ANTONIO GARCIA ARANA
CURSO 872 I06

TEORIA DE REEMPLAZO

La teoría de reemplazo se ocupa de predecir la política de mantenimiento más económica.

En forma general se pueden considerar dos categorías o políticas de mantenimiento atendiendo principalmente a las características del equipo:

I) POLITICA DE MANTENIMIENTO DETERMINISTICO.

Equipo que se deteriora con el tiempo o se vuelve obsoleto debido a su uso o a la aparición de nuevos desarrollos técnicos. Tal es el caso de vehículos, herramientas, etc.

II) POLITICA DE MANTENIMIENTO PARA EQUIPO QUE FALLA ESTOCASTICAMENTE.

Equipo cuyo deterioramiento por servicio no es tan marcado, pero que está sujeto a una falla definitiva después de un cierto tiempo de uso. Ejemplo: focos, etc.

Existen otro tipo de unidades o equipos que no encajan en estas categorías y cuyas políticas de reemplazo se establecen en forma diferente. Ejemplo: Reemplazo de personal, etc.

Ej 1 702162

2163

I.- POLITICA DE MANTENIMIENTO DETERMINISTICO

A) CASO DISCRETO.

La medida de eficiencia que se utilizará para comparar la política de mantenimiento de diferentes alternativas es el valor presente de la secuencia de flujos futuros para cada alternativa.

Si un proyecto proporciona los siguientes flujos F_1, F_2 - ... F_n,... en los años 1, 2, ..., n,... respectivamente, y si la tasa de interés es $r \times 100\%$, el valor presente de toda la secuencia - vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1} F_n$$

Si $\alpha = \frac{1}{1+r}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} F_n$$

Otro criterio alternativo para comparar diferentes oportunidades de inversión es la tasa de retorno $i \times 100\%$, donde - i es tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{(1+i)^{n-1}} = I \qquad I = \text{Inversión}$$

donde i es la incógnita.

Problema de Reemplazo en Tiempo Discreto.-

Sea F_1, F_2, ..., F_n los flujos de dinero netos (Beneficios totales - costos) que proporciona un determinado equipo en una serie de períodos de tiempo 1, 2, 3, ..., de igual longitud. La inversión I se considera incluída en F_1.

Se trata de encontrar el número de períodos de tiempo (normalmente años) en el cual el equipo deberá ser reemplazado por un nuevo equipo similar.

Sea S_N el valor de rescate del equipo si se reemplaza en el año N.

El valor presente D_N de los flujos netos del primer ciclo de reemplazo está dado por:

$$D_N = \sum_{n=1}^{N} F_n \alpha^{n-1} + S_N \alpha^{N-1}$$

Considerando que se va a tener una cadena infinita de reemplazos a intervalos de N años, el valor presente de la cadena (V_N) vale:

$$V_N = \left(F_1 + F_2\alpha + F_3\alpha^2 + \cdots + F_N\alpha^{N-1} + S_N\alpha^{N-1}\right) + \left(F_1\alpha^N + F_2\alpha^{N+1} + \cdots + F_N\alpha^{2N-1} + S_{2N}\alpha^{2N-1}\right) + \cdots = D_N + \alpha^N D_N + \alpha^{2N} D_N + \cdots$$

$$= D_N\left(1 + \alpha^N + \alpha^{2N} + \cdots\right) = \frac{D_N}{1-\alpha^N}$$

$$V_N = \frac{D_N}{1-\alpha^N} = \left\{ \sum_{n=1}^{N} F_n\alpha^{n-1} + S_N\alpha^{N-1} \right\} \Big/ \left(1-\alpha^N\right) \quad \cdots (1)$$

$$V_N = D_N + \alpha^N V_N$$

Debido a que el reemplazo es un punto regenerador para el proceso.

Debemos escoger N en tal forma de maximizar la expresión (1).

Para el caso de que no existe valor de rescate; si las F_n's son monotónicamente decrecientes, el óptimo se encuentra cuando:

$$V_N > V_{N-1},\ V_{N+1}$$

Estas condiciones son equivalentes a:

$$V_N > V_{N+1} \Rightarrow V_N - V_{N+1} > 0$$

Pero: $$V_{N+1} = \frac{D_{N+1}}{1-\alpha^{N+1}} = \frac{D_N + F_{N+1}\alpha^N}{1-\alpha^{N+1}} = \frac{V_N(1-\alpha^N) + F_{N+1}\alpha^N}{1-\alpha^{N+1}}$$

$$V_N - V_{N+1} = V_N\left(1 - \frac{(1-\alpha^N)}{1-\alpha^{N+1}}\right) - \frac{F_{N+1}\alpha^N}{1-\alpha^{N+1}} > 0$$

$$V_N(\alpha^N - \alpha^{N+1}) - F_{N+1}\alpha^N > 0 \qquad \text{PERO } \alpha > 0 \quad \therefore \text{ DIVID.} \div \alpha^N$$

$$V_N(1-\alpha) - F_{N+1} > 0 \quad \therefore \quad \boxed{F_{N+1} < V_N(1-\alpha)} \quad \cdots (2)$$

En igual forma se llega a:

$$F_N > V_{N-1}(1-\alpha) \quad \cdots (3)$$

Trabajando con (2):

$$F_{N+1} < (1-\alpha)V_N$$

$$F_{N+1} < \frac{1-\alpha}{1-\alpha^N}\sum_{n=1}^{N} F_n \alpha^{n-1} \qquad \text{PERO} \quad \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} = \sum_{n=1}^{N}\alpha^{n-1}$$

$$\therefore \quad F_{N+1} < \frac{\sum_{n=1}^{N} F_n \alpha^{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} \alpha^{n-1}},$$ siendo el promedio de los flujos hasta el año N

En igual forma se puede trabajar con (3)

Por lo tanto, la maximización de (1) puede ser interpretada como sigue:

"No reemplazar el equipo hasta que las ganancias para el siguiente año sean menores al promedio de ganancias de los años anteriores".

Cuando se tenga que escoger entre equipo A y B, elegir aquél con mayor V_N.

Si B es preferible a A, pero A ya se encuentra en operación, ¿cuándo debería ser reemplazado A por B?

Sea V* el máximo valor presente de los flujos netos de B.

Si A tiene "s" años de uso,

$$F'_n = F_{n+s} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

De tal forma que F'_1, F'_2, ..., es la secuencia de futuros flujos de A. Supongamos que A va a ser utilizado M años más. Entonces el valor presente de la cadena infinita de reemplazos es:

$$V_M = \sum_{n=1}^{M} F'_n \alpha^{n-1} + V^* \alpha^M$$

Escoger M en tal forma que maximize V_M.

Como antes, para maximizar V_M:

$$F'_{M+1} < (1-\alpha)\, V^*$$

$$F'_M > (1-\alpha)\, V^*$$

Si en vez de trabajar con ganancias (F_i) se trabaja con - costos, por un razonamiento similar se llegaría a:

F'_s son monotónicamente crecientes.

Las condiciones para minimizar V_M serían en este - caso:

$$V_N < V_{N-1},\ V_{N+1}$$

Llegando a:

$$F_{N+1} > V_N (1-\alpha) \quad \therefore \quad F_{N+1} > \frac{\sum_{n=1}^{N} F_n \alpha^{n-1}}{\sum_{n=1}^{N} \alpha^{n-1}}$$

$$F_N < V_{N-1} (1-\alpha)$$

Criterio: "No reemplazar el equipo hasta que los costos para el - próximo año sean mayores que el costo promedio de los años anteriores".

Un fabricante ofrece una máquina a un precio de $ 5,000.00 y se estima -- que su costo de operación es de $ 800.00 para cada uno de los primeros 5 años para después incrementarse en $ 200.00 para cada año subsecuente. La tasa de interés del dinero es de 10% anual.

n	F_n	α^{n-1}	$F_n\alpha^{n-1}$	$I+\Sigma F_n\alpha^{n-1}$	$\sum_{n=1}^{N}\alpha^{n-1}$	$\frac{I+\Sigma F_n\alpha^{n-1}}{\Sigma\alpha^{n-1}}$
1	800	1.0	800	5 800	1.0000	5 800
2	800	0.9091	727	6 527	1.9091	3 419
3	800	0.8264	661	7 188	2.7355	2 628
4	800	0.7513	601	7 789	3.4868	2 234
5	800	0.6830	546	8 335	4.1698	1 999
6	1000	0.6209	621	8 956	4.7907	1 869
7	1200	0.5645	677	9 633	5.3552	1 799
8	1400	0.5132	718	10 351	5.8684	1 764
9	1600	0.4665	746	11 097	6.3349	1 752
10	1800	0.4241	763	11 860	6.7590	1 755

De Pag. 6

$$F_{N+1} > V_N(1-\alpha) = \frac{I+\Sigma F_n\alpha^{n-1}}{\Sigma\alpha^{n-1}} \qquad F_{9+1} = 1800 > 1752$$

$$F_N < V_{N-1}(1-\alpha) \qquad F_9 = 1600 < 1764$$

El período optimo de reemplazo es el 9no. año.

Reemplazo de equipo considerando un valor de rescate al final del período de reemplazo.

En este caso los flujos estarán representados por costos.

C_i = Costo de operación del equipo, el cual suponemos se eroga al final del período en estudio.

r = tasa de interés

P_i = Pérdida del equipo en el período i.

k_i = Costo acumulado en i años, considerando que el equipo se sigue utilizando.

I = Inversión (Valor de adquisición).

$$k_1 = I_* r + C_1 + P_1$$

$$k_2 = k_1 + (I - P_1)_* r + C_1 {}_* r + C_2 + P_2$$

$$\ldots$$

$$k_n = n I_* r + \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} P_i \left[1 - (n-i) r\right]$$

∴ Costo medio anual considerando reventa:

Dividiendo kn entre n:

$$\bar{K}_n = I_* r + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{n-i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_i \left[1 - (n-i) r\right]$$

B) TIEMPO CONTINUO

VALOR PRESENTE EN TIEMPO CONTINUO.

Sea: λ tasa continua de descuento

$\lambda \delta_t$ tasa de interés de una unidad en un intervalo δ_t de tiempo.

En un tiempo finito "t" existen $t/\delta t$ intervalos, - quedando: $(1 + \lambda \delta_t)^{t/\delta_t}$

equivalente a $(1 + r)^n$

Considerando $\delta t = 1/m$, cuando $\delta t \longrightarrow 0$, $m \longrightarrow \infty$ y

$(1 + \lambda \delta t)^{t/\delta t} = (1 + \lambda/m)^{mt}$

$\lim_{m \to \infty} (1 + \lambda/m)^{mt} = e^{\lambda t}$ (equivalente a $(1 + r)^n$)

$\alpha \sim e^{-\lambda}$

o	t
$e^{-\lambda t}$	1

Si f(t) son los flujos continuos netos en un período de tiempo 0-T, el valor presente valdrá:

$$\int_0^T e^{-\lambda t} f(t)\,dt$$

———— - ————

Sea $f(t)$ = Relación instantánea de beneficios netos por unidad de tiempo para equipo con edad t.

$f(t)dt$ = Beneficios netos en $(t, t+dt)$

$c(t)$ = Costo neto de reemplazo a edad t (Inversión en nuevo equipo - valor de rescate).

N = Longitud del ciclo.

K = Tiempo requerido para efectuar el reemplazo.

Considerando un ciclo que empieza con equipo nuevo; ya comprado e instalado.

El valor presente de un ciclo será ($D(N)$):

$$D(N) = \int_0^N e^{-\lambda t} f(t)dt - e^{-\lambda N} c(N) \quad \text{- - -} (i)$$

Debido a que el siguiente reemplazo es un punto de regeneración para el proceso $(0, \infty)$:

$$V(N) = D(N) + e^{-\lambda(N+K)} V(N)$$

$$V(N) = \frac{D(N)}{1 - e^{-\lambda(N+K)}} \quad \text{. . . .} (ii)$$

Sustituyendo (i) en (i i):

$$V(N) = \left[\int_0^N e^{-\lambda t} f(t)dt - e^{-\lambda N} c(N)\right] / \left[1 - e^{-\lambda(N+K)}\right]$$

Para encontrar el valor óptimo de N:

$$0 = V'(N) = \frac{d}{dN}\left[D(N) + e^{-\lambda(N+K)} V(N)\right]$$

$$0 = e^{-\lambda N} f(N) - e^{-\lambda N}\left(c'(N) - \lambda c(N)\right) + e^{-\lambda(N+K)} V'(N) - \lambda e^{-\lambda(N+K)} V(N)$$

$$f(N) - c'(N) = \lambda e^{-\lambda K} V(N) - \lambda c(N) \quad \cdots \text{iii}$$

Resolviendo iii se llega a determinar el período óptimo de reemplazo N (utilizando i y ii también)

CASO ESPECIAL: K = 0 c(t) = c f(t) = a - gt

Utilizando la ecuación iii

$$a - gN = \lambda V(N) - \lambda c$$

$$V(N) = \frac{a - gN + \lambda c}{\lambda}$$

De i: $D(N) = \int_0^N e^{-\lambda t}(a - gt)\,dt - ce^{-\lambda N}$

Integrando:

$$D(N) = \frac{a}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda N}\right) + \frac{gN}{\lambda} e^{-\lambda N} - \frac{g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda N}\right) - ce^{-\lambda N} \quad \cdots \text{IV}$$

De ii:

$$D(N) = V(N)\left(1 - e^{-\lambda N}\right) = \left(\frac{a - gN + \lambda c}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\lambda N}\right) \quad \cdots \text{V}$$

Igualando IV y V se tiene:

$$\left(\frac{a - gN + \lambda c}{\lambda}\right)\left(1 - e^{-\lambda N}\right) = \frac{a}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda N}\right) + \frac{gN}{\lambda} e^{-\lambda N} - \frac{g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda N}\right) - ce^{-\lambda N}$$

$$-\frac{gN}{\lambda} + c = -\frac{g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda N}\right)$$

$$c = -\frac{g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda N}\right) + \frac{gN}{\lambda}$$

Considerando que $\lambda N - 1/2 \ \lambda^2 N^2$ es una aproximación de $1 - e^{-\lambda N}$, se tiene:

$$c = -\frac{g}{\lambda^2}\left[\lambda N - \frac{1}{2}\lambda^2 N^2\right] + \frac{gN}{\lambda} = \frac{gN^2}{2}$$

$$\boxed{\therefore \quad N = \sqrt{\frac{2c}{g}}} \quad \text{indep. de } \lambda$$

II.- POLITICAS DE MANTENIMIENTO PARA EQUIPO QUE FALLA ESTOCASTICAMENTE.

A) CASO DISCRETO.

Unidades que fallan son reemplazadas por unidades similares. Los reemplazos se efectuan al final de intervalo en cuestión.

Notación.-

$p_j \; (j = 1, 2, 3, \ldots)$ = Probabilidad de que una unidad falle en el j^{mo} período = Probabilidad de falla

$P_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} p_i = p_{j+1} + p_{j+2} + \ldots \; (j = 0, 1, 2, \ldots)$ = Probabilidad de supervivencia = Probabilidad de que una unidad esté funcionando a edad j. =

= 1 - Probabilidad de falla de 0 a j

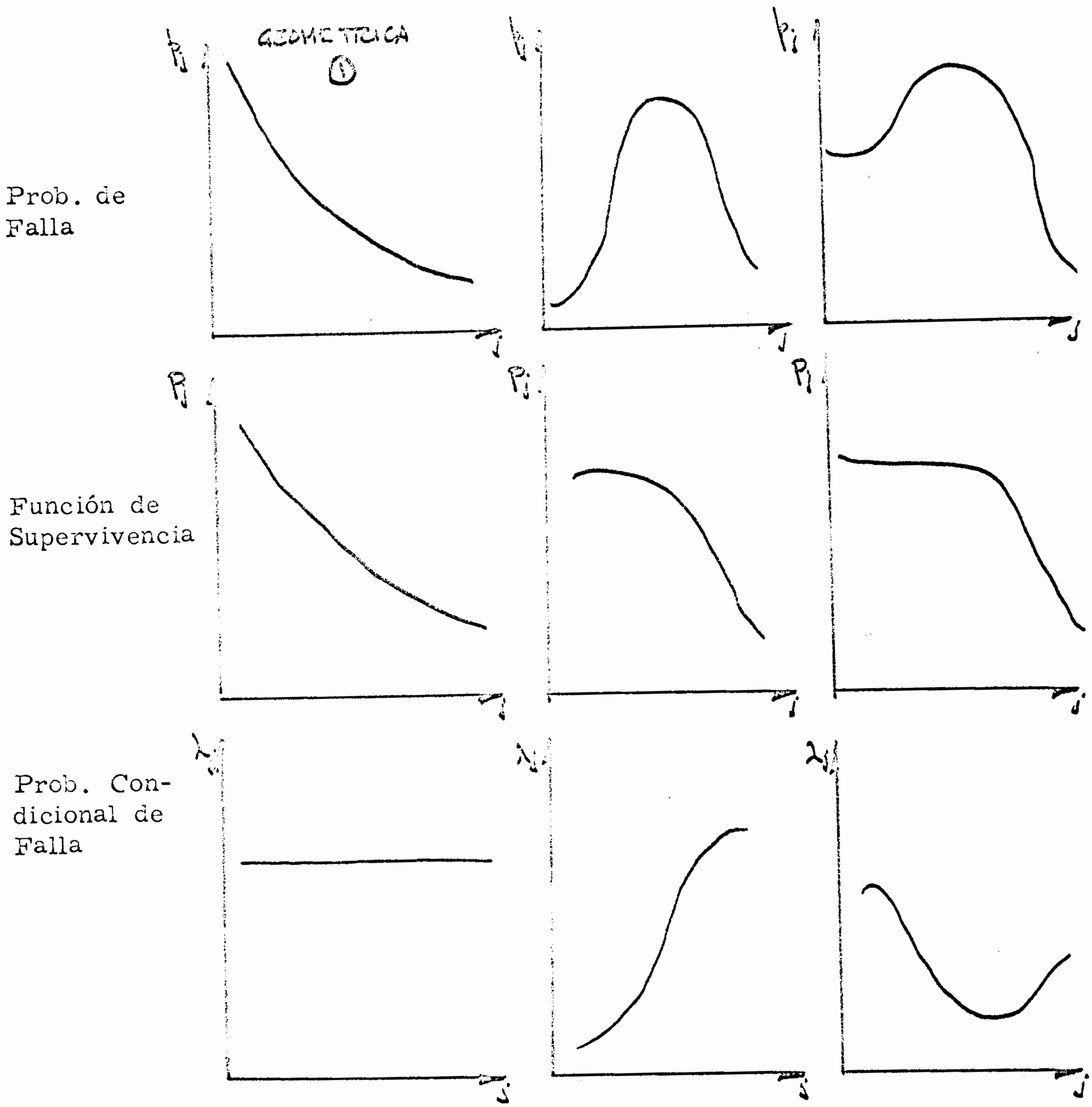
$(P_o = 1)$

Una forma útil de describir el comportamiento de unidades que fallan estocásticamente es por medio de la probabilidad condicional de falla λ_j:

$$\lambda_j = \frac{p_j}{P_{j-1}} = 1 - \frac{P_j}{P_{j-1}}$$

λ_j representa la probabilidad de que una unidad que ha sobrevivido al final del período (j-1) fallará en el período j. - Físicamente mide el riesgo de conservar un equipo que ha llegado a un tiempo j de funcionamiento.

FORMAS TIPICAS.



Una distribución de falla particular es la geometría(1) dada por:

$$p_j = \lambda^{j-1}(1-\lambda)$$

$$P_j = (1-\lambda)\sum_{i=j+1} \lambda^{i-1} = (1-\lambda)\lambda^j(1+\lambda+\lambda^2+\cdots) = \lambda^j$$

$$\lambda_j = \frac{p_j}{P_{j-1}} = \frac{\lambda^{j-1}(1-\lambda)}{\lambda^{j-1}} = (1-\lambda) \text{ , cte indep. de } j$$

Cuando todas las unidades que fallan son reemplazadas por nuevas unidades, se llega a un proceso en el cual el número de falla se desarrolla con el tiempo. Es de especial interés - predecir el número de fallas que se tendrán en cada período.

Predicción del número de fallas en cada período.

Sea μ_j el número esperado de fallas en el período j (μ_o = número total de unidades).

El número esperado de fallas en cada período valdrá:

$$\mu_1 = \mu_o p_1$$

$$\mu_2 = \mu_o p_2 + \mu_1 p_1$$

$$\mu_3 = \mu_o p_3 + \mu_1 p_2 + \mu_2 p_1$$

$$\vdots$$

En general, se puede trabajar con la función generatriz de probabilidad p (z):

$$p(z) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j$$

Con el fin de condensar las probabilidades de falla en una función polinomial.

Y con: $\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j z^j$

a partir de la cual se puede obtener toda la información acerca del número esperado de fallas en cada período. Esto es, μ (z) permite calcular el número esperado de fallas para cualquier período, en vez de ir calculando las μ's período por período hasta llegar al período deseado.

Expresando μ (z) en términos de p (z), por expansión:

$$\begin{aligned}
\mu(z) - \mu_0 &= \mu_0 + \mu_1 z^1 + \mu_2 z^2 + \cdots - \mu_0 \\
&= \mu_1 z \\
&\quad + \mu_2 z^2 \\
&\quad + \mu_3 z^3 \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&= \mu_0 p_1 z \\
&\quad + \mu_0 p_2 z^2 + \mu_1 p_1 z^2 \\
&\quad + \mu_0 p_3 z^3 + \mu_1 p_2 z^3 + \mu_2 p_1 z^3 \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&= (p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots)(\mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

$$\mu(z) - \mu_0 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j z^j\right) = p(z)\,\mu(z)$$

$$\boxed{\mu(z) = \frac{\mu_0}{1 - p(z)}} \quad . \quad \mathrm{I}$$

La cual puede ser desarrollada en potencias de p (z). μ_j es el coeficiente de z^j en este desarrollo.

I se puede desarrollar como un polinomio:

$$\mu(z) = \mu_0 \left[1 + p(z) + p^2(z) + \cdots \right]$$

proporcionando el número de fallas en el período deseado. Por ejemplo, el coeficiente de el 17^{vo} término multiplicado por μ_0 da el número de fallas en el $17^{vo.}$ período.

Método para resolver la ecuación I.-

Existen varios métodos de solución de I, aquí se avalizará solo uno de éllos.

Una vez establecida la ecuación I:

1) Se resuelve el polinomio $1-p(z)$, encontrando sus respectivas raíces.
2) Se utilizan fracciones parciales para $\dfrac{\mu_0}{1-p(z)}$, obteniendo una expresión similar a:

$$\mu(z) = \mu_0 \left\{ \frac{a_1}{1-\alpha_1 z} + \frac{a_2}{1+\alpha_2 z} + \cdots \right\}$$

Desarrollando:

$$\mu(z) = \mu_0 \left\{ a_1\left(1+\alpha_1 z + \alpha_1^2 z^2 + \cdots + \alpha_1^n z^n\right) + a_2\left(1-\alpha_2 z + \alpha_2 z^2 + \cdots (-1)^n(\alpha_2 z)^n + \cdots\right) \right.$$

Así: μ_n = coeficiente de z^n en $\mu(z)$

$$\mu_n = \mu_0 a_1 \alpha_1^n + \mu_0 a_2 \alpha_2^n + \cdots = \mu_0 \sum_{i=1}^{R} a_i \alpha_i^n$$

R = No. de términos de forma similar.

En general, los coeficientes de z^j toman la forma:

$$\boxed{\mu_j = \sum_{i=1}^{R} a_i \alpha_i^j}$$

Ecuación que proporciona el número de fallas en cada período.

Se demuestra que a largo plazo la situación se estabiliza, así $j \to \infty$, $\mu_j \to \dfrac{\mu_0}{\mu}$. Esto es, considerando un número infinito de períodos, el número promedio de fallas es igual al número total de unidades en el sistema, dividido entre la vida media de una unidad nueva (μ).

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} j\, p_j = \sum_{j=0}^{\infty} P_j$$

$$\therefore \; N = \lim_{j \to \infty} \mu_j = \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{\text{No. total de unids. en el sistema}}{\text{Edad media de falla}}$$

La distribución de edades también se estabiliza.

En el régimen permanente ($j \to \infty$), donde N unidades fallan en promedio cada período, la distribución de edad de las unidades es:

$N\ P_0$ fallan a edad 0

$N\ P_1$ fallan a edad 1

$N\ P_2$ fallan a edad 2

etc.

La suma de $N P_0 + N P_1 + N P_2 + \ldots$ es igual al número total de unidades en el sistema.

$$N (P_0 + P_1 + P_2 + \ldots) = N / \mu = \frac{\mu_o}{\mu} \mu = \mu_o$$

POLITICAS OPTIMAS DE REEMPLAZO.

La teoría analizada hasta ahora para equipo que falla estocásticamente permite estudiar las políticas óptimas de reemplazo en tiempo discreto, esto es, planear reemplazo de unidades que no han fallado.

Existen 2 circunstancias en las cuales puede resultar más conveniente reemplazar una unidad antes de que falle: 1) Reemplazo en grupo puede ser más económico que reemplazos individuales, ó 2) Falla de una unidad en servicio puede traer como consecuencia costos extras (ej.: tiempo muerto en un proceso de producción).

En la situación (1) existen dos estrategias:

a) Reemplazar únicamente después de la falla.

b) Realizar reemplazo en grupo, en intervalos de tiempo n, con reemplazo de fallas individuales que existan entre reemplazos en grupo.

En la situación (2) existe una tercera estrategia:

c) Reemplazar todas las unidades que no han fallado a una edad fija "m" (reemplazo preventivo).

A continuación se analizarán cada una de las estrategias.

Sea C_1 el costo de reemplazo individual, C_2 el costo por unidad de reemplazo en grupo y C_3 costo por unidad de reemplazo - preventivo.

POLITICA a: Costo promedio por unidad de tiempo $= C_1 \frac{\mu_o}{\mu} = C_1 N$

POLITICA b:

La siguiente política tiene por objeto la determinación del - intervalo óptimo de reemplazo en grupo que minimice el costo combinado de reemplazo en grupo y de reemplazo individual de unidades - que van fallando entre cada intervalo de reemplazo de grupo. Al final del intervalo óptimo, todas las unidades son reemplazadas sin importar su edad.

De acuerdo con varias situaciones reales, existen razones - suficientes para pensar que el reemplazo individual de unidades que - fallan puede ser más costoso que reemplazar unidades que aún están - funcionando. Por ejemplo, el costo de reemplazar una unidad que - falla envuelve el costo de la unidad en sí, costo de mano de obra, - costo por pérdida de producción debido a retraso, costo por daño a materiales y equipo debido a fuego, etc. Reemplazo en grupo puede - costar menos que reemplazo de fallas debido a economías de escala - tales como ahorro en mano de obra, descuentos en materiales por el volumen, etc. Por lo tanto, se considerará que el costo de reempla zo en grupo por unidad es menor que el costo de reemplazo por unidad que falla ($C_2 \angle C_1$).

Costo total desde el tiempo de instalación del grupo de unidades hasta el final de n períodos:

$$C_2 \mu_o + C_1 \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i$$

Donde: $C_2 \mu_o$ = Costo de reemplazo de unidades como grupo.

$C_1 \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i$ = Costo de reemplazar las unidades que fallan al final de cada uno de los n-1 períodos antes de que el grupo de unidades sea reemplazado otra vez.

∴ Costo por período de tiempo (k_n):

$$k_n = \frac{C_2 \mu_o + C_1 \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i}{n}$$

Se escogerá "n" en tal forma de minimizar k_n.

Es de hacer notar que futuros costos no se han actualizado debido a que la vida útil de las unidades que fallan estocásticamente es muy corta, siendo el efecto de descuento despreciable. En equipo con vida útil larga, la ecuación deberá incluir el factor de descuento.

Las condiciones necesarias son:

$$k_n < k_{n+1} \quad ; \quad k_n < k_{n-1}$$

Trabajando con $k_n < k_{n+1}$:

$$k_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[C_2\mu_0 + C_1 \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + C_1\mu_n\right] = \frac{1}{n+1}\left[n k_n + C_1\mu_n\right]$$

$$k_{n+1} - k_n > 0 \; ; \; \frac{1}{n+1}\left[n k_n + C_1\mu_n\right] - k_n > 0$$

$$n k_n + C_1\mu_n - n k_n - k_n > 0$$

$$\boxed{C_1 \mu_n > k_n} \qquad \text{(i)}$$

En forma similar para $k_n < k_{n-1}$:

$$\boxed{C_1 \mu_{n-1} < k_{n-1}} \qquad \text{(ii)}$$

(i) y (ii) : condiciones necesarias para un óptimo.

La ecuación (i) indica que uno debería reemplazar en grupo al final de n^{mo} período si el costo de reemplazo individual para el n^{mo} período es mayor que el costo promedio por período, considerando n períodos.

El valor mínimo de k_n deberá ser comparado con el costo de la estrategia a para determinar cual es preferible.

POLITICA c:

Reemplazar a edad m todas las unidades que no han fallado.

Se considera que $C_3 < C_1$

$$E\left[\text{Vida de una unidad}\right] = \sum_{j=1}^{m} j\, p_j + m P_m = \sum_{j=0}^{m-1} P_j$$

$$E\left[\text{Costo de un reemplazo}\right] = C_1 \sum_{j=1}^{m} p_j + C_3 \sum_{j=m+1}^{\infty} p_j = C_1 (1-P_m) + C_3 P_m$$

$$= C_1 - (C_1 - C_3) P_m$$

$$E\left[\text{Costo por unidad de tiempo}\right] = J_m = \mu_0 \left\{ \frac{C_1 - (C_1 - C_3) P_m}{\sum_{j=0}^{m-1} P_j} \right\}$$

Condiciones necesarias para un óptimo: $J_m < J_{m+1}$; $J_m < J_{m-1}$

Trabajando con $J_m < J_{m+1}$

$$J_{m+1} = \frac{\mu_0 \left[C_1 - (C_1 - C_3) P_{m+1}\right]}{\sum_{j=0}^{m} P_j} \qquad P_m - P_{m+1} = p_{m+1}$$

$$J_{m+1} - J_m = \frac{\mu_0}{\sum_{j=0}^{m} P_j} \left[C_1 - (C_1 - C_3) P_m + (C_1 - C_3) p_{m+1}\right] - J_m > 0$$

$$J_{m+1} - J_m = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} P_j} \left[J_m \left[\sum_{j=0}^{m-1} P_j - \sum_{j=0}^{m} P_j \right] + \mu_0 (C_1 - C_3) p_{m+1} \right] > 0$$

$$J_{m+1} - J_m = - J_m P_m + \mu_0 (C_1 - C_3) p_{m+1} > 0$$

$$\therefore \quad J_m < \mu_0 (C_1 - C_3) \frac{p_{m+1}}{P_m}$$

$$\boxed{J_m < \mu_0 (C_1 - C_3) \lambda_{m+1}} \qquad (iii)$$

De igual forma se puede determinar:

Para $J_m < J_{m-1}$:

$$\boxed{J_{m-1} > \mu_o (C_1 - C_3) \lambda m} \qquad (iv)$$

Pidiendo ser interpretado como el costo por unidad de tiempo por unidad (lado izquierdo de la expresión) y el incremento marginal - esperado en costo en una unidad de tiempo extra (término derecho).

El mínimo de J_m, k_n y el costo promedio de la política (a) nos da la mejor política.

Para la Distribución Geométrica.

$$p_j = (1 - \lambda) \lambda^{j-1} \qquad p_j = \lambda^j \qquad \lambda_i = 1 - \lambda$$

la primera desigualdad (iii) resulta:

$$C_1 < C_1 - C_3 \qquad \text{lo cual es imposible,}$$

por lo tanto:

Siempre se tendrá que $J_{m+1} < J_m$, resultando que para λ_j constante el reemplazo preventivo no es conveniente, siendo entonces conveniente esperar que las unidades fallen y reemplazarlas cuando - esto suceda. Lo mismo se puede decir si λ_j es decreciente.

Por lo tanto, el reemplazo preventivo sólo es útil cuando la probabilidad condicional de espera λ_j es <u>creciente</u>.

Para un valor general de $\{p_j\}$ se observa que:

$$J_m \longrightarrow \frac{\mu_0 C_1}{\mu} \quad \text{cuando} \quad m \longrightarrow \infty \text{ , dando el mismo}$$

costo de la política (a).

Una condición suficiente para que la política (c) sea superior a la política (a), para algún valor de m, es que:

$$\lim \underbrace{(J_{m+1} - J_m)}_{\Delta J_m} > 0$$

$$\Delta J_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \left[-J_m p_m + \mu_0 p_{m+1} (C_1 - C_3) \right] > 0$$

$$\Delta J_m = \left[-\frac{J_m p_m}{p_m} + \frac{\mu_0 p_{m+1}}{p_m} (C_1 - C_3) \right] p_m > 0$$

$$\lim_{m \to \infty} \Delta J_m = -\frac{\mu_0 C_1}{\mu} + \mu_0 \lambda_\infty (C_1 - C_3) > 0$$

$$\therefore \quad \lambda_\infty \mu > \frac{C_1}{C_1 - C_3}$$ Condición suficiente en la cual la política (c) es mejor que la política (a).

POLITICA DE MANTENIMIENTO PARA EQUIPO QUE FALLA ESTOCASTICAMENTE.

B) CASO CONTINUO.

Notación:

t = variable aleatoria = tiempo para falla.

$f(t)$ = función de densidad de probabilidad de falla.

$f(t)dt$ = probabilidad de falla en t, $t + dt$

La ley de probabilidad que describe cambios de un equipo, de estar en buenas condiciones a pasar a un estado de falla, puede ser caracterizado por la función de supervivencia del equipo $(R(t))$

Otra forma de caracterizar tal ley de probabilidad es la probabilidad condicional de falla, cuyo significado es el mismo que en tiempo discreto $(\lambda(t))$.

SUPERVIVENCIA:

$R(t)$ = Función de supervivencia del equipo = Prob. de que el equipo esté funcionando a una edad "t" =

$$= \int_t^{\infty} f(t)\,dt = \text{prob.}\{\text{tiempo para falla} \geq t\}$$

PROB. CONDICIONAL DE FALLA:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{d\,(\operatorname{Ln} R(t))}{dt} = \text{tasa de falla}$$

Pero: $R(t) = 1 - \int_0^t f(\theta)\,d\theta$

$$R'(t) = -f(t) \quad \therefore f(t) = -R'(t)$$

$$\boxed{\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)}}$$

Ejemplo: Distribución de Falla Exponencial.

Esta Distribución es análoga a la Distribución de falla geométrica en tiempo discreto.

$$f(t) = P_e^{-pt}$$

$$R(t) = P\int_t^{\infty} e^{-pt}\, dt = e^{-pt}$$

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{T(t)} = P = cte$$

II.B.1 EQUIPO CON UNA SOLA COMPONENTE.

PRIMER CASO:

Reemplazar cuando falla la componente

$$\text{Costo esperado por unidad de tiempo} = \frac{C}{\int_0^{\infty} t\, f(t)\, dt} = -$$

$$= \frac{\text{costo esperado}}{\text{vida esperada}}$$

SEGUNDO CASO:

Reemplazo Preventivo Periódico

Se presupone que el proceso de inversión es ilimitado; que la distribución de probabilidad de falla es conocida; que la probabi -

lidad condicional de falla $\lambda(t)$ es estrictamente creciente y que el costo de una falla en servicio excede el costo de la acción de mantenimiento preventivo.

Bajo la consideración de que el reemplazo hace que el equipo sea tan bueno como nuevo, el reemplazo sirve como un punto de regeneración a el proceso de inversión.

Para un proceso de inversión con un tiempo infinito, la política óptima es periódica en el sentido de que N, la edad a la cual el reemplazo preventivo se va a llevar a cabo, permanece constante.

Para calcular el intervalo óptimo de reemplazo N, se expresará el criterio a seguir como una función de N, y entonces minimizar esta función con respecto a N.

Sea:

C_o = Costo de reemplazo preventivo

C_{oo} = Costo de reemplazo de una falla

A = Tasa de amortización, esto es, costo por unidad de tiempo del equipo, ya sea en operación u ocioso.

k_o = Tiempo requerido para llevar a cabo el reemplazo preventivo.

k_{oo} = Tiempo requerido para reemplazar un equipo que falló.

Criterio para evaluar la política de mantenimiento:

$$\frac{1}{A} \quad \frac{\text{costo promedio en un ciclo}}{\text{tiempo esperado de operación del equipo en un ciclo}}$$

Sea $E(L)$= longitud esperada de un ciclo

$$E(L) = E(Y) + E(Z)$$

$$E(Y) = \int_0^N t\,f(t)\,dt + N\,R(N)$$

= Tiempo esperado de operación del equipo en un ciclo = edad - media de falla.

$$E(Z) = (1-R(N))K_{00} + R(N)\,K_0$$

= Tiempo esperado de reemplazo en un ciclo.

$$\therefore \quad E(L) = \int_0^N t\,f(t)\,dt + N\,R(N) + K_{00}(1-R(N)) + K_0\,R(N)$$

$$E(L) = \int_0^N R(t)\,dt + (1-R(N))K_{00} + K_0\,R(N)$$

Costo total esperado $c(N)$ en un ciclo:

$$c(N) = A \cdot E(L) + C_0 R(N) + C_{00}(1-R(N))$$

$$c(N) = A\,E(Y) + (1-R(N))(C_{00} + A K_{00}) + R(N)(C_0 + A K_0)$$

El costo por unidad de tiempo vale:

$$v(N) = \frac{1}{A}\,\frac{c(N)}{E(Y)} = \frac{E(Y) + \left(K_{00} + \frac{C_{00}}{A}\right)(1-R(N)) + \left(K_0 + \frac{C_0}{A}\right)R(N)}{E(Y)}$$

Se considera que:

$$K_o^* = \frac{C_o}{A} + K_o \quad ; \quad K_{oo}^* = \frac{C_{oo}}{A} + K_{oo}$$

$$\therefore V(N) = \frac{E(Y) + K_{oo}^*(1-R(N)) + K_o^* R(N)}{E(Y)}$$

Derivando $V(N)$ con respecto a N se obtiene la edad óptima N para reemplazo preventivo.

$$\lambda(N) \int_0^N R(t)\,dt - (1-R(N)) = \frac{K_o^*}{K_{oo}^* + K_o^*}$$

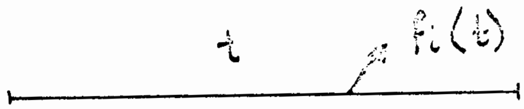
Pudiendo ser resuelto numéricamente.

La solución de N es única si $\lambda(N)$ es estrictamente creciente.

CASO ESPECIAL DE EQUIPOS CON UNA SOLA COMPONENTE.

Equipo cuya componente está sujeta a dos tipos de falla:

Considerando un sistema sujeto a falla por dos diferentes fuentes. Midiendo el tiempo desde el último sistema de falla, el tiempo "t" para la siguiente falla de tipo "i" tiene distribución $f_i(t)$ $(i = 1, 2)$. Se considerará que las distribuciones de falla son independientes.



última falla siguiente falla de tipo i

las funciones de supervivencia son:

$$R_i(t) = \int_t^{\infty} f_i(t)\,dt \qquad i = 1, 2$$

Las probabilidades condicionales de falla o tasa específica de edad de falla son:

$$\lambda_i(t) = \frac{f_i(t)}{R_i(t)} \qquad i = 1, 2$$

$g_1(t)$ = Prob. { falla de tipo 1 a edad t, siendo que no hubo falla de tipo 2 }

= $f_1(t) \times R_2(t)$ = Prob. { falla de tipo 1 a edad t } Prob. { no falla de tipo 2 a edad t }

$g_2(t)$ - $f_2(t)\ R_1(t)$

La función de densidad de falla a edad t es:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = f_1(t) R_2(t) + f_2(t) R_1(t) =$$
$$= R_1(t)\, R_2(t) \left[\lambda_1(t) + \lambda_2(t) \right]$$

Probabilidad <u>total</u> de que la falla sea de tipo i = $\pi_i = \int_0^{\infty} g_i(t)\,dt$

indep. de t.

Probabilidad condicional de que la falla, a edad t, sea de tipo $1 = \pi_1(t)$

Entonces: $\pi_1(t) = \dfrac{g_1(t)}{g_1(t) + g_2(t)} = \dfrac{f_1(t) R_2(t)}{f_1(t) R_2(t) + f_2(t) R_1(t)} =$

$$= \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_1(t) + \lambda_2(t)}$$

Para fallas exponenciales: $f_i(t) = P_i e^{-P_i t}$

$$R_i(t) = e^{-P_i t}$$

$$\lambda_i(t) = P_i$$

Así: $\dfrac{\pi_1(t)}{\pi_2(t)} = \dfrac{P_1}{P_2}$ para toda t

$$\pi_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$$

$g(t) = e^{-(P_1 - P_2)t} \; (P_1 - P_2) \rightarrow$ exponencial con parámetro $P_1 + P_2$

CRITERIO PARA LA POLITICA OPTIMA DE REEMPLAZO.

$\dfrac{\text{Costo Esperado}}{\text{Vida Esperada}} = \dfrac{C_1 \pi_1 + C_2 \pi_2}{\int_a^b t\, g(t)\, dt}$ = costo esperado de reemplazo por unidad de tiempo.

Donde C_i es el costo de reemplazar una unidad que ha tenido una falla de tipo i $(i = 1, 2)$.

II.B.2 EQUIPO CON DOS COMPONENTES.

Se tiene un sistema compuesto de dos componentes o partes que fallan estocásticamente. En este sistema, las distribuciones de falla de las componentes son independientes.

Las dos partes del equipo serán la parte 0 y la parte 1, respectivamente.

Se estudiarán los siguientes casos:

a) La tasa de falla (probabilidad condicional de falla) de las partes 0 y 1 son constantes.

En este caso la política óptima es esperar hasta que cada parte falle y entonces reemplazar, debido a que las funciones de densidad de probabilidad de falla son exponenciales.

b) Política de mantenimiento preventivo con una tasa de falla para la parte o creciente y una tasa de falla constante para la parte 1. Se considera que los costos de mantenimiento para ambas partes son menores que para cada parte tomada separadamente.

Notación.-

C_0 = Costo de reemplazo de la parte o antes de que falle.

C_{00} = Costo de reemplazo de la parte o después de la falla. $(C_0 \angle C_{00})$

K_0 = Tiempo requerido de reemplazo antes de la falla.

K_{00} = Tiempo requerido de reemplazo después de la falla.

$(K_0 < K_{00})$

Se considera que las partes fallan independientemente y que la falla de una cualquiera de las partes resulta en una falla del equipo, la cual es detectada inmediatamente.

C_1 = Costo de reemplazar la parte 1 separadamente.

C_{01} = Costo de reemplazar ambas partes simultáneamente.

K_1 = Tiempo requerido de reemplazo de la parte 1.

K_{01} = Tiempo requerido de reemplazo de ambas partes 0 y 1.

Las siguientes desigualdades representan la existencia de economías de escala en actividades de mantenimiento.

$$C_{01} < C_0 + C_1$$

$$K_{01} < K_0 + K_1$$

Es de hacer notar que la parte 1 es reemplazada hasta que falla, debido a la consideración de que dicha parte tiene una distribución condicional de falla constante, conviniendo siempre reemplazar la parte hasta después de la falla en vez de realizar un mantenimiento preventivo.

La política óptima de mantenimiento preventivo puede ser caracterizado por 2 parámetros, n y N, tal que si X es la edad de la parte 0:

i) Si $X < n$, reemplazar parte 0 únicamente cuando falle.

ii) Si $n \leq X < N$, reemplazar parte 0, si cualquiera de las partes falla.

iii) Si $X = N$, reemplazar parte 0 haya o no fallado.

En cualquiera de los tres casos, la parte 1 es reemplazada hasta que falla.

Los valores óptimos de los parámetros n y N pueden ser calculados utilizando el siguiente criterio: Costo promedio por unidad de tiempo de operación del equipo o sistema, como una función de estos parámetros, minimizando posteriormente esta función con respecto a los dos parámetros.

El reemplazo de la parte 0 es un punto de regeneración para el proceso de inversión.

El costo por unidad de tiempo en un ciclo de mantenimiento preventivo es el siguiente:

$$E[\text{costo}] = A + C_1 \, E[\text{No. de fallas tipo } 1] +$$
$$\text{en el período } 0 \leq X < n$$

Titulo

872 I 06 TEORIA DEL REEMPLAZO Y PROGRAMACION DINAMICA

1-70 PROF. M.C. ANTONIO GARCIA ARANA

Objetivo del Curso.

Los objetivos de este curso son: Determinar el campo de aplicabilidad de la Teoría del Reemplazo y la Programación Dinámica; el establecimiento de modelos teóricos aplicables a determinadas situaciones reales así como sus limitantes; solución de problemas prácticos utilizando dichos modelos.

TEORIA DE REEMPLAZO.

I) Temas que se tratarán.

- Características de los ppoblemas de reemplazo
- Política de mantenimiento determinístico:

  Caso Discreto

  Caso contínuo

  Ejemplos

- Políticas de mantenimiento para equipo que falla Esfocásticamente:

  Antecedentes: Prob. de falla, Función de supervivencia, Prob. Condicional de Falla, Número esperado de fallas en un período, etc. Estrategias.

  Estrategias: Caso Discreto.

  Caso Continuo.: Equipo con una Componente

  Equipo con dos componentes

  Equipo con muchas componentes.

Ejemplos

- Presentación de Ejemplos y Temas especiales por parte de los alumnos.

II). <u>Bibliografía</u>.

1.- Jorgenson, McCall y Radner: Optimal Replacement - Policy. Edit. North Holland.

2.- Churchman, Ackoff, Arnoff: Introduction to O.R. - Edit. J. Wiley

<u>PROGRAMACION DINAMICA</u>.

I) <u>Temas que se tratarán</u>

- Características de la Programación Dinámica.
- Casos particulares. Ejemplos
- Programación dinámica con un número infinito de etapas
- Procesos Markovianos. Ejemplo.
- Presentación de ejemplos y temas especiales, por parte de los alumnos.

II). <u>Bibliografia</u>.

1.- Bellman y Dreifus: Applied Dynamic Programming - Princeton U. Press.

2.- R. Howard : Dynamic Programming and Markov Processes. M.I.T. Press.

<u>Desarrollo del Curso y Calificación</u>

Exposición personal de una aplicación concreta o de una investigación de cada uno de los temas mencionados (40% de la calificación final).

Resolución de series de ejercicios de los temas tratados -- (20 % de la calificación final).

Un examen parcial de cada tema estudiado (40 % de la calificación final).

C_{01} pr $\{$ de falla tipo 1 para $n \leq X < N \}$ + C_0 pr $\{$ falla de parte 0 para $0 \leq X < N \}$ + C_0 pr $\{$ parte 0 no falla para $0 \leq X < N \}$, pr $\{$ parte 1 no falla para $n \leq X < N \}$

Dividiendo este costo entre el tiempo esperado de operación en un ciclo, L, se obtiene el costo por unidad de tiempo.

c) Caso especial para un equipo con dos componentes idénticos, con probabilidad condicional de falla creciente cada componente. La unidad falla hasta que las dos componentes han fallado.

Notación.-

C_A = Costo de reemplazo, considerando que el equipo está aún trabajando.

C_B = Costo de reemplazo, considerando que el equipo falló.

$(C_B > C_A)$.

Se tienen las siguientes estrategias:

i) Reemplazar hasta que el equipo falle.

$$\text{Costo por unidad de tiempo} = \frac{C}{\int_0^T t\, f(t)\, dt}$$

C = Costo de reemplazar una componente una vez que ha fallado.

T = Vida útil de una componente.

ii) Una forma de reemplazo preventivo en el cual la componente - es reemplazada por una nueva unidad, esté trabajando o no, a intervalos regulares de tiempo X.

E [costo por reemplazo] = A x pr{ el equipo no ha fallado para - una edad menor a X} + B x pr{ el equipo falla antes de X}

Costo esperado por unidad de tiempo: $\dfrac{E\,[\text{costo}]}{X}$

II.B.3 EQUIPO COMPUESTO DE M + 1 PARTES QUE FALLAN ESTOCASTICAMENTE.

La política de mantenimiento preventivo analizado para el caso de un equipo con dos componentes se puede extender para - equipo compuesto de M + 1 partes que fallan estocásticamente.

Se considerará una parte 0 con probabilidad de falla cre - ciente y M partes con probabilidad de falla constante.

La política, en este caso, puede ser caracterizada por un parámetro N y M parámetros, ni (i = 1, . . . , M) cada uno con un significado similar al caso II.B.2.b.

La política óptima de mantenimiento para una parte depende del estado de las otras partes del sistema.

Así:

Tasa de falla: $\lambda_i (t) = \lambda_i \qquad i = 1, 2, \ldots, M$

$$\lambda_0 (t) > 0$$

Debido a que las partes 1, 2, ..., M fallan exponencialmente, nunca son reemplazadas antes de que fallen.

Notación.-

$C_i\ K_i$ = Costo y tiempo de reemplazo de la parte i (i = 1, ... M)

C_0, K_0, C_{00}, K_{00} = Costo y tiempo de reemplazar la parte 0 antes y después de la falla, respectivamente.

C_{0i}, K_{0i} = Costo y tiempo para reemplazar las partes 0 e i conjuntamente.

Si se tienen economías de escala del siguiente tipo:

$$C_{0i} < C_0 + C_i$$

$$K_{0i} < K_0 + K_i$$

Entonces una política oportunista de reemplazar preventivamente la parte 0, cuando alguna de las partes i falla, debe ser -

considerada.

Tal política está caracterizada por n_i (i = 1, ..., M) y N parámetros, usados como sigue: (X = edad de la parte 0).

(1) Si parte 0 falla, reemplazarla.

(2) Si una parte i falla cuando la edad X de la parte 0 está en el intervalo $0 \leq X < n_i$, reemplazar la parte i únicamente (i = 1, 2, ... M).

(3) Si una parte i falla cuando la edad X de la parte 0 - está en el intervalo $n_i \leq X < N$, reemplazar ambas partes.

(4) Si la parte 0 sobrevive a una edad X = N, reemplazar la parte 0.

Es posible obtener una expresión del costo por unidad de - tiempo, en función de la cual es posible determinar los parámetros n_i (i =, ..., M) y N, minimizando dicha expresión.