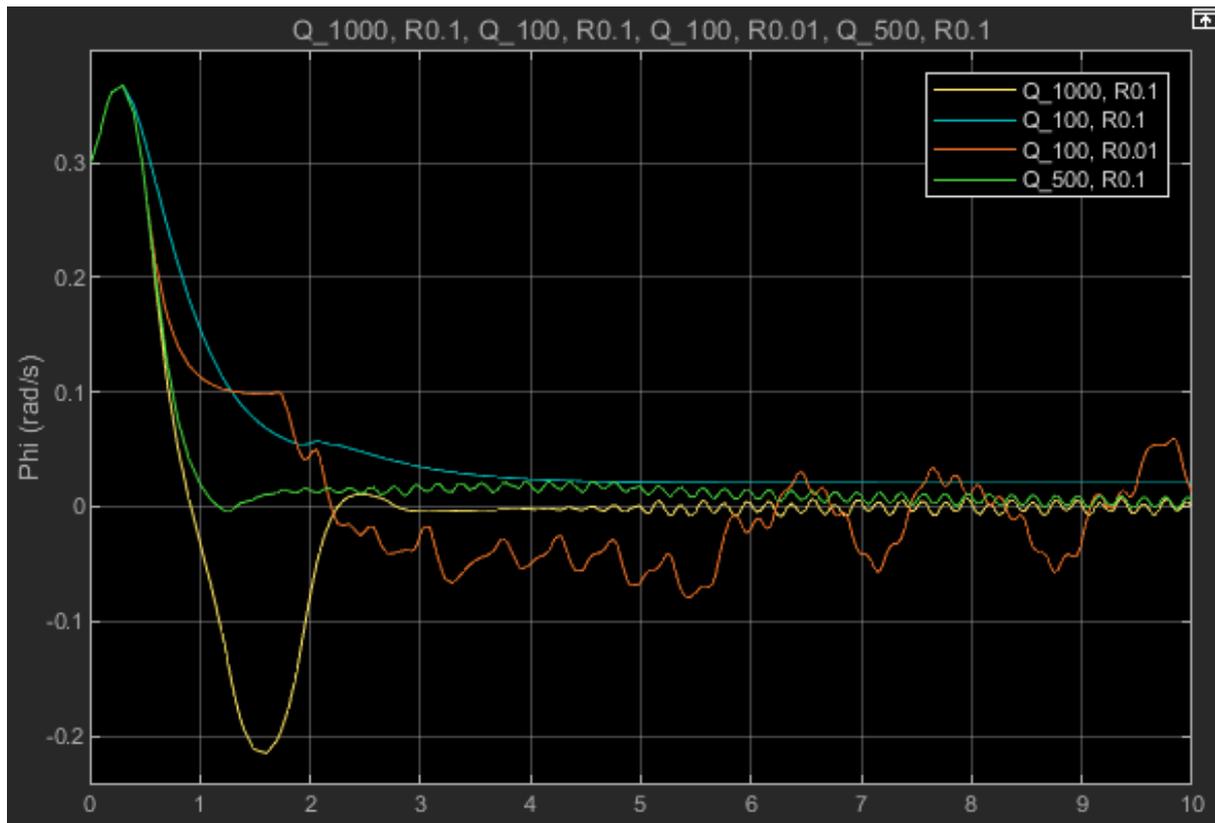


Figura 5.5: Comparación entre: $Q = 1000$, $R = 0,1$ (Amarilla), $Q = 100$, $R = 0,1$ (Azul), $Q = 100$, $R = 0,01$ (Naranja) y $Q = 500$, $R = 0,1$ (Verde).

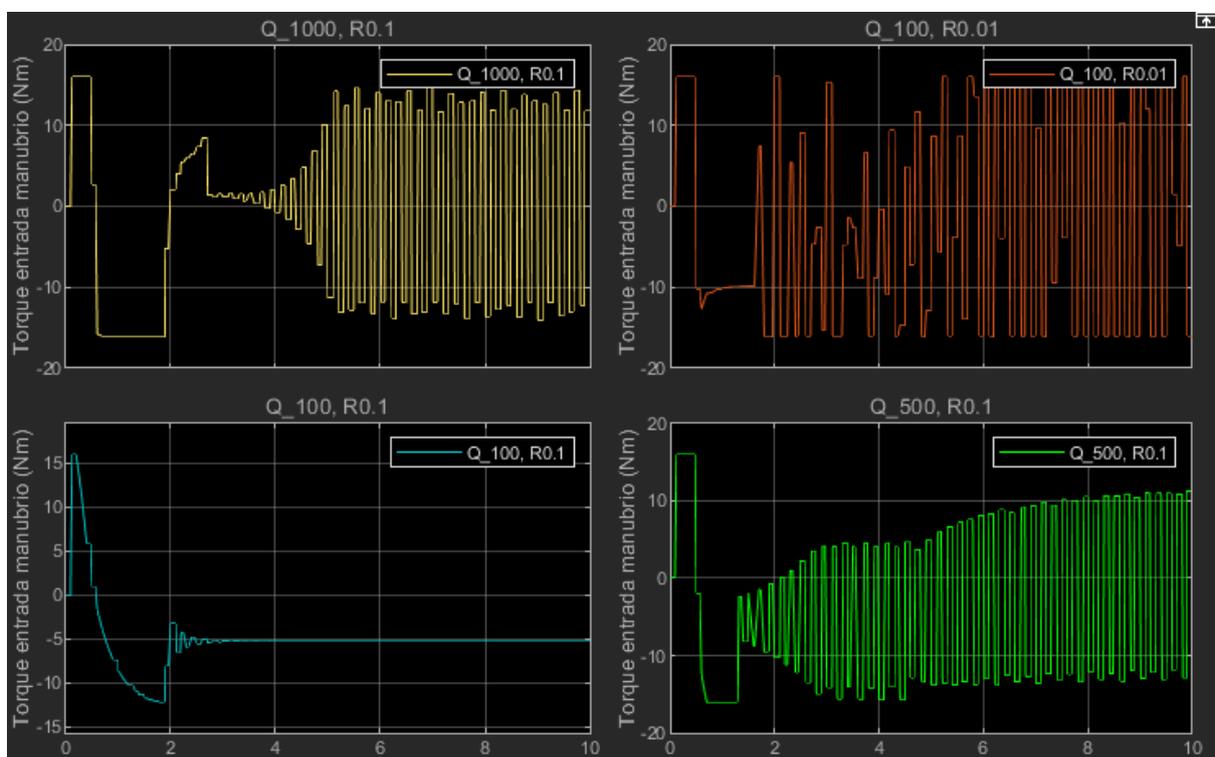


Figura 5.6: Entrada de control para: $Q = 1000$, $R = 0,1$ (Amarilla), $Q = 100$, $R = 0,1$ (Azul), $Q = 100$, $R = 0,01$ (Naranja) y $Q = 500$, $R = 0,1$ (Verde).

Observaciones:

- $Q = 1000, R = 0,1$ (Amarilla): El sistema se estabiliza en aproximadamente 3 s, con un sobretiro de 0.21 rad (12°).
- $Q = 1000, R = 0,1$ (Azul): El actuador apenas se satura y la respuesta converge en 3 s. Sin embargo, mantiene un error en estado estacionario de 0.03 rad (1.71°).
- $Q = 1000, R = 0,1$ (Naranja): El actuador permanece saturado la mayor parte del tiempo, generando oscilaciones con amplitud de 0.05 rad (2.8°).
- $Q = 500, R = 0,1$ (Verde): El sistema alcanza la estabilidad en 7 s; sin embargo, a partir del segundo 1.3, el error ya es inferior a 0.02 rad (1.14°).

El mejor desempeño se encontró con los parámetros del control verde:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 0,1$$

Este caso llega a valores cercanos a cero en menor tiempo; además, el actuador se encuentra menos tiempo en saturación, a diferencia de los demás.

5.4. Algoritmo RLS mediante diferentes señales de excitación

En la siguiente prueba se analizó la estimación de los parámetros del sistema con diferentes señales de excitación. Se consideraron tres señales: constante, sinusoidal y señal cuadrada.

Verdadera matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15,0981 & -1,9436 & -0,3119 & -0,8917 \\ 4,8988 & 17,0800 & 4,2037 & -1,7361 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,30744 \\ 4,1434 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices estimadas con diferentes señales de entrada:

Señal constante:

$$A_{const} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15,0953 & -1,9435 & -0,3120 & -0,8935 \\ 4,7581 & 17,4397 & 4,1941 & -1,7381 \end{bmatrix}$$

$$B_{const} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,2766 \\ 3,7285 \end{bmatrix}$$

Señal sinusoidal:

$$A_{sin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15,0962 & -1,9451 & -0,3120 & -0,8932 \\ 4,7410 & 17,4764 & 4,1949 & -1,7538 \end{bmatrix}$$

$$B_{sin} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,3072 \\ 4,1534 \end{bmatrix}$$

Señal cuadrada:

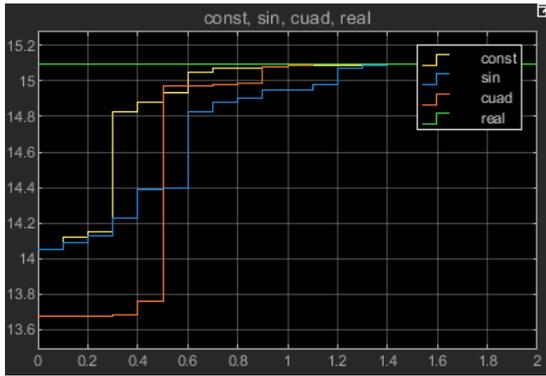
$$A_{cuad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15,0968 & -1,9460 & -0,3120 & -0,8931 \\ 4,7653 & 17,4045 & 4,1946 & -1,7283 \end{bmatrix}$$

$$B_{cuad} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,3071 \\ 4,1132 \end{bmatrix}$$

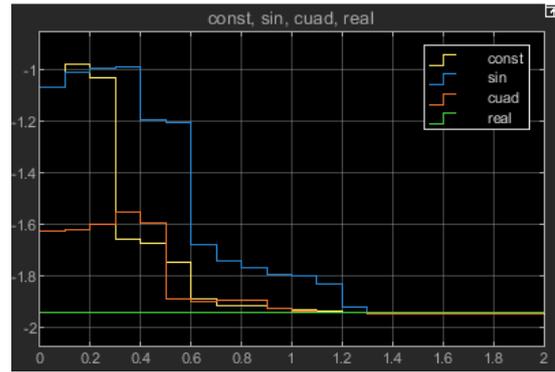
A continuación se presentan individualmente cada uno de los parámetros estimados mediante el algoritmo RLS. Las condiciones en las que se realizaron estos experimentos fueron a velocidad constante de $1,1 \frac{m}{s}$ y un factor de olvido $\lambda = 1$.

$$A_{cuad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \end{bmatrix}$$

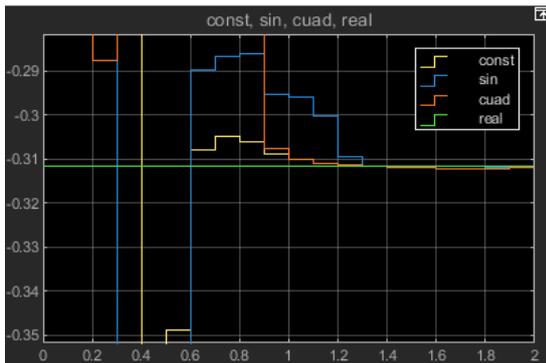
$$B_{cuad} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$



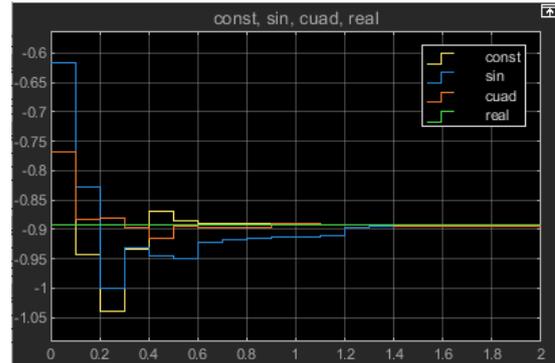
(a) Estimación del parámetro A1



(b) Estimación del parámetro A2



(c) Estimación del parámetro A3



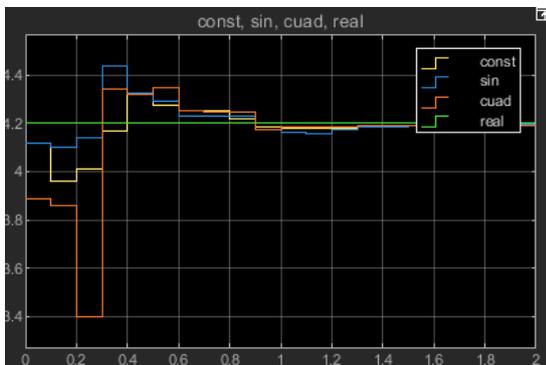
(d) Estimación del parámetro A4



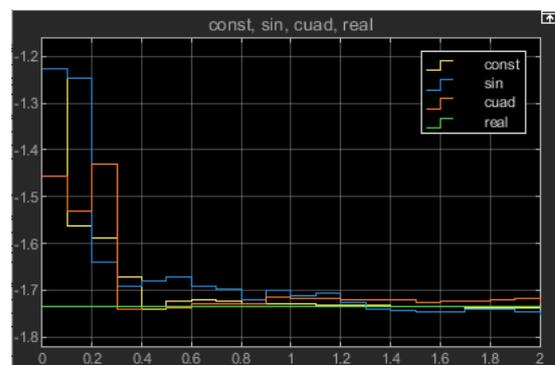
(e) Estimación del parámetro A5



(f) Estimación del parámetro A6

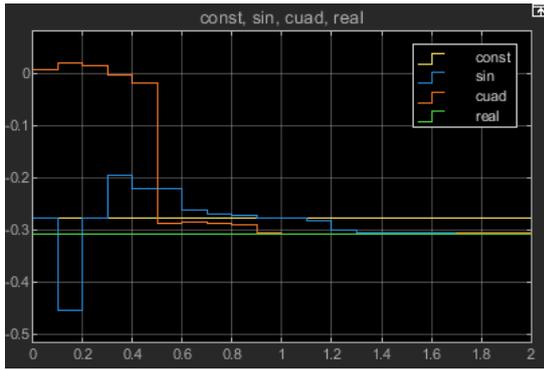


(g) Estimación del parámetro A7

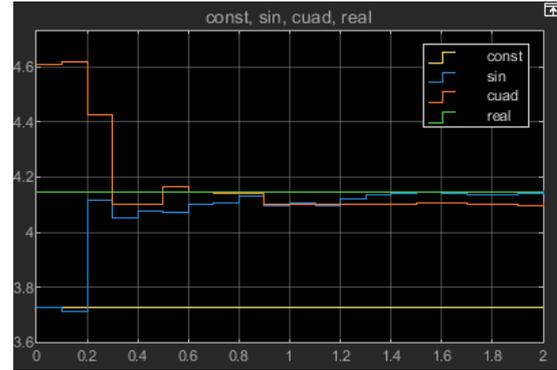


(h) Estimación del parámetro A8

Figura 5.7: Estimación de parámetros A



(a) Estimación del parámetro B1



(b) Estimación del parámetro B2

Figura 5.8: Estimación de parámetros B

Con el fin de comparar los errores en las estimaciones, se utilizó el concepto de error relativo. Para ello, fue necesario calcular la norma de Frobenius de las matrices A y B .

El error relativo de A se obtiene como:

$$\text{error}_A = \frac{\|A - A_{\text{real}}\|_F}{\|A_{\text{real}}\|_F}$$

Por otra parte, el error relativo de B se calcula mediante:

$$\text{error}_B = \frac{\|B - B_{\text{real}}\|_F}{\|B_{\text{real}}\|_F}$$

Para obtener un valor único que represente la desviación total, se promedian los errores individuales de ambas matrices:

$$\text{error relativo} = \frac{\text{error}_A + \text{error}_B}{2}$$

Un error relativo cercano a cero indica que las matrices estimadas son casi idénticas a las reales. En la Figura 5.9 se muestran gráficamente los errores correspondientes a las tres señales de excitación.

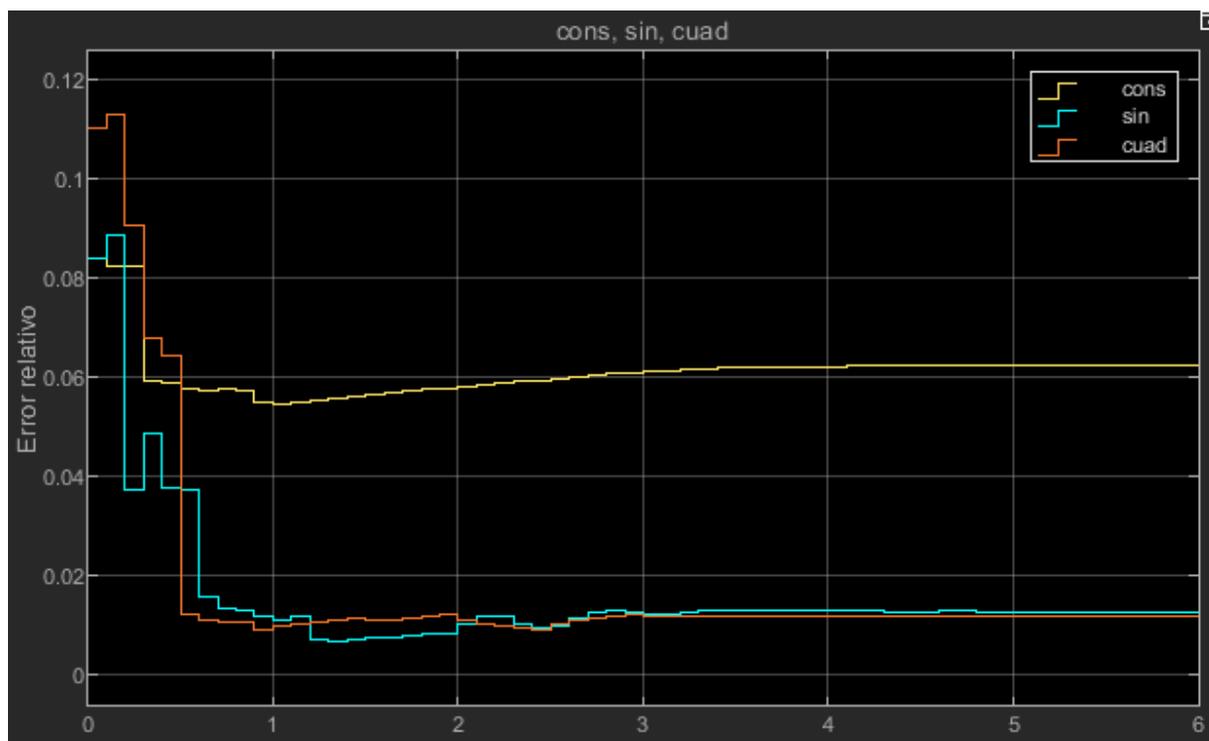


Figura 5.9: Error relativo

Señal de entrada	Error en los estados a los 6s
Constante	0.0626
Sinusoidal	0.0126
Cuadrada	0.0117

La señal de entrada cuadrada consigue obtener mejores estimaciones en los parámetros del sistema, consiguiendo un error del 1 % aproximadamente.

5.5. Sintonización del factor de olvido

Durante este experimento se buscó analizar los efectos de la variación de λ , el cual se conoce como factor de olvido. Este parámetro forma parte del algoritmo RLS y tiene como objetivo poder ajustar la importancia que tienen las lecturas nuevas con respecto a las anteriores. Valores cercanos a 1 provocan que todas las mediciones tengan el mismo peso. Por otro lado, valores cercanos a 0 priorizan las mediciones más recientes.

Durante este ejercicio se agregaron cambios constantes en las inercias del cuadro de la bicicleta, los cuales simulan el cambio en el centro de masa del cuadro. Se implementó una señal tipo diente de sierra como la que se muestra en la Figura 5.10.

Se probaron diferentes valores de λ (0.91, 0.93, 0.95, 0.97, 0.99, 1) para analizar cuál era capaz de producir el mejor desempeño para reconstruir el sistema. En las Figuras 5.11 y 5.12 se muestran los errores relativos obtenidos.

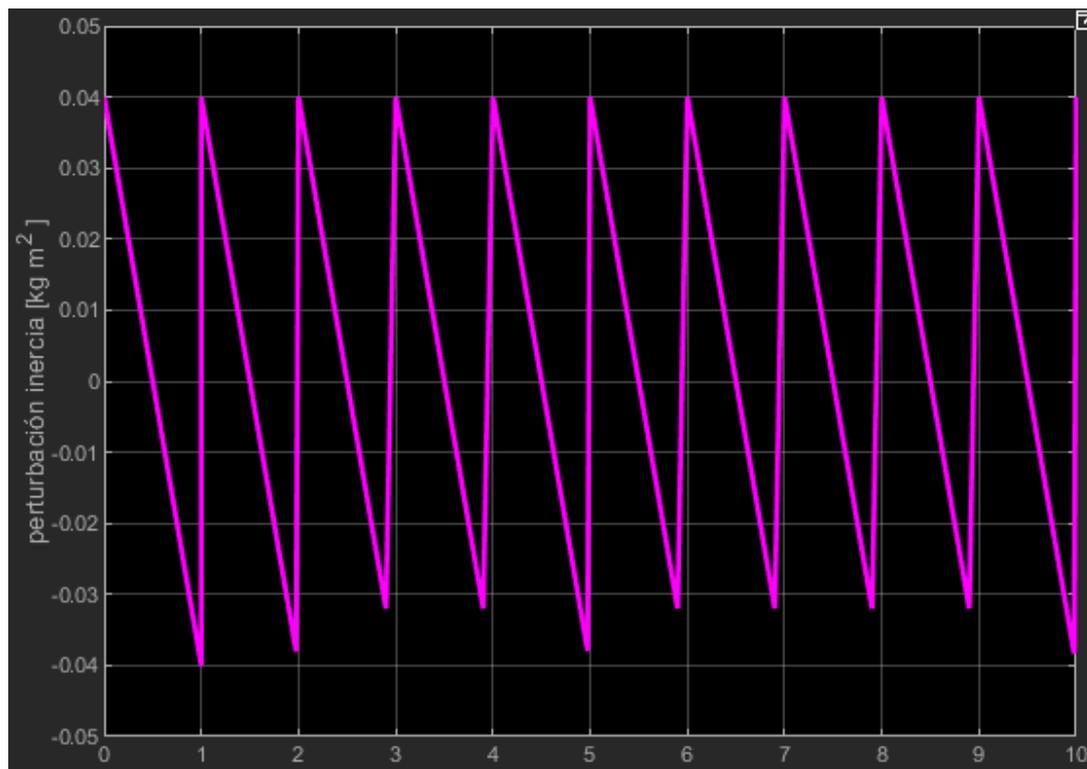


Figura 5.10: Señal propuesta como perturbación en las inercias. Es una señal diente de sierra con frecuencia de 1 Hz. Prueba durante 10 segundos.

La señal anterior se introdujo al sistema mediante el tensor de inercia del cuadro de la bicicleta de la siguiente forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,68 + \text{inercia} & 0 & 0,11 + \text{inercia} \\ 0 & 1,38 - \text{inercia} & 0 \\ 0,11 + \text{inercia} & 0 & 0,76 + \text{inercia} \end{bmatrix} \quad [\text{kg}\cdot\text{m}^2] \quad (5.1)$$

Cabe destacar que se eligieron las variaciones en el cuadro ya que, de los cuatro cuerpos rígidos (tijera, cuadro, llanta delantera y llanta trasera), este es el que cuenta con mayor simpleza para acoplar físicamente una carga. Incluso podría representar a un humano en movimiento.

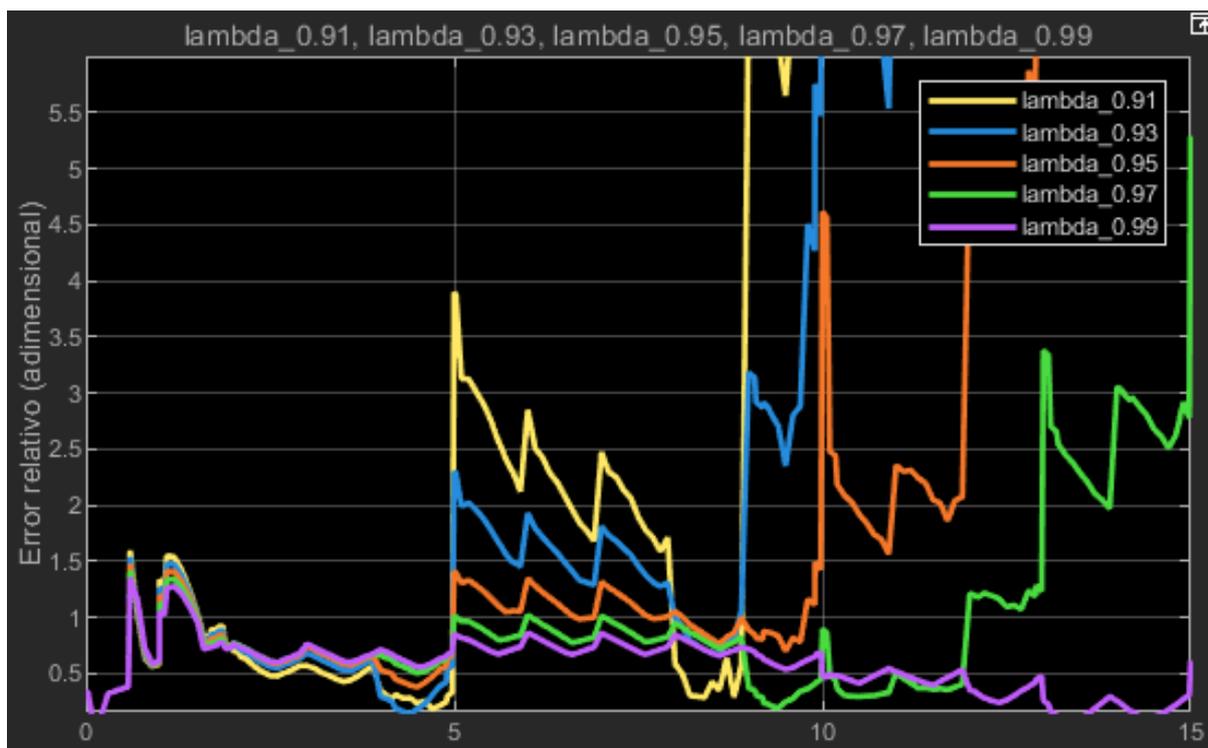


Figura 5.11: Error relativo en la reconstrucción del sistema con los siguientes valores de λ : 0.91, 0.93, 0.95, 0.97, 0.99. La prueba duró 15 segundos.

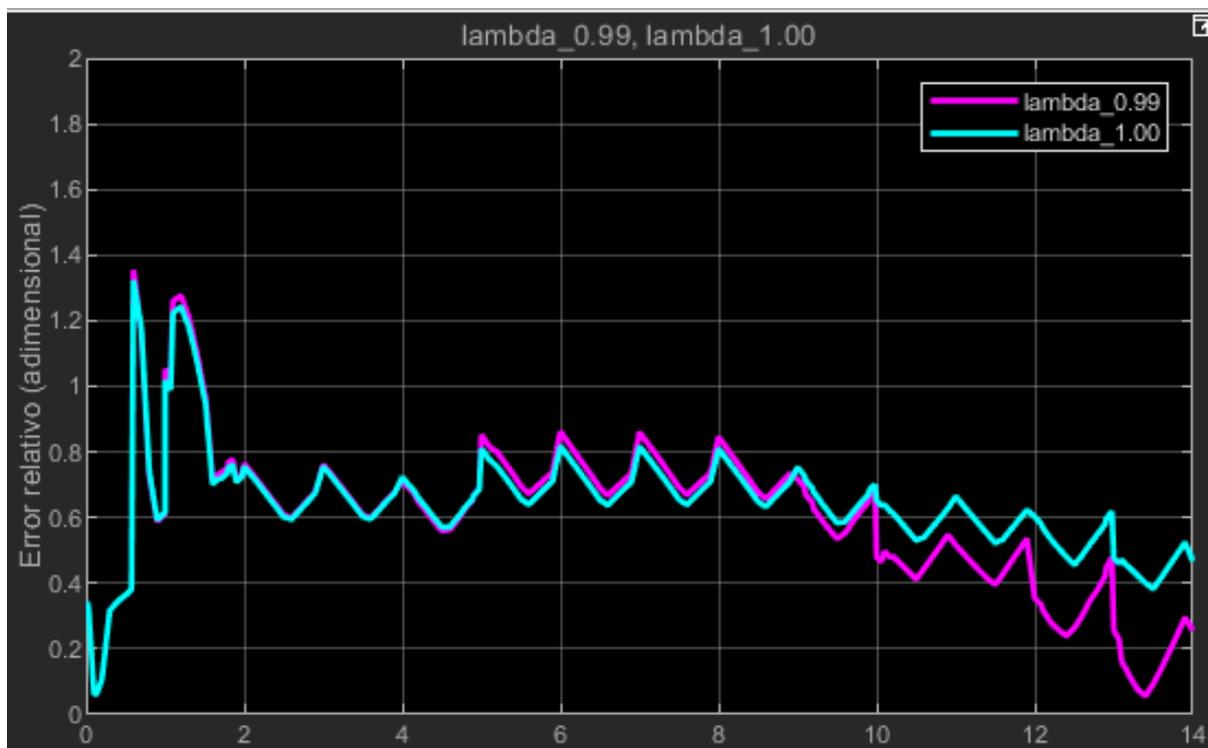


Figura 5.12: Prueba durante 5 segundos. Comparación entre $\lambda = 1$ y $\lambda = 0,99$.

A partir de las observaciones anteriores, se puede concluir lo siguiente:
 Los valores de λ menores o iguales a 0.97 mostraron resultados sorprendentes dentro de

los primeros 5 s de simulación. Sin embargo, a largo plazo no favorecen la convergencia de los parámetros cuando estos se encuentran en un cambio continuo. Los errores en las mediciones se acumulan con cada iteración.

Cuando λ es igual a 0.99, se consiguieron las mediciones más acertadas, consiguiendo errores menores al 60 % (error 0.6 relativo) después de 10s.

En la última prueba (Figura 5.12) Se comparó únicamente el valor de 0.99 contra el de 1. Donde se observa un comportamiento muy similar, hasta después de los 10s se observa que el factor de olvido con 0.99 a largo plazo tiene mejores resultados, alcanzando errores menores al 20 %.

5.6. Control PI

es comprobar que las ganancias calculadas en el capítulo de diseño consigan estabilizar la velocidad de la llanta como se esperaba en teoría ($K_p = 25,67$ y $K_i = 30,45$). se espera que pase de 0 a 1 m/s en 5s exactamente.

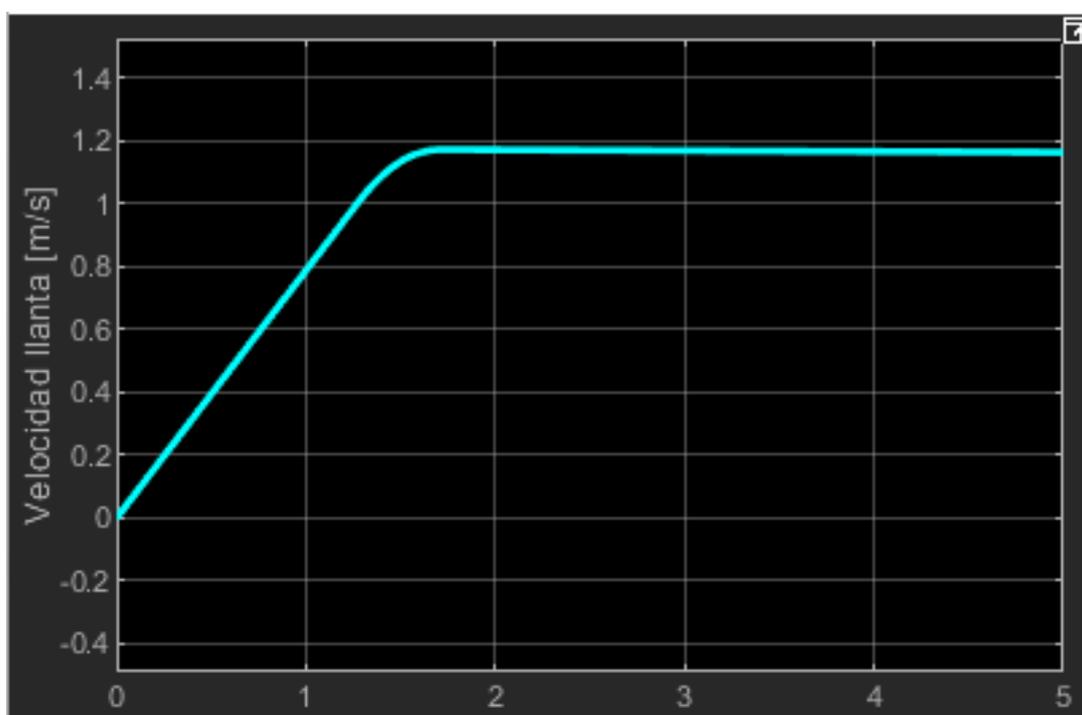


Figura 5.13: Respuesta del control PI al cambiar la velocidad de $0 \frac{m}{s}$ a $1 \frac{m}{s}$.

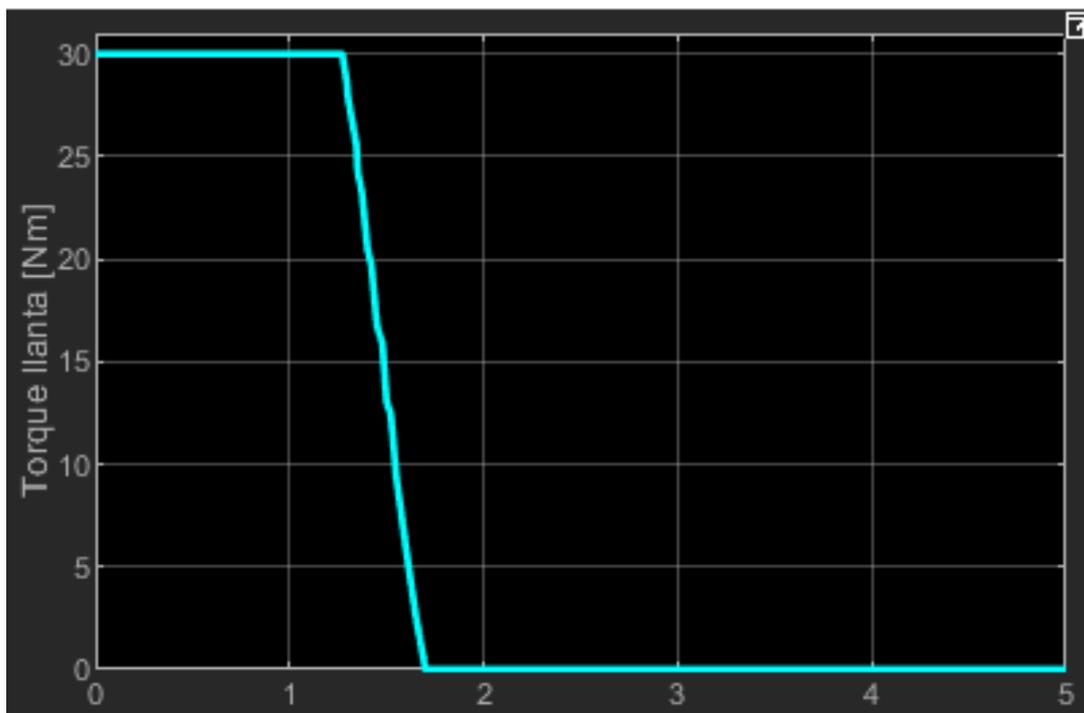


Figura 5.14: Entrada de control aplicada al motor para alcanzar la velocidad deseada.

Estas imágenes (5.13 y 5.14) muestran que el sistema llegó a la velocidad deseada en 1,3s; sin embargo, la velocidad sigue incrementándose y, después de 5 s, no ha podido estabilizarse en la velocidad deseada, teniendo hasta este tiempo un error del 20 %. Estas discrepancias se deben a la naturaleza del motor, el cual comienza a saturarse a partir de 30 Nm de torque. Además, una vez que se pasa el valor deseado, la bicicleta no tiene un actuador que conecte con los frenos, y dado que invertir el giro del motor para frenar podría causar daños al sistema, la única forma de frenar la bicicleta es esperar a que la fricción del suelo con la llanta minimice la inercia de la bicicleta.

Aunque lo anterior parece a simple vista una catástrofe más que un logro, en realidad este desempeño es suficiente para el propósito de este trabajo, ya que el principal elemento que se encarga de estabilizar la bicicleta son los movimientos del manubrio y no la velocidad de la llanta. De hecho, el control del manubrio es capaz de estabilizar la bicicleta incluso desde los 0,4 m/s. Por lo tanto, el control PI para esta prueba se considera aceptado.

Por otro lado, mientras realicé estos experimentos, me percaté de que el control del manubrio no en todos los casos consigue estabilizar la bicicleta a velocidades de 0,4 m/s. De hecho, manteniendo el mismo comportamiento de la llanta visto en la figura 5.13, se colocaron diferentes condiciones iniciales en la inclinación de la bicicleta (ϕ) y se graficaron en la Figura 5.15, donde se observa que al superar los 0,4 rad (aproximadamente 22,9°) en bajas velocidades, el control adaptable no es capaz de mantener el equilibrio.

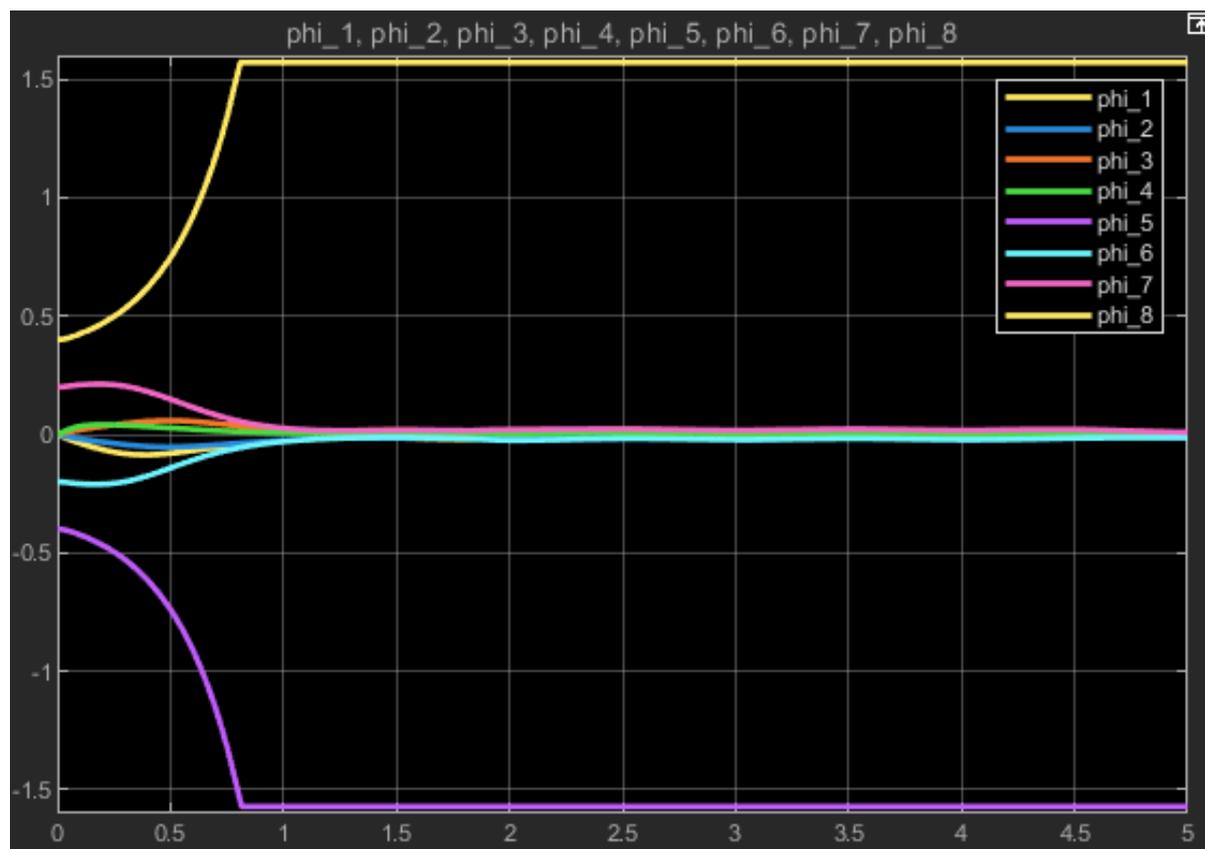


Figura 5.15: Comportamiento del ángulo ϕ al aplicar el control PI en la llanta y el control adaptable en el manubrio.

Para comprender mejor el sistema, se realizó un análisis del plano de fase de los estados ϕ y $\dot{\phi}$ bajo diferentes velocidades de la bicicleta. Los resultados se muestran en las Figuras 5.16 y 5.17. Las condiciones iniciales evaluadas fueron las siguientes coordenadas: $(0, -0,4)$, $(0, -0,2)$, $(0, 0,2)$, $(0, 0,4)$, $(-0,4, 0)$, $(-0,2, 0)$, $(0,2, 0)$ y $(0,4, 0)$

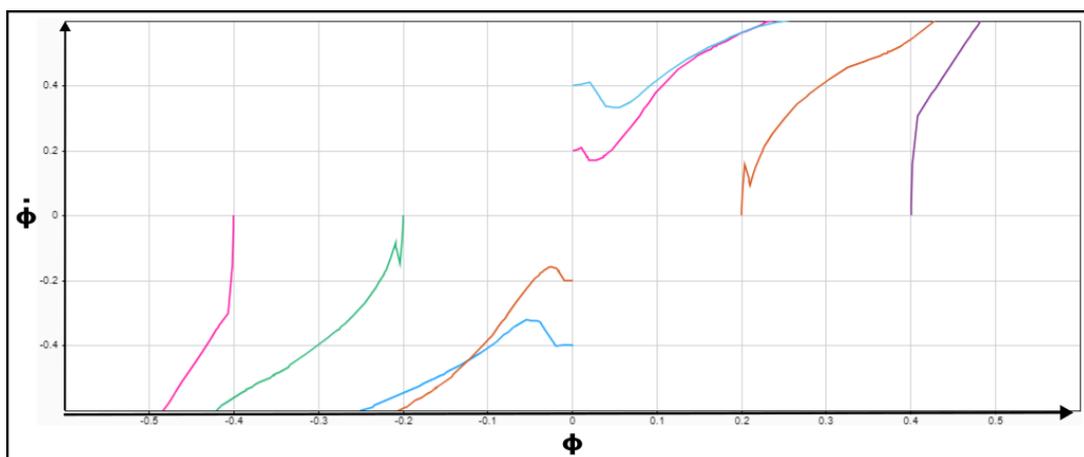
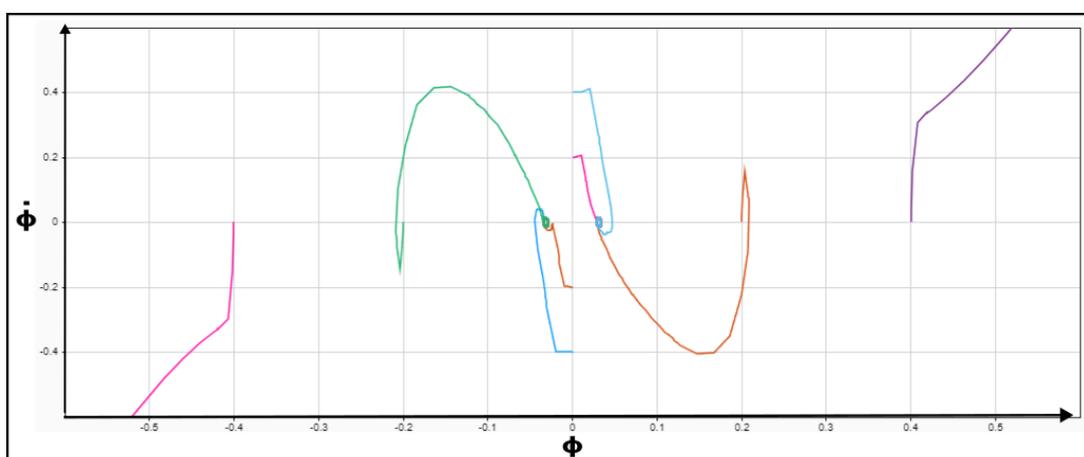
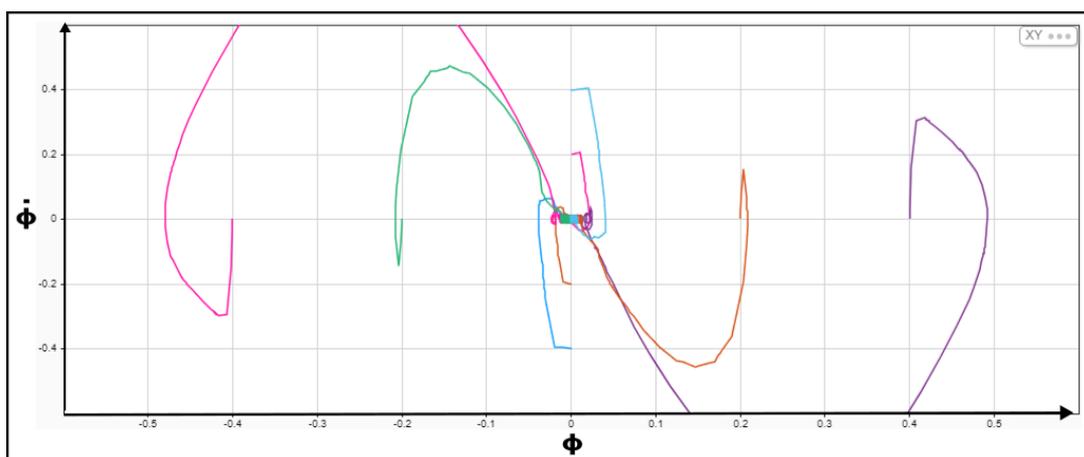
(a) Velocidad = $0 \frac{m}{s}$.(b) Velocidad = $0,4 \frac{m}{s}$.(c) Velocidad = $1 \frac{m}{s}$.

Figura 5.16: Plano de fase para ϕ [rad] (eje X) y $\dot{\phi}$ [rad/s] (eje Y) bajo diferentes velocidades.

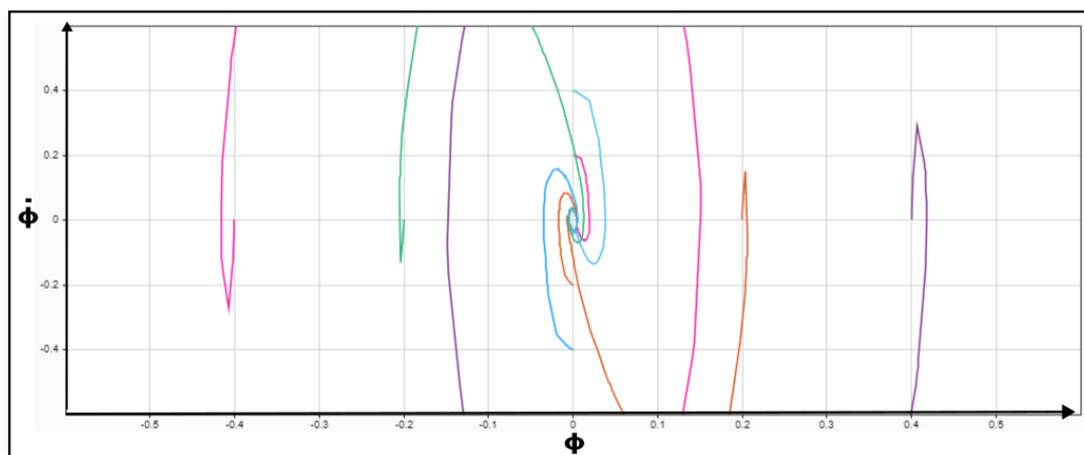
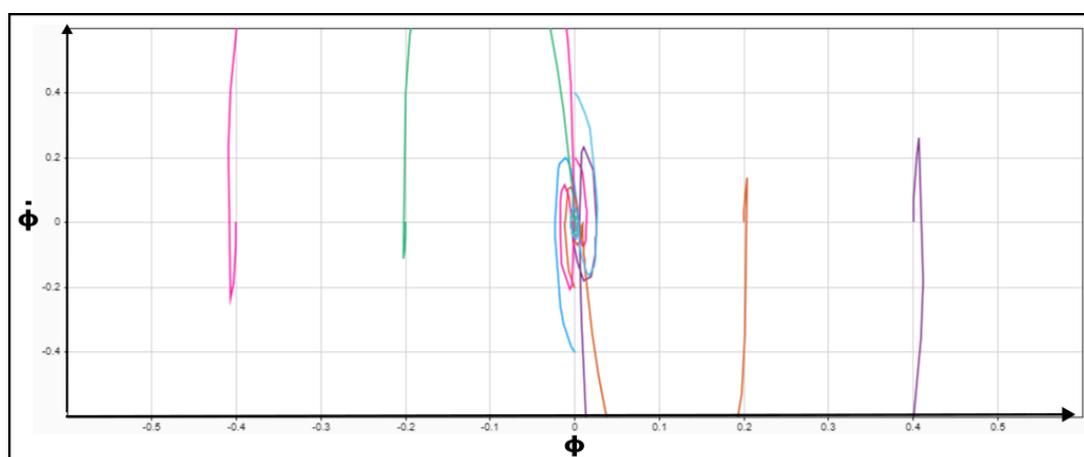
(a) Velocidad = $4 \frac{m}{s}$.(b) Velocidad = $8 \frac{m}{s}$.

Figura 5.17: Plano de fase para ϕ y $\dot{\phi}$ bajo velocidades mayores. Las condiciones iniciales fueron las mismas que en la Figura 5.16.

Análisis

Como se muestra en la Figura 5.16, si la bicicleta se encuentra detenida, no hay forma en que el sistema se pueda controlar; la única región del plano que no diverge es el punto de equilibrio. A partir de 1 m/s , la ley de control adaptable es más robusta, consiguiendo que un mayor número de condiciones iniciales sean capaces de terminar en el origen.

Las constantes $K_p = 25,67$ y $K_i = 30,45$ del control PI mostraron un comportamiento aceptable para esta aplicación. Por otra parte, en caso de realizar pruebas físicas, se recomienda que la velocidad inicial de la llanta sea mínimo 1 m/s para garantizar que el control adaptable del manubrio tenga un mejor rendimiento (una mayor zona de estabilidad).

5.7. Comparación entre un Control LQR con Estimación Directa y Estimación Adaptativa

En esta sección se presenta una comparación entre dos estrategias de control.

La primera técnica utiliza las medidas de la velocidad de la llanta y , a partir de los valores experimentales de inercia y centros de masa obtenidos en el péndulo torsional, reconstruye las matrices A y B del sistema. Con estas matrices se ajusta la ganancia de retroalimentación K mediante la solución de la ecuación de Riccati discreta, la cual se emplea para corregir el error entre los estados deseados y los medidos, cerrando así el lazo de control. Las gráficas identificadas con la sigla “LQR” corresponden a esta técnica. En la Figura 5.20 se puede observar los bloques que conforman esta estrategia.

Por otro lado, la segunda estrategia, eje central de este trabajo, adopta un enfoque adaptable. A diferencia del método anterior, esta técnica estima todas las inercias de la bicicleta mediante el algoritmo RLS. Posteriormente, utilizando las mediciones de la velocidad de la llanta trasera, se reconstruyen las matrices A y B y se ajusta la ganancia de retroalimentación a través de la resolución de la ecuación de Riccati. Las gráficas que incluyen la etiqueta “Adaptable” hacen referencia a este método. En la Figura 5.20 se puede observar los bloques que conforman esta estrategia.

Para evaluar la robustez del sistema de control, se colocaron cinco cargas en el asiento de la bicicleta (1 kg, 5 kg, 10 kg, 15 kg y 20 kg) como se observa en la Figura 5.18. Esta variación en la masa altera la posición del centro de masa y los tensores de inercia, permitiendo analizar el desempeño de ambos controladores.

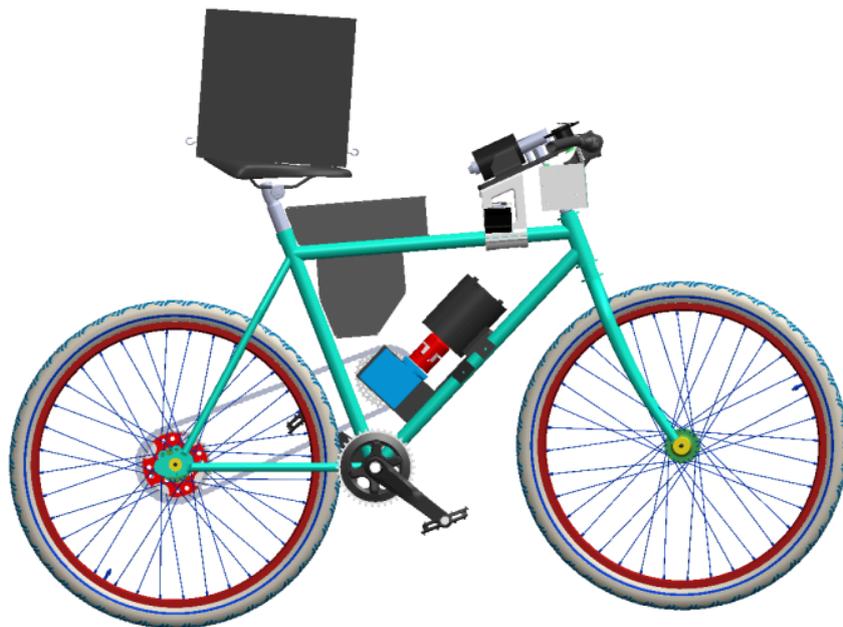


Figura 5.18: Carga útil montada en el asiento de la bicicleta.

5.7. COMPARACIÓN ENTRE UN CONTROL LQR CON ESTIMACIÓN DIRECTA Y ESTIMACIÓN

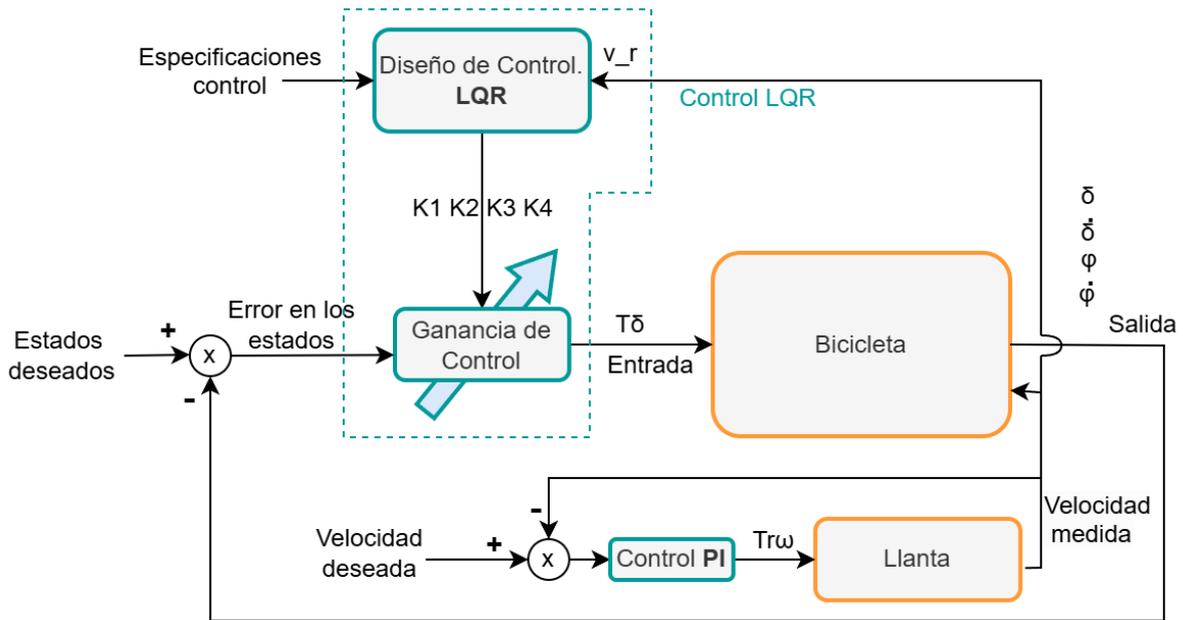


Figura 5.19: Diagrama de bloques del control LQR.

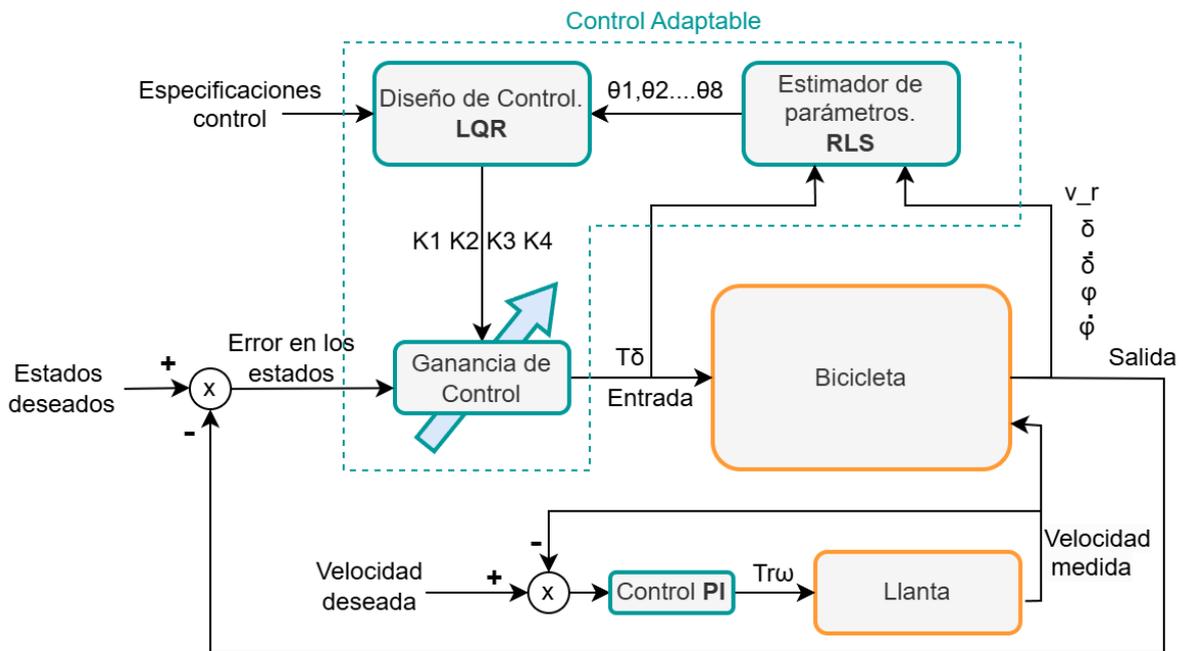


Figura 5.20: Diagrama de bloques del Control Adaptable.

Condiciones iniciales de esta prueba: Matrices $Q = 500$ y $R = 0,1$ del Control LQR, señal de entrada con forma cuadrada de 1Hz, factor de olvido $\lambda = 0,99$, ganancias $K_p = 25,67$ y $k_i = 30,45$ dentro del control PI. Velocidad inicial de $1,1 \frac{m}{s}$.

1 kg

Masa: 30,3 kg

Centro de masa: (0,47, 0, -0,65) m

Momento de inercia de masa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{ry} & B_{rz} \\ B_{yr} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zr} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,02 & 0,03 \\ 0,02 & 1,68 & 0,02 \\ 0,03 & 0,02 & 0,76 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

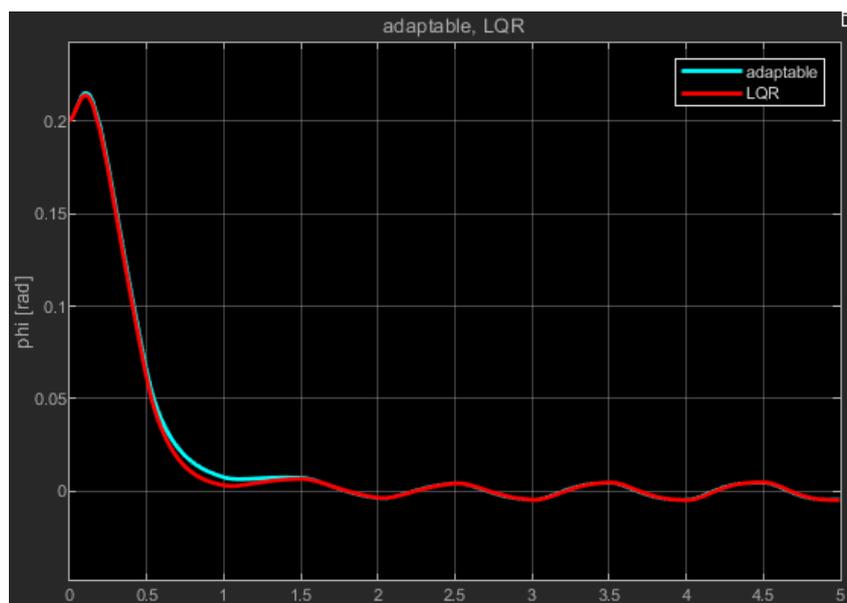


Figura 5.21: Ángulo de inclinación. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 1kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación

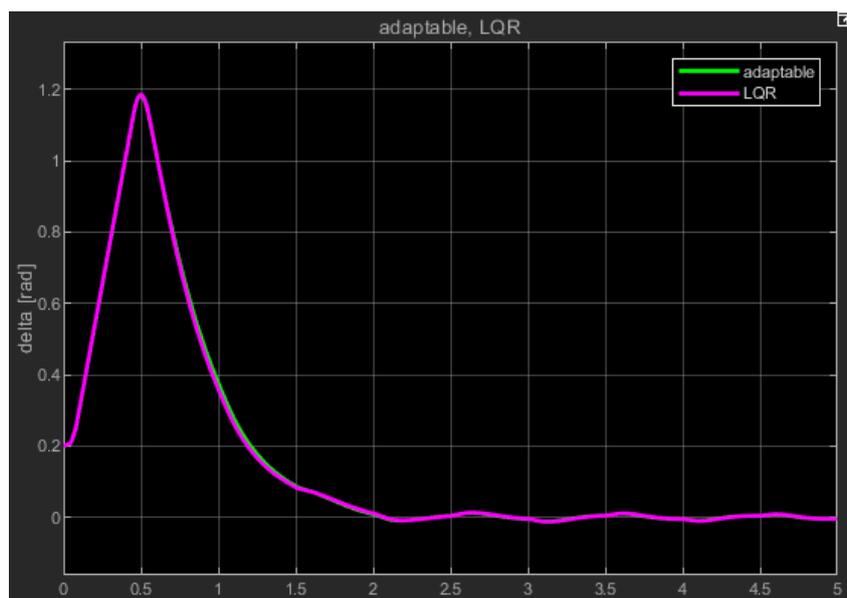


Figura 5.22: Ángulo de dirección del manubrio. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 1kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación

5 kg

Masa: 34,3 kg

Centro de masa: (0,44, 0, -0,7) m

Momento de inercia de masa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{ry} & B_{rz} \\ B_{yr} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zr} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,76 & 0,05 & 0,45 \\ 0,05 & 2,69 & 0,06 \\ 0,45 & 0,06 & 1,08 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

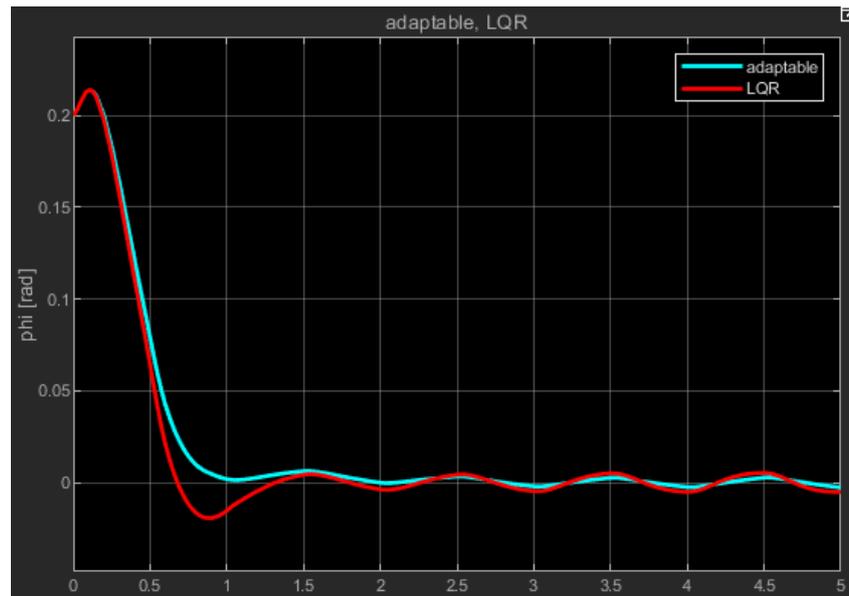


Figura 5.23: Ángulo de inclinación. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 5kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación

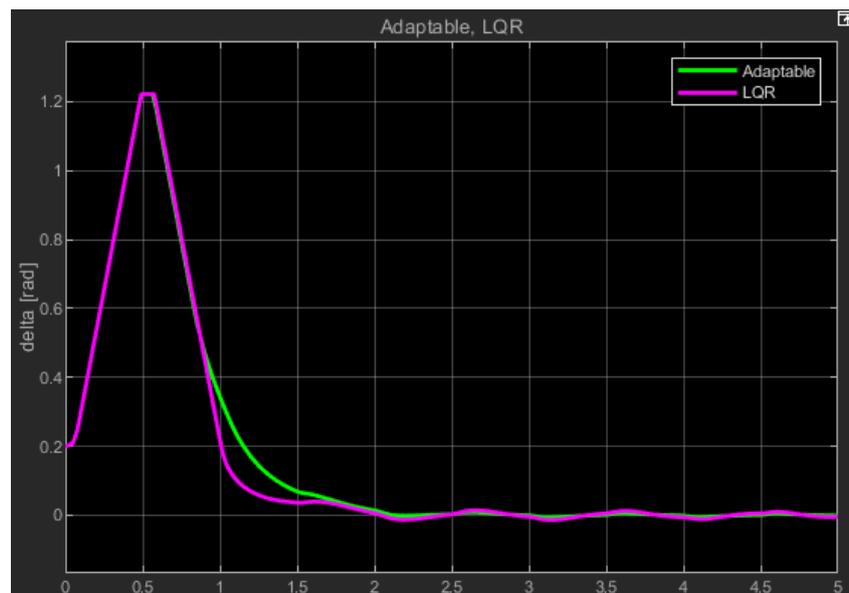


Figura 5.24: Ángulo de dirección del manubrio. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 5kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación

10 kg

Masa: 39,3 kg

Centro de masa: (0,41, -0,01, -0,75) m

Momento de inercia de masa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{ry} & B_{rz} \\ B_{yr} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zr} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,51 & 0,07 & 0,85 \\ 0,07 & 3,68 & 0,1 \\ 0,85 & 0,1 & 1,4 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

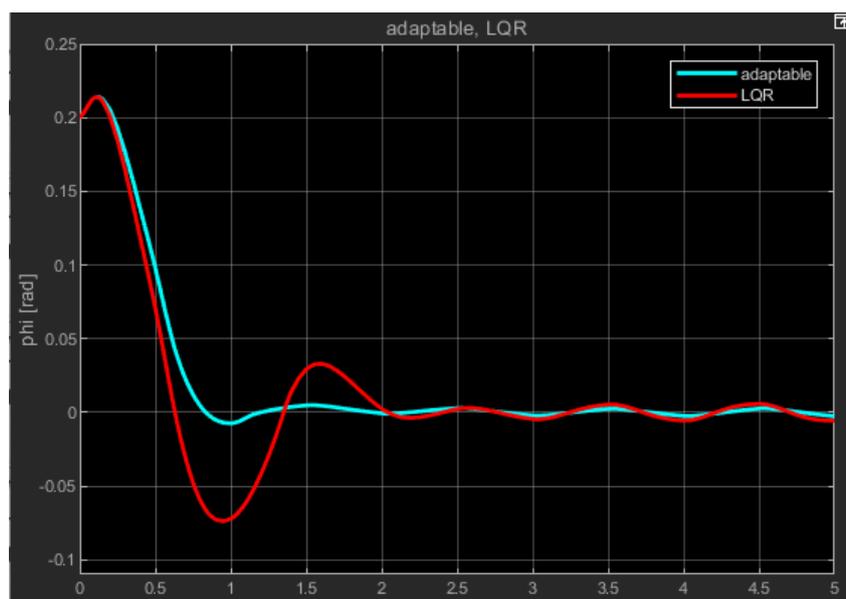


Figura 5.25: Ángulo de inclinación. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 10kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación.

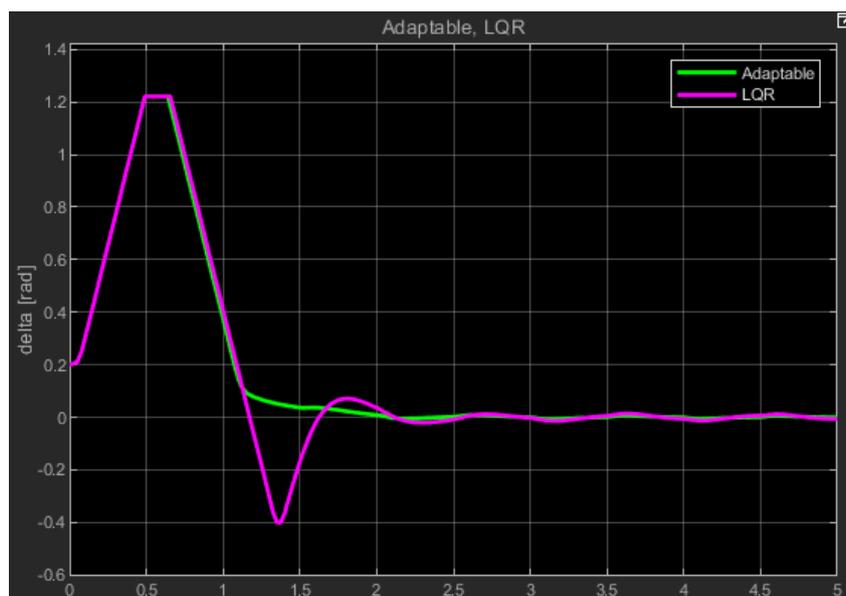


Figura 5.26: Ángulo de dirección del manubrio. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 10kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación.

15 kg

Masa: 44,3 kg

Centro de masa: (0,39, -0,01, -0,78) m

Momento de inercia de masa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{ry} & B_{rz} \\ B_{yr} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zr} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,1 & 0,09 & 1,17 \\ 0,09 & 4,47 & 0,14 \\ 1,17 & 0,14 & 1,67 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

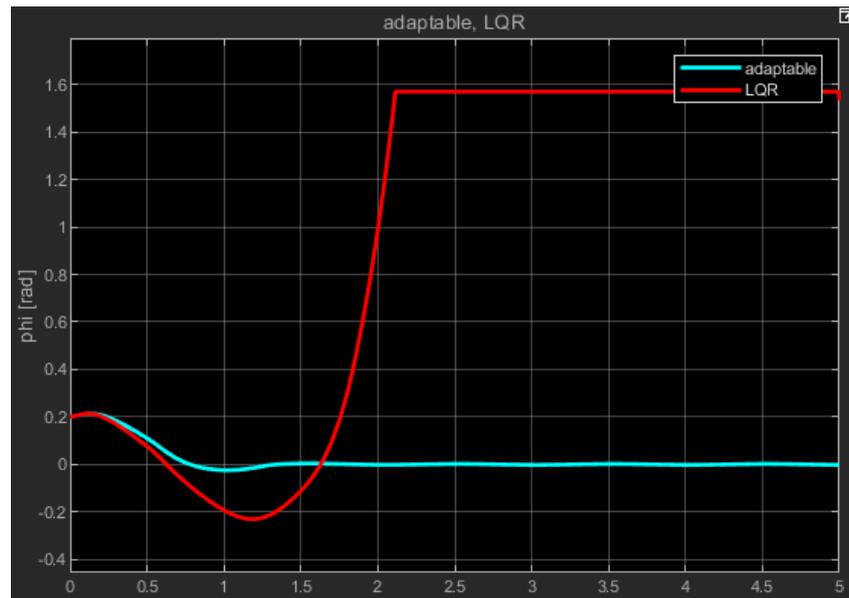


Figura 5.27: Ángulo de inclinación. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 15kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación.

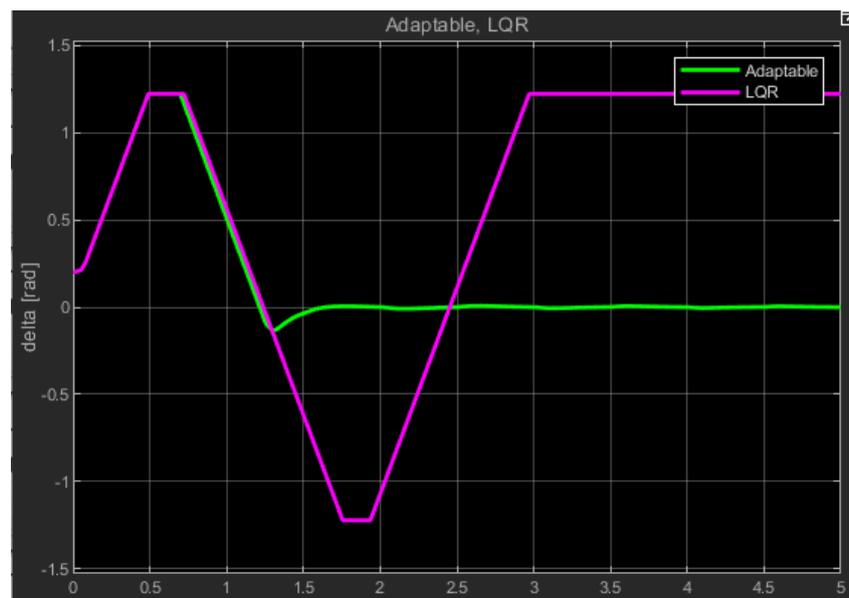


Figura 5.28: Ángulo de dirección del manubrio. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 15kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación.

20 kg

Masa: 49,3 kg

Centro de masa: (0,37, -0,01, -0,82) m

Momento de inercia de masa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{ry} & B_{rz} \\ B_{yr} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zr} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,59 & 0,11 & 1,42 \\ 0,11 & 5,11 & 0,16 \\ 1,42 & 0,16 & 1,9 \end{bmatrix} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

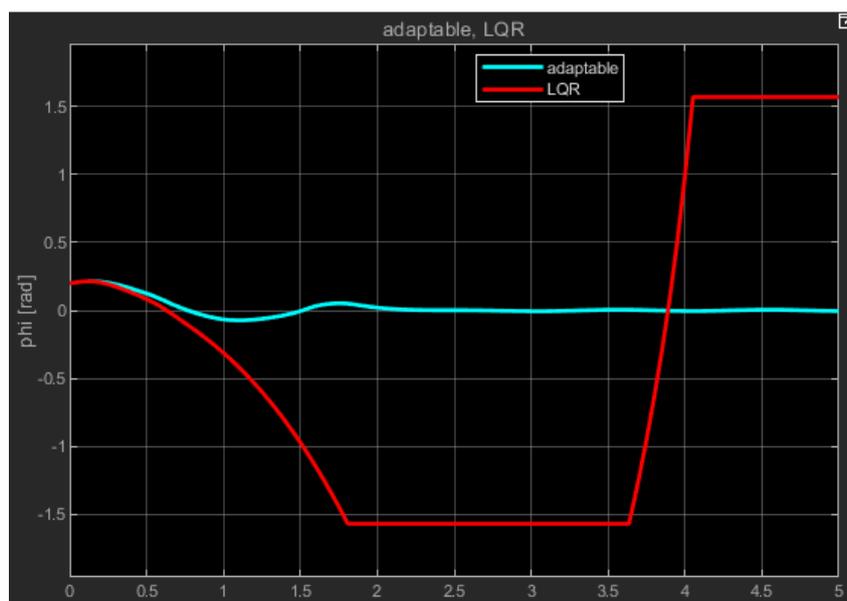


Figura 5.29: Ángulo de inclinación. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 20kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación.

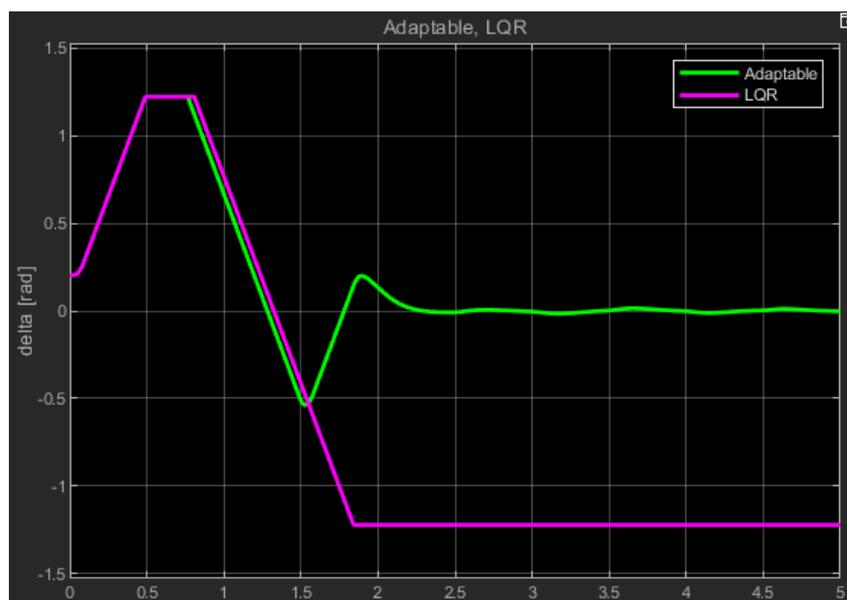


Figura 5.30: Ángulo de dirección del manubrio. Comparación de Control LQR vs Control Adaptable con una carga de 20kg sobre el asiento de la bicicleta, 5s de simulación.

Resultados comparativos de robustez: LQR vs Control Adaptable

Las pruebas de carga demostraron diferencias significativas en el desempeño de ambas estrategias de control:

- **Carga de 1 kg:**
 - Comportamiento similar en estabilización.
 - LQR muestra ventaja temporal mínima ($t \approx 1$ s en alcanzar $\pm 0,005$ rad).
- **Carga de 5 kg:**
 - LQR presenta sobreimpulso de 0.02 rad.
 - Control adaptable converge con amortiguamiento cualitativamente mayor.
- **Carga de 10 kg:**
 - Tiempo de estabilización:

$$t_{\text{LQR}} = 2,0 \text{ s} \quad (\epsilon < 0,01 \text{ rad}) \quad (5.2)$$

$$t_{\text{Adapt}} = 1,5 \text{ s} \quad (\epsilon < 0,01 \text{ rad}) \quad (5.3)$$

- **Carga de 15 kg:**
 - LQR: Pérdida completa de estabilidad a $t = 2,0$ s.
 - Control adaptable: Estabilización exitosa en 1,2 s.
- **Carga de 20 kg:**
 - Control adaptable: Sobreimpulso de 0,06 rad con estabilización en 1,5 s.
 - LQR: Caída en $t = 1,7$ s.

5.7.1. Diferencia entre ambos controladores

El control adaptable demostró capacidades superiores en:

- **Límite de carga máxima:** 20 kg vs 10 kg del LQR.
- **Tolerancia a perturbaciones:** Mantenimiento de estabilidad con 50 % más de masa añadida.
- **Eficiencia energética:** En el caso de los 10 kg se observó una reducción del 10 % en torque promedio requerido.

Estos resultados confirman que la adaptación paramétrica en línea permite compensar variaciones dinámicas no modeladas, particularmente útiles en sistemas con incertidumbres mecánicas y cargas variables. La ventaja decisiva del control adaptable se manifiesta al superar el doble del peso de la carga útil que puede llevar la misma bicicleta con dos leyes de control diferentes.

5.8. Conclusiones de las pruebas realizadas

Durante este capítulo se realizaron diferentes pruebas considerando las restricciones físicas del sistema, obteniéndose los siguientes parámetros óptimos de diseño:

- **Control LQR:** Configuración óptima de matrices de ponderación

$$Q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 0,1 \quad (5.4)$$

- **Algoritmo RLS:**

- Señal de excitación cuadrada minimiza el error de estimación ($\epsilon = 1\%$).
- Factor de olvido óptimo: $\lambda = 0,99$.

- **Control PI:** Ganancias sintonizadas

$$K_p = 30,45, \quad K_i = 25,67 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{est}} \approx 5 \text{ s} \quad (5.5)$$

Idealmente, la velocidad inicial de la llanta debe ser mayor a $1 \frac{m}{s}$ para garantizar que el control adaptable va a poder estabilizar la inclinación independientemente de las condiciones iniciales de los estados (ϕ y $\dot{\phi}$).

- **Comparativa de robustez:**

$$\text{Control Adaptable : Carga máxima 20 kg} \quad (5.6)$$

$$\text{Control LQR : Carga máxima 10 kg} \quad (5.7)$$

El control adaptable demostró superioridad en:

- Tolerancia a variaciones paramétricas ($\pm 50\%$ de incertidumbre).
- Rechazo a perturbaciones externas (cargas variables).

Estos resultados validan el diseño propuesto del control en su totalidad (Adaptable en el manubrio + PI en la llanta), consiguiendo un sistema eficiente capaz de mantener una bicicleta autónoma en pie.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

En este capítulo se sintetizan las aportaciones y hallazgos de la investigación, y se proponen nuevas líneas de trabajo que permitan ampliar y perfeccionar el sistema desarrollado.

6.1. Conclusiones

El propósito de esta tesis fue desarrollar un sistema de estabilización para una bicicleta mediante control adaptable, orientado al envío de paquetes de forma autónoma y con el objetivo de disminuir los accidentes automovilísticos relacionados con repartidores de última milla. A través del análisis, diseño y simulación, se lograron los siguientes hallazgos:

Investigación de modelo matemático

Se llevó a cabo un estudio detallado de las investigaciones previas relacionadas con los fenómenos dinámicos que actúan sobre la bicicleta; desde los modelos de Carvallo y Whipple en 1899 hasta los estudios más recientes, con el fin de demostrar la fiabilidad de dichos modelos.

Selección de actuadores para garantizar estabilidad

Uno de los desafíos más importantes fue la selección de motores adecuados para la estabilidad de la bicicleta. A partir de simulaciones y pruebas de torque, se logró determinar lo siguiente:

Manubrio: A partir de las simulaciones realizadas en este trabajo, se determinó que un motor de 100 W es suficiente para aplicar una ley de control adaptable. Para lograr un balance óptimo entre velocidad y fuerza, trabajé con una relación de engranajes que proporcionó 16 Nm de torque y una velocidad de 6.4 rad/s. En la mayoría de los artículos analizados, los investigadores presentan datos sobre el torque necesario; sin embargo, son pocos los que detallan la potencia que requiere el motor, lo que resalta la importancia de este análisis en la selección adecuada del actuador.

Llanta trasera: Al igual que en el caso anterior, mediante simulaciones del control PI, se logró seleccionar una caja reductora comercial capaz de proporcionar 30 Nm de torque, suficientes para mover la bicicleta. Con esta configuración, utilizando un motor de 1000 W, se alcanzó una velocidad de 30 km/h, asegurando un rendimiento óptimo del sistema.

Evaluación del impacto de rediseños iterativos

En este trabajo se presentó el capítulo de diseño y, posteriormente, la sección de pruebas; sin embargo, es necesario aclarar que este proceso no siguió un orden cronológicamente consecutivo. Después de las simulaciones, se volvió a rediseñar el sistema; por lo tanto, estas pruebas de torque también influyeron en la elección de cajas reductoras para garantizar el correcto funcionamiento del sistema. El trabajo presentado muestra los mejores rendimientos posibles.

Comparación y validación del control adaptable frente al LQR

Se realizó un análisis comparativo entre el control adaptable y el control LQR en escenarios con distintas cargas útiles. Los resultados mostraron que:

- **El control adaptable tolera cambios de masa hasta 20 kg**, mientras que el LQR solo mantiene estabilidad hasta 10 kg.
- **El control adaptable reduce el esfuerzo de control en un 10 %**, optimizando la eficiencia energética.
- **El LQR es adecuado solo en condiciones estáticas**, mientras que el control adaptable permite operar con incertidumbre en los parámetros dinámicos.

6.2. Trabajos Futuros

Aunque los resultados obtenidos son alentadores, la investigación abre diversas oportunidades para continuar avanzando en el campo:

- **Validación en condiciones reales de operación:** Realizar pruebas experimentales con la bicicleta físicamente para analizar el comportamiento de la ley de control ante perturbaciones no modeladas en la simulación.
- **Robustez de algoritmos de control:** Exploración del control de modelo predictivo en conjunto con el algoritmo propuesto en este trabajo de estimación de parámetros. Esta propuesta podría estimar en línea el modelo matemático de la bicicleta al mismo tiempo que considera escenarios futuros; consiguiendo resolver un problema de seguimiento de trayectorias.
- **Integración de sistemas de percepción y navegación:** Agregar sistemas de visión mediante inteligencia artificial para detección de semáforos, personas y caminos, al igual que implementar algoritmos como A* para realizar el seguimiento de rutas y así conseguir navegar en las calles de forma autónoma.
- **Escalabilidad del prototipo:** Aumentar el presupuesto destinado al proyecto y con ello poder seleccionar motores con más potencia para la siguiente iteración; esto ayudará a poder realizar cambios en el sistema más rápido y así garantizar que ante escenarios críticos la bicicleta pueda conseguir mantener su equilibrio.

Este trabajo revela las necesidades básicas para construir una bicicleta que se autobalancee únicamente moviendo el manubrio, demostrando que un control adaptable puede

satisfacer la meta de mantener el equilibrio ante perturbaciones. No sé cómo será el mundo dentro de diez años, pero lo que he aprendido hasta ahora es que este se encuentra en constante cambio y debemos estar listos para adaptarnos a él.

Referencias

Bibliografía

- [6] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5.^a ed. Prentice Hall, 2009.
- [7] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3.^a ed. New York: Oxford University Press, 1999.
- [9] F. L. Lewis, D. Vrabie y V. L. Syrmos, *Optimal Control*, 3.^a ed. John Wiley & Sons, feb. de 2012, pág. 560, ISBN: 978-0-470-63349-6.
- [10] H. Goldstein, C. P. Poole y J. L. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd. San Francisco, CA: Addison-Wesley, 2002, cap. 5, Información tomada del capítulo 5., ISBN: 978-0201657029.
- [11] D. Herlihy, *Bicycle: The History*. New Haven, CT: Yale University Press, 2004.
- [14] D. G. Wilson y T. Schmidt, *Bicycling Science*, Fourth. Cambridge, Massachusetts ; London, England: The MIT Press, 2020, ISBN: 9780262538404.
- [15] E. Carvallo, *Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette*. Paris: Gauthier-Villars, 1899, Submitted in 1897 for the Prix Fourneyron, awarded shared second place in 1898; also published in J. École Polytech.
- [42] L. Moreno, S. Garrido y C. Balague, *Ingeniería de Control: Modelado, Análisis y Control de Sistemas Dinámicos*. Universidad Carlos III de Madrid, 2003. dirección: <https://www.researchgate.net/publication/258109379>.
- [43] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad y A. Karimi, *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications* (Communications and Control Engineering), 2.^a ed. Springer-Verlag London Limited, 2011, ISBN: 978-0-85729-663-4. DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1. dirección: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-85729-664-1>.
- [89] G. F. Franklin, J. D. Powell y M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd. Menlo Park, CA, USA: Addison Wesley Longman, 1997.

Mesografía

- [5] A. I. A. Rojas y O. S. S. Guevara, «Evaluación de la bicicleta eléctrica para entrega de documentos y paquetería liviana en la ciudad de Cuenca,» Tesis de Ingeniería en Mecánica Automotriz, Universidad del Azuay, Cuenca, Ecuador, 2017.
- [67] N. Appelman, «Dynamics and Control of a Steer-by-Wire Bicycle,» Master of Science Thesis, Department of Precision y Microsystems Engineering, Delft University of Technology, 2012.

Hemerografía

- [4] E. Alverhed, S. Hellgren, H. Isaksson, L. Olsson, H. Palmqvist y J. Flodén, «Autonomous last-mile delivery robots: a literature review,» *European Transport Research Review*, vol. 16, n.º 4, págs. 1-13, 2024. DOI: 10.1186/s12544-023-00629-7. dirección: <https://doi.org/10.1186/s12544-023-00629-7>.
- [12] K. Drais, «The Velocipede or Draisena,» *The Analectic Magazine*, págs. 518-519, ene. de 1819, p. 518: «after practice you can lift your feet off the ground». dirección: <https://books.google.com.mx/books?id=dNErJBbQbecC&dq=velocipede&pg=PA88-IA2#v=onepage&q=velocipede&f=false>.
- [13] K. Drais, «Improved velocipede,» *Mechanics Magazine*, vol. XVII, n.º 477, págs. 417-418, sep. de 1832, p. 418: explanation by Drais fine feeling of keeping your balance turn to the falling side ability to lift feet from ground skating. dirección: <https://books.google.com.mx/books?id=vw4FAAAAQAAJ&dq=velocipede%20balance&pg=PA418#v=onepage&q=velocipede%20balance&f=false>.
- [16] F. J. W. Whipple, «The stability of the motion of a bicycle,» *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 30, págs. 312-348, 1899. dirección: http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/bicycle_mechanics/Whipple.pdf.
- [17] J. Meijaard, J. Papadopoulos, A. Ruina y A. Schwab, «Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: A benchmark and review,» *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 463, págs. 1955-1982, 2007.
- [20] M. Baquero-Suárez, J. Cortés-Romero, J. Arcos-Legarda y H. Coral-Enríquez, «Estabilización Automática de una Bicicleta sin Conductor mediante el Enfoque de Control por Rechazo Activo de Perturbaciones,» *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 00, págs. 1-15, 2017, Artículo aceptado para publicación en un número futuro. dirección: <https://revista-riai.org>.
- [21] R. Sharp, «The dynamics of single track vehicles,» *Vehicle System Dynamics*, vol. 5, págs. 67-77, 1975.
- [23] R. Sharp, «The lateral dynamics of motorcycles and bicycles,» *Vehicle System Dynamics*, vol. 14, págs. 265-283, 1985.
- [24] R. Sharp, «Stability, control and steering responses of motorcycles,» *Vehicle System Dynamics*, vol. 35, n.º 4-5, págs. 291-318, 2001.
- [25] D. Limebeer y R. Sharp, «Bicycles, motorcycles, and models: Single-track vehicle modeling and control,» *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 26, n.º 5, págs. 34-61, 2006.
- [26] A. Popov, S. Rowell y J. Meijaard, «A review on motorcycle and rider modelling for steering control,» *Vehicle System Dynamics*, vol. 48, págs. 775-792, 2010.
- [27] R. Sharp, «On the stability and control of the bicycle,» *Applied Mechanics Reviews*, vol. 61, págs. 060803-1-24, 2008.
- [28] C. Chen y M. Dao, «Trajectory tracking for robotic bicycles with adaptive control,» *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, n.º 4, págs. 810-819, 2005.
- [29] C. Chen y M. Dao, «A fuzzy control approach for autonomous bicycles,» *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 14, n.º 1, págs. 85-93, 2006.

- [30] C. Chen y M. Dao, «Genetic algorithm-based control design for autonomous bicycles,» *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 11, n.º 5, págs. 669-681, 2007.
- [31] N. Ruijs y H. Pacejka, «Motorcycle robotics: control of a robotic motorcycle using steer torque control,» *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 112, págs. 32-38, 1990.
- [32] F. Andreo y M. Lino, «LPV control of a riderless bicycle using steer torque,» *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 24, págs. 81-94, 2016.
- [33] B. Michini y F. Torrez, «Towards autonomous motorcycles: Steering and stabilization,» *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, págs. 5860-5865, 2010.
- [34] T. Saguchi, K. Yoshida y M. Takahashi, «Stable Running Control of Autonomous Bicycle Robot,» *日本機械学会論文集 (C 編)*, vol. 73, n.º 731, págs. 1-12, 2007, No.06-1230.
- [35] J. Van Zytveld, «Experimental stabilization of a bicycle using tilt torque control,» *Proceedings of the ASME Annual Meeting*, págs. 45-53, 1970.
- [36] M. Yamakita y K. Yamasaki, «Nonlinear control of an autonomous bicycle with a movable mass,» *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 10, págs. 1-8, 2005.
- [37] S. Murata, «Development of a robotic bicycle using gyroscopic control,» *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, págs. 305-310, 1994.
- [40] Y. Nagai y S. Iuchi, «Multiple control methods for the stabilization and control of a robotic bicycle,» *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, págs. 524-532, 2009.
- [41] J. Kooijman, A. Schwab y J. Meijaard, «Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle,» *Multibody System Dynamics*, vol. 19, págs. 115-132, 2008. DOI: 10.1007/s11044-007-9050-x.
- [45] M. Williams, «Honda's amazing Riding Assist motorcycle won't fall over,» *CIO (13284045)*, ene. de 2017. dirección: <https://research.ebsco.com/linkprocessor/plink?id=c90af699-ae98-3bd6-a70a-2f175b90381a>.
- [47] S. Wired, «Honda's self-balancing motorcycle is perfect for noobs,» *WIRED*, ene. de 2017. dirección: <https://www.wired.com/2017/01/hondas-self-balancing-motorcycle-perfect-noobs/>.
- [52] A. Robinson, «BMW Vision Next 100 Motorcycle: Two-Wheeling in the Next 100 Years,» *Car and Driver*, 2016. dirección: <https://www.caranddriver.com/news/a15344669/bmw-vision-next-100-motorcycle-two-wheeling-in-the-next-100-years/>.
- [58] D. Schaidnagel, «BMW Motorrad presents autonomous driving BMW R 1200 GS. Outlook on the future of motorcycle safety and technology in Miramas,» *BMW Group PressClub Global*, 2018. dirección: <https://www.press.bmwgroup.com/global/article/detail/T0284901EN/...>

- [59] M. Schramm, «Autonomous, Connected and Electric Bikes by BMW Motorrad,» *BMW Group*, 2020. dirección: <https://www.bmwgroup.com/en/news/general/2020/bmw-motorrad-future.html>.
- [68] K. Tani, C. Nakagawa, A. Shintani y T. Ito, «Basic study on upright stability of a small wheel bicycle with steer-by-wire system,» *Transactions of the JSME (in Japanese)*, vol. 82, n.º 837, 2016, ステアバイワイヤ機構を用いた小径自転車の直立安定性に関する基礎検討. DOI: 10.1299/transjsme.15-00648.
- [69] C. Canudas de Wit y P. Tsiotras, «Dynamic tire friction models for vehicle traction control,» *Vehicle System Dynamics*, vol. 23, n.º 3, págs. 123-156, 1999.

Hemerografía complementaria

- [19] O. Al-Buraiki y M. B. Thabit, «Model Predictive Control Design Approach for Autonomous Bicycle Kinematics Stabilization,» en *2014 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, University of Palermo, Palermo, Italy: IEEE, jun. de 2014. dirección: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6961334>.
- [22] R. Sharp, «A Review of Motorcycle Steering Behavior and Straight Line Stability Characteristics,» en *Motorcycle Dynamics and Rider Control*, Detroit, Michigan: SAE, 1978.
- [38] P. Y. Lam, «Gyroscopic Stabilization of a Kid-Size Bicycle,» en *2011 IEEE 5th International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems (CIS)*, Presented at the 2011 IEEE 5th International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems (CIS)., 180 Ang Mo Kio Ave 8, Singapore 569830, 2011.
- [50] S. Hara, M. Tsuchiya y T. Kimura, «Robust Control of Automatic Low-Speed Driving Motorcycle ‘MOTOROiD’,» en *2021 IEEE 10th Global Conference on Consumer Electronics (GCCE)*, IEEE, 2021, ISBN: 978-1-6654-3676-2/21/\$31.00. DOI: 10.1109/GCCE53005.2021.9621913.

Fuentes digitales

- [1] INEGI, *Conociendo los servicios de mensajería y paquetería*, Comunicado de Prensa Núm. 717/21, diciembre de 2021. dirección: [7Bhttps://www.inegi.org.mx/app/biblioteca/ficha.html?upc=889463903727%7D](https://www.inegi.org.mx/app/biblioteca/ficha.html?upc=889463903727%7D).
- [2] Instituto de Información Estadística y Geográfica de Jalisco (IIEG), *Encuesta a repartidores de entrega a domicilio*, Elaborado por la Dirección de Información Estadística Económica y Financiera, Consultado el 27 de febrero de 2025, jun. de 2021. dirección: <https://iieg.gob.mx/ns/wp-content/uploads/2021/06/Encuesta-a-repartidores-20210615.pdf>.
- [3] Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), *Accidentes de tránsito terrestre en zonas urbanas y suburbanas*, Consultado el 27 de febrero de 2025, 2025. dirección: <https://www.inegi.org.mx/programas/accidentes/>.
- [39] J. Filippetti, *CES 2011: Murata Boy + Murata Girl Robots*, designboom, ene. de 2011. visitado 10 de mar. de 2025. dirección: <https://www.designboom.com/technology/ces-2011-murata-boy-murata-girl-robots/>.

- [44] G. F. Franklin, J. D. Powell y M. L. Workman, *Discrete Equivalents — Chapter 6*, PDF available as `DCDStextbook_Discretizacion_cap6.pdf`, See Chapter 6 in [89] for details on discrete equivalents., 1997.
- [46] L. Honda Motor Co., *Honda Riding Assist*, <https://youtu.be/VH60-R8M0Ko>, Imagen capturada del video, 2024. visitado 13 de sep. de 2024.
- [48] L. Honda Motor Co., *Honda Riding Assist*, <https://youtu.be/hJPDfpyBtDQ>, Imagen capturada del video, 2024. visitado 13 de sep. de 2024.
- [49] L. Yamaha Motor Co., *Yamaha Motobot*, <https://global.yamaha-motor.com/...>, Accedido el 13 de septiembre de 2024, 2015.
- [51] L. Yamaha Motor Co., *Yamaha Motoroid*, Accedido: 2024-09-24, © Yamaha Motor Co., Ltd., 2024. dirección: <https://www.yamaha-motor.com>.
- [53] B. Group, *BMW Motorrad VISION NEXT 100: The Great Escape*, PressClub Global, Accedido: 2024-09-24. dirección: <https://www.press.bmwgroup.com/global/photo/compilation/...>
- [56] B. Group, *VISION NEXT 100: The motorcycle of the future*, 2016. dirección: <https://www.bmw-motorrad.com/en/experience/stories/brand/vision-next-100.html>.
- [57] B. M. España, *The BMW Motorrad VISION NEXT 100*, YouTube, YouTube Video, oct. de 2016. dirección: https://youtu.be/YoJ6Bn_H7_s.
- [60] B. Group, *Video 1 Autonomous riding R 1200 GS*, Accedido: 2024-09-20. dirección: <https://www.press.bmwgroup.com/global/article/detail/T0284901EN/...>
- [70] AliExpress, *Motor MY1020 1000W 48V*, <https://es.aliexpress.com/item/1005005903757207>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [71] G. Robotics, *GR-WM4 24V DC Worm Gear Motor*, <https://gimsonrobotics.co.uk/products/gr-wm4-enc-24v-dc-37rpm-worm-gear-motor-with-encoder>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [72] AliExpress, *HS2741 PWM Speed Controller*, <https://es.aliexpress.com/item/1005006639013420>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [73] DigiKey, *MCP41010 Digital Potentiometer*, <https://www.digikey.com.mx/es/products/detail/microchip-technology/MCP41010-I-P/362078>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [74] MercadoLibre, *Módulo Puente H BTS7960*, <https://www.mercadolibre.com.mx/modulo-controlador-de-puente-arduino-h-de-alta-potencia-bts7960-43a/p/MLM33643270>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [75] AliExpress, *Encoder S38 100PPR*, <https://es.aliexpress.com/item/1005005072238869>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [76] AliExpress, *Final de carrera V153-1C25*, <https://es.aliexpress.com/item/1005006114189367>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [77] MercadoLibre, *Sensor MPU6050*, https://articulo.mercadolibre.com.mx/MLM-706114064-acelerometro-giroscoPIO-mpu6050-_JM, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [78] Uelectronics, *Sensor KY-024*, <https://uelectronics.com/producto/sensor-de-campo-magnetico-ky-024/>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.

- [79] AliExpress, *Celdas Samsung INR18650-30Q*, <https://es.aliexpress.com/item/1005007953479632>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [80] MercadoLibre, *BMS 40A 6S*, https://articulo.mercadolibre.com.mx/MLM-3152378454-modulo-cargador-bms-6s-40a-con-equilibrador-bateria-18650-_JM, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [81] Mouser, *STM32 Nucleo F439ZI*, <https://www.mouser.mx/ProductDetail/STMicroelectronics/NUCLEO-F439ZI>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [82] AliExpress, *Cassette 7 velocidades*, <https://es.aliexpress.com/item/1005001841255047>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [83] MercadoLibre, *Engrane Kinlley + cadena*, https://articulo.mercadolibre.com.mx/MLM-1650658420-kit-cadenasprocket-c90-str-39dientes-15-dientes-420x1121-_JM, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [84] AliExpress, *Filamento TPU 1kg*, <https://es.aliexpress.com/item/1005006826172179>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [85] Amazon, *Filamento PETG 1kg*, <https://www.amazon.com.mx/ELEG00-Filamento-velocidad-dimensional-impresoras/dp/B0CPF7FDTG>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [86] HomeDepot, *Placa MDF 80cm*, <https://www.homedepot.com.mx/p/araucopanel-de-mdf-55-mm-x-122-x-244-m-286606-286606>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [87] MercadoLibre, *Caja reductora MY1020*, https://articulo.mercadolibre.com.mx/MLM-2723219106-reductor-de-velocidad-para-motor-nmrv40-turbo-de-engranajes-_JM, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.
- [88] B. F. Wings, *Tensor de cadena universal*, <https://bicimotosfirstwings.com/products/tensor-original-refaccion-para-bicimoto>, Consultado el 8 de marzo de 2025, 2024.

Fuentes digitales complementarias

- [61] B. eBike Systems. «Performance Line CX.» Accedido el 3 de enero de 2025. dirección: <https://www.bosch-ebike.com/es/productos/performance-line-cx>.
- [62] DJI. «Anvinox M1.» Accedido el 3 de enero de 2025. dirección: <https://www.dji.com/mx/avinox#160830>.
- [63] P. Industry. «GX Ultimate Mountain.» Accedido el 3 de enero de 2025. dirección: <https://industry.panasonic.eu/products/devices/e-bike-systems/e-bike-motor-unit/gx-ultimate-mountain>.
- [64] Specialized. «Turbo Levo SL Comp.» Accedido el 3 de enero de 2025. dirección: <https://www.specialized.com/us/en/turbo-levo-sl-comp/p/154888?color=263663-154888>.
- [65] Y. Motor. «PW-X3 Specifications.» Accedido el 3 de enero de 2025. dirección: <https://global.yamaha-motor.com/business/e-bike-systems/products/pw-x3/spec.html>.

- [66] PasionEbikes. «Milli 150V 1500W Motor Kit.» Accedido el 3 de enero de 2025. dirección: <https://www.pasionebike.com/products/passion-48v-1500w-motor-bicicleta-electric-bicycle-bike-conversion-kit-for-20-24-26-700c-28-29-rear-wheel>.